

Universidade Federal do Espírito Santo

Espaços-Tempos Estáticos e
Esfericamente Simétricos na Teoria de
Rastall com Campo Escalar

Edison Cesar de Oliveira Santos

Vitória - ES
2016

Edison Cesar de Oliveira Santos

Espaços-Tempos Estáticos e Esfericamente Simétricos na Teoria de Rastall com Campo Escalar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica.

Orientador: Prof. Júlio César Fabris

Julho de 2016

Aos meus pais e à Bia

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Lenilson e Vera, que me deram todas as ferramentas necessárias para chegar até aqui. Obrigado, pois mesmo quando tudo indicava o contrário, vocês sempre acreditaram e nunca desistiram de mim! Vocês não foram só necessários, mas sim essenciais. Definitivamente não estaria aqui sem a ajuda e o apoio de vocês!

Agradeço à minha namorada Bia que mesmo eu indo para longe, mesmo que as visitas fossem pouco frequentes, mesmo com a saudade batendo muito forte, sempre esteve ao meu lado. Saiba que nunca, sequer um dia, tive alguma dúvida sobre nós, afinal "*apenas começamos*".

Ao meu orientador Júlio, por ter me aceito como seu aluno e teve a paciência e capacidade de responder todas as minhas dúvidas, corrigir meus erros e me ajudar em cada passo que eu dava. Além de ser uma pessoa de muita competência e que possuo profunda admiração.

Ao professor Oliver, que me ensinou muito mais do que relatividade geral ou a física dos buracos negros, me ensinou como um professor deve incentivar um aluno à estudar.

Aos meus amigos da UFES, Adriano, Carla, Denis, Felipe, Igor, Michael, Mário, Nicolas, Pedro e Tays por todos momentos de descontração e pela ajuda em tirar várias dúvidas minhas.

Ao pessoal do GOA, que me recebeu com muito carinho, Dayana, Fabrício, José e Márcio.

Um agradecimento especial ao meu irmão Ivan, que nesses últimos anos me ensinou muito do que não há em livro algum. Sua maturidade e sabedoria são qualidades que me espelho muito. Ainda tenho muito o que aprender contigo...

Também à Anna Paula pela grande ajuda na escrita. Obrigado pelas dicas, aulas e correções!

Agradeço à CAPES pelo incentivo financeiro que fez essa pesquisa ser possível.

"Ah!

Eu devia estar sorrindo e orgulhoso
Por ter finalmente vencido na vida
Mas eu acho isso uma grande piada
E um tanto quanto perigosa

Eu devia estar contente
Por ter conseguido
Tudo o que eu quis
Mas confesso abestalhado
Que eu estou decepcionado

Porque foi tão fácil conseguir
E agora eu me pergunto "E daí?"
Eu tenho uma porção
De coisas grandes pra conquistar
E eu não posso ficar aí parado"

Resumo

A teoria gravitacional não-conservativa de Rastall mostrou resultado idêntico ao modelo Λ CDM em escalas cosmológicas. Ademais, no vácuo, a única solução estática e esfericamente simétrica não-trivial são as mesmas da relatividade geral, exceto para um caso muito específico. Este trabalho apresenta novas soluções para um campo escalar não-massivo canônico acoplado ao setor gravitacional em termos do parâmetro de Rastall α , onde $\alpha = 1$ retorna à relatividade geral. Foi mostrado que para $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ as mesmas soluções da teoria de k -essência foram recuperadas, contudo, a função do campo escalar comporta-se diferentemente. Para $\alpha = 3/2$, implicando $R = 0$, uma solução independente do potencial foi obtida. Soluções regulares para o potencial $V(\phi)$ recuperaram exatamente o mesmo resultado reproduzido em relatividade geral com campos escalares acoplados, contudo está intrinsecamente dependente do parâmetro α .

Palavras chave: Relatividade Geral, Buraco Negro, Teoria de Rastall, Gravitação.

Abstract

The non-conservative Rastall theory of gravity showed identical results to the Λ CDM model in cosmological scales. Furthermore, in vacuum, the only non-trivial static and spherically symmetric solution are the same of general relativity, except in a very specific case. This work presents new solutions for a canonical massless scalar field coupled to the gravity sector in terms of Rastall's parameter a , where $a = 1$ returns to general relativity. It was shown that for $a = -1$ and $a = 0$ the same solutions as in the k-essence theory were retrieved, yet, the scalar field function behaves differently. For $a = 3/2$, implying $R = 0$, a potential independent solution was obtained. Regular solutions for the potential $V(\phi)$ recovered exactly the same result replicated in general relativity coupled with scalar fields, however it's intrinsically dependent on the parameter a .

Keywords: General Relativity, Black Hole, Rastall's Theory, Gravitation.

Lista de Figuras

3.1	Diagrama demonstrando os cones de luz fechando-se ao se aproximarem de $r = 2Gm$. Fonte: Figura 11.10 da referência [1].	15
3.2	Gráfico nas coordenadas de Eddington-Finkelstein demonstrando os cones de luz se direcionando, e fechando, à singularidade. Fonte: Figura 5.10 da referência [2].	16
3.3	Diagrama representando o espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal. Fonte: Figura 6.9 da referência [3].	17
3.4	Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo plano de Minkowski. Fonte: Figura 17.9 da referência [4].	19
3.5	Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Schwarzschild. Fonte: Figura 5.16 da referência [2].	20
5.1	Diagrama de Carter-Penrose para a solução de Rastall com $a = 0$. Os cones de luz indicam a direção temporal. Fonte: Figura 2 da referência [5].	46
5.2	Diagrama de Carter-Penrose para solução de Rastall com $a = -1$ e $C > 0$. As letras R e T correspondem às regiões estáticas e não-estáticas, respectivamente. Fonte: Figura 1 da referência [5].	48
A.1	Uma grade retangular sob uma transformação conforme f . Mesmo que a forma da figura não se preserve, as linhas sempre formam ângulos de 90° em ambos os casos.	56
B.1	Comportamento da função $B(u)$: 1) não possui região estática; 2) espaço-tempo do tipo Schwarzschild-de Sitter; 3) do tipo Schwarzschild; 4) de Sitter; 5) Minkowski/AdS. Fonte: Figura 1 da referência [6].	61

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Introdução à Relatividade Geral	4
2.1	Da gravitação newtoniana ao espaço-tempo curvo	4
2.2	A matemática da relatividade geral	5
2.3	As equações de campo de Einstein	7
3	Buraco Negro de Schwarzschild	9
3.1	O espaço-tempo de Schwarzschild	9
3.1.1	Teorema de Birkhoff	11
3.1.2	Singularidades	12
3.1.3	Horizonte de eventos	14
3.1.4	Extensão máxima	17
3.2	Diagrama de Carter-Penrose	18
3.3	Gravidade superficial e a temperatura de um buraco negro	20
4	Buraco Negro em Teorias Escalares-Tensoriais	22
4.1	Buraco negro na teoria de Brans-Dicke	22
4.1.1	Equações de campo	23
4.1.2	Campos fantasmas	24
4.1.3	Soluções de buraco negro	25
4.2	Buraco negro na teoria de K-essência	33
4.2.1	Equações de campo e soluções	34
5	Buraco Negro na Teoria de Rastall com Campo Escalar	36
5.1	Teorias não conservativas	36
5.2	Teoria de Rastall com campo escalar	37
5.3	Características gerais	39
5.3.1	Estrutura global	40
5.3.2	Possíveis horizontes com campo não-massivo	41
5.3.3	Comportamento assintótico	42
5.4	Solução para $a = 0$	43
5.4.1	Estrutura causal	45
5.5	Solução para $a = -1$	46
5.5.1	Estrutura causal	48
5.6	Solução para $a = 3/2$	49
5.7	Soluções regulares com um potencial	52
6	Conclusão	54

CONTEÚDO

A	Transformação Conforme	56
B	Teorema de Estrutura Global	60
C	Conservação do Tensor Energia-Momento	62
	Referências bibliográficas	

Capítulo 1

Introdução

Dentre as forças fundamentais conhecidas pode-se dizer, com uma certa suspeita, que a gravitacional é no mínimo a mais intrigante. Sua modelagem matemática conseguiu explicar o movimento dos céus há quase cinco séculos atrás e 100 anos depois da relatividade geral de Einstein [7] continua ajudando a entender (e criando muitas outras dúvidas, claro) o universo.

É da força mais intrigante que nasce um dos objetos mais excêntricos da física moderna: buracos negros. Eles não são provocantes só para os físicos, já apareceram em livros, séries e filmes de ficção científica, ou documentários e livros de divulgação que estimulam, e provocam, a mente de jovens para serem (quem sabe?) futuros cientistas.

Desde que o buraco negro foi formalmente apresentado matematicamente em 1916 por Schwarzschild [8], grandes nomes já contribuíram para a sua compreensão: Eddington, Chandrasekhar, Penrose, Bekenstein e Hawking seriam alguns poucos nomes de grande importância para citar. Porém, só em 1964, devido às emissões em raios-x do seu disco de acreção, foi descoberto o sistema estelar *Cygnus-X 1*. Ele consiste em um sistema binário de uma estrela com um objeto compacto [9], e devido à sua massa tornou-se o primeiro candidato à buraco negro. Demorou 50 anos para a física de buracos negros deixar de ser algo totalmente especulativo para tornar-se algo mais tangível.

Outros indícios apareceram sobre a existência dos buracos negros. Uma evidência forte é o de dezenas de estrelas orbitando um '*objeto invisível*' em nosso centro galáctico, com uma massa na ordem de 4 milhões de vezes a massa do nosso Sol [10]. Contudo, foi só em 2015 que veio a primeira observação de objetos compactos possuindo o que deve ser um horizonte de eventos [11]. O observatório LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) conseguiu detectar a coalescência de dois buracos negros, ambos com cerca de 30 massas solares, restando um buraco negro maior de aproximadamente 60 massas solares [12].

Buracos negros ganharam uma classificação própria de acordo com sua massa. Quando estrelas muito massivas morrem devido ao seu colapso gravitacional, buracos negros estelares são criados, os quais possuem algumas dezenas de massas solares [13]. Já os supermassivos possuem massas na estrondosa ordem de grandeza de $\sim 10^5 - 10^9$ massas solares [14], mesmo que sua existência seja clara, vivendo nos centros de galáxias muito massivas, o processo de sua formação ainda é um tanto duvidosa. No meio desses dois tipos existem os buracos negros de massa intermediária, que podem existir em aglomerados fechados [15] e massas na ordem de milhares de

massas solares.

Por último, em um âmbito mais teórico, são classificados os micro buracos negros que também são chamados de buracos negros quânticos. Eles possuem massas menores que a da nossa Lua, que implica raio na escala milimétrica, e podem ter sido criados em um ambiente de alta densidade como o Big-Bang, por conta disso podem ser chamados de buracos negros primordiais. Também especula-se que eles poderiam ser reproduzidos em colisores de partículas como o LHC [16]. Claramente esses objetos só poderiam ser mais profundamente estudados se houvesse uma teoria que unisse a gravidade com a mecânica quântica com sucesso. Se buracos negros primordiais tiverem sido criados com massa suficientemente grande, eles poderiam existir até hoje [17] e são considerados um dos candidatos à matéria escura [18].

Mesmo com a relatividade geral apresentando um respaldo experimental enorme, o acoplamento de um campo escalar na ação foi intensamente estudado desde antes do nascimento da teoria [19], mesmo que sua interpretação fosse um tanto diferente da atual. No início da década de 60, a teoria de Brans-Dicke [20] foi proposta incorporando a ideia da constante gravitacional ser variável, utilizando um campo escalar não-minimamente acoplado no setor gravitacional. A classe de teorias de Horndeski ([21]-[22]), que é a combinação mais geral de um campo escalar e sua derivada, que leva à equações diferenciais de segunda-ordem, chamaram muita atenção junto com as teorias de Galileon que são uma sub-classe das de Horndeski. A teoria de $f(R)$, que supõe uma função do escalar de Ricci (para uma revisão, ver [23]), pode ser revista na forma de uma teoria escalar-tensorial. Esta é uma pequena lista que demonstra a importância, e usos, de campos escalares na gravitação.

Outra possibilidade que tem sido explorada nos últimos anos é a generalização do termo cinético do campo escalar que é minimamente acoplado à lagrangiana de Einstein-Hilbert, teorias de k -essência. Em um artigo recente, duas soluções de vácuo para uma métrica estática e esfericamente simétrica foram obtidas [5]. Foi mostrado que em estruturas com horizonte de eventos presentes a interpretação de buraco negro não é possível devido à singularidades no infinito radial [24].

Uma possível generalização da teoria da relatividade é relaxar a condição da conservação do tensor energia-momento. Um exemplo é a teoria de Rastall [25], a qual a lei de conservação está ligada ao gradiente do escalar de Ricci, podendo ser interpretado como a implementação fenomenológica de algum efeito quântico no espaço-tempo curvo.

Sendo assim este trabalho de dissertação tem a seguinte estrutura. No capítulo 2 será feito um pequeno apanhado histórico para deixar claro a motivação que Einstein teve para propor a relatividade geral, seguido por uma revisão rápida do material necessário sobre geometria diferencial e topologia, fixando notação e definições matemáticas básicas que serão utilizadas até o final deste trabalho. A solução de Schwarzschild é apresentada no capítulo 3 onde as estruturas básicas de buracos negros, como horizonte de eventos, singularidades, diagramas de Carter-Penrose e sua temperatura, são apresentadas. Ambos capítulos são baseados em livros-textos de relatividade geral com ênfase na referência [2].

No capítulo 4 duas teorias escalares-tensoriais, junto com uma motivação histórica, são apresentadas. Uma análise robusta sobre as soluções de buracos negros na teoria de Brans-Dicke é feita e discute-se sobre os campos fantasmas e buracos negros frios. O capítulo é finalizado brevemente introduzindo a teoria de k -essência para mostrar a estrutura geral de suas equações e soluções, que serão comparadas e mais profun-

damente discutidas no capítulo seguinte. A maior parte deste capítulo foi baseado nos trabalhos [26] e [24].

A contribuição original é apresentada no quinto capítulo [27]. São estudados possíveis soluções de buracos negros na teoria de Rastall com campo escalar auto-interagente. Suas características gerais e soluções específicas serão investigadas. Será mostrado que algumas dessas soluções são idênticas às encontradas na teoria de k -essência ([5]-[28]), porém só na parte geométrica. O comportamento do campo escalar apresenta características bem distintas, as quais podem influenciar na estabilidade em análise perturbativa. Além do mais, será mostrado que estruturas de buracos negros regulares, encontrado na referência [24] para campos fantasmas, ocorrem também nesta teoria de Rastall com campo escalar, mais uma vez se diferenciando por conta do potencial do campo escalar.

Encerra-se o trabalho discutindo os principais resultados e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Introdução à Relatividade Geral

2.1 Da gravitação newtoniana ao espaço-tempo curvo

Em 1687, Isaac Newton revira o mundo das ciências naturais lançando à humanidade seu trabalho, dividido em três livros, chamado de *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. No primeiro livro, suas famosas três leis são enunciadas:

1. *Para um referencial inercial, um objeto ou move-se com velocidade constante, ou permanece inerte até que alguma força externa atue sobre ele,*
2. *A soma vetorial das forças \vec{F} sobre um objeto, é igual à sua **massa inercial** m_i vezes o vetor aceleração \vec{a} do objeto,*

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (2.1)$$

3. *Todo corpo que exerce uma força em um segundo corpo, recebe uma força de reação do segundo objeto de mesmo módulo e direção, porém com sentido oposto.*

Já no terceiro livro, Newton consegue fazer a primeira unificação na história do que viria se chamar física. Ele consegue mostrar que os movimentos da Lua e do Sol obedecem também suas três leis e a força responsável por este movimento depende da **massa gravitacional** m_g dos corpos astronômicos e da distância entre eles. Em notação moderna, pode-se escrever a força gravitacional em termos de um campo escalar Φ , que é o potencial gravitacional, da seguinte forma

$$\vec{F}_g = -m_g \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.2)$$

Utilizando as equações (2.1) e (2.2), calcula-se a aceleração que um corpo adquire devido à força gravitacional

$$\vec{a} = - \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.3)$$

Mesmo que as massas inercial e gravitacional possuam naturezas bem distintas, pode-se considerar¹

$$\frac{m_g}{m_i} = 1, \quad (2.4)$$

¹Esta equivalência já foi testada até a ordem de 10^{-13} [29].

e isto é chamado de **Princípio de Equivalência Fraco**. A consequência direta deste princípio é a noção que todos os corpos, com quaisquer massas, sofrem uma mesma aceleração devido à um mesmo campo gravitacional, ou seja,

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (2.5)$$

Já em 1915, Albert Einstein faz o seguinte experimento mental: uma pessoa dentro de uma caixa acelerada para cima, não consegue distinguir se ele realmente está sendo acelerado para cima ou se a caixa está parada sobre o efeito de um campo gravitacional para baixo. Ou seja, um referencial linearmente acelerado relativo à um referencial inercial é localmente idêntico à um referencial estático sobre um campo gravitacional.

Einstein consegue interpretar isso dizendo que localmente as leis da física se reduzem à relatividade restrita; é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por experimentos locais. Dessa forma, Einstein enuncia o que atualmente é conhecido por **Princípio de Equivalência de Einstein**, ou PEE.

O PEE indica que a gravitação e o movimento através do espaço-tempo estão ligados de alguma forma, sugerindo que a gravidade pode ser interpretada como uma entidade geométrica curva onde o espaço plano é o ambiente natural da relatividade restrita. Assim, para entender a gravitação é necessário estudar a matemática por trás dessas geometrias que não são, necessariamente, planas.

2.2 A matemática da relatividade geral

Como deseja-se uma teoria que possua equações com a mesma forma em qualquer sistema de coordenada, isto é para se possuir uma teoria covariante, é necessário definir os **tensores**. De uma forma não aprofundada, são objetos que seguem a seguinte lei de transformação de coordenadas

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.6)$$

Os tensores são definidos em uma entidade geométrica chamada de **variedade**. Resumidamente, pode-se definir uma variedade como um espaço n-dimensional onde localmente é isomorfo ao \mathbb{R}^n . Um exemplo menos abstrato é a 2-esfera \mathbb{S}^2 que localmente pode ser visto como o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Para uma visão mais detalhada ver referência [2].

Neste espaço, é necessário definir derivadas em relação a esses tensores. O problema é que sua derivada, em geral, não se transforma como um tensor, assim, é necessário criar um novo operador de derivada com o objetivo de que isso seja corrigido. Define-se, então, o operador **derivada covariante** que é composta de uma derivada parcial somado com um termo de correção. A derivada covariante de um tensor **contravariante** V^ν ou **covariante** V_ν são definidos da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\nu &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \\ \nabla_\mu V_\nu &= \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda. \end{aligned} \quad (2.7)$$

O termo de correção $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$, que não se transforma como um tensor, se chama **conexão afim**.

Dados dois pontos quaisquer na variedade, é necessário ser capaz de medir a distância entre eles. Com isso define-se o **tensor métrico** $g_{\mu\nu}$ que goza das seguintes propriedades:

1. *É simétrico*, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$;
2. *Possui inversa*, $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma}g^{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu}$;

tal que δ_{σ}^{μ} é o tensor **delta de Kronecker** definido como

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu, \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (2.8)$$

Com a métrica estabelecida, introduz-se o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \quad (2.9)$$

que efetivamente mede a distância entre os dois pontos na variedade.

Assumindo a **compatibilidade métrica**, tal que $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$, e a propriedade de ser **livre de torção**, ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ caracterizando a simetria entre os índices μ e ν , é possível mostrar que somente uma **conexão afim** é compatível com a métrica. Suas componentes podem ser calculadas pelos **símbolos de Christoffel** dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Até então tem-se trabalhado para um caso geral n-dimensional, contudo, na relatividade geral clássica existem somente 4 dimensões, uma temporal e três espaciais. A dimensão temporal da métrica sempre terá o sinal oposto das outras dimensões, $(+ - - -)$ ou $(- + + +)$, que é denominada **assinatura da métrica**. Esta assinatura caracteriza uma **variedade lorentziana** ou **pseudo-riemanniana**.

Calculando o comutador de derivadas covariantes aplicados a um tensor A_{ρ} , obtém-se

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A_{\rho} = R^{\alpha}_{\rho\mu\nu} A_{\alpha}, \quad (2.11)$$

onde $R^{\alpha}_{\rho\mu\nu}$ é definido como o **tensor de curvatura**, ou, **tensor de Riemann**. Com ele, toda a informação sobre a curvatura da variedade pode ser obtida com a seguinte expressão

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (2.12)$$

Este tensor possui as seguintes simetrias,

1. *Antissimétrico em seus dois primeiros índices*: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$;
2. *Antissimétrico em seus dois últimos índices*: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$;
3. *Invariante sob a troca do primeiro par de índices com o último*: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$;
4. *A soma de permutações cíclicas dos últimos três índices anulam-se*: $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$.

Dada todas essas simetrias, o tensor de Riemann possui somente 20 componentes independentes para uma variedade quadri-dimensional.

Tomando a contração do tensor de Riemann do primeiro com o terceiro índice² chega-se à

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.13)$$

que é um tensor simétrico chamado de **tensor de Ricci**. Ele pode ser calculado diretamente, sem passar pelo tensor de Riemann em si, fazendo a contração de (2.12), resultando em

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha}. \quad (2.14)$$

Calculando o traço deste tensor cria-se o **escalar de curvatura**, ou **escalar de Ricci**

$$R = R^{\mu}_{\mu}. \quad (2.15)$$

Finalmente, define-se o **tensor de Einstein**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.16)$$

que também é simétrico e o qual tem a propriedade de possuir seu divergente nulo, ou seja

$$\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.17)$$

2.3 As equações de campo de Einstein

Derivar as equações de campo por uma ação possui certas vantagens. Facilita a unificação com outras teorias de campo e ajuda a visualização de simetrias e cargas conservadas pelo teorema de Noether, por exemplo. Porém, é importante notar que essa não é a única forma de derivar as equações de Einstein³.

A **ação de Einstein-Hilbert**, que possui esse nome pois Hilbert [30] e Einstein [7] chegaram nesse mesmo resultado independentemente, é dada por

$$S[g] = \int \sqrt{-g} \left[\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right] d^4x, \quad (2.18)$$

onde \mathcal{L}_m é a lagrangiana do conteúdo material. Fazendo a variação da ação anterior em função do campo $g^{\mu\nu}$, diretamente se obtém

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} \left(R \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.19)$$

Calculando cada termo independentemente, chega-se que

$$\begin{aligned} \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} &= R_{\mu\nu} + \text{termos de superfície;} \\ \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

²Todas as outras contrações possíveis ou são nulas ou são relacionadas à esta.

³Ver [2] para uma dedução à partir de argumentos mais físicos.

e assim,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right) - \frac{T_{\mu\nu}}{2} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.21)$$

onde foi definido o **tensor energia-momento** tal que

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.22)$$

Agora aplica-se o **princípio da mínima ação**. Este princípio diz que dentre todas as escolhas que um sistema pode adotar para mudar de uma primeira configuração para a segunda, ele sempre escolherá a que deixa ação estacionária (sem variar) [31]. Matematicamente isso quer dizer $\delta S = 0$, que aplicado em (2.21) chega-se nas **equações de campo de Einstein**⁴

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Um fato importante de notar é que satisfeita a condição (2.17), necessariamente precisa-se inferir que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.24)$$

ou seja, a conservação de energia e momento é exigida⁵. Porém, este mesmo resultado também pode ser obtido lembrando que na relatividade restrita já existe a conservação do tensor energia-momento, expressa da seguinte maneira

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Assim, aplicando diretamente o princípio de equivalência, que matematicamente é mudar as derivadas ∂_μ para ∇_μ para incluir o caso de espaços curvos, também se chega em (2.24).

Na forma mais geral possível, as equações de Einstein são um conjunto de dez equações diferenciais parciais, não-lineares e acopladas de difícil resolução analítica. Então, é de grande importância o uso de simetrias para a simplificação dos problemas estudados.

Sendo assim, com a equação (2.23), Einstein conseguiu descrever a gravitação como um fenômeno geométrico do espaço-tempo. Como John Wheeler sucintamente descreveu e interpretou:

*'O espaço-tempo diz como a matéria deve se mover; a matéria diz como o espaço-tempo deve se curvar.'*⁶

⁴À partir daqui será adotado o sistema de unidades naturais onde $c = 1$.

⁵Uma outra forma de chegar nesse resultado, de uma maneira mais formal, é demonstrada no apêndice C.

⁶Do original: 'Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.'

Capítulo 3

Buraco Negro de Schwarzschild

Logo no início de 1916, menos de um ano após a publicação de Einstein sobre a relatividade geral, o físico alemão **Karl Schwarzschild**, que mesmo lutando na Primeira Guerra Mundial e sofrendo de uma doença de pele rara chamada pênfigo, escreve o artigo [8] com a primeira solução analítica para as equações de campo dadas por (2.23). O próprio Einstein ficou surpreso ao ver que suas equações admitiam soluções analíticas.

Schwarzschild encontrou sua solução supondo um objeto estático, neutro, com simetria esférica e no vácuo. Este corpo possui uma **singularidade** em seu centro, protegido por um **horizonte de eventos** dado pelo **raio de Schwarzschild**, de onde nem a luz pode escapar, que só em 1967 ganhou o atual nome popular **buraco negro**.

O intuito é estudar soluções de buracos negros onde não há matéria na parte externa do objeto, isso quer dizer que pode-se tomar $T_{\mu\nu} = 0$ em (2.23), o que claramente resulta em

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.1)$$

Tomando o traço desta equação chega-se que

$$R = 0, \quad (3.2)$$

utilizando este resultado em (3.1)

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (3.3)$$

que são as equações de Einstein no vácuo.

Como já discutido no capítulo anterior, resolver as equações de Einstein sem utilizar simetria alguma, mesmo que no vácuo seja um tanto mais simples, se tornaria em um problema de 10 equações diferenciais não-lineares de difícil solução. Dessa forma, deseja-se mostrar que devido a simetria do problema o número de equações independentes diminui drasticamente, tornando o problema de mais fácil resolução.

3.1 O espaço-tempo de Schwarzschild

O métrica de Schwarzschild é um espaço-tempo sem matéria (vácuo) e com simetria esférica. O elemento de linha mais simples para qual ambas características são satisfeitas é dado por

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)}dt^2 - e^{2\beta(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (3.4)$$

A hipótese da estaticidade é satisfeita pois nenhuma componente da métrica depende da coordenada temporal. Com

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2 \quad (3.5)$$

nota-se que $r^2 d\Omega^2$ é o elemento de linha da 2-esfera de raio r , o qual denota a simetria esférica.

Utilizando (3.4), calcula-se todos os termos da conexão diferentes de zero

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha, & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha, & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo assim possível utilizar a relação (2.14) para se obter as equações de Einstein no vácuo dadas por (3.3). As únicas equações diferentes de zero são

$$R_{tt} = r(\partial_r \alpha)^2 + 2\partial_r \alpha - r\partial_r \alpha \partial_r \beta + r\partial_r^2 \alpha = 0, \quad (3.7)$$

$$R_{rr} = -(\partial_r \alpha)^2 + 2\frac{\partial_r \beta}{r} + \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha = 0, \quad (3.8)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}(r\partial_r \beta - r\partial_r \alpha - 1) + 1 = 0. \quad (3.9)$$

Mesmo que a equação dada para $R_{\phi\phi}$ seja diferente de zero, ela é omitida pois é múltipla de $R_{\theta\theta}$ (devido a simetria esférica), o que não concede informação adicional ao sistema de equações.

Dividindo a equação (3.7) por r e somando com (3.8)

$$\partial_r \alpha + \partial_r \beta = 0, \quad (3.10)$$

que diretamente implica em $\alpha = -\beta + c$, onde c é a constante de integração. Ou seja a métrica (3.4) ficaria da seguinte forma

$$ds^2 = e^{-2\beta} e^{-2c} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.11)$$

redefinindo a coordenada temporal tal que $dt \rightarrow e^{-c} dt$, chega-se em

$$ds^2 = e^{-2\beta} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.12)$$

que implica

$$\alpha = -\beta. \quad (3.13)$$

Utilizando este fato, a equação (3.9) é simplificada

$$\begin{aligned} e^{2\alpha}(2r\partial_r \alpha + 1) &= 1, \\ \partial_r(r e^{2\alpha}) &= 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e integrada

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad (3.15)$$

tal que R_s é a constante de integração.

Como a solução de Schwarzschild deve representar o espaço-tempo fora de uma estrela ou planeta, é necessário encontrar o limite de campo fraco quando $r \rightarrow \infty$. No limite Newtoniano tem-se $g_{tt} = (1 + 2\Phi)$, com $\Phi = -Gm/r$ e pode-se fazer a identificação que $R_s = 2Gm$, que é conhecido como **Raio de Schwarzschild**. Finalmente, a **métrica de Schwarzschild** é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.16)$$

Como explicado, foi escolhido o sistema de coordenadas tal que r é a coordenada radial onde $r = 0$ é o centro da 2-esfera, porém esta não é uma condição necessária. A métrica (3.4) pode ser re-escrita de uma forma mais geral como se segue

$$ds^2 = e^{2\alpha(u)} dt^2 - e^{2\beta(u)} du^2 - e^{2\gamma(u)} d\Omega^2, \quad (3.17)$$

onde existe uma **liberdade de calibre** vinculando as funções α , β e γ . O exemplo mais claro são as coordenadas de Schwarzschild, que foram anteriormente utilizadas, tais que $u = r$ e $\gamma = \ln u$. Contudo, outras opções são possíveis como o **calibre harmônico**, identificado por $\gamma(u) = 2\alpha(u) + \beta(u)$ que é conveniente para a solução com problemas envolvendo campos escalares e o **calibre quase-global**, onde $\alpha(u) = -\gamma(u)$, útil para descrever soluções de buracos negros em ambos lados dos horizontes.

3.1.1 Teorema de Birkhoff

Um dos pressupostos para a dedução da métrica de Schwarzschild foi do espaço-tempo ser estático, entretanto é interessante ver o que aconteceria se essa condição não fosse obedecida, mas mantendo a simetria esférica. A métrica (3.4) seria então

$$ds^2 = e^{2\alpha(t,r)} dt^2 - e^{2\beta(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.18)$$

O processo é o mesmo de antes, primeiro calcular as conexões

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \partial_t \alpha, & \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha, & \Gamma_{rr}^t &= e^{2(\beta-\alpha)} \partial_t \beta, \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \beta, & \Gamma_{tr}^r &= \partial_t \beta, & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e então o tensor de Ricci para utilizar (3.3)

$$R_{tt} = r(\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha (r \partial_r \beta - 2) + r \left[\partial_r^2 \alpha + e^{2(\beta-\alpha)} (\partial_t \alpha \partial_t \beta - (\partial_t \beta)^2 - \partial_t^2 \beta) \right] = 0, \quad (3.20)$$

$$R_{tr} = \partial_t \beta = 0, \quad (3.21)$$

$$R_{rr} = \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 + 2 \frac{\partial_r \beta}{r} - \partial_r^2 \alpha + e^{2(\beta-\alpha)} (\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta) = 0, \quad (3.22)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} (r \partial_r \beta - r \partial_r \alpha - 1) + 1 = 0. \quad (3.23)$$

Facilmente é observado que além das equações terem se tornado mais complexas, apareceu o termo R_{tr} , dele conclui-se que β independe do tempo. Com isto, e tomando a derivada temporal de (3.23), chega-se em

$$\partial_t \partial_r \alpha = 0. \quad (3.24)$$

Então, pela equação anterior, α pode ser escrito da seguinte forma

$$\alpha = f(r) + g(t). \quad (3.25)$$

Com as restrições obtidas para as duas variáveis, muito similar ao caso estático, a métrica pode ser escrita como se segue

$$ds^2 = e^{2f(r)} e^{2g(t)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.26)$$

dessa forma é possível redefinir a coordenada temporal tal que $dt \rightarrow e^{g(t)} dt$, tornando a métrica anterior da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2f(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.27)$$

onde mais nenhum termo possui dependência temporal.

Aqui vale a pena parar e notar o que este resultado representa. Mesmo que a hipótese da estaticidade fosse descartada desde o início, ainda se chegaria em (3.27), que necessariamente resultaria na solução (3.16). Assim é possível enunciar o **teorema de Birkhoff** da seguinte forma: *qualquer solução das equações de Einstein no vácuo de um espaço-tempo simetricamente esférico e assintoticamente plano é, obrigatoriamente, estática e univocamente dada pela métrica de Schwarzschild.*

Este teorema implica que se um objeto, estático e esfericamente simétrico, estiver em equilíbrio instável e sofrer uma perturbação simetricamente esférica fazendo-o colapsar radialmente (como uma super nova, por exemplo), a métrica externa ainda será dada por Schwarzschild. Também pode ser visto como análogo ao fato de a lei de Coulomb ser a única solução esfericamente simétrica das equações de Maxwell no vácuo.

3.1.2 Singularidades

Diretamente olhando para (3.16) pode-se ver que existem dois pontos onde a métrica diverge: em $r = 0$ e $r = 2GM$. Porém, as componentes da métrica são dependentes do sistema de coordenadas adotado, então é plausível pensar que na verdade algumas dessas singularidades seja uma simples má escolha de coordenadas. Pode-se interpretar que quando a curvatura diverge, se torna infinita, cria-se um 'buraco' na variedade, tornando essa região mal definida e este fato independe do sistema de coordenadas utilizado. Sendo assim, será utilizado escalares de curvatura para definir singularidades nos espaços-tempos, pois eles não dependem do sistema de coordenadas considerado.

Pode-se construir uma variedade de escalares derivados do tensor de Riemann, o mais simples é o próprio escalar de Ricci. Entretanto ele já é obrigatoriamente zero para qualquer solução no vácuo, como visto em (3.2), então é necessário analisar algum outro escalar. É importante lembrar que não basta o ponto não divergir em somente um escalar, não pode ocorrer em nenhum escalar de curvatura ou, necessariamente, a singularidade não é de coordenadas. Por simplicidade, será mostrado somente o segundo escalar mais comum, o **escalar de Kretschmann**, definido da seguinte forma

$$\mathcal{K} \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.28)$$

quando calculado para a métrica de Schwarzschild, possui o seguinte resultado

$$\mathcal{K} = \frac{48G^2M^2}{r^6}. \quad (3.29)$$

Ele também pode ser calculado pela forma de suas componentes, dados por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= 4(K_1^2 + 2K_2^2 + 2K_3^2 + K_4^2) \\
 K_1 &= -R_{tr}{}^{tr}, \\
 K_2 &= -R_{t\theta}{}^{t\theta} = -R_{t\phi}{}^{t\phi}, \\
 K_3 &= -R_{r\theta}{}^{r\theta} = -R_{r\phi}{}^{r\phi}, \\
 K_4 &= -R_{\theta\phi}{}^{\theta\phi}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Claramente $r = 0$ é um ponto divergente, ele recebe o nome de **singularidade real** ou **física**. Já o ponto $r = 2GM$ não apresenta problema algum e é nomeado como **singularidade aparente** ou **de coordenadas**, que no caso da métrica de Schwarzschild, como será visto adiante, esta região coincide com o **horizonte de eventos**¹.

As referências [32] e [3] deixam claro que a definição de singularidades não é tão trivial. Em contraste com as outras teorias físicas, as quais assumem *a priori* a variedade e a métrica, tornando possível a identificação de 'onde e quando' um evento ocorreu no espaço-tempo, a relatividade geral busca a própria estrutura do espaço-tempo, composta pela variedade e a métrica. Então a singularidade da solução de Schwarzschild não é considerada parte da variedade, ou seja, não é um 'lugar' ou possui um 'tempo'.

Embora algum embasamento teórico mais profundo já exista, como os teoremas de singularidade de Penrose-Hawking [33], neste trabalho será considerado singularidades as regiões que divergem nos escalares de curvatura, como foi discutido previamente.

Singularidades nuas

A solução que foi estudada até então apresenta a existência de uma singularidade no centro coberta pelo horizonte de eventos, isto é, um observador fora da região do horizonte nunca pode ver o que há dentro, a singularidade. Entretanto, soluções de relatividade geral para buracos negros carregados (solução de Reissner-Nordström) ou girando (solução de Kerr), em alguns casos, mostram uma singularidade que não apresentam essa característica, implicando que um observador poderia ver essa singularidade à distância. Daí o nome **singularidades nuas**.

Em 1969, Roger Penrose discute mais abertamente esse problema [34] dizendo até que 'talvez seja a pergunta mais fundamental não respondida pela teoria do colapso relativístico: existe uma **'censura cósmica'** que proíbe a existência de singularidades nuas (...)'. Mesmo que não de uma maneira muito formal, foi enunciada a **conjectura da censura cósmica** dizendo que não deve existir singularidades nuas em objetos reais.

Nos dois casos citados a cima é natural assumir que a solução é não-física, pois necessitaria um buraco negro carregado onde $Q > M$ ou girando de tal maneira que $J > M$, ou seja, a maior parte da energia do buraco provém da energia do campo elétrico ou de rotação, que é no mínimo estranho. Uma forma fácil de resolver esse problema é dizer que num colapso gravitacional real esse tipo de solução não deva aparecer [2] e a conjectura estaria se mostrando correta.

¹Bom notar que está se falando de 'ponto' aqui pois se está imaginando uma linha com θ e ϕ constantes só deixando o raio r variar, mas o mais correto seria pensar em uma hiper-superfície para $r = 2GM$.

O problema é que existem casos onde singularidades nuas aparecem de maneiras mais plausíveis fisicamente [35]. Exemplo disso é descrito por um buraco negro inicialmente regular que evolui para uma singularidade nua com o acréscimo de um fluido eletricamente carregado [36]. Um segundo exemplo ocorre onde uma estrela esfericamente simétrica, porém com a região externa não sendo considerada vácuo devido a radiação que ela emite, desenvolve a singularidade nua quando o colapso gravitacional ocorre de forma mais lenta [37].

É importante ressaltar que a conjectura de Penrose continua não provada sendo muito debatida na literatura.

3.1.3 Horizonte de eventos

Já foi mostrado que $r = 2Gm$ não representa uma singularidade real, mas sim de coordenadas, porém não foi explorado o que de fato ela representa. Por direta análise da métrica (3.16) vê-se que sua assinatura muda de $(+ - - -)$ para $(- + - -)$ quando $r < 2Gm$, ou seja, a coordenada temporal torna-se radial, e vice-versa. Sendo assim, já fica claro que regiões com naturezas diferentes são divididas por este raio.

Para estudar a estrutura causal deste espaço-tempo, calcula-se as curvas radiais nulas para θ e ϕ constantes

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (3.31)$$

algebricamente manipulado para obter

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} = \pm \left(\frac{r}{r - 2Gm}\right). \quad (3.32)$$

A equação (3.32) mede a inclinação dos eixos dos cones de luz em um plano t - r . À longas distâncias, tem-se

$$r \rightarrow \infty, \quad \text{então} \quad \frac{dt}{dr} \rightarrow \pm 1, \quad (3.33)$$

caracterizando uma angulação de 45° entre os eixos dos cones de luz, que é uma propriedade do espaço-tempo de Minkowski. Então, como esperado, muito longe do objeto o observador está localizado em um espaço plano. Entretanto,

$$r \rightarrow 2Gm, \quad \text{então} \quad \frac{dt}{dr} \rightarrow \pm \infty, \quad (3.34)$$

que pode ser interpretado como os cones de luz se fechando ao se aproximar desta região (figura 3.1). Ou seja, nesse sistema de coordenadas aparenta que um observador nunca conseguiria atravessar a superfície delimitada por $r = 2Gm$ por conta desta divergência.

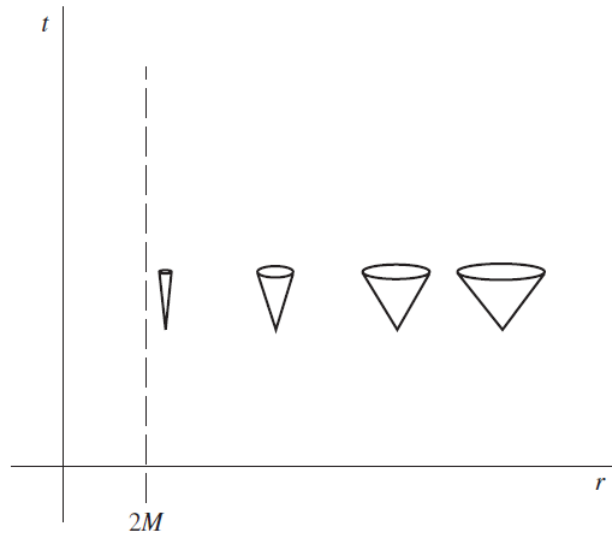


Figura 3.1: Diagrama demonstrando os cones de luz fechando-se ao se aproximarem de $r = 2Gm$. **Fonte:** Figura 11.10 da referência [1].

Já que $r = 2Gm$ não representa uma singularidade real, é desejável escrever a métrica de Schwarzschild em um outro sistema de coordenadas onde é possível fazer a transição para além desta região de forma suave. Para isso resolve-se a equação (3.32) obtendo

$$t = \pm \left[r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \right] + C, \quad (3.35)$$

tal que C é a constante de integração. Isto é útil pois agora a relação (3.32) torna-se

$$\frac{dt}{dr^*} = 1, \quad (3.36)$$

onde definiu-se a **coordenada tartaruga** como

$$r^* \equiv r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right). \quad (3.37)$$

Nessa nova definição de coordenadas, a relação (3.35) torna-se muito mais clara

$$t = \pm r^* + C. \quad (3.38)$$

Na equação (3.38), quando escolhe-se o sinal positivo é uma geodésica radial nula de saída e com o sinal negativo de entrada. Em termos dessa nova coordenada a métrica pode ser exposta da seguinte maneira

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) (dt^2 - dr^{*2}) - r^2 d\Omega^2, \quad (3.39)$$

onde claramente r depende de r^* implicitamente. Neste sistema de coordenadas quando

$$r \rightarrow 2Gm, \quad \text{tem-se} \quad r^* \rightarrow -\infty, \quad (3.40)$$

ou seja, ainda não é possível fazer a travessia para o outro lado do raio de Schwarzschild.

Mais uma mudança de coordenadas é feita

$$v = t + r^*, \quad (3.41)$$

transformando a métrica em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2. \quad (3.42)$$

Este novo sistema de coordenadas chama-se **coordenadas de entrada de Eddington-Finkelstein** e são definidas de tal forma para que v seja constante ao longo de geodésicas radiais nulas de entrada devido à equação (3.38).

Finalmente consegue-se ultrapassar a região problemática de $r = 2GM$ mas com um porém, os cones de luz estão se fechando e inclinando na direção da singularidade pois

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, & \text{(entrada)} \\ 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, & \text{(saída)} \end{cases} \quad (3.43)$$

que levam ao gráfico 3.2. Então, o fato de nem a luz conseguir fugir de dentro desta região está intrinsecamente ligado à estrutura causal da métrica que faz todo futuro possível de qualquer trajetória tipo-tempo, para partículas massivas, ou tipo-luz, para partículas não massivas, estar fadado à chegar em $r = 0$. É isto que está por trás da mudança de natureza das coordenadas t e r quando se atravessa o raio de Schwarzschild. Somente agora pode-se deixar explícito o motivo dessa região se chamar de **horizonte de eventos**: esta hiper-superfície representa a fronteira de todos os eventos que podem ser observados por um observador externo.

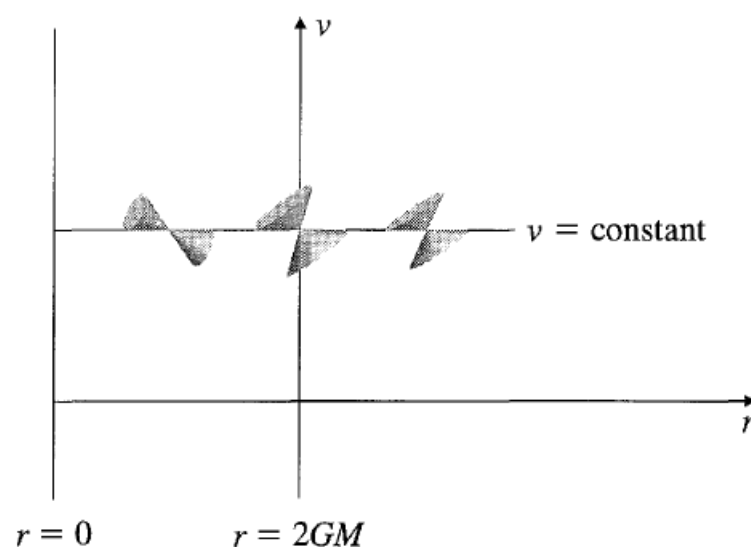


Figura 3.2: Gráfico nas coordenadas de Eddington-Finkelstein demonstrando os cones de luz se direcionando, e fechando, à singularidade. **Fonte:** Figura 5.10 da referência [2].

3.1.4 Extensão máxima

Com todas essas mudanças de coordenadas feitas até então, conseguiu-se descrever a métrica de Schwarzschild para todo o r , mas isso não quer dizer que seja o sistema de coordenadas que cubra toda a variedade. **Kruskal** e **Szekeres**, [38], conseguiram obter tal coordenada dada pela seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \\ R &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora a variável $r(T, R)$ é definida implicitamente pela seguinte expressão

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}, \quad (3.45)$$

fazendo a métrica (3.16) tornar-se

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (dT^2 - dR^2) - r^2 d\Omega^2, \quad (3.46)$$

que claramente só possui divergência em $r = 0$.

Nesse sistema de coordenadas é possível notar que existem não duas, mas sim quatro regiões disponíveis, como segue-se na figura seguinte

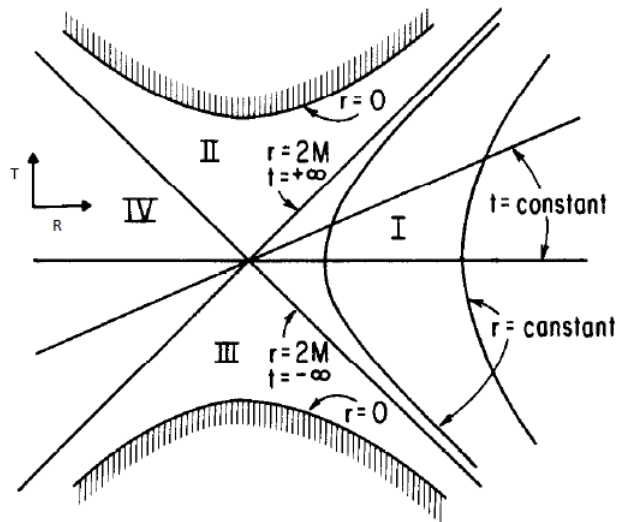


Figura 3.3: Diagrama representando o espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal. **Fonte:** Figura 6.9 da referência [3].

A região I é claramente o espaço-tempo de Minkowski, totalmente plano, isso quer dizer que o observador nesta região não atravessou o horizonte de eventos, com $r > 2GM$. Já na região II qualquer linha de mundo do tipo-luz necessariamente chegará na singularidade em $r = 0$, impossível sair dessa região após entrar nela, então ela representa observadores que ultrapassaram o raio de Schwarzschild e estão fadados a cair na singularidade. A região III apresenta características um pouco exóticas. Qualquer observador que está dentro desta região precisa ter nascido lá,

pois é impossível a entrada para qualquer observador localizado em outra região, além de obrigatoriamente ser expelido. Assim, pode-se ver que esta região é o oposto temporal da região **II**, o oposto do buraco negro, daí o nome **buraco branco**. A região **IV** seria um outro universo com a estrutura de Minkowski, porém totalmente inacessível para qualquer um que esteja na região **I**.

A extensão máxima é um artifício matemático para poder cobrir toda variedade de Schwarzschild. Como o buraco negro é consequência do colapso gravitacional de uma estrela, é plausível considerar que as regiões **III** e **IV**, que não apresentam uma realidade física, devam desaparecer durante o surgimento do buraco negro.

3.2 Diagrama de Carter-Penrose

O diagrama de Kruskal simplifica muito a compreensão da estrutura causal da solução como um todo. Entretanto, para a análise de métricas mais complexas, é útil construir um diagrama onde toda a solução está confinada em uma região finita. Este diagrama é chamado de **diagrama de Carter-Penrose**, devido aos trabalhos independentes ([39] e [40]) feito por ambos pesquisadores nos anos 60.

Para exemplificação, pode-se considerar a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas da seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.47)$$

Aqui já é claro que os cones de luz possuem 45° em todo o espaço. Evidentemente tem-se os seguintes intervalos para as coordenadas temporal e radial $-\infty < t < \infty$ e $0 < r < \infty$.

Muito similar à mudança de coordenadas feita em (3.41) faz-se

$$u = t - r, \quad v = t + r, \quad (3.48)$$

para se obter coordenadas do tipo nulas, onde os intervalos para as novas coordenadas mudaram, tais que $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$ e $u \leq v$. Nessa coordenada o raio esférico é dado por $r = \frac{1}{2}(v - u)$ e a métrica torna-se

$$ds^2 = dudv - \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2. \quad (3.49)$$

Para trazer os infinitos à pontos finitos, usa-se a função arco-tangente

$$U = \arctan u, \quad V = \arctan v, \quad (3.50)$$

tal que seus intervalos agora estão limitados por $-\pi/2 < U < \pi/2$ e $-\pi/2 < V < \pi/2$ onde $U \leq V$. Nessa nova coordenada tem-se as seguintes relações

$$dudv = \frac{2dUdV}{\cos^2 U \cos^2 V}, \quad (v - u)^2 = \frac{\sin^2(V - U)}{\cos^2 U \cos^2 V}, \quad (3.51)$$

transformando a métrica (3.49) em

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} (4dUdV - \sin^2(V - U)d\Omega^2). \quad (3.52)$$

Assim a métrica já foi colocada em uma forma um tanto sugestiva, mas pode ser ainda mais simplificada fazendo

$$T = V + U, \quad R = V - U, \quad (3.53)$$

agora com os intervalos dessa nova coordenada sendo $0 \leq R < \pi$ e $|T| + R < \pi$. E a métrica é escrita da seguinte maneira

$$ds^2 = \omega^2(T, R)(dT^2 - dR^2 - \sin^2 R d\Omega^2), \quad (3.54)$$

definindo

$$\omega^2 \equiv (\cos T + \cos R)^{-2}. \quad (3.55)$$

Para fazer uma análise, escreve-se as coordenadas (T, R) em termos de (t, r)

$$T = \arctan(t + r) + \arctan(t - r), \quad R = \arctan(t + r) - \arctan(t - r), \quad (3.56)$$

então os seguintes limites podem ser vistos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} T &= \lim_{r \rightarrow \infty} R = \pi, & \lim_{r \rightarrow \infty} T &= \lim_{t \rightarrow \infty} R = 0, \\ \lim_{r \rightarrow -\infty} T &= \lim_{t \rightarrow -\infty} R = 0, & \lim_{t \rightarrow 0} T &= \lim_{r \rightarrow 0} R = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} T &= -\pi, & & \end{aligned}$$

deixando claro que nessas coordenadas os intervalos estão todos delimitados por uma região triangular. Com isso é possível fazer o diagrama de Carter-Penrose, como segue na figura 3.4.

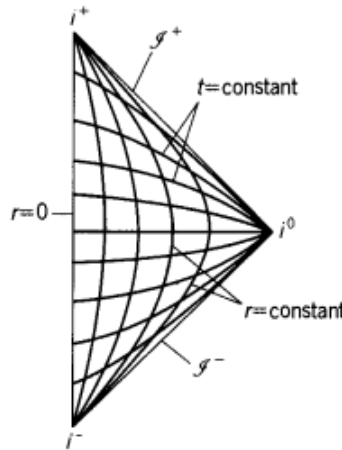


Figura 3.4: Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo plano de Minkowski. **Fonte:** Figura 17.9 da referência [4].

Nele, fica claro que novos nomes foram dados à certas regiões

- $i^0 = \text{infinito espacial}$: é um ponto onde todas as linhas tipo-espaço se originam e se encontram no futuro infinito,
- $i^+/i^- = \text{futuro/passado infinito temporal}$: também são pontos, porém agora indicando onde linhas tipo-tempo se encontraram no passado infinito ou se encontrarão no futuro temporal,

- $\mathcal{G}^+/\mathcal{G}^- = \text{futuro/passado nulos}$: não são mais pontos, mas sim linhas (mais especificamente hiper-superfícies) nulas. Todas as geodésicas nulas começam em \mathcal{G}^- e terminam em \mathcal{G}^+ .

Além da facilidade de ver todo espaço-tempo contido em um plano, os diagramas de Carter-Penrose possuem uma outra propriedade útil: eles mantêm toda estrutura causal da métrica. Isso não é mera coincidência, a equação (3.54) mostrou que a métrica pôde ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = \omega^2 d\tilde{s}^2, \tag{3.57}$$

o que caracteriza uma **transformação conforme**, a qual sempre possui essa propriedade, onde ω^2 é chamado de **fator conforme**². Com isso esse diagrama também pode ser chamado de **diagrama conforme**.

Um processo muito similar à esse, com as mesmas mudanças de variáveis inclusive, pode ser feito com a métrica Schwarzschild, utilizando as coordenadas de Kruskal, para obter a figura 3.5.

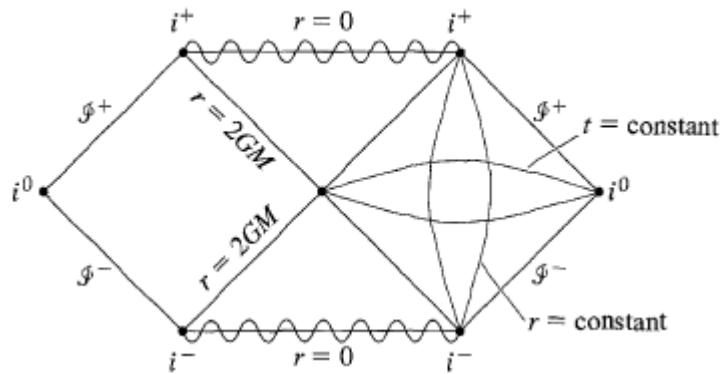


Figura 3.5: Diagrama de Carter-Penrose para a métrica de Schwarzschild. **Fonte:** Figura 5.16 da referência [2].

Como discutido na seção anterior, as 4 regiões da extensão máxima de Kruskal estão presentes neste diagrama, porém delimitados em um plano finito.

Esse procedimento será muito necessário mais à frente onde outros diagramas serão feitos para métricas ainda mais complexas.

3.3 Gravidade superficial e a temperatura de um buraco negro

A **gravidade superficial** é a medida da aceleração de uma partícula na região do horizonte de eventos. Classicamente, na mecânica Newtoniana, ela é representada pela letra g , aqui será utilizada como K .

Para um buraco negro estático qualquer, ela pode ser calculada com a seguinte fórmula [41]

$$K = \frac{1}{2} \partial_r g_{tt} \sqrt{-g^{tt} g^{rr}} \Big|_{r_{\text{horizonte}}}, \tag{3.58}$$

²Mais detalhes no apêndice A.

que para a métrica de Schwarzschild, sob a superfície do horizonte de eventos, é dado por

$$K = \frac{1}{4GM}. \quad (3.59)$$

Isto é, a aceleração que uma partícula teste sofre no horizonte de eventos é constante e inversamente proporcional à massa do buraco negro.

Já a área desta região é dada pela seguinte fórmula, como enunciada em [42],

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}d\phi, \quad (3.60)$$

que mais uma vez, para o caso de Schwarzschild, tem-se

$$A = 16\pi G^2 M^2. \quad (3.61)$$

Onde facilmente é visto que a área do horizonte de eventos do buraco negro é diretamente proporcional à sua massa.

Para a surpresa de todos, Hawking mostra [43] que utilizando a teoria quântica de campos em espaços-curvos na métrica de Schwarzschild, devido à criação e aniquilação de pares partículas e anti-partículas próximo ao horizonte, obtém-se uma radiação relacionada ao buraco negro que pode ser observada. Esta radiação, que ainda não foi detectada experimentalmente, é chamada de **radiação Hawking**. Neste mesmo trabalho ele consegue uma expressão para a temperatura do buraco negro dada por

$$T = \frac{\hbar K}{2\pi k_{BC}}. \quad (3.62)$$

Com esta fórmula e (3.59) vê-se que a temperatura de um buraco negro aumenta com o decréscimo de sua massa total. Isso deu muito suporte ao desenvolvimento teórico elaborado por Bekenstein e Hawking um pouco antes sobre as leis da termodinâmica dos buracos negros, onde já haviam indícios que a temperatura do buraco negro e a área do seu horizonte de eventos deveriam estar relacionadas de alguma maneira [44].

Capítulo 4

Buraco Negro em Teorias Escalares-Tensoriais

4.1 Buraco negro na teoria de Brans-Dicke

Theodor Kaluza publica em 1921 um estudo da relatividade geral com uma dimensão espacial a mais, ou seja um espaço-tempo de 5 dimensões, na tentativa de uma teoria que unificasse a gravitação com o eletromagnetismo [45]. Devido a simetria do tensor métrico, ele agora possui 15 componentes independentes. Kaluza chega em uma solução e nota que 10 dessas componentes são da própria gravitação quadri-dimensional einsteiniana, 4 são identificados como o potencial vetor e escalar do eletromagnetismo e na última componente aparece um termo que depende da constante gravitacional G , dando uma primeira suspeita de que ela deva variar [46].

A questão sobre não se observar a quinta dimensão era colocada de lado, e Kaluza simplesmente exigia que todas as derivadas com respeito à coordenada da quinta dimensão fossem nulas¹. Isto é, por condições desconhecidas, a física acontece em uma hipersuperfície 4D dentro de um universo mais geral 5D.

Logo em seguida em 1926, Klein ajuda a resolver um pouco o problema tendo a idéia de compactificar esta dimensão a mais [47]. Essa teoria é atualmente denominada **gravitação** ou **teoria de Kaluza-Klein**² [48].

Na década seguinte, mais exatamente em 1937, Dirac [49] nota uma certa coincidência no valor da composição de certas constantes fundamentais³. Uma das formas que isso pode ser mostrado é da seguinte maneira [50]

$$\frac{c^2}{G} \approx \frac{M_u}{R_u}, \quad (4.1)$$

tal que R_u e M_u são o raio e a massa do universo observável respectivamente. Isto, mais uma vez aponta na direção que G não é uma constante universal como se pensava.

Então, em 1945, Jordan trabalha na teoria de Kaluza-Klein a re-interpretando como um espaço-tempo quadri-dimensional e que é devido à um outro campo escalar que

¹Atualmente esta condição se chama 'condição cilíndrica'.

²O termo 'teoria de Kaluza-Klein' deveria ser utilizado somente para modelos onde assume-se a condição cilíndrica e dimensão compactificada. Porém popularizou-se utilizar o termo para qualquer teoria de dimensões superiores sejam as dimensões extras reais ou compactificadas.

³Atualmente conhecido como 'coincidência dos grandes números'.

a constante de Newton sofre variação [51]. Ou seja, pela equação anterior, começa a se procurar por algo como

$$\square\phi \approx \rho. \quad (4.2)$$

Em outras palavras, $1/G$ pode ser a própria variável que satisfaz uma equação de campo onde a massa é a fonte.

Como a presença de campos vetoriais não-massivos, campos elétricos e magnéticos, não impedem a existência de buracos negros, vide solução de Reissner-Nordström e Kerr-Newman, fica claro que faz sentido estudar também buracos negros com um campo escalar ϕ adicional.

4.1.1 Equações de campo

Re-interpretando $1/G = \phi$ na densidade de lagrangiana de Einstein-Hilbert (2.18)

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} (\phi R + L_\phi(\phi, \partial_\mu\phi)) \right], \quad (4.3)$$

onde L_ϕ , que é a lagrangiana devido ao campo ϕ , foi adicionada pois deseja-se obter uma equação de campo para ϕ também e foi considerado $L_m = 0$ pois procura-se uma solução de vácuo. É natural buscar uma equação que seja de segunda ordem, por isso deve depender de sua derivada.

Visto que ϕ é um campo escalar, aparenta natural escolher

$$L_\phi = \omega \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi, \quad (4.4)$$

que resultaria em uma equação de onda para ϕ com R sendo a fonte. Entretanto a constante de separação ω , que é chamada de **constante de Brans-Dicke**, precisaria ter as mesmas dimensões de G , que é exatamente o que a teoria deseja substituir. Desta maneira força-se que esta nova constante seja adimensional e a forma mais simples de implementar isso é fazendo a seguinte escolha

$$L_\phi = \omega \frac{\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi}{\phi}, \quad (4.5)$$

e com isso é possível definir a **densidade de lagrangiana de Brans-Dicke** por

$$\mathcal{L}_{BD}^{(I)} = \sqrt{-g} \left[\phi R + \omega \frac{\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi}{\phi} \right]. \quad (4.6)$$

Já sabe-se que a gravidade é acoplada com toda física, isto é, não há algo que não sofra interação gravitacional. Então com o acoplamento direto do campo escalar com a geometria, ϕR , pode-se dizer que em algum sentido ϕ também é universalmente acoplado [46].

A lagrangiana anterior está descrita no **referencial conforme de Jordan** e ela pode ser simplificada indo para o **referencial conforme de Einstein**, onde o termo ϕR se separa facilitando a resolução das equações. Após efetuada a transformação, a densidade de lagrangiana torna-se⁴

$$\mathcal{L}_{BD}^{(E)} = \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{R} + \epsilon \partial_\alpha \tilde{\phi} \partial^\alpha \tilde{\phi}), \quad \epsilon = \text{sign}(\omega + 3/2), \quad (4.7)$$

⁴Para mais detalhes, ver o apêndice A

de tal forma que o campo escalar foi redefinido da seguinte maneira

$$\tilde{\phi} \rightarrow \sqrt{\frac{3+2\omega}{2}} \ln \phi. \quad (4.8)$$

Então $\epsilon = \pm 1$, quando possui sinal negativo tem-se o chamado **campo fantasma**⁵.

Como feito para as equações de Einstein, agora é necessário adquirir as equações de campo derivadas da lagrangiana (4.7). Primeiramente faz-se a variação da ação para o campo métrico $g^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} (R + \epsilon \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \sqrt{-g} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \epsilon \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \right] d^4x. \quad (4.9)$$

Mais uma vez utiliza-se as relações (2.20) e aplica-se o princípio da mínima ação para obter

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{\epsilon}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + \epsilon \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] d^4x = 0. \quad (4.10)$$

O traço do integrando anterior é

$$R = -\epsilon \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi, \quad (4.11)$$

que é substituído de volta em (4.10) para se adquirir a equação de movimento do campo $g_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = -\epsilon \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.12)$$

Efetuando a variação (4.7) em relação ao campo escalar ϕ , o único termo que depende dele é

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \epsilon \int \left[\frac{\delta (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi)}{\delta \phi} \right] d^4x = 0, \quad (4.13)$$

$$= \epsilon \int \left[\frac{\delta \partial_\alpha (\phi \partial^\alpha \phi)}{\delta \phi} - \frac{\delta \phi}{\delta \phi} \square \phi \right] d^4x = 0. \quad (4.14)$$

O primeiro termo da equação anterior é um termo de fronteira, assim pelo teorema de Stokes ele torna-se zero. Com isso a equação do campo escalar é dada por

$$\square \phi = 0. \quad (4.15)$$

Nota-se que (4.15) é uma equação do tipo **Klein-Gordon** não-massiva.

4.1.2 Campos fantasmas

Observações mostram que a expansão acelerada do universo é causada devido um tipo de energia peculiar, energia escura. Uma forma consistente de descrever isso é utilizando campos escalares auto-interagentes com energia cinética negativa, escalares fantasmas [52], que para soluções estáticas e simetricamente esféricas na teoria de Brans-Dicke, as soluções adquiridas são do tipo **anti-Fisher**, como serão devidamente apresentadas. Tal descrição viola todas as condições de energia, mas a

⁵O tilde, marcando o referencial de Einstein, será suprimido de todas as componentes daqui em diante.

possibilidade de que matéria fantasma esteja ligada de alguma forma com o nosso universo atual deve ser levada à sério ([53]-[54]).

Existem outras razões teóricas para aceitar esse tipo de campo, visto que eles aparecem naturalmente em alguns modelos de teoria das cordas, super-gravidade e teoria com mais de 11 dimensões como teoria-F e em algumas teorias de Kaluza-Klein [26].

Classicamente, campos fantasmas apresentam problemas quando um campo fantasma (clássico) interage com outro campo (clássico) usual, causando instabilidades tais que seria possível ceder energia arbitrariamente alta à qualquer outro campo. Porém esta instabilidade desaparece quando o potencial de interação é nulo [55]. Já no regime quântico, essa possível troca desenfreada de energia desencadearia a criação de pares partículas e anti-partículas de maneira descontrolada, o qual nunca foi observado causando uma séria dúvida sobre a existência desse tipo de campo. Assim, uma possível forma de desviar deste problema, seria supor que o campo escalar possa ser considerado um campo efetivo vindo de uma teoria com energia positiva ([52]-[56]-[57]).

A maior objeção contra campos fantasmas é que um campo com energia cinética negativa pode produzir partículas e anti-partículas de forma desencadeada de acordo com a teoria quântica de campos, entretanto nada disso foi observado até então, o que causa uma séria dúvida sobre a existência deles. Assim, uma possível forma de desviar deste problema, seria supor que o campo escalar possa ser considerado um campo efetivo vindo de uma teoria com energia positiva ([52],[56] e [57]).

Mesmo que os campos fantasmas não sejam um objeto teórico bem compreendido ainda, eles são importantes pois podem levar a modelos ou previsões de interesse que possam ser obtidos posteriormente de maneira menos exótica.

4.1.3 Soluções de buraco negro

Com as duas equações de campo obtidas, (4.12) e (4.15), resta escrever as equações de movimento. Visto que o objetivo é estudar buracos negros utiliza-se a métrica estática e esfericamente simétrica dada por

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)} dt^2 - e^{2\alpha(u)} du^2 - e^{2\beta(u)} d\Omega^2, \quad (4.16)$$

tem-se suas equações de movimento, aplicando (4.12) e (4.15), da seguinte forma

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.17)$$

$$-e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.18)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.19)$$

$$\phi'' - \phi'(\alpha' - 2\beta' - \gamma') = 0, \quad (4.20)$$

onde a variável com linha denota a derivada em relação a coordenada radial u . As equações (4.17 - 4.20) são de difícil resolução da forma que estão apresentadas, para ajudar lembra-se que existe uma liberdade de calibre. Neste caso escolhe-se o calibre harmônico onde existe a seguinte relação entre as coordenadas

$$\alpha(u) = \gamma(u) + 2\beta(u). \quad (4.21)$$

Sendo assim o sistema de equações anteriores torna-se

$$e^{2(\gamma+\beta)} + \beta'(\beta' + 2\gamma') - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.22)$$

$$-e^{2(\gamma+\beta)} + \beta'(\beta' + 2\gamma') = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.23)$$

$$-\beta'(\beta' + 2\gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi'^2, \quad (4.24)$$

$$\phi'' = 0. \quad (4.25)$$

Facilmente (4.25) pode ser integrada duas vezes para obter o comportamento do campo escalar

$$\phi = Au + \phi_0, \quad (4.26)$$

com A e ϕ_0 sendo as duas constantes de integração.

Somando (4.22) com (4.24), tem-se

$$\beta'' - \gamma'' = e^{2(\gamma+\beta)}, \quad (4.27)$$

e subtraindo (4.22) de (4.23) a seguinte relação é obtida

$$\beta'' = e^{2(\beta+\gamma)}. \quad (4.28)$$

Utilizando (4.28) em (4.27)

$$\gamma'' = 0, \quad (4.29)$$

que pode ser resolvida para obter

$$\gamma = Bu + \gamma_0. \quad (4.30)$$

Utilizando a equação (4.28) com (4.29), a seguinte expressão é obtida

$$(\beta + \gamma)'' = e^{2(\beta+\gamma)}, \quad (4.31)$$

a qual pode se fazer a seguinte substituição de variáveis

$$x = \beta + \gamma, \quad (4.32)$$

e a equação pode ser desenvolvida como se segue,

$$x'' = e^{2x}, \quad (4.33)$$

$$x''x' = e^{2x}x', \quad (4.34)$$

$$\partial_u \left(\frac{x'^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \partial_u e^{2x}, \quad (4.35)$$

que integrando, com k^2 sendo a constante de integração, resulta

$$x'^2 - e^{2x} = k^2. \quad (4.36)$$

É necessário resolver essa equação diferencial para os três valores diferentes da constante k^2 , quando $k^2 = 0$, $k^2 > 0$ e $k^2 < 0$, os quais serão desenvolvidos separadamente à seguir.

i) $k^2 = 0$

Neste caso a equação é desenvolvida da seguinte maneira

$$x' = e^x, \quad (4.37)$$

$$e^{-x} dx = du, \quad (4.38)$$

que integrando resulta em

$$x(u) = -\ln[-(u + C)]. \quad (4.39)$$

Como u é a coordenada radial e C é só uma constante de integração, é possível redefinir uma nova coordenada radial que é simplesmente transladada por C e no sentido oposto, isto é, $\tilde{u} = -(u + C)$. Porém, por simples notação, essa nova coordenada será chamada, de novo, de u , ou seja

$$x(u) = -\ln(u) \quad (4.40)$$

ou, de uma forma mais sugestiva

$$e^{-x} = e^{-(\beta+\gamma)} = u. \quad (4.41)$$

Como já se conhece o comportamento de γ pela relação (4.30), escreve-se

$$e^{2\alpha} = \frac{e^{-2\gamma}}{u^4}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{-2\gamma}}{u^2}. \quad (4.42)$$

ii) $k^2 > 0$

A equação diferencial, é re-escrita como

$$x' = \sqrt{k^2 + e^{2x}}, \quad (4.43)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{e^{2x}}{k^2}}} = k du. \quad (4.44)$$

Assim, faz-se a seguinte mudança de variáveis

$$v = \frac{e^x}{k} \quad \text{logo,} \quad dv = v dx, \quad (4.45)$$

fazendo (4.44) se simplificar da seguinte forma

$$\frac{dv}{v\sqrt{1 + v^2}} = k du. \quad (4.46)$$

Mais uma substituição de variáveis é necessária,

$$v = \sinh \theta \quad \text{logo,} \quad dv = \cosh \theta d\theta \quad (4.47)$$

tornando (4.46) em

$$\int \frac{d\theta}{\sinh \theta} = k \int du, \quad (4.48)$$

$$\ln \left[\tanh \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] = k(u + C), \quad (4.49)$$

$$\tanh \left(\frac{\theta}{2} \right) = e^{k(u+C)}. \quad (4.50)$$

Lembrando da seguinte relação trigonométrica hiperbólica,

$$\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta}, \quad (4.51)$$

continua-se o desenvolvimento de (4.50),

$$\frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta} = e^{k(u+C)}, \quad (4.52)$$

$$\sinh \theta = e^{k(u+C)} + e^{k(u+C)} \cosh \theta, \quad (4.53)$$

$$e^{k(u+C)} \cosh \theta = \sinh \theta - e^{k(u+C)}, \quad (4.54)$$

$$e^{2k(u+C)} \cosh^2 \theta = \sinh^2 \theta + e^{2k(u+C)} - 2e^{k(u+C)} \sinh \theta, \quad (4.55)$$

no termo da esquerda utiliza-se

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1, \quad (4.56)$$

isto é,

$$e^{2k(u+C)} + e^{2k(u+C)} \sinh^2 \theta = \sinh^2 \theta + e^{2k(u+C)} - 2e^{k(u+C)} \sinh \theta, \quad (4.57)$$

$$e^{2k(u+C)} \sinh \theta = \sinh \theta - 2e^{k(u+C)}, \quad (4.58)$$

$$\sinh \theta = -\frac{2e^{k(u+C)}}{e^{2k(u+C)} - 1}, \quad (4.59)$$

$$\sinh \theta = -\frac{1}{\sinh [k(u+C)]}. \quad (4.60)$$

Voltando às variáveis originais com (4.45) e (4.47),

$$e^{-(\beta+\gamma)} = e^{-x} = -\frac{\sinh [k(u+C)]}{k} = \frac{\sinh [-k(u+C)]}{k}. \quad (4.61)$$

Como feito no caso anterior, redefine-se a coordenada radial $\tilde{u} = -(u+C)$ que por notação será chamada, mais uma vez, de u . Então

$$e^{-(\beta+\gamma)} = e^{-x} = k^{-1} \sinh [ku]. \quad (4.62)$$

Mais uma vez, calcula-se as seguintes relações

$$e^{2\alpha} = \frac{e^{-2\gamma} k^4}{\sinh^4(ku)}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{-2\gamma} k^2}{\sinh^2(ku)}. \quad (4.63)$$

iii) $k^2 < 0$

A equação diferencial é re-escrita como

$$x' = \sqrt{-k^2 + e^{2x}}, \quad (4.64)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - k^2}} \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}} \right) = du, \quad (4.65)$$

$$\frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1 - k^2 e^{-2x}}} = du. \quad (4.66)$$

Faz-se a seguinte mudança de variáveis

$$v = ke^{-x}, \quad \text{logo,} \quad dv = -vdx, \quad (4.67)$$

tornando (4.66)

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = -kdu. \quad (4.68)$$

Mais uma substituição de variáveis é feita

$$v = \sin \theta, \quad \text{logo,} \quad dv = \cos \theta d\theta, \quad (4.69)$$

que então torna (4.68) em

$$\int d\theta = -k \int du, \quad (4.70)$$

$$\theta = -k(u + C), \quad (4.71)$$

onde foi utilizado $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Voltando às variáveis originais utilizando (4.67) e (4.69)

$$\arcsin(ke^{-x}) = -k(u + C), \quad (4.72)$$

$$e^{-x} = \frac{\sin[-k(u + C)]}{k}. \quad (4.73)$$

Pela mesma redefinição da coordenada radial u feito anteriormente

$$e^{-(\beta+\gamma)} = e^{-x} = k^{-1} \sin(ku). \quad (4.74)$$

De novo, calcula-se

$$e^{2\alpha} = \frac{e^{-2\gamma} k^4}{\sin^4(ku)}, \quad e^{2\beta} = \frac{e^{-2\gamma} k^2}{\sin^2(ku)}. \quad (4.75)$$

Com os três casos resolvidos, pode-se generalizá-los da seguinte maneira

$$e^{-(\beta+\gamma)} = s(k, u) \equiv \begin{cases} k^{-1} \sinh(ku); & k > 0, \\ u; & k = 0, \\ k^{-1} \sin(ku); & k < 0. \end{cases} \quad (4.76)$$

Ou seja, finalmente pode-se escrever a solução para a métrica (4.16)

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - \frac{e^{-2\gamma}}{s^2(k, u)} \left(\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right). \quad (4.77)$$

Assume-se que $u \geq 0$ tal que $u = 0$ corresponde ao infinito espacial, onde a métrica torna-se assintoticamente plana. Pela equação (4.30) nota-se que toda métrica está sendo multiplicada pela constante $e^{\pm 2\gamma_0}$, sendo assim ela pode ser englobada na redefinição das coordenadas fazendo $e^{\gamma_0} dt \rightarrow dt$, por exemplo. Percebe-se que no infinito espacial, $u \rightarrow 0$, a coordenada u se comporta como $1/r$, ou seja

$$r = e^\beta \approx \frac{1}{u}, \quad (4.78)$$

então a constante B pode ser interpretada como $-GM$, onde M é a massa de Schwarzschild. Dessa forma se redefine

$$b \equiv GM, \quad (4.79)$$

para deixar a métrica da seguinte maneira

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{e^{2bu}}{s^2(k, u)} \left(\frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right). \quad (4.80)$$

Assim, utilizando (4.26) e (4.79) em (4.23), consegue-se a seguinte relação entre as constantes b , k , ϵ e A

$$2k^2 \text{sign} k = 2b^2 + \epsilon A^2. \quad (4.81)$$

Tomando a constante $A \rightarrow 0$ é claramente visto que o campo ϕ torna-se constante por (4.26) e, conseqüentemente, retornaria à equação de Einstein no vácuo sem campo escalar devido à (4.12), fazendo assim a solução retornar à Schwarzschild.

Uma análise mais profunda só é possível especificando o valor de ϵ . Fazendo um paralelo às soluções de de-Sitter e anti de-Sitter, onde a constante cosmológica Λ é considerada positiva ou negativa, respectivamente, tem-se a **solução de Fisher** [58], $\epsilon = +1$, e a **solução de anti-Fisher** [26], $\epsilon = -1$.

Solução de Fisher

De acordo com a equação (4.81), vê-se que só existe solução real para o caso $k > 0$. A componente que acompanha o termo angular, $d\Omega^2$, em (4.80) vai à zero quando $u \rightarrow \infty$, que corresponde a singularidade, isso quer dizer que o horizonte de eventos desaparece e têm-se uma singularidade nua atrativa para $m > 0$ (ou $b > 0$) ou repulsiva no caso em que $m < 0$ (ou $b < 0$).

O único caso possível para a solução de Fisher apresenta singularidade nua. Isso quer dizer que em espaços-tempos esfericamente simétricos com campo escalar sem massa, ϕ não pode ser um campo externo ao buraco negro, isso está intrinsecamente ligado ao **teorema no-hair**⁶ [26]. Mesmo nesse caso, tal configuração é instável ([60] e [24])

Solução de anti-Fisher

Aqui o conjunto de soluções possíveis é muito mais diverso e cada caso será visto separadamente.

i) $k^2 > 0$

Primeiramente faz-se a seguinte aproximação

$$e^{-2kr} = 1 - 2kr, \quad (4.82)$$

e então uma mudança de variáveis

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad dr^2 = \frac{1}{\rho^4} d\rho^2, \quad (4.83)$$

⁶Resumidamente, este teorema diz que qualquer buraco negro é totalmente caracterizado pelo seu momento angular, carga e massa [59].

para definir a função $P(\rho)$ como se segue

$$e^{-2kr} = 1 - \frac{2k}{\rho} \equiv P(\rho). \quad (4.84)$$

Ou seja, é possível notar que essa transformação foi feita para se conseguir uma expressão similar à Schwarzschild, onde poderia se interpretar $k = GM$.

Definindo a constante

$$a \equiv \frac{b}{k} \quad (4.85)$$

nota-se que

$$P^a = e^{-2br} \quad (4.86)$$

assim a métrica (4.80) fica

$$ds^2 = P^a dt^2 - P^{-a} d\rho^2 - P^{1-a} \rho^2 d\Omega^2, \quad (4.87)$$

com a equação do campo escalar (4.26) dada da seguinte forma nessa nova coordenada

$$\phi = -\frac{A}{2k} \ln P. \quad (4.88)$$

No caso $b < 0$, que é o caso de massa negativa, tem-se $a < -1$ e, exatamente como na solução de Fisher, existe uma singularidade repulsiva em $\rho = 2k$.

Entretanto a situação é muito diferente quando $m > 0$, ou $a > 1$. Para $a = 2, 3, \dots$ a métrica apresenta horizontes de ordem a em $\rho = 2k$ e admite continuação para valores menores de ρ . Uma característica importante de tais horizontes é possuir a área do horizonte de eventos infinita. Como visto na seção 3.3, isto indica temperatura Hawking nula, então tais buracos negros são denominados **buracos negros frios**.

Além disso, todas as componentes do escalar de Kretschmann, como dado em (3.30), se comportam como P^{a-2} e quando $\rho \rightarrow 2k$ tem-se $P \rightarrow 0$. A exceção é para o caso em que $a = 1$, que é facilmente observado que se $C = 0$ e $\phi = 0$ retorna-se à solução de Schwarzschild. Assim, em $\rho = 2k$ a métrica apresenta singularidade se $a < 2$ (excetuando $a = 1$), curvatura finita se $a = 1$ ou $a = 2$ e nula quando $a > 2$.

Para valores não-inteiros, para $a > 2$, o comportamento qualitativo da métrica quando $\rho \rightarrow 2k$ é o mesmo de quando próximo ao horizonte de área infinita, porém é impossível fazer a travessia pois a função $(1 - 2k/\rho)^a$ não é analítica em $\rho = 2k$, que caracteriza uma singularidade mesmo que os invariantes de curvatura tendam à zero.

ii) $k^2 = 0$

Neste caso, a métrica (4.80) torna-se

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{e^{2bu}}{u^2} \left(\frac{du^2}{u^2} + d\Omega^2 \right), \quad (4.89)$$

onde a solução é definida para o intervalo $u \in \mathbb{R}_+$. Como no caso anterior, pode-se re-escrever esta métrica e a equação do campo escalar em termos da coordenada quase-global $\rho = 1/u$

$$ds^2 = e^{-2b/\rho} dt^2 - e^{2b/\rho} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad \phi = \frac{A}{\rho}. \quad (4.90)$$

Fica claro que esta métrica é assintoticamente plana para $\rho \rightarrow \infty$, enquanto que o comportamento para $\rho \rightarrow 0$ depende do sinal da massa que está representado pela constante b . Para $b < 0$, $\rho = 0$ é um centro singular pois ambos escalares, tanto o de Ricci quanto o de Kretschmann, divergem. O contrário ocorre para $b > 0$, $r \rightarrow \infty$ que se tem $\mathcal{K} \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow 0$. Mais uma vez se obtém um horizonte singular com a mesma propriedade, mesmo que a curvatura se anule a métrica não é analítica em termos de ρ para a continuação ser possível.

iii) $k^2 < 0$

A métrica descrita para esse caso é dada por

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2bu}}{\sin^2(ku)} \left(\frac{k^2 du^2}{\sin^2(ku)} + d\Omega^2 \right), \quad (4.91)$$

indo mais uma vez à coordenada quase-global, obtém-se

$$ds^2 = e^{-2b/\rho} dt^2 - e^{2b/\rho} [d\rho^2 + (k^2 + \rho^2)d\Omega^2]. \quad (4.92)$$

Este tipo de solução descreve um buraco de minhoca com dois planos assintóticos, em $u = 0$ e $u = \pi/|k|$. Aqui $\rho \in \mathbb{R}$ pois $|k|u = \cot^{-1}(\rho/|k|)$.

Para $m > 0$ o buraco de minhoca atrai partículas testes da assíntota $\rho \rightarrow \infty$ e repele na oposta $\rho \rightarrow -\infty$, o contrário ocorre para $m < 0$. Já em $m = 0$ obtém-se a solução mais simples chamada **buraco de minhoca de Ellis** [61].

Buracos negros frios na solução anti-Fisher

Dentre as diferentes possíveis possibilidades na solução de anti-Fisher, a de maior interesse é o caso de buracos negros frios, pois eles serão reencontrados no capítulo seguinte utilizando a teoria de Rastall com campo escalar. Sendo assim sua estrutura e propriedades necessitam de uma análise mais profunda.

Para valores de a ímpar, as propriedades causais e geométricas principais, incluindo o diagrama de Carter-Penrose, são do tipo Schwarzschild. Então quando $\rho < 2k$, ρ torna-se a coordenada temporal e t a espacial e o espaço-tempo é homogêneo e anisotrópico, correspondendo às cosmologias anisotrópicas do tipo Kantowski-Sachs. A singularidade em $\rho = 0$ é tipo-espaço (cosmológica), sendo alcançada por todas as geodésicas do tipo-tempo em tempo próprio finito após atravessar o horizonte.

Já para a par, o diagrama de Carter-Penrose é o mesmo da solução de Reissner-Nordström extremo, contudo o significado físico das regiões quando $\rho < 2k$ é diferente. Já que $g_{\theta\theta}$ e $g_{\phi\phi}$ trocam de sinal no horizonte, em $\rho < 2k$ a métrica possui assinatura $(-+++)$ mudando para $(+---)$ para valores maiores de ρ . É possível fazer a análise de geodésicas e verificar que a passagem de uma região para a outra é suave. A coordenada temporal nesta região é ρ , se $g^{\rho\rho} < 0$, enquanto as outras componentes de $g_{\mu\nu}$ são positivas. Assim, como para a ímpar, tem-se cosmologias do tipo Kantowski-Sachs com singularidade tipo-espaço em $\rho = 0$. A direção do tempo é arbitrária nesta região, pois todas as geodésicas do tipo-tempo que adentram lá vindo da região estática, tornam-se tipo-espaço, ou seja, não se pode dizer onde é o futuro ou passado temporal e até é possível fugir da singularidade!

Além disso tudo, as propriedades do campo escalar não são menos exóticas. Observando (4.88), $\phi \rightarrow \infty$ quando $\rho \rightarrow 2k$, isso não contradiz a regularidade de superfície

$\rho = 2k$ para $a \geq 2$ desde que a densidade de energia seja

$$T_t^t = -\frac{1}{2}A\phi'^2 = -\frac{C^2(\rho - 2k)^{a-2}}{2\rho^{a+2}}, \quad (4.93)$$

bem como as outras componentes de T_{μ}^{ν} , sejam finitas em $\rho = 2k$ (lembrando que para $a < 2$ os escalares de curvatura também divergem, juntamente com o tensor energia-momento). Então o valor infinito de ϕ não impede a continuação da variedade do espaço-tempo para um ρ menor, onde a solução é válida com (4.88). Em contrapartida, a energia total do campo escalar, calculado como uma quantidade conservada ao vetor de Killing tipo-tempo correspondente, prova ser infinita na região estática independentemente de a ,

$$\varepsilon = \int T_t^t \sqrt{g} d^3x = -2\pi A^2 \int \frac{d\rho}{\rho(\rho - 2k)}, \quad (4.94)$$

e a integral logaritmicamente diverge em $\rho = 2k$. A divergência está relacionado ao volume do infinito espacial: a integral $\int \sqrt{g} d^3x$ diverge para $\rho \rightarrow 2k$ ainda mais abruptamente do que (4.94).

4.2 Buraco negro na teoria de K-essência

O conceito de k-essência foi recentemente introduzido [62]. Sua principal ideia é conter uma função do termo cinético o qual domina o termo potencial com o intuito inicial de explicar a evolução do universo primordial. Além disso, esta teoria apresenta sucesso em explicar naturalmente o motivo do universo ter entrado em uma época de expansão acelerada em estágios tardios de sua evolução [63].

Como a proposta original desta teoria é para resolver problemas cosmológicos, poucos esforços foram feitos até então na investigação de objetos como buracos negros e de minhoca [5]. Devido à isso torna-se relevante explorar soluções esfericamente simétrica e estáticas para tal teoria.

A lagrangiana mais geral para este modelo é dada por

$$\mathcal{L}_k = \sqrt{-g}[R - F(X, \phi)], \quad (4.95)$$

onde

$$X = \eta \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi, \quad \eta = \pm 1. \quad (4.96)$$

Esta mesma lagrangiana pode ser re-escrita de uma outra maneira

$$\mathcal{L}_k = \sqrt{-g}[R - F(X) + 2V(\phi)], \quad (4.97)$$

que explicita a separação do termo cinético do potencial.

As soluções que serão estudadas aqui utilizarão a seguinte hipótese

$$F(X) = \epsilon X^n, \quad (4.98)$$

ou seja, uma potência n do termo cinético. Consequentemente, a lagrangiana que será estudada é da forma

$$\mathcal{L}_k = \sqrt{-g}[R - \epsilon X^n + 2V(\phi)], \quad (4.99)$$

em que mais uma vez $\epsilon = \pm 1$, tal que resulta um campo fantasma para o valor negativo e normal para o positivo, visto que logo mais afrente será argumentado que $\eta = -1$.

4.2.1 Equações de campo e soluções

Seguindo os mesmos passos dos capítulos anteriores, a variação da lagrangiana (4.97) em relação ao campo métrico resulta em

$$\frac{\delta \mathcal{L}_k}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} [R - \epsilon X^n + 2V(\phi)] + \sqrt{-g} \left[\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \epsilon \frac{\delta X^n}{\delta g^{\mu\nu}} \right] = 0. \quad (4.100)$$

Individualmente calculando o seguinte termo

$$\frac{\delta X^n}{\delta g^{\mu\nu}} = \eta n X^{n-1} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (4.101)$$

juntamente com as relações (2.20), a equação de campo para $g_{\mu\nu}$ é obtida

$$G_{\mu\nu} = \epsilon \left(\eta \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) X^{n-1} + g_{\mu\nu} V. \quad (4.102)$$

Tomando o divergente da equação anterior, lembrando da identidade de Bianchi, a equação do campo escalar ϕ é obtida

$$\square \phi + 2(n-1) \frac{\nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi \nabla^\alpha \nabla^\beta \phi}{\nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi} = 0. \quad (4.103)$$

Mais uma vez, como o objetivo é estudar soluções de buracos negros, utiliza-se a métrica esfericamente simétrica dada por (4.16). Com isso as equações (4.102) e (4.103) resultam no seguinte sistema de equações

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2} e^{2(1-n)\alpha} \phi'^{2n} + e^{2\alpha} V, \quad (4.104)$$

$$-e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \frac{\epsilon}{2} (2n-1) e^{2(1-n)\alpha} \phi'^{2n} - e^{2\alpha} V, \quad (4.105)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\frac{\epsilon}{2} e^{2(1-n)\alpha} \phi'^{2n} - e^{2\alpha} V, \quad (4.106)$$

$$(2n-1)\phi'' = -\phi' [(1-2n)\alpha' + 2\beta' + \gamma'], \quad (4.107)$$

onde foi escolhido $\eta = -1$ para se ter $X = e^{-\alpha} \phi'^2$, garantindo que este termo seja sempre positivo. A resolução desse sistema de equações é de difícil solução, sendo assim uma especificação do calibre, do potencial e da constante n são necessárias para avançar na análise.

Com essas equações também pode ser provado o seguinte teorema no-go: *A existência de um horizonte de Killing de uma solução tipo buraco negro para u finito não é compatível com a função regular $F(X)$.*

A estrutura do conjunto das equações (4.104 - 4.106) são idênticas às encontradas no capítulo seguinte, sendo assim, aqui é feito um esboço rápido das soluções obtidas na referência [5] e somente no capítulo seguinte a análise é retomada e aprofundada.

i) $V = 0$ e $n = 1/3$

Neste caso utiliza-se a condição de calibre quase-global, $\alpha(u) = -\gamma(u)$. A solução para o campo métrico é obtido

$$ds^2 = \left(\frac{B_0}{k^2 u} - \frac{k^2 u^3}{2} \right) dt^2 - \left(\frac{B_0}{k^2 u} - \frac{k^2 u^3}{2} \right)^{-1} du^2 - \frac{1}{k^2 u} d\Omega^2, \quad (4.108)$$

idêntico ao que será encontrado na seção 5.5. Já o campo escalar apresenta um comportamento diferente, dado por

$$\phi(u) = \left(\frac{1}{3C}\right)^3 \left(-\frac{B_0}{k^8 u^3} - \frac{u}{k^4}\right), \quad (4.109)$$

claramente divergente nas extremidades, $u = 0$ e $u = \infty$, que são ambos pontos de singularidade.

ii) $V = \text{cte}$ e $n = 1/2$

Diferentemente da solução anterior, agora utiliza-se a condição de calibre harmônica dada por $\alpha(u) = 2\beta(u) + \gamma(u)$. Após a mudança de coordenada $x = 3b \tanh(bu)$, a solução geométrica adquirida é

$$ds^2 = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9} dt^2 - \frac{9}{(9b^2 - x^2)^2} dx^2 - \frac{3}{(9b^2 - x^2)} d\Omega^2. \quad (4.110)$$

Mais uma vez a solução geométrica é idêntica à que será obtida pela teoria de Rastall na seção 5.4 e a equação para o campo ϕ é diferente, como se segue

$$\phi(x) = \frac{4}{3\epsilon} \left[2x - \frac{9b}{2} \ln \left(\frac{3b + x}{3b - x} \right) \right] + \phi_0. \quad (4.111)$$

O campo escalar apresenta comportamento singular em ambos infinitos, $x = \pm\infty$ e em $x = \pm 3b$, que são horizontes. Já o termo $X = A\phi^2$ diverge em $x = \pm\infty$ mas apresenta comportamento suave nos horizontes. Então esta solução apresenta um horizonte que o espaço-tempo não é singular, mas o campo escalar diverge.

Capítulo 5

Buraco Negro na Teoria de Rastall com Campo Escalar

5.1 Teorias não conservativas

Uma suposição fundamental na teoria da relatividade geral de Einstein é que o divergente do tensor energia-momento é igual a zero, como foi apresentado em (2.24). Porém a própria definição de energia gravitacional neste contexto não é bem compreendida [64], além de sua conservação nunca ter sido testada de fato em situações de campo forte onde a métrica não corresponde à Minkowski [65]. Com tudo isso exposto é possível investigar se essa suposição é realmente necessária.

Hoyle foi o primeiro a propor uma teoria não conservativa em 1948 [66]. Utilizando uma contínua criação de matéria, talvez fosse possível obter um universo em expansão sem a introdução da constante cosmológica onde a densidade de matéria se mantivesse constante, não violando o princípio cosmológico.

Contudo foi só na década de 70 que a discussão se aprofundou. Rastall [25] relaxa a condição de conservação e considera que

$$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = a_{\mu}. \quad (5.1)$$

Como a conservação da energia e do momento são muito bem testadas e evidenciadas em espaços planos, cria-se a fundamentação teórica para assumir que a própria curvatura do espaço-tempo esteja relacionada com a energia total do sistema estudado [65]. Com isso é plausível considerar que a_{μ} deva depender do escalar de Ricci, de tal maneira que no espaço-tempo de Minkowski a conservação precisa ser recuperada. Deste modo toma-se $a_{\mu} = \lambda \nabla_{\mu} R$, tal que λ é uma constante que quando é zero retorna ao caso da relatividade geral. Ou seja,

$$\nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = \lambda \nabla_{\mu} R. \quad (5.2)$$

Entretanto a identidade de Bianchi, (2.17), ainda precisa se manter válida, assim a equação de campo que é consistente com isso e com (5.2) é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} R). \quad (5.3)$$

No ano seguinte Smalley tenta contornar a forma *ad hoc* de Rastall introduzir suas equações, notando que a teoria de Brans-Dicke pode ser facilmente adaptada à

condição (5.2), sem precisar adicionar um termo às equações de campo para $g_{\mu\nu}$, tanto para ser consistente com a identidade de Bianchi quanto ao requisito de Rastall [67].

Historicamente, uma tentativa para a equação de campo foi dada por

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

contudo ela pode ser prontamente descartada pois utilizando a relação $\nabla^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\mu R$ e assumindo a conservação do tensor energia-momento chega-se que

$$\nabla_\mu T = 0. \quad (5.5)$$

Ou seja, T é uma quantidade constante em todo o espaço-tempo. Porém, visto que no vácuo $T = 0$ e em regiões com matéria $T \neq 0$, nota-se que esta equação de campo é inconsistente. Assim, Malin argumenta que se massa e energia não forem quantidades conservadas a equação (5.4) pode merecer uma investigação, pois satisfaz os postulados básicos da relatividade geral: da equivalência e da covariância [68].

Smalley retorna em 76 mostrando que a teoria proposta por Malin não satisfaz os limites Newtonianos corretos e então propõe as modificações necessárias para corrigir este problema. Após as correções devidas ele reobtem, efetivamente, uma teoria tipo Rastall [69].

Importante notar que a equação (5.3) não provém de uma lagrangiana associada, devido a teoria ser não-conservativa e para contar este problema seria necessário quebrar a conservação do tensor energia-momento por difeomorfismos¹. Existe uma crítica existente à teoria por conta disto, contudo, existem esforços para resolver este problema [70].

Atualmente a teoria de Rastall mostra resultados interessantes em escalas cosmológicas. Por exemplo, a evolução de flutuações de matéria escura é idêntica ao modelo Λ CDM, porém a energia escura consegue se agrupar [71]. Isso pode desenvolver inomogeneidades em regime não-linear de matéria escura do modelo cosmológico padrão [72]. Todo sucesso deste modelo é reproduzido enquanto novos efeitos são esperados em regime não-lineares, onde Λ CDM apresenta dificuldades [73]. Além disso, a única solução simetricamente esférica, estática, com constante cosmológica e no vácuo é a de Schwarzschild-de Sitter, exceto para um valor muito particular da constante que caracteriza esta teoria [74].

5.2 Teoria de Rastall com campo escalar

A equação (5.3) pode ser re-arranjada da seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} + (8\pi G\lambda - 1/2)g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Para simplificar, define-se $k \equiv 1 - 16\pi G\lambda$, o que faz a equação anterior tornar-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{k}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.7)$$

e a equação (5.2)

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1-k}{16\pi G}\nabla_\mu R. \quad (5.8)$$

¹Ver apêndice C.

Claramente quando $k = 1$, retorna-se às equações originais de Einstein.

O traço da equação (5.6) é dado por $R = \frac{8\pi G}{1-2k}T$, então esta é re-escrita da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \frac{k-1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (5.9)$$

$$= 8\pi G \left[T_{\mu\nu} + \frac{k-1}{2(1-2k)}g_{\mu\nu}T \right]. \quad (5.10)$$

Definindo $\alpha = \frac{3k-2}{2k-1}$, a equação anterior e (5.8) tornam-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\alpha-1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (5.11)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = \frac{\alpha-1}{2}\nabla_\mu R, \quad (5.12)$$

onde nesta última re-parametrização $\alpha = 1$ recupera relatividade geral.

Será utilizado o tensor energia-momento de um campo escalar canônico auto-interagente com potencial, o qual é dado como se segue

$$T_{\mu\nu} = \epsilon \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right) + g_{\mu\nu} V(\phi), \quad (5.13)$$

tal que o parâmetro $\epsilon \equiv \pm 1$ indica um campo escalar fantasma quando negativo ou normal quando positivo. Adaptando a equação de campo de Rastall dada em (5.11) com (5.13), chega-se ao seguinte tensor energia-momento efetivo

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} = \epsilon \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{2-a}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right) + g_{\mu\nu} (3-2a)V(\phi). \quad (5.14)$$

Finalmente, a equação de campo na teoria de Rastall com o campo escalar minimamente acoplado é dada por

$$G_{\mu\nu} = \epsilon \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{2-a}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi \right) + (3-2a)g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (5.15)$$

Devido à identidade de Bianchi, o divergente do lado esquerdo da equação anterior é necessariamente zero, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, implicando que o divergente do lado direito também o precisa ser. Sendo assim

$$\epsilon \left[\square \phi \nabla_\nu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \nabla_\nu \phi - \frac{2-a}{2} \nabla_\nu (\nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi) \right] + (3-2a) \nabla_\nu V(\phi) = 0, \quad (5.16)$$

$$\square \phi \nabla_\nu \phi + \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \nabla_\nu \phi - (2-a) \nabla_\rho \phi \nabla^\rho \phi = -\epsilon(3-2a) \partial_\phi V(\phi) \nabla_\nu \phi, \quad (5.17)$$

para obter uma equação escalar, multiplica-se ambos os lados por $\nabla^\nu \phi$, que pode ser re-arranjada tal que

$$\square \phi + (a-1) \frac{\nabla^\nu \phi \nabla^\rho \phi \nabla_\nu \nabla_\rho \phi}{\nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi} = -\epsilon(3-2a) \partial_\phi V(\phi). \quad (5.18)$$

As equações (5.15) e (5.18) descrevem toda teoria para o caso mais geral possível. Como o objetivo é estudar solução de buracos negros, utiliza-se a métrica simetricamente esférica dada por

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)} dt^2 - e^{2\alpha(u)} du^2 - e^{2\beta(u)} d\Omega^2, \quad (5.19)$$

onde as componentes da conexão afim diferentes de zero são

$$\begin{aligned}\Gamma_{tu}^t &= \gamma', & \Gamma_{tt}^u &= e^{2(\gamma-\alpha)}\gamma', & \Gamma_{uu}^u &= \alpha', \\ \Gamma_{\theta\theta}^u &= e^{2(\beta-\alpha)}\beta', & \Gamma_{\phi\phi}^u &= -e^{2(\beta-\alpha)}\sin^2\theta\beta', & \Gamma_{u\theta}^\theta &= \beta', \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\cos\theta\sin\theta, & \Gamma_{u\phi}^\phi &= \beta', & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot\theta.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Tal que ' denota a derivada em relação a coordenada radial u . Então, desenvolve-se o lado esquerdo da equação (5.18) da seguinte maneira

$$g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\partial_\nu\phi) + (a-1)\frac{g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\nabla_\nu\partial_\rho\phi}{g^{\gamma\nu}\partial_\nu\phi\partial_\gamma\phi}, \quad (5.21)$$

$$g^{\mu\nu}[\partial_\mu(\partial_\nu\phi) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\partial_\alpha\phi)] + (a-1)\frac{g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi}{g^{\gamma\nu}\partial_\nu\phi\partial_\gamma\phi}[\partial_\nu(\partial_\rho\phi) - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha(\partial_\alpha\phi)], \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}-e^{-2\gamma}(\Gamma_{tt}^u\phi') - e^{-2\alpha}(\phi'' - \Gamma_{uu}^u\phi') + e^{-2\beta}(\Gamma_{\theta\theta}^u\phi') + \frac{e^{-2\beta}}{\sin^2\theta}(\Gamma_{\phi\phi}^u\phi') \\ + (a-1)g^{uu}(\partial_u\phi' - \Gamma_{uu}^u\phi'),\end{aligned}\quad (5.23)$$

que utilizando (5.20) pode ser algebricamente manipulado para adquirir o seguinte resultado

$$a\phi'' + \phi'(\gamma' - a\alpha' + 2\beta') = \epsilon(3-2a)e^{2\alpha}\partial_\phi V. \quad (5.24)$$

Já as equações do campo métrico são dadas calculando-se (5.15), elas são

$$-2\beta'' - 3\beta'^2 + 2\beta'\alpha' + e^{2(\alpha-\beta)} = \epsilon\frac{2-a}{2}\phi'^2 + (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (5.25)$$

$$2\gamma'\beta' + \beta'^2 - e^{2(\alpha-\beta)} = \epsilon\frac{a}{2}\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V, \quad (5.26)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\epsilon\frac{2-a}{2}\phi'^2 - (3-2a)e^{2\alpha}V. \quad (5.27)$$

Claramente o sistema de equações (5.24 - 5.27) é muito complexo e só pode ter soluções analíticas com a discriminação do potencial $V(\phi)$. Além disso, existe uma liberdade de calibre que pode ser escolhida ajudando na resolução das equações. Nas seções seguintes mostra-se as propriedades gerais desse sistema de equações e soluções para alguns casos específicos.

Então aqui é possível ver que a estrutura das equações (5.25 - 5.27) é idêntica à encontrada na seção 4.2 na teoria de k -essência dadas por (4.104 - 4.106). Ou seja, dependendo da escolha da constante a , soluções serão idênticas às de k -essência, no que diz respeito à parte geométrica da solução pois o comportamento do campo escalar dado por (4.107) e (5.24) são diferentes.

5.3 Características gerais

Foi mostrado que em relatividade geral com um campo escalar do tipo k -essência sem potencial, o horizonte com área finita implica em um comportamento singular do campo escalar e do tensor energia-momento [5]. Se for exigido a regularidade do tensor energia-momento no horizonte, somente buracos negros frios com horizonte de eventos de área infinita são possíveis [24]. Será mostrado que no caso da teoria de Rastall, horizontes com área finita também são possíveis dependendo do valor do parâmetro a da teoria.

5.3.1 Estrutura global

Para o estudo de horizontes é útil recorrer à condição de calibre quase-global, caracterizado pela seguinte relação

$$\alpha(u) = -\gamma(u). \quad (5.28)$$

Também introduzindo a seguinte notação

$$e^{2\gamma} = A(u), \quad e^\beta = r(u), \quad (5.29)$$

a métrica (5.19) torna-se

$$ds^2 = A(u)dt^2 - A^{-1}(u)du^2 - r(u)^2d\Omega^2. \quad (5.30)$$

Com as seguintes relações

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \ln A, & \gamma' &= \frac{A'}{2A}, & \gamma'' &= \frac{1}{2A} \left(A'' - \frac{A'^2}{A} \right), \\ \beta &= \ln r, & \beta' &= \frac{r'}{r}, & \beta'' &= \frac{1}{r} \left(r'' - \frac{r'^2}{r} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

as equações (5.24 - 5.27) se tornam

$$-2\frac{r''}{r} - \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{A'r'}{Ar} + \frac{1}{Ar^2} = \epsilon \frac{(2-a)}{2} \phi'^2 + (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.32)$$

$$\frac{A'r'}{Ar} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{Ar^2} = \epsilon \frac{a}{2} \phi'^2 - (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.33)$$

$$\frac{r''}{r} + \frac{A'r'}{Ar} + \frac{A''}{2A} = -\epsilon \frac{(2-a)}{2} \phi'^2 - (3-2a)\frac{V}{A}, \quad (5.34)$$

$$\alpha\phi'' + \phi' \left[\frac{A'}{2A}(a+1) + 2\frac{r'}{r} \right] = (3-2a)\frac{\partial_\phi V}{A}. \quad (5.35)$$

Desse conjunto de equações duas relações podem ser adquiridas que independem de a e V . A primeira é obtida somando (5.32) com (5.34) e a segunda somando (5.32) com (5.33), como se segue respectivamente:

$$A''r^2 - A(r^2)'' = -2, \quad (5.36)$$

$$2\frac{r''}{r} = -\epsilon\phi'^2. \quad (5.37)$$

A equação (5.37) permite a prova do *teorema de estrutura global* ([26], [6]). Este teorema diz que considerando a métrica (5.30) e $\phi = \phi(u)$ que tenha uma região estática $a < u < b \leq \infty$. Então:

1. todos os horizontes são simples,
2. não existem horizontes em $u < a$ e $u > b$, ou, o número de horizontes não pode ser maior do que dois.

Um horizonte é dito *simples* ou *múltiplo* de acordo com o zero da função $A(u)$ ser simples ou múltiplo. Quando simples, ou em geral, de ordem ímpar, o horizonte separa uma região estática de uma não estática (como no espaço-tempo de Schwarzschild). Horizontes de ordem par separam regiões de mesma natureza (como o horizonte duplo na solução de Reissner-Nordström, o qual possui uma região não estática entre eles).

Então conclui-se que este teorema também é válido para a teoria de Rastall considerando qualquer valor do parâmetro α e qualquer escolha do potencial $V(\phi)$. Sendo assim as soluções analíticas somente poderão ter no máximo dois horizontes e do tipo simples.

Este teorema é provado em detalhes no apêndice B.

5.3.2 Possíveis horizontes com campo não-massivo

Uma outra observação pode ser feita para o caso em que $V = cte$, quando diferente de zero pode ser interpretado como a constante cosmológica Λ . Neste caso a equação do campo escalar (5.35) tem uma primeira integral desenvolvida da seguinte maneira

$$\frac{\phi''}{\phi'} = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{A'}{2A}(\alpha + 1) + 2\frac{r'}{r} \right], \quad (5.38)$$

$$\phi' = CA^{-(1+\alpha)/(2\alpha)} r^{-2/\alpha}, \quad (5.39)$$

com C sendo a constante de integração. Um possível horizonte é caracterizado por $A = 0$, se isto ocorre em um raio finito então $\phi' \rightarrow \infty$ se $\alpha > 0$, por conta do expoente de r , ou $\alpha < -1$, devido agora ao expoente de A . O tensor energia-momento dado em (5.14) para a métrica (5.30) é

$$\begin{aligned} T_u^u &= -\epsilon \frac{\alpha}{2} \phi'^2 A + (3 - 2\alpha)V(\phi), \\ T_t^t = T_\theta^\theta = T_\phi^\phi &= \epsilon \left(\frac{2 - \alpha}{2} \phi'^2 A \right) + (3 - 2\alpha)V(\phi), \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde é possível ver que $A\phi'^2 \propto A^{-1/\alpha}$, divergindo quando $\alpha > 0$. Com isso o intervalo que a constante α pode tomar, mantendo ϕ e T_μ^ν finitos em um possível horizonte, está limitado à $-1 < \alpha < 0$.

Então para um valor de α fora deste intervalo, obtém-se um análogo ao *teorema no-go* encontrado para sistemas com k -essência [5]: *um horizonte com área infinita somente pode ocorrer com valores singulares de ϕ e/ou T_μ^ν . Porém, para valores no intervalo de $-1 < \alpha < 0$, é possível haver horizontes com raio finito, para os quais o tensor energia-momento tende à zero.*

As soluções analíticas para os casos $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$ serão feitas nas seções seguintes. Já para o caso de $\alpha = 1$, que retorna à relatividade geral, a solução correspondente para o campo escalar não-massivo não possui um horizonte [58].

Pelas equações (5.37) e (5.39) chega-se que

$$-2\frac{r''}{r} = \epsilon C^2 A^{-(1+\alpha)/\alpha} r^{-4/\alpha}, \quad (5.41)$$

onde vê-se dois casos possíveis:

- $r'' \rightarrow \infty$ se $a > 0$ ou $a < -1$
 neste caso, tem-se possíveis soluções de buracos negros frios se $\epsilon = -1$ ou um centro singular se $\epsilon = 1$,
- $r'' \rightarrow 0$ se $-1 < a < 0$
 o desaparecimento do termo r'' no horizonte parece consistente com um horizonte regular de raio finito.

Uma última restrição é possível inferir para a métrica poder ser estendida além do horizonte. A coordenada quase-global u deve ser analítica [26], assim se r é finito, deve-se ter $r'' \approx u^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então mais uma vez, pelo *teorema de estrutura global* [6] $A \approx u$, que demanda $r'' \approx A^n$. Observando a equação (5.41) isso só ocorre se, e somente se, $a = -1/(n+1)$, que pertence ao intervalo permitido. Conclui-se que um horizonte regular com área finita somente pode ocorrer nos valores discretos que pertencem à sequência $a_n = -1/(n+1)$.

5.3.3 Comportamento assintótico

Também é possível fazer a análise do comportamento assintótico de possíveis soluções para um campo escalar com potencial nulo ou constante, as quais possuem as relações (5.37) e (5.39). Em um espaço-tempo assintoticamente plano com a métrica dada por (5.30), pode-se assumir o seguinte comportamento das funções da métrica quando $u \rightarrow \infty$

$$A \rightarrow 1, \quad r(u) = u + r_0 + r_k u^{-k} + \mathcal{O}(u^{-k}), \quad (5.42)$$

onde r_0 e r_k são constantes e k um inteiro positivo. Vê-se que o lado esquerdo de (5.36) é dado por

$$\frac{r''}{r} = \frac{k(k+1)r_k}{u^{k+3}} [1 + \mathcal{O}(1)], \quad (5.43)$$

já o lado direito

$$\phi'^2 = C^2 u^{-4/a} [1 + \mathcal{O}(1)]. \quad (5.44)$$

Igualando ambas equações, têm-se

$$\frac{k(k+1)r_k}{u^{k+3}} = C^2 u^{-4/a}, \quad (5.45)$$

então a seguinte relação entre os expoentes é obtida

$$a = \frac{4}{k+3}, \quad (5.46)$$

onde $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma restrição no valor de a para uma solução de vácuo, com campo escalar não-massivo, possuir solução analítica e comportamento assintótico plano. Assim, para $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, deve-se ter $a = 1, 4/5, 2/3, 4/7, \dots$, respectivamente. Para outros valores da constante, a função $r(u)$ não se comportará de forma analítica.

Dessa forma conclui-se que se alguma solução particular possuir um horizonte regular, necessariamente não se tem um comportamento assintoticamente plano analítico.

Ainda mais, como visto na sub-seção anterior, horizontes regulares requerem $a < 0$, mas no caso que A é uma constante maior que zero, para um valor grande de u , então $\phi' \rightarrow \infty$, que é incompatível com algo assintoticamente plano. Dessa forma é possível enunciar o seguinte teorema no-hair: *na teoria de Rastall com campo escalar não-massivo, não pode haver um buraco negro estático, esfericamente simétrico e assintoticamente plano.*

5.4 Solução para $\alpha = 0$

Para a análise deste tipo de solução, utiliza-se o calibre harmônico com a seguinte relação

$$\alpha(u) = \gamma(u) + 2\beta(u). \quad (5.47)$$

Com esta escolha de calibre e impondo $\alpha = 0$, as equações (5.24 - 5.27) tornam-se

$$-2\beta'' + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' + e^{2(\gamma+\beta)} = \epsilon\phi'^2 + 3e^{2(\gamma+2\beta)}V, \quad (5.48)$$

$$2\gamma'\beta' + \beta'^2 - e^{2(\gamma+\beta)} = -3e^{2(\gamma+2\beta)}V, \quad (5.49)$$

$$-\beta'^2 - 2\beta'\gamma' + \beta'' + \gamma'' = -\epsilon\phi'^2 - 3e^{2(\gamma+2\beta)}V, \quad (5.50)$$

$$\phi'(\gamma' + 2\beta') = 3e^{2(\gamma+2\beta)}\partial_\phi V, \quad (5.51)$$

restando, somente, escolher o potencial para uma possível análise da solução.

i) $V = 0$

Da equação (5.51), naturalmente chega-se em

$$\phi'(\gamma' + 2\beta') = 0. \quad (5.52)$$

Como o campo ϕ é diferente de 0, necessariamente $\gamma' + 2\beta' = 0$, ou seja

$$\alpha' = 0 \quad \text{logo,} \quad \alpha = \text{constante}. \quad (5.53)$$

Utilizando esses dois resultados, as outras três equações (5.48 - 5.50) reduzem-se a

$$-2\beta'' - 3\beta'^2 + e^{2(\alpha-\beta)} = \epsilon\phi'^2, \quad (5.54)$$

$$-3\beta'^2 = e^{2(\alpha-\beta)}, \quad (5.55)$$

$$3\beta'^2 - \beta'' = -\epsilon\phi'^2. \quad (5.56)$$

Se a constante $e^{2\alpha}$ for considerada negativa, a assinatura da métrica torna-se $(--++)$, o que identificaria um espaço com duas coordenadas temporais [75]. Porém isso é uma interpretação um tanto exótica e será descartada. Já a considerando uma constante positiva, a equação (5.55) não possui solução real o que caracterizaria uma componente complexa na métrica, a qual não possui sentido físico. Dessa maneira a solução para potencial nulo pode ser descartada.

ii) $V = \text{cte}$

Como $\partial_\phi V$ continua sendo igual a zero, a equação (5.52) também é satisfeita para este potencial, conseqüentemente (5.53) é igualmente válida. Para simplificar define-se

$\kappa \equiv e^{2\alpha}$, com isso as equações (5.48 - 5.50) são dadas por

$$-2\beta'' - 3\beta'^2 + \kappa e^{-2\beta} = \epsilon\phi'^2 + 3\kappa V, \quad (5.57)$$

$$3\beta'^2 + \kappa e^{-2\beta} = 3\kappa V, \quad (5.58)$$

$$3\beta'^2 - \beta'' = -\epsilon\phi'^2 - 3\kappa V. \quad (5.59)$$

A equação (5.58) pode ser colocada da seguinte forma

$$\beta'^2 = \frac{\kappa}{3}(3V - e^{-2\beta}). \quad (5.60)$$

Como já foi dito anteriormente κ é positivo, logo, o potencial V também precisa ser positivo para a existência de soluções reais. Esta equação diferencial possui como solução

$$\beta = -\ln(\sqrt{3V}) + \ln[\cosh(\sqrt{\kappa V}u)], \quad (5.61)$$

como u é a coordenada radial, ela pôde ser redefinida para englobar a constante de integração. Com (5.61) calcula-se

$$e^{2\beta} = \frac{\cosh^2(\sqrt{\kappa V}u)}{3V}, \quad e^{2\gamma} = \frac{(3V)^2\kappa}{\cosh^4(\sqrt{\kappa V}u)}. \quad (5.62)$$

Dessa forma, a métrica (5.19) torna-se

$$ds^2 = \frac{(3V)^2\kappa}{\cosh^4(\sqrt{\kappa V}u)} dt^2 - \kappa du^2 - \frac{\cosh^2(\sqrt{\kappa V}u)}{3V} d\Omega^2. \quad (5.63)$$

Agora resta descobrir o comportamento do campo escalar ϕ , para isso as seguintes relações podem ser obtidas

$$\beta' = \sqrt{\kappa V} \tanh[\sqrt{\kappa V}u] \quad \text{e} \quad \beta'' = \kappa V \operatorname{sech}^2[\sqrt{\kappa V}u]. \quad (5.64)$$

Utilizando ambos resultados em (5.59), tem-se

$$\phi'^2 = -\frac{2\kappa V}{\epsilon} \left(3 - \frac{2}{\cosh^2(\sqrt{\kappa V}u)} \right) \quad (5.65)$$

ou seja, o sinal do campo escalar é bem definido e só possui solução real para $\epsilon = -1$, no caso de um campo fantasma.

Para ser possível analisar melhor o comportamento da solução, faz-se a seguinte mudança de variáveis

$$x = 3\sqrt{\kappa V} \tanh(\sqrt{\kappa V}u), \quad dx = 3\kappa V \operatorname{sech}^2(\sqrt{\kappa V}u) du, \quad (5.66)$$

consequentemente, obtém-se as seguintes relações

$$\operatorname{sech}^2(\sqrt{\kappa V}u) = 1 - \frac{x^2}{9V\kappa}, \quad dx^2 = \frac{(9V\kappa - x^2)^2}{9} du^2. \quad (5.67)$$

Dessa forma a métrica (5.63) torna-se

$$ds^2 = \frac{(9V\kappa - x^2)^2}{9\kappa} dt^2 - \frac{9\kappa}{(9V\kappa - x^2)^2} dx^2 - \frac{3\kappa}{9V\kappa - x^2} d\Omega^2. \quad (5.68)$$

Esta solução corresponde exatamente à solução encontrada para o caso de k-essência dada por (4.110) ([28], [5]), com exceção do comportamento do campo escalar, que é claramente diferente.

Com toda solução em mãos, resta analisar sua estrutura causal.

5.4.1 Estrutura causal

Por simples inspeção da métrica (5.68) fica claro que existem duas singularidades, em $x = \pm 3\sqrt{V\kappa}$. Calculando os escalares de Ricci e Kretschmann, dados respectivamente por

$$R = \frac{8}{9\kappa^2}(x^2 - 9\kappa V), \quad e \quad \mathcal{K} = \propto x^4, \quad (5.69)$$

fica explícito que ambas regiões não são singularidades reais, ou seja, esta métrica possui dois horizontes de eventos. Considerando o potencial V como a constante cosmológica Λ , é possível interpretar esses horizontes como de natureza cosmológica, idêntico ao espaço-tempo de de Sitter.

Utilizando a equação para o cálculo da superfície gravitacional, dada por (3.58), chega-se na seguinte expressão

$$K = -\frac{4x(9V\kappa - x^2)}{9\kappa}, \quad (5.70)$$

que claramente é zero para os dois valores encontrados do horizonte de eventos. Ou seja, utilizando (3.62) tem-se que a temperatura de Hawking é zero, conseqüentemente a área do horizonte é infinita e a solução obtida é do mesmo tipo de buracos negros frios que foram estudados no capítulo 4 ([60], [24]). Em particular, as forças de maré que atuam em corpos extensos são infinitas ao cruzar o horizonte, então somente partículas pontuais podem fazer essa travessia.

Para estudar a estrutura causal de um espaço-tempo qualquer, é de muita utilidade fazer o diagrama de Carter-Penrose respectivo. Para isso é necessário escrever a métrica como uma transformação conforme, exatamente da forma que foi feito em (3.57). Ou seja, precisa-se transformar a métrica (5.68) para a seguinte forma

$$ds^2 = H(x) (dt^2 - dy^2 - F(x)d\Omega^2), \quad (5.71)$$

tal que pode-se reconhecer a função $H(x)$ como o fator conforme da métrica. Assim, identifica-se

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{(9V\kappa - x^2)^2}{9\kappa}, \\ dy &= \pm \frac{9\kappa}{(9V\kappa - x^2)^2} dx, \\ F(x) &= \frac{27\kappa^2}{(9V\kappa - x^2)^3}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Para os valores de $|x| < 3\sqrt{V\kappa}$ as componentes da métrica não trocam de sinal, isso caracteriza uma região estática, que seria similar à região de fora do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild.

É claro que a função $H(x)$ é positivo definida para qualquer intervalo da coordenada x , entretanto isso não é verdade para $F(x)$. Quando $|x| > 3\sqrt{V\kappa}$ ela muda de sinal fazendo que a assinatura da métrica (+ - - -) mude para (+ - ++), isso quer dizer que a coordenada temporal e radial alternam-se, que caracteriza a região não-estática da métrica, exatamente como ocorre dentro do horizonte de eventos da solução de Schwarzschild.

Entretanto, é fácil verificar que ambos os escalares (5.69) divergem para $x \rightarrow \pm\infty$, descrevendo uma singularidade real nessas regiões, então este objeto não pode

ser identificado como um buraco negro pois não pode haver observadores distantes. Como a função F vai à zero em x muito distantes, um objeto extenso é comprimido à um ponto nas direções angulares e infinitamente esticado na direção da coordenada espacial, que lembra a singularidade de Schwarzschild.

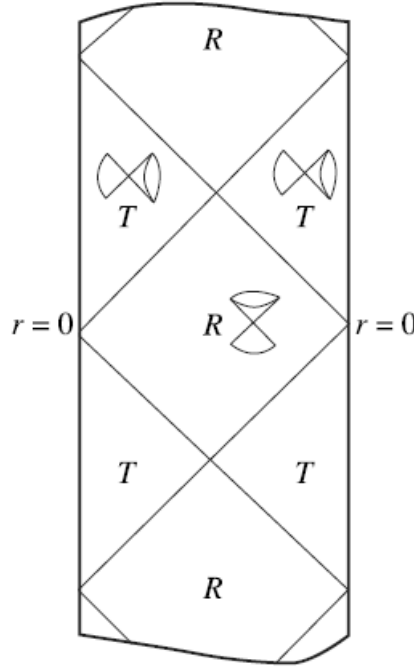


Figura 5.1: Diagrama de Carter-Penrose para a solução de Rastall com $\alpha = 0$. Os cones de luz indicam a direção temporal. **Fonte:** Figura 2 da referência [5].

O campo escalar desta solução, descrito por (5.65) e fixando $\epsilon = -1$, torna-se

$$\phi' = \pm \sqrt{2\kappa V \left(3 - \frac{2}{\cosh^2(\sqrt{\kappa V} u)} \right)}. \quad (5.73)$$

Esta é uma equação que possui uma integral de difícil análise, porém é possível notar que é uma função sempre crescente ou decrescente da coordenada espacial u .

5.5 Solução para $\alpha = -1$

Neste caso, mais uma vez se utiliza o calibre quase-global dado por (5.28), tornando a métrica dada na forma de (5.30). Ou seja, as equações de campo têm a mesma forma de (5.32 - 5.35), logo, ambas consequências (5.36) e (5.37) também são válidas. Agora será considerado um potencial nulo, $V = 0$.

A equação do campo escalar (5.40)² para $\alpha = -1$ possui a interessante propriedade de não depender da função A , dada então por

$$\phi' = \phi_0 r^2. \quad (5.74)$$

²Por simples notação, a constante de integração C será trocada por ϕ_0 .

Utilizando a (5.37) e (5.74) tem-se

$$r''r' = -\frac{\epsilon}{2}\phi_0^2 r^5 r'. \quad (5.75)$$

Uma primeira integração é feita

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r')^2 &= -\frac{\epsilon}{12}\phi_0^2 r^6 + K_0, \\ r' &= \sqrt{-\frac{\epsilon\phi_0^2 r^6}{6} + 2K_0}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

A integração da equação anterior é possível, porém muito complicada dada em termos de funções elípticas, para obter solução mais simples toma-se $K_0 = 0$ implicando em

$$r' = \sqrt{-\frac{\epsilon}{6}\phi_0 r^3}. \quad (5.77)$$

Daqui, é possível ver que é necessário impor $\epsilon = -1$ para a solução de $r(u)$ ser real, tornando-a

$$r' = \frac{\phi_0}{\sqrt{6}} r^3. \quad (5.78)$$

Faz-se a segunda integração para obter

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{\phi_0}{\sqrt{6}}u + K_1\right)}}, \quad (5.79)$$

como u é a coordenada radial, é possível redefini-la para englobar K_1 , que é a constante de integração, assim consegue-se a função $r(u)$

$$r(u) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\phi_0 u}}. \quad (5.80)$$

Utilizando este resultado na equação (5.74)

$$\phi' = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{u}, \quad (5.81)$$

que pode ser integrada para obter a equação do campo escalar em termos da coordenada u

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln u. \quad (5.82)$$

Agora resta descobrir $A(u)$ para obter a solução completa. Nota-se por (5.80) que

$$\frac{r'}{r} = -\frac{1}{2u}, \quad (5.83)$$

que usada em conjunto com (5.79) e (5.81) deixam (5.33) da seguinte forma

$$\frac{A'}{A} \left(\frac{-1}{2u}\right) + \frac{1}{4u^2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_0 u}{A} = \frac{3}{4u^2}, \quad (5.84)$$

o qual é facilmente simplificado, tornando-se

$$A' + \frac{A}{u} = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_0 u^2. \quad (5.85)$$

A solução desta equação é dada por

$$A(\rho) = \frac{C}{u} - \frac{\phi_0}{\sqrt{6}}u^3, \quad (5.86)$$

onde C é a constante de integração. Finalmente a métrica pode ser escrita em sua forma completa

$$ds^2 = \left(\frac{C}{u} - \frac{\phi_0}{\sqrt{6}}u^3\right) dt^2 - \left(\frac{C}{u} - \frac{\phi_0}{\sqrt{6}}u^3\right)^{-1} du^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\phi_0 u} d\Omega^2. \quad (5.87)$$

Exatamente como na seção anterior, a geometria descrita por (5.87) é idêntica à solução encontrada para o caso de k -essência descrito na seção 4.2 pela equação (4.108), porém o campo escalar se comporta de forma diferente ([28] e [5]).

5.5.1 Estrutura causal

Os escalares de curvatura para a métrica (5.87) são

$$R = \frac{5(6C - \sqrt{6}\phi_0 u^4)}{4u^3} \quad \text{e} \quad \mathcal{K} = \frac{102C^2 - 34\sqrt{6}C\phi_0 u^4 + 81\phi_0^2 u^8}{8u^6} \quad (5.88)$$

deixando claro que os pontos $u = \pm\infty$ e $u = 0$ são singularidades reais, já $u = \pm \left(\frac{\sqrt{6}C}{\phi_0}\right)^{1/4}$ constituem regiões de horizonte de eventos.

Se $C \leq 0$, a função $A(u)$ torna-se negativa e a métrica descreve um modelo cosmológico particular de Kantowski-Sachs. Para $C > 0$ a métrica é estática em $u < \left(\frac{\sqrt{6}C}{\phi_0}\right)^{1/4}$ e não-estática para valores maiores.

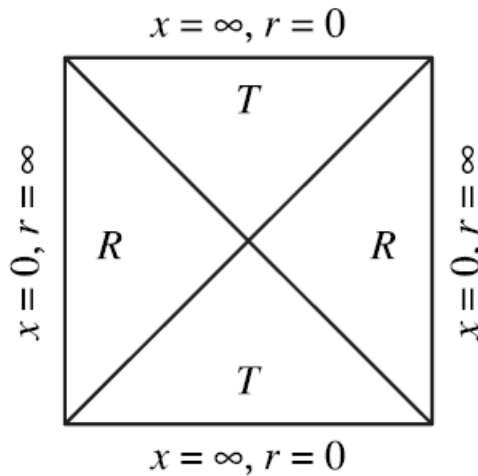


Figura 5.2: Diagrama de Carter-Penrose para solução de Rastall com $a = -1$ e $C > 0$. As letras R e T correspondem às regiões estáticas e não-estáticas, respectivamente. **Fonte:** Figura 1 da referência [5].

O diagrama de Carter-Penrose para o caso em que $C > 0$ está representado na figura 5.2, o qual muito se aparenta ao espaço-tempo de de Sitter. Contudo a região não estática T corresponde a raios menores do que a região estática, como em soluções de buracos negros. Além disso, todos os lados do diagrama correspondem à singularidades. Conclui-se que este espaço-tempo descreve um buraco negro assintoticamente singular.

5.6 Solução para $a = 3/2$

O traço da equação (5.6) resulta em

$$R = \frac{8\pi G}{1 - 2k} T, \quad (5.89)$$

lembrando que as constantes a e k se relacionam com $a = \frac{3k-2}{2k-1}$, sendo assim

$$R = 8\pi G(2a - 3)T, \quad (5.90)$$

ou seja, para $a = 3/2$

$$R = 0. \quad (5.91)$$

Assim na condição de $a = 3/2$ e $R = 0$ a equação (5.15) pode ser re-escrita da seguinte forma

$$R_{\mu}{}^{\nu} = \epsilon \left(\nabla_{\mu} \phi \nabla^{\nu} \phi - \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} \nabla_{\rho} \phi \nabla^{\rho} \phi \right), \quad (5.92)$$

facilmente observa-se que as equações de campo não dependem do potencial $V(\phi)$. Então as equações correspondentes à (5.24 - 5.27) são

$$e^{-2\alpha} [\gamma'(-\alpha' + 2\beta' + \gamma') + \gamma''] = \frac{\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.93)$$

$$e^{-2\alpha} [2\beta'^2 + \gamma'^2 - \alpha'(2\beta' + \gamma') + 2\beta'' + \gamma''] = \frac{3\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.94)$$

$$e^{-2\beta} + e^{-2\alpha} [\beta'(\alpha' - 2\beta' - \gamma') + \beta''] = \frac{\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.95)$$

$$\frac{3}{2} \phi'' + \phi' \left(\gamma' - \frac{3}{2} \alpha' + 2\beta' \right) = 0. \quad (5.96)$$

Escolhendo, mais uma vez, o calibre quase-global, dado pela relação

$$\alpha(u) = -\gamma(u), \quad (5.97)$$

as equações acima tornam-se

$$e^{2\gamma} [2\gamma'(\gamma' + \beta') + \gamma''] = \frac{\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.98)$$

$$e^{2\gamma} [2\beta'^2 + 2\gamma'^2 + 2\beta'\gamma' + 2\beta'' + \gamma''] = \frac{3\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.99)$$

$$e^{-2\beta} + e^{2\gamma} [-2\beta'(\gamma' + \beta') + \beta''] = \frac{\epsilon}{4} \phi'^2, \quad (5.100)$$

$$3\phi'' + \phi'(5\gamma' + 4\beta') = 0. \quad (5.101)$$

Nota-se que multiplicando (5.98) por três e somando com (5.99) obtém-se

$$\beta'' + 2\gamma'' + (\beta' + 2\gamma')^2 = 0. \quad (5.102)$$

A primeira integração desta equação é feita resultando em

$$\beta' + 2\gamma' = \frac{1}{u + C_1}, \quad (5.103)$$

que mais uma vez pode ser integrada para obter

$$e^{\beta+2\gamma} = pu + q, \quad (5.104)$$

onde p e q são as constantes de integração³.

Agora retorna-se às coordenadas tais que $e^\beta = r(u)$ e $e^{2\gamma} = A(u)$, de tal forma que a métrica pode ser mais uma vez escrita como em (5.30). Então re-escreve-se as equações (5.101), com o auxílio da relação (5.39), e (5.104) da seguinte maneira, respectivamente

$$Ar = pu + q, \quad (5.105)$$

$$\phi' = CA^{-5/6}r^{-4/3}. \quad (5.106)$$

Duas situações distintas merecem atenção particular.

$p \neq 0$

Para este caso pode-se re-escolher a origem da coordenada u tal que $q = 0$, além disso toma-se $p = 1$ pela escolha da escala de tempo da coordenada t . Com isso as duas equações anteriores se tornam

$$A = \frac{u}{r(u)} \quad (5.107)$$

$$\phi' = Cu^{-5/6}r^{-1/2}. \quad (5.108)$$

De (5.107) as seguintes relações são obtidas

$$\frac{A'r'}{Ar} = \frac{r'(r - ur')}{ur^2}, \quad \frac{1}{Ar^2} = \frac{1}{ur}. \quad (5.109)$$

Nota-se que a equação (5.99) nas coordenadas quase-globais é exatamente a equação (5.33), porém com $a = 3/2$. Então, utilizando as duas relações obtidas em (5.109), juntamente com (5.107) e (5.108), chega-se em

$$\frac{r'(r - ur')}{ur^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{1}{ur} = \frac{3}{4} \in C^2 u^{-5/3} r^{-1}, \quad (5.110)$$

que pode ser algebricamente manipulado, e simplificado, para obter

$$r' - 1 = \frac{3}{4} \in C^2 u^{-2/3}. \quad (5.111)$$

³ C_1 desaparece pois foi absorvida por outra constante e renomeada.

Sua resolução é facilmente obtida por direta integração

$$r(u) = Bu^{1/3} + u + r_0, \quad (5.112)$$

onde foi definido $B \equiv \frac{9}{4}\epsilon C^2$ e r_0 a constante de integração. Com isto a solução está completa.

Utilizando as equações (5.107) e (5.112) chega-se que

$$A(u) = \frac{u}{Bu^{1/3} + u + r_0}, \quad A^{-1}(u) = Bu^{-2/3} + 1 + \frac{r_0}{u}. \quad (5.113)$$

Por direta inspeção de (5.113) nota-se que analiticidade da solução é violada em $u = 0$ para a métrica (5.30), dessa forma faz sentido restringir somente para $u > 0$. É fácil ver que quando $u \rightarrow \infty$ tem-se $A \rightarrow 1$ tanto quanto $A^{-1} \rightarrow 1$, no infinito espacial $r \approx u$. Entretanto não é um infinito plano regular pois, ao contrário de Schwarzschild, a função $A(u)$ se comporta da seguinte maneira, para valores grandes de u

$$A(u) \approx 1 - Bu^{-2/3}. \quad (5.114)$$

Se a função (5.112) possuir um zero em $u_1 > 0$, corresponderá à uma singularidade repulsiva pois $A(u)$ diverge ao infinito positivo. Quando $r \rightarrow 0$, consequentemente $A \rightarrow \infty$, tem-se

$$u(Bu^{-2/3} + 1) = -r_0, \quad (5.115)$$

isto só é possível se $B < 0$, isto é, $\epsilon = -1$.

Se $r > 0$ para todo $u \geq 0$, que é possível para um valor suficientemente grande da constante r_0 mesmo se $B < 0$, então a solução é definida em todo intervalo $u \in \mathbb{R}_+$. Assim em $u = 0$ observa-se o que aparenta ser um horizonte, porém não existe extensão além dele pois o termo $u^{1/3}$ violaria a analiticidade.

Se $r_0 = 0$,

$$A(u) = \frac{1}{Bu^{-2/3} + 1}, \quad A(u)^{-1} = Bu^{-2/3} + 1. \quad (5.116)$$

Então considerando $B > 0$, tem-se $r = 0$ em $u = 0$ e $r > 0$ em $u > 0$, sendo assim a solução é mais uma vez definida para $u \in \mathbb{R}_+$, porém em $u = 0$ há um centro singular atrativo, pois $r = 0$ em $A = 0$. Também pode-se encontrar casos onde a solução é definida entre duas singularidades, uma é do tipo-horizonte em $u = 0$ e outra em algum $u > 0$ tendo a natureza de um centro repulsivo.

$p = 0$

Para este caso, as equações (C.6) e (5.106) se tornam

$$A(u) = \frac{q}{r(u)}, \quad (5.117)$$

$$\phi' = Cq^{-5/6}r^{-1/2}, \quad (5.118)$$

para $q > 0$. Agora, exatamente como feito para o caso anterior, utiliza-se a equação (5.33) com as devidas mudanças e as seguintes relações

$$\frac{A'r'}{Ar} = -\left(\frac{r'}{r}\right)^2, \quad \frac{1}{r^2A} = \frac{1}{qr}, \quad (5.119)$$

consegue-se, assim, uma relação entre as constantes

$$4q^{2/3} = 3C^2, \quad (5.120)$$

onde $\epsilon = -1$ precisou ser escolhido, isto é, só existe solução para um campo escalar fantasma. Para encontrar a função $r(u)$ utiliza-se a equação (5.32), que simplificada e com as relações (5.119), resultam em

$$r'' = \frac{1}{2q} - \frac{1}{8}\epsilon C^2 q^{-5/3}. \quad (5.121)$$

Esta equação é reduzida se utilizada as relações entre as constantes encontrada em (5.120), já impondo $\epsilon = -1$ chega-se em

$$r'' = \frac{2}{3q}, \quad (5.122)$$

que é prontamente resolvida, definindo k e r_0 como as duas constantes de integração, resultando na seguinte expressão

$$r(u) = \frac{u^2}{3q} - Ku + r_0. \quad (5.123)$$

A solução é definida no intervalo de u onde $r > 0$, dependente das duas constantes K e r_0 . Quando $r \rightarrow 0$, conseqüentemente $A \rightarrow \infty$, isto caracteriza um centro singular repulsivo em $r = 0$. Enquanto no limite $u \rightarrow \pm\infty$, tem-se $A \rightarrow 0$, isto é, uma partícula teste é atraída à região do infinito espacial e a geometria assemelha-se a de monopolo global [76].

Observado a equação (5.123) vê-se que para $r > 0$, necessariamente, $3qK^2 > 4r_0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Neste caso a solução descreve um buraco de minhoca que pode ser atravessável conectando as duas regiões infinitas.

5.7 Soluções regulares com um potencial

Na referência [52] um campo escalar auto-interagente em relatividade geral foi considerado e soluções regulares globais foram obtidas utilizando o método do problema inverso. Uma forma específica e conveniente para o raio $r(u)$ é escolhida como uma função da coordenada quase-global u da métrica escrita na forma (5.30). Após isso, a função $A(u)$, o campo escalar e o potencial foram determinados utilizando as equações de campo, que são exatamente (5.32 - 5.35) para $a = 1$.

Sendo assim utiliza-se as equações (5.36) e (5.37), que estão sendo re-escritas aqui por conveniência

$$2\frac{r''}{r} = -\epsilon\phi'^2, \quad (5.124)$$

$$A(r^2)'' - A''r^2 = 2, \quad (5.125)$$

e a função radial da mesma forma que foi escolhida em [52]

$$r(u) = \sqrt{u^2 + b^2}, \quad (5.126)$$

onde b é uma constante com a dimensão de distância. Com essa escolha, necessariamente $r'' > 0$, então (5.124) implica diretamente em um campo fantasma, o qual possui diversas soluções como buracos de minhoca assintoticamente planos ou anti de-Sitter, como também buracos negros regulares e assintoticamente planos, que o observador após cruzar o horizonte de eventos chega em um universo em expansão não-isotrópico de Kantowski-Sachs, que eventualmente tende à isotropia e é assintoticamente de Sitter. Este último tipo de solução é chamado de *universos negros* [77]⁴.

Da definição (5.126) chega-se nas seguintes relações

$$\frac{r''}{r} = \frac{b^2}{(u^2 + b^2)^2}, \quad (r^2)'' = 2, \quad (5.127)$$

logo a equação (5.124) se torna, já escolhendo $\epsilon = -1$

$$\phi' = \pm \frac{\sqrt{2}b}{u^2 + b^2}, \quad (5.128)$$

o qual pode ser facilmente integrado, resultando em

$$\phi = \pm \sqrt{2} \arctan\left(\frac{u}{b}\right) + \phi_0, \quad (5.129)$$

onde ϕ_0 é a constante de integração. Já da equação (5.125) chega-se que

$$A'' - 2\frac{A}{u^2 + b^2} = -\frac{2}{u^2 + b^2}, \quad (5.130)$$

com a seguinte solução

$$A = 1 + f_0 r^2 + \frac{u_0}{b^3} \left[bu + r^2 \arctan\left(\frac{u}{b}\right) \right], \quad (5.131)$$

onde f_0 e u_0 são constantes. Então tem-se a mesma estrutura geométrica de [52].

Mesmo com essas similaridades, utilizando (5.33), a equação do potencial é dada por

$$V(u) = -\frac{1}{(3 - 2a)r^4} \left[r^2(A'u - 1) + A(u^2 + ab^2) \right] \quad (5.132)$$

que se reduz à relatividade geral quando $a = 1$. Esta diferença pode afetar profundamente a estabilidade do modelo, visto que a constante a pode ser, em geral, totalmente arbitrária, com exceção do caso $a = 3/2$ que a solução não depende do potencial e a solução a cima não existe, tal sistema foi descrito na seção 5.6.

Já que o tensor-energia momento com traço zero aparece nas equações de Rastall da mesma forma que nas equações de Einstein, pode-se predizer que as soluções com campo eletromagnético [78], que generalizam àquelas obtidas em [52], também devem ser solução para a teoria de Rastall, porém com os potenciais modificados.

⁴Do original *black universes*.

Capítulo 6

Conclusão

No contexto da relatividade geral, espaços-tempos estáticos, esfericamente simétricos e no vácuo originam soluções de buracos negros. Estas soluções são altamente relativísticas, isto é, partículas testes possuem velocidades próximas à da luz e o campo gravitacional é intenso próximo a região do horizonte de eventos. Com isso eles se tornam objetos de alto interesse teórico no estudo da relatividade geral, podendo ser considerado o caso mais extremo de um corpo puramente gravitacional.

Assim, o objetivo principal deste trabalho foi investigar espaços-tempos com estas mesmas propriedades na teoria não-conservativa de Rastall com campo escalar não-massivo.

Para isso, no capítulo 3 foi feita a introdução do assunto com um estudo minucioso sobre o espaço-tempo de Schwarzschild [8]. Algumas das características essenciais de buracos negros foram apresentadas aqui. Foi mostrado que para qualquer partícula dentro do raio de Schwarzschild, o único futuro possível é chegar na singularidade. O diagrama de Carter-Penrose, que possui a grande qualidade de demonstrar a estrutura causal da métrica em um plano finito, foi construído com a exemplificação detalhada do espaço-tempo plano de Minkowski. Uma discussão sobre singularidades, apresentando também as *singularidades nuas*, foi feita. A caracterização da gravidade superficial, para definir a temperatura dos buracos negros, mostrou-se de grande importância para apresentar, mais à frente, *buracos negros frios*.

A teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke [20] foi motivada e explicada no capítulo 4. A maior parte dos conceitos vistos no capítulo anterior foi utilizada e aplicada. A solução estática e simetricamente esférica [26] foi deduzida para os três possíveis valores da constante de integração ($k > 0$, $k < 0$ e $k = 0$), então a solução de Fisher, $\epsilon = +1$, e anti-Fisher, $\epsilon = -1$, foram exibidas. Tendo os campos fantasmas sido previamente apresentados, a solução correspondente aos buracos negros frios [60], com campo escalar do tipo fantasma ($\epsilon = -1$ e $k > 0$), foi mais profundamente analisada. Sua estrutura e propriedade está intimamente relacionada à constante $a = b/k$. Quando possui valor par apresenta espaços-tempos do tipo Schwarzschild e quando $\rho < 2k$ à cosmologia anisotrópica de Kantowski-Sachs. Já para valores ímpares o espaço-tempo é similar à Reissner-Nordström extremo, contudo apresenta uma interpretação um tanto exótica sobre a seta do tempo dentro do horizonte de eventos. Mostra-se que o campo escalar diverge em toda região estática, independentemente do valor de a . O capítulo é encerrado mostrando as equações que regem o modelo de k -essência para soluções de buracos negros esboçando as soluções. Isto é feito para a comparação com o modelo de Rastall ser possível no capítulo seguinte, deixando

claro que a estrutura de algumas das soluções são idênticas.

Por último, no capítulo 5, a teoria de Rastall é apresentada. Ela possui o divergente do tensor energia-momento proporcional ao gradiente do escalar de Ricci R e o parâmetro livre da teoria é dado por a . É de imediata verificação que se R for constante em certa região, a solução de Rastall é também solução de relatividade geral nessa mesma região.

Com o tensor-energia momento de um campo escalar não-massivo, soluções analíticas para três valores distintos de a foram encontradas. Quando $a = -1$ e $a = 0$, a solução geométrica é idêntica à teoria de k -essência [5]. Tais soluções apresentam algumas similaridades aos buracos negros frios, porém possuem singularidades na região assintótica. Já no valor $a = 3/2$, a qual independe do potencial $V(\phi)$, soluções do tipo Schwarzschild foram obtidas, porém não apresentam regiões assintoticamente planas.

Restringindo os valores possíveis do parâmetro de Rastall para as soluções terem comportamento assintoticamente plano, a condição para existir um horizonte e que ele seja atravessável, chegou-se à conclusão que não existem buracos negros como conhecidos em relatividade geral na teoria de Rastall com campo escalar.

Por último foi exposto que para um potencial auto-interagente do campo escalar $V(\phi)$, é possível obter soluções equivalentes às já existentes em relatividade geral, com a única diferença sendo a expressão do potencial dependendo explicitamente do parâmetro a . Em particular, isto está ligado às soluções de buraco de minhoca e buracos negros, encontrados na referência [52], para campos escalares com natureza fantasma. Como no caso anterior, a diferença pode afetar a estabilidade das soluções.

Conclui-se este trabalho mostrando algumas propostas para estudo futuro: efetuar a análise de estabilidade das soluções obtidas, investigar mais à fundo o mapeamento da teoria de k -essência com a de Rastall e generalizar para um buraco negro carregado e/ou com rotação.

Apêndice A

Transformação Conforme

Uma transformação é dita **conforme** se localmente ângulos são preservados, fazendo com que a estrutura causal seja mantida no outro referencial. Isso quer dizer que se v^μ é um vetor do tipo-tempo, tipo-espaço ou nulo em um dos referenciais, ele deve manter-se de forma respectiva no outro [3].

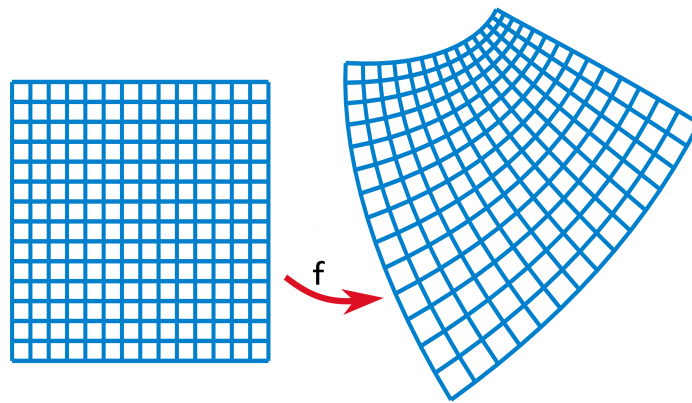


Figura A.1: Uma grade retangular sob uma transformação conforme f . Mesmo que a forma da figura não se preserve, as linhas sempre formam ângulos de 90° em ambos os casos.

Esse tipo de transformação é utilizada como um artifício matemático para transformar a métrica $g_{\mu\nu}$, redefinir o campo escalar ϕ e obter duas variáveis novas, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e $\tilde{\phi}$ [79], em que o acoplamento da nova variável de campo torna-se mínimo, o qual facilita a resolução das equações de campo. O referencial no qual isso ocorre é chamado **referencial conforme de Einstein**, já o outro referencial, onde o acoplamento é não-mínimo, chama-se **referencial conforme de Jordan**. Esta técnica é muito comum em outros contextos da física como na teoria quântica de campos em espaços curvos, mecânica estatística e teoria das cordas. Já na área de interesse, que é gravitação, essas transformações são utilizadas em teorias alternativas da gravitação, teorias unificadas em espaços multi-dimensionais e estudos de campos escalares não-minimamente acopladas à gravidade.

Lagrangiana de Brans-Dicke no referencial de Einstein

Como a lagrangiana de Brans-Dicke no referencial de Jordan é dada por (4.6), necessita-se calcular os termos R e $\sqrt{-g}$ no referencial de Einstein. Para isso supõem-se a seguinte transformação conforme, como proposto em [80]

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad \tilde{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}, \quad (\text{A.1})$$

logo

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4 \sqrt{-g}. \quad (\text{A.2})$$

Para obter o escalar de Ricci, primeiramente calcula-se a conexão afim no referencial transformado,

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2} \tilde{g}^{c\gamma} [\partial_a \tilde{g}_{b\gamma} + \partial_b \tilde{g}_{a\gamma} - \partial_\gamma \tilde{g}_{ab}], \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{\Omega^{-2}}{2} g^{c\gamma} [\partial_a (\Omega^2 g_{b\gamma}) + \partial_b (\Omega^2 g_{a\gamma}) - \partial_\gamma (\Omega^2 g_{ab})], \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{2} g^{c\gamma} (\partial_a g_{b\gamma} + \partial_b g_{a\gamma} - \partial_\gamma g_{ab}) + \Omega^{-1} g^{c\gamma} (g_{b\gamma} \partial_a \Omega + g_{a\gamma} \partial_b \Omega - g_{ab} \partial_\gamma \Omega). \quad (\text{A.5})$$

É possível identificar que o primeiro termo é a própria conexão, só que no referencial transformado, já no segundo termo utiliza-se que $\Omega^{-1} \partial_\mu \Omega = \partial_\mu \ln \Omega$ e obtém-se

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + A_{ab}^c, \quad (\text{A.6})$$

onde foi definido

$$A_{ab}^c \equiv \delta_b^c \partial_a \ln \Omega + \delta_a^c \partial_b \ln \Omega - g_{ab} \partial^c \ln \Omega. \quad (\text{A.7})$$

O tensor de Ricci é calculado, já fazendo a transformação para o novo referencial,

$$\tilde{R}_{ab} = \partial_c \tilde{\Gamma}_{ab}^c - \partial_b \tilde{\Gamma}_{al}^l + \tilde{\Gamma}_{ab}^l \tilde{\Gamma}_{lm}^m - \tilde{\Gamma}_{al}^m \tilde{\Gamma}_{bm}^l, \quad (\text{A.8})$$

$$= \partial_c \Gamma_{ab}^c + \partial_c A_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{al}^l - \partial_b A_{al}^l + \Gamma_{ab}^l \Gamma_{lm}^m + \Gamma_{ab}^l A_{lm}^m + \Gamma_{lm}^m A_{ab}^l + A_{ab}^l A_{lm}^m \\ - \Gamma_{al}^m \Gamma_{bm}^l - \Gamma_{al}^m A_{bm}^l - \Gamma_{bm}^l A_{al}^m - A_{al}^m A_{bm}^l. \quad (\text{A.9})$$

Pode ser visto que alguns desses termos são o próprio tensor de Ricci porém, de novo, no referencial transformado, assim

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} + \partial_c A_{ab}^c + \Gamma_{lm}^m A_{ab}^l - \Gamma_{al}^m A_{bm}^l - \Gamma_{bm}^l A_{al}^m - \partial_b A_{al}^l + \Gamma_{ab}^l A_{lm}^m \\ + A_{ab}^l A_{lm}^m - A_{al}^m A_{bm}^l. \quad (\text{A.10})$$

Nota-se que os 6 termos após R_{ab} são provenientes de duas derivadas covariantes totais

$$\nabla_c A_{ab}^c = \partial_c A_{ab}^c + \Gamma_{lm}^m A_{ab}^l - \Gamma_{al}^m A_{bm}^l - \Gamma_{bm}^l A_{al}^m, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_b A_{al}^l = \partial_b A_{al}^l - \Gamma_{ab}^l A_{lm}^m, \quad (\text{A.12})$$

então,

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} + \nabla_c A_{ab}^c - \nabla_b A_{al}^l + A_{ab}^l A_{lm}^m - A_{al}^m A_{bm}^l. \quad (\text{A.13})$$

Os últimos 4 termos são calculados individualmente, lembrando da definição (A.7) e como Ω é um escalar pode-se trocar $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, então as seguintes relações são obtidas

$$\nabla_c A_{ab}^c = 2\nabla_a \nabla_b \ln \Omega - g_{ab} \square \ln \Omega, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla_b A_{al}^l = 4\nabla_a \nabla_b \ln \Omega, \quad (\text{A.15})$$

$$A_{ab}^l A_{lm}^m = 8\nabla_a \ln \Omega \nabla_b \ln \Omega - 4g_{ab} \nabla_l \ln \Omega \nabla^l \ln \Omega, \quad (\text{A.16})$$

$$A_{al}^m A_{bm}^l = 6\nabla_a \ln \Omega \nabla_b \ln \Omega - 2g_{ab} \nabla_l \ln \Omega \nabla^l \ln \Omega. \quad (\text{A.17})$$

Utilizando esses resultados em (A.13)

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} - 2\nabla_a \nabla_b \ln \Omega + 2\nabla_a \ln \Omega \nabla_b \ln \Omega - 2g_{ab} \nabla_l \ln \Omega \nabla^l \ln \Omega - g_{ab} \square \ln \Omega \quad (\text{A.18})$$

e fazendo a contração do tensor de Ricci,

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab}, \quad (\text{A.19})$$

$$= \Omega^{-2} [R - 6(\square \ln \Omega + \nabla_l \ln \Omega \nabla^l \ln \Omega)], \quad (\text{A.20})$$

$$= \Omega^{-2} \left[R - 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Com a equação do escalar de Ricci transformado obtida, define-se

$$\Omega^2 \equiv \phi \quad (\text{A.22})$$

e calcula-se separadamente o termo entre colchetes

$$\frac{\square \Omega}{\Omega} = g^{ij} \frac{\partial_i \partial_j \sqrt{\phi}}{\sqrt{\phi}} = \frac{\square \phi}{2\phi} - \frac{\partial_l \phi \partial^l \phi}{4\phi^2}, \quad (\text{A.23})$$

que faz a equação A.21 tornar-se

$$R = \phi \tilde{R} + \frac{3\square \phi}{\phi} - \frac{3}{2} \frac{\partial_l \phi \partial^l \phi}{\phi^2}. \quad (\text{A.24})$$

O integrando da ação que se deseja fazer a transformação, equação (4.6), é

$$I = \sqrt{-g} \left(\phi R + \omega \frac{\partial_l \phi \partial^l \phi}{\phi} \right) \quad (\text{A.25})$$

que utilizando (A.2), (A.22) e (A.24) fica

$$I = \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} + \frac{(3+2\omega)}{2} \frac{\partial_l \phi \partial^l \phi}{\phi^3} + 3 \frac{\square \phi}{\phi^2} \right). \quad (\text{A.26})$$

O termo com o D'Alembertiano é desenvolvido da seguinte maneira

$$\int_{V^{(4)}} \sqrt{-g} \partial_l \partial^l \phi d^4 x = \int_{V^{(4)}} \partial_l (\sqrt{-g} \partial^l \phi) d^4 x = \int_{\partial V} n_l (\sqrt{-g} \partial^l \phi) d^3 x, \quad (\text{A.27})$$

onde foi utilizado o teorema de Stokes, tal que n^l é o vetor normal da hiper-superfície tri-dimensional ∂V do espaço quadri-dimensional $V^{(4)}$. A variação dessa integral desaparece pois as variáveis dinâmicas são mantidas fixas na fronteira ∂V ([2], [79]). Então, restou

$$I = \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} + \frac{(3+2\omega)}{2} \frac{\partial_l \phi \partial^l \phi}{\phi^3} \right). \quad (\text{A.28})$$

Define-se o campo escalar no referencial transformado da seguinte maneira

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3+2\omega}{2}} \ln \phi, \quad \text{tal que} \quad \sqrt{\frac{2}{3+2\omega}} \partial_\alpha \tilde{\phi} = \frac{\partial_\alpha \phi}{\phi}, \quad (\text{A.29})$$

para finalmente conseguir

$$I = \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} + \tilde{\partial}_\mu \tilde{\phi} \tilde{\partial}^\mu \tilde{\phi} \right), \quad (\text{A.30})$$

onde $\tilde{\partial}$ é a derivada no referencial da métrica re-escalada $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Qual é o referencial físico?

Antes de tudo, é bom lembrar que mesmo que o termo utilizado seja 'referencial', a transformação conforme não é simplesmente ir a outro referencial, como é vastamente feito na mecânica clássica, por exemplo, mas sim uma redefinição das variáveis que são utilizadas. Com isso, cria-se o debate se os dois referenciais conformes são físicos ou não onde 'referencial físico' refere-se ao par de variáveis de campo que se utiliza, $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi})$ ou $(g_{\mu\nu}, \phi)$. Porém isso ainda é motivo de grande discussão na comunidade científica e ainda não foi solucionado [81].

Faraoni divide os autores em cinco grupos distintos [80]: os que ignoram a discussão não mencionando o problema, os que adotam algum dos referenciais como físico, sendo o de Einstein ou de Jordan, os que assumem que ambos referenciais são físicos e os que atribuem a diferença de ambos referenciais porém não providenciam argumentos para nenhum dos dois. A confusão sobre essa discussão é tanta, que um mesmo autor pode ter trabalhos em grupos diferentes.

Os argumentos são muito variados para todos os lados possíveis. Postma e Volponi [82] defendem que 'os cálculos podem ser feitos em ambos os referenciais pois a transformação conforme pode ser vista como uma redefinição do campo o qual não afeta a física'. Já o próprio Brans [83] enfatiza que 'o tensor métrico possui significância macroscópica mensurável que é definida pela maneira que ela interage com a matéria. De fato, esta é a única maneira no qual campos clássicos podem ter algum sentido operacional', defendendo que o referencial de Jordan é o único físico. Faraoni [81] diz que 'a formulação da teoria de Brans-Dicke no referencial de Jordan não é viável pois o sinal do termo cinético do campo escalar não é positivo definido, logo a teoria não possui um estado fundamental estável. [...], a versão dessa teoria no referencial de Einstein possui a desejada propriedade dessa estabilidade'.

Os argumentos mostrados aqui servem para ilustrar superficialmente que esse debate ainda está longe de ser resolvido. Faraoni apresenta em seu livro [79] e artigo [80] vários outros argumentos e dezenas de referências para o interessado em se aprofundar no assunto.

Apêndice B

Teorema de Estrutura Global

Devido a importância deste teorema, faz-se necessário demonstrá-lo. Para maior facilidade de consulta, as equações (5.30) e (5.36) são re-escritas:

$$ds^2 = A(u)dt^2 - A^{-1}(u)du^2 - r(u)^2d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

$$A(r^2)'' - r^2A'' = 2. \quad (\text{B.2})$$

A equação (B.2) pode ser integrada tal que

$$B(u)' = -\frac{2(u - u_0)}{r^4}, \quad (\text{B.3})$$

onde u_0 é a constante de integração e definiu-se a função

$$B(u) \equiv \frac{A}{r^2}. \quad (\text{B.4})$$

Dessa maneira, o teorema pode ser formalmente enunciado e provado.

Teorema: Considerando a métrica (B.1) e $\phi = \phi(u)$ que tenha uma região estática $a < u < b \leq \infty$, então:

1. todos os horizontes são simples,
2. não existem horizontes em $u < a$ e $u > b$.

Demonstração: Sendo $u = h$ um horizonte, tem-se $A(h) = 0$. Consequentemente pela equação (B.2)

$$A''(h) = -\frac{2}{r_h^2} < 0, \quad (\text{B.5})$$

então h não pode ser solução de $A(u)$ de ordem maior que dois. Pela relação (B.4), vê-se que um horizonte é um zero da função $B(u)$ de mesma multiplicidade que de $A(u)$. Além disso, no horizonte,

$$B'(h) = \frac{A'(h)}{r_h^2}, \quad (\text{B.6})$$

logo, se a multiplicidade da função B for o dobro da função A obtém-se $B'(h) = A'(h) = 0$, que utilizando a equação (B.3) chega-se em $h = u_0$. Dessa forma, existem dois casos possíveis:

$$B' \begin{cases} > 0 \text{ em } u < h, \\ < 0 \text{ em } u > h. \end{cases}$$

Então $B < 0$ para todo $u \neq h$ e o espaço-tempo não possui região estática (curva 1 na figura B.1). Dessa forma o item 1 foi provado.

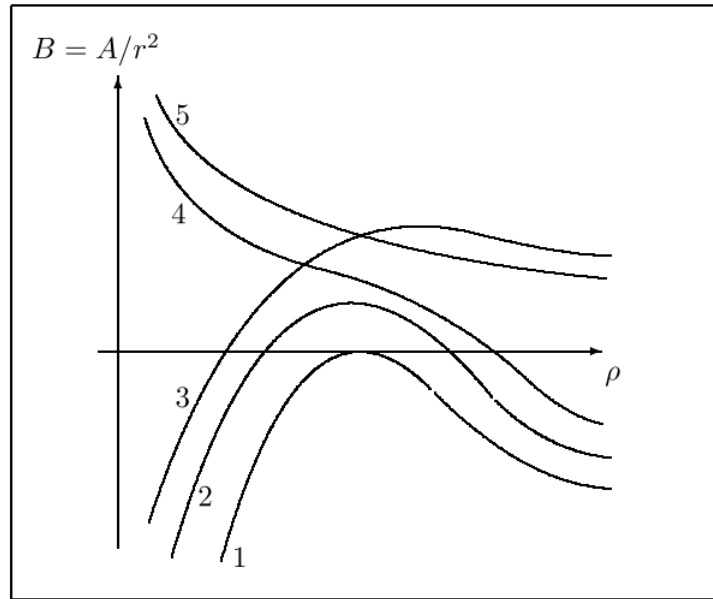


Figura B.1: Comportamento da função $B(u)$: 1) não possui região estática; 2) espaço-tempo do tipo Schwarzschild-de Sitter; 3) do tipo Schwarzschild; 4) de-Sitter; 5) Minkowski/AdS. **Fonte:** Figura 1 da referência [6].

Define-se a borda da região estática como $u = a$. Se $r(a) \neq 0$, então é um horizonte, implicando que $A(a) = B(a) = 0$. O primeiro item deste teorema requer que o horizonte seja simples e $B'(a) > 0$. Portanto, pela equação (B.3), tem-se $a < u_0$ resultando em $B' > 0$ em toda região à esquerda de $u = a$, ou seja, $B(u)$ é uma função crescente que nunca retorna à zero, eliminando a possibilidades de horizontes em $u < a$ (curvas 2 e 3 em B.1).

Similarmente, horizontes em $u > b$ são impossíveis se $b < \infty$. \square

Apêndice C

Conservação do Tensor Energia-Momento

Na seção 2.3, a conservação do tensor energia-momento foi apresentada por dois argumentos diferentes: primeiro como consequência da identidade de Bianchi e depois generalizando a conservação do tensor em relatividade restrita para espaços-curvedos. Então, nesta seção, será demonstrado um argumento mais formal para sua conservação.

Por simplicidade, assume-se uma ação que só possui o termo da matéria

$$S[g] = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m d^4x, \quad (\text{C.1})$$

tomando a variação desta ação

$$\delta S[g] = \int \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) d^4x. \quad (\text{C.2})$$

Reescrevendo a definição do tensor energia-momento dado por (2.22)

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{C.3})$$

a equação (C.2) torna-se

$$\delta S[g] = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{C.4})$$

Para avaliar esta integral, é necessário calcular individualmente o termo $\delta g_{\mu\nu}$, definido como

$$\delta g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.5})$$

A lei de transformação de um tensor de segunda ordem covariante é dada por

$$g'_{\mu\nu}(x') = \partial_\mu x^\rho \partial_\nu x^\sigma g_{\rho\sigma}(x) \quad (\text{C.6})$$

e faz-se a seguinte mudança infinitesimal de coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (\text{C.7})$$

tal que ϵ é um parâmetro arbitrariamente pequeno. Desenvolvendo o lado direito da equação (C.6)

$$\partial_\mu x^\rho \partial_\nu x^\sigma g_{\sigma\rho}(x) = \partial_\mu (x'^\rho - \epsilon^\rho) \partial_\nu (x'^\sigma - \epsilon^\sigma) g_{\sigma\rho}(x), \quad (\text{C.8})$$

$$= [\partial_\mu x'^\rho \partial_\nu x'^\sigma - \partial_\mu x'^\rho \partial_\nu \epsilon^\sigma - \partial_\nu x'^\sigma \partial_\mu \epsilon^\rho] g_{\sigma\rho}(x), \quad (\text{C.9})$$

$$= [\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \epsilon^\sigma - \delta_\nu^\sigma \partial_\mu \epsilon^\rho] g_{\sigma\rho}(x), \quad (\text{C.10})$$

$$= g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\sigma}(x) \partial_\nu \epsilon^\sigma - g_{\rho\nu}(x) \partial_\mu \epsilon^\rho, \quad (\text{C.11})$$

onde o termo de segunda ordem em ϵ foi desprezado. Expandindo o lado esquerdo de (C.6), também até segunda ordem, obtém-se

$$g'_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.12})$$

Com ambos lados desenvolvidos, iguala-se (C.11) com (C.12) para adquirir a seguinte relação

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\sigma}(x) \partial_\nu \epsilon^\sigma - g_{\rho\nu}(x) \partial_\mu \epsilon^\rho - \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x), \quad (\text{C.13})$$

para assim, utilizar este resultado na definição (C.5)

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\sigma}(x) \partial_\nu \epsilon^\sigma - g_{\rho\nu}(x) \partial_\mu \epsilon^\rho - \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{C.14})$$

Substitui-se a equação anterior na variação da ação dada em (C.4), já aplicando o princípio da mínima ação

$$\delta S[g] = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} [g_{\mu\sigma} \partial_\nu \epsilon^\sigma + g_{\rho\nu} \partial_\mu \epsilon^\rho + \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}] d^4x = 0, \quad (\text{C.15})$$

a qual pode ser integrada por partes, já desprezando os termos de superfície

$$\int [-\partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} g_{\mu\sigma}) \epsilon^\sigma - \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} g_{\mu\rho}) \epsilon^\rho + \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \epsilon^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}] d^4x = 0, \quad (\text{C.16})$$

$$\int \epsilon^\lambda \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} T^\nu_\lambda) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right] d^4x = 0. \quad (\text{C.17})$$

e como ϵ é um parâmetro arbitrário, tem-se

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} T^\nu_\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.18})$$

Para simplificar a equação acima, calcula-se a derivada covariante do tensor energia-momento da seguinte maneira

$$\nabla_\nu T^\nu_\lambda = \partial_\nu T^\nu_\lambda + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^\alpha_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha T^\nu_\alpha, \quad (\text{C.19})$$

os dois últimos termos, com a conexão afim, são calculados separadamente como se segue

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^\alpha_\lambda &= \frac{T^\alpha_\lambda}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g}, \\ \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha T^\nu_\alpha &= \frac{T^{\nu\beta}}{2} \partial_\lambda g_{\nu\beta}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Desenvolvendo a equação (C.18)

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} T^\nu_\lambda) = \sqrt{-g} \partial_\nu T^\nu_\lambda + T^\nu_\lambda \partial_\nu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad (\text{C.21})$$

e identificando a derivada covariante dada por (C.19), já utilizando as relações (C.20) chega-se

$$\nabla_\nu T^\nu_\lambda = 0. \quad (\text{C.22})$$

Então o tensor energia-momento definido por (C.3) é conservado se, e somente se, a ação de matéria for um escalar. Devido a (C.2) também mostrou-se que o tensor energia-momento é um tensor simétrico, assim a definição escolhida para $T_{\mu\nu}$ satisfaz todas as condições desejadas [84].

Bibliografia

- [1] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 ed., 2009.
- [2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2003.
- [3] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [4] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [5] K. A. Bronnikov, J. C. Fabris, and D. C. Rodrigues, "On horizons and wormholes in k-essence theories," *Grav. Cosmol.*, vol. 22, 2016.
- [6] K. A. Bronnikov, "Spherically symmetric false vacuum: No go theorems and global structure," *Phys. Rev. D*, vol. 64, 2001.
- [7] A. Einstein, "Die feldgleichungen der gravitation," *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1915.
- [8] K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory," *Physical Review*, 1916.
- [9] S. Bowyer, E. T. Byram, T. A. Chubb, and H. Friedman, "Cosmic x-ray sources," *Science*, vol. 147, 1965.
- [10] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott, "Monitoring stellar orbits around the Massive Black Hole in the Galactic Center," *Astrophys. J.*, vol. 692, 2009.
- [11] V. Cardoso, E. Franzin, and P. Pani, "Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon?," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 17, 2016.
- [12] B. P. Abbott *et al.*, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," *Physics Review Letter*, vol. 116, 2016.
- [13] J. E. McClintock and R. A. Remillard, "Black hole binaries," 2003.
- [14] L. Ferrarese and H. Ford, "Supermassive black holes in galactic nuclei: Past, present and future research," *Space Sci. Rev.*, vol. 116, 2005.
- [15] T. J. Maccarone, A. Kundu, S. E. Zepf, and K. L. Rhode, "A black hole in a globular cluster," *Nature*, vol. 445, 2007.

BIBLIOGRAFIA

- [16] B. Koch, M. Bleicher, and H. Stoecker, "Black Holes at LHC?," *J. Phys.*, vol. G34, 2007.
- [17] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama, "New cosmological constraints on primordial black holes," *Phys. Rev.*, vol. D81, 2010.
- [18] K. M. Belotsky, A. D. Dmitriev, E. A. Esipova, V. A. Gani, A. V. Grobov, M. Yu. Khlopov, A. A. Kirillov, S. G. Rubin, and I. V. Svadkovsky, "Signatures of primordial black hole dark matter," *Mod. Phys. Lett.*, vol. A29, 2014.
- [19] G. Nordström, "The Principle of Relativity and Gravitation," *Phys. Zeit.*, vol. 13, 1912.
- [20] C. H. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Physical Review*, vol. 124, 1961.
- [21] G. W. Horndeski, "Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space," *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 10, 1973.
- [22] C. Deffayet and D. A. Steer, "A formal introduction to Horndeski and Galileon theories and their generalizations," *Class. Quant. Grav.*, vol. 30, 2013.
- [23] A. De Felice and S. Tsujikawa, "f(R) theories," *Living Rev. Rel.*, vol. 13, 2010.
- [24] K. A. Bronnikov, G. Clement, C. Constantinidis, and J. C. Fabris, "Structure and stability of cold scalar-tensor black holes," *Physics Letters A*, vol. 243, 1998.
- [25] P. Rastall, "Generalization of the einstein theory," *Physical Review D*, vol. 6, 1972.
- [26] K. A. Bronnikov and S. G. S. Rubin, *Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions*. World Scientific, 2013.
- [27] K. A. Bronnikov, J. C. Fabris, O. F. Piattella, and E. C. Santos, "Static, spherically symmetric solutions with a scalar field in rastall gravity." 2016.
- [28] D. C. Rodrigues, "Teorias de k-essência em espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos," Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.
- [29] C. M. Will, "The confrontation between general relativity and experiment," *Living Rev. Relativity*, vol. 17, 2014.
- [30] D. Hilbert, "Die grundlagen der physik," *Mathematische Annalen*, vol. 92, 1924.
- [31] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3 ed., 2001.
- [32] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [33] S. W. Hawking and R. Penrose, *The Nature Of Space And Time*. Princeton University Press, 1996.
- [34] R. Penrose, "Gravitational collapse: the role of general relativity," *La Rivista del Nuovo Cimento*, vol. 1, 1969.

BIBLIOGRAFIA

- [35] K. Boshkayev, E. Gasperín, A. C. Gutiérrez-Piñeres, H. Quevedo, and S. Toktarbay, "Motion of test particles in the field of a naked singularity," *Physical Review D*, vol. 93, 2016.
- [36] P. Ancieto, P. Pani, and J. V. Rocha, "Radiating black holes in einstein-maxwell-dilaton theory and cosmic censorship violation," *Journal of High Energy Physics*, vol. 5, 2016.
- [37] P. S. Joshi, *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. Cambridge University Press, 2012.
- [38] M. D. Kruskal, "Maximal extension of Schwarzschild metric," *Phys. Rev.*, vol. 119, 1960.
- [39] C. Brandon, "Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein's Equations," *Physical Review*, vol. 141, 1966.
- [40] R. Penrose, "Republication of: Conformal treatment of infinity," *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, 2011.
- [41] O. Grøn and S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Springer Science and Business Media, 2007.
- [42] J. D. Bekenstein, "Bekenstein-hawking entropy." http://www.scholarpedia.org/article/Bekenstein-Hawking_entropy, 2008. Accessed: 27-05-2016.
- [43] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 43, 1975.
- [44] J. M. Bardenn, B. Carter, and S. W. Hawking, "The four laws of black hole mechanics," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 31, 1973.
- [45] J. M. Overduin and P. S. Wesson, "Kaluza-klein gravity," *Physcis Report*, vol. 283, 1997.
- [46] C. H. Brans, "The roots of scalar-tensor theory: an approximate history," 2005.
- [47] O. Klein, "Quantentheorie und funf dimensionale relativitatstheorie," *Zeitschrift für Physik*, vol. 37, 1926.
- [48] T. Kaluza, "Zum unitätsproblem in der physik," *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1921.
- [49] P. A. M. Dirac, "A new basis for cosmology," 1937.
- [50] S. Funkhouser, "The Large number coincidence, the cosmic coincidence and the critical acceleration," *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. A462, 2006.
- [51] P. Jordan, "Schwerkraft und weltall," *Braunschweig, F. Vieweg*, 1955.
- [52] K. A. Bronnikov and J. C. Fabris, "Regular phantom black holes," *Physical Review Letter*, vol. 96, 2006.
- [53] R. R. Caldwell, "A Phantom menace?," *Phys. Lett.*, vol. B545, 2002.

BIBLIOGRAFIA

- [54] K. A. Bronnikov, J. C. Fabris, and S. V. Gonçalves, "Different faces of the phantom," *Journal of Physics A*, vol. 40, 2007.
- [55] F. Sbisà, "Classical and quantum ghosts," *Eur. J. Phys.*, vol. 36, p. 015009, 2015.
- [56] M. Carroll, S. M. Hoffman, and M. Trodden, "Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?" *Physical Review D*, vol. 68, 2003.
- [57] S. Nojiri and S. D. Odintsov, "Quantum de sitter cosmology and phantom matter," *Physics Letter B*, vol. 562, 2003.
- [58] I. Z. Fisher, "Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 18, 1948.
- [59] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [60] K. A. Bronnikov, G. Clement, C. Constantinidis, and J. C. Fabris, "Cold scalar-tensor black holes: Causal structure, geodesics, stability," *Gravitation and Cosmology*, vol. 4, 1998.
- [61] H. G. Ellis, "Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, 1973.
- [62] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, "k - inflation," *Phys. Lett.*, vol. B458, 1999.
- [63] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, "Essentials of k essence," *Phys. Rev.*, vol. D63, 2001.
- [64] A. Komar, "Covariant conservation laws in general relativity," *Physical Review*, vol. 113, 1959.
- [65] J. C. Fabris, "Conservation laws in gravitation and cosmology," 2012.
- [66] F. Hoyle, "A New Model for the Expanding Universe," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 108, 1948.
- [67] L. L. Smalley, "Modified Brans-Dicke gravitational theory with nonzero divergence of the energy-momentum tensor," *Physical Review D*, vol. 9, 1973.
- [68] S. Malin, "On the Gravitational Field Equations and the Possibility of Time-Variation of All Masses," *Phys. Rev.*, vol. D11, 1975.
- [69] L. L. Smalley and J. Prestage, "Can Malin's Gravitational Field Equations Be Modified to Obtain a Viable Theory of Gravity?," *Nuovo Cim.*, vol. B35, 1976.
- [70] L. L. Smalley, "Variational Principle for a Prototype Rastall Theory of Gravitation," *Il Nuovo Cimento*, vol. 80B, 1984.
- [71] C. E. M. Batista, M. H. Daouda, J. C. Fabris, O. F. Piattella, and D. C. Rodrigues, "Rastall Cosmology and the Λ CDM Model," *Phys. Rev.*, vol. D85, 2012.
- [72] J. C. Fabris, O. F. Piattella, D. C. Rodrigues, C. E. M. Batista, and M. H. Daouda, "Rastall cosmology," *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, vol. 18, 2012.

- [73] J. S. Bullock, "Notes on the Missing Satellites Problem," 2010.
- [74] A. M. Oliveira, H. E. S. Velten, and J. C. Fabris, "Nontrivial static, spherically symmetric vacuum solution in a non-conservative theory of gravity," *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 12, 2016.
- [75] L. Andrianopoli, M. Derix, G. W. Gibbons, C. Herdeiro, A. Santambrogio, and A. Van Proeyen, "Isometric embedding of BPS branes in flat spaces with two times," *Class. Quant. Grav.*, vol. 17, 2000.
- [76] K. A. Bronnikov, B. E. Meierovich, and E. R. Podolyak, "Global monopole in general relativity," *J. Exp. Theor. Phys.*, vol. 95, 2002.
- [77] K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov, and H. Dehnen, "Regular black holes and black universes," *Gen. Rel. Grav.*, vol. 39, 2007.
- [78] S. V. Bolokhov, K. A. Bronnikov, and M. V. Skvortsova, "Magnetic black universes and wormholes with a phantom scalar," *Class. Quant. Grav.*, vol. 29, 2012.
- [79] V. Faraoni, *Cosmology on Scalar-Tensor Gravity*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [80] V. Faraoni, E. Gunzig, and P. Nardone, "Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology," *Fundamentals of Cosmic Physics*, vol. 20, 1999.
- [81] V. Faraoni and E. Gunzig, "Einstein frame or jordan frame?," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 38, 1999.
- [82] M. Postma and M. Volponi, "Equivalence of the einstein and jordan frames," *Physical Review D*, vol. 90, 2014.
- [83] C. H. Brans, "Nonlinear lagrangians and the significance of the metric," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 5, 1988.
- [84] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.