

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

**Classificação de Estruturas de Nambu
Lineares e p-formas Singulares**

Carla Rodrigues Almeida

Julho/2012

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Classificação de Estruturas de Nambu Lineares e p -formas Singulares

Carla Rodrigues Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Leonardo Meireles Câmara

Coorientador: Magno Branco Alves

Julho/2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Almeida, Carla Rodrigues, 1987-
A447c Classificação de estruturas de Nambu lineares e p-formas
singulares / Carla Rodrigues Almeida. – 2012.
102 f. : il.

Orientador: Leonardo Meireles Câmara.
Coorientador: Magno Branco Alves.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria. 2. Poisson, Distribuição de. 3. Folheações
(Matemática). 4. Topologia diferencial. I. Câmara, Leonardo
Meireles. II. Alves, Magno Branco. III. Universidade Federal do
Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

Aos meus pais.

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente essa ciência (a matemática) acabam tomados por uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento em si, mas sim a aprendizagem. Não é a posse, mas a aquisição. Não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

Carl Friedrich Gauss

A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa emoção fundamental que está na raiz de toda a ciência e toda arte.

Albert Einstein

Agradecimentos

Eu gostaria de fazer um breve agradecimento a todos aqueles que, de alguma forma, me ajudaram durante estes dois anos em que tive que sair da minha cidade natal para prosseguir com meus estudos. Naturalmente, tenho muito a agradecer ao meu orientador, Professor Leonardo Meireles Câmara, e ao meu coorientador, Professor Magno Branco Alves, que aceitaram o desafio de me orientar numa área até então pouco explorada por eles, me ajudaram durante todo o processo de escrita e revisão e dividiram a tarefa de lecionar os pré-requisitos necessários para este trabalho.

Ainda, preciso agradecer à equipe do Programa de Pós Graduação de Matemática (PPGMat), em especial aos Professores José Gilvan de Oliveira, atual coordenador do programa, Ricardo Soares, ex-coordenador e Fábio Júlio da Silva Valentim, atual vice-coordenador do programa, pelo suporte estrutural e técnico. Certamente, o sucesso deste trabalho é também devido aos Professores Henrique Burzstyn e Maurício Barros Corrêa Júnior, que pacientemente fizeram o trabalho de revisão e indicaram algumas correções adicionais para a versão final. Agradeço a ambos por terem aceito o convite de serem membros da banca examinadora e pelo tempo gasto em meu benefício. Também devo minha gratidão ao Professor Airton S. de Medeiros, por gentilmente ceder os manuscritos originais de seu artigo que foi utilizado neste trabalho.

Lamento não ser possível nomear todos as pessoas que me ajudaram moralmente, mas, dentre todas, gostaria de agradecer à Maria Ismênia Santana, por nos abrigar no começo de nossa jornada. Ao Carlos Roberto Rodrigues dos Santos e à Samira Monteiro Carvalho dos Santos, por toda ajuda nas nossas outras moradias durante este tempo. Ao meu irmão, Carlos Alberto Afonso de Almeida Júnior, por me ajudar com as figuras e também, juntamente com meu irmão caçula, Alexandre Magno Rodrigues Almeida, por me visitarem em minha reclusão. Em especial, tenho que agradecer muito aos meus pais, Carlos Alberto Afonso de Almeida e Maria do Carmo Rodrigues Almeida, que sempre acreditaram e investiram em mim e que, mesmo de longe, estavam comigo todos os dias, sem me deixar desanimar pela saudade de casa. Sem eles nada disso seriam possível. Finalmente, eu quero agradecer a meu companheiro Diego Henrique Carvalho dos Santos, que me deu toda a força necessária para continuar, me ajudou a manter o foco e cuidou de mim em tempo integral. Ele foi o meu suporte todo esse tempo. A todos, muito obrigada!

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar as folheações que surgem a partir de estruturas de Nambu e apresentar a relação entre formas diferenciais e algumas destas estruturas. Mais precisamente, fazer um estudo da geometria de Poisson e de folheações singulares, enfatizando o caso da folheação simplética que surge da estrutura de Poisson e, em seguida, apresentar a geometria de Nambu, estudando o caso das folheações que surgem destas estruturas de ordem maiores ou iguais a três. Neste caso particular, vamos mostrar como tais estruturas de Nambu se relacionam com formas diferenciais e, por esta relação, classificar as estruturas de Nambu lineares através de um resultado de classificação de p -formas integráveis.

Palavras Chave: *geometria de Poisson, estruturas de Nambu, folheação simplética, folheações singulares, formas diferenciais integráveis.*

Abstract

The aim of this work is to study the foliations that arise from Nambu structures and present the relationship between differential forms and some of these structures. More specifically, to make a study of the Poisson geometry and of singular foliations, emphasizing the case of the symplectic foliation that arises from the Poisson structure and then, to present the Nambu geometry, studying the case of the foliations that arise from these structures of order greater than or equal to three. In this particular case, we shall show how these Nambu structures are related with differential forms and, by this relationship, classify linear Nambu structures through a result of classification of integrable differential p -forms.

Key Words: *Poisson geometry, Nambu structures, symplectic foliation, singular foliations, integrable differential forms.*

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 3 |
| 1.1 Tensores | 3 |
| 1.2 Variedades Diferenciáveis | 9 |
| 1.3 Formas Diferenciais | 11 |
| 1.4 A Derivada de Lie | 14 |
| 2 Introdução à Geometria de Poisson | 21 |
| 2.1 Variedades de Poisson | 21 |
| 2.2 O Tensor de Poisson | 25 |
| 2.3 Estudo em Coordenadas Locais | 32 |
| 2.4 O Colchete de Schouten | 37 |
| 3 Folheações Singulares e Estruturas de Nambu | 45 |
| 3.1 Distribuição e Folheações | 45 |
| 3.2 Morfismos de Poisson e Folheações Simpléticas | 52 |
| 3.3 O Colchete de Nambu e o Tensor de Nambu | 54 |
| 3.4 Formas Diferenciais Integráveis | 65 |
| 3.5 Classificação das Estruturas de Nambu Lineares | 72 |
| Anexo A | 87 |
| Conclusão | 89 |

Introdução

Inicialmente, a geometria de Poisson foi desenvolvida como uma ferramenta para a dinâmica clássica e encontrou destaque na física, mais precisamente no formalismo hamiltoniano da mecânica clássica, de onde provém algumas das nomenclaturas utilizadas atualmente. Neste sentido a geometria simplética, um caso particular da geometria de Poisson, tornou-se essencial para o sucesso e o entendimento da mecânica hamiltoniana. Desde então, as geometrias de Poisson e simplética vêm ganhando destaque e se tornaram um ramo independente de estudo, que possui conexões com várias outras áreas de estudo na física e na matemática. Um caso de destaque para a matemática é o estudo das folheações simpléticas, que são folheações que surgem de uma estrutura de Poisson em que cada folha possui uma estrutura simplética natural associada.

Em 1973, Yoichiro Nambu desenvolveu uma generalização para a mecânica de Hamilton ([14]), o que proporcionou uma generalização da geometria de Poisson, formalizada por Leon Takhtajan vinte anos mais tarde ([15]). Como a geometria de Poisson, a geometria de Nambu também se desenvolveu e se tornou um ramo independente e rico, com várias aplicações na matemática e na física. Seguindo o exemplo do caso de Poisson, o objetivo central deste trabalho é estudar as diferentes folheações que surgem na geometria de Nambu, fazendo uma conexão com formas diferenciais e culminando numa classificação das estruturas de Nambu lineares através de um importante resultado de Medeiros ([13]).

Para isto, iniciaremos um breve estudo das geometrias de Poisson, simplética e de Nambu, com o intuito de inserir o contexto necessário para nossos objetivos. O primeiro capítulo é destinado a exposição de alguns resultados importantes que são preliminares ao nosso estudo, por isso os mais clássicos são apenas referenciados. Em particular, a primeira seção do terceiro capítulo é onde desenvolvemos a teoria necessária para o estudo de folheações, sem muito aprofundamento. Finalmente, as seções posteriores são reservadas para o estudo das folheações geradas pelas estruturas de Nambu, incluindo o caso de Poisson, apresentando, ao final, como exemplo do diálogo entre formas diferenciais e estruturas de Nambu, uma classificação local para as estruturas de Nambu lineares e, conseqüentemente, para as folheações lineares.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Tensores

Este capítulo de preliminares tem como objetivo a exposição de alguns conceitos e resultados que são a base para nosso estudo posterior. Para este capítulo em particular, seguimos como principais referências [1] e [2], mas adotamos uma notação mais próxima de [8], que é a nossa referência principal.

Sejam E_1, \dots, E_k, E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $L(E_1, \dots, E_k; F)$ o espaço vetorial das aplicações k -lineares $\varphi : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$. Em particular, denotamos o espaço dos funcionais lineares $L(E; \mathbb{R})$ por E^* . Este será chamado de *espaço dual* de E . Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de E , então o conjunto $\{e^1, \dots, e^n\} \subset E^*$ tal que $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, é uma base de E^* , onde δ_{ij} é o delta de Kronecker usual, isto é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário. Esta será chamada de *base dual* de $\{e_1, \dots, e_n\}$. Assim, para cada $v \in E$ e $\alpha \in E^*$ temos

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \quad \text{e} \quad \alpha = \sum_{j=1}^n a_j e^j,$$

onde $v^i = e^i(v)$ e $a_j = \alpha(e_j)$. Além disso, tomamos $E^{**} = E$ através da aplicação $v : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(\alpha) = \alpha(v)$, $\alpha \in E^*$, $v \in E$.

Dado um subespaço vetorial $F \subset E$, o ortogonal do subespaço F é o conjunto

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* : \varphi(v) = 0, \forall v \in F\}. \quad (1.1)$$

Definição 1.1 *Dado um espaço vetorial E , definimos o conjunto*

$$T_s^r(E) = L^{r+s} \left(\underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_r \times \underbrace{E \times \dots \times E}_s : \mathbb{R} \right).$$

Os elementos deste conjunto são chamados tensores contravariantes de ordem r e covariantes de ordem s sobre E , ou tensores do tipo (r, s) . Dados $t_1 \in T_s^r(E)$ e $t_2 \in T_p^q(E)$,

definimos o produto

$$\begin{aligned} t_1 \otimes t_2 (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_q, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_p) \\ = t_1 (\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) t_2 (\beta_1, \dots, \beta_q, w_1, \dots, w_p), \end{aligned}$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in E^*$ e $v_i, w_j \in E$, $\forall i, j$.

Observe que o produto \otimes é associativo e bilinear, mas não é comutativo. Como casos especiais temos $T_0^1(E) = E$ e $T_1^0(E) = E^*$.

Proposição 1.2 *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para o espaço vetorial E e $\{e^1, \dots, e^n\}$ sua base dual. Então o conjunto*

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} : i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n\}$$

é uma base para $T_s^r(E)$. Assim $\dim T_s^r(E) = n^{r+s}$.

Demonstração. Os coeficientes são de fato linearmente independentes, pois se temos

$$t = \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_{j_1, \dots, j_s} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} = 0$$

para alguns coeficientes $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathbb{R}$, então

$$t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = 0,$$

para qualquer upla $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s)$. Para mostrar que estes elementos geram todos os t de $T_s^r(E)$, basta observar que t é escrito como

$$t = \sum_{i_1, \dots, i_r} \sum_{j_1, \dots, j_s} t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s},$$

isto é, seus coeficientes $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ nesta base são tais que

$$t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

■

Exemplo 1.3 *Um dado produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vetorial E qualquer é um $(0, 2)$ -tensor simétrico. \diamond*

Definição 1.4 *Um tensor Π do tipo $(q, 0)$ sobre um espaço vetorial E é dito alternado ou antissimétrico, quando, dados $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in E^*$, temos*

$$\Pi(\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_q)) = (-1)^\sigma \Pi(\alpha_1, \dots, \alpha_q),$$

onde $\sigma \in S_q$ é uma permutação e $(-1)^\sigma$ é chamado sinal da permutação σ e é por definição (-1) se a permutação σ for ímpar e 1 caso contrário. Denotamos $T_0^q(E)$ por $\Lambda^q(E)$ e chamamos um elemento de $\Lambda^q(E)$ de q -vetor. Analogamente, um tensor ω do tipo $(0, p)$ sobre E é chamado alternado ou antissimétrico quando

$$\omega(\sigma(v_1, \dots, v_p)) = (-1)^\sigma \omega(v_1, \dots, v_p),$$

com $\sigma \in S_p$ e $v_1, \dots, v_p \in E$. O espaço $T_p^0(E)$ é denotado por $\Lambda^p(E^*)$ e seus elementos de p -formas vetoriais. Além disso, definimos os conjuntos

$$\Lambda(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k(E) \quad e \quad \Lambda(E^*) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k(E^*).$$

Estas definições serão centrais no nosso estudo, em especial sua versão para variedades diferenciáveis. As propriedades a seguir serão úteis.

Definição 1.5 (Produto Exterior) Dados $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ e $\beta \in \Lambda^q(E^*)$, E espaço vetorial, então o produto exterior

$$\wedge : \Lambda^p(E^*) \times \Lambda^q(E^*) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(E^*)$$

é definido por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (\alpha \otimes \beta) \circ \sigma$$

onde S_k é o conjunto das permutações de k elementos e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ como definido anteriormente. Analogamente, se $\Pi \in \Lambda^p(E)$ e $\Omega \in \Lambda^q(E)$, o produto exterior é definido por

$$\Pi \wedge \Omega = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (\Pi \otimes \Omega) \circ \sigma.$$

Exemplo 1.6 Se $\alpha, \beta \in \Lambda^1(E^*)$ com E um espaço vetorial, então $\alpha \wedge \alpha = \beta \wedge \beta = 0$ e $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$. \diamond

Por comodidade, as proposições seguintes serão enunciadas apenas para o operador $\wedge : \Lambda^p(E^*) \times \Lambda^q(E^*) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(E^*)$. Mas os resultados são análogos para $\wedge : \Lambda^p(E) \times \Lambda^q(E) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(E)$.

Proposição 1.7 O operador \wedge da Definição 1.5 tem as seguintes propriedades:

1. $(\lambda\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \lambda(\alpha_1 \wedge \beta) + \alpha_2 \wedge \beta$ e $\alpha \wedge (\lambda\beta_1 + \beta_2) = \lambda(\alpha \wedge \beta_1) + \alpha \wedge \beta_2$, para $\alpha, \alpha_i \in \Lambda^p(E^*)$ e $\beta, \beta_i \in \Lambda^q(E^*)$, $i = 1, 2$.
2. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(E^*)$.

3. Se $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ e $\beta \in \Lambda^q(E^*)$ então $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Demonstração. Ver Proposição 7.1.5 de [2]. ■

Proposição 1.8 *Sejam E um espaço vetorial de dimensão n e $\{e^1, \dots, e^n\}$ uma base para E^* . Então o conjunto*

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

é uma base para $\Lambda^p(E^*)$. Neste caso temos $\dim \Lambda^p(E^*) = \binom{n}{p}$.

Demonstração. Para mostrarmos que este conjunto gera todos os elementos de $\Lambda^p(E^*)$, primeiro observe que

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}) \circ \sigma$$

Assim, dado $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$, pela Proposição 1.2, α se escreve de forma única como $\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \alpha \circ \sigma &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \circ \sigma \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}) \circ \sigma \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \end{aligned}$$

Mas, de acordo com a Definição 1.4, temos que $\sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \alpha \circ \sigma = \alpha$. Observe também que se houverem índices repetidos, temos que os coeficientes $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ são nulos, por causa da antissimetria de α . Então, para mostrar que os índices podem ser tomados na ordem crescente, basta observar que, tomando $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ e $\sigma \in S_p$ uma permutação dos p índices, temos

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma(e_{i_1}), \dots, \sigma(e_{i_p})) &= (-1)^\sigma \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}); \\ e^{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(i_p)} &= (-1)^\sigma e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \alpha \circ \sigma &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \right) \circ \sigma \\ &= [(-1)^\sigma]^2 \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \end{aligned}$$

Para mostrar que os elementos são linearmente independentes, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} = 0 &\iff \\ \left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \right) (e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0 &\iff \\ a_{j_1 \dots j_p} = 0 \end{aligned}$$

para cada upla (j_1, \dots, j_p) . Então segue o resultado. ■

Observação 1.9 *A partir daqui, vamos utilizar sempre a notação $\mathcal{I}^q(n)$ para representar os q -multiíndices $I = (i_1, \dots, i_q)$ com $i_1, \dots, i_q = 1, \dots, n$. Também utilizaremos $\mathcal{C}^q(n)$ para representar os q -multiíndices ordenados de forma crescente variando de 1 a n , isto é, $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$. Em particular, um elemento $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$ será representado por e_I .*

De acordo com a Proposição 1.8, o conjunto $\{e_I : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^p(E)$. Sabemos da álgebra linear que para definir uma transformação linear $T : \Lambda^p(E) \rightarrow \mathbb{R}$ basta fazê-lo sobre uma base. Assim, a definição seguinte é pertinente.

Definição 1.10 *Dados um espaço vetorial E com base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e uma p -forma $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$, definimos $\Phi(\alpha) : \Lambda^p(E) \rightarrow \mathbb{R}$ aplicação linear dada por*

$$\Phi(\alpha)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}),$$

para todo $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \in \{e_I : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$.

Exemplo 1.11 *Dados $\alpha = e^1 \wedge e^3$ de $\Lambda^2(E^*)$ e $\Pi = 3e_1 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_3 \in \Lambda^2(E)$ de um espaço vetorial E de dimensão 3. Então*

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha)(\Pi) &= \Phi(\alpha)(3e_1 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_3) \\ &= 3\Phi(\alpha)(e_1 \wedge e_3) + 2\Phi(\alpha)(e_2 \wedge e_3) \\ &= 3\alpha(e_1, e_3) + 2\alpha(e_2, e_3) \\ &= 3(e^1 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^1)(e_1, e_3) + 2(e^1 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^1)(e_2, e_3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

sendo a penúltima passagem devido ao Exemplo 1.6.◇

Proposição 1.12 *A aplicação*

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \Lambda^p(E^*) & \longrightarrow & (\Lambda^p(E))^* = \Lambda^p(E)^* \\ \alpha & \longmapsto & \Phi(\alpha) \end{array}$$

$\Phi(\alpha)$ como na Definição 1.10, é um isomorfismo linear.

Demonstração. A aplicação está bem definida e a linearidade segue diretamente da Definição 1.10. Como, pela Proposição 1.8, temos

$$\dim(\Lambda^p(E^*)) = \dim(\Lambda^p(E^*)) = \dim(\Lambda^p(E)^*) = \binom{n}{p},$$

então basta mostrarmos que Φ é sobrejetiva. Tome, então, $A \in \Lambda^p(E)^*$ e e_I , $I \in \mathcal{C}^p(n)$, um elemento da base de $\Lambda^p(E)$. Fazendo $a_I = A(e_I)$, temos que $\alpha = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I e^I$ é tal que $\Phi(\alpha) = A$, lembrando que $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ e $e^J = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_p}$. Logo Φ é isomorfismo. ■

Observação 1.13 *O isomorfismo acima nos permite identificar uma p -forma $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ com um elemento $\Phi(\alpha) \in \Lambda^p(E)^*$ da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \alpha(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) &= \Phi(\alpha)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) \\ &= \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

De maneira análoga, iremos identificar de maneira natural $\Lambda^p(E)$ com $\Lambda^p(E^*)^*$ através do isomorfismo $\Phi^* : \Lambda^p(E) = \Lambda^p(E)^{**} \longrightarrow \Lambda^p(E^*)^*$.

Esta observação nos fornece uma base para a seguinte

Definição 1.14 *A aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^p(E^*) \times \Lambda^p(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \Pi) &\longmapsto \alpha(\Pi) = \Pi(\alpha) \end{aligned}$$

é chamada de *pareamento*¹.

Proposição 1.15 *Dada uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de um espaço vetorial E , seja $\{e^1, \dots, e^n\}$ a sua base dual. Então, para $\alpha \in \Lambda^p(E^*)$ e $\Pi \in \Lambda^p(E)$, temos que*

$$\langle \alpha, \Pi \rangle = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I \Pi^I = \sum_I a_I \Pi^I,$$

onde $\alpha = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I e^I$ e $\Pi = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} \Pi^I e_I$.

Demonstração. Segue direto da Definição 1.10 e do fato de que $a_I = \alpha(e_I)$ e $\Pi^I = \Pi(e^I)$. ■

Para a nossa teoria, o seguinte resultado é útil.

¹Pairing na literatura inglesa.

Teorema 1.16 *Seja α uma 2-forma não-nula sobre um espaço vetorial E . Então existe uma base $\{u_1, \dots, u_r, e_1, \dots, e_s, f_1, \dots, f_s\}$ de E tal que $2r + s = n = \dim(E)$ e*

$$\begin{aligned}\alpha(u_i, u_j) &= 0, \text{ para } i, j = 1, \dots, r; \\ \alpha(e_i, f_i) &= 1, \text{ para } i = 1, \dots, s; \\ \alpha(e_i, e_j) &= \alpha(f_i, f_j) = 0, \text{ para } i, j = 1, \dots, s; \\ \alpha(e_i, f_j) &= \alpha(e_i, u_k) = \alpha(f_i, u_k) = 0,\end{aligned}$$

a última igualdade valendo para $i, j = 1, \dots, s$ com $i \neq j$ e $k = 1, \dots, r$.

Demonstração. Primeiramente escolha uma base $\{u_1, \dots, u_r\}$ para o subespaço $\text{Nuc}(\alpha) = \{v \in E : \alpha(v) = 0\}$. Neste caso, $\alpha(u_i, u_j) = 0$, para $i, j = 1, \dots, r$. Seja W o subespaço tal que $E = W \cup \text{Nuc}(\alpha)$ e $W \cap \text{Nuc}(\alpha) = \{0\}$. Como α é não-nula, $W \neq \{0\}$. Tome $e_1 \in W$, $e_1 \neq 0$. Se acontecesse $W = \langle e_1 \rangle$, teríamos que, dado $a \in W$, teríamos $\alpha(e_1, a) = 0$, pela linearidade de α , o que é absurdo, pois $e_1 \notin \text{Nuc}(\alpha)$. Então existe $f_1 \in W$ tal que $\langle e_1 \rangle \neq \langle e_1, f_1 \rangle$. Novamente pela linearidade, podemos tomar f_1 tal que $\alpha(e_1, f_1) = 1$. Seja $W_1 = \langle e_1, f_1 \rangle$. Se $W = W_1$ o resultado está provado. Caso contrário, considere $W_1^\perp = \{x \in W : \alpha(x, y) = 0, \forall y \in W_1\}$. Temos que $W_1 \cap W_1^\perp = \{0\}$. De fato, se $ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\perp$ então

$$\begin{aligned}\alpha(ae_1 + bf_1, e_1) &= -b = 0 \text{ e} \\ \alpha(ae_1 + bf_1, f_1) &= a = 0.\end{aligned}$$

Tome $e_2 \in W_1^\perp$, $e_2 \neq 0$. Então existe $f_2 \in W_1^\perp$ tal que $\langle e_2 \rangle \neq \langle e_2, f_2 \rangle$, pois caso contrário $e_2 \in \text{Nuc}(\alpha)$, o que contraria $W_1^\perp \neq \{0\}$. Seja $W_2 = \langle e_2, f_2 \rangle$. Se $W_2 = W_1^\perp$ o resultado segue, caso contrário continuamos o processo, que é finito já que a dimensão de E é finita.

■

1.2 Variedades Diferenciáveis

O estudo de variedades diferenciáveis é de extrema importância para a nossa teoria, mas este é um ramo extenso da geometria, o que torna inviável refazê-lo em nosso trabalho. Assumimos, então, uma familiaridade com o conceito de variedades diferenciáveis por parte do leitor. No entanto, para fixar a notação e estabelecer a linguagem utilizada mais a frente, abordaremos alguns aspectos da teoria que, de fato, nos convém neste texto.

Definição 1.17 *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável de classe C^k , se existir uma coleção $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$, chamada atlas diferenciável, onde φ_α é um bijeção entre U_α e um aberto de \mathbb{R}^m , tal que*

1. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$;

2. $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é um aberto, para todos α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$;

3. As aplicações de transição $\varphi_{\beta\alpha}$ dadas por

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

são difeomorfismos de classe C^k .

Quando $k = \infty$, diremos que M é uma variedade suave.

O atlas diferenciável nos permite mapear localmente a variedade M através de abertos de \mathbb{R}^m . Este mapa nos fornece uma escrita local para M da seguinte forma: diremos que (x_1, \dots, x_m) é um sistema de coordenadas locais num aberto $U \subset M$, se x_1, \dots, x_m são aplicações linearmente independentes em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Vejamos alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Exemplo 1.18 Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que \mathbb{R}^m é uma variedade suave, tendo como atlas a aplicação identidade. \diamond

Exemplo 1.19 O espaço de matrizes $M(m, \mathbb{R})$ é uma variedade suave definida através da aplicação $\Psi : M(m, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{m^2}$ dada por

$$\Psi \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{i1}, \dots, a_{im}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mm})$$

de onde segue a bijeção com \mathbb{R}^{m^2} . \diamond

Exemplo 1.20 Todo espaço vetorial de dimensão finita é naturalmente identificado com algum \mathbb{R}^m , logo possui uma estrutura de variedade suave. \diamond

Outro aspecto importante para nossa teoria são as definições de espaço tangente e espaço cotangente de uma variedade. Dada uma variedade M de dimensão m , o espaço tangente $T_x M$ em cada ponto x é um espaço vetorial de dimensão m . Então, seja $T_x^* M$ o espaço dual de $T_x M$. O conjunto $TM = \{T_x M : x \in M\}$ é chamado de *espaço tangente da variedade M* e o conjunto $T^* M = \{T_x^* M : x \in M\}$ é chamado de *espaço cotangente da variedade M* . De fato, tanto o espaço tangente quanto o espaço cotangente de uma variedade são também variedades e têm o dobro da dimensão da variedade base, isto é, se $\dim M = m$ então $\dim TM = \dim T^* M = 2m$. Isto se deve porque o espaço tangente de uma variedade M num ponto é difeomorfo a \mathbb{R}^m . O mesmo procede para o espaço cotangente num ponto. Portanto, se um ponto $y \in TM$ (ou $y \in T^* M$), então existe um $x \in M$ tal que $y \in T_x M$ (ou $y \in T_x^* M$) e para mapeá-lo precisamos das coordenadas do ponto x e das coordenadas de y no espaço vetorial $T_x M$ (ou $T_x^* M$).

Além disso, dada uma variedade M e um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) num aberto $U \subset M$, temos que o conjunto $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(x)\right)$ é um sistema de coordenadas locais de TU , onde $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$ é o vetor derivada da função x_i no ponto x , e o conjunto $(dx^1(x), \dots, dx^m(x))$ é um sistema de coordenadas locais de T^*U , sendo $dx^i(x) \in T_x^*U$ o dual do vetor $\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$. Com estas considerações, podemos prosseguir com o nosso estudo de formas diferenciais.

1.3 Formas Diferenciais

Para $p \in \mathbb{N}$, definimos o conjunto $\Lambda^p(T^*M) = \{\Lambda^p(T_x^*M) : x \in M\}$ das p -formas diferenciais sobre M . Mais precisamente, uma p -forma diferencial $\alpha \in \Lambda^p(T^*M)$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : M &\longrightarrow \Lambda^p(T^*M) \\ x &\longmapsto \alpha(x) \end{aligned},$$

tal que $\alpha(x) : T_x M \times \dots \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma p -forma vetorial para cada $x \in M$. De acordo com a Proposição 1.8, temos que localmente $\alpha(x)$ se escreve como

$$\alpha(x) = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I(x) dx^I,$$

onde as funções $a_I(x)$ são diferenciáveis.

Uma observação pertinente é a de que $\Lambda^1(T^*M) = T^*M$ e $\Lambda^0(T^*M) = \text{Diff}(M)$ são as funções diferenciáveis $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Observação 1.21 *Vamos relembrar o que significa a escrita local de uma p -forma α , quando escrevemos*

$$\alpha(x) = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

estamos na verdade nos referindo a $(\varphi^{-1})^(\alpha(x))$, onde $(\varphi^{-1})^* : \Lambda^p(T^*M) \rightarrow \Lambda^p((\mathbb{R}^m)^*)$ é o operador pull-back. Vamos sempre evitar fazer esta distinção no texto para facilitar a notação e tornar a leitura mais fluida.*

Várias definições são muito importantes para o estudo das formas. No entanto, apresentaremos apenas aquelas das quais vamos utilizar nos capítulos posteriores, mas que agora podem parecer deslocadas.

Definição 1.22 *Sejam M uma variedade suave e $\alpha \in \Lambda^p(T^*M)$. Então o conjunto*

$$\mathcal{E}^*(\alpha) = \{\theta \in \Lambda^1(T^*M) : \theta(x) \wedge \alpha(x) = 0, \forall x \in M\}$$

será chamado de anulador de α .

A seguir veremos duas operações que são essenciais para a nossa teoria, a derivação exterior e a contração.

Teorema 1.23 *Seja M uma variedade de dimensão m e U um aberto de M . Existe uma única família de aplicações*

$$d^k(U) : \Lambda^k(T^*U) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(T^*U)$$

$k = 0, 1, \dots, m$, que denotaremos apenas por d tal que,

1. (Linearidade) $d(\lambda\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda d\alpha_1 + d\alpha_2$, para $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^k(U)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. (Regra de Leibniz) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, para $\alpha \in \Lambda^p(U)$ e $\beta \in \Lambda^k(U)$;
3. (Regra de Cociclo) $d^2 = d^{k+1} \circ d^k = 0$;
4. Se $f \in \Lambda^0(M)$ então df coincide com a derivada de f ;
5. $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$, para qualquer $\alpha \in \Lambda(M)$.

Demonstração. Ver Teorema 7.4.1 de [2]. ■

Definição 1.24 *O operador d como descrito acima é chamado derivada exterior.*

Da definição, observamos que o objetivo de definir tal operador é generalizar a derivada usual de funções (0-formas diferenciais) para k -formas diferenciais quaisquer. Isto fica ainda mais evidente em termos de coordenadas locais.

Proposição 1.25 *Dadas uma variedade M de dimensão m e uma p -forma diferencial $\alpha \in \Lambda^p(M)$. Então, em coordenadas locais, temos*

$$d\alpha(x) = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} da_{i_1 \dots i_p}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} da_I(x) \wedge dx^I.$$

Demonstração. Claramente a expressão local acima possui as propriedades dadas pelo Teorema 1.23, logo o resultado segue da unicidade do operador d . ■

Observação 1.26 *Antes de continuarmos, vamos fazer uma pequena observação. Podemos fazer uma abordagem análoga à feita para formas para os p -vetores. Dada uma variedade M , tomamos o conjunto $\Lambda^q(TM) = \{\Lambda^q(T_x M) : x \in M\}$ e chamamos um elemento $\Pi(x) \in \Lambda^q(TM)$ de um q -campo vetorial. Em particular temos $\Lambda^1(TM) = \mathfrak{X}(M)$.*

Definição 1.27 *Sejam M uma variedade e $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a aplicação $i_X : \Lambda^q(M) \longrightarrow \Lambda^{q-1}(M)$ por*

$$i_X \alpha(X_1, \dots, X_q) = \alpha(X, X_2, \dots, X_q),$$

com $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$. A aplicação i_X chama-se produto interior ou contração pelo campo X .

Proposição 1.28 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$, $\beta \in \Lambda^p(T^*M)$, $f \in \Lambda^0(T^*M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. $i_{\lambda X+Y}\alpha = \lambda i_X\alpha + i_Y\alpha$;
2. $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^q \alpha \wedge (i_X\beta)$;
3. $i_{fX}\alpha = fi_X\alpha$.

Demonstração. Ver itens *i.* e *ii.* do Teorema 7.4.8 de [2]. ■

Outra definição muito importante para o estudo de formas diferenciais é a de *núcleo de uma forma*, que pode ser expressado através do produto interior.

Definição 1.29 O núcleo de uma forma diferencial α é o conjunto

$$\text{Nuc}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : i_X\alpha = 0\}.$$

Chamamos de posto da forma α num ponto $x \in M$ à codimensão de $\text{Nuc}(\alpha(x))$, ou, equivalentemente, à dimensão de $\text{Nuc}(\alpha(x))^\perp$.

Observe que se α é uma 1-forma, então $\text{Nuc}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \alpha(X) = 0\}$.

Exemplo 1.30 Se $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q$ é uma q -forma diferencial sobre uma variedade M , com $\alpha_i \in \Lambda^1(T^*M)$, então

$$\text{Nuc}(\alpha) = \bigcap_{i=1}^q \text{Nuc}(\alpha_i).$$

Vamos mostrar o resultado por indução sobre o grau da forma. Para $q = 1$ é claramente válido, então suponha válido para $q = p$ e mostremos o resultado para $q = p + 1$. Seja α uma $(q + 1)$ -forma e $y \in M$, então

$$\begin{aligned} i_X\alpha(X_2, \dots, X_q)(y) &= \alpha(X, X_2, \dots, X_{q+1})(y) \\ &= \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q \wedge \alpha_{q+1}(X, X_2, \dots, X_{q+1})(y) \\ &= \omega \wedge \alpha_{q+1}(X, X_2, \dots, X_{q+1})(y) \end{aligned}$$

onde $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q$. Tomando-se $X_1 := X$, segue da Definição 1.5 que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha_{q+1}(X_1, X_2, \dots, X_q)(y) &= \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma (\omega \otimes \alpha_{q+1}) \circ (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(q+1)})(y) \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma \omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(q)})(y) \cdot \alpha_{q+1}(X_{\sigma(q+1)})(y). \end{aligned}$$

Segue que $i_X\alpha = 0$ se, e somente se, $X \in \text{Nuc}(\alpha_{q+1}) \cap \text{Nuc}(\omega)$. Por outro lado, o resultado segue da hipótese de indução, uma vez que

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(\alpha_{q+1}) \cap \text{Nuc}(\omega) &= \text{Nuc}(\alpha_{q+1}) \cap (\bigcap_{i=1}^q \text{Nuc}(\alpha_i)) \\ &= \bigcap_{i=1}^{q+1} \text{Nuc}(\alpha_i). \end{aligned}$$

◇

Uma q -forma α será dita *decomponível* se puder ser escrita na forma $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q$, onde $\alpha_i \in \Lambda^1(T^*M)$. Um raciocínio imediato mostra que uma q -forma é decomponível se, e somente se, tem posto q . A proposição a seguir nos diz que o posto de uma q -forma e a quantidade de 1-formas necessárias para expressá-la são equivalentes.

Proposição 1.31 *Dada $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$ sobre a variedade M de dimensão m , temos que $\text{Nuc}(\alpha(x))^\perp$ é o menor subespaço C_x de T_x^*M tal que*

$$\alpha(x) \in \Lambda^q(C_x) \subset \Lambda^q(T_xM). \quad (1.3)$$

Demonstração. Seja C_x o menor subespaço de T_x^*M tal que (1.3) acontece e sejam $\alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x) \in T_x^*M$, $q \leq k \leq m$, tais que $C_x = \langle \alpha_1(x), \dots, \alpha_k(x) \rangle$. Considere o conjunto

$$C_x^\perp = \{X \in T_xM : \alpha_i(x)(X) = 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Queremos mostrar que $C_x^\perp = \text{Nuc}(\alpha(x))$. Temos que, neste caso, α se escreve como

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq k} \lambda_I(x) \alpha_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_q}(x).$$

Assim, dado $X \in C_x^\perp$ temos claramente que $i_X \alpha(x) = 0$ e assim $X \in \text{Nuc}(\alpha(x))$, logo $C_x^\perp \subset \text{Nuc}(\alpha(x))$. Por outro lado, dado $Y \in \text{Nuc}(\alpha(x))$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= i_Y \alpha(x) \\ &= i_Y \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq k} \lambda_I(x) \alpha_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_q}(x) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq k} \lambda_I(x) i_Y (\alpha_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_q}(x)) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq k} \lambda_I(x) \sum_{j=1}^q \pm (i_Y \alpha_{i_j}(x)) \wedge \alpha_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_{i_j}(x)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_q}(x), \end{aligned}$$

onde o símbolo de chapéu indica a ausência do termo no produtório. Mas isso só é possível se $i_Y \alpha_{i_j}(x) = 0$, para todo $j = 1, \dots, q$, ou seja, se $i_Y \alpha_i(x) = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto temos $Y \in C_x^\perp$ e assim $\text{Nuc}(\alpha(x)) = C_x^\perp$, de onde segue o resultado. ■

1.4 A Derivada de Lie

Definição 1.32 *Dada uma variedade M de dimensão finita, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^k(M)$, $k \geq 1$, defina $L_X f : M \rightarrow \mathbb{R}$ por $(L_X f)(x) = df(x) \cdot X(x)$, $x \in M$. Chamamos $L_X f$ de derivada de Lie de f com respeito a X .*

Proposição 1.33 *Seja M uma variedade. A aplicação $L_X : \Lambda^0(T^*M) \rightarrow \Lambda^0(T^*M)$ é uma derivação, isto é, dadas $f, g \in \Lambda^0(T^*M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos*

$$a) \text{ (Linearidade) } L_X (\lambda f + g) = \lambda L_X f + L_X g;$$

$$b) \text{ (Regra de Leibniz) } L_X (fg) = (L_X f) g + f (L_X g).$$

Ainda, se c é uma função constante, então $L_X c = 0$.

Demonstração. Segue das propriedades da derivada exterior. ■

Para definirmos o colchete de Lie (segundo [1]), vamos precisar do seguinte lema, que é na verdade um importante teorema.

Lema 1.34 *A coleção de todas as derivações \mathbb{R} -lineares sobre $\Lambda^0(T^*M)$ de uma variedade M é isomorfo ao espaço $\mathfrak{X}(M) = \Lambda^0(TM)$. Em particular, para cada derivação θ sobre $\Lambda^0(T^*M)$ existe um único $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\theta = L_X$.*

Demonstração. Seja $D(M)$ o conjunto das derivações \mathbb{R} -lineares sobre $\Lambda^0(T^*M)$ de uma variedade M . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow D(M) \\ X &\longmapsto X(f) \end{aligned}$$

onde $X(f)$ é uma derivação sobre $\Lambda^0(T^*M)$ dada por $X(f(x)) = df(x) \cdot X(x)$, para todo $x \in M$. A aplicação θ é linear devido a linearidade da diferencial. Temos que θ é uma aplicação injetiva, pois $X(f(x)) = df(x) \cdot X(x) = 0$ para todos $x \in M$ e $f \in \Lambda^0(T^*M)$ se, e somente se, $X = 0$. Resta mostrarmos que θ é sobrejetiva. De fato, dada $f \in \Lambda^0(T^*M)$, pela decomposição de Taylor, temos numa vizinhança de um ponto $a \in M$ que

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^m (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (x_j - a_j)^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + r(x),$$

onde $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$. Seja $\partial \in D(M)$ uma derivação. A linearidade e a regra de Leibniz implicam que qualquer função constante é nula, já que $\partial(c) = \partial(1 \cdot c) = c \cdot \partial(1)$ e

$$\begin{aligned} \partial(1) &= \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1 = 2 \cdot \partial(1) \Leftrightarrow \\ \partial(1) &= 0. \end{aligned}$$

Então, derivando a expressão de Taylor da f , temos

$$\partial f(x) = \sum_{j=1}^m \partial(\pi_j)(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + (x_j - a_j) \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) + \partial r(x),$$

onde π_j é a projeção da j -ésima coordenada. Em particular, para $x = a$, temos

$$\partial f(a) = \sum_{j=1}^m \partial \pi_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Isso nos mostra que $D(M)$ é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, assim como $\mathfrak{X}(M)$. Então, dado $\partial \in D(M)$, tome $X = \sum_{j=1}^m \partial \pi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e temos que, num ponto $a \in M$ qualquer

$$\partial f(a) = \sum_{j=1}^m \partial \pi_j(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a) \cdot X(a) = X(a) \cdot f(a),$$

como queríamos. ■

Proposição 1.35 *Sejam X, Y dois campos de vetores sobre uma variedade M . Então o operador $[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ é uma derivação \mathbb{R} -linear sobre $\Lambda^0(T^*M)$.*

Demonstração. De fato, dadas $f, g \in \Lambda^0(T^*M) = C^\infty(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} [L_X, L_Y](\lambda f + g) &= (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(\lambda f + g) \\ &= L_X(\lambda L_Y f + L_Y g) - L_Y(\lambda L_X f + L_X g) \\ &= \lambda L_X(L_Y f) + L_X(L_Y g) - \lambda L_Y(L_X f) - L_Y(L_X g) \\ &= \lambda(L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(f) - (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(g). \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} [L_X, L_Y](fg) &= (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(fg) \\ &= L_X((L_Y f)g + f(L_Y g)) - L_Y((L_X f)g + f(L_X g)) \\ &= [(L_X \circ L_Y)(f)]g + f[(L_X \circ L_Y)(g)] \\ &\quad - [(L_Y \circ L_X)(f)]g - f[(L_Y \circ L_X)(g)] \\ &= [(L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(f)]g + f[(L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(g)]. \end{aligned}$$

■

O Lema 1.34 em conjunto com a proposição anterior motivam a seguinte definição:

Definição 1.36 *O campo de vetores $[X, Y] = L_X Y$ é o único tal que $L_{[X, Y]} = [L_X, L_Y]$. Chamamos $L_X Y$ de derivada de Lie de Y com respeito a X , ou o colchete de Lie entre os campos Y e X .*

Pela própria definição, observamos que dada $f \in \Lambda^0(T^*M)$, temos

$$\begin{aligned} [L_X, L_Y](f) &= L_X \circ L_Y(f) - L_Y \circ L_X(f) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= (XY - YX)(f) \\ &= L_{[X, Y]}(f). \end{aligned}$$

Então, como f é arbitrária, encontramos uma forma de expressar o colchete entre X e Y apenas através de X e Y . Temos

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (1.4)$$

Proposição 1.37 *O operador*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto L_X Y = [X, Y] \end{aligned}$$

obedece às seguintes propriedades:

1. *é bilinear;*
2. *(antissimetria) $[X, X] = 0$;*
3. *(Identidade de Jacobi) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.*

Demonstração. Os itens 1. e 2. são imediatos da definição. Para o item 3., temos

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$\begin{aligned} [Y, [Z, X]] &= YZX - YXZ - ZXY + XZY; \\ [Z, [X, Y]] &= ZXY - ZYX - XYZ + YXZ. \end{aligned}$$

Somando tudo encontramos o resultado. ■

Com a mesma notação que estamos utilizando até agora, se localmente temos $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ então $L_X f = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Ainda, se $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ então o colchete de Lie entre X e Y em coordenadas locais é dado por

$$[X, Y] = \sum_i X^i \left(\sum_j \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_i Y^i \left(\sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (1.5)$$

Definimos a derivada de Lie para 0-formas (funções diferenciais) e para campos de vetores. Para definirmos a derivada de Lie para uma p -forma diferencial, precisamos primeiro fazer uma breve digressão. Nosso objetivo é definir a derivada de Lie com as propriedades (a) e (b) apresentadas na Proposição 1.33 válidas para p -formas e campos (fazendo $\alpha(X) = \alpha \cdot X$ como um produto, para quaisquer p -forma α e campo X). Assim, analisemos primeiramente o caso de uma 1-forma diferencial. Dada $\alpha \in T^*M$ e campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\alpha(Y) = i_Y \alpha \in \Lambda^0(T^*M)$. Já conhecemos $L_X(\alpha(Y))$. Mas, seguindo a propriedade (b) da Proposição 1.33, supondo esta válida para 1-formas e campos, teríamos

$$L_X(\alpha \cdot Y) = (L_X \alpha) \cdot Y + \alpha \cdot (L_X Y).$$

Nós conhecemos $L_X(\alpha \cdot Y)$ e $\alpha \cdot (L_X Y)$, então faz sentido definir

$$(L_X \alpha) \cdot Y = L_X(\alpha \cdot Y) - \alpha \cdot (L_X Y)$$

para qualquer $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Em outras palavras $(L_X\alpha) \in \Lambda^1(M)$ é tal que $(L_X\alpha)(Y) = L_X(\alpha(Y)) - \alpha(L_X Y)$ ou $i_Y(L_X\alpha) = L_X(i_Y\alpha) - i_{L_X Y}\alpha$. Podemos prosseguir indutivamente para definir a derivada de Lie para p -formas. Em geral temos para uma p -forma diferencial α :

$$\begin{aligned} (L_X\alpha)(Y_1, \dots, Y_p) &= L_X(\alpha(Y_1, \dots, Y_p)) \\ &\quad - \alpha(L_X Y_1, Y_2, \dots, Y_p) - \dots - \alpha(Y_1, Y_2, \dots, L_X Y_p) \\ &= L_X(\alpha(Y_1, \dots, Y_p)) - \sum_{i=1}^p \alpha(Y_1, \dots, L_X Y_i, \dots, Y_p) \end{aligned} \quad (1.6)$$

para quaisquer $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$. As proposições a seguir, envolvendo derivada de Lie, derivada exterior e contração, serão muito úteis mais a frente. Em particular, a fórmula mágica de Cartan nos fornece uma maneira mais fácil de calcular $L_X\alpha$.

Proposição 1.38 *Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$, $\beta \in \Lambda^p(T^*M)$ e $f \in \Lambda^0(T^*M)$, então*

1. $i_X df = L_X f$;
2. $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$;
3. (Fórmula Mágica de Cartan) $L_X\alpha = i_X d\alpha + di_X\alpha$.
4. $dL_X = L_X d$;

Demonstração. O item 1. segue da definição. Para o item 2., dados $Y_1, \dots, Y_{q+p} \in \mathfrak{X}(M)$, temos pela linearidade e regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} &L_X((\alpha \wedge \beta)(Y_1, \dots, Y_{q+p})) \\ &= L_X \left(\frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma (\alpha \otimes \beta)(\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_{q+p})) \right) \\ &= \frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma L_X((\alpha \otimes \beta)(\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_{q+p}))) \\ &= \frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma L_X(\alpha(\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_q)) \cdot \beta(\sigma(Y_{q+1}), \dots, \sigma(Y_{q+p}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma L_X (\alpha (\sigma (Y_1), \dots, \sigma (Y_q))) \cdot \beta (\sigma (Y_{q+1}), \dots, \sigma (Y_{q+p})) \\
&+ \alpha (\sigma (Y_1), \dots, \sigma (Y_q)) (L_X (\beta (\sigma (Y_{q+1}), \dots, \sigma (Y_{q+p})))) \\
&= \frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma (L_X \alpha \otimes \beta) (\sigma (Y_1), \dots, \sigma (Y_{q+p})) \\
&+ \frac{1}{q!p!} \sum_{\sigma \in S_{q+p}} (-1)^\sigma (\alpha \otimes L_X \beta) (\sigma (Y_1), \dots, \sigma (Y_{q+p})) \\
&= (L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta) (Y_1, \dots, Y_{q+p}).
\end{aligned}$$

Como os campos Y_1, \dots, Y_{p+q} são arbitrários, segue o resultado.

3. Vamos utilizar o argumento de indução. Se α é um função, isto é, uma 0-forma, então pelo item 1. temos que $i_X d\alpha = i_X d\alpha + di_X \alpha = L_X \alpha$, já que $i_X d\alpha = d(d\alpha) \cdot X = 0$. Suponha o resultado válido para um q -forma. Então seja ω uma $(q+1)$ -forma. Logo ω é da forma $\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i$, onde α_i e β_i são 1-formas e q -formas, respectivamente. Assim

$$\begin{aligned}
L_X \omega &= \sum_i L_X (\alpha_i \wedge \beta_i) \\
&= \sum_i L_X \alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge L_X \beta_i \\
&= \sum_i (i_X d\alpha_i + di_X \alpha_i) \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge (i_X d\beta_i + di_X \beta_i) \\
&= \sum_i i_X d\alpha_i \wedge \beta_i + di_X \alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge i_X d\beta_i + \alpha_i \wedge di_X \beta_i
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
i_X d\omega + di_X \omega &= i_X d \left(\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i \right) + di_X \left(\sum_i \alpha_i \wedge \beta_i \right) \\
&= \sum_i i_X (d\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge d\beta_i) + d(i_X \alpha_i \wedge \beta_i + (-1) \alpha_i \wedge i_X \beta_i) \\
&= \sum_i i_X (d\alpha_i \wedge \beta_i) + i_X (\alpha_i \wedge d\beta_i) + d(i_X \alpha_i \wedge \beta_i) + d(-\alpha_i \wedge i_X \beta_i) \\
&= \sum_i i_X d\alpha_i \wedge \beta_i + d\alpha_i \wedge i_X \beta_i + i_X \alpha_i \wedge d\beta_i + \alpha_i \wedge i_X d\beta_i \\
&\quad + di_X \alpha_i \wedge \beta_i - i_X \alpha_i \wedge d\beta_i - d\alpha_i \wedge i_X \beta_i + \alpha_i \wedge di_X \beta_i \\
&= \sum_i i_X d\alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge i_X d\beta_i + di_X \alpha_i \wedge \beta_i + \alpha_i \wedge di_X \beta_i.
\end{aligned}$$

Logo $L_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega$ e o resultado segue por indução.

O item 4. decorre de 3. Para $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$ qualquer, temos

$$dL_X \alpha = d(i_X d\alpha + di_X \alpha) = di_X d\alpha = i_X d d\alpha + di_X d\alpha = L_X d\alpha.$$

■

A proposição a seguir nos fornece uma maneira de calcularmos a derivada exterior de uma p -forma qualquer aplicada a p campos quaisquer.

Proposição 1.39 *Seja $X_i \in \mathfrak{X}(M), i = 0, \dots, q$, e $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$. Então*

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_q) &= \sum_{k=0}^q (-1)^k L_{X_k} \left(\alpha \left(X_0, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_q \right) \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \alpha \left(L_{X_i}(X_j), X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Demonstração. Vamos prosseguir por indução. Se $q = 0$, então a afirmação é válida, de acordo com a definição. Suponha (1.7) válida para q e seja α uma $(q+1)$ -forma. Assim, dados $X_0, \dots, X_{q+1} \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_{q+1}) &= (i_{X_0} d\alpha)(X_1, \dots, X_{q+1}) \\ &= (L_{X_0} \alpha - di_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_{q+1}) \\ &= (L_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_{q+1}) - di_{X_0} \alpha(X_1, \dots, X_{q+1}) \end{aligned}$$

Mas observe que $i_X \alpha$ é uma q -forma, logo, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} di_X \alpha(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k+1} L_{X_k} \left(i_{X_0} \alpha \left(X_1, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_q \right) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} i_{X_0} \alpha \left(L_{X_i}(X_j), X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q \right) \\ &= \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k+1} L_{X_k} \left(\alpha \left(X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_q \right) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} \alpha \left(L_{X_i}(X_j), X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q \right). \end{aligned}$$

Agora, considerando (1.6), encontramos

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, X_1, \dots, X_{q+1}) &= L_X(\alpha(X_0, X_1, \dots, X_{q+1})) - \sum_{i=1}^{q+1} \alpha(X_1, \dots, L_{X_0} X_i, \dots, X_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k+1} L_{X_k} \left(\alpha \left(X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_k, \dots, X_q \right) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} \alpha \left(L_{X_i}(X_j), X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_q \right). \end{aligned}$$

Fazendo um permutação dos índices, obtemos o nosso resultado. ■

Capítulo 2

Introdução à Geometria de Poisson

Neste capítulo faremos uma introdução à geometria de Poisson, ressaltando os pontos fundamentais para a teoria e, particularmente, construindo sistematicamente as noções básicas para que possamos ter uma ideia da importância do assunto. Para isto, utilizamos [8] e [16] como referências principais para a construção do capítulo.

2.1 Variedades de Poisson

Definição 2.1 *Uma estrutura de Poisson C^∞ em uma variedade M de dimensão finita é uma operação bilinear antissimétrica*

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

i) (*Identidade de Jacobi*) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0;$

ii) (*Regra de Leibniz*) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$

para todas $f, g, h \in C^\infty(M)$. Tal operação é chamada de colchete de Poisson. Uma variedade munida desta estrutura é representada por $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e é chamada uma variedade de Poisson.

Analogamente, podemos definir uma estrutura de Poisson C^k , com $k \in \mathbb{N}$, em uma variedade fazendo o colchete agir apenas em pares de funções C^k , isto é, $\{\cdot, \cdot\} : C^k(M) \times C^k(M) \longrightarrow C^k(M)$. Entretanto neste texto trataremos apenas de estruturas C^∞ , embora para a teoria seja suficiente estruturas C^2 , na maioria das situações.

Exemplo 2.2 *A estrutura definida por $\{f, g\} = 0, \forall f, g \in C^\infty(M)$ numa variedade M é um colchete de Poisson. \diamond*

Exemplo 2.3 Se $f \in C^\infty(M)$ é uma função constante, então $\{f, g\} = 0$, $\forall g \in C^\infty(M)$, pois pela linearidade temos $\{f, g\} = f \{1, g\}$ e aplicando a Regra de Leibniz, encontramos

$$\begin{aligned} \{1, g\} &= \{1 \cdot 1, g\} = 1 \{1, g\} + 1 \{1, g\} = 2 \{1, g\} \\ &\implies \{1, g\} = 0. \end{aligned}$$

◇

Exemplo 2.4 (Produto Direto) Sejam $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ e $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ duas variedades de Poisson. Então, o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ munido do colchete $\{\cdot, \cdot\}$ dado por

$$\{f(x, y), g(x, y)\} = \{f_y(x), g_y(x)\}_1 + \{f_x(y), g_x(y)\}_2,$$

(onde $h_x(y)$ e $h_y(x)$ são a função $h \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ vista apenas como função de y e x , respectivamente) é também uma variedade de Poisson e o colchete $\{\cdot, \cdot\}$ é chamado de estrutura de Poisson produto. Observe que basta verificarmos a Identidade de Jacobi, pois as outras propriedades são imediatas. Então, dadas $f, g, h \in C^\infty(M_1 \times M_2)$, temos

$$\begin{aligned} &\{\{f(x, y), g(x, y)\}, h(x, y)\} \\ &= \left\{ \{f(x, y), g(x, y)\}_y(x), h_y(x) \right\}_1 + \left\{ \{f(x, y), g(x, y)\}_x(y), h_x(y) \right\}_2 \\ &= \left\{ (\{f_y(x), g_y(x)\}_1 + \{f_x(y), g_x(y)\}_2)_y(x), h_y(x) \right\}_1 \\ &+ \left\{ (\{f_y(x), g_y(x)\}_1 + \{f_x(y), g_x(y)\}_2)_x(y), h_x(y) \right\}_2 \\ &= \left\{ (\{f_y(x), g_y(x)\}_1)_y(x), h_y(x) \right\}_1 + \left\{ (\{f_x(y), g_x(y)\}_2)_y(x), h_y(x) \right\}_1 \\ &+ \left\{ (\{f_y(x), g_y(x)\}_1)_x(y), h_x(y) \right\}_2 + \left\{ (\{f_x(y), g_x(y)\}_2)_x(y), h_x(y) \right\}_2 \end{aligned}$$

mas note que $(\{f_x(y), g_x(y)\}_2)_y(x)$ e $(\{f_y(x), g_y(x)\}_1)_x(y)$ são funções constantes, logo

$$\left\{ (\{f_x(y), g_x(y)\}_2)_y(x), h_y(x) \right\}_1 = \left\{ (\{f_y(x), g_y(x)\}_1)_x(y), h_x(y) \right\}_2 = 0.$$

Assim

$$\{\{f(x, y), g(x, y)\}, h(x, y)\} = \{\{f_y(x), g_y(x)\}_1, h_y(x)\}_1 + \{\{f_x(y), g_x(y)\}_2, h_x(y)\}_2.$$

Como os colchetes $\{\cdot, \cdot\}_1$ e $\{\cdot, \cdot\}_2$ são de Poisson segue que

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

◇

Dadas uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e uma função $f \in C^\infty(M)$, então a aplicação $\{f, \cdot\} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é uma derivação, já que é linear e obedece à Regra de Leibniz. Sendo assim, pelo Lema 1.34, para cada função $f \in C^\infty(M)$ existe um campo vetorial $X_f \in TM$ tal que $\{f, g\} = X_f(g)$, $\forall g \in C^\infty(M)$. Tal campo é chamado de *campo de vetores hamiltoniano da função f* , ou apenas, *campo hamiltoniano de f* .

Definição 2.5 *Uma integral primeira de um campo X é uma função g tal que $X(g) = 0$, isto é, g é constante com respeito a X .*

Assim, uma função g é uma integral primeira de um campo hamiltoniano X_f se, e somente se, $\{f, g\} = 0$. Observe que toda função h é uma integral primeira de seu próprio campo hamiltoniano, já que, pela antissimetria, temos $\{h, h\} = 0$.

Classicamente, Poisson definiu seu colchete sobre funções sobre \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ como

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i}. \quad (2.1)$$

Com esta definição ele descobriu uma forma de encontrar novas integrais primeiras a partir de duas já conhecidas. Este resultado é conhecido como Teorema de Poisson. Quase trinta anos mais tarde, Jacobi descobriu a identidade que hoje leva seu nome e que “justifica” mais claramente o resultado.

Teorema 2.6 (Poisson) *Sejam f, g, h funções de classe C^∞ sobre uma variedade de Poisson M . Se $\{g, f\} = 0$ e $\{h, f\} = 0$ então $\{\{g, h\}, f\} = 0$.*

Demonstração. Segue direto da identidade de Jacobi. ■

Outro resultado importante sobre campos hamiltonianos relaciona o colchete de Lie e o colchete de Poisson.

Proposição 2.7 *Dadas uma variedade de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$ e funções $f, g \in C^\infty(M)$, então*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Demonstração. Para qualquer $f, g, h \in C^\infty(M)$, temos por (1.4)

$$\begin{aligned} [X_f, X_g] h &= X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{h, f\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f, g\}} h. \end{aligned}$$

Como h é arbitrário, segue que $[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$, como queríamos. ■

Definição 2.8 *Uma variedade simplética, representada por (M, ω) , é uma variedade M munida de uma 2-forma diferencial ω que é fechada e não degenerada, ou seja,*

$$d\omega = 0$$

e se, dado $X \in T_x M$, $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) &= 0, \forall Y \in T_x M \\ \implies X &= 0. \end{aligned}$$

A 2-forma ω é chamada forma simplética.

Exemplo 2.9 A 2-forma diferencial $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$ definida sobre \mathbb{R}^{2n} com base $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ é simplética. Ela é chamada de forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} . \diamond

Por causa da não degenerescência da forma simplética ω , temos que em todo o ponto x de M , a 2-forma vetorial $\omega(x)$ tem posto máximo e este é par, pelo Teorema 1.16. Concluimos daí que toda variedade simplética tem dimensão par. A não degenerescência de ω também nos diz que o homomorfismo

$$\begin{aligned} \omega^\flat : TM &\longrightarrow T^*M \\ X &\longmapsto i_X\omega \end{aligned}$$

é uma bijeção. Então, dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável, existe um único campo vetorial $X_f \in TM$ tal que $i_{X_f}\omega = -df$. A próxima proposição nos diz que toda variedade simplética é também uma variedade de Poisson e que o campo X_f como acima é o campo hamiltoniano de f .

Proposição 2.10 Seja (M, ω) uma variedade simplética. Então o colchete $\{\cdot, \cdot\}$ definido por

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = -df(X_g) = -X_g(f) = X_f(g),$$

onde X_f e X_g são os campos tais que $i_{X_f}\omega = -df$ e $i_{X_g}\omega = -dg$, é uma estrutura de Poisson em M . Assim, os campos $X_f, X_g \in TM$ são os campos hamiltonianos de f e g , respectivamente.

Demonstração. A bilinearidade e a antissimetria seguem direto das propriedades da 2-forma ω . Para mostrarmos a Identidade de Jacobi vamos utilizar (1.7) e aplicá-la a ω . Desta forma, dados $f, g, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\ &= L_{X_f}(\omega(X_g, X_h)) - L_{X_g}(\omega(X_f, X_h)) + L_{X_h}(\omega(X_f, X_g)) \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\ &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\ &\quad - [X_f, X_g](h) - [X_h, X_f](g) - [X_g, X_h](f) \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} - (X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h))) \\ &\quad - (X_h(X_f(g)) - X_f(X_h(g))) - (X_g(X_h(f)) - X_h(X_g(f))) \\ &= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} - \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{h, f\}\} \\ &\quad - \{h, \{f, g\}\} - \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\} \\ &= -(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}). \end{aligned}$$

A Regra de Leibniz é direta, pois

$$\begin{aligned}\{fg, h\} &= \omega(X_{fg}, X_h) = -dfg(X_h) \\ &= -(gdf + fdg)(X_h) = -gdf(X_h) - fdg(X_h) \\ &= g\{f, h\} + f\{g, h\}.\end{aligned}$$

■

O colchete definido como na Proposição anterior é chamado de *colchete associado à forma simplética* ω .

Exemplo 2.11 Dada uma variedade M de dimensão par $2n$ e um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, a forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i \quad (2.2)$$

é simplética. De fato, mostraremos mais adiante que toda forma simplética assume esse formato localmente, por isso ela é chamada de *forma simplética canônica*. Seja $\{\cdot, \cdot\}$ o colchete associado de ω , vamos calcular $\{x_i, x_j\}$, $\{y_i, y_j\}$ e $\{x_i, y_j\}$, para $i, j = 1, \dots, n$. Primeiramente observe que, sendo X_i e Y_i os campos hamiltonianos de x_i e y_i , respectivamente, temos

$$i_{X_i}\omega = -dx^i \Rightarrow X_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad e \quad i_{Y_i}\omega = -dy^i \Rightarrow Y_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, utilizando a definição dada na proposição anterior, encontramos

$$\begin{aligned}\{x_i, y_j\} &= \omega(X_i, Y_j) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, -\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = \frac{\partial}{\partial y_i}(y_j) \\ &\implies \{x_i, y_j\} = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker usual. E também

$$\begin{aligned}\{x_i, x_j\} &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}(x_i) = 0, \forall i, j \quad e \\ \{y_i, y_j\} &= \omega\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}, -\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(y_i) = 0, \forall i, j.\end{aligned}$$

◇

2.2 O Tensor de Poisson

Analogamente ao que fizemos com as formas diferenciais, dada uma variedade M de dimensão m , tomamos o conjunto $\Lambda^q(TM) = \{\Lambda^q(T_x M) : x \in M\}$ e chamamos um elemento $\Pi(x) \in \Lambda^q(TM)$ de um q -campo vetorial. Escrito em coordenadas locais numa

vizinhança de x , temos

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= \sum_{I \in \mathcal{C}^p(m)} \Pi^{i_1 \dots i_q}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{I \in \mathcal{I}^p(m)} \Pi^{i_1 \dots i_q}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}\end{aligned}$$

ou, como na notação introduzida na Observação 1.9,

$$\Pi(x) = \frac{1}{q!} \sum_{I \in \mathcal{I}^p(m)} \Pi^I(x) \frac{\partial}{\partial x_I}, \quad I = (i_1, \dots, i_q). \quad (2.3)$$

As componentes $\Pi^I(x)$ são funções chamadas coeficientes de Π e são antissimétricas em relação aos índices, isto é, se houver uma permutação ímpar dos índices o coeficiente é multiplicado por (-1) . Se $\Pi^I(x)$ são funções suaves então Π é dito um q -campo vetorial suave. Aqui trataremos apenas de campos suaves. Dada $\alpha \in \Lambda^q(T^*M)$, podemos generalizar a Definição 1.14 para variedades, definindo a aplicação

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^q(T^*M) \times \Lambda^q(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (\alpha(x), \Pi(x)) &\longmapsto \langle \alpha, \Pi \rangle(x)\end{aligned}$$

que também chamaremos de *pareamento*. Então, pela Proposição 1.15, temos em coordenadas locais que

$$\langle \alpha, \Pi \rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m} a_{i_1 \dots i_q} \Pi^{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{I \in \mathcal{I}^p(m)} a_I \Pi^I. \quad (2.4)$$

Em particular, dado $\Pi \in \Lambda^q(TM)$, fica bem definida a aplicação

$$\bar{\Pi} : C^\infty(M) \times \dots \times_{q\text{-vezes}} C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

dada da seguinte forma

$$\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q) = \langle df_1 \wedge \dots \wedge df_q, \Pi \rangle. \quad (2.5)$$

O próximo lema diz que esta aplicação dá ao q -campo de vetores uma interpretação de multiderivação.

Lema 2.12 *Seja $\bar{\Pi} : C^\infty(M) \times \dots \times_{q\text{-vezes}} C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ uma aplicação multilinear.*

Então $\bar{\Pi}$ é da forma $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q) = \langle df_1 \wedge \dots \wedge df_q, \Pi \rangle$, onde Π é um q -campo vetorial suave se, e somente se, $\bar{\Pi}$ é uma aplicação antissimétrica satisfazendo a regra de Leibniz

$$\bar{\Pi}(fg, f_2, \dots, f_q) = f \bar{\Pi}(g, f_2, \dots, f_q) + g \bar{\Pi}(f, f_2, \dots, f_q).$$

Demonstração. Seja Π um q -campo vetorial suave. Então a aplicação $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q) = \langle df_1 \wedge \dots \wedge df_q, \Pi \rangle$ é antissimétrica por causa da bilinearidade da aplicação pareamento. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(f_1, \dots, f_{i+1}, f_i, \dots, f_q) &= \langle df_1 \wedge \dots \wedge df_{i+1} \wedge df_i \wedge \dots \wedge df_q, \Pi \rangle \\ &= \langle -(df_1 \wedge \dots \wedge df_i \wedge df_{i+1} \wedge \dots \wedge df_q), \Pi \rangle \\ &= -\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_q). \end{aligned}$$

Já a regra de Leibniz segue das propriedades da derivação exterior e também da bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(fg, f_2, \dots, f_q) &= \langle d(fg) \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_q \rangle \\ &= \langle (gdf + f dg) \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_q \rangle \\ &= g \langle df \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_q \rangle + f \langle dg \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_q \rangle \\ &= f \bar{\Pi}(g, f_2, \dots, f_q) + g \bar{\Pi}(f, f_2, \dots, f_q). \end{aligned}$$

Agora suponha que a aplicação multilinear $\bar{\Pi}$ é antissimétrica e satisfaz a regra de Leibniz. Então, a partir do isomorfismo definido na Proposição 1.12, para construirmos um q -campo $\Pi \in \Lambda^q(TM)$ satisfazendo as condições do enunciado, basta construirmos um elemento de $\Lambda^q(T^*M)^*$, ao qual vamos denotar também por Π , tal que para cada $x \in M$ e um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança de x ,

$$\begin{aligned} \Pi : \Lambda^q(T_x^*M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha = \sum_{J \in \mathcal{C}^q(m)} a_J(x) dx^J &\mapsto \Pi(\alpha) = \sum_{J \in \mathcal{C}^q(m)} a_J(x) \bar{\Pi}(x_{j_1}, \dots, x_{j_q})(x). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\Pi(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}) = \bar{\Pi}(x_{i_1}, \dots, x_{i_q})$. Basta agora verificarmos que tal aplicação não depende do sistema de coordenadas locais. Seja então (y_1, \dots, y_m) um outro sistema de coordenadas locais numa vizinhança de x (tome uma vizinhança suficientemente pequena para que (x_1, \dots, x_m) esteja definido). Desta forma, temos

$$\begin{aligned} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) & & dy^1 &= \sum_{j_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(x) dx^{j_1} \\ \vdots & & \implies & & \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_m) & & & & dy^m = \sum_{j_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_{j_m}}(x) dx^{j_m} \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_q} = \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial f_{i_q}}{\partial x_{j_q}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

Logo a aplicação Π no novo sistema de coordenadas é

$$\begin{aligned}\Pi(dy^I) &= \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial f_{i_q}}{\partial x_{j_q}} \bar{\Pi}(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) \\ &= \bar{\Pi}\left(\sum_{j_1=1}^m \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_{j_1}} x_{j_1}, \dots, \sum_{j_q=1}^m \frac{\partial f_{i_q}}{\partial x_{j_q}} x_{j_q}\right) \\ &= \bar{\Pi}(df_{i_1}, \dots, df_{i_q}) \\ &= \bar{\Pi}(f_{i_1}, \dots, f_{i_q})\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do lema a seguir. ■

Lema 2.13 *Se $\bar{\Pi} : C^\infty(M) \times \cdots \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é uma aplicação multilinear, q -vezes antissimétrica que satisfaz a regra de Leibniz, então*

$$\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q)(x) = \bar{\Pi}(df_1, \dots, df_q)(x).$$

Demonstração. Queremos mostrar que $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q) - \bar{\Pi}(df_1, \dots, df_q) = 0$, ou equivalentemente, se $\bar{\Pi}(df_1, \dots, df_q) = 0$ temos $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q) = 0$. Para isto, basta mostrar que se num ponto $x \in M$ temos $df_1(x) = 0$ então $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q)(x) = 0$. Neste caso, se $df_1(x) = 0$ então $f_1 = c + \sum_{i=1}^m x_i g_i$, onde c é uma constante e x_i e g_i são funções que se anulam no ponto x . Assim, pela linearidade e regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q)(x) &= \bar{\Pi}\left(c + \sum_{i=1}^m x_i g_i, \dots, f_q\right)(x) \\ &= c\bar{\Pi}(1, \dots, f_q)(x) + \sum_{i=1}^m x_i(x) \bar{\Pi}(g_i, \dots, f_q)(x) + g_i(x) \bar{\Pi}(x_i, \dots, f_q)(x) \\ &= c\bar{\Pi}(1, \dots, f_q)(x)\end{aligned}$$

já que $x_i(x) = g_i(x) = 0$. Mas a regra de Leibniz também nos diz que

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(1, \dots, f_q) &= \bar{\Pi}(1 \cdot 1, \dots, f_q) \\ &= 1\bar{\Pi}(1, \dots, f_q) + 1\bar{\Pi}(1, \dots, f_q) \\ &= 2\bar{\Pi}(1, \dots, f_q) \\ &\implies \bar{\Pi}(1, \dots, f_q) = 0.\end{aligned}$$

Logo $\bar{\Pi}(f_1, \dots, f_q)(x) = 0$ se $\bar{\Pi}(df_1, \dots, df_q) = 0$. ■

O Lema 2.12 nos oferece uma nova interpretação para uma estrutura de Poisson. O colchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ é bilinear, antissimétrico e satisfaz a Regra de Leibniz, então existe um 2-campo vetorial suave Π tal que

$$\{f, g\} = \Pi(f, g) = \langle df \wedge dg, \Pi \rangle \quad (2.6)$$

para quaisquer funções C^∞ sobre a variedade em questão. Reciprocamente, um 2-campo de vetores Π tal que o colchete definido por $\{f, g\} := \Pi(f, g)$ é de Poisson, isto é, satisfaz a identidade de Jacobi, é chamado um *tensor de Poisson* ou uma *estrutura de Poisson*. Em coordenadas locais, temos

$$\Pi = \sum_{i < j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

onde $\Pi^{ij} = \{x_i, x_j\} = \langle dx^i \wedge dx^j, \Pi \rangle$. Aplicando o colchete a um par de funções arbitrário, encontramos uma expressão local para o colchete de Poisson

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \langle df \wedge dg, \Pi \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx^i \wedge dx^j, \sum_{i < j=1}^m \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Exemplo 2.14 Dadas coordenadas locais de uma variedade de dimensão par, o tensor de Poisson correspondente à forma simplética canônica $\omega = \sum_i dx^i \wedge dy^i$ é $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}$. De fato, calculamos no Exemplo 2.11 que numa variedade simplética temos $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$ e $\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0, \forall i, j$. Assim

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} 2 \{x_i, y_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \{y_i, y_j\} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_i \{x_i, y_i\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}. \end{aligned}$$

◇

Exemplo 2.15 O colchete associado ao 2-campo vetorial $\Pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right)$ em \mathbb{R}^3 , não satisfaz à identidade de Jacobi. De fato, dadas funções f, g, h de classe C^∞ sobre a variedade considerada, então

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \langle df \wedge dg, \Pi \rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \Pi^{xy} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \Pi^{yx} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \Pi^{xz} \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \Pi^{zx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \Pi^{yz} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \Pi^{zy}. \end{aligned}$$

Mas temos $\Pi^{xy} = 1, \Pi^{xz} = x$ e $\Pi^{yz} = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Logo encontramos

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial h}{\partial y} \\ &\quad + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \right) \frac{\partial h}{\partial z} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Mas tomando, por exemplo, as funções $f(x, y, z) = x^2$, $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ e $h(x, y, z) = y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x(2y + z^2) + x(2x)(y^2 + 2z)) (2y) \\ &= (4xy^2 + 2z^2 + 4y + 8xz) (2y) \\ &= 8xy^3 + 4yz^2 + 8y^3 + 16xyz \end{aligned}$$

Concluimos que, para estas funções, a expressão $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$ é a soma de termos positivos, logo é não identicamente nula. Então o 2-campo vetorial dado não é um tensor de Poisson. \diamond

Agora podemos formular uma condição em coordenadas locais para um 2-campo vetorial ser um tensor de Poisson, isto é, satisfazer a identidade de Jacobi. Sejam (x_1, \dots, x_m) um sistema local de coordenadas de uma variedade M e Π um 2-campo vetorial suave sobre M . Associamos a Π um colchete dado por $\{f, g\} = \Pi(f, g) = \langle df \wedge dg, \Pi \rangle$, $f, g \in C^\infty(M)$. Neste caso, temos por (2.4) que $\{f, g\} = \sum_{i,j} \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Dada $h \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \sum_{s,k=1}^m \Pi^{sk} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h}{\partial x_k} \\ &= \sum_{s,k,i,j=1}^m \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$\begin{aligned} &\{\{g, h\}, f\} = \\ &= \sum_{s,k,i,j=1}^m \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}; \\ &\{\{h, f\}, g\} = \\ &= \sum_{s,k,i,j=1}^m \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} + \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Distribuindo a somatória, reorganizando os índices e utilizando a antissimetria dos coeficientes Π^{ij} e a simetria das derivações parciais segundas apropriadamente, obtemos

$$\begin{aligned}
& \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} \\
&= \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \\
&+ \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k} - \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_j} \\
&+ \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&+ \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} - \Pi^{sk} \Pi^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_s \partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_j} \\
&= \sum_{k,i,j} \left(\sum_s \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_k}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Como consequência temos o seguinte resultado:

Proposição 2.16 *Seja $\Pi = \sum_{i < j} \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ um 2-campo vetorial sobre uma variedade M , escrito num dado sistema de coordenadas locais. Então Π é um tensor de Poisson se, e somente se, seus coeficientes satisfazem à seguinte equação*

$$\sum_{s=1}^m \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} = 0, \tag{2.10}$$

para todos $i, j, k = 1, \dots, m$.

Demonstração. Para cada tripla (i, j, k) , tomando $f = x_i, g = x_j, h = x_k$ temos que se a expressão (2.9) é nula então

$$\sum_s \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} = 0.$$

Reciprocamente, se (2.10) é válida então (2.9) é nula e assim Π é um tensor de Poisson.

■

Exemplo 2.17 *Todo 2-campo vetorial em uma variedade bidimensional é um tensor de Poisson. De fato, em um sistema de coordenadas locais (x_1, x_2) um dado 2-campo Π se escreve como $\Pi = \Pi^{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}$. Logo*

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^2 \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} \\
&= \Pi^{1k} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_1} + \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_1} + \Pi^{1j} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_1} + \Pi^{2k} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_2} + \Pi^{2i} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_2} + \Pi^{2j} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Se $i = j = k$, a expressão se anula naturalmente devido à antissimetria dos coeficientes do tensor. Basta-nos então considerar o caso em que $i = j \neq k$, pois todos os outros serão análogos pela simetria da equação. Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}\Pi^{1k} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_1} + \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_1} + \Pi^{1j} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_1} &= \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x_1} + \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_1} = 0 \\ \Pi^{1k} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_2} + \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_2} + \Pi^{1j} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_2} &= \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x_2} + \Pi^{1i} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_2} = 0\end{aligned}$$

Segue da Proposição anterior que Π é um tensor de Poisson. \diamond

2.3 Estudo em Coordenadas Locais

Seja Π um tensor de Poisson¹ sobre uma variedade M de dimensão m . Para cada $\alpha(x) \in \Lambda^1(T_x^*M)$, $x \in M$, a aplicação

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) : \Lambda^1(T_x^*M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta(x) &\longmapsto \langle \alpha \wedge \beta, \Pi \rangle(x)\end{aligned}$$

é claramente linear e está bem definida. Assim, $\Psi(\alpha) \in \Lambda^1(T_x^*M)^*$. Seja agora $\Phi : \Lambda^1(T_x^*M) \longrightarrow \Lambda^1(TM)^*$ o isomorfismo definido na Proposição 1.12 (ou, mais precisamente, na Observação 1.13) e $\Phi^* : \Lambda^1(TM) \longrightarrow \Lambda^1(T_x^*M)^*$ seu dual, então definimos $\#\alpha \in \Lambda^1(TM)$ por $\#\alpha = \Phi^{*-1} \circ \Psi(\alpha) \in \Lambda^1(TM)$. Logo, definimos um homomorfismo natural

$$\begin{aligned}\# = \#\Pi : T_x^*M &\longrightarrow TM \\ \alpha &\longmapsto \Phi^{*-1} \circ \Psi(\alpha)\end{aligned}$$

Em outras palavras, para cada $\alpha(x) \in \Lambda^1(T_x^*M)$, $x \in M$, associamos o vetor $\#\alpha(x) \in T_xM$ satisfazendo

$$\langle \alpha \wedge \beta, \Pi \rangle(x) = \langle \beta, \#\alpha \rangle(x)$$

quaisquer que sejam $x \in M$ e $\beta(x) \in T_x^*M$. Tal operação é chamada de *aplicação âncora*² de Π . Em coordenadas locais, temos

$$\begin{aligned}\langle \alpha \wedge \beta, \Pi \rangle(x) &= \left(\sum_{i,j=1}^m \Pi^{ij} a_i b_j \right)(x) = \left(\sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^m \Pi^{ij} a_i \right)(x) \\ &= \left\langle \beta, \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \Pi^{ij} a_i \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle(x),\end{aligned}$$

onde $\alpha = \sum_{j=1}^m a_j dx^j$ e $\beta = \sum_{j=1}^m b_j dx^j$. Segue que

$$\#\alpha(x) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \Pi^{ij} a_i \right)(x) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (2.11)$$

¹Ou, mais geralmente, um 2-campo vetorial qualquer.

²Tradução literal da expressão utilizada em [8].

Observe que, se $\Lambda^j = (\sum_{i=1}^m \Pi^{ij} a_i)$ são os coeficientes de $\# \alpha$ nesta base, então

$$[\Lambda^j]_{m \times 1}(x) = \left(- [\Pi^{ij}]_{m \times m} [a_i]_{m \times 1} \right)(x)$$

lembrando que $[\Pi^{ij}]_{m \times m}$ é uma matriz antissimétrica.

Exemplo 2.18 Dado um tensor de Poisson Π sobre uma variedade M e $f \in C^\infty(M)$, então para toda função $g \in C^\infty(M)$,

$$dg(X_f) = X_f(g) = \{f, g\} = \Pi(f, g) = \langle df \wedge dg, \Pi \rangle = \langle dg, \#(df) \rangle \implies \#(df) = X_f$$

onde X_f é o campo hamiltoniano de f . \diamond

Lema 2.19 A imagem $C_x = \text{Im } \#_{\Pi(x)}$ da aplicação $\#_{\Pi(x)}$ é o menor subespaço de $T_x M$ tal que $\Pi(x) \in \Lambda^2(C_x) \subset \Lambda^2(T_x M)$.

Demonstração. Dado um sistema de coordenadas locais arbitrário (x_1, \dots, x_m) em uma vizinhança aberta V de um ponto $x \in M$ também arbitrário, suponha, sem perda de generalidade, que $\Pi = \sum_{i,j=1}^q \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$, ou seja, $\Pi^{ij} = 0$ para $i > q$ (ou $j > q$, já que $\Pi^{ij} = -\Pi^{ji}$). Observe que o menor subespaço C_x de $T_x M$ tal que $\Pi(x) \in \Lambda^2(C_x)$ é $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q} \right\rangle$. Por (2.11), é claro que $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q} \right\rangle \subset \text{Im } \#_{\Pi(x)}$, $\forall x \in V$. Reciprocamente, dada $\alpha \in \Lambda^1(T^*M)$, obtemos, novamente por (2.11),

$$\# \alpha(x) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \Pi^{ij} a_i \right)(x) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^q \left(\sum_{i=1}^q \Pi^{ij} a_i \right)(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Logo $\# \alpha(x) \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q} \right\rangle$. Concluimos que $\text{Im } \#_{\Pi(x)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q} \right\rangle$, de onde segue o resultado. \blacksquare

O lema anterior juntamente com o Exemplo 1.3 motivam a seguinte definição.

Definição 2.20 Se (M, Π) é uma variedade de Poisson e x um ponto de M , então a imagem $C_x := \text{Im } \#_{\Pi(x)}$ da aplicação $\#_{\Pi(x)}$ é chamada de espaço característico da estrutura de Poisson Π no ponto x . A dimensão do espaço característico C_x é chamada de posto de Π em x e $\max_{x \in M} \dim C_x$ é chamada de posto de Π . Quando o posto de $\Pi(x)$ é igual a dimensão de M , então dizemos que Π é não degenerada em x . Se o posto de Π é constante sobre M , então Π é dita uma estrutura de Poisson regular.

Exemplo 2.21 Seja (M, Π) uma variedade de Poisson. Observe que o posto de Π coincide com o posto da matriz $[\Pi^{ij}]_{m \times m}$ dos coeficientes de Π escrito em alguma coordenada local. Sabemos da álgebra linear que o posto de uma matriz antissimétrica é sempre par. Disto concluimos que o posto de Π em um ponto $x \in M$ é sempre par. Note também

que, se Π é uma estrutura de Poisson regular não degenerada, então a 2-forma ω tal que $\omega(X_f, X_g) = \Pi(f, g)$ é não degenerada. De fato, se $\omega(X_f, X_g) = 0, \forall g \in C^\infty(M)$, então

$$\begin{aligned}\Pi(f, g) &= \langle df \wedge dg, \Pi \rangle = \langle dg, \#df \rangle = \langle dg, X_f \rangle = 0 \\ &\implies X_f = 0.\end{aligned}$$

Mais ainda, observe que ω é fechada por causa da identidade de Jacobi (ver prova da Proposição 2.10). Então ω é uma forma simplética associada a Π . Pelo Exemplo 2.14 e pela unicidade da escrita de uma forma em coordenadas locais, a forma simplética associada à estrutura de Poisson $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}$ canônica é a forma simplética canônica $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$. \diamond

O espaço característico C_x em um ponto x qualquer é gerado pelos campos hamiltonianos no ponto.

Proposição 2.22 *Sendo (M, Π) uma variedade de Poisson e C_x seu espaço característico no ponto $x \in M$, então*

$$C_x = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)\}, \forall x \in M.$$

Demonstração. Sabemos que o espaço T^*M é gerado pelas 1-formas lineares df com $f \in C^\infty(M)$. Então, temos que $\text{Im } \#_\Pi$ é gerado pelos campos $\#(df)$ e assim, pelo Exemplo 2.18, segue que $\text{Im } \#_\Pi$ é gerado pelos campos X_f e o resultado segue pela linearidade de $\#$. ■

O seguinte resultado, devido a Alan Weinstein (ver [16]), nos fornece uma forma canônica local para um tensor de Poisson.

Teorema 2.23 (Decomposição de Weinstein) *Seja x um ponto de posto $2s$ de uma estrutura de Poisson Π sobre uma variedade M de dimensão m . Seja N uma subvariedade de M de dimensão $(m - 2s)$, escolhida arbitrariamente, mas que contém x e é transversal ao espaço característico C_x no ponto x , isto é, $T_x M = T_x N \oplus C_x$. Então existe um sistema de coordenadas $(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s})$ de M numa vizinhança de x que satisfaz as seguintes condições:*

- a. $p_i(y) = q_i(y) = 0$, para todos $i = 1, \dots, m$ e $y \in N_x$, onde $N_x \subset N$ é uma vizinhança suficientemente pequena de x ;
- b. $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \forall i, j$;
- c. $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \forall i, j$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker usual e
- d. $\{z_i, p_j\} = \{z_i, q_j\} = 0, \forall i, j$;

e. $\{z_i, z_j\} = \varphi^{ij}$ tal que $\varphi^{ij}(x) = 0, \forall i, j$.

A condição d. nos diz que as funções coordenadas φ^{ij} só dependem das coordenadas $z_i, i = 1, \dots, (m - 2s)$.

Demonstração. Inicialmente observe que se $\Pi(x) = 0$, então $s = 0$ e o resultado é imediato. Então suponha $\Pi(x) \neq 0$. Seja $V \subset M$ uma vizinhança de x e seja $N_x = V \cap N$. Tome uma função p_1 de classe C^∞ em V tal que $p_1|_N = 0$ e $dp_1(x) \neq 0$. A condição $p_1|_N = 0$ nos diz que $dp_1|_{T_x N} = 0$, mas como $dp_1(x) \neq 0$, existe um vetor $X_g \in C_x$ tal que $dp_1(X_g) \neq 0$, ou seja, existe uma função g tal que $\#dg(x) = X_g$ (ver Exemplo 2.18) e

$$dp_1(X_g) = X_g(p_1) = \{g, p_1\} = -\{p_1, g\} = -X_{p_1}(g) \neq 0.$$

Assim, $X_{p_1} = \#dp_1(x) \in C_x$ é um vetor não nulo. Como o posto de Π é $2s$, existe $v \in C_x$ tal que X_{p_1} e v são linearmente independentes. Podemos garantir a existência de uma função q_1 de classe C^∞ em V (diminuindo V , se necessário) tal que $X_{p_1}(q_1) = \{p_1, q_1\} = 1$ e $q_1|_N = 0$, utilizando o método de Cauchy para a solução desta EDP linear de primeira ordem. Utilizando a Proposição 2.7, temos que

$$[X_{p_1}, X_{q_1}] = X_{\{p_1, q_1\}} = 0.$$

Segue do Teorema de Frobenius (cf. Teorema 3.16) que existe um sistema de coordenadas locais (y_1, \dots, y_m) tal que

$$X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}, X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Neste sistema de coordenadas, temos

- i) $\{p_1, q_1\} = 1$;
- ii) $\{p_1, y_i\} = \{q_1, y_i\} = 0, \forall i \geq 3$;
- iii) $\{y_i, y_j\} = \varphi^{ij} \in C^\infty(M), \forall i \geq 3$.

Como consequência do item ii) e do Teorema de Poisson (Teorema 2.6), segue que $\{\{y_i, y_j\}, p_1\} = \{\{y_i, y_j\}, q_1\} = 0$, para $i = 3, \dots, m$, ou seja,

$$X_{p_1}(\{y_i, y_j\}) = \frac{\partial}{\partial y_2}(\{y_i, y_j\}) = 0 \quad e \quad X_{q_1}(\{y_i, y_j\}) = \frac{\partial}{\partial y_1}(\{y_i, y_j\}) = 0.$$

Concluimos daí que φ^{ij} não depende das coordenadas y_1 e y_2 . Então o operador linear $\psi : (y_1, \dots, y_m) \longrightarrow (p_1, q_1, y_3, \dots, y_m)$ é uma mudança linear de coordenadas cuja jacobiana é a matriz $m \times m$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \\ \mathbf{0} & & Id \end{bmatrix}$$

que tem o determinante não nulo. Então, nas coordenadas $(p_1, q_1, y_3, \dots, y_m)$, temos que Π se escreve como

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^m \varphi^{ij}(y_3, \dots, y_m) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Isso nos diz que essa estrutura de Poisson é localmente o produto cartesiano entre uma variedade simplética bidimensional com a forma canônica (2.2) e uma variedade de Poisson de dimensão $(m - 2)$ (ver Exemplos 2.4 e 2.21) cujo tensor de Poisson

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^m \varphi^{ij}(y_3, \dots, y_m) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$$

tem posto $2s - 2$ no ponto x . O teorema agora segue por indução sobre o posto de Π . ■

A conclusão do teorema é que toda variedade de Poisson é localmente o produto cartesiano entre uma variedade simplética e uma variedade de Poisson cujo tensor de Poisson é degenerado em pelo menos um ponto. Como consequência, recuperamos o clássico Teorema de Darboux para forma simpléticas.

Corolário 2.24 (Teorema de Darboux) *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Então, para todo $x \in M$, existe um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ numa vizinhança de x tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.10, temos que toda variedade simplética é de Poisson. A não degenerescência da forma simplética nos garante que a estrutura de Poisson terá posto máximo em todos os pontos. Então basta aplicar o Teorema anterior e o Exemplo 2.21. ■

Um sistema de coordenadas tal qual descrito no Teorema 2.23 é chamado de *sistema de coordenadas canônicas*. Neste sistema de coordenadas, o colchete gerado por um tensor de Poisson Π é dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \{z_i, z_j\} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \quad (2.12)$$

$$= \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k}. \quad (2.13)$$

Observe que esta equação é idêntica à (2.1), que é expressão definida originalmente por Poisson.

2.4 O Colchete de Schouten

Dados dois campos de vetores A e B podemos escrevê-los em um dado sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) como $A = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $B = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim, recorde que o colchete de Lie de A e B é dado por (1.5)

$$[A, B] = \sum_i a^i \left(\sum_j \frac{\partial b^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_i b^i \left(\sum_j \frac{\partial a^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Vamos denotar $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por ∂_i e considerar o par (x_i, ∂_i) como sendo de coordenadas independentes, para todo $i = 1, \dots, m$, chamadas coordenadas generalizadas. Observe que neste caso

$$\partial_i \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} = -\partial_j \partial_i,$$

ou seja, as coordenadas ∂_i anticomutam entre si. Então, nas coordenadas generalizadas $(x_1, \dots, x_m, \partial_1, \dots, \partial_m)$ escrevemos $A = \sum_i a^i \partial_i$ e $B = \sum_i b^i \partial_i$. Vistos desta forma, campos de vetores se parecem muito com expressões polinomiais. Com isto em mente, vamos adotar a regra de derivação de forma análoga à de funções polinomiais

$$\frac{\partial (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p})}{\partial (\partial_{i_p})} := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{p-1}}.$$

Por causa da anticomutatividade, temos

$$\frac{\partial (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p})}{\partial (\partial_{i_k})} = (-1)^{p-k} \partial_{i_1} \cdots \widehat{\partial_{i_k}} \cdots \partial_{i_p} \quad (2.14)$$

onde o símbolo chapéu indica a ausência no produto. Portanto, podemos reescrever a expressão (1.5) da seguinte forma

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial (\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial B}{\partial (\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i}. \quad (2.15)$$

O colchete escrito desta forma guarda similaridade com colchete de Poisson (2.1).

Sejam A um p -campo vetorial e B um q -campo vetorial. Em coordenadas locais generalizadas $(x_1, \dots, x_m, \partial_1, \dots, \partial_m)$ eles se escrevem como

$$A = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m A^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_p}$$

$$B = \frac{1}{q!} \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^m B^{j_1, \dots, j_q} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_q}.$$

Então podemos definir uma generalização da fórmula (2.15) da seguinte forma

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial (\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} - (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_i \frac{\partial B}{\partial (\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i}. \quad (2.16)$$

O colchete como definido acima é claramente um $(p + q - 1)$ -campo de vetores.

Teorema 2.25 (Schouten-Nijenhuis) *O colchete definido em (2.16) satisfaz as seguintes propriedades:*

a) *Se A é um a -campo de vetores e B é um b -campo de vetores, então*

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)} [B, A]. \quad (2.17)$$

b) *Se A, B e C são um a -campo, b -campo e c -campo de vetores, respectivamente, então*

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C], \quad (2.18)$$

$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b} [A, C] \wedge B. \quad (2.19)$$

c) *Se A, B e C são um a -campo, b -campo e c -campo de vetores, respectivamente, então*

$$\mu^{ac} [A, [B, C]] + \mu^{ba} [B, [C, A]] + \mu^{cb} [C, [A, B]] = 0, \quad (2.20)$$

onde $\mu^{ij} = (-1)^{(i-1)(j-1)}$, $i, j \in \{a, b, c\}$.

d) *Se A e B são dois campos de vetores, então este colchete coincide com o colchete de Lie usual. Se $A = X$ é um campo de vetores e $B = f$ é uma função suave (um 0-campo de vetores³), então*

$$[X, f] = L_X f = X(f). \quad (2.21)$$

Demonstração. O item (a) segue diretamente da definição.

b) Observe que, em coordenadas generalizadas $(x_1, \dots, x_m, \partial_1, \dots, \partial_m)$, $B \wedge C = (\sum_I B^I \partial_I) (\sum_J C^J \partial_J)$ é um polinômio, então a regra de derivação (2.14) nos fornece

$$\frac{\partial(B \wedge C)}{\partial(\partial_i)} = B \frac{\partial C}{\partial(\partial_i)} + (-1)^c \frac{\partial B}{\partial(\partial_i)} C.$$

³Observe que, segundo nossa definição, $\Lambda^0(T^*M) = \Lambda^0(TM)$.

Assim

$$\begin{aligned}
[A, B \wedge C] &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial(B \wedge C)}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b+c-1)} \sum_i \frac{\partial(B \wedge C)}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \sum \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} C - (-1)^{(a-1)(b+c-1)+c} \frac{\partial B}{\partial(\partial_i)} C \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&+ \sum \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} B \frac{\partial C}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b+c-1)} B \frac{\partial C}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \sum \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} C - (-1)^{(a-1)(b+c-1)+c+ac} \frac{\partial B}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} C \\
&+ \sum (-1)^{(a-1)b} B \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial C}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b+c-1)} B \frac{\partial C}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \left(\sum \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b-1)} \frac{\partial B}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) C \\
&+ (-1)^{(a-1)b} B \left(\sum \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial C}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(c-1)} B \frac{\partial C}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) \\
&= [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C].
\end{aligned}$$

A fórmula (2.19) segue analogamente.

c) Calculando explicitamente, encontramos

$$\begin{aligned}
&\mu^{ac} [A, [B, C]] \\
&= \mu^{ac} \left(\sum_i \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial [B, C]}{\partial x_i} - \mu^{a(b+c-1)} \sum_i \frac{\partial [B, C]}{\partial \partial_i} \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) \\
&= \mu^{ac} \sum_i \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} - \mu^{bc} \sum_j \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \\
&- \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial \partial_i} \left(\sum_j \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} - \mu^{bc} \sum_j \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \frac{\partial A}{\partial x_i} \right) \\
&+ \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \mu^{bc} (-1)^b \sum_{i,j} \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
&- \mu^{bc} \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} + \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\
&- \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial \partial_j} + (-1)^c \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&+ \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \mu^{bc} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial \partial_j} + (-1)^b \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \right) \frac{\partial A}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} + \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{bc} \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \\
&- \mu^{bc} \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&- \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} (-1)^c \sum_{i,j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i} + \mu^{ac} \mu^{a(b+c-1)} \mu^{bc} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial A}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Analogamente, encontramos

$$\begin{aligned}
&\mu^{ba} [B, [C, A]] \\
&= \mu^{ba} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} + \mu^{ba} \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \partial_i} \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{ca} \mu^{ba} \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} \\
&- \mu^{ca} \mu^{ba} \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \partial_i} \frac{\partial A}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{ba} \mu^{b(c+a-1)} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 A}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \\
&- \mu^{ba} \mu^{b(c+a-1)} (-1)^a \sum_{i,j} \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} + \mu^{ba} \mu^{b(c+a-1)} \mu^{ca} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 C}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \\
&+ \mu^{ba} \mu^{b(c+a-1)} \mu^{ca} (-1)^c \sum_{i,j} \frac{\partial^2 A}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
&\mu^{cb} [C, [A, B]] \\
&= \mu^{cb} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} + \mu^{cb} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_i} \frac{\partial A}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{ab} \mu^{cb} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} \\
&- \mu^{ab} \mu^{cb} \sum_{i,j} \frac{\partial C}{\partial \partial_i} \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j} - \mu^{cb} \mu^{c(a+b-1)} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i} \\
&- \mu^{cb} \mu^{c(a+b-1)} (-1)^b \sum_{i,j} \frac{\partial^2 A}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial B}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i} + \mu^{cb} \mu^{c(a+b-1)} \mu^{ab} \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 A}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i} \\
&+ \mu^{cb} \mu^{c(a+b-1)} \mu^{ab} (-1)^a \sum_{i,j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial \partial_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Cada termo da expressão (2.20) contém oito parcelas. Respectivamente à ordem encontrada anteriormente, denominamos

$$\begin{aligned}
\mu^{ac} [A, [B, C]] &= P_1 + \cdots + P_8, \\
\mu^{ac} [A, [B, C]] &= S_1 + \cdots + S_8, \\
\mu^{cb} [C, [A, B]] &= T_1 + \cdots + T_8.
\end{aligned}$$

Neste caso, observe que $P_1 + T_5 = 0$, pois

$$P_1 = \mu^{ac} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_i} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial \partial_j} \frac{\partial C}{\partial x_j}, T_5 = -\mu^{cb} \mu^{c(a+b-1)} \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \partial_j} \frac{\partial^2 B}{\partial \partial_i \partial x_j} \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

aonde $\mu^{cb}\mu^{c(a+b-1)} = (-1)^{(c-1)(b-1)}(-1)^{(c-1)(a+b-2)} = (-1)^{(c-1)(b-1+a+b)} = (-1)^{(c-1)(a-1)}$.
Com contas semelhantes e lembrando que

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \partial_i \partial \partial_j} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \partial_j \partial \partial_i},$$

mostramos que

$$\begin{aligned} P_2 + S_4 &= P_3 + S_7 = P_4 + T_2 = P_5 + S_1 = P_6 + T_8 = 0 \\ P_7 + T_3 &= P_8 + S_6 = S_2 + T_4 = S_3 + T_7 = S_5 + T_1 = S_8 + T_6 = 0, \end{aligned}$$

de onde segue (2.20).

d) Se $A = \sum_i a^i \partial_i$ e $B = \sum_j b^j \partial_j$ são dois campos vetoriais, então a fórmula (2.16) nos fornece

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial B}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial A}{\partial x_i} = \sum_i a^i \left(\sum_j \frac{\partial b^j}{\partial x_i} \partial_j \right) - \sum_i b^i \left(\sum_j \frac{\partial a^j}{\partial x_i} \partial_j \right)$$

que coincide com a fórmula (1.5) da derivada de Lie em coordenadas locais. Se $X = \sum_i X^i \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ e f é uma função, então $\frac{\partial f}{\partial(\partial_i)} = 0$ e então a fórmula (2.16) se reduz a

$$[X, f] = \sum_i \frac{\partial X}{\partial(\partial_i)} \frac{\partial f}{\partial x_i} = X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f) = L_X f$$

e isto encerra a demonstração. ■

Note que, a princípio, o colchete dado pela fórmula (2.16) depende das coordenadas locais escolhidas, mas a Regra de Leibniz (item (b)) e o item (d) provados no Teorema anterior nos diz que o colchete pode ser todo expresso em termos da derivada de Lie de dois campos, que não depende da escolha de coordenadas. Assim, concluímos que o colchete definido em (2.16) não depende da escolha de coordenadas locais.

Definição 2.26 *O colchete de dois campos vetoriais $A \in \Lambda^a(TM)$ e $B \in \Lambda^b(TM)$ definido em coordenadas locais como em (2.16) é um $(a+b-1)$ -campo de vetores chamado o colchete de Schouten entre A e B .*

Observação 2.27 *Outros autores podem apresentar definições diferentes para o colchete de Schouten. Estamos apresentando a versão abordada por [8].*

Como o colchete de Schouten é uma generalização natural do colchete de Lie, podemos também generalizar o conceito de derivada de Lie $L_X A$ para um q -campo vetorial A através do colchete de Schouten.

Definição 2.28 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $A \in \Lambda^q(TM)$ definidos sobre uma variedade M . Então a derivada de Lie do q -campo A pelo campo X é dada por*

$$L_X A = [X, A] \tag{2.22}$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o colchete de Schouten.

A próxima proposição nos mostra que a Definição 2.28 nos fornece uma fórmula similar à (1.6) da derivada de Lie para formas diferenciais.

Proposição 2.29 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $A \in \Lambda^q(TM)$ definidos sobre uma variedade M . Então, dadas $f_1, \dots, f_q \in C^\infty(M)$, a seguinte expressão é verdadeira*

$$(L_X A)(f_1, \dots, f_q) = L_X(A(f_1, \dots, f_q)) - \sum_{k=1}^q A(f_1, \dots, f_{k-1}, L_X f_k, f_{k+1}, \dots, f_q).$$

Demonstração. A afirmação é verdadeira para $q = 1$, já que neste caso

$$\begin{aligned} (L_X A)(f) &= [X, A](f) = XA(f) - AX(f) \\ &= L_X(A(f)) - A(L_X f), \end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$. Suponha a afirmação verdadeira para q , vamos mostrar que ela é também válida para $q + 1$. Então, seja $A \in \Lambda^{q+1}(TM)$. Sabemos que A é da forma $\sum_k B_k \wedge Y_k$, onde $B_k \in \Lambda^q(TM)$ e $Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ para todo k . Assim

$$\begin{aligned} (L_X A) &= [X, A] = \sum_k [X, B_k \wedge Y_k] \\ &= \sum_k [X, B_k] \wedge Y_k + B_k \wedge [X, Y_k] \\ &= \sum_k \left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma ([X, B_k] \otimes Y_k) \circ \sigma \right) \\ &\quad + \sum_k \left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma (B_k \otimes [X, Y_k]) \circ \sigma \right) \end{aligned}$$

Tomando $f_1, \dots, f_{q+1} \in C^\infty(M)$ arbitrárias, encontramos

$$\begin{aligned} & q! (L_X A)(f_1, \dots, f_{q+1}) \\ &= \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma ([X, B_k] \otimes Y_k) \circ \sigma(f_1, \dots, f_{q+1}) \\ &\quad + \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma (B_k \otimes [X, Y_k]) \circ \sigma(f_1, \dots, f_{q+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma (L_X B_k)(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q)) \cdot Y_k(\sigma(f_{q+1})) \\
&+ \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q)) \cdot (L_X Y_k)(\sigma(f_{q+1})) \\
&= \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma L_X(B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q))) Y_k(\sigma(f_{q+1})) \\
&- \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \sum_{i=1}^q B_k(\sigma(f_1), \dots, L_X \sigma(f_i), \dots, \sigma(f_q)) Y_k(\sigma(f_{q+1})) \\
&+ \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q)) (L_X(Y_k(\sigma(f_{q+1}))) - Y_k(L_X \sigma(f_{q+1}))) \\
&= \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma L_X(B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q))) Y_k(\sigma(f_{q+1})) \\
&+ \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q)) L_X(Y_k(\sigma(f_{q+1}))) \\
&- \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} \sum_{i=1}^q B_k(\sigma(f_1), \dots, L_X \sigma(f_i), \dots, \sigma(f_q)) Y_k(\sigma(f_{q+1})) \\
&- \sum_k \sum_{\sigma \in S_{q+1}} (-1)^\sigma B_k(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_q)) Y_k(L_X \sigma(f_{q+1})) \\
&= q! \sum_k ((L_X B_k) \wedge Y_k + B_k \wedge (L_X Y_k))(f_1, \dots, f_{q+1}) \\
&- q! \sum_k \sum_{i=1}^{q+1} B_k \wedge Y_k((f_1, \dots, f_{i-1}, L_X f_i, f_{i+1}, \dots, f_{q+1})) \\
&= q! \sum_k L_X(B_k \wedge Y_k)(f_1, \dots, f_{q+1}) \\
&- \sum_k \sum_{i=1}^{q+1} B_k \wedge Y_k((f_1, \dots, f_{i-1}, L_X f_i, f_{i+1}, \dots, f_{q+1})) \\
&= q! \left(L_X(A(f_1, \dots, f_q)) - \sum_{k=1}^q A(f_1, \dots, f_{k-1}, L_X f_k, f_{k+1}, \dots, f_q) \right)
\end{aligned}$$

onde a igualdade $(L_X B_k) \wedge Y_k + B_k \wedge (L_X Y_k) = L_X(B_k \wedge Y_k)$ é demonstrada de forma análoga ao item 2. da Proposição 1.38. Logo, o resultado segue pelo argumento de indução. ■

O colchete de Schouten também nos fornece uma boa maneira de caracterizar um tensor de Poisson.

Teorema 2.30 *Um 2-campo vetorial Π é um tensor de Poisson se, e somente se, o colchete de Schouten de Π com ele mesmo se anula, isto é,*

$$[\Pi, \Pi] = 0. \quad (2.23)$$

Neste caso, o campo de vetores hamiltoniano de uma função f suave é dado por

$$X_f = -[\Pi, f]. \quad (2.24)$$

Demonstração. Dadas coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança de um ponto arbitrário $x \in M$, temos $\Pi = \sum_{i < j} \Pi^{ij} \partial_i \partial_j$. A fórmula (2.16) e a relação de derivada (2.14) nos fornece

$$\begin{aligned} [\Pi, \Pi] &= \sum_s \frac{\partial \Pi}{\partial (\partial_s)} \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} + \sum_s \frac{\partial \Pi}{\partial (\partial_s)} \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} \\ &= 2 \sum_s \left(-2 \sum_k \Pi^{sk} \partial_k \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_i \partial_j \right) \\ &= -\frac{2}{3} \left(3 \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j \right) \\ &= -\frac{2}{3} \left(\sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j \right) \\ &= -\frac{2}{3} \left(\sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_j \partial_k \partial_i + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_i \partial_j \partial_k \right) \\ &= -\frac{2}{3} \left(\sum_{s,k,i,j} \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j + \sum_{s,k,i,j} \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} \partial_k \partial_i \partial_j \right) \\ &= -\frac{2}{3} \sum_{k,i,j} \left(\sum_s \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} \right) \partial_k \partial_i \partial_j. \end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$[\Pi, \Pi] = 0 \iff \sum_s \Pi^{sk} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x_s} + \Pi^{si} \frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x_s} + \Pi^{sj} \frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x_s} = 0,$$

para cada $i, j, k = 1, \dots, m$. Então o resultado segue da Proposição 2.16. Observe também que

$$\begin{aligned} [\Pi, f] &= \sum_s \frac{\partial \Pi}{\partial (\partial_s)} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \sum_s \frac{\partial f}{\partial (\partial_s)} \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} \\ &= \sum_s \frac{\partial \Pi}{\partial (\partial_s)} \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ &= \sum_s \left(-2 \sum_k \Pi^{sk} \partial_k \right) \frac{\partial f}{\partial x_s} \\ &= -2 \sum_{s,k} \Pi^{sk} \frac{\partial f}{\partial x_s} \partial_k \\ &= -X_f. \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Folheações Singulares e Estruturas de Nambu

Neste capítulo, introduziremos os conceitos de distribuição e folheações e faremos um estudo sobre a geometria de Nambu, com o objetivo de estudarmos as folheações que surgem de estruturas de Nambu. Para a teoria clássica sobre folheações e distribuições, utilizamos como referência principal [10] e para o estudo de folheações singulares, nos focamos nas ideias de P. Stefan e de Hector J. Sussman, apresentadas em [8]. Também consultamos [8] na nossa apresentação sobre estruturas de Nambu e sobre as folheações que surgem delas. Ainda fazemos um estudo sobre formas diferenciais, baseando-nos em [13], e mostramos como elas se relacionam com tensores de Nambu.

3.1 Distribuição e Folheações

O objetivo desta seção é apresentar da forma mais sucinta possível os conceitos e resultados que serão utilizados mais adiante no texto. Por isso, a maioria dos resultados aqui apresentados são amplamente conhecidos e divulgados, considerados clássicos.

Definição 3.1 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores sobre uma variedade M de dimensão m . Uma curva integral de X é uma curva diferenciável $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, I um intervalo, tal que para todo $t \in I$ temos $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$.*

Em outras palavras, uma curva integral de um campo de vetores X sobre M é aquela que seu campo de vetores tangente coincide com o campo X . Recordemos do Teorema de Existência e Unicidade da Solução de uma Equações Diferenciais Ordinárias que garante a existência local de curvas integrais de um dado campo de vetores tangentes. Para uma demonstração, indicamos [7].

Teorema 3.2 (Existência e Unicidade da Solução de uma EDO) *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores sobre uma variedade M . Para todo ponto $x \in M$ e todo $t \in \mathbb{R}$ existem uma vizinhança aberta U de x , $\varepsilon > 0$ número real e uma aplicação diferenciável*

$$\begin{aligned} \Phi :]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\times U &\longrightarrow M \\ (t, y) &\longmapsto \Phi(t, y) = \varphi_t(y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

para todo $y \in U$, tais que:

- i) $c(t) : t \longmapsto \varphi_t(x)$ é uma curva integral de X ;
- ii) $c(0) = \varphi_0(x) = x$ e
- iii) *Quaisquer duas curvas como acima coincidem na interseção de seus domínios. Isto é, se $U_j, \varepsilon_j, \Phi_j$ satisfazem (i) e (ii) para $j = 1, 2$, então Φ_1 e Φ_2 coincidem sobre $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\times (U_1 \cap U_2)$, onde $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.*

A aplicação Φ como descrita acima em (3.1) é chamada de fluxo local do campo X . Mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição 3.3 *Um par (U, Φ) é dito um fluxo local gerado por um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ com U sendo uma vizinhança de $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ e $\Phi : (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$ tal que*

- i) *para todo $x \in M$ o conjunto $(\mathbb{R} \times \{x\}) \cap U$ é conexo;*
- ii) *a aplicação $x \longmapsto \varphi_0(x)$ é a identidade de M ;*
- iii) *$c(t) : t \longmapsto \varphi_t(y)$ é uma curva integral de X que passa pelo ponto y e*
- iv) *se $(t_1, x), (t_2, x), (t_1 + t_2, x) \in (\mathbb{R} \times \{x\}) \cap U$ então $\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}(x)$.*

Podemos agora pensar numa abordagem dinâmica da derivada de Lie.

Teorema 3.4 *Considere um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e um tensor $T \in T_0^r(M)$ (ou $T \in T_s^0(M)$) sobre uma variedade M , ambos de classe C^∞ . Seja φ_t o fluxo do campo X . Então, no domínio do fluxo, temos*

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* T = \varphi_t^* L_X T,$$

sendo L_X a derivada de Lie usual.

Demonstração. Ver Teorema 6.4.1 de [2]. ■

Como consequência do teorema anterior, temos que um tensor T do tipo $(r, 0)$ (ou do tipo $(0, s)$) é invariante pelo fluxo de um campo vetorial X se e somente se $L_X T = 0$. Em outras palavras:

Corolário 3.5 *Dado um tensor $T \in T_0^r(M)$ (ou $T \in T_s^0(M)$), temos que T é invariante pelo fluxo de um campo X , ou seja $T = \varphi_t^* T$, se, e somente se, $L_X T = 0$.*

Proposição 3.6 *Seja X um campo de vetores tangentes sobre uma variedade M e seja $x \in M$ tal que $X(x) \neq 0$. Então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) sobre uma vizinhança aberta U de x em M tal que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Demonstração. Primeiramente observe que existe um sistema de coordenadas locais (y_1, \dots, y_m) numa vizinhança U do ponto x tal que $X(0) = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Suponha

$$\Phi(t, y_1, \dots, y_m) = (h_1(t, y_1, \dots, y_m), \dots, h_m(t, y_1, \dots, y_m))$$

o fluxo local do campo X . Tome a aplicação diferenciável $\psi : U \rightarrow \psi(U)$ tal que $\psi = (k_1(y_1, \dots, y_m), \dots, k_m(y_1, \dots, y_m))$, onde $k_i(y_1, \dots, y_m) = h_i(0, y_1, \dots, y_m), \forall i$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (k_1(0, \dots, 0), \dots, k_m(0, \dots, 0)) \\ &= (h_1(0, 0, \dots, 0), \dots, h_m(0, 0, \dots, 0)) \\ &= \Phi(0, x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo, temos que a aplicação jacobiana $d\psi$ no ponto x é a identidade, isto é, $d\psi(x) = Id$. Então, diminuindo a vizinhança se necessário, a aplicação ψ possui uma aplicação inversa $\psi^{-1} = (x_1(y_1, \dots, y_m), \dots, x_m(y_1, \dots, y_m))$. Portanto $d(\psi^{-1})$ tem determinante não nulo e então ψ^{-1} é uma mudança linear de coordenadas e, nas novas coordenadas (x_1, \dots, x_m) , obtemos $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. ■

Definição 3.7 *Uma folheação singular \mathcal{F} sobre uma variedade M é uma partição $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}$ de M em uma união disjunta de subvariedades conexas \mathcal{F}_α imersas em M , chamadas folhas, tais que*

- $M = \bigcup_{\alpha \in M} \mathcal{F}_\alpha$, i.e., a união das folhas cobre toda a variedade;
- existe um sistema de coordenadas (y_1, \dots, y_m) numa vizinhança U de um ponto arbitrário x de M tal que o disco d dimensional $\{y_{d+1} = \dots = y_m = 0\}$ coincide com a componente conexa da interseção de U com \mathcal{F}_x , a folha que contém x , onde d é a dimensão da folha;
- cada disco d dimensional $\{y_{d+1} = c_{d+1}, \dots, y_m = c_m\}$ contido em U , onde c_i são constantes, está completamente contido em alguma folha \mathcal{F}_α .

Se todas as folhas de uma folheação singular têm a mesma dimensão, então a folheação é dita regular.

Exemplo 3.8 Considere a partição de \mathbb{R}^3 dada como na Figura 1

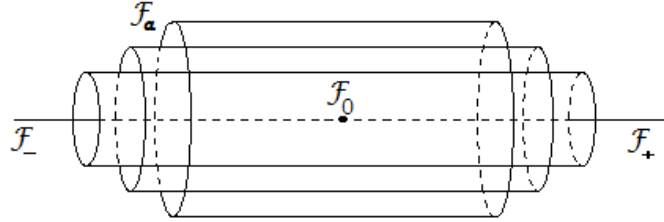


Figura 1. Folheação segundo Stefan-Sussman.

isto é, em cilindros concêntricos $\{\mathcal{F}_\alpha\}$, um ponto isolado \mathcal{F}_0 no eixo dos cilindros e dois segmentos de retas, \mathcal{F}_+ e \mathcal{F}_- , completando o eixo. Temos que esta é uma folheação de \mathbb{R}^3 . De fato, \mathbb{R}^3 é uma união disjunta desses conjuntos. Para mostrar que cada folha obedece às propriedades b) e c) da definição acima, vamos analisar cada tipo separadamente. A folha \mathcal{F}_0 satisfaz imediatamente às propriedades. Para as folhas \mathcal{F}_+ e \mathcal{F}_- , o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) centradas no ponto \mathcal{F}_0 e o eixo do cilindro com sendo o eixo x é tal que numa vizinhança suficientemente pequena de U de um ponto arbitrário x_0 de $M \cap \mathcal{F}_+$ (ou $M \cap \mathcal{F}_-$) o disco unidimensional $\{y = z = 0\}$ coincide com a componente conexa da interseção de U com \mathcal{F}_x e cada disco unidimensional $\{y = c_1, z = c_2\}$ contido em U , onde c_i são constantes, está completamente contido no cilindro de raio $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Já para as folhas \mathcal{F}_α devemos considerar as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) com o eixo do cilindro sendo o eixo z e a origem como sendo o ponto \mathcal{F}_0 . Desta forma, o disco bidimensional $\{r = \text{const.} \neq 0\}$ satisfaz às propriedades, a menos de uma translação, para uma vizinhança suficientemente pequena do ponto considerado. \diamond

Definição 3.9 Uma distribuição singular¹ sobre uma variedade M é um subfibrado $D \subset TM$ tal que para cada $x \in M$, D_x é um subespaço de T_xM . A dimensão de D depende do ponto x . A distribuição é dita suave se para cada $x \in M$ e $X_0 \in D_x$ existir um campo vetorial suave X definido numa vizinhança U_x de x tal que $X(y) \in D_y, \forall y \in U_x$ e $X(x) = X_0$. Se a dimensão de D_x não depender do ponto x , dizemos que a distribuição é regular.

Exemplo 3.10 Considerando \mathbb{R}^2 como sendo o fibrado tangente que descreve o movimento do pêndulo simples de raio l , massa m sem atrito (ver [7] para mais detalhes), parametrizado por (θ, ω) , onde θ é o ângulo de inclinação do pêndulo em relação à vertical e $\omega = \theta'$, o campo

$$X = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(-\frac{g}{l} \text{sen} \theta \right) \frac{\partial}{\partial \omega},$$

onde g é o módulo da força da gravidade, é uma distribuição singular. \diamond

¹Segundo Stefan-Sussman.

Definição 3.11 *Seja D uma distribuição regular de dimensão p sobre uma variedade M . Uma variedade integral de D é um par (F, h) onde F é uma variedade de dimensão p e h uma imersão injetiva de F sobre M tal que, para todo ponto $x \in F$, $h(T_x(F)) = D_{h(x)}$. Uma distribuição D sobre uma variedade M é integrável se para todo ponto x de M existe uma variedade integral de D de dimensão máxima cuja imagem contém x .*

Exemplo 3.12 *A distribuição gerada pelo campo $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ com coordenadas polares (r, θ) é integrável. De fato, para qualquer ponto x , o círculo de raio $|x|$ e centro na origem é uma variedade integral de D . \diamond*

Mais adiante veremos que toda distribuição regular é gerada por campos da forma $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q}$. Naturalmente, uma folheação singular \mathcal{F} possui uma distribuição tangente associada $D(\mathcal{F})$ de tal forma que para cada ponto $x \in M$ a distribuição $D_x(\mathcal{F})$ é o espaço tangente à folha \mathcal{F}_x que contém x .

Exemplo 3.13 *A folheação gerada pela pelo campo X do Exemplo 3.10 é singular. De fato, o retrato de fase do pêndulo simples*

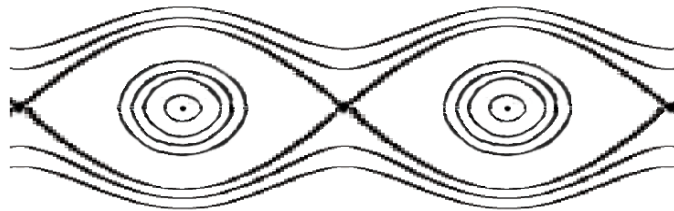


Figura 2. Retrato de fase do pêndulo simples sem atrito.

é uma folheação singular. \diamond

Uma distribuição é dita invariante pelo fluxo dos campos de uma família de campos vetoriais suaves C se para cada $X \in C$ temos $(\varphi_t^X(x))_* D_x = D_{\varphi_t^X(x)}$ sempre que φ_t^X estiver bem definido, onde φ_t^X é o fluxo local gerado pelo campo X . As condições para uma distribuição singular ser a distribuição tangente de uma folheação singular são mais delicadas e nos remetem ao estudo das distribuições integráveis.

Teorema 3.14 (Stefan-Sussmann) *Seja D uma distribuição singular sobre uma variedade M . Então as três afirmações seguintes são equivalentes:*

1. D é integrável;
2. D é gerado por uma família C de campos vetoriais suaves e é invariante por seus fluxos;
3. D é a distribuição tangente de $D(\mathcal{F})$ de uma folheação singular \mathcal{F} .

Demonstração. (1. \Rightarrow 2.) Seja C a família de todos os campos suaves tangentes à distribuição D . Como D é também suave, temos que D é gerado por C . Para mostrar que D é invariante pelo fluxo de seus campos, considere um ponto arbitrário x de M . Seja $\mathcal{F}(x)$ a subvariedade maximal (de máxima dimensão) que contém x . Então, por definição, para todo ponto $y \in \mathcal{F}(x)$ temos $T_y\mathcal{F}(x) = D_y$. Portanto um campo vetorial $X \in D$ quando restrito a $\mathcal{F}(x)$ é tangente a este. Considere agora um tempo τ no qual o fluxo $\varphi_\tau^X(x)$ esteja definido. Como está obrigatoriamente confinado em $\mathcal{F}(x)$, $\varphi_\tau^X(x)$ define um difeomorfismo entre abertos de $\mathcal{F}(x)$. Logo $(\varphi_t^X(x))_*(T_x\mathcal{F}(x)) = T_{\varphi_t^X(x)}\mathcal{F}(x)$. Segue que $(\varphi_t^X(x))_*D_x = D_{\varphi_t^X(x)}$.

(2. \Rightarrow 3.) Suponha que D seja gerado por uma família C de campos vetoriais suaves e seja invariante com respeito a C . Tome um ponto arbitrário $x \in M$ e denote por d a dimensão de D_x . Escolhendo $X_1, \dots, X_d \in C$ tais que os vetores $X_1(x), \dots, X_d(x)$ sejam linearmente independentes, ou seja, $D_x = \langle X_1(x), \dots, X_d(x) \rangle$, a aplicação

$$(t_1, \dots, t_d) \longmapsto \phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{t_d}^d,$$

onde ϕ_t^i é o fluxo local do campo X_i , é um difeomorfismo entre o disco d -dimensional de \mathbb{R}^d com uma subvariedade de dimensão d que contém x . Como D é invariante por C então

$$(\varphi_t^X(x))_*D_x = D_{\varphi_t^X(x)} = \langle X_1(\varphi_t^X(x)), \dots, X_d(\varphi_t^X(x)) \rangle,$$

sendo φ_t^X o fluxo local de um campo $X \in C$ qualquer. Isto nos diz que esta subvariedade é de dimensão máxima. Fazendo a união de todas as subvariedades que se intersectam, obtemos uma partição de M em uma união disjunta de subvariedades integrais de dimensão máxima, chamadas folhas. Naturalmente das propriedades da subvariedade, para uma vizinhança U suficientemente pequena de um ponto x em M , existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) de origem em x tais que a folha d -dimensional \mathcal{F}_x que contém x é parametrizada pelas coordenadas (x_1, \dots, x_d) , ou seja, (podemos obter coordenadas nas quais) o disco $(x_{d+1} = \dots = x_m = 0)$ está inteiramente contido na folha \mathcal{F}_x . Neste caso, nos pontos da interseção entre U e \mathcal{F}_x a distribuição D é gerada pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}$. Por continuidade, existe uma vizinhança $V \subset U$ tal que os campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}$ continuam sendo linearmente independentes, ou seja, estes campos ainda são alguns dos geradores da distribuição nesta vizinhança. Em outras palavras, o posto do conjunto gerador de $D|_V$ é maior ou igual a d . Isto nos diz que as folhas suficientemente próximas da folha \mathcal{F}_x têm dimensão mínima d e que os discos d -dimensionais $(x_{d+1} = c_{d+1}, \dots, x_m = c_m)$, onde c_i são constantes $\forall i$, estão inteiramente contidos em alguma subvariedade integral. Portanto a distribuição D é a distribuição tangente de uma folheação singular \mathcal{F} .

(3. \Rightarrow 1.) Agora, se D é a distribuição tangente de $D(\mathcal{F})$ de uma folheação singular \mathcal{F} , então as folhas $\mathcal{F}(x)$ são subvariedades integrais invariantes de dimensão máxima de D , logo D é integrável. ■

Definição 3.15 *Uma distribuição D é dita involutiva se, dados $X, Y \in D$, o colchete de Lie $[X, Y]$ também pertence à D , isto é,*

$$X(x), Y(x) \in D_x \implies [X, Y](x) \in D_x.$$

Teorema 3.16 *Seja D uma distribuição regular de dimensão p sobre uma variedade M . Se D é involutiva, então para todo ponto $x \in M$ existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) sobre uma vizinhança aberta U de x tal que D_U é gerado por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$.*

Demonstração. Se $p = 1$, então o resultado segue da Proposição 3.6. Suponha $p > 1$ e que a distribuição D seja gerada pelos campos X_1, \dots, X_p . Novamente pela Proposição 3.6, existe um sistema local de coordenadas (y_1, \dots, y_m) tal que $X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Defina os campos Y_1, \dots, Y_m da seguinte forma, $Y_1 = X_1$ e $Y_i = X_i - (X_i(y_1)) X_1$, para $i = 2, \dots, m$. Assim, esses novos campos possuem as seguintes propriedades:

- i. Y_1, \dots, Y_m geram a distribuição D ;
- ii. $[Y_i, Y_j] \in D$, para todos i, j e
- iii. $Y_j(y_1) = 0, \forall i \geq 2$.

Considere $N = \{(y_1, \dots, y_m) \in M : y_1 = \text{const.}\}$ subvariedade de M de dimensão $m - 1$ que contém o ponto x . Pelas propriedades *i., ii.* e *iii.*, os campos Y_2, \dots, Y_m são tangentes à N e a distribuição regular D^N gerada por estes campos é involutiva de dimensão $p - 1$. Segue da Proposição 3.6 que existe um sistema de coordenadas locais $(\zeta_2, \dots, \zeta_m)$ de N numa vizinhança da inclusão do ponto x , tal que $Y_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$. Tome $z_1 = y_1$ e $z_i = \zeta_i(y_2, \dots, y_m), i = 2, \dots, m$. Então (z_1, \dots, z_m) é um novo sistema de coordenadas locais de M tal que

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}; Y_2 = \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Como $p < \infty$, seguimos indutivamente o mesmo processo e encontramos ao final um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) sobre uma vizinhança de x tal que D é localmente gerado por $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$, como queríamos. ■

Teorema 3.17 (Frobenius) *Seja D uma distribuição regular sobre uma variedade M . Para que D seja integrável é necessário e suficiente que seja involutiva.*

Demonstração. Suponha D uma distribuição regular integrável de dimensão p . Então, pelo Teorema 3.14, D é invariante pelo fluxo de seus campos e pelo Corolário 3.5 $L_X Y = [X, Y] = 0$, para quaisquer $X, Y \in D$. Como D é um subfibrado do fibrado tangente, temos que $0 \in D$ e assim $[X, Y] \in D$, para quaisquer $X, Y \in D$. Logo a distribuição D é involutiva. Reciprocamente, basta mostrarmos que $[X, Y] = 0$, para quaisquer $X, Y \in D$

e o resultado segue pelo Corolário 3.5 e pelo Teorema 3.14. De fato, o Teorema 3.16 nos diz que existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) tal que D é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$. Então, para cada $y \in M$, temos $D_y = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}(y) \right\rangle$. Dados $X, Y \in D$, temos que para cada $z \in M$,

$$[X, Y](z) = [X(z), Y(z)].$$

Pela linearidade do colchete de Lie, basta calcularmos para os vetores $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(z)$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}(z)$, $i, j = 1, \dots, p$. Então, segue de (1.5) que $[X, Y](z) = 0, \forall z \in M$. ■

3.2 Morfismos de Poisson e Folheações Simpléticas

Existem ainda alguns conceitos muito importantes para as geometrias de Poisson e simplética que são fundamentais neste trabalho e que poderiam muito bem ser expostos no capítulo anterior. No entanto, em nossa visão, o capítulo anterior não oferecia uma motivação adequada à sua introdução. Escolhemos abordar os conceitos de morfismo de Poisson e symplectomorfismo nesta seção, onde sua importância é mais evidenciada.

Definição 3.18 *Sejam $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ e $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ duas variedades de Poisson. Uma aplicação suave ϕ de M_1 em M_2 é chamada de morfismo de Poisson ou aplicação de Poisson se*

$$\{\phi^* f, \phi^* g\}_1 = \phi^* \{f, g\}_2, \forall f, g \in C^\infty(M_2). \quad (3.2)$$

Analogamente, dadas (N_1, ω_1) e (N_2, ω_2) duas variedades simpléticas, então a aplicação $\varphi : (N_1, \omega_1) \longrightarrow (N_2, \omega_2)$ tal que

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1 \quad (3.3)$$

é chamada symplectomorfismo.

Em geral, symplectomorfismos não são morfismos de Poisson. Por exemplo, tomando-se $M_1 = \{x_0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e $M_2 = \mathbb{R}^{2n}$, ambas munidas da forma canônica em um dado sistema de coordenadas $\omega_1 = \omega_2 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Então a aplicação de inclusão

$$\begin{array}{ccc} \iota : (M_1, \omega_1) & \longrightarrow & (M_2, \omega_2) \\ x_0 & \hookrightarrow & x_0 \end{array}$$

é claramente um symplectomorfismo, mas se considerarmos os tensores de Poisson correspondentes (ver Exemplo 2.14)

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i},$$

dadas $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, temos $\{i^*f, i^*g\} = \{f(x_0), g(x_0)\} = 0$ (Exemplo 2.3) enquanto que

$$i^* \{f, g\} = i^* \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial g}{\partial y_i} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) (x_0).$$

Assim, $\{i^*f, i^*g\} \neq i^* \{f, g\}$ em geral. Em outras palavras, a inclusão

$$\begin{array}{ccc} \iota : (M_1, \Pi_1) & \longrightarrow & (M_2, \Pi_2) \\ x_0 & \hookrightarrow & x_0 \end{array}$$

não é um morfismo de Poisson.

Dada uma variedade de Poisson (M, Π) , recordemos da Definição 2.20 e do Exemplo 2.18 que o espaço característico de Π forma uma distribuição \mathcal{C}_Π , chamada *distribuição característica*. Mais ainda, recorde da Proposição 2.22 que, dado $x \in M$

$$\mathcal{C}_x = \text{Im } \#_{\Pi(x)} = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)\}, \forall x \in M. \quad (3.4)$$

De acordo com o Corolário 3.5, o próximo lema nos mostra que esta é uma distribuição invariante pelo fluxo dos seus campos. Neste caso, esta distribuição gera uma folheação singular \mathcal{F}_Π , pelo Teorema 3.14.

Lema 3.19 *Seja (M, Π) uma variedade de Poisson. Um campo hamiltoniano X_f preserva a estrutura de Poisson Π , isto é*

$$L_{X_f}\Pi = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.29, dadas $g, h \in C^\infty(M)$ obtemos

$$\begin{aligned} (L_{X_f}\Pi)(g, h) &= L_{X_f}(\Pi(g, h)) - \Pi(L_{X_f}g, h) - \Pi(g, L_{X_f}h) \\ &= X_f(\Pi(g, h)) - \Pi(X_f(g), h) - \Pi(g, X_f(h)) \\ &= \Pi(f, \Pi(g, h)) - \Pi(\Pi(f, g), h) - \Pi(g, \Pi(f, h)) \\ &= \Pi(f, \Pi(g, h)) + \Pi(h, \Pi(f, g)) + \Pi(g, \Pi(h, f)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois Π é um tensor de Poisson e satisfaz a identidade de Jacobi. Como g e h são arbitrárias, concluímos que $L_{X_f}\Pi = 0$. ■

Teorema 3.20 *Com a mesma notação da seção anterior, cada folha $\mathcal{F}(x)$ de uma folheação \mathcal{F}_Π de uma variedade de Poisson (M, Π) é uma subvariedade simplética imersa. A imersão é um morfismo de Poisson e o tensor de Poisson Π fica completamente determinado pelas estruturas simpléticas das folhas de \mathcal{F}_Π .*

Demonstração. Considere $\mathcal{F}(x)$ a folha que contém x e as coordenadas locais canônicas

$$(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s, z_1, \dots, z_{m-2s})$$

dadas conforme o Teorema 2.23 num dado ponto arbitrário x de M . Então a subvariedade $\{z_1 = \cdots = z_{m-2s} = 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{F}(x)$ e tem uma estrutura simplética canônica associada, segundo o Teorema 2.23. Observe que tal estrutura não depende da escolha das coordenadas, isto é, para cada ponto $\{z_1 = \cdots = z_{m-2s} = 0\}$, ela coincide com a forma simplética no espaço característico, pois estas coordenadas correspondem à parte degenerada do tensor de Poisson. Portanto, cada folha $\mathcal{F}(x)$ possui uma estrutura simplética associada, logo é uma subvariedade simplética imersa na variedade de Poisson. As condições b., d. e e. do Teorema 2.23, que são $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \forall i, j$ e $\{z_i, p_j\} = \{z_i, q_j\} = 0$ e $\{z_i, z_j\}(x) = 0, \forall i, j$, respectivamente, nos dizem que, sendo $\iota : \mathcal{F}(x) \hookrightarrow M$ a aplicação de inclusão de $\mathcal{F}(x)$ em M , temos

$$\iota^* \{f, g\} = \iota^* \Pi(f, g) = \omega(f, g) = \{f, g\} |_{\mathcal{F}(x)}.$$

Logo a imersão é um morfismo de Poisson. ■

Motivados por este teorema, chamaremos a folheação \mathcal{F}_Π gerada pela distribuição característica \mathcal{C}_Π de *folheação simplética*.

3.3 O Colchete de Nambu e o Tensor de Nambu

Veremos agora uma generalização de uma estrutura de Poisson introduzida por Nambu ([14]) e formalizada e generalizada por Takhtajan ([15]).

Definição 3.21 *Sendo M uma variedade e q um número natural qualquer, então uma estrutura de Nambu de ordem q sobre M é um operador linear antissimétrico $\{\cdots\} : C^\infty(M) \times \cdots \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, chamado colchete de Nambu, satisfazendo:*

$$i. \text{ (Regra de Leibniz) } \{f_1, \cdots, f_{q-1}, g_1 g_2\} = \{f_1, \cdots, f_{q-1}, g_1\} g_2 + g_1 \{f_1, \cdots, f_{q-1}, g_2\};$$

ii. *(Identidade fundamental)*

$$\{f_1, \cdots, f_{q-1}, \{g_1, \cdots, g_q\}\} = \sum_{i=1}^q \{g_1, \cdots, g_{i-1}, \{f_1, \cdots, f_{q-1}, g_i\}, g_{i+1}, \cdots, g_q\},$$

para quaisquer $f_i, g_i \in C^\infty(M)$.

No caso $q = 2$ a identidade fundamental coincide com a identidade de Jacobi. De fato,

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= \{g, \{f, h\}\} + \{\{f, g\}, h\} \iff \\ -\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\} + \{\{f, g\}, h\} &= 0 \iff \\ \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} &= 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, uma estrutura de Nambu de ordem 2 é na verdade uma estrutura de Poisson. De maneira análoga ao caso da geometria de Poisson, podemos definir um *campo hamiltoniano de uma $(q - 1)$ -upla de funções* (f_1, \dots, f_{q-1}) , observando que o operador $\{f_1, \dots, f_{q-1}, \cdot\}$ é uma derivação. De fato, o Lema 1.34 assegura que existe um único campo $X_{f_1, \dots, f_{q-1}} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_{f_1, \dots, f_{q-1}}(g) = \{f_1, \dots, f_{q-1}, g\}$. Segue da antissimetria de $\{\dots\}$ que $\{f_1, \dots, f_{q-1}, f_i\} = 0$ para $i = 1, \dots, q - 1$. Portanto as funções f_i são integrais primeiras de $X_{f_1, \dots, f_{q-1}}$.

Exemplo 3.22 *Dado um colchete de Nambu de ordem $q > 1$ sobre uma variedade M e uma função $g \in C^\infty(M)$ podemos definir um colchete de Nambu de ordem $q - 1$ da seguinte forma*

$$\{f_1, \dots, f_{q-1}\}_g := \{f_1, \dots, f_{q-1}, g\},$$

para quaisquer $f_i \in C^\infty(M)$, $i = 1, \dots, q - 1$. De fato, a regra de Leibniz é imediata da definição. Quanto à identidade fundamental temos

$$\begin{aligned} \left\{f_1, \dots, f_{q-2}, \{h_1, \dots, h_{q-1}\}_g\right\}_g &= \{f_1, \dots, f_{q-2}, \{h_1, \dots, h_{q-1}, g\}, g\} \\ &= -\{f_1, \dots, f_{q-2}, g, \{h_1, \dots, h_{q-1}, g\}\} \\ &= -\sum_{i=1}^{q-1} \{h_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{q-2}, g, h_i\}, \dots, h_{q-1}, g\} \\ &\quad - \{f_1, \dots, f_{q-2}, g, g\} \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} \{h_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{q-2}, h_i, g\}, \dots, h_{q-1}, g\} \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} \left\{h_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{q-2}, h_i\}_g, \dots, h_{q-1}\right\}_g. \end{aligned}$$

Logo o colchete $\{\dots\}_g$ de ordem $q - 1$ é de Nambu. \diamond

A linearidade e a regra de Leibniz nos dizem que um colchete de Nambu é uma multiderivação. Assim, de acordo com o Lema 2.12, cada colchete de Nambu de ordem q pode ser caracterizado por um único q -campo vetorial Λ , chamado *tensor de Nambu*, da seguinte forma:

$$\{f_1, \dots, f_q\} = \Lambda(f_1, \dots, f_q) := \langle df_1 \wedge \dots \wedge df_q, \Lambda \rangle. \quad (3.5)$$

Por analogia, diremos que um q -campo vetorial Λ *satisfaz a propriedade da identidade fundamental* se, e somente se, o colchete induzido por (3.5) satisfizer tal propriedade. Neste caso, a identidade fundamental pode ser reinterpretada por meio da derivada de Lie como

$$L_X \Lambda(g_1, \dots, g_q) = \sum_{k=1}^q \Lambda(g_1, \dots, g_{k-1}, L_X(g_k), g_{k+1}, \dots, g_q), \quad (3.6)$$

onde $X = X_{f_1, \dots, f_{q-1}}$ e $g_1, \dots, g_q \in C^\infty(M)$.

Lema 3.23 *Seja Λ um q -campo vetorial sobre uma variedade M . Então Λ satisfaz a propriedade da identidade fundamental se, e somente se,*

$$L_{X_{f_1 \dots f_{q-1}}} \Lambda = 0, \quad (3.7)$$

onde $X_{f_1 \dots f_{q-1}}$ é um campo hamiltoniano de Λ .

Demonstração. Pela Proposição 2.29, temos que $(L_{X_{f_1 \dots f_{q-1}}} \Lambda)(g_1, \dots, g_q) = 0$, para quaisquer $g_1, \dots, g_q \in C^\infty(M)$, se, e somente se,

$$L_X \Lambda(g_1, \dots, g_q) - \sum_{k=1}^q \Lambda(g_1, \dots, g_{k-1}, L_X(g_k), g_{k+1}, \dots, g_q) = 0,$$

ou seja, se e somente se, (3.6) é válida, como queríamos. ■

Um colchete de Nambu de ordem $q = 1$ é uma derivação, portanto, todo campo hamiltoniano é um 1-tensor de Nambu. Vimos que um 2-tensor Nambu coincide com um tensor de Poisson. Para $q \geq 3$ o tensor é caracterizado como segue.

Teorema 3.24 (Decomposição de Nambu) *Um q -campo vetorial Λ sobre uma variedade m -dimensional M , $q \geq 3$, é um tensor de Nambu se, e somente se, para todo ponto $x \in M$ em que $\Lambda(x) \neq 0$, existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança de x , tal que Λ se escreve como*

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}. \quad (3.8)$$

Neste sistema de coordenadas, o colchete de Nambu tem a seguinte forma

$$\{f_1, \dots, f_q\} = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^q. \quad (3.9)$$

Demonstração. Suponha Λ um tensor de Nambu de ordem $q \geq 3$ e seja $y \in M$ tal que $\Lambda(y) \neq 0$. Então existe um campo hamiltoniano $X = X_{f_1, \dots, f_{q-1}}$ tal que $X(y) \neq 0$. Tome $f_q \in C^\infty(M)$ tal que $X(f_q) = 1$. Sabemos que f_q existe, pois a equação é uma EDP linear de primeira ordem e sempre tem solução local. Para $i = 1, \dots, q$, vamos chamar de X_i o campo hamiltoniano da $(q-1)$ -upla $(f_1, \dots, \widehat{f}_i, \dots, f_q)$, onde \widehat{f}_i representa a ausência deste termo. Neste caso, temos que os campos X_i são linearmente independentes, pois $X_i(f_i) = \pm 1$ e $X_i(f_j) = 0$ para $i \neq j$. Temos também que os campos hamiltonianos X_i preservam df_j , para todos $i, j = 1, \dots, q$ e também preservam o tensor de Nambu Λ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} L_{X_i} df_j &= dL_{X_i} f_j = d(X_i(f_j)) = 0; \\ L_{X_i} \Lambda &= 0 \end{aligned}$$

sendo a última igualdade devida ao Lema 3.23. Então cada X_i também preserva qualquer elemento criado a partir destes. Assim, para qualquer $h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j](h) &= X_i(X_j(h)) - X_j(X_i(h)) \\
&= X_i(X_j(h)) - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^q X_i(X_j(f_k)) + X_i(X_j(h)) \right) \\
&= X_i(X_j(h)) - X_i(X_j(h)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da identidade fundamental. Como a igualdade é válida para qualquer h , encontramos $[X_i, X_j] = 0$, para todos $i, j = 1, \dots, q$. Logo, pelo Teorema de Frobenius 3.17, obtemos uma folheação regular q -dimensional gerada por X_1, \dots, X_q e um sistema de coordenadas locais

$$(x_1, \dots, x_m) := (f_1, \dots, f_q, y_{q+1}, \dots, y_m)$$

tal que as funções y_{q+1}, \dots, y_m são integrais primeiras da folheação, isto é, $X_i(y_j) = 0$, $i = 1, \dots, q$ e $j = q+1, \dots, m$. Neste caso, temos $X_i(x_i) = 1$, $i = 1, \dots, q$, e concluímos

$$\{x_1, \dots, x_q\} = 1. \quad (3.10)$$

Por outro lado, de $X_i(y_j) = 0$, obtemos

$$\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q, y_j\} = 0 \quad (3.11)$$

para todos i, j . Agora nos resta mostrar que para qualquer $s > 0$ temos

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{q-s}}, y_{j_1}, \dots, y_{j_s}\} = 0, \quad (3.12)$$

pois neste caso teremos (3.8). Para demonstrar (3.12), a ideia é manipular esta equação utilizando as equações (3.10) e (3.11) em conjunto com a identidade fundamental e a Regra de Leibniz. No entanto, a longa manipulação pode tornar difícil o entendimento. Então, para facilitar as contas, vamos fazê-las no caso em que $q = 3$, tendo em vista que a manipulação nos outros casos é análoga. Neste caso, lembremos que $\{x_1, x_2, x_3\} = 1$, $\{x_i, x_j, y_k\} = 0$, para todos $i, j = 1, 2, 3$ e $k = 4, \dots, m$. Assim, vamos nos ater ao caso

em que $s = 2$, primeiramente.

$$\begin{aligned}
2 \{x_1, y_i, y_j\} &= 2 \{x_1 \{x_1, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} \\
&= \{x_1^2, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} \\
&= \{x_1^2, y_i, y_j\}, x_2, x_3\} + \{x_1^2, \{x_2, y_i, y_j\}, x_3\} + \{x_1^2, x_2, \{x_3, y_i, y_j\}\} \\
&= \{x_1^2, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} + \{x_1^2, \{y_i, x_2, x_3\}, y_j\} + \{x_1^2, y_i, \{y_j, x_2, x_3\}\} \\
&\quad + \{x_1^2, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} + \{x_2, \{x_1^2, y_i, x_3\}, y_j\} + \{x_2, y_i, \{x_1^2, y_j, x_3\}\} \\
&\quad + \{x_1^2, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} + \{x_3, \{x_1^2, x_2, y_i\}, y_j\} + \{x_3, y_i, \{x_1^2, x_2, y_j\}\} \\
&= 2 \{x_1 \{x_1, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} + 2 \{x_1 \{x_1, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} \\
&\quad + 2 \{x_2, x_1 \{x_1, y_i, x_3\}, y_j\} + 2 \{x_2, y_i, x_1 \{x_1, y_j, x_3\}\} \\
&\quad + 2 \{x_1 \{x_1, x_2, x_3\}, y_i, y_j\} + 2 \{x_3, x_1 \{x_1, x_2, y_i\}, y_j\} \\
&\quad + 2 \{x_3, y_i, x_1 \{x_1, x_2, y_j\}\} \\
&= 6 \{x_1 \{x_1, x_2, x_3\}, y_i, y_j\}
\end{aligned}$$

Encontramos que $\{x_1, y_i, y_j\} = 3 \{x_1, y_i, y_j\}$ e isto é verdade se, e somente se, $\{x_1, y_i, y_j\} = 0$, como queríamos. Analogamente encontramos $\{x_2, y_i, y_j\} = 0$ e $\{x_3, y_i, y_j\} = 0$. Agora, para mostrar que $\{y_i, y_j, y_k\} = 0$ para quaisquer i, j e k , observe que

$$\begin{aligned}
0 &= \{x_1 y_i, 0, y_k\} \\
&= \{x_1 y_i, \{y_j, x_2, x_3\}, y_k\} \\
&= \{\{x_1 y_i, y_j, y_k\}, x_2, x_3\} + \{y_j, \{x_1 y_i, x_2, y_k\}, x_3\} + \{y_j, x_2, \{x_1 y_i, x_3, y_k\}\} \\
&= \{x_1 \{y_i, y_j, y_k\}, x_2, x_3\} + \{y_i \{x_1, y_j, y_k\}, x_2, x_3\} + \{y_j, x_1 \{y_i, x_2, y_k\}, x_3\} \\
&\quad + \{y_j, y_i \{x_1, x_2, y_k\}, x_3\} + \{y_j, x_2, x_1 \{y_i, x_3, y_k\}\} + \{y_j, x_2, y_i \{x_1, x_3, y_k\}\} \\
&= x_1 \{\{y_i, x_2, x_3\}, y_j, y_k\} + x_1 \{y_i, \{y_j, x_2, x_3\}, y_k\} \\
&\quad + x_1 \{y_i, y_j, \{y_k, x_2, x_3\}\} + \{y_i, y_j, y_k\} \cdot 1 \\
&= \{y_i, y_j, y_k\}.
\end{aligned}$$

Assim temos a primeira parte do resultado.

Reciprocamente, se um q -campo de vetores Λ , $q \geq 3$, sobre uma variedade M se escreve como em (3.8), então pelo Lema 3.23 basta mostrarmos que dadas $f_1, \dots, f_{q-1} \in C^\infty(M)$ temos $L_{X_{f_1, \dots, f_{q-1}}} \Lambda = 0$. Então, seja $X = X_{f_1, \dots, f_{q-1}}$. Neste caso

$$\begin{aligned}
X(g) &= \Lambda(f_1, f_2, g) \\
&= \langle df_1 \wedge df_2 \wedge dg, \Lambda \rangle \\
&= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \frac{\partial f_2}{\partial x_{\sigma(2)}} \frac{\partial g}{\partial x_{\sigma(3)}}
\end{aligned}$$

Então, para $g_1, \dots, g_q \in C^\infty(M)$ arbitrárias, temos

$$\begin{aligned}
& (L_X \Lambda)(g_1, \dots, g_q) = \\
& = L_X \Lambda(g_1, \dots, g_q) - \sum_{k=1}^q \Lambda(g_1, \dots, g_{k-1}, L_X(g_k), g_{k+1}, \dots, g_q) \\
& = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(q)}} \left(\sum_{\rho \in S_q} (-1)^\rho \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}} \right) \\
& \quad - \sum_{k=1}^q \sum_{\rho \in S_q} (-1)^\rho \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\rho(k)}} \left(\sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial g_k}{\partial x_{\sigma(q)}} \right) \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}} \\
& = \sum_{\sigma, \rho \in S_q} (-1)^{\rho\sigma} \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_{\sigma(q)} \partial x_{\rho(i)}} \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}} \\
& \quad - \sum_k \sum_{\sigma, \rho \in S_q} (-1)^{\rho\sigma} \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \left(\sum_{i=1}^{q-1} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\rho(k)} \partial x_{\sigma(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial g_k}{\partial x_{\sigma(q)}} \right) \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}} \\
& \quad - \sum_k \sum_{\sigma, \rho \in S_q} (-1)^{\rho\sigma} \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_{\rho(k)} \partial x_{\sigma(q)}} \right) \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}} \\
& = - \sum_k \sum_{\sigma, \rho \in S_q} \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{\rho\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\rho(k)} \partial x_{\sigma(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial g_1}{\partial x_{\rho(1)}} \dots \frac{\partial g_k}{\partial x_{\sigma(q)}} \dots \frac{\partial g_q}{\partial x_{\rho(q)}}
\end{aligned}$$

Isto nos diz que $(L_X \Lambda)$ é da forma

$$- \sum_{k,i} \sum_{\sigma, \rho \in S_q} (-1)^{\rho\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\rho(k)} \partial x_{\sigma(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial}{\partial x_{\rho(1)}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(q)}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{\rho(q)}}.$$

Para mostrar que $L_X \Lambda = 0$ devemos então mostrar que a somatória

$$\left(\sum_{k,i} \sum_{\sigma, \rho \in S_q} (-1)^{\rho\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\rho(k)} \partial x_{\sigma(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \right)$$

sempre se anula. Para isto, vamos fazer algumas observações. Primeiro observe que, para cada k , se $\sigma(k) \neq \rho(q)$ então o coeficiente se anula automaticamente, já que teríamos campos repetidos no produto exterior. Podemos fazer então os coeficientes dependentes apenas da permutação σ , a menos do sinal, e independentes da somatória em k . Assim, para cada i e para cada σ tomamos um elemento $\tilde{\sigma}$ de S_q dado por $\tilde{\sigma}(q) = \sigma(i)$ e $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(q)$ e $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$ para $k \neq q$ e $k \neq i$. Logo as parcelas

$$\begin{aligned}
& (-1)^\rho (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\sigma(k)} \partial x_{\sigma(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \text{ e} \\
& (-1)^{\tilde{\rho}} (-1)^{\tilde{\sigma}} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\tilde{\sigma}(1)}} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{\tilde{\sigma}(k)} \partial x_{\tilde{\sigma}(i)}} \dots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\tilde{\sigma}(q-1)}}
\end{aligned}$$

se anulam mutuamente se escolhermos as permutações ρ e $\tilde{\rho}$ apropriadamente. Como cada termo da somatória possui um termo oposto, a soma se anula e assim encontramos $L_X\Lambda = 0$ e, portanto, Λ é um tensor de Nambu. ■

Observação 3.25 *Apesar das provas dos Teoremas de Decomposição de Weinstein (Teorema 2.23) e de Decomposição da Nambu (Teorema 3.24) serem similares, a ideia por trás de cada uma é diferente. Observe que no Teorema 2.23, a demonstração se baseia no posto do tensor de Poisson, enquanto que no caso do Teorema 3.24 partimos do grau do tensor Nambu, com o intuito de mostrar que este coincide com o posto do tensor. Esta diferença entre os tensores de Nambu de ordem 2 (tensores de Poisson) e os de ordem $q \geq 3$ se deve ao fato de que os tensores de Poisson estão naturalmente conectados a uma álgebra linear e, a partir desta, deduzimos que o tensor de Poisson sempre tem posto par (ver Exemplo 2.21). Já no caso de tensores de Nambu de ordens superiores a três, a variedade dos multiíndices nos permite fugir desta álgebra linear e encontrar um sistema de coordenadas locais a partir de um único campo hamiltoniano. Durante a prova, a parte que evidencia este fato é justamente na demonstração da equação (3.12). O exemplo a seguir demonstra como as contas são inconclusivas no caso em que $q = 2$.*

Exemplo 3.26 *Seja (M, Π) uma variedade de Poisson e $(x_1, x_2, y_1, \dots, y_m)$ um sistema de coordenadas locais numa vizinhança de um ponto $x \in M$ tais que $\Pi(x) \neq 0$, $\Pi(x_1, x_2) = \{x_1, x_2\} = 1$ e $\{x_i, y_j\} = 0$, para todos $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, m$. Manipulando a expressão $\{y_i, y_j\}$ utilizando estas hipóteses, a identidade de Jacobi e a Regra de Leibniz como na demonstração do Teorema 3.24, encontramos*

$$\begin{aligned} \{y_i, y_j\} &= \{y_i \{x_1, x_2\}, y_j\} \\ &= \{\{y_i x_1, x_2\}, y_j\} - \{x_1 \{y_i, x_2\}, y_j\} \\ &= \{\{y_i x_1, y_j\}, x_2\} + \{\{x_2, y_j\}, y_i x_1\} - \{0, y_j\} \\ &= \{y_i \{x_1, y_j\}, x_2\} + \{x_1 \{y_i, y_j\}, x_2\} + \{0, y_i x_1\} \\ &= \{0, x_2\} + x_1 \{\{y_i, y_j\}, x_2\} + \{y_i, y_j\} \{x_1, x_2\} \\ &= \{y_i, y_j\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se partimos da segunda parte, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \{x_1 y_i, 0\} = \{x_1 y_i, \{x_2, y_j\}\} \\ &= \{\{x_1 y_i, x_2\}, y_j\} + \{x_2, \{x_1 y_i, y_j\}\} \\ &= \{x_1 \{y_i, x_2\}, y_j\} + \{y_i \{x_1, x_2\}, y_j\} + \{x_2, x_1 \{y_i, y_j\}\} + \{x_2, y_i \{x_1, y_j\}\} \\ &= y_i \{\{x_1, x_2\}, y_j\} + \{x_1, x_2\} \{y_i, y_j\} + x_1 \{x_2, \{y_i, y_j\}\} + \{y_i, y_j\} \{x_2, x_1\} \\ &= \{x_1, x_2\} \{y_i, y_j\} - \{x_1, x_2\} \{y_i, y_j\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, apenas a partir das igualdades (3.10) e (3.11) no caso em que $q = 2$, não conseguimos determinar se $\{y_i, y_j\} = 0$ é verdadeira. \diamond

Dada uma variedade de Nambu (M, Λ) , chamamos de *conjunto singular* do q -tensor de Nambu Λ ao conjunto $S_\Lambda = \{x \in M : \Lambda(x) = 0\}$. O complementar do conjunto singular S , isto é, $M_0 = M \setminus S = \{x \in M : \Lambda(x) \neq 0\}$, é chamado *conjunto regular* de Λ . Um q -campo vetorial é dito *decomponível* se pode ser escrito como o produto exterior de q campos vetoriais, ou seja, $\Lambda = X_1 \wedge \cdots \wedge X_q$, com $X_i \in \mathfrak{X}(M)$. O Teorema 3.24 nos diz que um q -tensor de Nambu é localmente decomponível fora de um conjunto singular para todo $q \geq 3$.

Seguindo a mesma ideia que introduzimos para tensores de Poisson, tendo em vista o Lema 2.19 e a Definição 2.20, definimos *espaço característico* do tensor de Nambu Λ no ponto $x \in M$ como sendo o menor subespaço C_x de $T_x M$ tal que

$$\Lambda(x) \in \Lambda^q(C_x) \subset \Lambda^q(T_x M).$$

À dimensão do espaço característico C_x chamamos *posto* de Λ em x . Um raciocínio imediato mostra que um q -campo vetorial é decomponível se, e somente se, tem posto q . Em outras palavras, o posto de um q -campo vetorial é minimal se, e somente se, ele é decomponível. Assim o Teorema 3.24 nos diz que um q -campo vetorial, $q \geq 3$, é um q -tensor de Nambu se, e somente se, tem posto minimal em todo ponto. Isto não é verdade para $q = 2$. Por exemplo, uma variedade simplética de dimensão maior que 2 possui uma estrutura de Poisson cujo 2-tensor de Poisson tem posto igual à dimensão do espaço, ou seja, seu posto é não minimal.

Exemplo 3.27 (Produto Direto) Se Λ_1 é um q_1 -tensor de Nambu sobre uma variedade M_1 e Λ_2 é um q_2 -tensor de Nambu sobre uma variedade M_2 , com $q_i \geq 3, i = 1, 2$, então $\Lambda_1 \wedge \Lambda_2$ é um $(q_1 + q_2)$ -tensor de Nambu sobre $M_1 \times M_2$. \diamond

Exemplo 3.28 O q -campo vetorial

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q} + \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_q}$$

com $q \geq 3$ numa variedade $M = M_1 \times M_2$ com coordenadas locais $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, $q < m$ e $q < n$, não é um tensor de Nambu, já que não é decomponível, logo não tem posto minimal. Então, a soma direta de dois tensores de Nambu não é, em geral, um tensor de Nambu. Ao contrário do que constatamos para o caso de Poisson no Exemplo 2.4. \diamond

Corolário 3.29 Sejam Λ um tensor de Nambu de ordem $q \geq 3$ e g uma função de classe C^∞ , então $g\Lambda$ é também um tensor de Nambu. Em particular, qualquer m -campo vetorial sobre uma variedade m -dimensional é um tensor de Nambu.

Demonstração. De fato, para algum sistema de coordenadas locais temos $\Lambda = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}$, logo

$$g\Lambda = g \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}.$$

Tomando-se y_1 tal que $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = g$ e $y_i = x_i, i = 2, \dots, m$, obtemos uma mudança de coordenadas $(x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (y_1, \dots, y_m)$ tal que, neste novo sistema de coordenadas locais,

$$g\Lambda = \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial y_q}.$$

Assim, se Λ é um m -campo vetorial numa variedade m -dimensional, então é decomponível fora de seu conjunto singular. Logo Λ é um tensor de Nambu. ■

O Teorema 3.24 nos fornece uma forma de estudarmos uma variedade de Nambu (M, Λ) (cuja estrutura de Nambu é não trivial e tem ordem $q \geq 3$) através de folheações singulares. De maneira análoga ao caso da geometria de Poisson, passaremos agora ao estudo de uma distribuição naturalmente induzida pelo tensor de Nambu.

Definição 3.30 *Dada uma variedade de Nambu (M, Λ) , definimos a distribuição característica C_Λ induzida por Λ como*

$$C_\Lambda(x) = \{X_{f_1 \dots f_{q-1}}(x) : f_1, \dots, f_{q-1} \in C^\infty(M)\},$$

para todo $x \in M$.

Observe que se Λ é um tensor de Poisson, então a definição anterior coincide com a dada em (3.4).

Proposição 3.31 *Sejam Λ um q -tensor de Nambu sobre uma variedade M , $q \geq 3$, e C_Λ a distribuição característica induzida por Λ . Então para todo $x \in M_0$, o conjunto regular de M , existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança aberta de x tal que C_Λ é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_q}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, para cada $x \in M_0$, existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança aberta de x tal que $\Lambda = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}$. Assim, dadas $f_1, \dots, f_{q-1} \in C^\infty(M)$ arbitrárias, temos que o campo hamiltoniano $X_{f_1 \dots f_{q-1}}$ é da forma

$$X_{f_1 \dots f_{q-1}} = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(q)}}$$

pois para uma $g \in C^\infty(M)$ arbitrária, temos

$$\begin{aligned} X(g) &= \Lambda(f_1, \dots, f_{q-1}, g) \\ &= \langle df_1 \wedge \cdots \wedge df_{q-1} \wedge dg, \Lambda \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f_{q-1}}{\partial x_{\sigma(q-1)}} \frac{\partial g}{\partial x_{\sigma(q)}}, \end{aligned}$$

Segue então o resultado. ■

Corolário 3.32 *A distribuição característica induzida por um q -tensor de Nambu Λ , $q \geq 3$, sobre uma variedade M é integrável.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.31 em conjunto com os Teoremas 3.16 e 3.17. ■

O Corolário 3.32 e o Teorema 3.14 nos dizem que a distribuição característica C_Λ de um q -tensor de Nambu Λ , $q \geq 3$, é a distribuição tangente de uma folheação singular \mathcal{F}_Λ sobre a variedade M . No entanto, se restringimos a folheação para o conjunto regular M_0 de Λ , temos que cada folha é uma subvariedade imersa de dimensão q , ou seja, \mathcal{F}_Λ é uma folheação regular de dimensão q sobre M_0 . Pela Proposição 3.31, temos que localmente, as folhas de \mathcal{F}_Λ são geradas pelas equações $\{x_{q+1} = c_{q+1}; \dots; x_m = c_m\}$, onde $c_i \in \mathbb{R}$ são constantes $\forall i$. Restrito às folhas \mathcal{F}_x desta folheação, Λ se torna um multicampo vetorial que não se anula e tem dimensão máxima. Neste caso, como Λ é não degenerado, então existe $\eta \in \Lambda^q(T^*\mathcal{F}_x)$ forma de volume tal que

$$\langle \eta, \Lambda \rangle = 1. \quad (3.13)$$

De fato, η não é único, mas podemos construí-la localmente. Como Λ da forma $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}$, então $\eta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^q$ satisfaz a equação (3.13). Por isso chamamos η de dual a Λ . As formas locais deste tipo de fato se colam em forma global. Suponha duas vizinhanças U_α e U_β que se intersectam, com coordenadas (x_1, \dots, x_m) e (y_1, \dots, y_m) , respectivamente, tais que $\Lambda_\alpha = \Lambda|_{U_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}$ e $\Lambda_\beta = \Lambda|_{U_\beta} = \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_q}$. Neste caso, fazendo a mudança de coordenadas $\varphi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$, encontramos

$$\begin{aligned} \Lambda_\beta &= \varphi_*(\Lambda_\alpha) \\ &= \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \wedge \dots \wedge \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_q}\right) \\ &= \left(\sum_{i_1} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_q} \frac{\partial y_{i_q}}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_{i_q}}\right) \\ &= \left(\sum_{i_1 \dots i_q} \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_{i_q}}{\partial x_q}\right) \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial y_{i_q}}. \end{aligned}$$

Com isto, chegamos à conclusão que $\frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial y_{i_q}}{\partial x_q}$ é igual a 1 se $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_q = q$ e 0 caso contrário. Portanto temos que y_j é uma função apenas de x_j , para $j = 1, \dots, q$ e, fazendo a aplicação inversa de forma análoga, concluímos também que, para $i > q$, y_i é uma função apenas das $(m - q)$ -últimas coordenadas. Assim a jacobiana da mudança de coordenadas é da forma

$$d\varphi = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz diagonal $q \times q$ cujo determinante é 1. Lembrando da teoria de variedades que a mudança de coordenadas no espaço cotangente é igual a matriz inversa

da transposta de $d\varphi$, observamos que

$$\eta_\beta = (d\varphi^T)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^q \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^q \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

isto é, as formas η_α localmente duais a Λ_α se colam numa forma global.

Agora, reciprocamente, dada uma folheação regular de dimensão q e uma forma de volume η em suas folhas, a não degenerescência de η acarreta na existência de um q -campo vetorial Λ tal que (3.13) é verdadeira. Λ não é único, mas se em coordenadas locais temos $\eta = g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^q$, o q -campo vetorial dual $\Lambda = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}$ é um tensor de Nambu, pelo Corolário 3.29.

Por outro lado, em cada $x \in S_\Lambda$, o conjunto singular de Λ , temos que a distribuição característica de Λ é $C_{\Lambda(x)} = \{0 \in T_x M\}$. Neste caso, a folha \mathcal{F}_x tem dimensão zero, ou seja, são pontos isolados. Logo a folheação \mathcal{F}_Λ é singular com dois tipos de folhas: folhas singulares de dimensão zero (i.e., pontos) e folhas regulares de dimensão q . A primeira impressão é que as folheações que surgem de estruturas de Nambu são muito pobres, já que possuem apenas dois tipos de folhas, mas essa é uma impressão errônea. Dizemos que duas folheações singulares \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 sobre uma variedade M *essencialmente coincidem* se temos $T_x \mathcal{F}_1 = T_x \mathcal{F}_2$ em quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula. Assim, a proposição a seguir nos diz que, essencialmente, qualquer folheação singular pode ser gerada por uma estrutura de Nambu.

Proposição 3.33 *Seja \mathcal{F} uma folheação singular suave de dimensão q (isto é, de $T_x \mathcal{F}$ tem dimensão q para quase todo x) sobre uma variedade M . Então \mathcal{F} pode ser essencialmente gerada por um tensor de Nambu, ou seja, existe um tensor de Nambu Λ sobre M de ordem q tal que \mathcal{F}_Λ essencialmente coincide com \mathcal{F} .*

Demonstração. Como $T_x \mathcal{F}$ tem dimensão q para quase todo x , podemos construir q -campos vetoriais X_1, \dots, X_q sobre M tangentes a \mathcal{F} que são linearmente independentes em quase todo ponto. Agora tomamos $\Lambda = X_1 \wedge \cdots \wedge X_q$. ■

Exemplo 3.34 *A folheação em \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas (r, θ, z) gerada pelo 2-tensor de Nambu*

$$\begin{cases} \Lambda(x) = r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial z}; & \text{se } x \text{ não pertence ao eixo } z \\ \Lambda(x) = 0; & \text{se } x \text{ pertence ao eixo } z \end{cases}$$

é tal que as folhas são cilindros de raio r se $r \neq 0$ e pontos isolados no eixo z . Observe que esta folheação essencialmente coincide com a folheação do Exemplo 3.8.◇

Observação 3.35 *A princípio, a folheação \mathcal{F}_Λ na proposição acima pode conter muito mais singularidades do que \mathcal{F} . Existe um processo chamado saturação que remove algumas singularidades "desnecessárias". No entanto, não abordaremos o assunto e seguiremos normalmente utilizando a Proposição 3.33 sem nos preocuparmos com isso.*

3.4 Formas Diferenciais Integráveis

Passaremos agora à caracterização das estruturas de Nambu através de formas diferenciais. Isto nos dará uma importante ferramenta no sentido de classificar estruturas de Nambu. Com este propósito, faremos algumas considerações sobre distribuições, formas diferenciais e integrabilidade.

Proposição 3.36 *Seja M uma variedade de dimensão m . Então são equivalentes:*

1. $D = \bigcup_{x \in M} D_x$ é um distribuição de codimensão p ;
2. Para todo $x \in M$, existe um aberto U e uma coleção de 1-formas diferenciais locais $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(U)$ linearmente independentes e tais que

$$D_x = \bigcap_{i=1}^p \text{Nuc}(\omega_i)(x);$$

3. Para todo $x \in M$, existe um aberto U e uma p -forma diferencial decomponível $\omega \in \Lambda^p(U)$ tal que $\dim(\text{Nuc}(\omega)) = n - p$ e

$$D_x = \text{Nuc}(\omega)(x).$$

Demonstração. Vamos mostrar que 1) \Rightarrow 2). Considere um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) numa vizinhança de um ponto $y \in M$ tal que D_y é gerado por $\frac{\partial}{\partial x_{p+1}}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(y)$. Neste caso, tome $\omega_1 = dx^1, \dots, \omega_p = dx^p$. Segue que

$$D_y = \bigcap_{i=1}^p \text{Nuc}(\omega_i)(y).$$

Passemos agora à verificação de que 2) \Rightarrow 3). Seja $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$, então segue do Exemplo 1.30 que $\text{Nuc} \omega(x) = \bigcap_{i=1}^p \text{Nuc} \omega_i(x)$ para todo $x \in U$. Finalmente, vamos mostrar que 3) \Rightarrow 1). Sejam $\omega_1, \dots, \omega_p$ linearmente independentes tais que $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ para todo $x \in U$. Logo, podemos completar o conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ de forma que $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ seja um sistema de coordenadas locais de $\Lambda^1(T^*M)$. Como cada ω_i é não degenerado, existe $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\omega_i(X_i) = 1$. Segue que

$$D_x = \bigcap_{i=1}^p \text{Nuc}(\omega_i)(x) = \langle X_{p+1}(x), \dots, X_m(x) \rangle.$$

Portanto, D é uma distribuição de codimensão p . ■

O resultado acima mostra como uma distribuição regular pode ser descrita através de famílias locais de sistemas de 1-formas diferenciais ou, equivalentemente, por uma família local de p -formas diferenciais.

Recorde que uma p -forma é dita *localmente decomponível* se puder ser localmente escrita como produto de p 1-formas diferenciais. O próximo resultado caracteriza este tipo de p -formas tanto do ponto de vista algébrico como geométrico. Para este resultado, precisaremos relembrar da definição de anulador de uma forma (Definição 1.22).

Proposição 3.37 *Sejam M uma variedade suave e $\omega \in \Lambda^p(T^*M)$ não degenerada, isto é, tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são equivalentes:*

1. ω é localmente decomponível;
2. $\omega(x)$ tem posto p para todo $x \in M$;
3. $i_{X_I}\omega \wedge \omega = 0$ para todo $X_I = (X_1, \dots, X_{p-1})$, onde $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$.
4. $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp \subset \mathcal{E}^*(\omega(x))$ para todo $x \in M$, onde $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp$ é como em (1.1);
5. $D = \bigcup_{x \in M} D_x$ é uma distribuição de codimensão p sobre M , onde $D_x = \text{Nuc}(\omega(x))$.

Demonstração. O Exemplo 1.3 nos diz que as afirmações 1. e 2. são equivalentes.

(1. \Rightarrow 3) Neste caso, suponha que ω é localmente decomponível, então existem $\omega_1, \dots, \omega_p$ em $\Lambda^1(T^*M)$ tais que, localmente, $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$. Como $\omega(x) \neq 0, \forall x$, temos que $\{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ é um conjunto linearmente independente e $\omega_i(x) \neq 0, \forall x$. Dados campos $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
& i_{X_I}\omega \wedge \omega \\
&= i_{X_I}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \\
&= (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(X_1, \dots, X_{p-1}) \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \\
&= \sum_i \pm (\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p)(X_1, \dots, X_{p-1}) \omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \\
&= \sum_i f_i \omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde $f_i = \pm (\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p)(X_1, \dots, X_{p-1}) \in C^\infty(M)$ e o símbolo $\widehat{\omega}_i$ indica que este termo está ausente. Assim 3. vale.

(3. \Rightarrow 4.) Suponha agora 3. verdadeira. Afirmamos que, para um ponto x fixado,

$$\text{Nuc}(\omega(x))^\perp = \text{Im}_x(i_{X_I}\omega), \quad (3.14)$$

onde

$$\text{Im}_x(i_{X_I}\omega) = \{i_{X_I}\omega(x) \in \Lambda^1(T^*M) : X_I = (X_1, \dots, X_{p-1}), X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)\}.$$

Sabemos que $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp = \langle \omega_1(x), \dots, \omega_p(x) \rangle$ e como, utilizando a notação anterior, temos

$$\begin{aligned} & i_{X_I}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(x) \\ &= \sum_i \pm (\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p)(x) (X_1, \dots, X_{p-1}) \omega_i(x) \\ &= \sum_i f_i(x) \omega_i(x), \end{aligned}$$

segue que $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp \supset \text{Im}_x(i_{X_I}\omega)$. Como $\omega_i(x) \neq 0$, podemos tomar $X_i(x)$ tal que $\omega_i(X_i)(x) = 1$ e $\omega_j(X_i)(x) = 0$. Assim temos $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp \subset \text{Im}_x(i_{X_I}\omega)$, de onde segue a igualdade. Como pela hipótese de 3. temos $i_{X_I}\omega \wedge \omega = 0$, segue que $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp = \text{Im}_x(i_{X_I}\omega) \subset \mathcal{E}^*(\omega(x))$.

(4. \Rightarrow 1.) Supondo 4. verdadeira, temos, para um ponto x fixado, $\text{Nuc}(\omega(x))^\perp = \langle \omega_1(x), \dots, \omega_k(x) \rangle$, para alguns $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x) \in \Lambda^1(T^*M)$ e $p \leq k \leq m$. Assim

$$\omega(x) = \sum_{i_1, \dots, i_p} a^{i_1 \dots i_p}(x) \omega_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(x)$$

com $i_j \in \{1, \dots, k\}, \forall j$. No entanto, observe que

$$\begin{aligned} \omega_j(x) \wedge \omega(x) &= 0 \\ \iff \omega_j(x) \wedge \sum_{i_1, \dots, i_p} a^{i_1 \dots i_p}(x) \omega_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(x) &= 0 \\ \iff \sum_{i_1, \dots, i_p} a^{i_1 \dots i_p}(x) \omega_j(x) \wedge \omega_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(x) &= 0 \\ \iff \omega_j(x) \wedge \omega_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}(x) &= 0 \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, k$. Isto significa que cada $\omega_j(x) = \omega_{i_s}(x)$ para algum s . Mas como $p \leq k \leq m$, isto só é possível se $p = k$ e então ω é decomponível. A equivalência entre 1. e 5. segue da Proposição 3.36. ■

Motivados por estas duas proposições, vamos introduzir o conceito de forma diferencial integrável e veremos a seguir como essa noção de integrabilidade de formas é caracterizada.

Definição 3.38 Diremos que uma p -forma diferencial ω sobre uma variedade suave M é localmente integrável fora de um conjunto singular se para todo ponto x de M , existem uma vizinhança U de x e 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(T^*U)$ linearmente independentes tais que

$$\omega(x) = \omega_1(x) \wedge \dots \wedge \omega_p(x)$$

e a distribuição $D = \cup_x D_x$ dada por $D_x = \text{Nuc}(\omega(x)) = \cap_{i=1}^p \text{Nuc}(\omega_i)(x)$ é integrável.

Proposição 3.39 *Dada uma p -forma ω sobre uma variedade suave M , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. ω é integrável;
2. ω é localmente da forma $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$ e $d\omega_i(X, Y)(x) = 0$, para todos $i = 1, \dots, p$, $X, Y \in \text{Nuc}(d\omega(x))$ e $x \in M$;
3. ω é localmente decomponível e $i_{X_I}\omega \wedge d\omega = 0$ para todo $X_I = (X_1, \dots, X_{p-1})$, onde $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$;
4. A distribuição $D = \cup_x D_x$ tal que $D_x = \text{Nuc}(\omega(x))$ é integrável.

Demonstração. A equivalência entre 1. e 4. segue diretamente da Definição 3.38.

(1. \Rightarrow 2.) Supondo ω integrável, por definição ω é localmente decomponível. Logo existem 1-formas diferenciais $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(T^*M)$ tais que, localmente, $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$. Dados $X, Y \in \text{Nuc}(d\omega(x))$, $x \in M$, como ω é integrável, segue que $[X, Y] \in \text{Nuc}(d\omega(x))$. Assim, por (1.7), temos

$$\begin{aligned} d\omega_i(x)(X, Y) &= L_X\omega_i(x)(Y) - L_Y\omega_i(x)(X) - \omega_i(x)(L_XY) \\ &= X(\omega_i(x)(Y)) - Y(\omega_i(x)(X)) - \omega_i(x)([X, Y]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

(2. \Rightarrow 3.) Tome a afirmação 2. como verdadeira. Fixado um ponto $x \in M$, temos que o conjunto $\{\omega_1(x), \dots, \omega_p(x)\}$ é linearmente independente. Então podemos completá-lo de forma que $\{\omega_1(x), \dots, \omega_m(x)\}$ seja uma base de T_x^*M . Seja $\{X_1, \dots, X_m\} \subset T_xM$ a base dual da base $\{\omega_1(x), \dots, \omega_m(x)\}$. Portanto $\text{Nuc}(d\omega(x)) = \langle X_{p+1}, \dots, X_m \rangle$. Para cada $i = 1, \dots, p$, temos que a escrita de $d\omega_i$ nesta base é

$$d\omega_i(x) = \sum_{j < k=1}^m f_{ik}(x)\omega_j(x) \wedge \omega_k(x),$$

onde $f_{jk}(x) = d\omega_i(x)(X_j, X_k)$, $\forall j, k$. Logo, pela hipótese de 2., $f_{jk} = 0$ para $k > j > p$.

Assim

$$d\omega_i(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m f_{ik}(x)\omega_j(x) \wedge \omega_k(x)$$

e $j < k$ sempre na somatória. Neste caso, temos que

$$d\omega_i(x) \wedge \omega(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m f_{ik}(x)\omega_j(x) \wedge \omega_k(x) \wedge \omega_1(x) \wedge \cdots \wedge \omega_p(x) = 0.$$

Relembrando as propriedades da derivação exterior, obtemos

$$d\omega = \sum_i (\pm)\omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p. \quad (3.15)$$

E por (3.14), $i_{X_I}\omega(x) \in \text{Nuc}(\omega(x))^\perp = \langle \omega_1(x), \dots, \omega_p(x) \rangle$, $\forall X_I = (X_1, \dots, X_{p-1})$. Então basta verificarmos a afirmação 3. para $i_{X_I}\omega(x) = \omega_i(x)$, $i = 1, \dots, p$. Neste caso

$$\begin{aligned}
i_{X_I}\omega(x) \wedge d\omega(x) &= \omega_i(x) \wedge d\omega(x) \\
&= \omega_i(x) \wedge \sum_k (\pm) \omega_1(x) \wedge \dots \wedge d\omega_k(x) \wedge \dots \wedge \omega_p(x) \\
&= (\pm) \omega_i(x) \wedge \omega_1(x) \wedge \dots \wedge d\omega_i(x) \wedge \dots \wedge \omega_p(x) \\
&= (\pm) d\omega_i(x) \wedge \omega_1(x) \wedge \dots \wedge \omega_p(x) \\
&= (\pm) d\omega_i(x) \wedge \omega(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como queríamos.

(3. \Rightarrow 4.) Vamos supor 3. verdadeira, ou seja, existem $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(T^*M)$ tais que localmente temos $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ e $i_{X_I}\omega \wedge d\omega = 0$ para todo $X_I = (X_1, \dots, X_{p-1})$, $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Queremos mostrar que $D = \cup_x D_x$ dada por $D_x = \text{Nuc}(\omega(x))$ é integrável. Para isso, devemos mostrar que, dados $X, Y \in \text{Nuc}(\omega(x))$, $[X, Y] \in \text{Nuc}(\omega(x))$. Assim, de (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega &= \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge \sum_i (\pm) \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_i \wedge \dots \wedge \omega_p \\
&= \sum_i (\pm) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_i \wedge \dots \wedge \omega_p \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então, para toda $(p-1)$ -upla $X_I = (X_1, \dots, X_{p-1})$ tal que $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
i_{X_I}(\omega \wedge d\omega) &= i_{X_I}\omega \wedge d\omega + (-1)^p \omega \wedge i_{X_I}d\omega \\
&= (-1)^p \omega \wedge i_{X_I}d\omega = 0
\end{aligned}$$

Mas lembrando de (3.14), temos

$$\text{Im}_x(i_{X_I}\omega) = \text{Nuc}(d\omega(x))^\perp = \langle \omega_1(x), \dots, \omega_p(x), d\omega_1(x), \dots, d\omega_p(x) \rangle,$$

logo

$$(\omega \wedge d\omega_i)(x) = 0, \forall i \iff d\omega_i(x) \in \langle \omega_1(x), \dots, \omega_p(x) \rangle,$$

já que ω é decomponível. Assim, dados $X, Y \in \text{Nuc}(\omega(x))$, para todo $i = 1, \dots, p$, temos por (1.7)

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega_i(X, Y)(x) \\
&= L_X\omega_i(Y)(x) - L_Y\omega_i(X)(x) - \omega_i(L_X Y)(x) \\
&= 0 - 0 - \omega_i([X, Y])(x) \\
&= -\omega_i([X, Y])(x),
\end{aligned}$$

isto é $[X, Y] \in \text{Nuc}(\omega(x))$ e portanto D é integrável. ■

Observação 3.40 Observe que a condição $i_{X_T}\omega \wedge d\omega = 0$ se resume a

$$\omega \wedge d\omega = 0 \quad (3.16)$$

se ω é uma 1-forma diferencial. Para 1-formas, esta equação é conhecida como *Condição de Integrabilidade de Frobenius*.

Munidos destas caracterizações sobre formas diferenciais integráveis, vamos voltar ao estudo das folheações de Nambu. Antes vamos fazer apenas um consideração. Dados um q -campo vetorial Λ e uma p -forma diferencial α , $p > q$, sobre uma variedade suave M , que em coordenadas locais têm as formas

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \eta^{i_1 \dots i_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}; \\ \alpha &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} a_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}, \end{aligned}$$

vamos definir a contração de α pelo campo Λ como sendo

$$i_\Lambda \alpha = \eta^{i_1 \dots i_q} i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}} \alpha = \eta^{i_1 \dots i_q} \left(i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_q}} \circ i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_{q-1}}}} \circ \dots \circ i_{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}} \right) (\alpha).$$

Pelas propriedades da contração usual por um campo vetorial, por considerações análogas a que fizemos na Definição 1.10 e pela antissimetria de α , a operação está bem definida.

Seja Ω uma forma de volume sobre uma variedade M de dimensão m . Então a aplicação $\Lambda \longrightarrow i_\Lambda \Omega$ é um isomorfismo linear de $\Lambda^q(TM)$ para $\Lambda^{m-q}(T^*M)$, pela não degenerescência de Ω . Com esta aplicação podemos caracterizar um tensor de Nambu de ordem maior ou igual a 3 através de p -formas diferenciais.

Proposição 3.41 *Sejam Λ um q -campo vetorial, $q \geq 3$, sobre uma variedade M de dimensão m e Ω uma forma de volume. Então Λ é um tensor de Nambu se, e somente se, a p -forma $\omega = i_\Lambda \Omega$ ($p = m - q \geq 0$) satisfaz as seguintes condições:*

- i. $i_A \omega \wedge \omega = 0$, para todo $(p - 1)$ -campo vetorial A .*
- ii. $i_A \omega \wedge d\omega = 0$, para todo $(p - 1)$ -campo vetorial A .*

Demonstração. Suponha que Λ é um tensor de Nambu. Se $\Lambda(y) = 0$ então segue da multilinearidade de Ω que $\omega(y) = 0$ satisfaz as condições *i.* e *ii.* Por outro lado, suponha $\Lambda(y) \neq 0$. Assim, pelo Teorema 3.24, existe um sistema de coordenadas locais tal que

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_q}.$$

Isto nos diz que, no ponto y , os campos $\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_q}(y)$ são linearmente independentes e então podemos completá-los de forma que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(y) \right\}$ seja uma base de $T_y M$.

Seja $\{dx^1(y), \dots, dx^m(y)\} \subset T_y^*M$ a sua base dual. Observe que nesta base, $\omega(y) \in \langle dx^{q+1}(y), \dots, dx^m(y) \rangle$ e portanto, $\text{Nuc}(\omega(y))$ é gerado pelos vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_q}(y)$. Logo a distribuição $D = \cup_y D_y$ dada por $D_y = \text{Nuc}(\omega(y))$ é integrável e o resultado segue das Proposições 3.37 e 3.39. Reciprocamente, se $\omega(y) = 0$ então $q = m$ e pelo Corolário 3.29, qualquer q -campo Λ é de Nambu. Neste caso, suponha $\omega(y) \neq 0$. A condição *i.* nos diz que ω é localmente decomponível e assim a *ii.* é equivalente a dizer que ω é integrável. Então numa vizinhança U de y , seja $\omega|_U = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$, onde $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(T^*U)$ são formas linearmente independentes. Como a distribuição $D = \cup_y D_y$ tal que $D_y = \text{Nuc}(\omega(y))$ é integrável, pelo Teorema de Frobenius 3.17 em conjunto com o Teorema 3.16, existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) para M tal que D é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_{p+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Ou seja, em cada ponto,

$$\text{Nuc}(\omega(y)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{p+1}}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(y) \right\rangle.$$

Neste sistema, temos que

$$\omega_k = \sum_{i=1}^p f_i dx^i,$$

para todo $k = 1, \dots, p$ e $f_i \neq 0, \forall i$. Isto nos diz que

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$$

com $f = f_1 \dots f_p \neq 0$. Portanto, se neste sistema de coordenadas temos $\Omega = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, $g \neq 0$, desejamos determinar que q -campo Λ , $q = m - p$, satisfaz $\omega = i_\Lambda \Omega$. Isto é

$$f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m (\Lambda \wedge \cdot).$$

Um raciocínio imediato mostra que devemos ter $\Lambda = h \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}$. Em particular

$$\begin{aligned} f &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right) \\ &= g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \left(h \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right) \\ &= (-1)^{pq} (gh) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \\ &= (-1)^{pq} (gh). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\Lambda = (\pm) \frac{f}{g} \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Pelo Teorema 3.24 e pelo Corolário 3.29 Λ é um tensor de Nambu. ■

Esta Proposição nos mostra que p -formas localmente decomponíveis são associadas a tensores de Nambu com muita naturalidade, e vice-versa. Portanto, cada p -forma

diferencial integrável (que é não trivial em quase todo ponto) define uma folheação singular de codimensão p . Podemos estender a folheação para os pontos singulares simplesmente fazendo cada folha ser dimensão zero nestes pontos. Poderíamos também ter partido em sentido contrário e ter provado a Proposição 3.33 através das formas diferenciais.

3.5 Classificação das Estruturas de Nambu Lineares

Este capítulo é destinado a classificar *folheações Nambu-lineares*, que são as folheações geradas por estruturas de Nambu lineares, através de um resultado importante devido a Medeiros [13], que classifica as formas diferenciais lineares em dois tipos e que nos fornece um ideia sobre como se comportam localmente as folheações lineares.

Definição 3.42 *Um tensor de Nambu Λ sobre uma variedade M escrito em coordenadas locais como $\Lambda = \sum_{I \in \mathcal{C}^q(m)} \eta^I \frac{\partial}{\partial x_I}$, com $\frac{\partial}{\partial x_I} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_q}}$, é dito linear se as funções η^I são lineares para cada q -upla I . Analogamente, uma p -forma $\alpha = \sum_{J \in \mathcal{C}^q(m)} a_J dx^J$, onde $dx^J = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}$, é dita linear se as funções a_J são lineares para cada p -upla J .*

Nosso objetivo é estudar as folheações geradas pelas estruturas de Nambu Λ lineares através da forma diferencial ω local dada pela relação $\omega = i_\Lambda \Omega$, onde Ω é uma forma de volume. Mais precisamente, dada uma estrutura de Nambu linear Λ sobre uma variedade M que em coordenadas locais se escreve como $\sum_{I \in \mathcal{C}^q(m)} \eta^I \frac{\partial}{\partial x_I}$ e considerando a forma de volume $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ definida na mesma vizinhança que Λ , a forma $\omega = i_\Lambda \Omega$ é também linear. De fato

$$\begin{aligned} \omega &= i_\Lambda \Omega = i_{\sum_I \eta^I \frac{\partial}{\partial x_I}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \sum_I i_{\eta^I \frac{\partial}{\partial x_I}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \sum_I \pm \eta^I dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^I} \wedge \cdots \wedge dx^m \end{aligned}$$

onde o símbolo $\widehat{dx^I}$ indica a ausência dos termos $dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}$ do produtório. Portanto os coeficientes de ω são funções lineares de onde segue que ω é uma forma linear. Dito isto, veremos como são classificadas as p -formas lineares afim de compararmos com as estruturas lineares de Nambu mais adiante.

Estudando a estabilidade estrutural de 1-formas diferenciais integráveis, Airton S. Medeiros introduz no seu trabalho *Structural Stability of Integrable Differential Forms*, disponível em [6], o conceito de p -forma *localmente decomponível fora do conjunto singular* (LDS - sigla em inglês) e de p -forma integrável. Neste mesmo artigo são estabelecidas as relações entre a álgebra exterior de Cartan associada a p -formas e a geometria dos campos de planos induzidos pelos núcleos destas formas, inclusive com relação à integrabilidade,

como fizemos na seção anterior. Antes de passarmos ao teorema em questão, precisaremos de algumas considerações antes.

Considere o espaço vetorial $\Lambda^p(T^*\mathbb{K}^n)$ com base $\{dx^I : I \in \mathcal{C}^p(n)\}$. Admitindo-se a ordenação (total) lexicográfica nos multiíndices I , existe um isomorfismo canônico $lex : \Lambda^p(T^*\mathbb{K}^n) \rightarrow \mathbb{K}^m$, onde $m = \binom{n}{p}$, que respeita a ordenação total. Desta forma, dado $U \subset \mathbb{K}$, fica associado de maneira única um isomorfismo $\Phi : \Lambda^p(U) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{K}^m) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K}^m; f \in C^\infty\}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Lambda^p(U) &\longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{K}^m) \\ \omega = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I dx^I &\longmapsto f = (f_1, \dots, f_m) \end{aligned}$$

com $f_j = a_J$, onde j é a ordem total do multiíndice J . Então, dada uma p -forma ω e sendo $f = \Phi(\omega)$, definimos a *derivada* de ω num ponto $x_0 \in U$ como sendo $\omega'(x_0) = \omega'_{x_0} = \Phi^{-1}(df(x_0))$. Observe que, como a derivada de uma aplicação linear coincide com a própria, segue da definição que toda forma linear $\omega \in \Lambda^p(U)$ satisfaz $\omega(x) = \omega'(x_0)$, $\forall x, x_0 \in U$.

Exemplo 3.43 *Seja $\Lambda^2(T^*\mathbb{R}^4)$ o conjunto das 2-formas sobre \mathbb{R}^4 . Se $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ é uma base para \mathbb{R}^4 , segue que o conjunto $\{dx^i \wedge dx^j : 1 \leq i < j \leq 4\}$ com $\binom{4}{2} = 6$ elementos é uma base para $\Lambda^2(T^*\mathbb{R}^4)$. Tomando o isomorfismo $lex : \Lambda^2(T^*\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}^6$, encontramos*

$$\begin{aligned} lex(dx^1 \wedge dx^2) &= e_1; & lex(dx^1 \wedge dx^3) &= e_2; & lex(dx^1 \wedge dx^4) &= e_3; \\ lex(dx^2 \wedge dx^3) &= e_4; & lex(dx^2 \wedge dx^4) &= e_5; & lex(dx^3 \wedge dx^4) &= e_6, \end{aligned}$$

para $\{e_1, \dots, e_6\}$ base canônica de \mathbb{R}^6 . Dada $\omega = \left(\sum_{i < j=1}^4 a_{ij} dx^i \wedge dx^j\right) \in \Lambda^2(T^*\mathbb{R}^4)$, então $\Phi(\omega) = f(f_1, \dots, f_6)$, onde $f_1 = a_{12}$; $f_2 = a_{13}$; $f_3 = a_{14}$; $f_4 = a_{23}$; $f_5 = a_{24}$ e $f_6 = a_{34}$. Observe que $f : U \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$ tem como jacobiana no ponto $x_0 \in U$ a matriz 4×6

$$df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, dado um vetor $u = (u_1, \dots, u_4)$ de \mathbb{R}^4 ,

$$df(x_0)(u) = \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \cdot u_j, \dots, \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_6}{\partial x_j}(x_0) \cdot u_j \right).$$

Assim, $\omega'(x_0) = \Phi^{-1}(df(x_0)) = \sum_{i < j=1}^4 b_{ij} dx^i \wedge dx^j$, com $b_{ij} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k$. \diamond

Repetindo-se o argumento do exemplo anterior, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.44 *Seendo $\omega = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} a_I dx^I$ uma p -forma sobre \mathbb{K}^n , então*

$$\omega'(x_0) = \sum_{I \in \mathcal{C}^p(n)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k \right) dx^I,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{K}^n$.

Outro resultado interessante é o fato da derivada se distribuir pelo produto exterior.

Proposição 3.45 *Seja $\omega \in \Lambda^p(T^*U)$ dada por $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$, onde $\alpha_i \in \Lambda^1(T^*U)$, $j = 1, \dots, p$. Então*

$$\omega'(x_0) = \sum_{j=1}^p \alpha_1(x_0) \wedge \cdots \wedge (\alpha_j)'(x_0) \wedge \cdots \wedge \alpha_p(x_0).$$

para todo $x_0 \in \mathbb{K}^n$.

Demonstração. Suponha (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas em U e tome $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx^j$. Então $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n (a_{1j_1}) \cdots (a_{pj_p}) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} = \sum_{J \in \mathcal{C}^p(n)} b_J dx^J$, ou seja, $b_J = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma (a_{\sigma(1)j_1}) \cdots (a_{\sigma(p)j_p})$. Assim, segue da Proposição 3.44 que

$$\begin{aligned} \omega'(x_0) &= \sum_{J \in \mathcal{C}^p(n)} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial b_J}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k \right) dx^J \\ &= \sum_{J \in \mathcal{C}^p(n)} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma (a_{\sigma(1)j_1})(x_0) \cdots \left(\frac{\partial a_{\sigma(i)j_i}}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k \right) \cdots (a_{\sigma(p)j_p})(x_0) dx^J \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{J \in \mathcal{I}^p(n)} (a_{1j_1})(x_0) \cdots \left(\frac{\partial a_{ij_i}}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k \right) \cdots (a_{pj_p})(x_0) dx^J \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} dx^{j_1} \right)(x_0) \cdots \left(\sum_{j_i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij_i}}{\partial x_k}(x_0) \cdot u_k dx^{j_i} \right) \cdots \left(\sum_{j_p=1}^n a_{pj_p} dx^{j_p} \right)(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_1(x_0) \wedge \cdots \wedge (\alpha_i)'(x_0) \wedge \cdots \wedge \alpha_p(x_0), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Agora estamos prontos para conferir o teorema principal desta seção.

Teorema 3.46 *Seja ω uma p -forma linear LDS (respec. integrável) sobre o espaço linear \mathbb{K}^n , sendo \mathbb{K} um corpo. Então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) tal que ω se reduz a uma das duas possibilidades:*

1. $\omega = \alpha \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p-1}$ para alguma 1-forma linear α sobre \mathbb{K}^n (respec. $\omega = df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{p-1}$, para alguma função quadrática $f \in C^\infty(\mathbb{K}^n)$);
2. $\text{Nuc}(\omega)^\perp$ é gerado pelas 1-formas dx_1, \dots, dx_{p+1} (respec. ω se escreve com apenas $(p+1)$ variáveis).

Demonstração. Vamos considerar primeiramente o caso em que ω é apenas LDS. Seja $S = \{x \in \mathbb{K}^n : \omega(x) = 0\}$ o conjunto singular de ω . Tome $x_0 \in \mathbb{K}^n \setminus S$. Como ω é LDS,

existem 1-formas $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ definidas numa vizinhança U do ponto x_0 , tais que $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$. Como ω é linear, pelas considerações anteriores devemos ter $\omega = \omega'(x_0)$, onde $\omega'(x_0)$ é a derivada de ω no ponto x_0 . Por outro lado, a Proposição 3.45 nos diz que

$$\omega = \omega'(x_0) = \sum_{i=1}^p \alpha_1(x_0) \wedge \dots \wedge (\alpha_i)'(x_0) \wedge \dots \wedge \alpha_p(x_0).$$

Seja $\pi_i = (-1)^{i-1} (\alpha_i)'(x_0)$, para $i = 1, \dots, p$. Note que π_i é linear para todo i , já que ω é linear e $\alpha_j(x_0)$ são formas constantes para todo $j = 1, \dots, p$. Observe também que o conjunto $\{\alpha_1(x_0), \dots, \alpha_p(x_0)\}$ é linearmente independente em T^*U , então podemos completá-lo de forma que o conjunto $\{\alpha_1(x_0), \dots, \alpha_n(x_0)\}$ seja uma base em T^*U . Então, identificando TU com U , existe uma mudança linear de coordenadas $\varphi : U \rightarrow U$ tal que $\varphi(e_i) = x_i, \forall i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base dual de $\{\alpha_1(x_0), \dots, \alpha_n(x_0)\}$. Assim, neste sistema de coordenadas, temos $\omega = \sum_{i=1}^p \pi_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$. Ainda, pela propriedade de antissimetria do produto exterior, podemos tomar $\pi_i = \ell_i dx^i + \overline{\pi}_i$ com $\overline{\pi}_i = \sum_{j=p+1}^n dx^j$, onde ℓ_i é uma função linear para todo i , já que se π_i tivesse algum termo dx^k , com $k = 1, \dots, p$ e $k \neq i$, o produto exterior se anularia. Desta forma

$$\begin{aligned} \omega &= (\ell_1 dx^1 + \overline{\pi}_1) \wedge \dots \wedge (\ell_p dx^p + \overline{\pi}_p) \\ &= \ell (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) + (\overline{\pi}_1 \wedge \dots \wedge \overline{\pi}_p) + \sum_i \overline{\pi}_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p \\ &= \ell (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) + \sum_i \overline{\pi}_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $X_j = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p}$, $j = 1, \dots, p$, temos que $i_{X_j} \omega = \pm \ell_j dx^j \pm \overline{\pi}_j$. Assim, a condição $i_{X_j} \omega \wedge \omega = 0$ da Proposição 3.37 nos diz que

$$\begin{aligned} 0 &= i_{X_j} \omega \wedge \omega \\ &= (\pm \ell_j dx^j \pm \overline{\pi}_j) \wedge \ell (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p) \\ &\quad + (\pm \ell_j dx^j \pm \overline{\pi}_j) \sum_i \overline{\pi}_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p \\ &= \sum_i \pm \overline{\pi}_j \wedge \overline{\pi}_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p \end{aligned}$$

e, portanto, como as formas dx^i são constantes, $\overline{\pi}_j \wedge \overline{\pi}_i = 0, \forall i, j$. Se $\overline{\pi}_i = 0$ para todo i , temos que ω é claramente decomponível. Então suponha, sem perda de generalidade, $\overline{\pi}_1 \neq 0$. A condição $\overline{\pi}_1 \wedge \overline{\pi}_i = 0$ e o Lema de divisão de 1-formas de de Rham, implicam em uma das duas condições abaixo:

- a) Existe uma 1-forma constante σ e funções lineares g_i tais que $\overline{\pi}_i = g_i \sigma$;
- b) Existem constantes $c_i \in \mathbb{K}^n$, tais que $\overline{\pi}_i = c_i \overline{\pi}_1$. Claramente, $c_1 = 1$.

No primeiro caso,

$$\begin{aligned}\omega &= \ell(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p) + \sum_{i=1}^p \overline{\pi}_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &= \ell(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p) + \left(\sum_i g_i \right) (\sigma \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p).\end{aligned}$$

Como σ é uma forma constante escrita apenas com as coordenadas dx^{p+1}, \dots, dx^n , segue que existe uma mudança de coordenadas tal que ω se escreve apenas com as $(p+1)$ primeiras coordenadas dx^1, \dots, dx^{p+1} . Finalmente, no caso b) ω se decompõe como

$$\begin{aligned}\omega &= \ell(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p) + \sum_{i=1}^p c_i \overline{\pi}_1 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &= \ell(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p) \\ &+ \overline{\pi}_1 \wedge \left[(dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p) + \sum_{i=2}^p c_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \right] \\ &= (ldx^1 + \overline{\pi}_1) \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &+ (ldx^1 + \overline{\pi}_1) \wedge \sum_{i=2}^p c_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &= (ldx^1 + \overline{\pi}_1) \wedge \sum_{i=1}^p c_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p.\end{aligned}$$

Mas observe que $\sum_{i=1}^p c_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p$ é uma $(p-1)$ -forma no espaço de dimensão p gerado pelas 1-formas dx^1, \dots, dx^p , logo é decomponível (Proposição 3.52, Anexo A). E assim, fazendo uma mudança de coordenadas, obtemos $\omega = \alpha \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1}$.

Para o caso integrável, primeiro observe que, como ω é uma forma linear, então $d\omega$ é uma forma constante. Assim, temos duas possibilidades: ou $d\omega \neq 0$ em todos os pontos, ou $d\omega$ é identicamente nula. Para o caso em que $d\omega \neq 0$, a Proposição 3.53 (Anexo A), demonstrada a seguir, nos fornece uma mudança linear de coordenadas tais que ω se reduz a $(p+1)$ variáveis. Ou seja, existe um sistema de coordenadas locais em que ω é da forma

$$\sum_{i=1}^{p+1} a(x_1, \dots, x_{p+1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1}.$$

Como $d\omega = \sum_{i=1}^{p+1} da \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1}$ é uma forma constante e as 1-formas dx^i são também constantes para todo i , segue que da é uma 1-forma constante e então $a(x_1, \dots, x_{p+1})$ é uma função linear. Caso $d\omega = 0$, ou seja, ω é fechada, devemos lembrar que a Proposição 3.39 nos garante que ω é LDS, então, pela primeira parte do teorema,

ω é de um dos dois tipos

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega &= \sum_{i=1}^{p+1} a(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1} \\ 2) \quad \omega &= \alpha \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1}, \end{aligned}$$

para algum sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) . Caso ω seja do tipo 1), para $p+1 < j \leq n$, tome $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Assim, temos que $L_{X_j}\omega = d(i_{X_j}\omega) + i_{X_j}d\omega = 0$, isto é, ω não depende das coordenadas (x_{p+2}, \dots, x_n) , ou seja, $\omega = \sum_{i=1}^{p+1} a(x_1, \dots, x_{p+1}) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1}$. Caso $d\omega = d\alpha \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} = 0$, então existem 1-formas constantes σ_i tais que $d\alpha = \sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i \wedge dx^i$. Isso nos diz que $d\alpha = d\beta$ para alguma forma β gerada pelas 1-formas dx^i , com $i = 1, \dots, p-1$, conseqüentemente, temos que $\alpha = \beta + df$, onde f é uma função quadrática, já que α é linear. Neste caso temos $\omega = \alpha \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} = (\beta + df) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} = df \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1}$, como queríamos. ■

Paralelamente ao trabalho de Medeiros, Jean-Paul Dufour e Nguyen Tyen Zung provam, em [8], o mesmo resultado para o caso de p -formas integráveis. Apesar do Teorema 3.46 ser mais geral, por envolver p -formas LDS, o resultado de Dufour-Zung é mais detalhado. Por isso, é nele que nos basearemos para obter o resultado desejado para estruturas de Nambu lineares. Segue o teorema:

Teorema 3.47 *Seja ω uma p -forma linear sobre o espaço linear \mathbb{K}^n , com \mathbb{K} um corpo (\mathbb{R} ou \mathbb{C} , mais precisamente)². Então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) tal que ω é de um dos dois tipos:*

I: $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \wedge \alpha$, onde α é uma 1-forma do tipo

$$\alpha = d \left(\sum_{j=p}^{p+r} (\pm) \frac{x_j^2}{2} + \sum_{i=1}^s x_i x_{p+r+i} \right),$$

com $0 \leq r \leq q = m - p$ e $1 \leq s \leq \min(p-1, q-r)$.

II: $\omega = \sum_{i=1}^{p+1} a_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1}$ com $a_i = \sum_{j=1}^{p+1} a_i^j x_j$, onde a_i^j são constantes e o símbolo de chapéu sobre um termo indica a ausência deste.

A demonstração do teorema é longa e bastante técnica, o que pode fazer com que o leitor se perca do objetivo final com facilidade. Então vamos primeiro fazer um esboço da demonstração, dando um ideia do caminho em geral para manter a leitura mais fluida. O argumento principal é que, como ω é linear, ela se escreve localmente como $\sum_{j=1}^m x_j \omega_j$ para algum $0 < m \leq n$, com ω_j p -formas constantes. O objetivo da demonstração é analisar

²Se considerarmos \mathbb{K} como sendo \mathbb{C} , então assumiremos que a forma ω é holomorfa.

as diferentes possibilidades da dimensão do conjunto $E = \cap_j \text{Nuc}(\omega_j)^\perp$, mostrando que se $\dim E < p-1$ o conjunto $\text{Nuc}(\omega)^\perp$ tem dimensão $p+1$ e, para o caso em que $\dim E \geq p-1$, subdividimos-o em dois, o que nos leva, através de uma mudança linear de coordenadas, ao Tipo I, no primeiro caso, e ao Tipo II no segundo.

Demonstração. Se $p = 0$, então ω é um função linear e pertence ao Tipo II. Suponha então $p > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que ω se escreve, num dado sistema de coordenadas, da forma $\sum_{j=1}^m x_j \omega_j$, $1 \leq m \leq n$, onde ω_j são p -formas constantes. Assim, nos pontos $(x_1 = 0, \dots, x_{j-1} = 0, x_j = \lambda, x_{j+1} = 0, \dots, x_m = 0)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\omega = \lambda \omega_j$. Como ω é integrável então é localmente decomponível, então ω_j também é decomponível para todo j , já que é uma forma constante. Denote por E_j o conjunto $\text{Nuc}(\omega_j)^\perp$. Relembre, das Proposições 3.37 e 3.39, que

$$E_j = \text{Nuc}(\omega_j)^\perp = \text{Im}(i_{X_I} \omega_j) \subset \mathcal{E}^*(\omega_j)$$

e que $\dim E_j = p$, já que ω_j é decomponível. A seguinte afirmação nos será útil:

Afirmção 3.48 *Dados ω_i e ω_j com $1 \leq i, j \leq m$, temos $\dim(E_i \cap E_j) \geq p-1$.*

Demonstração. De fato, nos pontos $(x_k = 0, k \neq i, j)$, $\omega = x_i \omega_i + x_j \omega_j$. Em particular, tomando $x_i = x_j = 1$, como ω é ou decomponível, concluímos que $(\omega_i + \omega_j)$ é também decomponível. Suponha então $\dim(E_i \cap E_j) = d < p$. Então existe uma base $\{e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_{p-d}, g_1, \dots, g_{p-d}\}$ de $E_i + E_j$ tal que

$$\begin{aligned} \omega_i &= e_1 \wedge \dots \wedge e_d \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_{p-d}; \\ \omega_j &= e_1 \wedge \dots \wedge e_d \wedge g_1 \wedge \dots \wedge g_{p-d}. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\omega_i + \omega_j = e_1 \wedge \dots \wedge e_d \wedge (f_1 \wedge \dots \wedge f_{p-d} + g_1 \wedge \dots \wedge g_{p-d}).$$

Assim, se $p-d \geq 2$, temos que $(\omega_i + \omega_j)$ não é decomponível, uma vez que as componentes $f_1, \dots, f_{p-d}, g_1, \dots, g_{p-d}$ são linearmente independentes e assim teríamos o posto de $(\omega_i + \omega_j)$ não minimal. Contradição! Logo $p-d < 2$ o que implica $\dim(E_i \cap E_j) \geq p-1$. ■

De volta ao enunciado do teorema, para cada ponto de $x \in \mathbb{K}^n$, existe $1 \leq h \leq m$ tal que, reordenando os índices se necessário, temos $E_i \neq E_j$ para todo $i, j = 1, \dots, h$. Além disso, qualquer que seja $j = h+1, \dots, m$, teremos $E_j = E_i$ para algum $i \in \{1, \dots, h\}$. Em particular,

$$\dim(E_i \cap E_j) = p-1 \text{ se } i \neq j = 1, \dots, h. \quad (3.17)$$

Considere $E = E_1 \cap \dots \cap E_h$. Vamos analisar os casos $\dim E < p-1$ e $\dim E \geq p-1$ separadamente:

Caso 1: $\dim E < p - 1$.

Primeiramente, observe que, de acordo com a Afirmação 3.48, devemos ter $h \geq 3$. Fixando-se E_1 e E_2 , teremos $\dim(E_1 \cap E_2 \cap E_k) = p - 1$ ou $\dim(E_1 \cap E_2 \cap E_k) < p - 1$, qualquer que seja $k = 3, \dots, h$. No primeiro caso, segue de (3.17) que $\dim(E_1 \cap E_2) = p - 1 = \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_k)$; como $E_1 \cap E_2 \cap E_k \subset E_1 \cap E_2$, então $E_1 \cap E_2 \cap E_k = E_1 \cap E_2$. Se isto for verdade para todos os valores de $k = 3, \dots, h$ teremos, por indução, uma contradição, pois $E = E_1 \cap E_2$; por conseguinte $\dim(E) = p - 1$. Logo existe pelo menos um $k = 3, \dots, h$ tal que $\dim(E_1 \cap E_2 \cap E_k) < p - 1$. Sem perda de generalidade, vamos assumir $\dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3) < p - 1$ e mostrar que

$$\sum_{i=1}^m E_i = E_1 + E_2 + E_3.$$

Caso $h = 3$, então nada há a fazer. Sendo assim, vamos supor que $h > 3$ e mostrar que $E_i \subset E_1 + E_2 + E_3$ para todo $i = 4, \dots, h$. De fato, dado $i = 3, \dots, h$, tome $F_1 = E_1 \cap E_i$, $F_2 = E_2 \cap E_i$ e $F_3 = E_3 \cap E_i$; então

$$\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_i) < p - 1.$$

Agora, recorde de (3.17) que $\dim F_j = p - 1$, $j = 1, 2, 3$. Segue que não podemos ter $F_1 = F_2 = F_3$. Suponhamos que $F_1 \neq F_2$, então $\dim(F_1 + F_2) \geq p$. Por outro lado, $F_1 + F_2 \subset E_i$ e $\dim(E_i) = p$, de onde segue que $E_i = F_1 + F_2$. Em particular, $E_i \subset E_1 + E_2 + E_3$, como desejado. Agora observe que

$$\begin{aligned} \dim(E_1 + E_2 + E_3) &= \dim(E_1) + \dim(E_2) + \dim(E_3) + \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &\quad - \dim(E_1 \cap E_2) - \dim(E_1 \cap E_3) - \dim(E_2 \cap E_3). \end{aligned}$$

Já vimos que $\dim(E_1) = \dim(E_2) = \dim(E_3) = p$ e que $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1 \cap E_3) = \dim(E_2 \cap E_3) = p - 1$ (cf. (3.17)). Por outro lado, com um argumento análogo ao utilizado na prova da Afirmação 3.48, encontramos $\dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p - 2$. Assim

$$\dim(E_1 + E_2 + E_3) = 3p + p - 2 - 3p + 3 = p + 1.$$

Logo $\dim(E_1 + \dots + E_m) = \dim(E_1 + E_2 + E_3) = p + 1$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{K}^n$ existe um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_m) sobre uma vizinhança V de x tal que $\{dx^1, \dots, dx^{p+1}\}$ é uma base de $(E_1 + \dots + E_m)$, ou seja,

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{p+1} a_i^j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^{p+1},$$

onde a_i^j são constantes. Assim temos

$$\omega = \sum_{i=1}^{p+1} a_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1}$$

com $a_i = \sum_{j=1}^{p+1} a_i^j x_j$.

Caso 2: $\dim E \geq p - 1$.

Seja $(x_1, \dots, x_{p-1}) \subset E$ uma $(p - 1)$ -upla linearmente independente. Então, para todo $i = 1, \dots, h$ temos

$$\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \wedge \alpha_i$$

onde α_i uma 1-forma constante que não depende de $\{dx^1, \dots, dx^{p-1}\}$. Então

$$\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \wedge \alpha \quad (3.18)$$

com $\alpha = \sum x_i \alpha_i$. Para terminamos a demonstração do teorema, basta-nos mostrar que α é da forma

$$d \left(\sum_{j=p}^{p+r} (\pm) \frac{x_j^2}{2} + \sum_{i=1}^s x_i x_{p+r+i} \right),$$

o que nos leva ao Tipo I, ou que α é uma forma que só depende das $(p + 1)$ primeiras coordenadas e assim é do Tipo II. De fato, completando a $(p - 1)$ -upla (x_1, \dots, x_{p-1}) de forma a termos um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_m) para V , temos que α se escreve na forma $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i dx^i$, onde a_i são funções lineares, por conta da linearidade de ω . Note que podemos fazer $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, p - 1$, já que α independe de dx^1, \dots, dx^{p-1} , ou seja

$$\alpha = \sum_{i=p}^m a_i dx^i. \quad (3.19)$$

Então

$$\alpha = \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^m a_i^j x_j dx^i, \quad a_i^j \in \mathbb{K} \quad \forall i, j. \quad (3.20)$$

Como ω é integrável, segue que da Proposição 3.39

$$(\pm)\alpha \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \wedge d\alpha = \alpha \wedge d\omega = i_X \omega \wedge d\omega = 0, \quad (3.21)$$

onde $X = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$. Sendo $d\alpha = \sum_{i=p}^m \sum_{j=1}^m a_i^j dx^j \wedge dx^i$ tome $d_1\alpha = \sum_{i,j=p}^m a_i^j dx^j \wedge dx^i$, segue que $d\alpha = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=p}^m a_i^j dx^j \wedge dx^i + d_1\alpha$. Observe que a equação (3.21) é equivalente a dizer que $\alpha \wedge d_1\alpha = 0$ e isto nos diz que, restrita à subvariedade linear W gerada pelas coordenadas (x_p, \dots, x_m) , α é integrável. Novamente vamos dividir nossa demonstração em dois subcasos:

a) $d_1\alpha = 0$.

Neste caso, como $d_1|_W = d$ segue do Lema de Poincaré (Anexo A) que $\alpha|_W = df$ para alguma $f \in C^\infty(W)$. Como α é linear, segue que f é uma função quadrática nas variáveis (x_p, \dots, x_m) . Logo, segue de (3.20), que

$$a_i = \sum_{j=1}^{p-1} a_i^j x_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i.$$

Fazendo uma mudança linear nas coordenadas (x_p, \dots, x_m) se necessário, teremos $f = \sum_{i=p}^{p+r} (\pm) x_i^2/2$, para algum $r \geq 0$. Desta forma, segue de (3.19) que

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=p}^m a_i dx^i = \sum_{i=p}^{p+r} a_i dx^i + \sum_{i=p+r+1}^m a_i dx^i \\ &= \sum_{i=p}^{p+r} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i^j x_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx^i + \sum_{i=p+r+1}^m \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i^j x_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx^i \\ &= \sum_{i=p}^{p+r} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i^j x_j \pm x_i \right) dx^i + \sum_{i=p+r+1}^m \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_i^j x_j \right) dx^i \end{aligned}$$

De acordo com o Lema 3.49, demonstrado a seguir, podemos normalizar o segundo termo da soma de forma a obter

$$\alpha = \sum_{i=p}^{p+r} \left((\pm) y_i + \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i^j y_j \right) dy^i + \sum_{k=1}^s y_k dy^{p+r+k},$$

onde $0 \leq s \leq \min(p-1, m-p-r)$. Fazendo uma nova troca de coordenadas, colocando $z_i = y_i + \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i^j y_j$, para $i = p, \dots, p+r$ e $z_j = y_j$ caso contrário, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=p}^{p+r} (\pm) z_i \left(dz^i - \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i^j dz^j \right) + \sum_{k=1}^s z_k dz^{p+r+k} \\ &= \sum_{i=p}^{p+r} (\mp) z_i dz^i - \sum_{i=p}^{p+r} \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i^j z_i dz^j + \sum_{k=1}^s z_k dz^{p+r+k}. \end{aligned}$$

Observe, no entanto, que as mudanças feitas nas coordenadas (x_1, \dots, x_{p-1}) só envolveram estas próprias coordenadas, isto é, a subvariedade $N = \{(x_1, \dots, x_{p-1}) : x_i \in \mathbb{K}\}$ permaneceu inalterada por estas mudanças. Logo, a $(p-1)$ -forma $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1}$ é uma forma de volume na subvariedade N , portanto se decompõe nas coordenadas (z_1, \dots, z_{p-1}) e assim a equação (3.18) se escreve nesse novo sistema de coordenadas como

$$\omega = h dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{p-1} \wedge \alpha,$$

para alguma função $h \in C^\infty(\mathbb{K}^n)$ não nula na vizinhança em questão. Assim

$$\begin{aligned} \omega &= h dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{p-1} \wedge \alpha \\ &= h dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{p-1} \wedge \\ &\wedge \left(\sum_{i=p}^{p+r} (\mp) z_i dz^i - \sum_{i=p}^{p+r} \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\alpha}_i^j z_i dz^j + \sum_{k=1}^s z_k dz^{p+r+k} \right) \\ &= h dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{p-1} \wedge \left(\sum_{i=p}^{p+r} (\mp) z_i dz^i + \sum_{k=1}^s z_k dz^{p+r+k} \right). \end{aligned}$$

Somando o resultado à expressão $hdz^1 \wedge \cdots \wedge dz^{p-1} + \left(\sum_{k=1}^s z_{p+r+k} dz^k\right)$ que é nula, obtemos

$$\omega = hdz^1 \wedge \cdots \wedge dz^{p-1} \wedge \tilde{\alpha},$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \sum_{i=p}^{p+r} (\mp) z_i dz^i + \sum_{k=1}^s z_{p+r+k} dz^k + \sum_{k=1}^s z_k dz^{p+r+k} \\ &= d \left(\sum_{j=p}^{p+r} (\pm) \frac{z_j^2}{2} + \sum_{i=1}^s z_i z_{p+r+i} \right), \end{aligned}$$

onde $0 \leq r \leq q = m - p$ e $1 \leq s \leq \min(p - 1, m - p - r)$. Podemos fazer ainda uma última mudança de coordenadas para normalizar a forma $hdz^1 \wedge \cdots \wedge dz^{p-1}$ (de maneira similar a feita no Corolário 3.29) e então encontramos que ω é do Tipo I.

b) $d_1\alpha \neq 0$.

Caso $d_1\alpha \neq 0$, como os coeficientes de $d_1\alpha$ são constantes, existe uma mudança linear das coordenadas (x_p, \dots, x_m) tal que nas novas coordenadas teremos

$$d_1\alpha = dx_p \wedge dx_{p+1} + \cdots + dx_{p+2r} \wedge dx_{p+2r+1}$$

para algum $r \geq 0$. No entanto, se tivermos $r \geq 1$, a equação $\alpha \wedge d_1 = 0$ nos diz que

$$\alpha \wedge d_1\alpha = \sum_{i=1}^m \sum_{j=p}^m a_i^j dx^i \wedge dx_p \wedge dx_{p+1} + \cdots + dx_{p+2r} \wedge dx_{p+2r+1} = 0,$$

em outras palavras, $\left(\sum_{j=p}^m a_i^j\right) dx_i \wedge dx_p \wedge dx_{p+1} = 0$, para $i = p+2, \dots, m$, $\left(\sum_{j=p}^m a_p^j\right) dx_p \wedge dx_{p+2} \wedge dx_{p+3} = 0$ e $\left(\sum_{j=p}^m a_{p+1}^j\right) dx_{p+1} \wedge dx_{p+2} \wedge dx_{p+3} = 0$. Ou seja, teríamos que todos os coeficientes de α seriam nulos, o que é um absurdo, por causa de (3.18). Logo temos $d_1\alpha = dx_p \wedge dx_{p+1}$ e $\alpha = a_1 dx_p + a_2 dx_{p+1}$, sendo a_1 e a_2 funções lineares que só dependem das coordenadas (x_1, \dots, x_{p+1}) . Então temos

$$\begin{aligned} \omega &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge \alpha \\ &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge (a_1 dx_p + a_2 dx_{p+1}) \\ &= a_1 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge dx_p \\ &\quad + a_2 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge dx_{p+1} \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1} \end{aligned}$$

com $a_i = 0$ funções lineares para $i = 1, \dots, p-1$ e a_1 e a_2 funções lineares que só dependem das coordenadas (x_1, \dots, x_{p+1}) . Logo ω é do Tipo II. ■

Lema 3.49 *Seja α uma 1-forma diferencial sobre um corpo \mathbb{K}^n tal que, em algum sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) , α se escreve como*

$$\sum_{i=p}^{p+r} \left(\pm x_i + \sum_{j=1}^{p-1} a_i^j x_j \right) dx^i + \sum_{i=p+r+1}^m \left(\sum_{j=1}^{p-1} a_i^j x_j \right) dx^i,$$

para algum r entre 0 e $(m-p)$. Então existe uma mudança linear de coordenadas $\varphi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$ onde temos, nas novas coordenadas,

$$\alpha = \sum_{i=p}^{p+r} \left((\pm) y_i + \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{a}_i^j y_j \right) dy^i + \sum_{k=1}^s y_k dy^{p+r+k},$$

para $0 \leq s \leq \min(p-1, m-p-r)$ e alguns coeficientes \tilde{a}_i^j .

Demonstração. Primeiramente, observe que a mudança de coordenadas em questão é dada por uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

onde M é uma matriz $(p-1) \times (p-1)$, Id é a matriz identidade $(r+1) \times (r+1)$ e N é uma matriz $(m-p-r) \times (m-p-r)$, então basta-nos entender a mudança no segundo termo da soma. Agora, considere o sistema de coordenadas genérico (y_1, \dots, y_m) , definido na mesma vizinhança que (x_1, \dots, x_m) , tal que

$$\begin{cases} x_i = \sum_{k=1}^{p-1} b_i^k y_k, & i = 1, \dots, p-1 \\ x_j = y_j, & j = p, \dots, p+r \\ x_t = \sum_{l=p+r+1}^m c_t^l y_l, & t = p+r+1, \dots, m \end{cases}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=p+r+1}^m \sum_{j=1}^{p-1} a_i^j x_j dx^i &= \sum_{i=p+r+1}^m \sum_{j=1}^{p-1} a_i^j \left(\sum_{k=1}^{p-1} b_i^k y_k \right) d \left(\sum_{l=p+r+1}^m c_t^l y_l \right) \\ &= \sum_{i=p+r+1}^m \sum_{j=1}^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=p+r+1}^m a_i^j b_i^k c_t^l \right) y_k dy_l. \end{aligned}$$

Concluimos disto, que para conseguirmos o resultado, devemos encontrar matrizes invertíveis $[b_i^k]$ e $[c_t^l]$ tais que a matriz $[c_t^l]^T \cdot [a_i^j] \cdot [b_i^k]$ seja diagonalizável. Mas isto segue do Teorema 3.54, enunciado no Anexo A. ■

Daqui em diante, vamos sempre considerar \mathbb{K} como sendo \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Considere um tensor de Nambu Λ linear sobre um espaço linear V e uma forma de volume Ω . Então a forma $\omega = i_\Lambda \Omega$ é integrável e linear sobre V . Pelo teorema anterior, temos que ω é de um dos dois tipos descritos. Isso significa que o tensor de Nambu Λ também

possui dois tipos. Se $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge \alpha$ com $\alpha = d\left(\sum_{j=p}^{p+r} (\pm) \frac{x_j^2}{2} + \sum_{i=1}^s x_i x_{p+r+i}\right)$, então

$$\begin{aligned} i_\Lambda \Omega &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge d\left(\sum_{j=p}^{p+r} (\pm) \frac{x_j^2}{2} + \sum_{i=1}^s x_i x_{p+r+i}\right) \\ &= (\pm) \frac{1}{2} \sum_{j=p}^{p+r} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge d(x_j^2) + \sum_{i=1}^s dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge d(x_i x_{p+r+i}) \\ &= (\pm) \frac{1}{2} \sum_{j=p}^{p+r} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge 2x_j dx^j \\ &\quad + \sum_{i=1}^s dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge (x_{p+r+i} dx^i + x_i dx_{p+r+i}) \\ &= (\pm) \sum_{j=p}^{p+r} x_j dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge dx^j + \sum_{i=1}^s x_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p-1} \wedge dx_{p+r+i}. \end{aligned}$$

Tomando $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, encontramos

$$\Lambda = \sum_{j=p}^{p+r} (\pm) x_j \frac{\partial}{\partial x_p} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^s x_i \frac{\partial}{\partial x_p} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{p+r+i}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

E se temos $\omega = \sum_{i=1}^{p+1} a_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1}$ com $a_i = \sum_{j=1}^{p+1} a_i^j x_j$, então tomando $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, encontramos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^{p+1} (\pm) a_i \frac{\partial}{\partial x_{p+2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{p+2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_m} \wedge \sum_{i,j=1}^{p+1} (\pm) a_i^j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Com uma mudança de coordenadas, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.50 *Todo tensor de Nambu Λ de ordem $q \geq 3$, ou de ordem $q = 2$ com posto menor ou igual a 2, sobre o espaço linear \mathbb{K}^n , sendo \mathbb{K} um corpo, é de pelo menos um dos dois tipos:*

I: Sendo $1 \leq r \leq q+1$ e $1 \leq s \leq \min(p, q)$,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{j=1}^{r+1} (\pm) x_{p+j-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{q+1}} + \\ &\quad \sum_{i=1}^s x_{q+1+i} \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{r+i+1}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{q+1}}. \end{aligned}$$

II: Para $\beta = \sum_{i,j=q}^m b_i^j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, com b_i^j constantes,

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{q-1}} \wedge \beta.$$

Observe que agora também incluímos na hipótese o caso em que Λ é um tensor de Nambu de ordem $q = 2$ com posto menor ou igual a dois. Isso porque para fazermos a relação entre forma diferencial é crucial que tenhamos um q -campo decomponível, para que a distribuição gerada pelo núcleo da forma coincida com a distribuição característica dos campos hamiltonianos gerados pelo q -campo Λ . No caso de $q = 2$, ou seja, no caso de Poisson, pelo Teorema 2.23 ele só será decomponível se, e somente se, seu posto for igual a 2. Neste caso a folheação gerada pela $(m - 2)$ -forma $\omega = i_{\Pi}\Omega$, sendo Ω uma forma de volume, coincide com a folheação simplética descrita na Seção 3.2 e as folhas têm naturalmente uma estrutura simplética associada, pelo Teorema 3.20.

Voltando ao caso linear, uma observação interessante é a da óbvia dualidade que há entre o Tipo I do Teorema 3.47, com o Tipo II do Teorema 3.50, e vice-versa. Também podemos analisar o formato dos Tipo I e Tipo II do Teorema 3.50 para imaginarmos como seria localmente a folheação gerada por um tensor de Nambu. No Tipo I o tensor de Nambu se escreve como uma combinação de $q + 1$ elementos do sistema de coordenadas do espaço e a distribuição C_{Λ} possui $p = m - q$ integrais primeiras, de acordo com o Teorema 3.47. Isso nos diz que as folhas de dimensão q se enrolam como num repolho (*cabagge pile*). Já no Tipo II temos uma distribuição linear, um produto cartesiano de q componentes, fazendo a folheação parecer um livro (*a book*).

A classificação da folheação de um tensor de Nambu pode ser muito complicada e depende de alguns outros fatores, como o grau do tensor, seu posto e a linearidade ou não dele. Como já dissemos, o caso em que o tensor de Nambu tem grau 2 é muito singular e bem diferente dos outros casos. Para os caso em que $q = 3$ ou $q = 2$ em que o q -tensor tem posto menor ou igual a 2, a relação entre as distribuições geradas pelo tensor e pela forma dada pela contração do tensor com uma forma de volume é importante e nos fornece uma nova perspectiva e uma outra forma de estudar tais folheações, como no caso das folheações Nambu-Lineares.

Anexo A

Este anexo é destinado a apresentação de alguns importantes resultados que utilizamos durante o texto, mas que, apesar de serem de grande relevância, são assuntos demasiadamente fora do contexto desta dissertação, por isso não apresentaremos suas demonstrações de alguns. O Lema de Poincaré foi utilizado durante as provas dos Teoremas 3.47 e 3.46.

Lema 3.51 (Poincaré) *Qualquer k -forma fechada, $k > 0$, sobre uma variedade suave contrátil é exata.*

Demonstração. Ver [2], Teorema 7.4.18. ■

Os seguintes resultados foram utilizados na demonstração do Teorema 3.46.

Proposição 3.52 *Toda forma exterior não nula de grau $(n - 1)$ sobre um espaço E de dimensão n é decomponível.*

Demonstração. Ver Proposição 7.15 da Parte I de [10]. ■

Antes de vermos a próxima proposição vamos fazer algumas considerações. O item 3. da Proposição 3.39 nos garante que se ω é integrável e, para $d\omega \neq 0$, concluímos que $d\omega$ é também decomponível, já que

$$i_{X_i}\omega \wedge d\omega = 0 \Rightarrow \omega_i \wedge d\omega = 0 \quad (3.22)$$

para todo $i = 1, \dots, p$ tal que $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$ como na proposição citada. Assim, como $d\omega$ é uma $(p + 1)$ -forma, existe 1-forma η tal que $d\omega = \eta \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p$. Neste caso temos que $d\omega$ é também uma forma integrável. E então $Nuc(d\omega)$ tem dimensão $(n - p + 1)$ e é integrável. Ainda, por (3.22), segue que $Nuc(d\omega) \subset Nuc(\omega)$, em outras palavras, $Nuc(\omega)^\perp \subset Nuc(d\omega)^\perp$. Vamos, então, reescrever a Proposição 3.2 da Parte VI de [10] para a linguagem utilizada nesta dissertação.

Proposição 3.53 *Seja ω é uma p -forma integrável sobre uma variedade M^m . Para todo ponto x de M^m existe um sistema (x_1, \dots, x_m) de coordenadas locais sobre uma vizinhança aberta U de x tal que a expressão local de ω seja*

$$\sum_{i=1}^{p+1} a(x_1, \dots, x_{p+1}) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1}.$$

Demonstração. Primeiramente observe que $Nuc(d\omega)$ tem dimensão $(m - p + 1)$ e é integrável. Então, para todo ponto x de M^m , o Teorema de Frobenius (Teorema 3.17) garante a existência de um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) sobre uma vizinhança U de x tal que $Nuc(d\omega)$ é gerado pelos campos $\frac{\partial}{\partial x_{p+2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Ou ainda, que $Nuc(d\omega)^\perp$ é gerado pelas 1-formas dx^1, \dots, dx^{p+1} . Como $Nuc(\omega)^\perp \subset Nuc(d\omega)^\perp$, segue que, sobre U

$$\omega = \sum_{i=1}^{p+1} a(x_1, \dots, x_m) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1} \text{ e}$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{p+1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial a(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{p+1}.$$

Mas como $d\omega$ é gerado pelas 1-formas dx^1, \dots, dx^{p+1} , temos que $\frac{\partial a(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} = 0$ para $j > p + 1$. Ou seja, a não depende das variáveis x_{p+2}, \dots, x_m . Logo a é função apenas das $(p + 1)$ primeiras coordenadas e segue o resultado. ■

O próximo teorema foi necessário para concluirmos o Lema 3.49 para o Teorema 3.47.

Teorema 3.54 *Seja A uma matriz $n \times m$ sobre um ideal principal R ; então existem matrizes invertíveis P e Q sobre R , de ordens n e m respectivamente, tais que*

$$PAQ = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & d_r & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e $d_i | d_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, r - 1$.

Demonstração. Ver Teorema 4, Seção 10.5, de [5]. ■

Note que no Lema 3.49 a matriz assume seus valores em \mathbb{K} . Podemos, então, tomar $d_1 = \dots = d_r = 1$, que é o caso desejado naquele lema.

Conclusão

Há uma grande diferença entre as estruturas de Nambu de grau 2, o caso de Poisson, e grau maior ou igual a 3, segundo os Teoremas de decomposição local de Weinstein (Teorema 2.23) e de Nambu (Teorema 3.24). Localmente uma estrutura de Nambu de ordem maior ou igual a 3 é decomponível, enquanto que no caso de Poisson temos decomponibilidade apenas quando o posto da estrutura é 2. Essa diferença é essencial quando vamos tratar das folheações geradas pelo tensor.

A decomponibilidade do tensor de Nambu Λ nos permite estudar a distribuição característica C_Λ como a distribuição formada pelo núcleo da forma diferencial $\omega = i_\Lambda \Omega$, onde Ω é uma dada forma de volume. Essa interpretação é extremamente útil, já que alguns resultados sobre as folheações geradas por p -formas diferenciais já são bastante conhecidas, embora ainda não totalmente exploradas. Um exemplo foi no caso linear, onde utilizamos o teorema de classificação de p -formas (Teorema 3.47) para classificarmos os tensores de Nambu de ordem maior igual a 3 ou ordem 2 com posto 2. Neste caso, a folheação é localmente dividida em dois tipos, o tipo livro (*book*) e o tipo repolho (*cabagge pile*), como expomos ao final do último capítulo.

O caso de Poisson, embora em geral não possamos fazer uma conexão com formas diferenciais de maneira análoga aos outros casos, não é menos interessante. As folheações geradas pela distribuição característica possuem uma estrutura simplética natural, o que nos permite a utilização da geometria simplética no estudo das folhas. Além disso a imersão da folha na variedade total é um morfismo de Poisson, que é uma ferramenta muito útil no estudo da geometria de Poisson, embora não tenhamos discutido o assunto em toda sua profundidade. De qualquer forma, as folheações geradas pelas distribuições características dos tensores de Nambu são bem definidas. E, reciprocamente, vimos que praticamente qualquer folheação singular de dimensão constante pode ser gerada por um tensor de Nambu (Proposição 3.33), o que só nos mostra o quanto o estudo da geometria de Nambu é importante.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980.
- [2] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New York. 2002.
- [3] H. Brézis, *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid. 1984.
- [4] L.M. Câmara, *Uma Breve Introdução à Topologia das Variedades*, preprint.
- [5] P.M. Cohn, *Algebra, Volume 1*. John Wiley & Sons Ltd., Belfast. 1982.
- [6] Coletânea: *Geometry and Topology. III Latin American School of Mathematics*. Editado por J. Palis e M.P. Carmo. Springer-Verlag, New York. 1977.
- [7] C.I. Doering & A.O. Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro. 2005.
- [8] J.-P. Dufour and N.T. Zung, *Poisson Structures and their Normal Forms*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin. 2005.
- [9] T. Frankel, *The Geometry of Physics, An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge. 1997.
- [10] C. Godbilon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann, Paris. 1969.
- [11] K.E. Gustafson, *Introduction to Differential Equations and Hilbert Space Methods*. Dover Publication, Mineola, New York. 1999.
- [12] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer; 1 edition, 2002.
- [13] A.S. de Medeiros, *Singular Foliations and Differential p -forms*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^a série, tome 9, n^o 3, 451-466. 2000.
- [14] Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian Dynamics*. Phys. Rev. D7, 2405p-2412. 1973.

- [15] L. Takhtajan, *On Foundations of the Generalized Nambu Mechanics*. Commun. Math Phys 160, 295-315. 1994.
- [16] A. Weinstein, *The Local Structures of Poisson Manifolds*. J. Differential Geom. 18, no.3, 523-557. 1983.