

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Alex Rios Costa

Uma Revisão da Gravitação Bidimensional  
do Ponto de Vista da Gravitação  
Quântica de Loops

VÍTORIA  
2007

ALEX RIOS COSTA

UMA REVISÃO DA GRAVITAÇÃO BIDIMENSIONAL  
DO PONTO DE VISTA DA GRAVITAÇÃO  
QUÂNTICA DE LOOPS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. C. P. Constantinidis

VITÓRIA  
2007

UMA REVISÃO DA GRAVITAÇÃO BIDIMENSIONAL  
DO PONTO DE VISTA DA GRAVITAÇÃO  
QUÂNTICA DE LOOPS

ALEX RIOS COSTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 28 de Junho de 2007

COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Clisthenis P. Constantinidis  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientador

---

Prof. Dr. Olivier Piguet  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Coorientador

---

Prof. Dr. Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro  
Universidade Federal do Pampa

---

Prof. Dr. Flávio Gimenez Alvarenga  
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Coeli Rios Costa, pois seu amor, seu companherismo e sua dedicação me foram fundamentais.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por nunca me desamparar nos momentos mais difíceis da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Clisthenis P. Constantinidis pela orientação, amizade e confiança que depositou em mim durante estes dois anos.

Ao Prof. Dr. Olivier Piguet pela sua amizade, carinho e paciência em me ajudar neste trabalho.

Aos Profs. Drs. Van Sérgio e Danilo Alves, por me incentivarem a fazer uma pós-graduação.

Ao CNPQ, pelos dois anos de bolsa, pois sem isso eu não poderia me dedicar exclusivamente a este trabalho.

Aos meus amigos da sala do mestrado, pelo companherismo e convivência agradável no dia-a-dia de estudo. Em especial aos amigos José André Lourenço e Luis Ivan Morales

Um agradecimento especial aos amigos Déborah e Gastão, por terem me estendido a mão quando eu mais precisei e pelo carinho que ampararam toda minha família.

A minha filha Gabriela Rios e a minha esposa Sabrina Rios, que são os grandes amores da minha vida.

"Vencer-se a si mesmo, controlar suas paixões, devolver a seu coração a honestidade que ele herdou da Natureza, eis a virtude perfeita. Que nossos olhos, nossos ouvidos, vossa língua, tudo em vós seja mantido nas regras da honestidade".

Confúcio

# Resumo

Fazemos um estudo introdutório do formalismo da Gravitação Quântica de Loops. Uma breve revisão da formulação canônica da Relatividade Geral é realizada para motivar a introdução do formalismo de loops. Mostramos como ele pode ser adaptado à gravitação bidimensional, mais especificamente ao modelo de Jackiw-Teitelboim, para o qual fazemos uma análise completa da formulação canônica, utilizando o formalismo de primeira ordem. Finalmente comentamos como a quantização poderia ser implementada neste modelo.

# Abstract

We make an introductory study of the formalism of Loop Quantum Gravity. A brief review of the cononical formulation of General Relativity is performed, in order to motivate the introduction of the loop formalism. We show how it can be adapted to bidimensional gravity, more specifically to the Jackiw-Teitelboim model, for which we make a complete analisis of the canonical formulation using the first order formalism. We finally comment on how the quantization procedure could be implemented in this model.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Formulação Canônica da Relatividade Geral</b>	<b>15</b>
2.1	Ação de Einstein-Hilbert . . . . .	16
2.2	Ação de Palatini . . . . .	16
2.3	O Formalismo Canônico . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Gravitação Bidimensional</b>	<b>29</b>
3.1	Modelo de Jackiw-Teitelboim para Gravitação Bidimensional . . . . .	30
3.2	Teoria de Gauge Baseada no Grupo de de Sitter . . . . .	31
3.3	Gravitação no formalismo BF . . . . .	33
3.4	Simetrias . . . . .	36
3.5	Ação BF e Ação de Jackiw-Teitelboim . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Sistemas Hamiltonianos Vinculados</b>	<b>41</b>
4.1	Lagrangiana e Vínculos Primários . . . . .	42
4.2	Formalismo Hamiltoniano e Vínculos Secundários . . . . .	43
4.3	Vínculos de Primeira Classe e de Segunda Classe . . . . .	44
4.4	Fixação Parcial de Gauge: O Gauge Temporal . . . . .	46
4.5	Álgebra Clássica dos Vínculos . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Invariância da Teoria Sob os Difeomorfismos</b>	<b>54</b>
5.1	Difeomorfismo . . . . .	55
5.2	Análise da Hamiltoniana Final . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Preparação para Quantização de "Loops"</b>	<b>58</b>
6.1	Álgebra dos Campos e dos Vínculos . . . . .	59
6.2	Espaço de Hilbert Cinemático $\mathcal{K}$ . . . . .	61
6.3	Técnicas de Loop . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>64</b>

<b>A</b>	<b>Formalismo de Primeira Ordem</b>	<b>66</b>
A.1	Conexão, Torção e Curvatura . . . . .	68
<b>B</b>	<b>Alguns Aspectos da Formulação Lagrangiana e Hamiltoniana</b>	<b>71</b>
B.1	Momentos Canônicos e Formalismo Hamiltoniano . . . . .	72
B.2	Parênteses de Poisson . . . . .	74
B.3	Quantização Canônica . . . . .	75
<b>C</b>	<b>Método de Dirac para Quantização de Sistemas Vínculados</b>	<b>76</b>
C.1	Sistemas Vínculados . . . . .	78
C.2	Vínculos de Primeira e Segunda Classe . . . . .	80
C.3	Parênteses de Dirac . . . . .	80
	<b>Referências</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde o desenvolvimento inicial da relatividade geral e da mecânica quântica no início do século XX, o grande desafio tem sido sintetizar esses dois temas da física numa teoria unificada consistente. Uma análise dimensional simples revela que a partir do comprimento de Planck  $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-35} m$  efeitos quânticos devem ser levados em conta na teoria gravitacional [1].

Várias abordagens têm sido consideradas nessa direção, principalmente a teoria de cordas e a gravitação de loops (LQG), sem contar as linhas de pesquisa mais tradicionais, como as teorias perturbativas de gravitação quântica, teoria de campos em espaços curvos, modelos de triangulações dinâmicas e geometria não comutativa.

A teoria de cordas trata a relatividade geral em pé de igualdade com as demais interações, sendo construída para ser uma teoria unificada de todas elas - eletromagnética, forte, fraca e gravitacional. A (super) gravidade clássica surge perturbativamente no regime de baixas energias da teoria de super cordas. A formulação não perturbativa da teoria de cordas teve um grande avanço a partir das descobertas das dualidades, D-branas, mas mesmo a partir das descobertas mais recentes como a teoria M e a correspondência AdS/CFT, uma formulação não perturbativa completa ainda está longe de ser obtida.

Mas existe ainda um ponto fundamental na teoria de cordas que é alvo de críticas por parte da comunidade dos relativistas. Trata-se do fato de não existir uma formulação da teoria independente do background, ou seja, invariante sob difeomorfismos ativos. Esta é uma característica essencial da relatividade geral. A teoria de cordas é formulada num background fixo, não

dinâmico. Numa formulação independente de background, nenhuma métrica clássica deveria aparecer nem na definição do espaço de estados, nem nas variáveis dinâmicas da teoria e, além disso, ela deveria aparecer como um operador num espaço de estados, em que eles próprios fossem a superposição de diferentes backgrounds.

A LQG é uma abordagem independente de background da gravitação quântica. Sendo desde o início construída como uma teoria canônica não perturbativa e independente de background. Tendo como base a relatividade geral e a mecânica quântica, ou seja, as duas teorias mais bem estabelecidas até agora tanto em nível conceitual como experimental. Portanto, não é necessário nenhum novo pressuposto teórico, como supersimetria e dimensões extras, e esta abordagem apenas reformula a relatividade geral como uma teoria dinâmica das conexões. Com esta escolha de variáveis a teoria passa a ser tratada de forma análoga as teorias de gauge usuais, no sentido de que o espaço de fase cinemático se assemelha ao da teoria de Yang-Mills  $SU(2)$ .

O ingrediente principal da LQG é a escolha das holonomias das conexões como os graus de liberdade fundamentais da gravitação quântica. Desta forma, diferentemente da teoria de cordas, a LQG não pretende ser uma teoria de unificação das demais interações fundamentais, mas sim uma teoria que possa descrever com sucesso os fenômenos gravitacionais no nível da escala de Planck. Um dos pontos ainda em aberto dessa abordagem é o fato de não se ter conseguido até o momento estabelecer uma conexão com os fenômenos a baixas energias, porém já existem alguns problemas bem entendidos como a descrição quântica de buracos negros e horizontes cosmológicos que reproduzem os resultados de Bekenstein-Hawking na relação entre área e entropia [2,3,4,5].

Mais recentemente tem havido um grande avanço na chamada loop quantum cosmology (LQC) [6], mostrando que as singularidades cosmológicas podem ser eliminadas, e também prevendo efeitos observáveis no espectro CMB [7]. Existem também alguns resultados que mostram como a supersimetria e as dimensões extras podem ser incorporadas no formalismo de LQG [8].

Outros questionamentos têm surgido a respeito dessa abordagem, por exemplo, o fato de como se obter uma formulação não perturbativa consistente sendo que quando se quantiza a gravitação por métodos perturbativos obtém-se uma teoria não renormalizável. A resposta para isso está no fato de que a prova da não renormalizabilidade é baseada na disponibilidade de um espaço-tempo de Minkowski, o que não é correto num regime de espaço-tempo quântico. Um dos

resultados mais expressivos obtidos em LQG até agora foi o cálculo dos *quanta* de geometria, isto é, o espectro dos análogos quânticos dos funcionais de área e volume, mostrando-se ainda que eles são discretos. Sob este aspecto existe uma convergência de resultados advindos de outras abordagens, como a teoria de cordas e geometria não comutativa. Desta forma a indicação da estrutura discreta do espaço-tempo introduz um cut-off natural na gravitação quântica, que deve atuar também como um regulador das divergências ultravioletas que atrapalham o modelo padrão. Assim, as técnicas perturbativas usuais de teoria quântica de campos não podem ser automaticamente utilizadas em escalas onde os efeitos quânticos gravitacionais são levados em conta.

Como discutiremos nesta dissertação, a relatividade geral é uma teoria vinculada e os vínculos são equivalentes as equações de movimento. A transição para a teoria quântica se dá pela quantização canônica, utilizando-se o conhecido método de Dirac. Na abordagem de loops a teoria clássica não vinculada é quantizada, necessitando que os vínculos quânticos sejam implementados mais tarde como operadores. Apesar de muitos resultados serem obtidos nos últimos anos, um completo entendimento de todos os vínculos, incluindo o vínculo Hamiltoniano, que é o gerador "da evolução temporal", isto é, a parte dinâmica da teoria, é ainda difícil de ser alcançada. Isto de certa forma não nos surpreende, desde que nós não esperamos obter uma solução completa de uma teoria altamente não trivial e não linear. Para tratar desta questão, métodos covariantes para compreender a dinâmica foram desenvolvidos nos últimos anos. Este desenvolvimento conduziu aos modelos então chamados de "spin foam", em que as redes de spin são levemente "propagadas no tempo", conduzindo a uma formulação de espaço-tempo para LQG. Esta formulação oferece uma compreensão mais intuitiva do espaço-tempo quântico e é muito mais próxima dos métodos da física de partículas.

A dissertação está organizada da seguinte maneira: No capítulo 1 faremos uma breve revisão da gravitação 4-dimensional, onde veremos que a relatividade geral pode ser representada como uma teoria dinâmica de conexão. A partir da seção 1.4 introduziremos o formalismo ADM diretamente do formalismo de tetradas ("vierbeins"), desta forma toda a análise canônica da teoria poderá ser construída. Feito isto, estaremos prontos para procedermos às técnicas de quantização de "loops", onde as holonomias são os argumentos dos funcionais de onda.

O capítulo 2 trata especificamente da gravitação bidimensional formulada em termos das variáveis de Einstein-Cartan (formalismo de primeira ordem). Nesta dimensão a ação usual de Einstein-Hilbert é uma constante que não nos leva às equações de movimento. Logo será

mostrado que a ação que descreve a gravitação bidimensional é a ação de Jackiw-Teitelboim, que como veremos na seção 2.5, poderá ser obtida a partir de uma teoria BF. Ainda neste capítulo verificaremos a simetria da ação, que nos dá como resultado importante o fato da gravitação ser formulada como uma teoria de gauge, onde a invariância de difeomorfismo está incluída na própria invariância de gauge do grupo de de Sitter.

No capítulo 3 teremos toda a análise de vínculos sendo construída, verificando a existência de vínculos de primeira classe como os geradores das transformações de gauge da teoria. A presença desses vínculos e as liberdades de gauge associadas indicam que existem mais de um conjunto de variáveis canônicas para um mesmo estado físico. Logo, na seção 3.5 será feita uma fixação parcial de gauge, seguindo os passos do que foi feito no *capítulo 1* para gravitação 4-dimensional, na qual os vínculos de segunda classe que surgem desta fixação são eliminados a partir da utilização dos parênteses de Dirac.

Feito isto, após toda álgebra clássica ter se mostrado consistente, é hora de determinarmos a covariância geral da teoria. É o que será feito no capítulo 4, ou seja, mostra-se que o vínculo  $\mathcal{G}'_1$  é o gerador da simetria residual da teoria, e que  $\mathcal{G}'_0$  gera os difeomorfismos temporais a menos de difeomorfismos espaciais e equações de movimento, confirmando desta forma a invariância da teoria.

Por fim, para o capítulo 5, introduziremos a preparação da quantização de "loop". Onde iremos verificar que a álgebra quântica dos vínculos, através de um ordenamento específico, se mostra análoga à álgebra clássica sem anomalias. O trabalho neste momento é então finalizado, restando-nos futuramente a construção de um espaço de Hilbert Cinemático, onde um produto interno será definido.

## Capítulo 2

# Formulação Canônica da Relatividade Geral

A relatividade geral é geralmente apresentada como uma teoria métrica; no entanto podemos representá-la como uma teoria dinâmica de conexão. Esta reformulação faz com que a relatividade geral seja colocada num formalismo análogo ao das teorias de gauge, que descreve as outras três forças fundamentais da natureza, de forma que, no formalismo Hamiltoniano, todas as teorias partem da mesma cinemática. A diferença está claramente na dinâmica, enquanto a dinâmica das teorias de gauge para outras interações dependem de um "background", a relatividade geral não depende [9].

Pretendemos nesta dissertação, aplicar as técnicas do formalismo Hamiltoniano utilizado em teorias de gauge à gravitação do ponto de vista da "Loop Quantum Gravity" (LQG). Nossa abordagem à teoria bidimensional seguirá os passos do que foi feito em (3+1) dimensões. Esta abordagem canônica também conhecida como geometrodinâmica não é nova [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16], mas a partir do trabalho de Ashtekar [17], onde novas variáveis canônicas foram descobertas, foi que se gerou grande expectativa de solução de problemas não resolvidos da gravitação quântica.

## 2.1 Ação de Einstein-Hilbert

A teoria da relatividade geral descreve a dinâmica da geometria. A ação correspondente em termos das variáveis métricas é dada pela ação de Einstein-Hilbert [18]

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{R} , \quad (2.1)$$

onde  $k = \frac{8\pi G}{c^3}$ ,  $G$  é a constante gravitacional,  $g$  o determinante da métrica  $g_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{R}$  o escalar de curvatura. Consideraremos a partir de agora  $c = 1$ .

O fator  $\frac{1}{2k}$  é escolhido para reproduzir o limite Newtoniano na presença de matéria.  $\mathcal{M}$  é uma variedade espaço-temporal 4-dimensional, assumida na forma topológica  $M_3 \times \mathfrak{R}$  e equipada com uma orientação fixa.  $M_3$  é uma variedade 3-dimensional, e  $\mathfrak{R}$  indica a parte temporal. A ação de Einstein-Hilbert é claramente um escalar sobre transformações gerais de coordenadas. As equações de Einstein podem ser obtidas através do princípio da ação  $\delta S_{EH} = 0$ , onde teremos

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} = 0 , \quad (2.2)$$

sendo  $G^{\mu\nu}$  o tensor de Einstein para o campo gravitacional livre, sem matéria.

## 2.2 Ação de Palatini

Na estrutura de Palatini as variáveis gravitacionais básicas constituem o par  $(e^I{}_\mu, \omega^I{}_{J\nu})$ , campos 1-forma, tomadas como variáveis independentes (formalismo de primeira ordem), sobre a variedade  $\mathcal{M}$ . A ação de Palatini será:

$$S_P = \frac{\sigma}{4k} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge R^{KL} , \quad (2.3)$$

onde  $\epsilon_{IJKL}$  é um tensor completamente anti-simétrico e  $R$  sendo definido como a curvatura da conexão  $\omega^I{}_{J\nu}$  [9]

$$R := d\omega + \omega \wedge \omega . \quad (2.4)$$



Denotemos por  $\sigma = \pm 1$  a assinatura da métrica. Para  $\sigma = 1$ , a variedade é Riemanniana, ou seja, o grupo de estrutura é  $SO(4)$ . Para  $\sigma = -1$  o grupo é  $SO(1,3)$ , a variedade é Lorentziana.

Sendo assim, em contraste com a ação de Einstein-Hilbert (1.1), a ação de Palatini depende de uma variável adicional, a conexão  $\omega^I_{J\nu}$ . De qualquer modo a equação de movimento obtida pela variação da ação  $S_P$  com respeito à conexão, implica que  $\omega^I_{J\nu}$  é completamente determinada pelo campo  $e^I_\mu$  (condição de torção nula):

$$T := De^I = de^I + \omega^I_J e^J = 0 . \quad (2.5)$$

Se agora variarmos a ação com respeito ao campo  $e^I_\mu$ , a ação de Palatini se reduz na ação familiar de Einstein-Hilbert

$$S_P(e, \omega(e)) \approx S_{EH} . \quad (2.6)$$

A ação de Palatini apresenta, no entanto, dificuldades quando se pretende a partir dela, realizar a transformada de Legendre e implementar o formalismo Hamiltoniano. A razão disso é que quando os vínculos são resolvidos, toda referência à dinâmica da conexão é perdida. Este problema pode ser corrigido usando a seguinte observação: existe outra invariância, construída do par  $(e, \omega)$ , com a extraordinária propriedade de que sua adição na ação original de Palatini não muda as equações de movimento. Esta ação modificada, determinada por Holst, é dada por:

$$S_H(e, \omega) = S_P(e, \omega) - \frac{1}{2k\gamma} \int_M e^I \wedge e^J R_{IJ} , \quad (2.7)$$

onde  $\gamma$  é um número arbitrário, chamado parâmetro de *Barbero-Immirzi*.

É importante notar que  $\gamma$  não pode ser zero quando utilizarmos a ação de Holst em uma teoria quântica. Por exemplo, os autovalores do operador área na base das redes de spin são dados por:

$$A = 8\pi\gamma\hbar G \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n , \quad (2.8)$$

onde  $j_i$  designam representações irredutíveis do grupo de gauge  $SU(2)$ .

Ou seja,  $\gamma$  não apresenta nenhum efeito na teoria clássica, as equações de movimento não

dependem dele, mas é importante na teoria quântica. Isso acontece também nas teorias de Yang-Mills com o parâmetro  $\theta$  da QCD, onde podemos adicionar termos topológicos na ação, que classicamente as equações de movimento não mudam. Isto induz a transformação canônica clássica no espaço de fase, faltando ser implementada a nível quântico. No caso gravitacional, no entanto,  $\gamma$  não possui origem topológica, pois através da primeira identidade de Bianchi o termo extra somado a ação de Palatini se anula identicamente quando a equação (1.5) é satisfeita [9].

Conseqüentemente, o parâmetro  $\theta$  na teoria de Yang-Mills é em muitos casos análogo ao parâmetro  $\gamma$ . Desta forma,  $\gamma$  pode refletir uma ambigüidade na quantização da teoria, onde diferentes valores de  $\gamma$  levam a diferentes previsões físicas. Esse parâmetro entra em várias previsões da teoria quântica, como por exemplo, no cálculo da entropia de buracos negros, onde seu valor é obtido comparando a entropia de buracos negros com o valor determinado por métodos termodinâmicos [19],

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}} \approx 0,06 , \quad (2.9)$$

o cálculo pode ser realizado para diferentes tipos de buracos negros e o mesmo valor de  $\gamma$  será encontrado, assumindo uma certa consistência.

No que diz respeito às simetrias da ação de Holst, notamos que ela é invariante por transformações de Lorentz locais, as equações de movimento são covariantes. Além disso, a ação é invariante por difeomorfismo,  $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$ . Denotando a ação de Holst por uma 4-forma  $\Omega_4$  temos:

$$\delta_{dif} \Omega_4 = \mathcal{L}_\xi \Omega_4 = i_\xi d\Omega_4 + d i_\xi \Omega_4 . \quad (2.10)$$

O primeiro termo da segunda igualdade se anula porque  $\dim \mathcal{M} = 4$ . O segundo termo é uma derivada total, portanto

$$\delta_{dif} S = \int_{\partial V} i_\xi \Omega_4 , \quad (2.11)$$

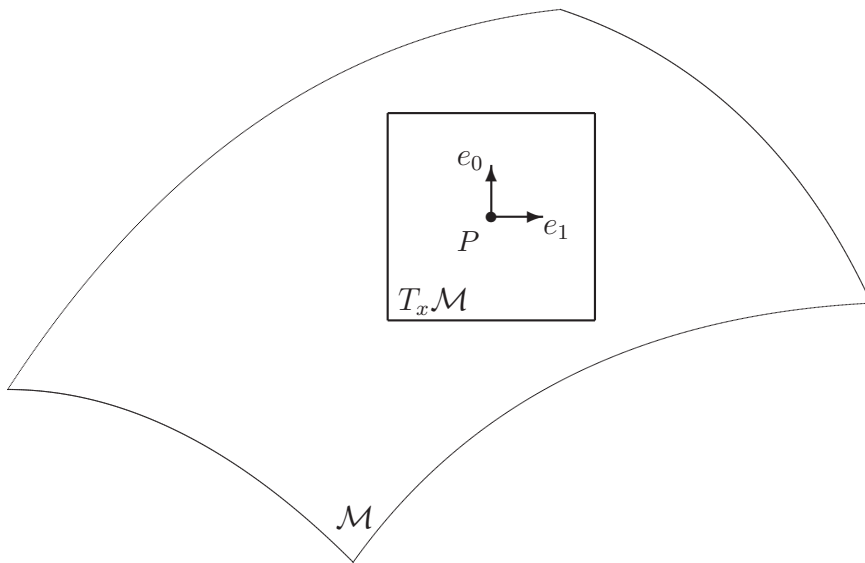
e este termo não afeta as equações de movimento, já que os campos não variam nas bordas.

## 2.3 O Formalismo Canônico

Como já vimos, a variedade  $\mathcal{M}$  que consideramos possui topologia  $M_3 \times \mathfrak{R}$ . Onde  $M_3$  possui dimensão 3 e a tomamos como uma variedade espacial, sendo que  $\mathfrak{R}$  indica a parte temporal. Consideramos uma base coordenada em  $\mathcal{M}$  dada por  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), onde  $x^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) é a coordenada espacial de  $M_3$  e ( $x^0 = t$ ) é a coordenada temporal de  $\mathfrak{R}$ . Os vetores  $\partial_\mu$  formam uma base no espaço tangente a  $M_3$  e os "vierbein"  $e_I$  formam uma base pseudo-ortonormal no espaço tangente a  $\mathcal{M}$  num determinado ponto  $P \in \mathcal{M}$ ,

$$e_I = e_I^\mu \partial_\mu , \quad (2.12)$$

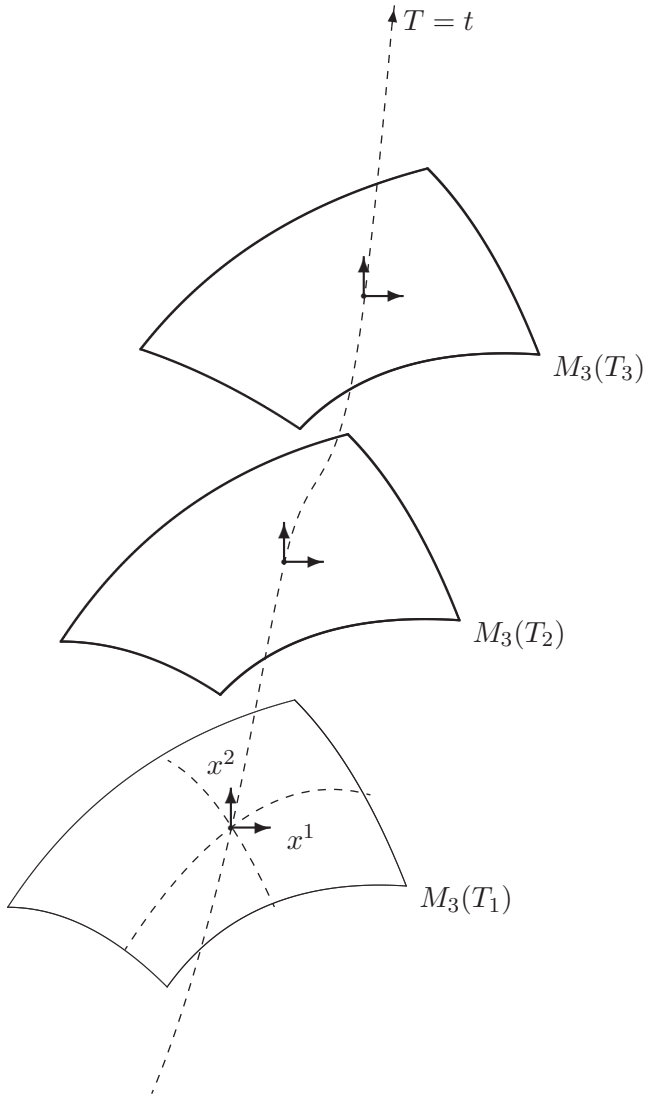
$$e^I = e_\mu^I dx^\mu , \quad (2.13)$$



sendo  $T_x \mathcal{M}$  o espaço tangente a variedade  $\mathcal{M}$  [A.1], a 1-forma  $dx^\mu$  será a base de coordenadas do espaço cotangente a  $M_3$ , e  $e^I$  a base do espaço cotangente a  $\mathcal{M}$ . Acima  $e_\mu^I$  e  $e_I^\mu$  são as matrizes que transformam as bases de coordenadas do espaço cotangente e do espaço tangente, respectivamente, em uma base pseudo-ortonormal, pois:

$$e_I \cdot e_J = g_{\mu\nu} e_I^\mu e_J^\nu = \eta_{IJ} . \quad (2.14)$$

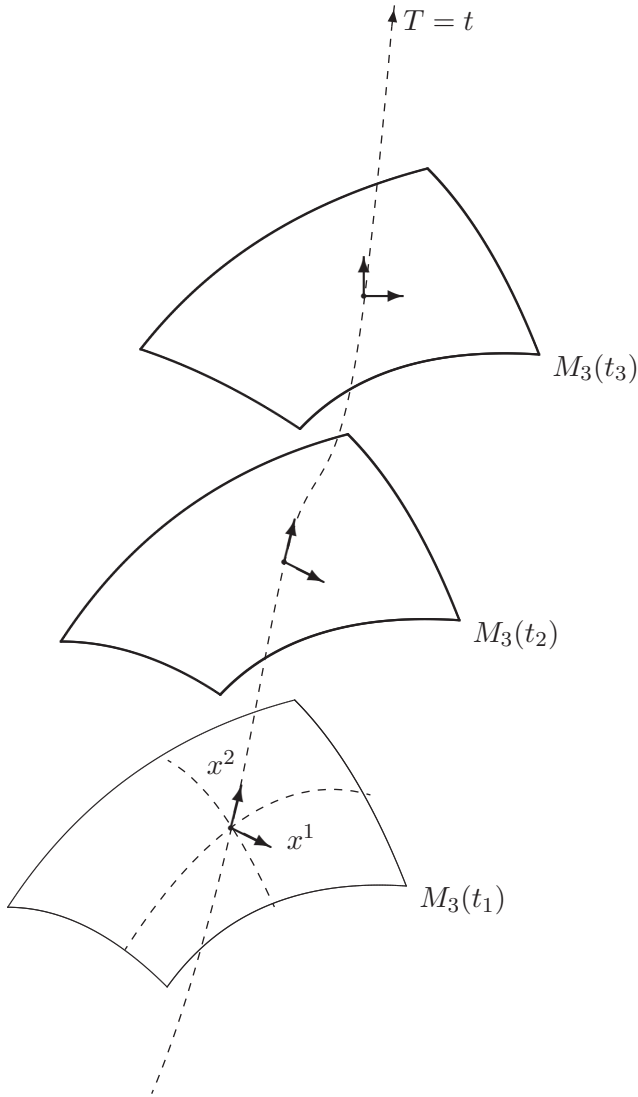
Com isso construímos uma foliação parametrizada por "t". Podendo então ser efetuada uma fixação parcial para  $x^0 = t$ , onde a invariância sob os difeomorfismo de  $M_3(t)$  é preservada restando-nos uma invariância de difeomorfismo residual de  $M$  em cada "instante"  $t$ .



**Hipótese:** existe uma foliação dada por uma "função temporal"  $T(P)$  tal que  $\mathcal{M} = \mathfrak{R} \times M_3$

$$M_3(T) = \{P \in \mathcal{M} \mid T(P) = T = \text{constante}\}$$

Fazendo a fixação parcial de gauge para a simetria de Lorentz, escrevemos  $e_a^0 = 0$ , condição conhecida como gauge temporal:



As coordenadas serão tais que  $T(P) = x^0 \equiv t$  e que  $(x^a, a = 1, 2, 3)$  sejam as coordenadas de  $M_3(t)$ .

**Gauge temporal:**

O vetor de base  $e_0$  do espaço-tempo tangente será tangente à linha de coordenada temporal.

Construimos portanto

$$e_\mu^I = \begin{pmatrix} e_t^0 & e_a^0 \\ e_t^i & e_a^i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N & 0 \\ N^i & e_a^i \end{pmatrix} .$$

A construção anterior é conhecida como o formalismo *ADM* e é bastante adequado na implementação do formalismo Hamiltoniano para a relatividade geral. Normalmente implementa-se essa construção utilizando o formalismo métrico. Nesta dissertação o fazemos diretamente no formalismo de "vierbeins".

A variável  $N$  é conhecida como "função lapso" e  $N^i$  "função shift". Observemos que  $e_\mu^I$  indica uma "vierbein" em  $\mathcal{M}$  e  $e_a^i$  uma "dreibein" em  $M_3$ . A matriz inversa de  $e_\mu^I$  é dada por

$$e_I^\mu = \begin{pmatrix} e_0^t & e_i^t \\ e_0^a & e_i^a \end{pmatrix} \equiv (e_\mu^I)^{-1} \begin{pmatrix} 1/N & 0 \\ -N^a/N & e_i^a \end{pmatrix}$$

com  $e^a_i = (e^i_a)^{-1}$ . Notemos ainda que  $e^t_i = 0$ , ou seja, os vetores só possuem componentes espaciais. A métrica  $g_{\mu\nu}$  pode então ser construída a partir de  $g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e^I_\mu e^J_\nu$ , onde temos explicitamente:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \sigma N^2 + N^i N^i, \\ g_{0a} &= N^i e^i_a = N_a, \\ g_{ab} &= e^i_a e^i_b, \end{aligned} \tag{2.15}$$

e desta maneira podemos escrever

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \sum_{i=1}^3 (N^i dt + e^i_a dx^a)^2. \tag{2.16}$$

Utilizando as variáveis construídas a partir de (1.15), podemos efetuar uma transformada de Legendre na Lagrangiana de Holst e obter posteriormente a Hamiltoniana:

$$L_{Holst} = \int_{\mathcal{M}} d^3x [P_a^i \partial_t A_a^i - \mathcal{H}(A_a^i, P_a^i, \Lambda^i, N^a, N)] , \tag{2.17}$$

com  $\mathcal{H}$  dada por

$$\mathcal{H} = \Lambda^i \mathcal{G}_i + N^a C_a + NC , \tag{2.18}$$

onde  $\Lambda^i, N^a, N$  são multiplicadores de Lagrange e  $\mathcal{G}_i, C_a, C$  são vínculos, escritos como funcionais

de  $A^i_a$  e  $P^a_i$ , que por sua vez se escrevem como

$$A^i_a = \Gamma^i_a - \gamma \sigma k^i_a, \quad (2.19)$$

$$P^a_i = \frac{\sigma}{2k\gamma} e_{(3)} e^a_i, \quad (2.20)$$

sendo  $\Gamma^i_a = \epsilon^i_{jk} \omega^{jk}_a$  uma conexão em  $M$ , que satisfaz a equação de compatibilidade

$$de^i + e^i_{jk} \Gamma^j e^k = 0, \quad (2.21)$$

$k^i_a$  é a curvatura extrínseca de  $M$ , dada por

$$k^i_a = e^i_I e^\alpha_a \omega_\alpha^{IJ} \eta_J, \quad (2.22)$$

onde  $\eta_I$  é um vetor ortogonal a  $M$  normalizado por  $\eta^I \eta_I = \sigma$ . Finalmente  $e_3 = \det(e^i_a)$ .

Os vínculos, explicitamente escritos em termos de  $A^i_a$  e  $P^a_i$  são:

$$\mathcal{G}_i = D_a P^a_i \equiv \partial_a P^a_i + \epsilon_{ij}^k A^j_a P^a_k, \quad (2.23)$$

$$C_a = P^b_i F^i_{ab} - \frac{\sigma - \gamma^2}{\sigma\gamma} k^i_a \mathcal{G}_i, \quad (2.24)$$

$$C = \frac{k\gamma^2}{2e_3} P^a_i P^b_j \left[ \epsilon^{ij}_k F^k_{ab} + 2(\sigma - \gamma^2) k^i_{[a} k^j_{b]} \right] + (\gamma^2 - \sigma) k \partial_a \left( \frac{P^a_i}{e_3} \right) \mathcal{G}^i. \quad (2.25)$$

Nas expressões acima,  $F^k_{ab}$  é a curvatura da conexão  $A^i_a$

$$F^i_{ab} = \partial_a A^i_b - \partial_b A^i_a - \epsilon^i_{jk} A^j_a A^k_b. \quad (2.26)$$

O espaço de fase canônico consiste dos pares  $(A^i_a, P^a_i)$  de campos na variedade tridimensional  $M$ , sendo que  $A^i_a$  é uma conexão 1-forma e  $P^a_i$  uma densidade vetorial de peso 1. O colchete de Poisson básico é dado por

$$\{A^i_a(x), P^b_j(y)\} = \delta^i_j \delta^b_a \delta(x, y). \quad (2.27)$$

Portanto, o espaço de fase é o mesmo de uma teoria de Yang-Mills, sendo que neste caso também

existe um conjunto de três vínculos de primeira classe. As equações de Hamilton são

$$\dot{A}^i{}_a = \{A^i{}_a, H\} , \quad (2.28)$$

$$\dot{P}^a{}_i = \{P^a{}_i, H\} , \quad (2.29)$$

onde  $H = \int_M d^3x \mathcal{H}$ . O conjunto formado pelas três equações de vínculos é completamente equivalente às equações de Einstein. Desta forma a relatividade geral é expressa como uma teoria dinâmica de conexões.

Passemos agora à análise dos vínculos.  $\mathcal{G}_i = 0$  é simplesmente a "lei de Gauss", que assegura a invariância sob rotações internas  $SO(3)$ . De fato, para qualquer função suave  $\Lambda^i$  em  $M$ , que toma valores em  $SO(3)$ , a função

$$C_{\mathcal{G}}(\Lambda) \equiv \int_M d^3x \Lambda^i \mathcal{G}_i , \quad (2.30)$$

no espaço de fase gera exatamente as rotações internas

$$\{A^i{}_a, C_{\mathcal{G}}(\Lambda)\} = -D_a \Lambda^i , \quad (2.31)$$

$$\{P^a{}_i, C_{\mathcal{G}}(\Lambda)\} = \epsilon_{ij}{}^k \Lambda^j P_k{}^a . \quad (2.32)$$

Para um campo vetorial suave  $\vec{N}$  em  $M$ , definimos

$$C_{Diff}(\vec{N}) \equiv \int_M d^3x (N^a P^b{}_i F_{ab}{}^i - (N^a A_a{}^i) \mathcal{G}_i) , \quad (2.33)$$

e a partir das seguintes relações

$$\{A_a{}^i, C_{Diff}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a{}^i , \quad (2.34)$$

$$\{P_i{}^a, C_{Diff}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} P_i{}^a , \quad (2.35)$$

verificamos que  $C_{Diff}(\vec{N})$  gera os difeomorfismos ao longo de  $\vec{N}$ .

O terceiro vínculo, seguindo uma construção de Barbero e Thiemann é escrito como

$$C(N) \equiv \frac{k\gamma^2}{2} \int_M d^3x N \frac{P_i{}^a P_j{}^b}{e_3} \left[ \epsilon^{ij}{}_{ab} F_{ab}{}^k + 2(\sigma - \gamma^2) k_{[a}^i k_{b]}^j \right] , \quad (2.36)$$

e vem a ser um gerador da evolução temporal para "fora" de  $M$ . Os parênteses de Poisson entre



esses vínculos são:

$$\{C_{\mathcal{G}}(\Lambda), C_{\mathcal{G}}(\Lambda')\} = C_{\mathcal{G}}([\Lambda, \Lambda']) , \quad (2.37)$$

$$\{C_{\mathcal{G}}(\Lambda), C_{Diff}(\vec{N})\} = -C_{\mathcal{G}}(\mathcal{L}_N \Lambda) , \quad (2.38)$$

$$\{C_{Diff}(\vec{N}), C_{Diff}(\vec{N}')\} = C_{Diff}([\vec{N}, \vec{N}']) , \quad (2.39)$$

$$\{C_{\mathcal{G}}(\Lambda), C_N\} = 0 , \quad (2.40)$$

$$\{C_{Diff}(\vec{N}), C_M\} = -C(\mathcal{L}_N M) , \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \{C(N), C(M)\} &= k^2 \gamma^2 \sigma \left( C_{Diff}(\vec{S}) + C_{\mathcal{G}}(S^a A_a) \right) \\ &+ (\sigma - \gamma^2) \mathcal{G} \left( \frac{[P^a \partial_a N, P^b \partial_b M]}{e_3} \right) , \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde o campo vetorial  $S^a$  é definido por

$$S^a = (N \partial_b M - M \partial_b N) \frac{P_i^b P^{ai}}{e_3} . \quad (2.43)$$

Nesta dissertação trabalharemos sempre com o campo gravitacional puro. O acoplamento de matéria, no entanto, já tem sido bastante discutido tanto na estrutura da relatividade geral como na da supergravidade [20, 21]. No setor de matéria as modificações para se tratar com um valor genérico do parâmetro de Barbero-Immirzi são mínimas.

A partir deste ponto a teoria pode ser quantizada. Não trataremos com detalhes da quantização nesta dissertação, no entanto, faremos um breve comentário sobre isso, a fim de que possamos ter uma idéia da técnica de quantização de "loops".

Numa teoria quântica de campos tradicional, uma das maneiras de se implementar a quantização é escolher a álgebra das funções dos campos a serem promovidas a operadores quânticos. Em geral essa álgebra é formada por componentes positivas e negativas dos modos dos campos e a quantização conduz aos operadores de criação e aniquilação, e a caracterização de frequências positivas e negativas requer a existência de um espaço tempo de fundo.

O que difere esse processo de quantização de "loops" é que neste caso escolhe-se uma álgebra diferente das funções de campos, baseada na holonomia da conexão gravitacional. A holonomia, também conhecida na literatura como "loop de Wilson" quando definida numa curva fechada,

é a matriz de transporte paralelo ao longo de uma curva:

$$U(A, \gamma) = P \exp \int_{\gamma} A , \quad (2.44)$$

onde  $P$  é um ordenamento ao longo do caminho, definido da seguinte maneira:

$$P \exp \int_0^1 ds A(\gamma(s)) = \sum_0^{\infty} \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n A(\gamma(s_n)) \dots A(\gamma(s_1)) . \quad (2.45)$$

As holonomias são as variáveis naturais numa teoria de gauge [19]. Sob uma transformação de gauge local  $\lambda$ , a conexão  $A$  se transforma como

$$A \longrightarrow A_{\lambda} = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d \lambda^{-1} , \quad (2.46)$$

e as holonomias se transformam de forma homogênea:

$$U[A, \gamma] \longrightarrow U[A_{\lambda}, \gamma] = \lambda(x_f^{\gamma}) U[A, \gamma] \lambda^{-1}(x_i^{\gamma}) , \quad (2.47)$$

onde  $x_i^{\gamma}$  e  $x_f^{\gamma}$  são os pontos inicial e final do caminho  $\gamma$  respectivamente.

Sob difeomorfismo  $\phi$ , a conexão se transforma como uma 1-forma

$$A \longrightarrow \phi^* A , \quad (2.48)$$

e a holonomia da seguinte maneira,

$$U[A, \gamma] \longrightarrow U[\phi^* A, \gamma] = U[A, \phi^{-1} \gamma] , \quad (2.49)$$

ou seja, arrastar  $A$  por um difeomorfismo  $\phi$  é o mesmo que arrastar a curva  $\gamma$ . Na "loop quantum gravity" as holonomias se tornam operadores que criam os "estados de loop".

Sendo  $g$  o espaço das conexões reais definidas numa superfície tridimensional  $M$ , precisamos definir o espaço dos funcionais em  $g$ . Considerando uma coleção  $\Gamma$  de caminhos  $\gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , denominados grafos, e uma função suave  $f(U_1, \dots, U_L)$  de  $L$  elementos de grupo, a dupla  $(\Gamma, f)$  define um funcional de  $A$ :

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U(A, \gamma_1) \dots U(A, \gamma_L)) , \quad (2.50)$$

e definimos por  $S$  o espaço linear de todos os funcionais  $\Psi_{\Gamma,f}[A]$ , para todos  $\Gamma$  e  $f$ . Tais funcionais são conhecidos como "funções cilíndricas"[19].

No caso em que  $g$  é  $SO(3)$ , torna-se conveniente escrever  $A$  como uma conexão de  $SU(2)$ , já que as álgebras são as mesmas. Expandem-se as conexões em termos de  $T_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ , onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli:

$$A(\vec{T}) = A_a^i T^i dx^a . \quad (2.51)$$

Podemos definir então o produto escalar no espaço  $S$

$$\langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma,g} \rangle \equiv \int dU_1 \dots dU_L \overline{f(U_1, \dots, U_L)} g(U_1, \dots, U_L) , \quad (2.52)$$

onde  $dU$  é a medida de Haar em  $SU(2)$ . Neste o produto escalar foi definido no mesmo grafo  $\Gamma$ . Pode-se estender a definição para o caso em que os grafos sejam diferentes, mas não pretendemos entrar nesses detalhes aqui. Devemos, no entanto, chamar a atenção para as propriedades de invariância do produto escalar, que são exatamente as transformações de gauge  $SU(2)$  e os difeomorfismos.

A partir da propriedade de transformação de gauge das holonomias, temos para um grafo  $(\Gamma, f)$ :

$$f_\lambda(U_1, \dots, U_L) = f(\lambda(x_f^{\gamma_1}) U_1 \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_1}) \dots \lambda(x_f^{\gamma_L}) U_L \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_L})) , \quad (2.53)$$

e desta forma, os estados quânticos se transformam como

$$\Psi_{\Gamma,f}(A) \longrightarrow [U_\lambda \Psi_{\Gamma,f}](A) = \Psi_{\Gamma,f}(A_{\lambda^{-1}}) = \Psi_{\Gamma,f_{\lambda^{-1}}}(A) . \quad (2.54)$$

Mas como a medida de Haar é invariante por transformações de grupo à esquerda e à direita, temos que o produto escalar (1.52) é invariante.

Com relação aos difeomorfismos, notamos que uma função cilíndrica  $\Psi_{\Gamma,f}(A)$  é levada a uma outra função cilíndrica  $\Psi_{\phi\Gamma,f}(A)$ , ou seja, baseada no grafo modificado. Como o lado direito de (1.51) não depende explicitamente do grafo, a invariância por difeomorfismo segue imediatamente.

O que fizemos até agora foi definir o espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{K}$ . O que precisa ser feito então é a implementação dos vínculos nesse espaço. Desta forma, as equações de Einstein

quânticas podem ser formalmente expressas como:

$$\hat{\mathcal{G}}_i |\Psi\rangle = 0, \quad (2.55)$$

$$\hat{C}_a |\Psi\rangle = 0, \quad (2.56)$$

$$\hat{C} |\Psi\rangle = 0. \quad (2.57)$$

Temos, portanto um conjunto de sete equações.

As primeiras três equações impõem aos funcionais de onda a invariância de gauge local  $SU(2)$ , e o espaço de Hilbert resultante é denominado  $\mathcal{K}_0$ . As próximas três equações impõem em  $\mathcal{K}_0$  a invariância por difeomorfismo, resultando num espaço denominado  $\mathcal{K}_{Diff}$ . O último vínculo, denominado vínculo escalar, não possui interpretação geométrica simples, e, além disso, é altamente não linear o que, em princípio, pode fazer aparecerem os problemas usuais das divergências ultravioletas, presentes na teoria de campos em que se devem definir produtos de campos em mesmo ponto. No entanto algumas versões bem definidas do vínculo escalar já foram construídas, e milagrosamente, devido à abordagem independente da métrica de fundo, a teoria é livre dessas divergências. O espaço de soluções do vínculo quântico escalar permanece um problema aberto em "loop quantum gravity".

## Capítulo 3

# Gravitação Bidimensional

A abordagem mais bem sucedida para se quantizar a gravitação tem sido o estudo a baixas dimensões, de onde se pode adquirir embasamento conceitual físico-matemático para o melhor entendimento das teorias em dimensões superiores [22]. Em quatro e três dimensões teorias de gauge para relatividade geral foram formuladas por Ashtekar e Witten. Para 4-d Ashtekar [23,17] introduziu o grupo  $SL(2, \mathcal{C})$ , onde a equação de Wheeler-DeWitt simplifica-se consideravelmente, já em 3-d Witten mostrou em [24,25] que a teoria da relatividade geral pode ser descrita como uma teoria de Chern-Simons definida sobre o grupo  $ISO(2,1)$ . Ambas as abordagens tiveram grande impacto no estudo da gravitação quântica e a partir dos trabalhos de Witten foi mostrado que a relatividade geral não apresenta divergência ultravioleta, ao contrário do que se acreditava até então [22].

A teoria da gravitação é invariante sob difeomorfismo cujos parâmetros são funções do espaço-tempo, exatamente como uma teoria de gauge local [26]. Conseqüentemente ela poderá ser formulada em termos das variáveis de Einstein-Cartan, que no caso bidimensional é o "*zweibein*" ( $e_{\mu}^I$ ) e a conexão de spin ( $\omega_{\mu}^{IJ}$ ) [A.1], ao invés do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , sendo  $(I, J = 0, 1)$  índices referentes ao espaço-tempo tangente na base do "*zweibein*" e  $(\mu, \nu = 0, 1)$  índices referentes as coordenadas do espaço-tempo. Esta nova formulação é denominada formalismo de primeira ordem, pois na ação temos somente derivadas dos campos até primeira ordem.

Ao trabalharmos com gravitação bidimensional temos que as equações dinâmicas não são determinadas pelo tensor de Einstein ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}$ ), já que ele é identicamente nulo em duas dimensões e a ação usual de Einstein-Hilbert ( $\int d^2x \sqrt{-g} \mathcal{R}$ ) é uma integral de superfície (uma

constante), que não nos leva às equações de movimento. A respeito desta trivialidade, Jackiw declara [26] "Quando trabalhamos com a gravitação em (1+1) dimensão é necessário inventar um modelo". Logo foi proposta uma ação que comporta um campo escalar  $\phi$  além da métrica  $g_{\mu\nu}$ .

### 3.1 Modelo de Jackiw-Teitelboim para Gravitação Bidimensional

A inspiração para formular uma ação capaz de descrever a gravitação bidimensional veio a partir da teoria de Liouville [27], que é uma teoria de campo completamente integrável expressa por um campo escalar  $\phi(x)$  [23,14]. No espaço de Minkowski, a densidade Lagrangiana para o modelo de Liouville é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \lambda e^{\beta\phi} , \quad (3.1)$$

tendo como equação de movimento

$$\square\phi + \lambda e^{\beta\phi} = 0 , \quad (3.2)$$

lembrando que  $\square = \partial^x \partial_x - \partial^t \partial_t$ , para coordenada espaço-tempo (x,t) sob a variedade M. Consideramos ( $c=1$ ) para velocidade da luz e a ação  $\int d^2x \mathcal{L}$  sendo adimensional.

A equação de Liouville foi proposta e resolvida no século dezenove, durante o estudo de vórtices[14], tendo seu significado geométrico prontamente apreciado. Se o tensor métrico bidimensional for escrito na forma  $\eta_{\mu\nu} = e^{\beta\phi} g_{\mu\nu}$ , onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço plano de Minkowski, o escalar de curvatura é dado por [14]:

$$\mathcal{R} = \beta e^{-\beta\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi . \quad (3.3)$$

Consequentemente, quando  $\phi$  for uma solução da equação de Liouville (2.2), o escalar de curvatura bidimensional será constante. A teoria de Liouville clássica é invariante sob transformação conforme, o que levou Jackiw a propô-la como uma substituição para a ausência da equação de Einstein em 2D.

Se nós introduzirmos a constante cosmológica  $K$  na equação de Einstein teremos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} + K g_{\mu\nu} = 0 , \quad (3.4)$$

dado que em duas dimensões o tensor de Einstein desaparece identicamente ( $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0$ ), se pode observar facilmente da equação (2.4) que ou a métrica desaparece para  $K \neq 0$ , ou é totalmente indeterminada quando  $K = 0$ . Logo a equação de Liouville

$$\mathcal{R} - 2K = 0 , \quad (3.5)$$

pode ser escolhida como uma boa alternativa para a equação (2.4).

Tomando a equação (2.5) como sendo a equação de Einstein em duas dimensões, Jackiw e Teitelboim propuseram uma ação para substituir a ação de Einstein-Hilbert, de onde se pudesse obter (2.5). Esta ação, conhecida como ação de Jackiw-Teitelboim, sendo covariante, ou seja, invariante sob os difeomorfismos do espaço-tempo, é escrita da seguinte forma:

$$S_{J-T} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} \psi (\mathcal{R} - 2K) \quad (3.6)$$

onde  $\psi$  é um campo escalar,  $\mathcal{R}$  o escalar de curvatura,  $K$  a constante cosmológica e  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . As equações de movimento são  $\mathcal{R} = 2K$  e  $D\psi = 0$ , sendo  $D$  a derivada covariante, cuja solução representa um espaço-tempo de de Sitter ou anti-de Sitter de acordo com o sinal da constante cosmológica  $K$ .

Nas seções seguintes mostraremos que existe uma ação equivalente à ação de Jackiw-Teitelboim que tem a forma de um modelo BF, cujo grupo de gauge é o grupo de de Sitter.

## 3.2 Teoria de Gauge Baseada no Grupo de de Sitter

Geralmente a conexão campo de gauge, 1-forma, com valores numa álgebra de Lie é escrita como

$$A = A_\mu dx^\mu = A_\mu^i J_i dx^\mu , \quad (3.7)$$

onde ( $i = 0,1,2$ ) e  $J_i$  é o gerador da álgebra de Lie [26].

A idéia comum para todas as teorias que abordam a gravitação bidimensional como uma teoria de gauge, como no caso da teoria BF, é determinar a conexão como uma combinação linear dos *zweibein* ( $e^I$ ) e da conexão spin ( $\omega$ ), ambos 1-forma, tomados como variáveis independentes:

$$A = e^I P_I + \omega \Lambda , \quad (3.8)$$

onde  $I, J = (0,1)$ ,  $P_I$  é o gerador das translações do espaço-tempo e  $\Lambda$  é o gerador das transformações de Lorentz (boost). Inicialmente o grupo que representaria a conexão (2.8) seria o grupo de Poincaré ISO(1,1), onde os geradores apresentariam como álgebra as seguintes relações de comutação [28]:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I^J P_J , \quad (3.9)$$

$$[P_I, P_J] = 0 , \quad (3.10)$$

os índices ( $I, J$ ) são levantados e abaixados com a métrica plana  $\eta_{IJ} = \text{diag}(\sigma, 1)$  (ver apêndice (A.1)) e nossa convenção para o tensor anti-simétrico é  $\epsilon_{01} = 1$ , sendo  $\epsilon^{01} = \sigma$ .

No caso em que a constante cosmológica é diferente de zero ( $K \neq 0$ ) a álgebra de Poincaré pode ser estendida para álgebra de Sitter SO(2,1) ou (anti) de Sitter SO(1,2) [22], onde os geradores apresentam as seguintes relações de comutação:

$$[\Lambda, P_I] = \epsilon_I^J P_J , \quad (3.11)$$

$$[P_I, P_J] = K \epsilon_{IJ} \Lambda . \quad (3.12)$$

O grupo de de Sitter ou (anti) de Sitter, representado por (A)dS, é mais apropriada para descrever uma teoria de gauge, ao contrário do grupo ISO(1,1), por possuir uma forma bilinear invariante não degenerada ("o traço") dado pela métrica de Killing [6]

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} K\eta_{IJ} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (3.13)$$

tal que  $\langle P_I, P_J \rangle = K\eta_{IJ}$  e  $\langle \Lambda, \Lambda \rangle = 1$ , onde  $\langle , \rangle$  é a forma bilinear. É interessante observarmos que a métrica de Killing é claramente degenerada para  $K = 0$ , mostrando que o traço em ISO(1,1) não é invariante.



Iremos agora redefinir os geradores do grupo (A)dS como:

$$J_i \equiv (J_0, J_1, J_2) = (P_I, P_J, \Lambda) , \quad (3.14)$$

de modo que a álgebra de Lie de (A)dS possa ser expressa de forma compacta

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k = K \epsilon_{ijk} k^{kl} J_l , \quad (3.15)$$

onde por convenção  $\epsilon_{012} = 1$ , com

$$k_{ij} = -\frac{\sigma}{2} f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k = -\frac{\sigma}{2} Tr(J_i J_j) , \quad (3.16)$$

sendo a definição da métrica de Killing em relação as constantes de estrutura  $f_{ij}{}^k$ .

Utilizando a álgebra do grupo (A)dS e a equação (2.15), podemos obter as seguintes relações de comutação para os geradores:

$$\begin{aligned} [J_0, J_1] &= K J_2 , \\ [J_1, J_2] &= \sigma J_0 , \\ [J_2, J_0] &= J_1 , \end{aligned} \quad (3.17)$$

de onde poderemos obter o valor das constantes de estrutura

$$f_{01}{}^2 = K, \quad f_{12}{}^0 = \sigma, \quad f_{20}{}^1 = 1 . \quad (3.18)$$

As demais constantes são nulas.

### 3.3 Gravitação no formalismo BF

A formulação de uma ação invariante de gauge para o caso da gravitação bidimensional é um problema que tem atraído muitos autores, sendo primeiramente explorada por Fukuyama e Kamimura em dois artigos [29,30], onde o grupo de gauge considerado foi  $O(2,1)$ . Posteriormente, a mesma ação foi introduzida nos trabalhos de Isler e Trugenberg [28], Chamseddine e Wyler [31], Blau e Thompson para vários grupos de gauge [32].

Em nosso trabalho a teoria  $BF$  da gravitação pura bidimensional é baseada na conexão (2.8), onde o grupo de gauge é o grupo (A)dS com valores na álgebra de Lie, como vimos na seção anterior. A ação clássica da teoria  $BF$  [32,33] na representação adjunta é dada por:

$$S_{BF} = \int \langle \phi, F \rangle = \int \langle \phi, dA + A^2 \rangle , \quad (3.19)$$

nesta representação  $\langle \phi, F \rangle := \langle J_i, J_j \rangle \phi^i F^j = k_{ij} \phi^i F^j$ , temos a forma bilinear de Killing do grupo (A)dS visto em (2.13). Sendo  $\phi$  (0-forma) um campo escalar tipo "dilaton" e  $F$  (2-forma) a curvatura da conexão campo de gauge ( $A$ ).

Explicitamente poderemos expandir os campos em função dos geradores  $J_i$

$$A = A^i J_i = e^I J_I + \omega J_2 , \quad (3.20)$$

$$\phi = \phi^i J_i = \phi^0 J_0 + \phi^1 J_1 + \psi J_2 , \quad (3.21)$$

$$F = F^i J_i = T^I J_I + F^2 J_2 , \quad (3.22)$$

onde a componente  $T^I$  é exatamente a torção

$$T^I = de^I - \omega \epsilon_J^I e^J , \quad (3.23)$$

e a componente  $F^2$  é a curvatura, expressa em termos dos *zweibein* e da conexão spin

$$F^2 = d\omega + \frac{K}{2} \epsilon_{IJ} e^I e^J . \quad (3.24)$$

As equações de movimento são obtidas a partir da variação da ação (2.19) em relação ao campo escalar  $\phi$  e em relação à conexão  $A$ , ou seja:

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta \phi_i} = F^i = 0 , \quad (3.25)$$

$$\frac{\delta S_{BF}}{\delta A^i} = D\phi_i = 0 , \quad (3.26)$$

sendo a derivada covariante definida por  $D = d + [A, \ ]$ .

Investigando as simetrias da ação (2.19), verificamos que ela é invariante sob as transformações

locais de gauge (A)dS, de parâmetro infinitesimal  $\epsilon(x)$ :

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon] \equiv D\epsilon , \quad (3.27)$$

$$\delta\phi = [\phi, \epsilon] = f_{ij}{}^k \epsilon^i \phi^j , \quad (3.28)$$

e sob os difeomorfismos ativos [33] gerados pelo campo vetorial  $\xi^\mu$ :

$$\delta_{(\xi)} = \mathcal{L}_\xi A , \quad (3.29)$$

$$\delta_{(\xi)} = \mathcal{L}_\xi \phi , \quad (3.30)$$

onde  $\mathcal{L}_\xi$  é a derivada de Lie na direção do campo vetorial  $\xi$ , definida como:

$$\mathcal{L}_\xi = (i_\xi d + d i_\xi) , \quad (3.31)$$

$d$  é derivada exterior e  $i_\xi$  a derivada interior associada ao mesmo campo vetorial  $\xi$ .

Este resultado é muito importante para que a gravitação possa ser formulada como uma teoria de gauge, onde a invariância de difeomorfismo está incluída na invariância de gauge (A)dS a menos de equações de movimento, o que é típico de uma teoria topológica. Todas essas transformações serão vistas com mais detalhes na próxima seção.

### 3.4 Simetrias

A ação (2.19) é invariante sob as seguintes transformações de gauge

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon] \equiv D\epsilon , \quad (3.32)$$

$$\delta\phi = [\phi, \epsilon] , \quad (3.33)$$

onde  $\epsilon$  é o parâmetro infinitesimal dessas transformações. Observe que o campo  $A$  se transforma como a derivada covariante desse parâmetro e o campo  $\phi$  se transforma na representação adjunta. Estas transformações são bastante conhecidas e o que queremos nesta seção é mostrar que elas implicam na invariância de difeomorfismo quando o parâmetro  $\epsilon$  assume uma forma particular. Para que tenhamos a invariância por difeomorfismo, os campos devem se transformar como:

$$\delta_\xi A = \mathcal{L}_\xi A = (i_\xi d + d i_\xi) A , \quad (3.34)$$

$$\delta_\xi \phi = \mathcal{L}_\xi \phi = i_\xi d\phi , \quad (3.35)$$

onde  $\mathcal{L}_\xi$  é a derivada de Lie em relação a um parâmetro  $\xi$ ,  $d$  é a derivada exterior e  $i_\xi$  é a antiderivada. Observe que  $A$  e  $\phi$  são uma 1-forma e uma 0-forma respectivamente, o que justifica a segunda igualdade nas equações (2.34) e (2.35).

Tomemos o caso particular onde  $\epsilon = i_\xi A$ , de forma que ao substituirmos na equação (2.32) teremos

$$\delta A = d i_\xi A + [A, i_\xi A] . \quad (3.36)$$

Sendo que o primeiro e segundo termos da igualdade podem ser escritos, respectivamente, como:

$$d i_\xi A = \mathcal{L}_\xi A - i_\xi dA , \quad (3.37)$$

$$[A, i_\xi A] = -i_\xi A^2 . \quad (3.38)$$

Desta forma obtemos a seguinte transformação de gauge para o campo  $A$

$$\begin{aligned} \delta A &= \mathcal{L}_\xi A - i_\xi dA - i_\xi A^2 , \\ &= \mathcal{L}_\xi A - i_\xi F , \\ &= \mathcal{L}_\xi A - i_\xi \frac{\delta S_{BF}}{\delta\phi} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Substituindo  $\epsilon = i_\xi A$  na equação (2.33), teremos:

$$\delta\phi = i_\xi[\phi, A] . \quad (3.40)$$

A partir da equação de movimento (2.26) poderemos determinar o comutador do campo  $\phi$  com o campo  $A$ , ou seja,

$$[\phi, A] = d\phi - \frac{\delta S_{BF}}{\delta A} , \quad (3.41)$$

logo, através da substituição de (2.41) em (2.40), teremos a transformação de gauge para o campo  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i_\xi d\phi - i_\xi \frac{\delta S_{BF}}{\delta A} , \\ &= \mathcal{L}_\xi d\phi - i_\xi \frac{\delta S_{BF}}{\delta A} . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desta forma verificamos a equivalência das transformações de gauge e difeomorfismo módulo equações de movimento, com parâmetro  $\epsilon = i_\xi A = \xi^\mu A_\mu$ .

Ao estudarmos modelos gravitacionais valendo-se de propriedades dos modelos BF, vimos que as componentes da conexão campo de gauge  $A$  estão associadas às *zweibeins* e à conexão de spin:

$$A = A^i J_i = e^I J_I + \omega J_2 , \quad (3.43)$$

onde  $i = 0,1,2$  e  $I = 0,1$ ; sendo  $e^I$  as *zweibeins* e  $\omega$  a conexão de spin. A pergunta que se faz é, até que ponto a equivalência estudada nesta seção para os modelos BF vale para modelos gravitacionais. Para respondermos esta pergunta escrevemos:

$$\epsilon = \epsilon^i J_i = \xi^\mu A_\mu^i J_i . \quad (3.44)$$

Observe que

$$\epsilon^I = \xi^\mu e_\mu^I , \quad (3.45)$$

ou seja, existe uma relação entre os parâmetros de gauge  $\epsilon$  e os parâmetros de difeomorfismo  $\xi$ , dada por uma equação matricial. A equivalência se dá se pudermos inverter a relação acima, isto é, se pudermos escrever:

$$\xi^\mu = (e^{-1})^\mu_I \epsilon^I , \quad (3.46)$$

e para que esta equação seja válida, a matriz  $e_\mu^I$  deve ser não singular.

### 3.5 Ação BF e Ação de Jackiw-Teitelboim

Mostraremos nesta seção que a ação proposta por Jackiw-Teitelboim para a gravitação bidimensional, poderá ser obtida a partir de uma ação do tipo  $BF$  cujo grupo de gauge é o grupo (A)dS. Encontraremos esta relação expandindo a ação (2.19) nas componentes  $i = I, 2$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
S_{BF} &= \int \langle \phi, F \rangle = \int k_{ij} \phi^i F^j , \\
&= \int (K \eta_{IJ} \phi^I T^J + \phi^2 F^2) , \\
&= \int (K \phi_I T^I + \psi F^2) .
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Utilizando os resultados encontrados para as componentes da curvatura, equações (2.23) e (2.24), teremos que as equações de movimento se decompõem na equação de (*anti*) de Sitter para a curvatura, torção nula e campos escalares covariantes constantes

$$F^2 = 0 \longrightarrow d\omega = -\frac{1}{2} K \epsilon_{IJ} e^I e^J , \tag{3.48}$$

$$T^I = 0 \longrightarrow de^I = \omega \epsilon^I_J e^J , \tag{3.49}$$

$$D\phi^i = 0 . \tag{3.50}$$

Nós reconhecemos estas equações do tratamento geral feito para o formalismo de primeira ordem, ver apêndice [A]. A equação (2.49) é justamente a condição de torção nula que nos permite determinar a conexão spin  $\omega$  unicamente de  $e^I$  (e sua derivada), isso quando os *zweibein* for inversível.

Desta forma, utilizando a condição de torção nula, teremos que:

$$S_{BF} = \int \psi F^2 , \tag{3.51}$$

$$= \int \psi \left( d\omega + \frac{K}{2} \epsilon_{IJ} e^I \wedge e^J \right) , \tag{3.52}$$

a definição de curvatura é dada em (A.18) como:

$$R^I_J = d\omega^I_J + \omega^I_K \wedge \omega^K_J , \tag{3.53}$$

de onde poderemos obter, para o caso abeliano, considerando só grupo de Lorentz

$$d\omega = \frac{1}{2} R_J^I \epsilon_I^J . \quad (3.54)$$

Substituindo este resultado na ação BF (2.52) teremos:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int \psi (R_J^I \epsilon_I^J + K \epsilon_{IJ} e^I \wedge e^J) , \quad (3.55)$$

$$= \frac{1}{2} \int \psi \left( \frac{1}{2} R_{J\mu\nu}^I \epsilon_I^J + K \epsilon_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J \right) dx^\mu dx^\nu , \quad (3.56)$$

sendo  $dx^\mu dx^\nu = \epsilon^{\mu\nu} d^2x$  e  $R_{J\mu\nu}^I$  o tensor de Riemann. Desta forma

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int \psi \epsilon^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} R_{J\mu\nu}^I \epsilon_I^J + K \epsilon_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J \right) d^2x . \quad (3.57)$$

Trabalhando cada termo da integração separadamente e aplicando as definições:

$$\text{Tensor de Ricci} : R^I{}_\mu = e_J^\nu R^{IJ}{}_{\mu\nu} , \quad (3.58)$$

$$\text{Escalar de Curvatura} : \mathcal{R} = e_I^\mu R^I{}_\mu , \quad (3.59)$$

além de  $\epsilon^{\mu\nu} = e e_I^\mu e_J^\nu \epsilon^{IJ}$ , onde  $e = \det(e_\mu^I)$ , teremos para o primeiro termo da ação (2.57)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_{J\mu\nu}^I \epsilon_I^J \epsilon^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} R^{IJ}{}_{\mu\nu} \epsilon_{JI} \epsilon^{\mu\nu} , \\ &= -\frac{1}{2} R^{IJ}{}_{\mu\nu} \epsilon_{IJ} e e_I^\mu e_J^\nu \epsilon^{IJ} , \\ &= -\frac{1}{2} R^I{}_\mu e_I^\mu e \epsilon_{IJ} \epsilon^{IJ} , \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{R} e \epsilon_{IJ} \epsilon^{IJ} , \\ &= \mathcal{R} e , \end{aligned} \quad (3.60)$$

e para o segundo termo

$$\begin{aligned} K \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu} e_\mu^I e_\nu^J &= K \epsilon_{IJ} e e_I^\mu e_J^\nu \epsilon^{IJ} e_\mu^I e_\nu^J , \\ &= K \epsilon_{IJ} \epsilon^{IJ} e , \\ &= -2K e . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Assim sendo, substituindo os resultados obtidos em (2.60) e (2.61) na ação (2.57), teremos:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int e \psi (\mathcal{R} - 2K) d^2x , \quad (3.62)$$

onde a partir de (A.1) pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ} , \\ \det(g_{\mu\nu}) &= \det(e_\mu^I) \det(e_\nu^J) \det(\eta_{IJ}) , \\ g &= e \cdot e \cdot \sigma , \\ g &= e^2 \sigma , \\ e &= \sqrt{-g} . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituindo este último na ação (2.62), lembrando que estamos considerando o caso Lorentziano ( $\sigma = -1$ ), obteremos como resultado final

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \psi (\mathcal{R} - 2K) d^2x . \quad (3.64)$$

sendo (2.64) exatamente a ação de Jackiw-Teitelboin para gravitação bidimensional, expressa no formalismo de segunda ordem, obtida a partir da ação  $BF$  (2.19).



## Capítulo 4

# Sistemas Hamiltonianos Vinculados

No estudo de sistemas físicos, encontra-se freqüentemente vínculos que limitam o espaço de fase disponível. Isso produz uma série de problemas que foram examinados inicialmente por Dirac em 1950. Uma consequência inicial da existência de vínculos é que a transformação  $(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i)$  é singular, com os momentos não sendo univocamente determinados a partir das velocidades. Dito de um modo mais simples, se  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangiana do sistema e se

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.1)$$

é o momento conjugado a  $q_i$ , então a existência de vínculos implica que a matriz  $\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_i}$  seja singular [34]. Para uma revisão rápida de sistemas vinculados ver apêndice C e mais profundamente nas referências [35,36,37].

Teorias de gauge são exemplos de sistemas vinculados, onde a dinâmica do espaço de fase é restringida pela existência dos vínculos. Desta forma não podemos esperar que as equações de movimento sejam determinadas para todas as variáveis dinâmicas para todos os intervalos de tempo, levando em conta somente as condições iniciais, uma vez que sempre podemos mudar o sistema de referência no futuro [35].

O formalismo Hamiltoniano proporciona um tratamento bastante completo para sistemas de gauge. Portanto iniciaremos a discussão deste capítulo com a ação para gravitação determinada a partir do modelo BF, equação (2.19), que como vimos é uma ação que apresenta invariância de gauge, a partir da qual obteremos a Lagrangiana e posteriormente passaremos para o for-

malismo Hamiltoniano. Este tratamento indicará a presença de funções arbitrárias do tempo na solução geral das equações de movimento, mostrando que nem todas as variáveis canônicas são independentes, ou seja, mostrando a existência de vínculos na teoria.

## 4.1 Lagrangiana e Vínculos Primários

A ação (2.19), para o modelo BF, pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int \langle \phi, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \rangle dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (4.2)$$

sabendo-se que  $dx^\mu \wedge dx^\nu = \epsilon^{\mu\nu} d^2x$  e considerando a convenção  $\epsilon^{tx} = 1$ , iremos encontrar

$$S = \int \langle \phi, \partial_t A_x \rangle d^2x + \int \langle A_t, D_x \phi \rangle d^2x . \quad (4.3)$$

A partir da métrica de Killing (2.13), podemos reescrever a equação (3.3) como:

$$S = \int k_{ij} (\partial_t A_x^i \phi^j + A_t^i D_x \phi^j) d^2x , \quad (4.4)$$

tendo através da contração dos índices o seguinte resultado:

$$S = \int (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i) d^2x , \quad (4.5)$$

onde  $D_x \phi_i \equiv \partial_x \phi_i + f_{ij}{}^k A_x^j \phi_k$ , é a derivada covariante do campo  $\phi_i$ .

Desta forma, utilizando a equação (3.5), podemos obter a Lagrangiana:

$$L = \int dx (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i) = \int dx \mathcal{L} , \quad (4.6)$$

onde  $\mathcal{L}$  representa a densidade Lagrangiana. Claramente identificamos as variáveis dinâmicas  $A_x^i$  e  $\phi_i$ , sendo  $A_t^i$  interpretados como multiplicadores de Lagrange, dado que eles aparecem sem suas derivadas temporais.

No início deste capítulo vimos a definição para o momento canônico conjugado ( $\pi_i$ ), onde  $q_i(t)$  eram as coordenadas generalizadas. Para nosso modelo de campo teremos  $A_x^i(t, x)$  como coordenadas generalizadas, consideradas *a priori*, somente como funções da coordenada espacial

$x$ . Os seus momentos conjugados serão obtidos através da derivada funcional, da seguinte forma:

$$\pi_{A_x^i}(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t A_x^i(x)} \equiv \phi_i(x), \quad (4.7)$$

onde todos os campos são tomados no mesmo valor  $t$  da coordenada temporal. Portanto  $A_x^i(x)$  e  $\phi_i(x)$  constituem as coordenadas do espaço de fase.

Verificamos que para os campos  $A_t^i(x)$ , que aparecem na lagrangiana (3.6) como multiplicadores de Lagrange, os seus momentos conjugados são nulos,

$$\pi_{A_t^i}(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t A_t^i(x)} = 0, \quad (4.8)$$

indicando que a Lagrangiana que descreve a teoria é singular, ou seja, os momentos não podem ser descritos como funções independentes das velocidades.

Na terminologia de Dirac (ver apêndice C) os vínculos que aparecem da equação (3.8), decorrentes diretamente da definição de momento, são denominados vínculos primários. Para efeito de cálculo, adotaremos inicialmente,  $\pi_{A_t^i}(x) \approx 0$ , onde “ $\approx$ ” significa fracamente zero, isto é, a expressão só será anulada depois de todas as contas serem feitas.

Como condição de consistência temos que a evolução temporal de uma função  $X$  qualquer de coordenadas generalizadas  $A$  e momento  $\pi$ , deva ser zero ou fracamente zero, ou seja:

$$\dot{X} \equiv \frac{d}{dt} X = \{X, H\} + \frac{\partial}{\partial t} X \approx 0, \quad (4.9)$$

onde  $\{X, H\}$  é o parênteses de Poisson. Na próxima seção determinaremos a Hamiltoniana do sistema e verificaremos a condição de consistência para os vínculos primários obtidos pela equação (3.8).

## 4.2 Formalismo Hamiltoniano e Vínculos Secundários

Recorrendo à transformação de Legendre ( $\mathcal{H} = \pi_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ ), podemos obter a densidade Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \phi_i \partial_t A_x^i - (\partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i) = -A_t^i D_x \phi_i, \quad (4.10)$$

de onde se obtém a seguinte expressão para a Hamiltoniana

$$H = - \int dx A_t^i D_x \phi_i . \quad (4.11)$$

Os parênteses de Poisson (ver apêndice B3) para os campos e seus momentos conjugados são definidos por:

$$\{A_x^i(x), \pi_{A_x^j}(y)\} = \{A_x^i(x), \phi_j(y)\} = \delta_j^i \delta(x-y) , \quad (4.12)$$

$$\{A_x^i(x), A_x^j(y)\} = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\} = 0 . \quad (4.13)$$

Podemos então, a partir de agora, verificar se os vínculos (3.8) são estáveis, ou seja,  $\dot{\pi}_{A_t^i} = 0$ . Para isso vamos aplicar a condição de consistência vista na equação (3.9)

$$\dot{\pi}_{A_t^i} = \{\pi_{A_t^i}(x), H\} , \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &= \int \{\pi_{A_t^i}(x), -A_t^j(y) D_y \phi_j(y)\} dy , \\ &= D_x \phi_i(x) , \end{aligned} \quad (4.15)$$

observamos então que a estabilidade dos vínculos primários implica o aparecimento dos vínculos secundários  $D_x \phi_i(x) = \partial_x \phi_i + f_{ij}^k A_x^j \phi_k$ , sendo representados de agora em diante por  $\mathcal{G}_i(x)$ , onde se impõem que:

$$\mathcal{G}_i(x) = D_x \phi_i(x) \approx 0 . \quad (4.16)$$

Com isso, podemos afirmar que a Hamiltoniana (3.11) é puro vínculo, sendo nula quando estes vínculos são satisfeitos. Isto é uma característica de sistemas que apresentam covariância geral, onde a evolução temporal nada mais é que uma troca de coordenada, logo, uma invariância do sistema.

### 4.3 Vínculos de Primeira Classe e de Segunda Classe

A distinção entre vínculos primários e secundários não é essencial. Mais importante, na terminologia de Dirac, especialmente para a transição à teoria quântica, é a classificação em vínculos

de primeira e de segunda classe. Um vínculo é dito de primeira classe se seu parênteses de Poisson com qualquer outro vínculo é fracamente zero. Do contrário, o vínculo é considerado de segunda classe se pelo menos um dos parênteses de Poisson com qualquer outro vínculo não for fracamente zero.

Analisando os parênteses de Poisson dos vínculos (3.16) com a Hamiltoniana e dos vínculos entre si, obtemos:

$$\{\mathcal{G}_i(x), H\} = -A_t^i(x) f_{ij}^k \mathcal{G}_k(x) , \quad (4.17)$$

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = f_{ij}^k \delta(x-y) \mathcal{G}_k(x) , \quad (4.18)$$

indicando que a relação entre os vínculos é fracamente zero, o que nos leva a classificá-los como vínculos de primeira classe. Note que (3.17) e (3.18) correspondem a forma compacta da álgebra de Lie do grupo (A)dS.

Uma propriedade básica desses vínculos é que eles são os geradores das transformações de gauge. Realmente, definindo a transformação para uma função  $X$  qualquer do espaço de fase por

$$\delta_\epsilon X \equiv \left\{ X, \int dy \epsilon^i(y) \mathcal{G}_i(y) \right\} , \quad (4.19)$$

onde os parâmetros infinitesimais  $\epsilon^i$  são locais, temos que a Hamiltoniana é invariante por estas transformações. Isto significa que a relação entre os estados do sistema e os pontos no espaço de fase não é biunívoca, ou seja, vários pontos no espaço de fase correspondendo a um mesmo estado físico. Por isso, as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe são chamadas de transformações de gauge. O espaço de fase do sistema decompõe-se em classes de equivalência, sendo que dois pontos do espaço pertencem à mesma classe se forem relacionados por uma transformação de gauge. Os observáveis físicos, chamados invariantes de gauge, são as grandezas que independem do elemento escolhido dentro de uma mesma classe de equivalência [34].

Para os nossos campos básicos,  $A_x^i(x)$  e  $\phi_i(x)$ , temos:

$$\delta_\epsilon A_x^i = \{A_x^i(x), \mathcal{G}(\epsilon)\} = D_x \epsilon^i , \quad (4.20)$$

$$\delta_\epsilon \phi_i = \{\phi_i(x), \mathcal{G}(\epsilon)\} = [\phi, \epsilon]_i , \quad (4.21)$$

onde reconhecemos as transformações (A)dS, obtidas nas equações (2.27) e (2.28), o que indica uma invariância da teoria vinculada sob as transformações de gauge.

## 4.4 Fixação Parcial de Gauge: O Gauge Temporal

A presença de vínculos de primeira classe e as liberdades de gauge associadas, indicam que existem mais de um conjunto de variáveis canônicas que correspondem a um mesmo estado físico [35]. Isto reflete o fato de o número de graus de liberdade físicos ser menor do que o número de variáveis utilizadas para descrever a dinâmica do sistema [38]. Uma possível saída para eliminar esta ambigüidade é fixar parcialmente a invariância de gauge, mais precisamente, fixar a invariância de Lorentz local. Estabelecendo assim uma correspondência um a um entre os estados físicos e os valores das variáveis canônicas.

Tomando uma variedade bidimensional  $\mathcal{M}$  com topologia  $M_1 \times \mathcal{R}$ , onde  $M_1$  é uma variedade espacial *Riemanniana* de dimensão um, que pode ser homeomórfica à reta  $\mathfrak{R}$  ou ao círculo  $S_1$ . Denotando por  $x$  uma escolha qualquer da coordenada do espaço  $M_1$  e por  $t$  a coordenada temporal de  $\mathcal{R}$ . Assim o par  $(x, t)$  definirá as coordenadas de um ponto do espaço-tempo. Faremos uma analogia à situação vista na seção (1.4) em que utilizamos o formalismo *ADM*, sendo que agora temos o  $e_\mu^I$  indicando uma "zweibein" em  $\mathcal{M}$  e  $e_a^i$  uma "eibein" em  $M_1$ , onde

$$e_\mu^I = \begin{pmatrix} e_t^0 & e_x^0 \\ e_t^1 & e_x^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N & \chi \\ N^1 & e_x^1 \end{pmatrix}$$

Acima  $N$  e  $N^1$  são respectivamente as funções "lapso" e "shift".

Implementando canonicamente a fixação de gauge como um dos vínculos da teoria

$$e_x^0 \equiv \chi \approx 0, \quad (4.22)$$

teremos a ação (3.5) podendo ser escrita como:

$$S = \int \{ \partial_t A_x^i \phi_i + A_t^i D_x \phi_i + \beta \chi \} d^2x. \quad (4.23)$$

Observe que introduzimos um termo extra na equação,  $\beta \chi$ , onde  $\beta$  é um multiplicador de Lagrange, que fixa  $\chi = 0$ . Fazemos isso com o intuito de utilizarmos a formulação ADM

proposta anteriormente.

Escrevendo em componentes a conexão campo de gauge e o campo  $\phi$

$$\begin{aligned} A_x &= A_x^i J_i = A_x^0 J_0 + A_x^1 J_1 + A_x^2 J_2 \equiv \chi J_0 + e J_1 + w J_2 , \\ A_t &= A_t^i J_i = A_t^0 J_0 + A_t^1 J_1 + A_t^2 J_2 \equiv N J_0 + N^1 J_1 + w_t J_2 , \\ \phi &= \phi^0 J_0 + \phi^1 J_1 + \psi J_2 , \end{aligned} \quad (4.24)$$

e substituindo os resultados na ação (3.23), temos explicitamente

$$S = \int \{ \phi_0 \partial_t \chi + \phi_1 \partial_t e + \psi \partial_t w + N D_x \phi_0 + N^1 D_x \phi_1 + w_t D_x \psi + \beta \chi \} d^2 x , \quad (4.25)$$

onde, a partir desta ação, poderemos determinar os momentos conjugados e os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned} \pi_\chi &= \phi_0 & \{ \chi(x), \phi_0(y) \} &= \delta(x - y) , \\ \pi_e &= \phi_1 & \{ e(x), \phi_1(y) \} &= \delta(x - y) , \\ \pi_w &= \psi & \{ w(x), \psi(y) \} &= \delta(x - y) , \end{aligned} \quad (4.26)$$

obtendo-se os quatros vínculos primários da teoria,  $\pi_N = 0$ ,  $\pi_{N^1} = 0$ ,  $\pi_{w_t} = 0$ ,  $\pi_\beta = 0$ , ou seja, vínculos decorrentes diretamente da definição de momento.

Através da transformação de Legendre poderemos obter a Hamiltoniana

$$H = - \int (A_t^i D_x \phi_i + \beta \chi) dx , \quad (4.27)$$

onde  $D_x \phi_i(x) = \partial_x \phi_i(x) + f_{ij}{}^k A_x^j(x) \phi_k(x)$ , como foi visto na equação (3.5), é a derivada covariante. Abrindo (3.27) em componentes, teremos:

$$H = - \int (N D_x \phi_0 + N^1 D_x \phi_1 + w_t D_x \psi + \beta \chi) dx . \quad (4.28)$$

As componentes da derivada covariante, onde definimos  $D_x \phi_i(x)$  como  $\mathcal{G}_i(x)$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} D_x \phi_0(x) &= \mathcal{G}_0(x) = \partial_x \phi_0(x) + K e_x^1(x) \psi(x) - w \phi_1(x) , \\ D_x \phi_1(x) &= \mathcal{G}_1(x) = \partial_x \phi_1(x) + \sigma w \phi_0(x) - K \chi \psi , \\ D_x \psi(x) &= \mathcal{G}_2(x) = \partial_x \psi(x) + \chi \phi_1(x) - \sigma e_x^1(x) \phi_0 . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como foi discutido na seção (3.3), por uma condição de consistência os vínculos primários não devem apresentar evolução temporal. No entanto, o que se viu, foi que esta condição implicava a existência dos vínculos secundários  $\mathcal{G}_i(x)$ . Desta forma, temos os três vínculos  $\mathcal{G}_0(x)$ ,  $\mathcal{G}_1(x)$ ,  $\mathcal{G}_2(x)$  e mais um quarto vínculo  $\mathcal{G}_3(x) = \chi$ , determinado pela condição de consistência do vínculo primário  $\pi_\beta$ , devido a fixação parcial de gauge feita inicialmente. Teremos então para ação (3.25) a seguinte expressão

$$S = \int d^2x \{ \phi_0 \partial_t \chi + \phi_1 \partial_t e_x^1 + \psi \partial_t w + N(\partial_x \phi_0 + k e_x^1 \psi - w \phi_1) + N^1(\partial_x \phi_1 + \sigma w \phi_0 - k \chi \psi) + w_t (\partial_x \psi + \chi \phi_1 - \sigma e_x^1 \phi_0) + \beta \chi \} , \quad (4.30)$$

onde as equações de movimento são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta e_x^1} &= -\partial_t \phi_1 + N K \psi - \sigma \omega_t \phi_0 & \frac{\delta S}{\delta \omega} &= -\partial_t \psi - N \phi_1 + N^1 \sigma \phi_0 \\ \frac{\delta S}{\delta \phi_1} &= \partial_t e_x^1 - N \omega - \partial_x N^1 + & \frac{\delta S}{\delta \psi} &= \partial_t \omega + N k e_x^1 - \partial_x \omega_t \\ \frac{\delta S}{\delta \phi_0} &= -\partial_x N + \sigma N^1 \omega - \sigma e_x^1 \omega_t & \frac{\delta S}{\delta \chi} &= -\partial_t \phi_0 - N_1 k \psi + \omega(t) \phi_1 + \beta \\ \frac{\delta S}{\delta \beta} &= \chi & \frac{\delta S}{\delta N} &= G_0 \\ \frac{\delta S}{\delta N^1} &= G_1 & \frac{\delta S}{\delta \omega_t} &= G_2 . \end{aligned} \quad (4.31)$$



## 4.5 Álgebra Clássica dos Vínculos

Na equação (3.18) identificamos que os parênteses de Poisson entre os vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$  e  $\mathcal{G}_j(y)$  podem ser obtidos a partir da álgebra (A)dS, onde as constantes de estrutura foram determinadas na equação (2.18). Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_2(y)\} &= f_{12}^0 \delta(x-y) \mathcal{G}_0(x) = \sigma \delta(x-y) \mathcal{G}_0(x) , \\ \{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_0(y)\} &= f_{20}^1 \delta(x-y) \mathcal{G}_1(x) = \delta(x-y) \mathcal{G}_1(x) , \\ \{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_1(y)\} &= f_{01}^2 \delta(x-y) \mathcal{G}_2(x) = k \delta(x-y) \mathcal{G}_2(x) , \end{aligned} \quad (4.32)$$

com os demais parênteses sendo nulos, indicando que todos são vínculos de primeira classe.

Com a fixação de gauge mediante a imposição do vínculo adicional  $\mathcal{G}_3(x) = \chi$ , constatamos que a álgebra (3.18) não se fecha mais. Temos a partir de agora um conjunto de vínculos de segunda classe, ou seja, nem todos os parênteses de Poisson são zero ou fracamente zero

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= -\partial_x \delta(x-y) \quad ; \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_0(y)\} = -\partial_x \delta(x-y) , \\ \{\mathcal{G}_1(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= -\sigma w \delta(x-y) \quad ; \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_1(y)\} = \sigma w \delta(x-y) , \\ \{\mathcal{G}_2(x), \mathcal{G}_3(y)\} &= \sigma e_x^1 \delta(x-y) \quad ; \quad \{\mathcal{G}_3(x), \mathcal{G}_2(y)\} = -\sigma e_x^1 \delta(x-y) . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Representando a álgebra desses vínculos na forma matricial, teremos

$$\{\mathcal{G}_\alpha(x), \mathcal{G}_\beta(y)\} = C_{\alpha\beta}(x, y) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma w \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e_x^1 \\ -\partial_x & \sigma w & -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y) , \quad (4.34)$$

onde  $(\alpha \text{ e } \beta = 0, 1, 2, 3)$ . Os elementos da matriz  $C_{\alpha\beta}(x, y)$  são os parênteses de Poisson entre os vínculos.

Com a finalidade de separarmos os vínculos de primeira classe dos de segunda classe, faremos a seguinte redefinição:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x) &\rightarrow \mathcal{G}'_0(x) = (e_x^1)^2 \mathcal{G}_0(x) - \sigma (\partial_x e_x^1) \mathcal{G}_2(x) + \sigma e_x^1 \partial_x \mathcal{G}_2(x) , \\ \mathcal{G}_1(x) &\rightarrow \mathcal{G}'_1(x) = e_x^1(x) \mathcal{G}_1(x) + w(x) \mathcal{G}_2(x) , \\ \mathcal{G}_2(x) &\rightarrow \mathcal{G}'_2(x) = \mathcal{G}_2(x) , \\ \mathcal{G}_3(x) &\rightarrow \mathcal{G}'_3(x) = \mathcal{G}_3(x) . \end{aligned} \quad (4.35)$$

No caso de  $\mathcal{G}_0(x)$  e  $\mathcal{G}_1(x)$ , qualquer combinação linear dos vínculos é um vínculo também e, na prática, os vínculos são escolhidos de modo a maximizar o número de vínculos de primeira classe. Com isso obtemos

$$\mathcal{C}'_{\alpha\beta}(x, y) = \left\{ \mathcal{G}'_{\alpha}(x), \mathcal{G}'_{\beta}(y) \right\} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma e_x^1 \\ 0 & 0 & -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) , \quad (4.36)$$

de forma que podemos separar por completo os vínculos de primeira classe  $\mathcal{G}'_0(x)$  e  $\mathcal{G}'_1(x)$ , dos de segunda classe  $\mathcal{G}'_2(x)$  e  $\mathcal{G}'_3(x)$ .

Nessa situação, Dirac mostrou [37] que a matriz com elementos iguais aos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe é necessariamente não singular

$$\mathcal{C}'_{ab} \approx \begin{pmatrix} 0 & \sigma e_x^1 \\ -\sigma e_x^1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) \quad e \quad \mathcal{C}'^{ab} \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sigma}{e_x^1} \\ \frac{\sigma}{e_x^1} & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y) ,$$

com ( $a$  e  $b = 2, 3$ ), onde se cumpre que  $\mathcal{C}'^{ab} \mathcal{C}'_{bc} = \delta_c^a$ . A partir de agora adotaremos apenas  $e$  para indicar a componente  $e_x^1$ .

A observação de Dirac permite efetivamente eliminar os vínculos de segunda classe, a partir da substituição dos parênteses de Poisson por parênteses de Dirac, definidos como:

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}_D = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} - \left\{ \mathcal{A}, \mathcal{G}'_a \right\} \mathcal{C}'^{ab} \left\{ \mathcal{G}'_b, \mathcal{B} \right\} , \quad (4.37)$$

onde  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são funcionais dos campos  $\chi, e, w, \phi_0, \phi_1,$  e  $\psi$ . A utilização desses colchetes permite que os vínculos de segunda classe possam ser tomados como igualdades fortes.

Para  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B} \neq \phi_0$ , o parêntese de Dirac é igual ao parêntese de Poisson

$$\{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(y)\}_D = \{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(y)\} ,$$

desta forma teremos para nossos campos básicos independentes  $e, w$  e seus momentos conjuga-

dos  $\phi_1, \psi$  os seguintes parênteses:

$$\begin{aligned} \{e(x), \phi_1(y)\}_D &= \delta(x - y) , \\ \{w(x), \psi(y)\}_D &= \delta(x - y) , \end{aligned} \quad (4.38)$$

com os demais colchetes sendo nulos. Se  $\mathcal{B} = \phi_0$  a relação passa a ser

$$\{\mathcal{A}(x), \phi_0(y)\}_D = \{\mathcal{A}(x), \phi_0(y)\} - \left\{ \mathcal{A}(x), \mathcal{G}'_2(y) \right\} \frac{\sigma}{e(y)} - \left\{ \mathcal{A}(x), \mathcal{G}'_3(y) \right\} \frac{\sigma \phi_1(y)}{e(y)} ,$$

onde a partir da propriedade (C.30) [35] temos que:

$$\left\{ \mathcal{A}(x), \mathcal{G}'_a(y) \right\}_D = 0 \quad \forall \mathcal{A}(x) , \quad (4.39)$$

desta forma os vínculos de segunda classe passam a ser fortemente iguais a zero, ou seja,

$$\mathcal{G}'_2 = 0 , \quad (4.40)$$

$$\mathcal{G}'_3 = 0 , \quad (4.41)$$

tendo como soluções a fixação de gauge ( $\chi = 0$ ) para o vínculo  $\mathcal{G}'_3$  e ( $\phi_0 = \sigma \frac{\partial \psi}{e}$ ) para o vínculo  $\mathcal{G}'_2$ . Sendo que ao substituírmos

$$\phi_0 \longrightarrow \frac{\sigma}{e} \partial \psi \quad (4.42)$$

na equação (3.35), adotaremos uma ordem específica dada por campo-momento. Este ordenamento é irrelevante a nível clássico, mas será importante quando se for determinar a álgebra quântica dos vínculos.

Após a eliminação dos vínculos de segunda classe, teremos somente

$$\mathcal{G}'_0(x) = e^2 \mathcal{G}_0(x) = \sigma e \partial_x^2 \psi - \sigma \partial_x e \partial_x \psi + k e^3 \psi - e^2 w \phi_1 , \quad (4.43)$$

$$\mathcal{G}'_1(x) = e \mathcal{G}_1(x) = e \partial_x \phi_1 + w \partial_x \psi , \quad (4.44)$$

e a partir da contagem do número de graus de liberdade [35],

$$2 \times \binom{n^\circ \text{ de graus}}{\text{de liberdade}} = \binom{n^\circ \text{ total de variáveis}}{\text{canônicas}} - \binom{n^\circ \text{ de vínculos de}}{\text{segunda classe originais}} \\ - 2 \times \binom{n^\circ \text{ de vínculos de}}{\text{primeira classe}} ,$$

concluimos que a teoria é topológica, ou seja, apresenta número de graus de liberdade igual a zero:

$$2 \times \binom{n^\circ \text{ de graus}}{\text{de liberdade}} = 4 - 0 - 2 \times 2 \\ = 0 .$$

É interessante ressaltarmos que este resultado poderia ser obtido mesmo antes da fixação parcial de gauge.

Um importante resultado encontrado a partir da determinação dos parênteses de Dirac entre os vínculos, é a álgebra

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_0(\eta)\}_D &= \sigma \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) e^2 \mathcal{G}'_1(x) , \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\}_D &= - \int dx (2\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \mathcal{G}'_0(x) , \\ \{\mathcal{G}'_1(\epsilon), \mathcal{G}'_1(\eta)\}_D &= - \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \mathcal{G}'_1(x) , \end{aligned} \quad (4.45)$$

O que confirma que  $\mathcal{G}'_0(x)$  e  $\mathcal{G}'_1(x)$  são de primeira classe, logo, os geradores das transformações de gauge que deixam a teoria invariante. Adotaremos futuramente para efeito de cálculo a forma integral dos vínculos:  $\mathcal{G}'_i(\epsilon) = \int dx \epsilon \mathcal{G}'_i(x)$ .

Calculando agora os parênteses de Dirac dos vínculos com os campos, teremos os seguintes resultados para  $\mathcal{G}'_0(x)$ :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), e(y)\}_D &= \epsilon(y) e^2(y) \omega(y) , \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \phi_1(y)\}_D &= \sigma \epsilon(y) \partial_y^2 \psi(y) + \sigma \partial_y (\epsilon \partial \psi) - 2\epsilon e(y) \omega(y) \phi_1(y) \\ &\quad + 3k \epsilon(y) e^2(y) \psi(y) , \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), w(y)\}_D &= -\sigma \partial_y^2 (\epsilon e) - \sigma \partial_y (\epsilon \partial_y e) - k \epsilon(y) e^3(y) , \\ \{\mathcal{G}'_0(\epsilon), \psi(y)\}_D &= -\epsilon(y) e^2(y) \phi_1(y) , \end{aligned} \quad (4.46)$$

e para  $\mathcal{G}'_1$ :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), e(y) \right\}_D &= \partial_y(\epsilon e) , \\
 \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), \phi_1(y) \right\}_D &= \epsilon(y) \partial_y \phi_1(y) , \\
 \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), \omega(y) \right\}_D &= \partial_y(\epsilon \omega) , \\
 \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), \psi(y) \right\}_D &= \epsilon(y) \partial_y \psi(y) .
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

A partir daí, com todos os parênteses tendo sido determinados, e visto que os vínculos  $\mathcal{G}'_0(x)$  e  $\mathcal{G}'_1(x)$  geram as transformações de gauge, resta-nos verificar no próximo capítulo se estes vínculos são também os geradores dos difeomorfismos da teoria.

## Capítulo 5

# Invariância da Teoria Sob os Difeomorfismos

Neste capítulo mostraremos a covariância geral da teoria, também conhecida como invariância de difeomorfismo, onde as leis da física permanecem invariantes sob transformações arbitrárias de coordenadas. Verificaremos que os campos  $e$ ,  $\phi_1$ ,  $\omega$  e  $\psi$  devem permanecer invariantes sob os geradores dos difeomorfismos  $\mathcal{G}'_0$  e  $\mathcal{G}'_1$ .

Há duas interpretações geométricas para os difeomorfismos conhecidas como: *passivo* e *ativo*. Mais precisamente, o difeomorfismo passivo refere-se à invariância sob mudanças de coordenadas, isto é, o mesmo objeto é representado em diferentes sistemas de coordenadas. Já o difeomorfismo ativo relaciona diferentes objetos em  $\mathcal{M}$  no mesmo sistema de coordenadas [1,19]. Enquanto o primeiro atua no espaço das funções de  $g_{\mu\eta}$ , o segundo atua no espaço de métrica  $d_g$ , onde  $d$  é a distância entre dois pontos quaisquer da variedade  $\mathcal{M}$ .

Um bom exemplo de invariância sob difeomorfismo ativo são as equações da relatividade geral, onde esta simetria é uma das definições características da teoria. Isto diferencia a relatividade geral de outras teorias de campo. LQG preserva esta simetria mas exige que os estados físicos permaneçam invariantes sob os geradores dos difeomorfismos. Esta condição é bem entendida para um difeomorfismo puramente espacial, no entanto, o entendimento de difeomorfismo envolvendo tempo (Hamiltoniana vinculada) é mais sutil pois está relacionado à dinâmica e do chamado problema do tempo em relatividade geral.

## 5.1 Difeomorfismo

Dada uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$ , um difeomorfismo ativo  $\varphi$  atuando localmente em todos os campos é definido como um mapeamento suave inversível entre as variedades, ou seja,  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , sendo que cada elemento de  $\mathcal{M}$  é associado a um único elemento de  $\mathcal{M}$ . Dependendo da característica do campo em que atuamos  $\varphi$  (representado pela derivada de Lie) teremos:

$$\mathcal{L}_\xi = \begin{cases} \delta_\xi e_\mu^I(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda e_\mu^I(x) + \partial_\mu \xi^\lambda e_\lambda^I ; \\ \delta_\xi \phi(x) = \xi_\mu \partial_\mu \phi(x) , \end{cases}$$

sendo  $e_\mu^I(x)$  um campo vetorial e  $\phi(x)$  um campo escalar, onde  $\mu$  e  $\lambda$  ( $= x, t$ ).

Desta forma, utilizando as relações (3.46) e (3.47) assim como as equações de movimento obtidas em (3.31), teremos as transformações sob os difeomorfismos geradas pelos vínculos  $\mathcal{G}'_0$  e  $\mathcal{G}'_1$ , o que confirma a invariância da teoria.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{G}'_0(\epsilon), \phi_1(y) \right\}_D &= 2 \frac{\epsilon}{e} \mathcal{G}'_0(y) + \frac{\xi^x}{e} \mathcal{G}'_1(y) - \xi^t \frac{\delta S}{\delta e} - \sigma \frac{\epsilon}{N} \partial_y \psi \frac{\delta S}{\delta \phi_0} - \frac{\Delta L}{e} \partial_y \psi \\ &\quad + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} \phi_1(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_0(\epsilon), \psi(y) \right\}_D &= -\xi^t \frac{\delta S}{\delta w} + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} \psi(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_0(\epsilon), e(y) \right\}_D &= -\sigma \xi^t \frac{\delta S}{\delta \phi_1} + \sigma \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} e(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_0(\epsilon), w(y) \right\}_D &= -\sigma \xi^t \frac{\delta S}{\delta \psi} + \sigma \Delta L + \mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)} w(y) , \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $\Delta L = \partial_y(\epsilon e \partial_y N/N - \partial_y(\epsilon e) - \epsilon \partial_y e)$ ,  $\xi^t = \epsilon e^2/N$  e  $\xi^x = -\epsilon e N^1/N$ . Sendo  $\mathcal{L}_{(\xi^t, -\xi^x)}$  as derivadas de Lie que expressam os difeomorfismos temporais e espaciais na direção dos vetores  $(\xi^t, -\xi^x)$ .

Analogamente:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), \phi_1(y) \right\}_D &= \epsilon(y) \partial_y \phi_1(y) = \mathcal{L}_\epsilon \phi_1(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), \psi(y) \right\}_D &= \epsilon(y) \partial_y \psi(y) = \mathcal{L}_\epsilon \psi(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), e(y) \right\}_D &= \partial_y(\epsilon(y) e(y)) = \mathcal{L}_\epsilon e(y) , \\ \left\{ \mathcal{G}'_1(\epsilon), w(y) \right\}_D &= \partial_y(\epsilon(y) w(y)) = \mathcal{L}_\epsilon w(y) . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Observando estas transformações infinitesimais vemos que o vínculo  $\mathcal{G}'_1$  é o gerador da simetria residual da teoria, e que  $\mathcal{G}'_0$  gera os difeomorfismos temporais a menos de difeomorfismos espaciais e equações de movimento. É interessante notarmos que poderíamos ter trabalhado com as equações de movimento obtidas a partir da ação (3.30) fixando  $\chi = 0$ , mesmo perdendo a invariância de difeomorfismo da teoria, pois o termo  $\Delta L$  (gauge de Lorentz) que aparece em  $\mathcal{G}'_0$  restaura a invariância perdida na fixação.

## 5.2 Análise da Hamiltoniana Final

A partir de agora a Hamiltoniana final poderá ser expressa somente em função dos vínculos de primeira classe  $\mathcal{G}'_0$  e  $\mathcal{G}'_1$ , pois os vínculos de segunda classe que geravam inconsistências na teoria foram eliminados com a introdução dos parênteses de Dirac. Desta forma, o que teremos é o seguinte:

$$\begin{aligned} H_F &= - \int dy \left\{ \zeta \mathcal{G}'_0(y) + \zeta^1 \mathcal{G}'_1(y) \right\} , \\ &= - \mathcal{G}'_0(\zeta) - \mathcal{G}'_1(\zeta^1) , \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\zeta$  e  $\zeta^1$  são parâmetros arbitrários.

Sabendo-se que as equações de movimento das variáveis dinâmicas  $q$  e  $p$  podem ser obtidas a partir de sua evolução temporal

$$\begin{aligned} \partial_t q &= \{q, H_T\}_D = \frac{\partial H}{\partial p} , \\ \partial_t p &= \{p, H_T\}_D = - \frac{\partial H}{\partial q} , \end{aligned}$$

utilizando (4.3), assim como os resultados encontrados em (3.46) e (3.47), determinaremos as equações de movimento para os campos independentes  $e, \omega, \psi$  e  $\phi_1$

$$\begin{aligned} \partial_t e(x) &= \zeta e^2(x) \omega(x) + \partial_x (\zeta^1 e) , \\ \partial_t \omega(x) &= -\sigma \partial_x (\zeta \partial e) - \sigma \partial_x^2 (\zeta e) - K \zeta(x) e^3(x) + \partial_x (\zeta^1 \omega) , \\ \partial_t \psi(x) &= -\zeta e^2(x) \phi_1(x) + \zeta^1 \partial_x \psi , \\ \partial_t \phi_1(x) &= \sigma \partial_x (\zeta \partial \psi) + \sigma \zeta \partial_x^2 \psi - 2 \zeta e(x) \omega(x) \phi_1(x) + 3 K \zeta e^2(x) \psi(x) + \zeta^1 \partial_x \phi_1 . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se introduzirmos nas equações de movimento (3.31) a fixação de gauge  $\chi = 0$  e  $\phi_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} \partial \psi$ ,



além de substituírmos o campo  $\omega_t$  por

$$\omega_t = \frac{N^1}{e} \omega_x - \sigma \frac{\partial_x N}{e}, \quad (5.5)$$

teremos o mesmo resultado para as equações de movimento obtidas em (4.4) após a fixação, com  $\zeta = \frac{N}{e^2}$  e  $\zeta^1 = \frac{N^1}{e}$ .

## Capítulo 6

# Preparação para Quantização de "Loops"

Uma vez estudada a parte clássica da teoria e vendo a consistência dos vínculos, procederemos à preparação para quantização, onde os parênteses de Dirac serão substituídos por comutadores. Qualquer função  $X$  do espaço de fase será representada por um operador linear  $\hat{X}$  atuando em um espaço de Hilbert "cinemático" ( $\mathcal{K}$ ), logo teremos a partir de agora os vínculos  $\hat{\mathcal{G}}_0$  e  $\hat{\mathcal{G}}_1$  sendo tratados como operadores.

A partir de um ordenamento específico entre os campos, verifica-se que a álgebra dos comutadores dos operadores correspondentes aos vínculos reproduzem a mesma álgebra clássica dada pelos colchetes de Dirac (3.44). O primeiro passo para construir uma teoria quântica é escolher um conjunto de vetores  $|\Psi\rangle$  sob o espaço de fase e então representá-los no espaço de Hilbert, para que desta forma possamos impor os vínculos da teoria sob os estados físicos.

## 6.1 Álgebra dos Campos e dos Vínculos

Escrevendo os campos clássicos como operadores, os vínculos passam a ser definidos da seguinte forma:

$$: \widehat{\mathcal{G}}'_0(x) : = \widehat{\mathcal{G}}_0(x) \widehat{e}^2 = \sigma \partial_x^2 \widehat{\psi} \widehat{e} - \sigma \partial_x \widehat{\psi} \partial_x \widehat{e} + k \widehat{\psi} \widehat{e}^3 - \widehat{w} \widehat{\phi}_1 \widehat{e}^2 \quad (6.1)$$

$$: \widehat{\mathcal{G}}'_1(x) : = \widehat{\mathcal{G}}_1(x) \widehat{e} = \partial_x \widehat{\phi}_1 \widehat{e} + \widehat{w} \partial_x \widehat{\psi} , \quad (6.2)$$

onde  $:$  indica que os vínculos foram escritos com um ordenamento específico dos campos, como vimos em (3.42). Além disso, temos também que o fato do operador  $\widehat{e}$  estar sendo multiplicado à direita de  $\widehat{\phi}_1$ , assim como  $\partial_x \widehat{\psi}$  estar à direita de  $\widehat{w}$ , é uma definição de ordenamento que permitirá reproduzir a álgebra quântica dos vínculos análogamente a álgebra clássica.

Através do princípio de correspondência (C.26), onde os parênteses de Dirac dos campos transformam-se em comutadores:

$$\{X, Y\}_D \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\widehat{X}, \widehat{Y}] , \quad (6.3)$$

teremos as seguintes relações de comutação dos operadores básicos de campo

$$[\widehat{e}(x), \widehat{\phi}_1(y)] = i\hbar \delta_n(x - y) , \quad (6.4)$$

$$[\widehat{w}(x), \widehat{\psi}(y)] = i\hbar \delta_n(x - y) , \quad (6.5)$$

com os outros comutadores sendo nulos. As ambigüidades que se originam a partir dos comutadores de

$$[\widehat{e}(x), \widehat{\phi}_1(x)] = a \delta_n(0) ,$$

e de

$$[\widehat{w}(x), \partial \widehat{\psi}(x)] = b \partial \delta_n(0) ,$$

serão contornadas com a redefinição dos vínculos

$$\tilde{\mathcal{G}}_0 = : \widehat{\mathcal{G}}_0' : + 2 a \omega e , \quad (6.6)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = : \widehat{\mathcal{G}}_1' : + b \partial \delta_n(0) , \quad (6.7)$$

onde  $a$  e  $b$  carregam, respectivamente, as ambigüidades.

Para controlar possíveis singularidades a curtas distâncias, introduzimos uma regularização  $\delta_n(x - y)$  da distribuição de Dirac, sendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x - y) = \delta(x - y) . \quad (6.8)$$

Esta função  $\delta_n(x - y)$  pode ser tomada como o pico gaussiano,

$$\delta_n(x - y) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-y)^2} , \quad (6.9)$$

onde valem as seguintes propriedades para a função  $\delta_n(x - y)$ :

1.  $\partial_x \delta_n(x - y) = \frac{-2n^3}{\sqrt{\pi}} (x - y) e^{-n^2(x-y)^2} ;$
2.  $\delta_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} ;$
3.  $\partial_x \delta_n(0) = 0 ;$
4.  $\partial_x \delta_n(x - y) \delta_n(x - y) = \frac{1}{2} \partial_x \delta_n^2(x - y) .$

Desta forma teremos:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} \left[ \tilde{\mathcal{G}}_0(\epsilon), \tilde{\mathcal{G}}_0(\eta) \right] &= \sigma \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \left\{ (\widehat{e})^2 (\tilde{\mathcal{G}}_1(x) - b) + a e \partial_x e \right\} , \\ -\frac{i}{\hbar} \left[ \tilde{\mathcal{G}}_0(\epsilon), \tilde{\mathcal{G}}_1(\eta) \right] &= - \int dx \left\{ (2\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \tilde{\mathcal{G}}_0(x) - \epsilon \partial \eta a \omega e \right\} , \\ -\frac{i}{\hbar} \left[ \tilde{\mathcal{G}}_1(\epsilon), \tilde{\mathcal{G}}_0(\eta) \right] &= \int dx \left\{ (2\eta \partial_x \epsilon - \epsilon \partial_x \eta) \tilde{\mathcal{G}}_0(x) - \eta \partial \epsilon a \omega e \right\} , \\ -\frac{i}{\hbar} \left[ \tilde{\mathcal{G}}_1(\epsilon), \tilde{\mathcal{G}}_1(\eta) \right] &= - \int dx (\epsilon \partial_x \eta - \eta \partial_x \epsilon) \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_1(x) - b \right\} . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Impondo que  $a$  e  $b$  sejam nulos, teremos que a comutação dos vínculos quânticos é equivalente a seu análogo clássico (3.45). Para a quantização temos como objetivo construir um espaço de

Hilbert onde a álgebra (5.10) seja satisfeita. Desta forma podemos impor os vínculos da teoria sob os estados físicos  $|\Psi\rangle$ , que são os vetores do espaço de fase,

$$\tilde{\mathcal{G}}_I(\epsilon) |\Psi\rangle , \quad (6.11)$$

onde (5.11) representa a equação de Wheeler-DeWitt.

## 6.2 Espaço de Hilbert Cinemático $\mathcal{K}$

Nesta seção apresentaremos uma descrição heurística da construção do espaço de Hilbert cinemático definido sobre o espaço linear  $S$  de todos os funcionais  $\Psi[A]$ , como vimos na seção 1.4. Introduziremos um produto interno, pois uma medida apropriada no espaço dos estados quânticos é necessária. Este produto é construído por meio de uma classe especial de funções denominadas "funções cilíndricas". Para sua construção nós precisaremos das ferramentas utilizadas em (1.44), ou seja, as holonomias.

A relação de comutação dos operadores básicos foram obtidos em (5.4) e (5.5). Escolhendo como conjunto máximo de variáveis básicas comutantes os campos  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{w}(x)$ , um estado pode ser representado por um funcional  $\Psi[\hat{\phi}, \hat{w}]$ . O conjunto desses funcionais constitui o espaço cinemático  $\mathcal{K}$  sob as seguintes condições:

1. Existe um produto escalar hermitiano;
2. Os operadores  $\hat{\phi}(x)$  e  $\hat{w}(x)$  atuam pela multiplicação por  $\phi(x)$  e  $\omega(x)$ ;
3. Os operadores conjugados que atuam pelas derivadas funcionais devem ser definidos como operadores essencialmente auto-adjuntos

$$\hat{e}(x) = i\hbar \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}(x)} , \quad (6.12)$$

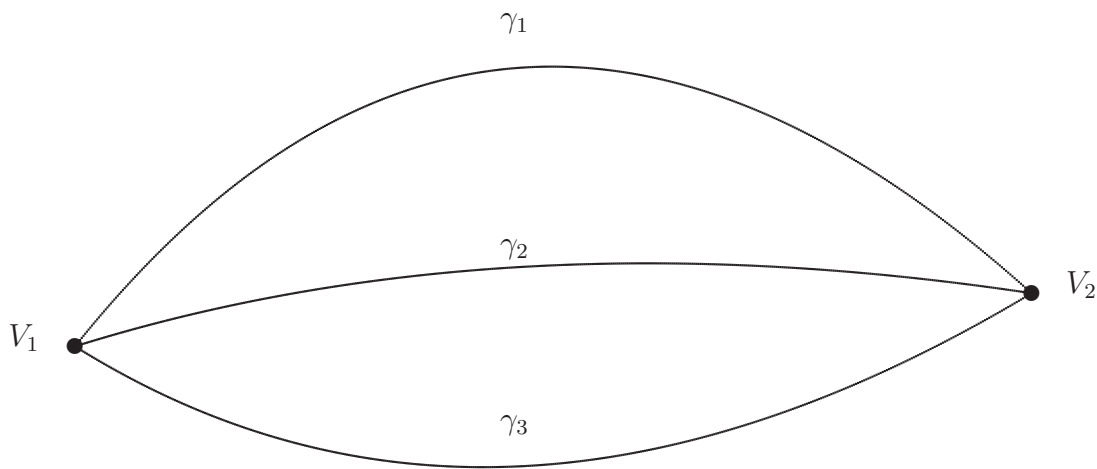
$$\hat{\psi}(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \hat{w}(x)} . \quad (6.13)$$

O análogo em  $(3 + 1)$  dimensões para o funcional  $\Psi[\hat{w}, \hat{\phi}]$  seria o funcional dado por  $\Psi[A, \phi]$ , onde neste caso o campo escalar  $\phi$  descreveria matéria. No entanto, para o caso bidimensional  $\hat{\phi}$  é um campo associado à geometria.

### 6.3 Técnicas de Loop

A idéia sugerida por Rovelli e Smolin em 1988 foi de ao invés de tomarmos os funcionais  $\Psi[A]$  de todas as conexões  $A$ , tomarmos as funções  $\Psi[U[A, \gamma]]$  de todos os "loop de Wilson". Esta análise foi vista no final da seção 1.4.

O "loop de Wilson" é um caso particular de um grafo  $\Gamma$ , que como vimos é constituído por um conjunto de caminhos orientados denominados links ( $\gamma$ ), cuja extremidade de cada link junta-se nos vértices  $V$ . Podemos ter como exemplo o grafo abaixo que contém 3 links e 2 vértices.



De forma análoga utilizaremos, para o caso bidimensional, a mesma idéia sugerida anteriormente, lembrando somente que agora não temos mais um grupo de gauge, tal como o  $SU(2)$  da teoria em (3+1) dimensões [1], mas somente o grupo gerado pelos dois vínculos  $\mathcal{G}_I$  que correspondem a difeomorfismos.

Assim teremos as seguintes holonomias,

$$U_\gamma[\omega] = \exp \left[ i \int_\gamma dy \omega(y) \right], \quad (6.14)$$

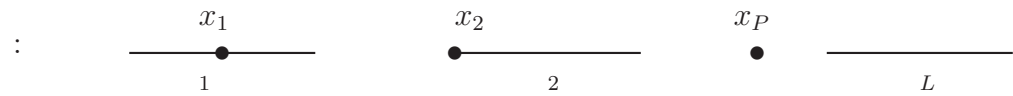
$$V_x[\phi] = \exp [-i \phi(x)], \quad (6.15)$$

como argumento do funcional de onda  $\Psi$ , ou seja,  $\Psi[U_\gamma[\omega], V_x[\phi]]$ . Sendo  $\gamma$  um segmento qualquer e  $x$  um ponto qualquer da variedade espacial  $M_1$ . As holonomias se tornam os operadores

que criam os "estados de loop", o que caracteriza a técnica utilizada na "loop quantum gravity".

O conjunto das holonomias (5.11) e (5.12), para todos os segmentos  $\gamma$  e pontos  $x$  de  $M_1$ , define o espaço de configuração da teoria. Funcionais particulares desse espaço são conhecidas como "funções cilíndricas" que, para serem obtidas, precisaremos dos seguintes ingredientes:

1. Um grafo geral que será designado por:

$$\Gamma = \{x_1, \dots, x_p, \gamma_1, \dots, \gamma_l\} ,$$


The diagram shows a sequence of horizontal line segments representing links. The first link is labeled '1' below it and has a point labeled  $x_1$  above it. The second link is labeled '2' below it and has a point labeled  $x_2$  above it. The third link is labeled 'L' below it and has a point labeled  $x_P$  above it. A vertical colon is to the left of the first link.

Observe que os pontos podem estar localizados no meio dos links como em  $x_1$ , nas extremidades dos links como em  $x_2$  ou fora deles como em  $x_p$ .

2. Uma função complexa de  $P + L$  variáveis reais, ou seja,  $f : \mathfrak{R}^{P+L} \rightarrow \mathcal{C}$

$$f(u, v) = f(u_1, \dots, u_L, v_1, \dots, v_p) .$$

A "função cilíndrica" associada a  $f$  é o funcional definido por:

$$\Psi_{\Gamma, f}[\omega, \phi] = f(U_{\gamma_1}, \dots, U_{\gamma_L}, V_{x_1}, \dots, V_{x_P}) , \quad (6.16)$$

onde os  $U$  e  $V$  são as holonomias. O espaço cinemático  $\mathcal{K}$  é então definido como o espaço vetorial de todas as combinações lineares de funções cilíndricas, completado a respeito da norma induzida por um produto interno que será definido em trabalhos futuros.

# Capítulo 7

## Conclusão

Nesta dissertação apresentamos uma análise do modelo de Jackiw-Teitelboim para a teoria da gravitação bidimensional, sendo o campo gravitacional acoplado a um campo escalar na presença da constante cosmológica. A partir da seção 2.4 introduzimos a teoria  $BF$ , que como foi visto apresenta invariância de gauge, e mostramos a equivalência com a ação de Jackiw-Teitelboim. Logo, a ação para a gravitação bidimensional pode ser obtida da ação  $BF$ .

Nos capítulos 3 e 4 temos a parte fundamental deste trabalho onde o formalismo Hamiltoniano é apresentado. Este tratamento indica a presença de vínculos na teoria, onde a partir da terminologia de Dirac é possível classificá-los e identificá-los perfeitamente. Uma vez que o parênteses de Poisson entre os vínculos  $\mathcal{G}_i(x)$  é fracamente zero, verifica-se que estes são de primeira classe, tendo como propriedade básica serem os geradores das transformações de gauge.

A partir daí fizemos uma fixação parcial da invariância de gauge seguindo os passos do que foi feito em  $(3+1)$  dimensões, sendo que os vínculos de segunda classe que surgem dessa fixação são resolvidos explicitamente com a introdução do método de Dirac. Um importante resultado encontrado foi o fechamento da álgebra dos vínculos  $\mathcal{G}'_I$  em relação aos parênteses de Dirac, equação (3.45), confirmando que estes vínculos são os geradores das transformações de gauge que deixam a teoria invariante.

Visto que  $\mathcal{G}'_I$  geram as transformações de gauge, foi necessário verificar a covariância geral da teoria, onde todos os campos devem permanecer invariantes sob os geradores de difeomorfismos. Este resultado foi mostrado nas equações (4.1) e (4.2), tendo  $\mathcal{G}'_0$  como gerador dos difeomorfismos temporais e espaciais, a menos equações de movimento, e  $\mathcal{G}'_1$  como gerador da simetria



residual da teoria.

A preparação para a quantização canônica consiste em substituir os parênteses de Dirac por comutadores, onde se faz necessário um ordenamento específico de campos para que a álgebra clássica seja análoga a álgebra quântica. As ambigüidades que surgem nas equações (5.6) e (5.7) são controladas com a introdução de uma regularização  $\delta_n$  da distribuição de Dirac, obtendo desta forma, na equação (5.10), o fechamento da álgebra quântica. O próximo passo foi definir heurísticamente um espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{K}$  de todos os funcionais  $\Psi$  que serviria de base para uma representação da álgebra dos vínculos.

A proposta da quantização da gravitação bidimensional baseada nas idéias do formalismo de "loops", onde as holonomias são os argumentos do funcional de onda  $\Psi$ , segue o que foi feito em (3+1), verificando apenas que não existe neste caso um grupo de gauge como  $SU(2)$  no caso da Relatividade Geral, mas somente o grupo de difeomorfismos gerado pelos vínculos  $\mathcal{G}'$ . O conjunto de holonomias sob a variedade espacial  $M_1$  define o espaço de configuração da teoria, onde funções especiais (funções cilíndricas) são obtidas. Desta forma, o espaço de Hilbert cinemático seria definido como um espaço vetorial de todas as combinações lineares dessas funções.

O trabalho é então finalizado, com a perspectiva de que a partir deste ponto possamos implementar os vínculos a nível quântico, construir o espaço de Hilbert cinemático e por fim estudar a dinâmica desta teoria. No atual estágio verificamos que a construção do espaço de Hilbert é bastante similar à construção da cosmologia quântica de loops. Este é o tema que pretendemos abordar em nossas futuras investigações, bem como o acoplamento com matéria a esta teoria.

# Apêndice A

## Formalismo de Primeira Ordem

Neste apêndice faremos uma breve revisão do formalismo de primeira ordem da geometria Riemanniana [33,39]. Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade  $m$ -dimensional diferenciável com métrica  $g$ , a base das coordenadas para o espaço tangente  $T_x\mathcal{M}$  e para o espaço cotangente  $T_x^*\mathcal{M}$  no ponto  $x \in \mathcal{M}$ , é representada respectivamente pela derivada  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$  e pela diferencial  $dx^\mu$  [22]. O índice ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) indica as coordenadas locais do espaço-tempo.

Introduziremos em cada ponto da variedade um conjunto de vetores ( $e_I$ ) que formam uma base ortonormal, conhecido por *tetradas* ou "m-beins". Dependendo da dimensão ( $m$ ) em que estejamos trabalhando teremos: *vierbein* (quatro), *dreibein* (três) e *zweibein* (duas dimensões). Desta forma podemos decompor a métrica  $g_{\mu\nu}$  na base de tetradas

$$g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e^I{}_\mu(x) e^J{}_\nu(x) , \quad (\text{A.1})$$

sendo a métrica plana definida como  $\eta_{IJ} = \text{dig}(\sigma, 1)$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{se o espaço é Riemanniano,} \\ -1, & \text{se o espaço é Lorentziano.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Podemos escrever a equação (A.1) como:

$$\eta^{IJ} = g^{\mu\nu} e^I{}_\mu e^J{}_\nu , \quad (\text{A.3})$$

onde se pode definir a inversa do "m-bein"

$$e_I{}^\mu = \eta_{IJ} g^{\mu\nu} e^J{}_\nu . \quad (\text{A.4})$$

O m-beins  $e^I{}_\mu(x)$  e sua inversa  $e_I{}^\mu(x)$  são bases ortogonais tanto nos índices latinos, que são baixados e levantados pela métrica plana  $\eta_{IJ}$ , quanto nos índices gregos, que são baixados e levantados pela métrica  $g_{\mu\nu}$ .

$$e_I{}^\mu(x) e^J{}_\mu(x) = \delta_I^J , \quad (\text{A.5})$$

$$e_I{}^\mu(x) e^I{}_\nu(x) = \delta_\nu^\mu . \quad (\text{A.6})$$

Desta forma identificamos o m-bein  $e^I{}_\mu$  como um elemento do grupo  $GL(m, \mathfrak{R})$ , que transforma a base de coordenada  $dx^\mu$  do espaço cotangente  $T_x^*M$  em uma base ortonormal do mesmo espaço, ou seja:

$$e^I(x) = e^I{}_\mu(x) dx^\mu . \quad (\text{A.7})$$

De forma similar identificamos  $e_I{}^\mu$  como pertencente ao grupo  $GL(m, \mathfrak{R})$ , sendo a matriz de transformação da base  $\partial_\mu$  do espaço tangente  $T_x\mathcal{M}$  para uma base também ortonormal dada por

$$e_I(x) = e_I{}^\mu(x) \partial_\mu . \quad (\text{A.8})$$

Quando expressamos a métrica através dos "m-beins", como na equação (A.1), teremos mais graus de liberdade para descrever a mesma geometria, o que ocasiona uma redundância [22]. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é simétrico e portanto tem  $m(m+1)/2$  componentes independentes, enquanto que os m-bein tem  $m^2$  componentes independentes, isto é, diferentes m-beins descrevem a mesma métrica e eles são relacionado mutuamente por uma transformação ortogonal local, ou seja, uma transformação de Lorentz local em cada ponto do espaço:

$$e^I \mapsto \bar{e}^I(x) = \Lambda^I{}_J(x) e^J ; \forall x \in \mathcal{M} . \quad (\text{A.9})$$

Já que a métrica do espaço-tempo é invariante sob rotação, a matriz  $\Lambda^I{}_J(x)$  deve satisfazer

$$\eta_{IJ} \Lambda^I{}_K \Lambda^J{}_L = \eta_{KL} . \quad (\text{A.10})$$

Isto implica que

$$\Lambda^I{}_J \in \begin{cases} SO(m), & \text{se o espaço é Riemanniano,} \\ SO(m-1, 1), & \text{se o espaço é Lorentziano.} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Sob uma transformação de gauge local os índices (gregos) do espaço-tempo são invariantes, enquanto os índices internos (latinos) são rotacionados. Isto se ajusta com a descrição dos "m-bein" como uma projeção ortonormal local do sistema de coordenada sobre cada ponto do espaço-tempo, cujos vetores da base podem ser rotacionados livremente. A dimensão deste grupo ortonormal especial é:

$$\dim[SO(m-1, 1)] = \dim[SO(m)] = \frac{m(m-1)}{2} = m^2 - \frac{m(m+1)}{2} , \quad (\text{A.12})$$

que justamente era a diferença no número de componentes independentes para o "m-bein" e a métrica.

## A.1 Conexão, Torção e Curvatura

No formalismo métrico [19] a conexão  $\Gamma$  é o campo  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$  definido por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = e^\rho{}_I (\partial_\mu e_\nu^I + \omega_{\mu J}^I e_\nu^J) , \quad (\text{A.13})$$

onde a derivada covariante  $D_\mu$  de todos os campos que tenham índices gregos ( $\mu$ ) é dada por suas derivadas parciais mais o termo de correção  $\Gamma$  para cada índice,

$$D_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho . \quad (\text{A.14})$$

O mesmo procedimento é feito para o formalismo de primeira ordem, sendo que substituiremos

os coeficientes de conexão  $\Gamma$  pela conexão de spin  $w$ ,

$$\omega_J^I(x) = \omega_{\mu J}^I dx^\mu , \quad (\text{A.15})$$

onde  $\omega^{IJ} = -\omega^{JI}$ . Desta forma, podemos definir a derivada covariante parcial  $D_\mu$  para todos os campos que apresentem índices latinos ( $I$ ), assim como índices gregos ( $\mu$ ):

$$D_\mu u^I = \partial_\mu u^I + w_{\mu J}^I u^J , \quad (\text{A.16})$$

ou se preferirmos a derivada covariante  $D$  somente com índices latinos

$$Du^I = du^I + w_J^I \wedge u^J , \quad (\text{A.17})$$

sendo  $d = dx^\mu \partial_\mu$ , definida como derivada exterior.

Com a introdução da conexão spin podemos definir a curvatura ( $R_J^I$ ) e a torção ( $T^I$ ), ambas 2-formas, como:

$$\text{Curvatura} : R_J^I \equiv d\omega_J^I + \omega^I_K \wedge \omega^K_J = \frac{1}{2} R_{J\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Torção} : T^I \equiv De^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^I dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (\text{A.19})$$

sendo as equações denominadas de estrutura de Einstein-Cartan (formalismo de primeira ordem). Em particular, é interessante observarmos que a partir de (A.13) temos imediatamente

$$D_\mu e_\nu^I = \partial_\mu e_\nu^I + \omega_{\mu J}^I e_\nu^J - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^I = 0 , \quad (\text{A.20})$$

o que nos leva a condição de torção nula:

$$T^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J = 0 . \quad (\text{A.21})$$

A equação acima mostra que a conexão spin  $\omega$  pode ser expressa unicamente em termos das tetradas  $e$ , pela condição de torção nula, se e somente se  $e$  for inversível. Este resultado representa um papel central na formulação da teoria quântica da gravitação e a relação para teoria de campo topológica [22].

Aplicando a derivada covariante  $D$  nas equações (A.18) e (A.19), como consequência da iden-

tidade de Bianchi ( $d^2 = 0$ ) obteremos os seguintes resultados:

$$DR_J^I = 0 , \quad (\text{A.22})$$

$$DT^I = R_J^I \wedge e^J = 0 , \quad (\text{A.23})$$

a região onde a curvatura é zero é denominada plana.

A compatibilidade da derivada covariante  $D_\mu$  com respeito a métrica  $g$ , expressa por  $D_\mu g_{\nu\rho} = 0$ , ou

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma} = 0 , \quad (\text{A.24})$$

fixa a conexão ( $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ ), símbolo de Christoffel, unicamente em função da métrica, ou seja

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) , \quad (\text{A.25})$$

tendo pela condição de torção nula, a simetrização do símbolo de Christoffel:

$$T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho = 0 . \quad (\text{A.26})$$

## Apêndice B

# Alguns Aspectos da Formulação Lagrangiana e Hamiltoniana

Clássicamente, conhecendo-se  $\vec{F}$  (força resultante) que atua sobre uma partícula de massa  $m$ , a trajetória pode ser determinada resolvendo-se a segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} , \quad (\text{B.1})$$

e assim obter  $\vec{r}(t)$  e conseqüentemente  $\vec{p}(t)$ , que representa o estado da partícula.

Na formulação de Lagrange ou de Hamilton, o papel preponderante não é desempenhado pela força, mas por funções chamadas de Lagrangiana e Hamiltoniana, dependendo do formalismo. No lugar da segunda lei de Newton, a evolução do sistema clássico é obtida a partir do "Princípio de Hamilton". Estas formulações da mecânica são bem mais gerais e poderosas que a mecânica newtoniana.

Seja um sistema clássico possuindo  $N$  graus de liberdade que representaremos por  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), as coordenadas generalizadas. A função de Lagrange será uma função de  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . O Princípio de Hamilton estabelece que a evolução temporal do sistema entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é tal que a integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt , \quad (\text{B.2})$$

chamada de ação, deve ser um mínimo. Em outras palavras, de todas as trajetórias possíveis

para um sistema evoluir entre  $t_1$  e  $t_2$ , ela segue justamente aquela que corresponde à ação mínima (Princípio de Hamilton).

Da variação da integral da ação obtemos as equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (\text{B.3})$$

que fornecem a evolução temporal de um sistema clássico. Não estamos no presente momento considerando vínculos, ou seja, os  $q_i$  (coordenadas generalizadas) são quantidades independentes. O poderoso e elegante formalismo desenvolvido por Lagrange permite escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos relevantes a partir de uma única função escalar expressa em termos de coordenadas independentes arbitrárias.

## B.1 Momentos Canônicos e Formalismo Hamiltoniano

A importância do formalismo Hamiltoniano reside em fornecer um método geral e flexível para a investigação de questões da mecânica, e, sobretudo, em servir de fundamento na transição à mecânica quântica (no caso da quantização canônica). Por este motivo, ele é considerado mais poderoso que o formalismo lagrangiano.

A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feita, primeiramente, pela introdução do momento canônico, cuja definição é

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{B.4})$$

Assim a descrição Hamiltoniana envolve a substituição das variáveis  $(q, \dot{q})$  por  $(q, p)$  em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função  $H(q, p, t)$  em lugar da Lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ . Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma transformação de Legendre, que consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução da função de Hamilton ou, simplesmente, Hamiltoniana  $H(q, p, t)$  definida por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (\text{B.5})$$



de onde podemos determinar as equações canônicas de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad , \quad (\text{B.6})$$

que formam um conjunto de  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem equivalente ao sistema de  $N$  equações de segunda ordem de Lagrange. As quantidades  $(q, p)$  são chamadas de variáveis canônicas.

Em termos práticos, para se obter a Hamiltoniana canônica, a partir de (B.5), em função de  $q$  e  $p$  temos que fazer transformações do tipo

$$(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p) \quad , \quad (\text{B.7})$$

e o Jacobiano dessas transformações é determinado pela *matriz hessiana*  $\mathbf{W}$  com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Quando o determinante desta matriz é diferente de zero, ou seja, é não singular, as transformações (B.7) são sempre possíveis e desta forma as velocidades generalizadas podem ser expressas univocamente em termos dos momentos canônicos. Isto ocorre para o caso de não haver vínculos.

Na presença de vínculos a matriz hessiana é singular, neste caso nem todos os  $\dot{q}_i$  podem ser unicamente escritos em termos dos momentos canônicos. A maioria das teorias físicas modernas de significado fundamental são descritas por Lagrangianas com matriz hessiana singular, o que justifica uma introdução à dinâmica Hamiltoniana de tais sistemas. Nosso tratamento segue de perto a lúcida exposição de Dirac, que vem a ser o criador da teoria dos sistemas Hamiltonianos com vínculos.

## B.2 Parênteses de Poisson

Consideremos agora uma certa quantidade dinâmica  $A(q, p, t)$ , definida sobre o espaço de fase. Com respeito a sua evolução temporal,

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (\text{B.9})$$

Usando as equações de Hamilton (B.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} , \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\{A, H\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) , \quad (\text{B.11})$$

é chamado Parênteses de Poisson, e apresenta as seguintes relações fundamentais:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} , \quad (\text{B.12})$$

$$\{q_i, p_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 . \quad (\text{B.13})$$

Pode ser verificado de forma imediata que:

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\} , \\ \{A + B, C\} &= \{A, C\} + \{B, C\} , \\ \{AB, C\} &= A\{B, C\} + \{A, C\}B , \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

além da identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 . \quad (\text{B.15})$$

### B.3 Quantização Canônica

A equação (B.10) nos dá a evolução temporal da quantidade  $A$  sob o ponto de vista clássico. Em termos quânticos, esta quantidade é transformada em operador e sua evolução temporal é dada por

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}, \quad (\text{B.16})$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano.

As equações (B.10) e (B.16) sugerem a seguinte correspondência entre parênteses de Poisson e comutadores

$$\{A, H\} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (\text{B.17})$$

A expressão (B.17) encerra o fundamento da quantização canônica usual.

Convém ressaltar que além da similaridade entre (B.10) e (B.16), há dois outros pontos que sustentam a hipótese acima (sem falar é claro, nos resultados experimentais). Primeiramente os parênteses fundamentais de Poisson possuem análogos bem conhecidos envolvendo os operadores momento e coordenada  $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$ .

Em segundo lugar, temos que as identidades entre parênteses de Poisson são semelhantes às correspondentes dos comutadores

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= -[\hat{B}, \hat{A}], \\ [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}], \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

## Apêndice C

# Método de Dirac para Quantização de Sistemas Vínculados

O objetivo deste capítulo é fazer uma revisão sucinta da teoria de Dirac para quantização canônica de sistemas vinculados. No caso usual de sistema sem vínculos,  $p_i$  e  $q_i$  são variáveis independentes, representando o chamado espaço de fase. Quando existem vínculos, envolvendo coordenada e momento, a relação (B.17) pode levar a inconsistência.

Uma maneira simples de ver isto é supor que, num determinado sistema, exista um vínculo dado por

$$\phi(q, p) = 0 . \tag{C.1}$$

O parêntese de Poisson desta quantidade, com outra qualquer da teoria considerada pode não ser nulo. Como exemplo imediato, temos o caso da partícula livre relativística, que possui o bem conhecido vínculo

$$p^2 + m^2 = 0 , \tag{C.2}$$

onde consideramos  $c = 1$  e  $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +)$ .

Considerando, por exemplo, o parênteses de Poisson deste vínculo com  $x_\mu$ , temos

$$\begin{aligned} \{x_\mu, p^2 + m^2\} &= \{x_\mu, P^\nu P_\nu\} , \\ &= \delta_\mu^\nu + P_\nu \eta_{\mu\nu} , \\ &= 2P_\mu , \end{aligned} \tag{C.3}$$

que é, de maneira geral, diferente de zero. Por este motivo, em lugar de  $\phi(q, p) = 0$ , é comum escrever

$$\phi(q, p) \approx 0 , \tag{C.4}$$

onde se diz fracamente zero, significando que a relação de vínculo não vale, necessariamente, dentro dos parênteses de Poisson. A expressão só será anulada depois de todas as contas serem feitas.

Consideremos, então, que exista uma quantidade  $A(q, p)$  cujo parêntese de Poisson com  $\phi(q, p)$  seja diferente de zero,

$$\{A, \phi\} \neq 0 . \tag{C.5}$$

Na passagem para a mecânica quântica,  $\phi$  e  $A$  transformam-se em operadores. Em virtude de (C.4),  $\hat{\phi}$  é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo  $\hat{\phi}$  deve ser nulo. Particularmente,

$$[\hat{A}, \hat{\phi}] = 0 , \tag{C.6}$$

e em termos quânticos, não tem sentido a denominação fracamente nulo. Assim sendo (B.17), (C.5) e (C.6) são incompatíveis.

Foi Dirac quem desenvolveu a maneira correta de proceder a quantização canônica de sistemas vinculados, onde os momentos não são funções independentes das velocidades. Neste caso, denotaremos estes vínculos genericamente por

$$\phi_m = \phi_m(q, p) \quad m = 1, 2, \dots, M \leq \aleph . \tag{C.7}$$

Os vínculos decorrentes diretamente da relação de definição de momento são chamados de vínculos primários. Conforme veremos, outros vínculos podem existir, agora, não mais em decorrência de (B.4). Estes recebem o nome de vínculos secundários.

## C.1 Sistemas Vínculados

Como vimos na equação (B.8), quando a matriz hessiana apresenta determinante diferente de zero, a Hamiltoniana é expressa em termos das variáveis canônicas  $q$ 's e  $p$ 's. Contudo, como já foi dito, na presença de vínculos a Hamiltoniana não é univocamente determinada em termos de momento e coordenada, pois podemos ter uma combinação linear para os  $\phi$ 's, que é zero. Desta forma poderemos escrever a seguinte Hamiltoniana:

$$\tilde{H} = H_c + \lambda_m \phi_m , \quad (\text{C.8})$$

onde as quantidades  $\lambda_m$  são coeficientes (multiplicadores de Lagrange), que em geral podem ser consideradas como funções de  $q$ 's e  $p$ 's.

A partir de (B.6) é possível obter as seguintes equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} , \quad (\text{C.9})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} . \quad (\text{C.10})$$

Como pode ser observado, o preço que se paga pelos  $M$  vínculos é a presença de  $M$  multiplicadores de Lagrange. Podemos escrever as equações de Hamilton envolvendo  $\tilde{H}$  em termos dos parênteses de Poisson

$$\dot{q}_i = \left\{ q_i, \tilde{H} \right\} , \quad (\text{C.11})$$

$$\dot{p}_i = \left\{ p_i, \tilde{H} \right\} . \quad (\text{C.12})$$

Vejamos a partir de agora como os vínculos secundários são determinados. Seja  $\phi_m$  um dos vínculos primários, é uma questão de consistência estes vínculos não terem evolução temporal,

de modo que

$$\dot{\phi}_m \approx \left\{ \phi_m, \tilde{H} \right\} , \quad (\text{C.13})$$

$$\approx \left\{ \phi_m, H_c + \lambda_n \phi_n \right\} , \quad (\text{C.14})$$

$$\approx \left\{ \phi_m, H_c \right\} + \lambda_n \left\{ \phi_m, \phi_n \right\} , \quad (\text{C.15})$$

$$\approx 0 .$$

Pode acontecer de obtermos uma incosistência do tipo  $1 = 0$ , isto significaria que nossa Lagrangiana original apresenta equações de movimento inconsistentes. Um exemplo disto é se tivermos  $\mathcal{L} = q$ , onde a equação de Lagrange dá como resultado imediato  $1 = 0$ .

A escolha para Lagrangiana não pode ser completamente arbitrária, devemos então impor uma condição, onde as equações de movimento não apresentem nenhuma inconsistência. Desta forma, analizaremos a equação (C.15), onde estão relacionados o parêntese de Poisson entre  $\phi_m$  e  $\phi_n$ , que pode ser ou não zero (fracamente).

1.  $\left\{ \phi_m, \phi_n \right\} \approx 0$  ,

Neste caso, obtemos  $\left\{ \phi_m, H_c \right\} \approx 0$ , o que indica uma outra relação de vínculos para as variáveis canônicas. Vínculos obtidos por esta relação de consistência são denominados vínculos secundários.

2.  $\left\{ \phi_m, \phi_n \right\} \neq 0$  ,

Agora não obtemos novos vínculos, mas uma relação envolvendo os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_n$ .

Esta análise deve ser repetida para todos os vínculos da teoria, inclusive para os vínculos secundários que vão sendo obtidos. Procedendo desta forma até esgotarem-se todas as possibilidades, ou seja, até que nenhum vínculo novo seja obtido e até serem determinados todos os multiplicadores de Lagrange.

Citemos ainda, que os vínculos primários, obtidos da definição de momento, dada por (B.4), e os vínculos secundários, obtidos da relação de consistência  $\left\{ \phi_m, H_c \right\} = 0$ , podem não ser todos os vínculos da teoria. Nas teorias de gauge, como o eletromagnetismo, há o aparecimento de novos vínculos quando o gauge é fixado. Veremos mais detalhes a seguir.

## C.2 Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Na seção anterior, vimos uma classificação dos vínculos em primários e secundários. Esta é uma classificação que está ligada a maneira de como os vínculos são obtidos. Para os objetivos da quantização canônica, não importa como os vínculos foram obtidos, o importante é se eles existem ou não. Neste sentido uma classificação mais útil se torna necessária.

Dentre os vínculos, podem existir alguns que possuem parêntese de Poisson zero (fracamente) com todos os vínculos da teoria, estes são denominados vínculos de primeira classe. Já aqueles que possuírem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero são chamados de vínculos de segunda classe.

É importante destacar que a existência de vínculos de primeira classe indica que a teoria considerada possui invariância de gauge. No método de Dirac, novos vínculos devem ser introduzidos (vínculos de fixação de gauge), de tal maneira que estes juntamente com os anteriores, passem a ser todos de segunda classe.

## C.3 Parênteses de Dirac

O procedimento usual da quantização canônica, de substituir parênteses de Poisson por comutadores, pode falhar no caso da existência de vínculos. Vamos agora mostrar que é possível termos novos objetos, em lugar dos parênteses de Poisson, que são chamados parênteses de Dirac, onde a substituição por comutadores, no caso de existirem vínculos, pode ser feita consistentemente.

Na utilização dos parênteses de Dirac para quantização canônica, os vínculos devem ser de segunda classe. Caso haja existência de vínculos de primeira classe, devemos proceder à fixação de gauge.

Uma maneira bem natural para se introduzir os parênteses de Dirac é a partir da evolução temporal de uma certa quantidade (clássica) dinâmica  $A(p, q, t)$ . Seja então,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (\text{C.16})$$



Usando as equações de Hamilton, dadas por (C.9 e C.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \frac{\partial A}{\partial q_i} \left( \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} , \\ \frac{dA}{dt} &\approx \{A, H_c\} + \lambda_m \{A, \phi_m\} + \frac{\partial A}{\partial t} , \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde todos os vínculos estão incluídos, inclusive os decorrentes de fixação de gauge, caso existam. Portanto, são todos vínculos de segunda classe.

Por outro lado, substituindo  $A$  por qualquer um dos vínculos da teoria, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_n}{dt} &\approx \{\phi_n, H_c\} + \lambda_m \{\phi_n, \phi_m\} , & (\text{C.18}) \\ &\approx 0 . & (\text{C.19}) \end{aligned}$$

Introduzindo a matriz  $C$ , cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, isto é,

$$C_{nm} = \{\phi_n, \phi_m\} , \quad (\text{C.20})$$

decorre que

$$\begin{aligned} \{\phi_n, H_c\} + \lambda_m C_{nm} &\approx 0 , \\ \{\phi_n, H_c\} &\approx \lambda_m C_{mn} , \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

onde, na última passagem, usamos o fato de a matriz  $C$  ser anti-simétrica. Dirac mostrou em seu livro, "Lectures on Quantum Mechanics", que a matriz  $C$  sempre possui determinante diferente de zero, lembrando de que estamos considerando que todos os vínculos sejam de segunda classe.

Assim, partindo de (C.21), podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda_m C_{mn} C_{np}^{-1} &\approx C_{np}^{-1} \{\phi_n, H_c\} , \\ \lambda_p &\approx -C_{pn}^{-1} \{\phi_n, H_c\} . \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Levando este resultado em (C.17), finalmente obtemos

$$\frac{dA}{dt} \approx \{A, H_c\} - \{A, \phi_m\} C_{mn}^{-1} \{\phi_n, H_c\} + \frac{\partial A}{\partial t} , \quad (\text{C.23})$$

introduzimos o parênteses de Dirac entre  $A$  e  $H_c$

$$\{A, H_c\}_D = \{A, H_c\} - \{A, \phi_m\} C_{mn}^{-1} \{\phi_n, H_c\} . \quad (\text{C.24})$$

Assim, a expressão (C.23) pode ser convenientemente reescrita como

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H_c\}_D + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (\text{C.25})$$

O resultado acima, a exemplo do que acontecia com (B.10), parece sugerir que no caso de sistemas vinculados temos a seguinte regra de quantização canônica:

$$\{A, B\}_D \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B] , \quad (\text{C.26})$$

onde o parêntese de Dirac entre  $A$  e  $B$  é definido analogamente a (C.24), ou seja,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_m\} C_{mn}^{-1} \{\phi_n, B\} , \quad (\text{C.27})$$

tendo as seguintes propriedades:

$$\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D , \quad (\text{C.28})$$

$$\{A, BC\}_D = \{A, B\}_D C + B \{A, C\}_D , \quad (\text{C.29})$$

$$\{\phi_m, A\}_D = 0 , \quad (\text{C.30})$$

$$\{A, B\}_D \approx \{A, B\} , \quad (\text{C.31})$$

$$\{C, \{A, B\}_D\}_D \approx \{C, \{A, B\}\} . \quad (\text{C.32})$$

acrescenta-se ainda a indentidade de Jacobi

$$\{\{A, B\}_D, C\}_D + \{\{C, A\}_D, B\}_D + \{\{B, C\}_D, A\}_D = 0 . \quad (\text{C.33})$$

É claro que concluir sobre a regra de quantização (C.26), apenas pela semelhança entre (C.25) e a expressão (B.16) seria pura ingenuidade. Há outras evidências iniciais que sustentam a hipótese dada por (C.26). A mais importante é que as relações de vínculo, que valiam só fracamente em termos de parênteses de Poisson, valem agora, fortemente nos parênteses de Dirac. Isto significa que se tomarmos os parênteses de Dirac entre um vínculo e uma quantidade qualquer, obteremos zero como resultado. Vejamos,

$$\begin{aligned}
\{A, \phi_c\}_D &= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_a, \phi_c\} , \\
&= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} C_{bc} , \\
&= \{A, \phi_c\} - \{A, \phi_a\} \delta_{ac} , \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Assim, a inconsistência existente entre (B.17), (C.5) e (C.6), mencionada no início deste apêndice não existe mais em virtude de (C.26).

# Referências Bibliográficas

- [1] Marcus Gaul and Carlo Rovelli. Loop Quantum Gravity and the Meaning of Diffeomorphism Invariance. gr-qc/9910079 v2;
- [2] Lee Smolin. Linking topological field theory and nonperturbative quantum gravity, gr-qc/950502;
- [3] Kirill V. Krasnov. On Quantum Statistical Mechanics of a Schwarzschild Black Hole, CGPG-97/1-2, gr-qc/9605047;
- [4] Carlo Rovelli. Black Hole Entropy from Loop Quantum Gravity, gr-qc/9603063;
- [5] Abhay Ashtekar, John C. Baez and Kirill Krasnov. Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy, NSF-ITP-99-153, gr-qc/0005126;
- [6] M. Bojowald, Liwing Rev. Re. 8:11,2005; gr-qc/0601085;
- [7] Shinji Tsujikawa, Parampreet Singh and Roy Maartens. Loop quantum gravity effects on inflation and the CMB, astro-pg/0311015;
- [8] Lee Smolin. Strings as perturbations of evolving spin-networks, hep-th/9801022;
- [9] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status Report. gr-qc/0404018 v2;
- [10] A. Perez. On the regularization ambiguities in loop quantum gravity, gr-qc/0509118;
- [11] R. De Pietri and C. Rovelli. Geometry eigenvalues and scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity, Phys. Rev. D54(1996) 2664-2690, gr-qc/9602023;
- [12] L. Smolin. The classical limit and the form of the Hamiltonian constraint in non-perturbative quantum general relativity, gr-qc/9609034;
- [13] J. C. Baez, J. D. Christensen, T. R. Halford, and D. C. Tsang. Spin foam models of riemannian quantum gravity, Class. Quant. Grav. 19(2002) 4627-4648, gr-qc/0202017;
- [14] J. W. Barrett and L. Crane. A Lorentzian signature model for quantum general relativity, Class. Quant. Grav. 17(2000)3101-3118, gr-qc/9904025;
- [15] A. Perez and C. Rovelli. Spin foam model for Lorentzian general relativity, Phys. Rev. D63(2001)041501, gr-qc/0009021;
- [16] R. M. Williams and P.A. Tuckey. Regge calculus: A bibliography and brief review, Class. Quant. Grav. 9(1992)1409-1422;
- [17] A. Ashtekar. Phys. Rev. D36 (1987) 1587;

- [18] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalias in Quantum Field Theory*, Clarendon Press-Oxford, 1996;
- [19] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004;
- [20] A. Ashtekar, J.D. Romano and R. S. Tate. New variables for gravity: Inclusion of matter, *Phys. Rev.* 1989 D40 2572-2587;
- [21] T. Jacobson 1988. New variables for canonical supergravity, *Class. Quant. Grav.* 1988 5 923-935;
- [22] M. Weis. *Topological Aspects of Quantum Gravity*. Niels Bohr Institute, University Copenhagen, Jun 1998, hep-th/9806179 v1;
- [23] A. Ashtekar. *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 2244;
- [24] E. Wittwn. *Nucl. Phys.* B311(1988/89) 46;
- [25] E. Wittwn. *Nucl. Phys.* B323(1989) 113;
- [26] R. Jackiw, *Two Lectures on Two-Dimensional Gravity*. LASSF II, Caracas, Venezuela, October 1995, gr-qc/9511048;
- [27] R. Jackiw. *Lioville Field Theory: a Two-Dimensional Model for Gravity ?*. in B.DeWitt's anniversary volume, ed. S. Christensen, Adam-Hilger (Bristol 1983);
- [28] K. Isler and C.A. Trugenberg. *Gauge Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity*. *Phy. Rev. Lett.* 63 (1989) 834;
- [29] T. Fukuyama and K. Kamimura. *Phys. Lett.* 160B (1985) 259;
- [30] T. Fukuyama and K. Kamimura. *Phys. Rev.* D35 (1987) 3768;
- [31] A. H. Chamseddine and D. Wyler. *Phys. Lett.* B228 (1989) 75;
- [32] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G.T. Thompson. *Topological Field Theory*, *Phys.Rept.* 209:129-340,1991.
- [33] Etera R. Livine, Alejandro Perez and Carlo Rovelli. *2D Manifold-Independent Spinfoam Theory*. *Phy. Lett*, May 2003, gr-qc/01022051 v2;
- [34] Marcelo Otávio Caminha Gomes. *Teoria Quântica dos Campos*. Universidade de São Paulo, 2002;
- [35] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991;
- [36] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim. *Constrained Hamiltonian Systems*, *Accademia Nazionale dei Lincei*, Roma, 1976.
- [37] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer graduate School of Science, Yeshiva University, 1964;
- [38] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, Universidade Federal Fluminense;
- [39] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd. (Bristol 1990);