

Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Exatas  
Programa de Pós Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

**Teoria de Calibre e Geometria via Conexões  
de Cartan-Ehresmann**

Diego Henrique Carvalho dos Santos

Dezembro/2012

Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Exatas  
Programa de Pós Graduação em Matemática

# Teoria de Calibre e Geometria via Conexões de Cartan-Ehresmann

Diego Henrique Carvalho dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós  
Graduação em Matemática da Universidade  
Federal do Espírito Santo como requisito  
parcial à obtenção do grau de Mestre em  
Matemática.

**Orientador:** Leonardo Meireles Câmara

**Coorientador:** Magno Branco Alves

Dezembro/2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

Santos, Diego Henrique Carvalho dos, 1988-  
S237t Teoria de calibre e geometria via conexões de Cartan-  
Ehresmann / Diego Henrique Carvalho dos Santos. – 2012.  
126 f. : il.

Orientador: Leonardo Meireles Câmara.

Coorientador: Magno Branco Alves.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade  
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Chern, Shiing-Shen, 1911-. 2. Espaços fibrados  
(Matemática). 3. Conexões (Matemática). 4. Campos de calibre  
(Física). 5. Monopolos magnéticos. I. Câmara, Leonardo  
Meireles. II. Alves, Magno Branco. III. Universidade Federal do  
Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

---

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar como se dá a correspondência entre teoria de calibre e conexões em espaços fibrados. Mais precisamente estabelecemos um dicionário entre a teoria de calibre da mecânica quântica de uma partícula carregada sujeita a um campo eletromagnético e o estudo das conexões em fibrados por círculos e por retas complexas. Em seguida, analisamos dois objetos de estudo em física utilizando o conhecimento adquirido no estudo da geometria de espaços fibrados. As classes de Chern e a holonomia de uma conexão nos fornecerão uma visualização geométrica de, respectivamente, monopolos magnéticos e o efeito Aharonov-Bohm.

**Palavras Chave:** *Espaços fibrados, Conexões, Classes de Chern, Teoria de calibre, Monopolos magnéticos, efeito Aharonov-Bohm.*



# Abstract

The aim of this work is to present how works the correspondence between the gauge theory and connections in fiber bundles. More precisely establishing a dictionary between gauge theory of the quantum mechanics of a charged particle under the influence of an electromagnetic field and the studies of connections in circle bundles and line bundles. Then, we analyzed two objects of studies in physics using the knowledge acquired in the study of the geometry of fiber bundles. The Chern classes and the holonomy of a connection will provide a geometrical visualization of, respectively, magnetic monopoles and the Aharonov-Bohm effect.

**Key Words:** *Fiber bundles, Connections, Chern classes, Gauge theory, Magnetic monopoles, Aharonov-Bohm effect.*



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria de campos: Eletromagnetismo</b>	<b>3</b>
1.1 Vetores e o eletromagnetismo	3
1.1.1 As equações de Maxwell	3
1.1.2 Potenciais de calibre	5
1.1.3 Potenciais de calibre do monopolo e do solenoide	8
1.1.4 Resumo	13
1.2 Tensores e o eletromagnetismo	13
1.2.1 Tensores e pseudométricas	13
1.2.2 Uma breve digressão sobre a relatividade restrita de Poincaré e Einstein	20
1.2.3 O tensor eletromagnético e as equações de Maxwell	23
1.2.4 Resumo	26
1.3 Formas diferenciais e o eletromagnetismo	27
1.3.1 Propriedades elementares das formas diferenciais	27
1.3.2 O operador $*$ de Hodge e a codiferencial	29
1.3.3 A forma eletromagnética e as equações de Maxwell	35
1.3.4 O solenoide e o monopolo em formas diferenciais	38
1.3.5 Resumo.	40
1.4 Elementos de teorias clássicas de campos	41
1.4.1 Um breve histórico	41
1.4.2 O formalismo lagrangeano	42
1.4.3 Alguns exemplos	46
1.4.4 Simetrias	49
<b>2 Conexões em espaços fibrados</b>	<b>53</b>
2.1 Fibrados em retas e fibrados em círculos	53
2.1.1 A Fibrados em retas complexas	54
2.1.2 B Fibrados em círculos	60
2.1.3 C Fibrados associados	66



2.2	Conexões em fibrados . . . . .	67
2.2.1	A Conexões em fibrados em retas complexas . . . . .	68
2.2.2	B Conexões em fibrados por círculos . . . . .	76
2.2.3	C Conexões em fibrados associados. . . . .	81
2.3	Formas de Chern e Classes de Chern . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Aplicações em teoria de calibre</b>	<b>91</b>
3.1	Eletromagnetismo e teoria de Calibre . . . . .	91
3.1.1	Quantização canônica: A regra de correspondência . . . . .	91
3.1.2	Transformações locais e a equação de Schrödinger modificada . . . . .	94
3.1.3	Conexões e derivadas de calibre . . . . .	99
3.2	Monopolos magnéticos . . . . .	101
3.2.1	Revisitando o potencial de calibre do monopolo . . . . .	101
3.2.2	A quantização (canônica) do sistema monopolo-carga . . . . .	102
3.2.3	Geometrizando o sistema . . . . .	104
3.3	Efeito Aharonov-Bohm . . . . .	106
	<b>Conclusão</b>	<b>113</b>

# Introdução

Tullio Levi-Civita utilizando-se do cálculo tensorial, desenvolvido por ele juntamente com seu orientador Gregorio Ricci-Curbastro, estendeu a noção de conexão originalmente desenvolvida por Elwin Bruno Christoffel, objeto que se mostrou fundamental no entendimento e estudo da geometria riemanniana. Mais tarde, Élie Cartan percebendo que este objeto era central, direcionou esforços na tentativa de estender este conceito a outros ambientes além da geometria riemanniana. Foi seu aluno, Charles Ehresmann, quem colocou as ideias de Cartan numa forma unificada, para isto ele utilizou o emergente conceito de espaços fibrados. Tal formalismo é conhecido como conexões em espaços fibrados. O advento do cálculo tensorial também possibilitou uma formulação da teoria eletromagnética proposta por James Clerk Maxwell. Por algum tempo permaneceu a questão de que se a teoria de Maxwell respondia por todos os fenômenos relacionados às forças elétrica e magnética. A então recém surgida mecânica quântica forneceu uma resposta negativa para tal questão. De fato, existem fenômenos relacionados a estas forças que não são previstos nem explicados pela teoria de Maxwell.

Um ponto alto da teoria quântica foi quando Hermann Weyl percebeu que a mecânica quântica que descreve a interação entre uma partícula carregada e um campo eletromagnético é completamente reobtida de uma teoria mais simples quando se impõe um certo princípio, a este ele chamou de princípio da invariância de calibre. A toda teoria desenvolvida de maneira similar chama-se hoje, em física teórica, de teoria de calibre. Foram Wu e Yang que perceberam que os ambientes geométrico de conexões em espaços fibrados e físico de teoria de calibre são na verdade diferentes descrições de um mesmo objeto. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar como se dá tal correspondência, estabelecendo assim um dicionário entre geometria e física. Objetivando uma melhor didática e maior conforto do leitor, optamos por apresentar como tal correspondência é dada nos exemplos mais simples de cada lado. Em geometria, veremos fibrados em círculos e em retas complexas, que são casos particulares de, respectivamente, fibrados principais e vetoriais. E em física, veremos a teoria de calibre da mecânica quântica de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético.

No capítulo 1, com o intuito de estabelecer as notações e resultados necessários ao longo do texto, apresentamos diferentes formulações do eletromagnetismo, a saber: vetorial, tensorial e exterior. A formulação tensorial, além de ser mais consistente, nos permitirá

apresentar ao leitor algumas operações com tensores muito comuns nos cursos de física porém nem tanto nos de matemática. A formulação exterior será conveniente para nossos objetivos. Ainda neste capítulo, aproveitamos a linguagem inserida e apresentamos ao leitor conceitos básicos de teorias físicas de campos, que são essenciais para o estudo das modernas teorias de calibre. No segundo capítulo apresentaremos os objetos geométricos em pauta, fibrados em círculos e em retas complexas e algumas de suas propriedades, bem como suas conexões e objetos delas provenientes. Ainda neste capítulo apresentaremos um conceito fundamental em nossa exposição, a classe de Chern, e o concluiremos com o primeiro ponto alto do trabalho, um profundo teorema devido a Chern. Finalmente no capítulo 3, faremos uma exposição da referida teoria de calibre para em seguida apresentar a prometida correspondência entre geometria e física. Concluiremos o trabalho expondo nosso segundo ponto alto, que é a apresentação de dois objetos de estudo em física e suas identificações como objetos geométricos.

Assumimos do leitor, como pré-requisito, um conhecimento básico de variedades diferenciáveis que inclua, por exemplo, seus espaços tangente e cotangente, campos de vetores e formas diferenciais sobre estas e ainda o teorema de Stokes. Além disso uma familiaridade com elementos básicos de geometria riemanniana será indispensável para a leitura das seções 1.2 e 1.3 e ainda permitirá uma melhor apreciação das seções 2.2 e 2.3. Também assumimos que o leitor já teve algum contato, a nível elementar, com a teoria clássica do eletromagnetismo. Para uma apresentação da teoria de variedades e de elementos básicos de geometria riemanniana indicamos [1], [37], [21], [14] e [32]. Para um contato introdutório com a teoria eletromagnética recomendamos [25].

# Capítulo 1

## Teoria de campos: Eletromagnetismo

Neste capítulo apresentaremos o moderno estudo da teoria eletromagnética em diferentes formulações: vetorial, tensorial e exterior. Além disso o faremos dentro do contexto mais geral das teorias clássicas de campos. Para isso utilizamos como referências principais os seguintes textos: [25], [17], [35], [24] e [3].

### 1.1 Vetores e o eletromagnetismo

Ao longo do texto consideraremos aplicações sempre de classe  $C^\infty$ , a menos de menção contrária. Nesta seção faremos uma breve apresentação dos conceitos básicos referentes à teoria de Maxwell do eletromagnetismo, a saber: equações de Maxwell, força de Lorentz, potenciais de calibre e transformações de calibre. A concluiremos com dois exemplos que serão centrais para nossos objetivos futuros.

#### 1.1.1 As equações de Maxwell

Em síntese, a teoria de Maxwell do eletromagnetismo pode ser descrita como o estudo dos campos elétrico  $E(t, x)$  e magnético  $B(t, x)$  definidos sobre um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e que eventualmente dependem do tempo, i.e., aplicações  $E, B : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , estudando como estes interagem entre si, como são influenciados por uma corrente elétrica  $j(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  e por uma densidade de carga  $\rho(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e ainda como interagem com uma partícula pontual carregada. Este último é dado pela força de Lorentz

$$F = ma = q(E + v \times B), \tag{1.1}$$

onde  $a = a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  é a aceleração da partícula que percorre a trajetória descrita por  $x(t)$ . As demais interações são dadas pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times B = -\frac{j}{\epsilon_0} \quad (1.5)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo, duas constantes físicas.

Em geral consideram-se sistemas confinados, ou seja, existe alguma superfície compacta  $S$  tal que  $j$  e  $\rho$  se anulam identicamente em  $S \cup U$ , onde  $U$  é a componente conexa do infinito de  $\mathbb{R}^3 - S$ . Neste caso as equações de Maxwell têm uma importante consequência garantida pela seguinte proposição.

**Proposição 1.1** *A carga total  $Q$ , dada por*

$$Q = \int_{\Omega} \rho dx,$$

*permanece constante ao longo do tempo  $t$ .*

**Demonstração.** *Primeiramente verifiquemos a validade da equação*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot j \quad (1.6)$$

*conhecida como equação de continuidade. Tomando o divergente de (1.5), temos*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times B \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{j}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \nabla \cdot E}{\partial t} - c^2 \nabla \cdot (\nabla \times B) &= \left( -\frac{\nabla \cdot j}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \nabla \cdot E}{\partial t} - 0 &= \left( -\frac{\nabla \cdot j}{\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

*e substituindo (1.4),*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\epsilon_0 \partial t} - 0 &= \left( -\frac{\nabla \cdot j}{\epsilon_0} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot j \end{aligned}$$

Derivando a carga total em relação ao tempo e utilizando a equação de continuidade, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} \rho dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} -\nabla \cdot j dx \\ (\text{Teo. Gauss}) &= - \int_S \langle j, n \rangle dA\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pelo Teorema da Derivação sob o Sinal da Integral e a última igualdade segue pelo Teorema de Gauss da análise vetorial. Como  $j$  se anula identicamente sobre  $S$ , temos que  $\langle j, n \rangle \equiv 0$ . Logo,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Ou seja, a carga total é preservada, o que justifica o nome da equação (1.6). ■

### 1.1.2 Potenciais de calibre

Outro ponto importante desta teoria é que a equação de Maxwell homogênea  $\nabla \cdot B = 0$  é automaticamente satisfeita se  $B = \nabla \times A$  para algum campo  $A$ , pois  $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$ . Assumindo a existência de tal campo e substituindo na segunda equação homogênea, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \nabla \times A}{\partial t} + \nabla \times E &= \nabla \times \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \nabla \times E \\ &= \nabla \times \left( \frac{\partial A}{\partial t} + E \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tal equação é automaticamente satisfeita se  $\frac{\partial A}{\partial t} + E = -\nabla \phi$  para alguma função diferenciável  $\phi$ , pois  $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ . À primeira vista, a existência de tais  $A$  e  $\phi$  parecem um tanto forçada, no entanto, veremos que suas existências podem ser garantidas localmente. Assim é natural que busquemos soluções para as equações de Maxwell da forma:

$$\begin{aligned}B &= \nabla \times A \\ E &= -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.7}$$

pois, nestas condições, as equações homogêneas são automaticamente satisfeitas. Evidentemente, não basta encontrar um campo de vetores  $A$  e uma função diferenciável  $\phi$ , pois ainda temos outras duas equações de Maxwell a serem satisfeitas. Por isto, o seguinte resultado é necessário.

**Lema 1.2** *Para que um par  $A$  e  $\phi$  seja solução das equações de Maxwell através de (1.7), estes devem satisfazer*

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (1.8)$$

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{c^2 \epsilon_0} + \nabla \left[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (1.9)$$

**Demonstração.** Basta substituir (1.7) primeiramente em (1.4) e assim

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\epsilon_0} &= \nabla \cdot E \\ &= \nabla \cdot \left( -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \\ &= -\Delta\phi - \frac{\partial(\nabla \cdot A)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Subtraindo  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$  dos dois lados e rearranjando os termos, encontramos

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right].$$

Substituindo agora em (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{j}{\epsilon_0} &= \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \nabla \times B \\ &= \frac{\partial \left( -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right)}{\partial t} - c^2 \nabla \times (\nabla \times A) \\ &= \frac{\partial \left( -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right)}{\partial t} - c^2 (\nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A) \\ &= -\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - c^2 (\nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A). \end{aligned}$$

Por fim, multiplicando ambos lados por  $\frac{1}{c^2}$  e rearranjando os termos, temos

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{c^2 \epsilon_0} + \nabla \left[ \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right].$$

■

Assim passamos do problema de resolver as quatro equações (1.2) - (1.5) para o de resolver as duas em (1.8), (1.9). O seguinte resultado é de grande relevância na teoria de Maxwell, pois garante que tais soluções não são únicas.

**Lema 1.3** *Se o par  $A$  e  $\phi$  é solução para as equações de Maxwell, então para qualquer função diferenciável  $\chi$ , a transformação*

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ A &\rightarrow A' = A + \nabla \chi\end{aligned}\tag{1.10}$$

*produz novas soluções.*

**Demonstração.** De fato, basta verificar que tal transformação não altera os campos  $E$  e  $B$ , o que é uma conta simples substituindo (1.10) em (1.7). ■

A invariância garantida pelo resultado anterior foi logo percebida historicamente e se mostrou uma poderosa ferramenta para se resolver as equações diferenciais provenientes da teoria de Maxwell, como vemos no

**Exemplo 1.4** *Dada uma solução  $(A', \phi')$ , podemos encontrar uma solução  $(A, \phi)$  tal que  $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ , pois basta escolher, caso exista,  $\chi(t, x)$  tal que*

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot A' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t},$$

*que é o que se chama de uma equação da onda com fonte. Então*

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \nabla \cdot (A' + \nabla \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t})}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot A' + \nabla \cdot \nabla \chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \\ &= \left( \nabla \cdot A' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \left( \nabla \cdot \nabla \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \\ &= \left( \nabla \cdot A' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \left( -\nabla \cdot A' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

*e neste caso as equações (1.8) e (1.9) se reduzem a*

$$\begin{aligned}\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{1}{c^2} \frac{j}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

*que são equações de onda com fonte, porém mais simples de serem resolvidas do que (1.8) e (1.9). Observamos ainda que existem considerações adicionais em termos de condições de fronteira, elas estão ligadas ao fato de que a própria escolha do  $\chi$  tem a seguinte invariância:  $\chi \rightarrow \chi' = \chi + \xi$ , onde  $\xi(t, x)$  é qualquer solução da equação de onda homogênea (sem fonte)  $\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$ , mas tais considerações são irrelevantes agora.*



Em física, o par  $(\phi, A)$  é chamado de *potencial de calibre* e (1.10) de *transformação de calibre*. Mais adiante conheceremos a motivação dessa nomenclatura e por que a invariância por transformações de calibre é considerada o princípio fundamental da teoria eletromagnética. A escolha de  $A$  e  $\phi$  dada no exemplo anterior é chamada de calibre de Lorentz. Naturalmente se apresenta a seguinte questão: Os campos  $A$  e  $\phi$  têm alguma relevância física ou são resultados de mera manipulação matemática? Mais adiante veremos uma resposta plausível para tal pergunta. A seguinte observação será de grande utilidade neste sentido.

**Exemplo 1.5** *Em termos dos potenciais de calibre, a expressão para a força de Lorentz é dada por*

$$ma = q \left[ \nabla (\langle v, A \rangle - \phi) - \frac{dA}{dt} \right].$$

De fato, segue de (1.1) e de (1.7) que

$$\begin{aligned} ma &= q(E + v \times B) \\ &= q \left[ -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A) \right]. \end{aligned}$$

Sabemos do cálculo vetorial que  $v \times (\nabla \times A) = \nabla \langle v, A \rangle - \langle v, \nabla \rangle A$  e que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x_j} = \frac{\partial A}{\partial t} + \langle v, \nabla \rangle A.$$

Assim

$$\begin{aligned} ma &= q \left[ -\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \langle v, \nabla \rangle A + \nabla \langle v, A \rangle - \langle v, \nabla \rangle A \right] \\ &= q \left[ -\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \nabla \langle v, A \rangle \right] \\ &= q \left[ \nabla (\langle v, A \rangle - \phi) - \frac{dA}{dt} \right]. \end{aligned}$$

### 1.1.3 Potenciais de calibre do monopolo e do solenoide

Concluiremos esta seção inicial com dois exemplos que serão centrais mais adiante.

**Exemplo 1.6 (Potencial de calibre do solenóide)** *Considere um fio condutor em formato de hélice com raio  $a$  e que se estende infinitamente para cima e para baixo. Tal aparato é chamado solenoide. Consideremos, por conveniência, este enrolado em torno do eixo  $z$ . Então ele produz um campo magnético*

$$B(t, x) = \begin{cases} (0, 0, B_0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases}$$

e não produz nenhum campo elétrico (ver seção 5.3.3 de [25] e seção 13.5 de [19]). Como  $E$  e  $B$  são constantes, eles claramente satisfazem as equações de Maxwell. Queremos encontrar um potencial de calibre para este campo. É fácil verificar que, dentro do solenoide, i.e., para  $\rho \leq a$ , a escolha (como  $E(t, x) \equiv 0$  temos que  $\phi$  é trivial e portanto nos preocuparemos apenas com  $A$ )  $A(t, x) = \frac{B_0}{2}(-y, x, 0)$  serve como potencial pois

$$B = \nabla \times A = \nabla \times \left[ \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) \right] = (0, 0, B_0).$$

Também vemos que este não pode ser estendido a todo o domínio, pois  $B = 0$  fora do solenoide. Poderíamos, à primeira vista, imaginar que

$$A(t, x) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases}$$

seria uma boa escolha para o potencial, mas esta conduz a inconsistências. Considere por exemplo um disco  $D$  fechado de raio  $\rho > a$  contido no plano  $xy$ . Por definição, o fluxo magnético que passa por  $D$  é

$$\Phi = \int_D B \cdot ndA = B_0 \int_{D'} dA = B_0 \pi a^2,$$

onde  $D'$  é o disco de raio  $\rho = a$ . Mas temos também

$$\Phi = \int_D B \cdot ndA = \int_D (\nabla \times A) \cdot ndA = \oint_{\Gamma} A \cdot dr = 0,$$

onde  $\Gamma$  é a fronteira de  $D$  e a última igualdade segue pelo Teorema de Stokes. Logo devemos ter um potencial que gere um campo magnético nulo fora do solenoide, porém que não conduza a nenhuma contradição em termos do fluxo magnético. Para encontrar um potencial adequado para a região fora do solenoide, observemos duas coisas:

i) Dentro do solenoide o potencial é circular ao redor do eixo  $z$ , então podemos esperar comportamento similar fora, i.e.,  $A \approx (-y, x, 0)$ .

ii) Para qualquer disco no plano  $xy$  com raio  $\rho_0 > a$  a integral de linha de  $A$  sobre sua fronteira deve ter o valor constante  $B_0 \pi a^2$ . Mas esta é proporcional ao raio  $\rho$  e ao módulo do campo  $A$ , logo  $|A|$  deve variar de maneira inversamente proporcional a  $\rho$ , i.e.

$$|A| \approx \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

Combinando estes dois argumentos, é esperado encontrar  $A$  da forma

$$A = k \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right).$$

Observe que este  $A$  conduz a um campo magnético identicamente nulo

$$\begin{aligned}\nabla \times A &= \nabla \times \left[ k \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right) \right] \\ &= k \left( \partial_y 0 - \partial_z \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)} \right), \partial_z \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)} \right) - \partial_x 0, \partial_x \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)} \right) - \partial_y \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)} \right) \right) \\ &= k(0, 0, 0).\end{aligned}$$

Resta-nos, portanto, apenas encontrar o valor da constante  $k$ , o que é feito considerando-se o valor do fluxo magnético através de um disco de raio  $\rho_0 > a$ . Parametrizando a fronteira do disco por  $r(t) = (\rho_0 \cos(t), \rho_0 \sin(t), 0)$  com  $t \in (0, 2\pi)$ , temos

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_{\Gamma} A \cdot dr = \int A \cdot r' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle k \left( \frac{-\rho_0 \sin(t)}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}, \frac{\rho_0 \cos(t)}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}, 0 \right), (-\rho_0 \sin(t), \rho_0 \cos(t), 0) \right\rangle dt \\ &= k \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 \sin(t)^2 + \rho_0^2 \cos(t)^2}{\rho_0^2(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} dt \\ &= k2\pi\end{aligned}$$

o que será consistente se

$$\Phi = B_0 \pi a^2 \Leftrightarrow k2\pi = B_0 \pi a^2 \Leftrightarrow k = \frac{B_0 a^2}{2} = \frac{\Phi}{2\pi}.$$

E assim, encontramos um potencial de calibre adequado para descrever o solenoide:

$$A(t, x) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ \frac{B_0 a^2}{2} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases}$$

$$\phi(t, x) = 0.$$

**Exemplo 1.7 (Monopólo magnético)** Considere uma partícula eletricamente carregada e estática na origem do  $\mathbb{R}^3$ . Pela lei de Coulomb, esta cria um campo eletromagnético em  $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ , constante no tempo, dado por

$$E(t, x) = \frac{q}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z) = \frac{q}{r^2} e_r$$

$$B(t, x) = 0$$

onde  $q$  é a carga da partícula e  $(r, \phi, \theta)$  são as coordenadas esféricas de  $\mathbb{R}^3$ , com respectivos vetores tangentes  $(e_r, e_\phi, e_\theta)$ . Cálculos diretos mostram que este satisfaz as equações de Maxwell, lembrando que neste caso não temos matéria, ou seja, densidade de carga e corrente elétrica são ambos nulos. Ainda temos, neste caso, que

$$\phi(t, x) = -\frac{q}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$A(t, x) = 0$$

é um potencial de calibre, pois  $B(t, x) = 0 = \nabla \times 0 = \nabla \times A$  e

$$\begin{aligned} E(t, x) &= -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= -\nabla \left( -q(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) - 0 \\ &= q \left( \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x, \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2y, \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2z \right) \\ &= q \left( \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right). \end{aligned}$$

O análogo magnético desta situação nunca foi encontrado na natureza, porém Dirac, em seu célebre artigo [12], supôs tal existência e mostrou que esta levaria a grandes consequências, como veremos na seção 3.2 deste trabalho. Considere uma partícula estática na origem com “carga magnética”  $g$ , note que (por analogia ao caso da partícula elétrica-mente carregada) esta produz um campo eletromagnético em  $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$  dado por

$$\begin{aligned} E(t, x) &= 0 \\ B(t, x) &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z) = \frac{g}{r^2}e_r. \end{aligned}$$

Novamente, cálculos diretos mostram que este satisfaz as equações de Maxwell. Queremos agora encontrar um potencial de calibre para descrever tal situação. Como  $E \equiv 0$  nos preocuparemos apenas com  $A$ . Primeiramente observe que não existe um único potencial em todo  $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ . De fato, supondo tal existência, teríamos por um lado que o fluxo magnético através de uma esfera de raio  $R$  centrada na origem seria

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S^2} B \cdot dS = \int_{S^2} \frac{g}{r^2} e_r \cdot ndA \\ &= \frac{g}{R^2} \int_{S^2} dA = \frac{g}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= 4\pi g \end{aligned}$$

e por outro, o Teorema de Stokes nos garantiria que

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{S^2} B \cdot dS = \int_{S^2} (\nabla \times A) \cdot dS \\ &= \int_{S^2_+} (\nabla \times A) \cdot dS + \int_{S^2_-} (\nabla \times A) \cdot dS \\ &= \oint_C A \cdot dr + \oint_{-C} A \cdot dr = \oint_C A \cdot dr - \oint_C A \cdot dr \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $S^2_+$  e  $S^2_-$  representam o hemisfério norte e sul da esfera, respectivamente, e  $C$  o equador.

Apesar de não termos existência global, já sabemos da existência local do potencial de calibre. O que faremos agora é apresentar uma cobertura de  $\Omega$  por dois abertos e um potencial definido em cada um deles. Considere o aberto  $U_+ = \Omega - Z_-$  tal que  $Z_- = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$ . Tal conjunto é um exemplo do que é conhecido em física como corda de Dirac, i.e., uma curva contínua que começa na origem, não se intersecta e se prolonga infinitamente em uma dada direção. Um cálculo direto mostra que  $A_+ = \frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi) e_\theta$  é um potencial de calibre em  $U_+$ . De fato, lembrando que em coordenadas esféricas temos  $A = A_r e_r + A_\phi e_\phi + A_\theta e_\theta$  de onde segue que

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta \sin \phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \right) e_r \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) e_\phi \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} A_r \right) e_\theta, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \nabla \times A_+ &= \frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta \sin \phi) \right) e_r \\ &= \frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{g(1 - \cos \phi)}{r} \right) \right) e_r \\ &= -\frac{g}{r^2 \sin \phi} (-\sin \phi) e_r \\ &= \frac{g}{r^2} e_r. \end{aligned}$$

Analogamente,  $A_- = \frac{-g}{r \sin \phi} (1 + \cos \phi) e_\theta$  é um potencial de calibre em  $U_- = \Omega - Z_+$ , onde  $Z_+ = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ . Claramente  $A_+$  e  $A_-$  não coincidem na interseção de seus domínios e não poderia ser diferente, pois, caso contrário, teríamos um potencial global. Explicitamente, em  $U_+ \cap U_-$  vale

$$\begin{aligned} A_+ - A_- &= \left[ \frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi) - \frac{-g}{r \sin \phi} (1 + \cos \phi) \right] e_\theta \\ &= \left[ \frac{g}{r \sin \phi} (1 - \cos \phi + 1 + \cos \phi) \right] e_\theta \\ &= \frac{2g}{r \sin \phi} e_\theta \\ &= \nabla (2g\theta), \end{aligned}$$

onde o operador gradiente é calculado em coordenadas esféricas, i.e.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta.$$

Isso nos diz que  $A_+$  e  $A_-$  diferem por uma transformação de calibre com  $\chi = 2g\theta$ , portanto descrevem a mesma situação física.

### 1.1.4 Resumo

Na verdade, a maneira que Maxwell propôs a sua teoria é um tanto diferente da expomos aqui. De fato, a diferença fundamental é que tal formulação era baseada na matemática difundida na época, e a matemática utilizada aqui, o cálculo vetorial, só tornou-se popular algum tempo depois. Até então, contas e operações eram todas feitas componente a componente. Não é difícil para o leitor se convencer do quanto a notação vetorial forneceu em termos operacionais e de notação. Efetivamente, sem este dispositivo, teríamos de trabalhar com as seis funções diferenciáveis correspondentes às componentes de cada campo ao invés de lidarmos com dois campos de vetores  $E$  e  $B$ . Além disso, ao invés das quatro equações diferenciais (1.2) - (1.5), teríamos oito.

De maneira muito similar, temos a influência direta do desenvolvimento de certas áreas da matemática para novas formulações da teoria de Maxwell, a saber o cálculo tensorial desenvolvido por Gregorio Ricci-Curbastro e o cálculo exterior desenvolvido por Élie Cartan, ambos por volta de 1890. Nas próximas duas seções veremos como formular a teoria de Maxwell em termos do cálculo tensorial e do cálculo exterior.

## 1.2 Tensores e o eletromagnetismo

Quando Maxwell unificou eletricidade, magnetismo e ótica através de sua teoria do eletromagnetismo ele o fez para um sistema de referência em repouso. Porém não se sabia como mudar as equações entre diferentes referenciais inerciais, problema que só foi resolvido por Einstein em 1905 no seu *tour de force* sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento ([16]). Foi Hermann Minkowski quem formulou a teoria eletromagnética de maneira conveniente a realizar a mudança de referenciais. Nesta formulação espaço e tempo são vistos agora como uma única entidade quadridimensional e objetos que antes eram vetores tridimensionais sobre um espaço tridimensional passam a ser novos objetos conhecidos como tensores sobre esse novo espaço-tempo. Para mais detalhes históricos sobre o desenvolvimento paralelo da física e da matemática aqui abordadas, o leitor interessado pode consultar [48].

Nesta seção nos ocuparemos de formular a teoria eletromagnética tal qual feito por Minkowski. Iniciaremos apresentando conceitos e fatos gerais relacionados a tensores para em seguida apresentarmos fatos básicos relacionados a relatividade restrita, o que por fim nos permitirá apresentar a prometida formulação.

### 1.2.1 Tensores e pseudométricas

Antes de formularmos a teoria de Maxwell numa linguagem tensorial, daremos uma breve apresentação dos conceitos e resultados necessários, a começar pela

**Definição 1.8** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$ . Uma aplicação

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q\text{-vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{p\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{K}$$

é chamada de tensor se for  $(q+p)$   $\mathbb{K}$ -linear. Neste caso, dizemos  $T$  é um tensor do tipo  $(q,p)$ , ou  $T$  é um tensor  $q$ -contravariante e  $p$ -covariante. Chamamos de posto do tensor à soma  $(q+p)$  e denotamos por  $T_p^q(V)$  o espaço de todos os tensores de tipo  $(q,p)$  sobre  $V$ .

**Exemplo 1.9** Um escalar é um tensor do tipo  $(0,0)$ . Um vetor é um tensor do tipo  $(1,0)$ . Um covetor (elemento do dual) é um tensor do tipo  $(0,1)$ . Um produto interno é um tensor do tipo  $(0,2)$ .

Antes de prosseguirmos, vamos convencionar alguma notação. Primeiramente, vamos utilizar sempre a convenção de Einstein para índices, onde a repetição de um índice num mesmo fator indica soma sobre este índice. Usaremos também dois símbolos muito comuns na literatura em física, o delta de Kronecker:

$$\delta_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e o símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação par de } 1 \dots n \\ -1 & \text{se } i_1 \dots i_n \text{ é uma permutação ímpar de } 1 \dots n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos para fixar estes conceitos.

**Exemplo 1.10** Sendo  $v, w \in V$  dois vetores do espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  e  $A$  uma matriz  $n \times n$  com entradas  $a_{ij}$ , tal que  $v = Aw$ , então em relação a uma base  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , temos

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_j^i w^j \right) e_i.$$

Com a convenção de Einstein teremos  $v = v^i e_i = a_j^i w^j e_i$ , onde fica claro que os índices devem ser somado de 1 a  $n$ , pois esta é a dimensão do espaço. Mas, como  $e_i$  é uma base, vale a igualdade  $v^i = a_j^i w^j$ . Observemos que  $a_j^i$  representa o elemento que se encontra na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ . Agora, se considerarmos  $v = Aw + k$ ,  $k \in V$ , teremos

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i + \sum_{i=1}^n k^i e_i = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{j=1}^n a_j^i w^j \right) + k^i \right] e_i.$$

De acordo com esta convenção,  $v^i = a_j^i w^j + k^i$ , o que não gera confusão pois apenas o índice  $j$  aparece repetido em um mesmo fator.

**Exemplo 1.11** Com as mesmas notações do exemplo anterior, suponha que  $v = (\lambda I + A)w$ , onde  $I = (\delta_j^i)$  é a matriz identidade e  $\lambda$  uma constante. Assim,

$$v = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \lambda \delta_j^i w^j + \sum_{j=1}^n a_j^i w^j \right) e_i.$$

Desta forma, a equação  $v = (\lambda \delta_j^i w^j + a_j^i w^j) e_i$  nos diz que

$$v^i = \lambda \delta_j^i w^j + a_j^i w^j = \lambda w^i + a_j^i w^j.$$

A notação utilizada aqui, como veremos, não é apenas troca de símbolos, de fato ela já fornece vantagens imediatas. Vemos, por exemplo, o quanto é mais fácil e direto obter certos resultados de álgebra linear com essa nova linguagem. Iremos ilustrar um destes através do seguinte

**Exemplo 1.12** O produto vetorial  $C = A \times B$  em  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas cartesianas é dado por

$$(C^1, C^2, C^3) = (A^2 B^3 - A^3 B^2, A^3 B^1 - A^1 B^3, A^1 B^2 - A^2 B^1).$$

Sem dificuldade podemos verificar que ele pode ser expresso em notação tensorial por

$$C^i = \epsilon_{ijk} A^j B^k.$$

Ainda, dado um vetor  $D = D^i e_i$  de  $\mathbb{R}^3$ , o produto triplo  $(D, A, B) = \langle D, A \times B \rangle$  é dado por

$$D^i \epsilon_{ijk} A^j B^k = \epsilon_{ijk} D^i A^j B^k$$

e como  $jki$  e  $kij$  são permutações pares de  $ijk$ , temos  $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$ , logo

$$\epsilon_{ijk} D^i A^j B^k = \epsilon_{kij} D^i A^j B^k = \epsilon_{jki} D^i A^j B^k$$

o que nos diz que  $(D, A, B) = (B, D, A) = (A, B, D)$ , que é um resultado de álgebra linear conhecido como propriedade cíclica do produto triplo.

A seguir vemos as operações básicas feitas com tensores.

**Definição 1.13** Dados um tensor  $T$  do tipo  $(q, p)$  e um tensor  $S$  do tipo  $(q, p)$ , definimos sua soma como

$$(T + S)(\omega^1, \dots, \omega^q, v_1, \dots, v_p) = T(\omega^1, \dots, \omega^q, v_1, \dots, v_p) + S(\omega^1, \dots, \omega^q, v_1, \dots, v_p).$$

**Definição 1.14** Dados um tensor  $T$  do tipo  $(q, p)$  e um tensor  $S$  do tipo  $(s, r)$ , definimos seu produto tensorial como

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(\omega^1, \dots, \omega^q, \omega^{q+1}, \dots, \omega^{q+s}, e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+r}) \\ = T(\omega^1, \dots, \omega^q, e_1, \dots, e_p) \cdot S(\omega^{q+1}, \dots, \omega^{q+s}, e_{p+1}, \dots, e_{p+r}). \end{aligned}$$



**Definição 1.15** Dado um tensor  $T$  do tipo  $(q, p)$ , podemos obter um tensor  $K$  do tipo  $(q-1, p-1)$  da seguinte maneira

$$K(\omega_1, \dots, \omega_{q-1}, v_1, \dots, v_{p-1}) = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \alpha, \omega_n, \dots, \omega, v_1, \dots, v_{m-1}, w, v_m, \dots, v_{p-1}).$$

Tal operação é chamada contração  $(n, m)$  por  $\alpha$  e  $w$  do tensor  $T$ .

É um resultado bem conhecido da álgebra multilinear (cf. [1]) que dada uma base  $e_i$  de  $V$  e sendo  $dx^j$  sua base dual, então qualquer tensor do tipo  $(q, p)$  pode ser escrito de maneira única na forma

$$T = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p} \quad (1.11)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  percorrem a dimensão do espaço  $V$ .

**Observação 1.16** Desta maneira, uma vez fixada uma base, tem sentido estudar o tensor pensando em suas componentes. Assim para as operações básicas entre tensores temos que dada uma base  $\{e_i\}$  e sua base dual  $\{dx^j\}$ , o tensor  $K = T + S$  é caracterizado pelas componentes  $K_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  tais que

$$K = K_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}$$

onde  $K_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} + S_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$ . O tensor  $G = T \otimes S$  é caracterizado pelas componentes  $G_{j_1 \dots j_{p+r}}^{i_1 \dots i_{q+s}}$  tais que

$$G = G_{j_1 \dots j_{p+r}}^{i_1 \dots i_{q+s}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{p+1} \otimes \dots \otimes e_{p+r} \otimes dx^1 \otimes \dots \otimes dx^q \otimes dx^{q+1} \otimes \dots \otimes dx^{q+s}$$

onde  $G_{j_1 \dots j_{p+r}}^{i_1 \dots i_{q+s}} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \cdot S_{j_{p+1} \dots j_{p+r}}^{i_{q+1} \dots i_{q+s}}$ .

**Exemplo 1.17** Considere  $S, T \in T_2^0(\mathbb{R}^2)$  tais que  $S = 2dx \otimes dx + dy \otimes dy$  e  $T = -dx \otimes dy + 3dy \otimes dy$  então  $S + T = 2dx \otimes dx - dx \otimes dy + 4dy \otimes dy$ .

**Exemplo 1.18** Considere  $T \in T_2^0(\mathbb{R}^2)$  e  $S \in T_0^1(\mathbb{R}^2)$  tais que  $T = 2dx \otimes dy + dy \otimes dy$  e  $S = 3e_1 + 4e_2$  então  $T \otimes S = 6e_1 \otimes dx \otimes dy + 3e_1 \otimes dy \otimes dy + 8e_2 \otimes dx \otimes dy + 4e_2 \otimes dy \otimes dy$ .

**Exemplo 1.19** Considere  $T \in T_2^1(\mathbb{R}^2)$  tal que  $T = e_1 \otimes dx \otimes dx - 2e_1 \otimes dy \otimes dy + 3e_2 \otimes dx \otimes dx - 4e_2 \otimes dy \otimes dy$ ,  $\alpha = dx - dy$  e  $v = e_1 + 2e_2$ , então a contração  $(1, 2)$  por  $\alpha$  e  $v$  do tensor  $T$  é dada por

$$\begin{aligned} T' &= T(\alpha, \cdot, v) \\ &= (e_1 \otimes dx \otimes dx - 2e_1 \otimes dy \otimes dy + 3e_2 \otimes dx \otimes dx - 4e_2 \otimes dy \otimes dy)(\alpha, \cdot, v) \\ &= dx - 4dy - dx + 8dy \\ &= 4dy \end{aligned}$$

Um outro conceito importante que devemos esclarecer é o de covariância ou contravariância das componentes de um tensor. Para entendermos este conceito, lembremos primeiramente que dada uma base  $\{e_i\}$  de  $V$  um vetor  $v$  é escrito de maneira única na forma  $v = a^i e_i$ . Considerando-se uma outra base  $\{f_i\}$  de  $V$ , então  $v$  se escreve de maneira única na forma  $v = b^k f_k$ . Considerando-se a mudança de base  $e_i \rightarrow f_i$ , sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível com entradas  $c_k^j$  tal que  $f_k = c_k^j e_j$ . Então,

$$a^i e_i = b^k f_k \Rightarrow a^i e_i = b^k c_k^j e_j \Rightarrow a^i = b^k c_k^i.$$

Em outras palavras

$$a = c \cdot b, \quad a = (a^1 \cdots a^n)^T, \quad b = (b^1 \cdots b^n)^T.$$

Assim, observamos que os coeficientes  $b^k$  mudam de maneira inversamente proporcional aos  $c_k^i$ , por isso são chamados *componentes contravariantes*.

De maneira análoga, sendo  $\{dx^i\}$  e  $\{dy^j\}$  as bases duais de  $\{e_i\}$  e  $\{f_j\}$ , respectivamente, a mudança de base  $f_k = c_k^j e_j$  nos fornece uma mudança de base  $dx^i \rightarrow dy^i$  da seguinte forma

$$dx^l (f_k) = dx^l (c_k^j e_j) = c_k^j \delta_j^l.$$

Mas, sabemos ainda que deve existir uma matriz inversível com entradas  $a_s^r$  tal que

$$\begin{aligned} a_s^r dy^s &= dx^r \Rightarrow a_s^r dy^s (f_k) = c_k^j \delta_j^r \Rightarrow \\ a_s^r \delta_k^s &= c_k^j \delta_j^r \Rightarrow a_k^r = c_k^r. \end{aligned}$$

Ou seja,  $c_j^k dy^j = dx^k$ . Então, para um dado covetor  $\omega$  escrito na base  $dx^i$  dual a  $e_i$  como  $\omega = \alpha_i dx^i$  e na base  $dy^j$  dual a  $f_j$  como  $\omega = \beta_j dy^j$ , encontramos que

$$\alpha_k dx^k = \beta_i dy^i \Rightarrow \alpha_k c_j^k dy^j = \beta_i dy^i \Rightarrow \alpha_k c_i^k = \beta_i.$$

Em outras palavras,

$$\beta = \alpha \cdot c, \quad \alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^T, \quad \beta = (\beta_1 \cdots \beta_n)^T.$$

Neste caso, observamos que os coeficientes  $\beta_k$  mudam de maneira diretamente proporcional aos  $c_i^k$  e por isso são chamados de *componentes covariantes*. Por convenção, índices superiores representam componentes contravariantes e índices inferiores componentes covariantes. O seguinte resultado esclarece a noção para um caso mais geral.

**Proposição 1.20** *Dado um tensor  $T$  de tipo  $(q, p)$  caracterizado pelas componentes  $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  e  $T_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q}$  em relação às bases  $\{e_i\}$  e  $\{f_k\}$ , respectivamente. Seja  $c_k^j$  a matriz mudança de coordenadas relativa à mudança de base  $e_i \rightarrow f_k$ . Então*

$$T_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} c_{i_1}^{k_1} \cdots c_{i_q}^{k_q} b_{l_1}^{j_1} \cdots b_{l_p}^{j_p}$$

onde  $b_j^i$  é a matriz inversa de  $c_k^j$ , i.e.,  $b_j^i c_k^j = \delta_k^i$ .

**Demonstração.** Ver [1], Capítulo 6, Proposição 6.1.7. ■

Vale ressaltar que, em física, o que se tem em geral é um conjunto de valores dependentes de índices. Este é chamado de tensor de certo tipo após ser feita uma análise de como é alterado por uma mudança de base e, muitas vezes, não é claro de imediato que este conjunto como um todo tem uma natureza de aplicação multilinear. Certamente, termos este conceito em mente já é uma grande vantagem.

Dado um espaço vetorial  $V$  com produto interno  $g$ , existe um isomorfismo natural entre  $V$  e  $V^*$  dado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_g : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto g(v, \cdot) \end{aligned}$$

Em outras palavras, iremos identificar  $v$  e  $\omega_v = g(v, \cdot)$ . Dada uma base  $\{e_i\}$  de  $V$ , a *matriz de Gramm* de  $g$  relativa a essa base é definida como sendo aquelas cujas entradas são  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ . Também, temos associada à essa base sua base dual  $\{dx^j\}$ . Assim, para qualquer vetor temos  $v = a^i e_i$  e  $\omega_v = a_j dx^j$ . Portanto, para qualquer vetor  $w = c^k e_k$ , temos

$$\begin{aligned} \omega_v(w) = g(v, w) &\Leftrightarrow a_j dx^j(c^k e_k) = g(a^i e_i, c^k e_k) \Leftrightarrow \\ a_j c^k \delta_{jk} &= a^i c^k g(e_i, e_k) \Leftrightarrow a_k c^k = a^i c^k g_{ik} \Leftrightarrow a_k = a^i g_{ik}. \end{aligned}$$

Como  $g$  é sempre uma matriz inversível, i.e., existe uma matriz  $g^{-1}$  com entradas  $g^{ik}$  tal que  $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$ , então,  $a_k = a^i g_{ik}$  implica em

$$a_k g^{kj} = a^i g_{ik} g^{kj} \implies a_k g^{kj} = a^i \delta_{ij} \implies a_k g^{ki} = a^i.$$

Assim, a matriz de Gramm pode ser usada para transformar as componentes contravariantes de um vetor nas componentes covariantes do seu covetor associado e vice-versa. Em outras palavras, com ela podemos “subir” e “abaixar” índices. A operação  $I_g$  é denotada por  $\flat$ , enquanto sua inversa é denotada por  $\sharp$ . De uma maneira geral, podemos obter de um tensor qualquer  $T$  do tipo  $(q, p)$ , um tensor associado  $T'$  de tipo  $(r, s)$ , onde  $r + s = p + q$ , aplicando os operadores  $\flat$  e  $\sharp$  em quaisquer de suas entradas

$$T' \xrightarrow{\text{assoc}} T$$

$$T'(\alpha_1, \dots, \alpha_s, v_1, \dots, v_r) \longmapsto T(\alpha_1, \dots, \alpha_m^\sharp, \dots, \alpha_q, v_1, \dots, v_l^\flat, \dots, v_p)$$

**Exemplo 1.21** Dado um tensor  $T$  de tipo  $(0, 2)$ , podemos associar um tensor  $T'$  de tipo  $(1, 1)$  da seguinte maneira

$$T'(\alpha, v) = T(\alpha^\sharp, v).$$

Em componentes temos

$$T(\alpha^\sharp, v) = T_{ij} v^i \alpha^\sharp{}^j = T_{ij} v^i \alpha_k g^{kj} = T_{ij} g^{kj} v^i \alpha_k.$$

Tomando  $T_i^k = T_{ij}g^{kj}$ , encontramos  $T'(\alpha, v) = T_i^k v^i \alpha_k$ . Analogamente, dado um tensor  $\bar{T}$  de tipo  $(0, 2)$  podemos associar um tensor  $\bar{T}''$  de tipo  $(2, 0)$  da seguinte maneira

$$\bar{T}''(\alpha, \beta) = \bar{T}(\alpha^\#, \beta^\#)$$

e em componentes temos

$$\bar{T}(\alpha^\#, \beta^\#) = \bar{T}_{ij} \alpha^\#{}^i \beta^\#{}^j = \bar{T}_{ij} \alpha_k g^{ki} \beta_m g^{mj} = \bar{T}_{ij} g^{ki} g^{mj} \alpha_k \beta_m$$

tomando  $\bar{T}''{}^{km} = \bar{T}_{ij} g^{ki} g^{mj}$  obtemos  $\bar{T}''(\alpha, \beta) = \bar{T}''{}^{km} \alpha_k \beta_m$ .

Além de permitir as operações de subir e abaixar índices, um produto interno em um espaço vetorial também permite estender este conceito naturalmente para o espaço de tensores.

**Definição 1.22** Dados dois tensores  $T, S \in T_p^q(V)$  sobre um espaço vetorial  $V$  munido de um produto interno  $g$ , definimos o produto interno entre  $T$  e  $S$  como

$$g(T, S) = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} S_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p},$$

onde  $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  e  $S_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  são as componentes de  $T$  e  $S$  relativas a uma dada base e a operação subir e abaixar índices é feita com a matriz de  $g$  relativa a esta base. Mais precisamente  $S_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = g^{j_1 i_1'} \dots g^{j_q i_q'} g_{i_1 i_1'} \dots g_{i_q i_q'} S_{j_1' \dots j_p'}^{i_1' \dots i_q'}$ .

É possível mostrar, com um simples exercício de álgebra linear (ver [36], Seção 4.1), que esta definição não depende da escolha da base para  $V$  e portanto está bem definida.

Até o momento, trabalhamos apenas com a noção de tensores definidos sobre um espaço vetorial e vimos como este conceito estende a noção de vetor. De maneira análoga, podemos estender a noção de campos de vetores, definidos sobre uma variedade diferenciável  $M$ , para a de campos de tensores.

**Definição 1.23** Dada uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$ , um campo de tensores  $T$  de tipo  $(p, q)$  sobre  $M$  é uma aplicação que a cada  $x \in M$  faz corresponder um tensor  $T(x)$  de tipo  $(p, q)$  sobre  $T_x M$ . Ou seja, para cada  $x \in M$  temos um tensor

$$T(x) : \overbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}^{p \text{ vezes}} \otimes \overbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}^{q \text{ vezes}} \mapsto \mathbb{R}.$$

Dado um sistema de coordenadas locais  $x_\mu$  para  $M$ , sabemos que  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(x) := e_\mu(x)$  forma uma base para  $T_x M$ , para todo  $x$ , sendo  $dx^\mu$  sua base dual. Assim, nesse sistema de coordenadas,  $T$  é escrito como

$$T = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}.$$

Dizemos que  $T$  é um campo de tensores diferenciável (respec. contínuo ou de classe  $C^r$ ) se, para qualquer sistema de coordenadas  $x_\mu$  de  $M$ , os coeficientes  $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$  de  $T$  são funções diferenciáveis (respec. contínuas ou de classe  $C^r$ ). Ao conjunto de todos os campos de tensores de tipo  $(q, p)$  diferenciáveis sobre  $M$  denotamos por  $\mathcal{T}_p^q(M)$ . São naturais as identificações:  $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$ ,  $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$  e  $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ .

Dada uma função diferenciável  $f$  sobre  $M$ , podemos considerar a sua diferencial, que em cada ponto define um covetor no espaço tangente. Esta, por definição, é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} dx^\mu = \partial_\mu f dx^\mu = a_\mu dx^\mu,$$

portanto, faz sentido chamar a derivação parcial ordinária de funções de derivação covariante. Mais adiante veremos que, para obter uma derivação covariante de objetos mais complexos do que funções, necessitamos de uma estrutura adicional na variedade.

Se  $M$  é uma variedade pseudoriemanniana, i.e., é equipada com um produto interno  $g$  que varia diferenciavelmente sobre a variedade, temos uma maneira natural de associar a essa diferencial um campo vetorial que, em cada ponto, será o vetor associado ao covetor correspondente. A esse campo chamamos de gradiente de  $f$  e escrevemos  $\nabla f$ . Para encontrarmos suas componentes devemos “subir” os índices da diferencial

$$(df)^\sharp = \nabla f = a^\nu e_\nu = (a_\mu g^{\mu\nu}) e_\nu = (\partial_\mu f g^{\mu\nu}) e_\nu.$$

Tal consideração motiva a seguinte definição, que conclui a apresentação dos conceitos básicos envolvendo tensores que nos serão úteis.

**Definição 1.24** *Seja  $(M, g)$  uma variedade pseudoriemanniana e  $x_\mu$  um sistema de coordenadas locais, definimos a derivação contravariante de uma função diferenciável como*

$$\partial^\nu f = g^{\nu\mu} \partial_\mu f,$$

ou seja,  $\partial^\nu f$  é a  $\nu$ -ésima componente do vetor  $\nabla f$  neste sistema de coordenadas.

### 1.2.2 Uma breve digressão sobre a relatividade restrita de Poincaré e Einstein

Na formulação vetorial do eletromagnetismo apresentada na seção anterior, fizemos o estudo das grandezas físicas, sempre definidas sobre a variedade produto  $\mathbb{R} \times \Omega$ , sem necessariamente nos preocuparmos com nenhuma estrutura adicional, apesar de termos utilizado a estrutura métrica canônica do  $\mathbb{R}^3$  implicitamente nos operadores diferenciais gradiente, divergente e rotacional. Para formularmos o eletromagnetismo em linguagem tensorial, iremos utilizar uma variedade diferenciável com uma estrutura métrica muito específica, o espaço-tempo de Minkowski. Mais adiante veremos que tal escolha não é

de forma alguma arbitrária, pois as isometrias do espaço-tempo de Minkowski, i.e., as transformações que preservam sua estrutura métrica, são exatamente as transformações pelas quais as equações de Maxwell são invariantes.

Historicamente, foi exatamente a procura de transformações que deixassem as equações de Maxwell invariantes que levaram ao aparecimento do espaço-tempo de Minkowski. Na verdade, tal procura unida a várias experiências e considerações teóricas levaram à formulação da teoria da relatividade restrita, proposta independentemente por Henri Poincaré e Albert Einstein por volta de 1905.<sup>1</sup> Não temos aqui a pretensão de nos aprofundar em tal teoria, queremos somente estabelecer o mínimo necessário para uma formulação tensorial do eletromagnetismo. Recomendamos o leitor interessado a ler os §§6.6 e 6.7 de [17], para uma apresentação um pouco mais detalhada do que a apresentada aqui, ou ainda, os Capítulos 4 e 13 de [50], para uma discussão mais completa sobre o assunto.

**Definição 1.25** Chamamos de espaço-tempo de Minkowski, denotando-o por  $\mathbb{R}^{1,3}$ , a variedade pseudoriemanniana  $(\mathbb{R}^4, g)$ , com coordenadas  $(ct, x, y, z)$ , munida do produto interno  $g$ , tal que, neste sistema de coordenadas,  $[g_{ij}]$  é uma matriz  $4 \times 4$  da forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix}$$

onde  $\text{id}|_{\mathbb{R}^3}$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ . Convenciona-se, ainda, que  $ct = x_0$ ,  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ , e  $z = x_3$ .

**Definição 1.26** Uma transformação linear inversível  $L : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  que preserva o produto interno de  $\mathbb{R}^{1,3}$  é chamada de transformação de Lorentz.

Um resultado técnico que será útil mais a frente é o seguinte:

**Proposição 1.27** Uma condição necessária e suficiente para que  $L$  seja uma transformação de Lorentz é que sua matriz mudança de coordenadas satisfaça

$$L^T g L = g,$$

ou, equivalentemente,

$$L^{-1} = g^{-1} L^T g.$$

---

<sup>1</sup>Muito embora a teoria tenha como proponente mais conhecido o físico alemão A. Einstein, é preciso reconhecer que o matemático francês H. Poincaré concebeu a mesma ideia um pouco antes de Einstein. Seus trabalhos foram submetidos quase que simultaneamente, no entanto o artigo completo de Einstein foi aceito em setembro de 1905 enquanto o de Poincaré somente em janeiro de 1906 ([43], [44], [16]). Para uma discussão mais aprofundada da questão da precedência, veja([28], [31], [41]).

**Demonstração.** A necessidade segue direto do fato de  $L$  preservar o produto interno de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . De fato, sendo  $v \in \mathbb{R}^{1,3}$  e  $v' = Lv$ , teremos  $v'^\alpha = L^\alpha_\beta v^\beta$ , de onde segue que

$$\begin{aligned} g(v', v') &= g(v, v) \Rightarrow \\ g_{\alpha\beta} v'^\alpha v'^\beta &= g_{\alpha\beta} L^\alpha_\mu v^\mu L^\beta_\nu v^\nu = g_{\alpha\beta} L^\alpha_\mu L^\beta_\nu v^\mu v^\nu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \end{aligned}$$

Como  $v$  é arbitrário, temos que  $g_{\alpha\beta} L^\alpha_\mu L^\beta_\nu = g_{\mu\nu}$ , de onde segue que

$$(L^T g L)_\nu^\mu = (L^T)_\alpha^\mu g_{\alpha\beta} L^\beta_\nu = L^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} L^\beta_\nu = g_{\mu\nu}.$$

Para verificarmos a suficiência, observe que  $g(v, v) = v^T g v$  e

$$v' = Lv \Rightarrow v'^T = v^T L^T.$$

Assim,  $g = L^T g L$  implica que

$$v^T g v = v^T (L^T g L) v = (v^T L^T) g (Lv) = v'^T g v'.$$

Já a equivalência segue multiplicando-se ambos os termos da primeira igualdade por  $L^{-1}$  pela direita e por  $g$  pela esquerda. ■

**Exemplo 1.28** A transformação  $L$  cuja matriz na base canônica é dada por

$$L = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \sigma = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix},$$

$\text{id}|_{\mathbb{R}^2}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

é uma transformação de Lorentz. De fato temos

$$\begin{aligned} (L)^T g L &= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\gamma\beta)^2 - \gamma^2 & \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & 0 \\ \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & \gamma^2 - (\gamma\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de  $\gamma$  e  $\beta$ , encontramos

$$(L)^T g L = \begin{bmatrix} \frac{v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{c^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}|_{\mathbb{R}^2} \end{bmatrix} = g$$

como queríamos. Tal transformação tem grande relevância, pois transforma as coordenadas de um referencial  $S$  para as de um referencial  $S'$  que se afasta ao longo de eixo  $x$  com velocidade  $v$ .

**Definição 1.29** A trajetória de um corpo é descrita por uma curva parametrizada  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ , tal que a composição da parametrização com a aplicação  $t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , que é a projeção no eixo  $t$ , é um difeomorfismo. Tal curva é chamada linha de universo. O valor  $t \circ x : I \rightarrow \mathbb{R}$  é chamado de tempo do referencial, e o valor:

$$\tau = \int_I \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x(\lambda)) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda$$

é chamado tempo próprio do corpo.

**Definição 1.30** A velocidade relativística, também chamada de quadrivelocidade, é obtida parametrizando a linha do tempo pelo parâmetro  $\tau$  obtendo o campo tangente:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \Rightarrow U = \left( \gamma, \gamma \frac{v}{c} \right) \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

### 1.2.3 O tensor eletromagnético e as equações de Maxwell

Podemos agora começar a formular a teoria de Maxwell em linguagem tensorial, o que é feito definindo-se um tensor covariante de posto dois

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

e um tensor contravariante de posto um

$$J^\alpha = (\rho, j) = (\rho, j_1, j_2, j_3).$$

Um questionamento razoável por parte do leitor seria porque unificar a densidade de carga e a corrente num único tensor e os campos elétrico e magnético num outro único tensor. O primeiro é justificado pelo fato de que ambos, densidade de carga e corrente elétrica, serem diferentes manifestações de uma mesma entidade. De fato, ambos dizem algo a respeito da matéria carregada na região do espaço estudada, um diz sobre a posição e o outro sobre o deslocamento. Um fato surpreendente é que o segundo também é justificado pelo mesmo motivo. Observemos, por exemplo, a seguinte consideração, retirada do Capítulo 12 de [25].

**Observação 1.31** Dada uma região do espaço onde estão presentes um campo elétrico e um campo magnético, considere dois referenciais  $S$  e  $S'$  movendo-se um em relação ao outro ao longo do eixo  $x$  com velocidade  $v$ . Sejam  $E, B$  as respectivas escritas destes campos no referencial  $S$  e  $E', B'$  no referencial  $S'$ . Estes campos são relacionados por

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3) & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2) \\ B'_1 &= B_1 & B'_2 &= \gamma(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3) & B'_3 &= \gamma(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2). \end{aligned}$$



Um cálculo simples e direto mostra que este é exatamente o resultado de se transformar o tensor (1.12) sob a transformação do Exemplo 1.28, de acordo com a Proposição 1.20. Em outras palavras, os campos elétrico e magnético são diferentes manifestações de uma mesma entidade. Retomando a formulação tensorial da teoria de Maxwell, concluímos que esta deve se materializar no estudo do tensor  $F_{\alpha\beta}$ , de como este interage com o tensor  $J^\alpha$  e de como interage com uma partícula carregada, o que será visto nos próximos três resultados.

**Exemplo 1.32** *A operação de subir índices aplicada ao tensor eletromagnético  $F_{\alpha\beta}$  dado por (1.12) gera o 2-tensor contravariante  $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}F_{\mu\nu}g^{\nu\beta}$  cuja representação matricial é dada por*

$$\begin{aligned} [F^{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -F_{01} & -F_{02} & -F_{03} \\ -F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ -F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A força de Lorentz vetorial é dada por um vetor em três dimensões, i.e., um tensor contravariante de posto um em três dimensões. O seu análogo no espaço de Minkowsk será ainda um tensor contravariante de posto um tal que suas três últimas componentes sejam a força de Lorentz vetorial. A primeira componente tem uma interpretação física em termos da relatividade restrita que foge ao nosso escopo, o leitor interessado pode consultar a seção 26.4 de [19]. Assim se denotarmos a força de Lorentz vetorial por  $F = (F^1, F^2, F^3)$ , seu análogo tensorial será o tensor  $F^\alpha$  de componentes  $(F^0, F) = (F^0, F^1, F^2, F^3)$ . Temos portanto

**Proposição 1.33** *A expressão tensorial da força de Lorentz é dada por*

$$F^\alpha = qF^{\alpha\beta}U_\beta,$$

onde  $U^\beta$  é a quadrivelocidade da partícula pontual.

**Demonstração.** Calculando explicitamente as componentes, temos

$$\begin{aligned} F^0 &= qF^{0\beta}U_\beta = q(0 + E_1U_1 + E_2U_2 + E_3U_3); \\ F^1 &= qF^{1\beta}U_\beta = q(E_1U_0 + 0 + B_3U_2 - B_2U_3); \\ F^2 &= qF^{2\beta}U_\beta = q(E_2U_0 - B_3U_1 + 0 + B_1U_3); \\ F^3 &= qF^{3\beta}U_\beta = q(E_3U_0 + B_2U_1 - B_1U_2 + 0). \end{aligned}$$

Assim, encontramos  $F^\alpha = (F^0, F)$ , onde  $F^0 = E_1U_1 + E_2U_2 + E_3U_3$  e  $F = (F^1, F^2, F^3) = q(U_0E + U \times B)$ . ■

**Proposição 1.34** *As equações de Maxwell homogêneas*

$$\nabla \cdot B = 0 \quad e \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0$$

são equivalentes à equação tensorial

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (1.13)$$

**Demonstração.** Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} &= 0 \Leftrightarrow \\ \partial_1 B_1 + \partial_3 B_3 + \partial_2 B_2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_0 F_{13} + \partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} = 0 \\ \partial_0 F_{12} + \partial_2 F_{01} + \partial_1 F_{20} = 0 \\ \partial_0 F_{23} + \partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 B_1 + \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 = 0 \\ \partial_0 B_2 + \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 = 0 \\ \partial_0 B_3 + \partial_1 E_3 - \partial_2 E_1 = 0 \end{array} \right.$$

Mas isto é o mesmo que  $\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0$ . ■

**Proposição 1.35** *As equações de Maxwell não-homogêneas:*

$$\nabla \cdot E = \rho \quad e \quad \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -j$$

são equivalentes à equação tensorial

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha. \quad (1.14)$$

**Demonstração.** Recorde do Exemplo 1.32 que

$$[F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -F_{01} & -F_{02} & -F_{03} \\ -F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ -F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha &\Rightarrow \partial_\beta F^{0\beta} = J^0 \Rightarrow \\ \partial_0 0 + \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \rho \Rightarrow \nabla \cdot E = \rho. \end{aligned}$$

E ainda, de  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$  obtemos

$$\begin{cases} \partial_0 F^{10} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} = J^1 \\ \partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{23} = J^2 \\ \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} + \partial_3 F^{33} = J^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} = J^1 \\ \partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_3 F^{23} = J^2 \\ \partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} = J^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\partial_0 E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 = J^1 \\ -\partial_0 E_2 - \partial_1 B_3 + \partial_3 B_1 = J^2 \\ -\partial_0 E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = J^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 E_1 - (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) = -J^1 \\ \partial_0 E_2 - (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) = -J^2 \\ \partial_0 E_3 - (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) = -J^3 \end{cases}$$

De onde encontramos  $\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -j$ . ■

### 1.2.4 Resumo

A teoria de Maxwell em notação tensorial é o estudo do tensor (covariante antissimétrico de posto dois) eletromagnético  $F_{\alpha\beta}$  e de como este interage com uma quadricorrente  $J^\alpha$ , através das equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} &= 0 \\ \partial_\beta F^{\alpha\beta} &= J^\alpha, \end{aligned}$$

e com uma partícula carregada, através da força de Lorentz  $F^\alpha = qF^{\alpha\beta}U_\beta$ .

Com a formulação tensorial das equações de Maxwell, a equação de continuidade pode ser obtida derivando-se os dois lados da equação e  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$ , tendo em vista o Lema de Schwartz e a antissimetria do tensor  $F_{\alpha\beta}$ . De fato,

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha \Rightarrow \partial_\alpha \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha J^\alpha \Rightarrow \partial_\alpha J^\alpha = 0.$$

Em outras palavras,

$$\partial_0 J^0 + \partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0.$$

O leitor já pode dar-se conta do quanto a nova formulação fornece ganhos em termos operacionais.

Como antes, podemos introduzir o conceito de calibre via a escolha de um 1-tensor  $A_\alpha$  que determine  $F_{\alpha\beta}$  via um operador diferencial convenientemente escolhido, de tal forma que a equação de Maxwell homogênea (1.13) seja automaticamente satisfeita. Um cálculo imediato mostra que um 1-tensor  $A_\alpha$  satisfazendo  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  atende as condições desejadas.

Note ainda que o 1-tensor  $A_\alpha$  não é único, pois, qualquer que seja a função diferenciável  $\chi$ , a transformação  $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$  não altera as equações de Maxwell. Além disso, verifica-se facilmente que o tensor eletromagnético  $F_{\alpha\beta}$  fica completamente determinado

pelo potencial de calibre vetorial  $A_\alpha = (\phi, A_1, A_2, A_3)$ . Por exemplo:

$$\begin{cases} F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 \\ F_{20} = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 \\ F_{30} = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \partial_x(-\phi) - \partial_t A_1 \\ E_2 = \partial_y(-\phi) - \partial_t A_2 \\ E_3 = \partial_z(-\phi) - \partial_t A_3 \end{cases} \Rightarrow E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t},$$

o que coincide exatamente com o que tínhamos em (1.7).

Encontrar as equações de movimento para o potencial de calibre também fica muito simples agora. De fato, de  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , encontramos

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_\beta (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = \partial_\beta \partial^\alpha A^\beta - \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = J^\alpha.$$

Ou seja,  $\partial_\beta \partial^\alpha A^\beta - \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = J^\alpha$ . Neste caso, o calibre de Lorentz  $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  se reduz a  $\partial_a A^\alpha = 0$ . Logo, as equações de movimento se reduzem a

$$\square A^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = -J^\alpha.$$

Concluimos assim nossa formulação tensorial do eletromagnetismo.

Ao longo desta seção, introduzimos os tensores e adotamos a notação de índices e com estes obtivemos uma formulação mais natural do eletromagnetismo. Ao leitor que porventura ainda não esteja convencido que esta nova linguagem não se resume a uma simples troca de notação, temos ainda dois pontos a levantar: O primeiro é que a notação tensorial com índices é a notação clássica e corrente em textos de física, logo o matemático que pretende estabelecer uma conexão com a física deve ter uma boa fluência em tal linguagem. O segundo é que a linguagem apresentada facilita também a escrita local e operações explícitas com formas diferenciais, objetos que têm grande relevância em várias áreas da matemática.

## 1.3 Formas diferenciais e o eletromagnetismo

Como já mencionado, assumimos do leitor uma certa familiaridade com formas diferenciais. Mas a título de fixar notação, apresentamos nesta seção algumas definições e resultados básicos relacionados a estas sem demonstração. Ao final formularemos a teoria eletromagnética na linguagem do cálculo exterior e ainda veremos como ficam em tal linguagem os exemplos vistos na seção 1.1.

### 1.3.1 Propriedade elementares das formas diferenciais

Afim de convencionar notação, iremos recordar os principais conceitos e resultados relacionados a estas.

**Definição 1.36** *Um campo de tensores diferenciável  $A$  de tipo  $(p, 0)$  sobre uma variedade  $M$  é chamado de uma  $p$ -forma diferencial se for completamente antissimétrico, i.e., para todos  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$  temos que*

$$A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = (-1)^\sigma A(X_1, \dots, X_p),$$

onde  $(\sigma(1), \dots, \sigma(p))$  é uma permutação de  $(1, \dots, p)$ , e  $(-1)^\sigma$  é o sinal desta permutação. O espaço de todas as  $p$ -formas sobre uma variedade  $M$  será denotado por  $\Omega^p(M)$ .

**Lema 1.37** *Sendo  $M$  uma variedade diferenciável e  $A$  uma  $p$ -forma sobre  $M$ , dado um sistema de coordenadas locais  $x_\mu$ ,  $A$  é escrita como*

$$A = \frac{1}{p!} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

onde  $A_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(M)$  para todos  $i_1, \dots, i_p$ .

Aqui o leitor já pode reparar que a notação tensorial também facilita o estudo de formas, pois, devido a correção dada pelo termo  $\frac{1}{p!}$ , não necessitamos somar sobre índices crescentes, como é feito na maior parte dos livros de matemática, o que facilita muito na hora em que queremos fazer contas explícitas.

**Definição 1.38** *Sendo  $M$  uma variedade diferenciável,  $A \in \Omega^p(M)$  e  $B \in \Omega^q(M)$ , caracterizadas pelas componentes  $A_{i_1 \dots i_p}$  e  $B_{j_1 \dots j_q}$  num sistema de coordenadas locais  $x_\mu$ , isto é*

$$A = \frac{1}{p!} A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad e \quad B = \frac{1}{q!} B_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q},$$

definimos o seu produto exterior como sendo a  $(p+q)$ -forma:

$$A \wedge B = \frac{1}{p!q!} A_{i_1 \dots i_p} \cdot B_{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

**Definição 1.39** *Dada uma  $p$ -forma  $A$ , definimos sua derivada exterior como*

$$dA = \frac{1}{p!} \partial_\mu A_{i_1 \dots i_p} dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

**Definição 1.40** *Sendo  $M$  uma variedade e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos a contração de uma  $p$ -forma pelo campo  $X$  como sendo o resultado da aplicação  $i_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$  dada por*

$$i_X \omega (X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega (X, X_1, \dots, X_{p-1}),$$

onde  $\omega \in \Omega^p(M)$  e  $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposição 1.41** *O produto exterior e a derivação exterior de formas obedecem às seguintes propriedades básicas:*

1.  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ ;
2.  $A \wedge (\lambda B + \eta C) = \lambda A \wedge B + \eta A \wedge C$ ;
3.  $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$ ;
4.  $d(A + B) = dA + dB$ ;
5.  $d(\lambda A) = \lambda dA$ ;
6.  $d^2 = 0$ ;
7.  $d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^p A \wedge dB$ .

onde  $\lambda$  e  $\eta$  são constantes reais,  $A$  uma  $p$ -forma e  $B$  uma  $q$ -forma.

**Demonstração.** Ver [1] Proposição 7.1.5 e Teorema 7.4.1. ■

### 1.3.2 O operador $*$ de Hodge e a codiferencial

Os seguintes resultados nos motivarão a definir um operador que age sobre o espaço das formas diferenciais que será de grande utilidade ao longo do texto.

**Teorema 1.42** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ , orientação  $\mu$  e produto interno  $g$ . Seja  $\omega$  a forma de volume de  $V$  determinada por  $\mu$  e  $g$ . Então existe um único isomorfismo  $*$  :  $\Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ , chamado operador estrela de Hodge, tal que*

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta) \omega$$

para todo  $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V)$ , onde  $g(\alpha, \beta) = \alpha_{j_1 \dots j_k} \beta^{j_1 \dots j_k}$  é o produto interno de  $\Lambda^k(V)$  induzido por  $g$ .

**Demonstração.** Ver [36] - Seção 4.1, Teorema 4.1.11. ■

**Teorema 1.43** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$ , orientação  $\mu$  e produto interno  $g$  de índice  $s$ . Então o operador estrela de Hodge satisfaz*

$$** \alpha = (-1)^{k(n-k)+s} \alpha$$

para todo  $\alpha \in \Lambda^k(V)$ .

**Demonstração.** Ver [36] - Seção 4.1, Teorema 4.1.15. ■

**Proposição 1.44** *Em componentes, o operador estrela de Hodge age sobre uma  $k$ -forma  $\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$  da seguinte maneira,*

$$(*\alpha)_{i_1 \dots i_{n-k}} = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} \epsilon_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} \alpha^{l_1 \dots l_k}.$$

Ou seja

$$*\alpha = \frac{1}{(n-k)!k!} \alpha^{l_1 \dots l_k} \epsilon_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}},$$

onde  $|g|$  é o módulo do determinante da matriz  $[g_{ij}]$  e  $\epsilon$  é o símbolo de Levi-Civita.

**Demonstração.** De fato, pela linearidade de  $*$ , basta sabermos como é a ação do operador na base de  $\Lambda^k(V)$ . Portanto, tomando um elemento  $\alpha$  da base, temos:

$$*\alpha = *(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \frac{1}{(n-k)!} A_{i_1 \dots i_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}}$$

onde  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  é alguma sequência fixada. Mas como  $\beta \wedge *\alpha = g(\beta, \alpha)\omega$ , tomando  $\beta = dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}$ , onde  $(l_1, \dots, l_k)$  é um conjunto de índices fixado complementar a algum  $(a_1, \dots, a_{n-k})$  também fixado, temos (neste caso particular consideraremos apenas a soma de índices em ordem crescente por comodidade):

$$\begin{aligned} \beta \wedge *\alpha &= (dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}) \wedge \left( A_{i_1 \dots i_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}} \right) \\ &= \left( A_{a_1 \dots a_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} \right) dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_{n-k}} \\ &= \left( A_{a_1 \dots a_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} \right) \epsilon_{l_1 \dots l_k a_1 \dots a_{n-k}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos

$$\begin{aligned} g(\beta, \alpha)\omega &= \alpha_{m_1 \dots m_k} \beta^{m_1 \dots m_k} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \alpha_{m_1 \dots m_k} \beta_{i_1 \dots i_k} g^{i_1 m_1} \dots g^{i_k m_k} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

E, como  $\alpha_{m_1 \dots m_k} \neq 0$  apenas quando  $(m_1 \dots m_k) = (j_1 \dots j_k)$  e  $\beta_{i_1 \dots i_k} \neq 0$  apenas quando  $(i_1 \dots i_k) = (l_1 \dots l_k)$ , encontramos

$$g(\beta, \alpha)\omega = g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

o que nos diz que

$$\begin{aligned} A_{a_1 \dots a_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} \epsilon_{l_1 \dots l_k a_1 \dots a_{n-k}} &= g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|} \Rightarrow \\ A_{a_1 \dots a_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} &= \epsilon_{l_1 \dots l_k a_1 \dots a_{n-k}} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|} \Rightarrow \\ \frac{1}{(n-k)!} A_{a_1 \dots a_{n-k}}^{j_1 \dots j_k} &= \frac{1}{(n-k)!} \epsilon_{l_1 \dots l_k a_1 \dots a_{n-k}} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|}. \end{aligned}$$

E assim

$$*(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) = \frac{1}{(n-k)!} \epsilon_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}}.$$

Então, dada uma forma  $\alpha = \frac{1}{k!} \alpha_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ , temos

$$\begin{aligned} * \alpha &= \frac{1}{(n-k)!} \frac{1}{k!} \alpha_{j_1 \dots j_k} \epsilon_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_k l_k} \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}} \\ &= \frac{1}{(n-k)! k!} \alpha^{l_1 \dots l_k} \epsilon_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{n-k}} \sqrt{|g|} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-k}}, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Com estes resultados em mente, faz sentido a

**Definição 1.45** Sendo  $(M, g)$  uma variedade pseudoriemanniana orientável de dimensão  $n$  e  $A \in \Omega^p(M)$ , definimos a forma dual de  $A$  como sendo a  $(n-p)$ -forma  $*A$  tal que, em cada ponto,  $*A$  seja a imagem de  $A$  pelo operador estrela de Hodge. Chamamos uma  $p$ -forma  $A$  de autodual se

$$*A = A$$

e de antiautodual se

$$*A = -A.$$

De fato, a forma dual a uma  $p$ -forma diferenciável é uma  $(n-p)$ -forma também diferenciável. Isto que segue imediatamente da expressão local do operador de Hodge. Vejamos agora um exemplo que, além de ajudar a esclarecer o conceito, nos será de grande utilidade

**Exemplo 1.46** Vamos encontrar a forma dual de uma 2-forma no espaço-tempo de Minkowski. Uma 2-forma no espaço-tempo é caracterizada pelas componentes  $F_{ij}$ . Neste caso temos que  $(*F)_{ij} = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} \epsilon_{ij\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  e como  $\det(g)_{ij} = -1$ , segue que  $(*F)_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ . Como os  $(*F)_{ij}$  são antissimétricos, basta conhecermos  $*F_{01}$ ,  $*F_{02}$ ,  $*F_{03}$ ,  $*F_{12}$ ,  $*F_{13}$  e  $*F_{23}$ . Analisando um por um (e já desconsiderando os termos nulos da somatória), temos:

$$\begin{aligned} *F_{01} &= \frac{1}{2} \epsilon_{01\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{0123} F^{23} + \epsilon_{0132} F^{32}) \\ &= \frac{1}{2} (F^{23} - F^{32}) \\ &= F^{23}. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos:

$$*F_{02} = F^{31}; \quad *F_{03} = F^{12}; \quad *F_{12} = F^{03}; \quad *F_{13} = F^{20}; \quad *F_{23} = F^{01}.$$

Utilizando as componentes contravariantes da 2-forma:

$$F^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -F_{01} & -F_{02} & -F_{03} \\ -F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ -F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



chegamos a

$$\begin{aligned} *F_{01} &= F^{23} = F_{23}; & *F_{02} &= F^{31} = F_{31} \\ *F_{03} &= F^{12} = F_{12}; & *F_{12} &= F^{03} = -F_{03} \\ *F_{13} &= F^{20} = F_{02}; & *F_{23} &= F^{01} = -F_{01}. \end{aligned}$$

Com o operador estrela de Hodge também construímos um novo operador, definido da seguinte forma.

**Definição 1.47** Dada uma  $p$ -forma  $A$  sobre uma variedade pseudo-riemanniana  $M$  com tensor métrico  $g$  de índice  $s$ , definimos a codiferencial  $\delta A$  da  $p$ -forma  $A$ , como sendo a  $(p-1)$ -forma:

$$\delta A = (-1)^s (-1)^{p(n-p+1)} * d * A.$$

Este tem importantes propriedades.

**Proposição 1.48** O operador codiferencial tem as seguintes propriedades:

1.  $\delta(A + B) = \delta A + \delta B$ ;
2.  $\delta(\lambda A) = \lambda(\delta A)$ ;
3.  $\delta^2 = 0$ .

**Demonstração.** A linearidade segue diretamente do fato da codiferencial ser definida em termos do operador de Hodge e da derivada exterior, que são ambos operadores lineares. A última propriedade segue diretamente do Teorema 1.43 e do fato de  $d^2 = 0$ . ■

Veremos agora dois exemplos que tanto esclarecerão o conceito, como serão úteis mais adiante.

**Exemplo 1.49** Vamos calcular a codiferencial de uma 1-forma  $J$  no espaço-tempo de Minkowski. Por definição, temos

$$\delta J = (-1)^s (-1)^{p(n-p+1)} * d * J$$

onde  $p = 1$ ,  $n = 4$  e  $s = 1$ . Assim  $\delta J = - * d * J$ . Sendo  $G$  a 0-forma tal que  $\delta J = G$ , encontramos

$$*G = *(- * d * J) = - * *(d * J) = -(-1)^{p(n-p)+s} (d * J),$$

onde a última igualdade segue do Teorema 1.43. Como  $J$  é uma 1-forma numa variedade de dimensão quatro, então  $(d * J)$  é uma 4-forma. Assim  $p = 4$ ,  $n = 4$  e  $s = 1$ , logo

$$*G = d * J.$$

Como uma 0-forma é apenas uma função diferenciável, temos que  $(*G)_{0123} = \sqrt{|g|}G$ . Por outro lado, sendo  $J$  uma 1-forma caracterizada pelas componentes  $J_i$ , temos que sua forma dual será a 3-forma caracterizada pelas componentes

$$(*J)_{ijk} = \sqrt{|g|}\epsilon_{ijk}J^l.$$

Tomando a derivada exterior, obtemos

$$\begin{aligned} d(*J) &= \frac{1}{3!}\partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &= \frac{1}{3!}\frac{1}{4}\partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &\quad + \frac{1}{3!}\frac{1}{4}\partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &= \frac{1}{4!}\partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \partial_c(*J)_{\mu ab}dx^c \wedge dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \\ &\quad + \frac{1}{4!}\partial_b(*J)_{c\mu a}dx^b \wedge dx^c \wedge dx^\mu \wedge dx^a + \partial_a(*J)_{bc\mu}dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{4!}\partial_\mu(*J)_{abc}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \partial_c(*J)_{\mu ab}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &\quad + \frac{1}{4!}\partial_b(*J)_{c\mu a}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c + \partial_a(*J)_{bc\mu}dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c \\ &= \frac{1}{4!}[\partial_\mu(*J)_{abc} + \partial_c(*J)_{\mu ab} + \partial_b(*J)_{c\mu a} + \partial_a(*J)_{bc\mu}]dx^\mu \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (d*J)_{0123} &= \partial_0(*J)_{123} + \partial_3(*J)_{012} + \partial_2(*J)_{301} + \partial_1(*J)_{230} \\ &= \partial_0(\sqrt{|g|}\epsilon_{l123}J^l) + \partial_3(\sqrt{|g|}\epsilon_{l012}J^l) + \partial_2(\sqrt{|g|}\epsilon_{l301}J^l) + \partial_1(\sqrt{|g|}\epsilon_{l230}J^l) \\ &= \partial_0(\sqrt{|g|}J^0) + \partial_3(\sqrt{|g|}J^3) + \partial_2(\sqrt{|g|}J^2) + \partial_1(\sqrt{|g|}J^1) \\ &= \partial_i(\sqrt{|g|}J^i), \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} G &= \delta J = -*d*J \Leftrightarrow *G = d*J \Leftrightarrow \\ (*G)_{0123} &= (d*J)_{0123} \Leftrightarrow \sqrt{|g|}G = \partial_i(\sqrt{|g|}J^i). \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos

$$\delta J = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i(\sqrt{|g|}J^i).$$

Como no espaço-tempo de Minkowski  $\sqrt{|g|} = 1$ , obtemos  $\delta J = \partial_i J^i$ .

**Exemplo 1.50** Agora, vamos calcular a codiferencial de uma 2-forma  $F$  no espaço-tempo de Minkowski. Neste caso, temos  $p = 2$ ,  $n = 4$  e  $s = 1$ . Assim, a codiferencial de  $F$  é a 1-forma  $H$  tal que  $H = \delta F = -*d*F$ . Como  $**\alpha = (-1)^{p(n-p)+s}\alpha$ , neste caso

( $\alpha = H = \delta F$ ) temos  $p = 1$ ,  $n = 4$  e  $s = 1$ . Então, aplicando a estrela de Hodge de ambos lados da igualdade, obtemos

$$*H = -d * F.$$

Vamos então encontrar as componentes dessas duas 3-formas. Inicialmente, encontremos as componentes de  $d * F$ . Sendo  $G = *F$ , segue do Exemplo 1.46 que  $G_{ij} = (*F)_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ij\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ . Como

$$\begin{aligned} dG &= \frac{1}{2!} \partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{3} (\partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j + \partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j + \partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{3} (\partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j + \partial_j G_{\mu i} dx^j \wedge dx^\mu \wedge dx^i + \partial_i G_{j\mu} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2!} \frac{1}{3} (\partial_\mu G_{ij} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j + \partial_j G_{\mu i} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j + \partial_i G_{j\mu} dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j) \\ &= \frac{1}{3!} (\partial_\mu G_{ij} + \partial_j G_{\mu i} + \partial_i G_{j\mu}) dx^\mu \wedge dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} (d * F)_{ij\mu} &= \partial_\mu G_{ij} + \partial_j G_{\mu i} + \partial_i G_{j\mu} \\ &= \partial_\mu \left( \frac{1}{2} \epsilon_{ij\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \partial_j \left( \frac{1}{2} \epsilon_{\mu i\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \partial_i \left( \frac{1}{2} \epsilon_{j\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} (d * F)_{012} &= \partial_2 \left( \frac{1}{2} \epsilon_{01\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \partial_1 \left( \frac{1}{2} \epsilon_{20\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \partial_0 \left( \frac{1}{2} \epsilon_{12\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \partial_2 (F^{23}) + \partial_1 (F^{13}) + \partial_0 (F^{30}) \\ &= \partial_2 (F^{23}) + \partial_1 (F^{13}) + \partial_0 (F^{03}) + \partial_3 (F^{33}) \\ &= \partial_i (F^{i3}). \end{aligned}$$

Analogamente encontramos

$$(d * F)_{013} = -\partial_i (F^{i2}); \quad (d * F)_{023} = \partial_i (F^{i1}); \quad (d * F)_{123} = -\partial_i (F^{i0}).$$

Resumidamente, temos  $(d * F)_{abc} = \epsilon_{abcd} \partial_i (F^{id})$ . Agora, analisando as componentes de  $*H$ , obtemos

$$(*H)_{abc} = \frac{1}{1!} \sqrt{|g|} \epsilon_{abcd} H^d = \epsilon_{abcd} H^d.$$

Portanto

$$\begin{aligned} H = \delta F &\Leftrightarrow *H = -d * F \Leftrightarrow (*H)_{abc} = -(d * F)_{abc} \\ &\Leftrightarrow \epsilon_{abcd} H^d = -\epsilon_{abcd} \partial_i (F^{id}) \Leftrightarrow H^d = -\partial_i (F^{id}). \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos  $(\delta F)^d = \partial_i F^{di}$ .

### 1.3.3 A forma eletromagnética e as equações de Maxwell

#### Forma eletromagnética e a força de Lorentz.

Podemos agora formular a teoria de Maxwell em termos do cálculo exterior. Como na formulação tensorial do eletromagnetismo tínhamos o estudo de dois tensores antissimétricos, podemos traduzir todo o conteúdo para o estudo das formas diferenciais

$$F = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j \quad e \quad J = J_\alpha dx^\alpha.$$

Mais explicitamente, temos

$$\begin{aligned} F &= E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1; \\ J &= -\rho dx^0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3. \end{aligned}$$

A 2-forma  $F$  é chamada *forma de força eletromagnética* e a 1-forma  $J$  é chamada de *forma de corrente*. O que devemos fazer agora é encontrar como será, nessa nova linguagem, a forma da força de Lorentz e das equações de Maxwell, o que será dado nos próximos resultados.

**Proposição 1.51** *A expressão da força de Lorentz em termos de formas diferenciais é dada por*

$$F_L = -q(i_U F)^\sharp,$$

onde  $U^\beta$  é a quadrivelocidade da partícula pontual e  $i_U F$  é a contração da forma  $F$  pelo campo  $U$ .

**Demonstração.** De fato,

$$F^\alpha = qF^{\alpha\beta}U_\beta \Rightarrow F^\alpha g_{\alpha j} = qF^{\alpha\beta}U_\beta g_{\alpha j} \Rightarrow F_j = qF_{ji}U^\beta g^{i\beta} = qF_{ji}U^i$$

e como

$$\begin{aligned} i_U F(\cdot) &= \left( \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j \right)(U, \cdot) \\ &= (F_{ij}dx^i \otimes dx^j)(U, \cdot) \\ &= (F_{ij}dx^i(U) dx^j)(\cdot) \\ &= (F_{ij}U^i dx^j)(\cdot) \\ &= -(F_{ji}U^i dx^j)(\cdot) \\ &= -\frac{1}{q}F_j dx^j(\cdot), \end{aligned}$$

onde  $F_j = qF_{ji}U^i$  decorre da força de Lorentz tensorial e assim

$$F_L = -q(i_U F)^\sharp,$$

como queríamos. ■

**Equações de Maxwell.**

**Proposição 1.52** *A equação de Maxwell homogênea  $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0$  é equivalente à equação*

$$dF = 0.$$

**Demonstração.**  $F$  é uma 2-forma caracterizada pelas componentes  $F_{\alpha\beta}$ , portanto, sua derivada exterior é

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2!} \partial_\mu F_{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= \frac{1}{3!} (\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu}) dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \end{aligned}$$

Então

$$dF = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} = 0.$$

■

**Proposição 1.53** *A equação de Maxwell não-homogênea  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$  é equivalente à equação*

$$\delta F = J.$$

**Demonstração.** Sendo  $J$  e  $\delta F$  duas 1-formas, temos que

$$\delta F = J \Leftrightarrow (\delta F)_j = J_j \Leftrightarrow (\delta F)^i = J^i.$$

Como  $F$  é uma 2-forma caracterizada pelas componentes  $F_{\alpha\beta}$ , segue do Exemplo 1.50 que sua codiferencial é dada em componentes contravariantes, por  $(\delta F)^i = \partial_\mu F^{i\mu}$ . Ou seja,

$$(\delta F)^i = J^i \Leftrightarrow \partial_\mu F^{i\mu} = J^i.$$

■

Assim concluímos a formulação exterior da teoria de Maxwell, que pode ser resumida como o estudo da forma de força eletromagnética  $F$  e de como esta interage com a forma de corrente  $J$ , através das equações de Maxwell

$$dF = 0 \quad e \quad \delta F = J,$$

e com uma partícula carregada, através da força de Lorentz

$$F_L = -q (i_U F)^\sharp.$$

Já a equação de continuidade segue de forma ainda mais imediata da equação não-homogênea, pois

$$\delta F = J \Rightarrow \delta \delta F = \delta J \Rightarrow \delta J = 0 \Rightarrow \partial_i J^i = 0,$$

onde a última igualdade segue do Exemplo 1.49. A expressão final é exatamente a equação de continuidade na versão tensorial.

**Potencial de calibre.**

Analogamente, a existência de uma 1-forma  $A$  tal que

$$F = dA \quad (1.15)$$

resolve automaticamente a equação homogênea. De fato, a forma  $A$  é exatamente o tensor quadripotencial, i.e.,  $A = A_\alpha dx^\alpha$ , pois, por (1.39), a expressão  $F = dA$  nos diz que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} F_{\mu\alpha} dx^\mu \wedge dx^\alpha &= \partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha + \partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha + \partial_\alpha A_\mu dx^\alpha \wedge dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\alpha dx^\mu \wedge dx^\alpha - \partial_\alpha A_\mu dx^\mu \wedge dx^\alpha) \\ &= \frac{1}{2!} (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\alpha \end{aligned}$$

e isto é equivalente a dizer que

$$F_{\mu\alpha} = \partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu.$$

**Transformação de calibre.**

Uma vez que  $F$  é uma forma fechada, então o lema de Poincaré (Ver [1], Teorema 7.4.18) garante que esta é localmente exata. Segue que a busca de uma tal 1-forma  $A$  é natural. Também é trivial o fato de que a transformação de calibre

$$A \rightarrow A + d\chi$$

deixa a teoria invariante. Observe que

$$A \rightarrow A + d\chi \Rightarrow A_\alpha dx^\alpha \rightarrow A_\alpha dx^\alpha + \partial_\alpha \chi dx^\alpha \Rightarrow A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$$

que é a transformação de calibre tensorial.

**Equações de movimento.**

Agora, as equações de movimento se reduzem a

$$\delta dA = J.$$

Uma observação relevante é que durante todo o texto fizemos as contas usando explicitamente a métrica do espaço-tempo de Minkowski, no entanto, podemos chegar às mesmas expressões aqui obtidas com qualquer métrica (pseudo)riemanniana.

### 1.3.4 O solenoide e o monopolo em formas diferenciais

Vejam agora como ficam os exemplos do monopolo magnético e do solenoide em formulação exterior. Isto torna mais natural o estudo do potencial de calibre em cada caso.

**Exemplo 1.54 (Solenoide)** Lembremos que, no caso do solenoide, tínhamos um campo de forças tal que o campo elétrico é identicamente nulo e o campo magnético é dado por

$$B(t, x) = \begin{cases} (0, 0, B_0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ (0, 0, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases}$$

Assim, a 2-forma eletromagnética é dada por

$$\begin{aligned} F &= E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ &= \begin{cases} B_0 dx \wedge dy & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ 0 & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases} \end{aligned}$$

e a forma de potencial de calibre é dada por

$$\begin{aligned} A &= -\phi dt + A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz \\ &= \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y dx + x dy) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ \frac{B_0 a^2}{2(x^2 + y^2)}(-y dx + x dy) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.55 (Monopolo magnético)** No caso do monopolo magnético, os campos elétrico e magnético são dados por

$$\begin{aligned} E(t, x) &= 0; \\ B(t, x) &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x, y, z). \end{aligned}$$

Logo, a 2-forma eletromagnética será

$$\begin{aligned} F &= E_1 dx^1 \wedge dx^0 + E_2 dx^2 \wedge dx^0 + E_3 dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy). \end{aligned}$$

É conveniente, no entanto, que passemos para coordenadas esféricas. Assim teremos

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi \\ dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz = \cos \phi dr - r \sin \phi d\phi \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
F &= \frac{g}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \\
&= \frac{g}{r^3} r \cos \theta \sin \phi (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \wedge (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \\
&+ \frac{g}{r^3} r \sin \theta \sin \phi (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \wedge (\cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi) \\
&+ \frac{g}{r^3} r \cos \phi (\cos \theta \sin \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta + r \cos \theta \cos \phi d\phi) \\
&\wedge (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\
&= \frac{g}{r^3} \left( -r^2 \sin^3 \phi \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta \sin^3 \phi \cos \theta \right) dr \wedge d\phi \\
&- \frac{g}{r^3} \left( 2r^2 \sin \theta \cos^2 \phi \cos \theta \sin \phi + 2r^2 \cos \theta \cos^2 \phi \sin \theta \sin \phi \right) dr \wedge d\phi \\
&+ \frac{g}{r^3} \left( r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + r^3 \sin^2 \theta \sin^3 \phi d\phi + r^3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \sin \phi + r^3 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi \right) d\phi \wedge d\theta \\
&+ \frac{g}{r^3} \left( r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi \cos \phi - r^2 \cos \phi \cos^2 \theta \sin^2 \phi \right) d\theta \wedge dr \\
&+ \frac{g}{r^3} \left( r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos \phi - r^2 \cos \phi \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right) d\theta \wedge dr \\
&= \frac{g}{r^3} \left( r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \phi + r^3 \sin^2 \theta \sin^3 \phi d\phi + r^3 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \sin \phi + r^3 \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin \phi \right) d\phi \wedge d\theta \\
&= g \sin \phi d\phi \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

Assim, podemos facilmente encontrar um potencial, pois

$$F = g \sin \phi d\phi \wedge d\theta = -gd(\cos \phi) \wedge d\theta = d(-g \cos \phi d\theta).$$

Logo  $A = -g \cos \phi d\theta$  é um potencial para  $F$ . Mas sabemos do Exemplo 1.7 que não pode existir potencial global em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 - \{0\}$ . A primeira vista, isto parece uma contradição, devido ao fato de  $(-g \cos \phi)$  ser uma função de classe  $C^\infty$ , nos entanto, funções ângulo não estão globalmente bem definidas<sup>2</sup>. Veremos agora a constatação deste fato e também como, através de transformações de calibre, podemos encontrar potenciais que juntos cobrem todo o  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

De fato, retornando às coordenadas cartesianas, observamos que

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{z}{r} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

de onde, através de um cálculo simples, segue que

$$A = -g \left( -\frac{zy}{r(x^2 + y^2)} dx + \frac{zx}{r(x^2 + y^2)} dy \right).$$

<sup>2</sup>Na realidade, isto se deve ao fato das chamadas coordenadas esféricas não serem propriamente uma mudança global de coordenadas.



Vemos claramente que este potencial é singular no eixo  $z$ . No entanto, tomando a função diferenciável  $f := g\theta$ , a transformação de calibre  $A \rightarrow A + df$  conduz a um potencial que é singular apenas no eixo  $z$  negativo. De fato,

$$\begin{aligned} A + df &= A + d(g\theta) \\ &= -g \cos \phi d\theta + gd\theta \\ &= g(1 - \cos \phi)d\theta \\ &= \frac{g}{r} \frac{1}{z+r} (xdy - ydx), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida realizando a mudança de coordenadas. Esta forma é claramente singular em  $(0, 0, z)$  quando  $z \leq 0$ , pois  $z + r = z + |z| = 0$ . De maneira análoga, encontramos que, para a função  $h = -g\theta$ , a transformação de calibre  $A \rightarrow A + dh$  conduz a um potencial singular apenas no eixo  $z$  positivo. Assim encontramos dois potenciais, um  $A_+ = A + df$ , definido sobre a região  $U_+$  e outro,  $A_- = A + dh$ , definido sobre  $U_-$ . Então, temos novamente dois potenciais tais que a união de seus domínios é todo o  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$  e que diferem por uma transformação de calibre, pois

$$A_+ - A_- = (gd\theta - g \cos \phi d\theta) + (gd\theta + g \cos \phi d\theta) = 2gd\theta = d(2g\theta).$$

### 1.3.5 Resumo.

Terminamos esta seção com a seguinte tabela comparativa entre as três formulações para a teoria de Maxwell apresentadas aqui.

	Forma Vetorial	Forma Tensorial	Forma Exterior
Equações de Maxwell	$\begin{aligned} \nabla \cdot B &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \cdot E &= \rho \\ \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B &= -j \end{aligned}$	$\begin{aligned} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} &= 0 \\ \partial_\beta F^{\alpha\beta} &= J^\alpha \end{aligned}$	$\begin{aligned} dF &= 0 \\ \delta F &= J \end{aligned}$
Equação de continuidade	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0$	$\partial_\alpha J^\alpha = 0$	$\delta J = 0$
Potencial de calibre	$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ E &= -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$	$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$	$F = dA$
Transformação de calibre	$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ A &\rightarrow A + \nabla\chi \end{aligned}$	$A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$	$A \rightarrow A + d\chi$
Força de Lorentz	$F = q(E + v \times B)$	$F^\alpha = qF^{\alpha\beta}U_\beta$	$F_L = -q(i_U F)^\#$

## 1.4 Elementos de teorias clássicas de campos

Veremos agora como o eletromagnetismo se situa no contexto das teorias clássicas de campos.

### 1.4.1 Um breve histórico

A noção de campo desenvolveu-se no século XIX. O grande sucesso da física newtoniana motivou muitos físicos a abordarem outros problemas da física (por exemplo a mecânica dos corpos rígidos e elásticos, dos gases, etc.) de forma análoga a este, esforços que naturalmente encontraram limites em certas áreas da física.

Uma corrente completamente contrária a esta procurava entender, por exemplo, a mecânica celeste utilizando ideias provindas da hidrodinâmica. Observou-se que a Lei de Coulomb e a lei da gravitação universal são correspondentes ao campo de velocidades de um fluido incompressível escoando de uma fonte pontual. De uma maneira geral, parecia intuitivamente evidente que certas quantidades características que corpos quentes, luminosos, carregados, magnetizados em movimento possuem, emanavam pelo espaço e influenciavam outros corpos. Michael Faraday foi provavelmente o maior difusor desta direção ao imaginar “*linhas de força*” elétricas e magnéticas que passavam por todos os pontos do espaço que, no ponto de vista da hidrodinâmica, correspondiam às trajetórias do fluxo gerado pelo campo vetorial de velocidades de um certo fluido.

Apesar de Faraday ter sido o primeiro a considerar o estudo dos campos e linhas de força como meio de entender o fenômeno, foi James Clerk Maxwell quem colocou as ideias de Faraday na sua formulação matemática definitiva. Na verdade Maxwell fez mais do que isso, dentre outras, ele unificou eletricidade e magnetismo na primeira teoria de campos, onde os objetos fundamentais de estudo são os campos em si (neste caso os campos de vetores que tem como trajetórias do fluxo as linhas de força), um tipo de teoria totalmente inédita na época.

Embora a teoria de Maxwell tenha sido a primeira teoria de campos, não é a única. De fato, atualmente, o conceito de campo ocupa uma posição central na física já que as interações referentes às quatro forças fundamentais (gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte) são descritas por casos particulares de teorias de campos. Ademais, o melhor entendimento do conceito físico de campo permitiu progressos também de áreas da física já clássicas, como a dinâmica dos fluidos por exemplo.

Como visto em física, o conceito de campo depende da natureza do objeto estudado. Temos, por exemplo, os chamados campos escalares que nada mais são do que atribuir um número a cada ponto do espaço físico em questão (exemplos destes são a densidade de carga, a temperatura e a pressão). Também temos os chamados campos vetoriais, que são uma atribuição de um vetor de um certo espaço vetorial a cada ponto do espaço (como, por exemplo, o campo elétrico, o campo magnético, o campo gravitacional e o campo

de velocidades de um fluido), dentre outros (campos tensoriais, campos espinoriais, etc.). Assim, um campo em física é uma família de  $n$ -uplas de funções diferenciáveis sobre abertos de uma variedades que satisfazem certas propriedades fisicamente relevantes. A natureza desses campos é obtida através da forma como eles se relacionam nas mudanças de coordenadas representada por cada  $n$ -upla da família.

Em geral, tais propriedades são obtidas a partir de observações ou conclusões teóricas e descritas em termos de famílias de equações diferenciais locais, ou mesmo de equações a diferenças ou funcionais etc. Desta forma, o objetivo principal de uma teoria de campos é saber a que leis gerais, traduzidas em termos de equações diferenciais, estes campos obedecem e como estes evoluem ao longo do tempo em cada caso particular. Em outras palavras, trata-se de buscar soluções para as equações quando dadas condições iniciais ou de contorno são satisfeitas. Para isso, é conveniente ter em mãos um formalismo onde possamos sistematicamente obter as equações diferenciais que governam o dado sistema e, de forma geral, inferir informações adicionais a partir destas.

### 1.4.2 O formalismo lagrangeano

O formalismo usado como referência nesta seção é o *formalismo lagrangeano*, que é uma maneira clássica de se abordar uma teoria de campos em física. Afim de introduzir tais conceitos, vamos brevemente apresentá-lo no caso da mecânica clássica, como uma alternativa ao *formalismo newtoniano*. Considere um sistema composto por uma partícula de massa  $m$  que descreve uma trajetória dada por uma curva parametrizada  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e sujeita a ação de uma força  $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ . Na mecânica newtoniana a trajetória da partícula obedece a segunda lei de Newton

$$F = ma,$$

onde  $a$  é a aceleração, i.e.,  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ .

Portanto, dados  $m$ ,  $F$ , uma posição inicial  $x_0$  e uma velocidade inicial  $v_0$ , o problema físico de determinar a posição da partícula em função do tempo se resume a um problema de equações diferenciais ordinárias que, como é bem sabido, tem existência e unicidade de soluções garantidas sob certas condições. Neste caso, o formalismo newtoniano se resume essencialmente a determinar a tal força  $F$  (inferida a partir de experimentos e elementos teóricos) e aplicar a segunda lei de Newton (equação diferencial que governa o sistema).

Já o formalismo lagrangeano, que é uma alternativa ao newtoniano, consiste essencialmente em determinar uma função

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longmapsto L(x, v) \end{aligned}$$

sobre o espaço de estados (possíveis posições e velocidades do sistema), chamada *função lagrangeana*, satisfazendo

$$L = T - V,$$

onde  $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$  é a velocidade,  $T = \frac{m\langle v, v \rangle}{2}$  a energia cinética e  $V$  é a energia potencial da partícula. Além disso, vamos assumir o chamado *princípio de Hamilton*:

**Axioma 1.56** *O movimento do sistema de um tempo  $t_0$  para um tempo  $t_1$  é tal que a integral, chamada funcional de ação,*

$$S_L(\gamma, \gamma') = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt,$$

onde  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  são a posição e velocidade da partícula em função do tempo, tem como ponto crítico a real trajetória do sistema. ([24])

Tal princípio é também conhecido como *princípio da ação mínima*. Mais precisamente, este princípio diz que, sendo  $C([t_0, t_1], x_0, x_1)$  o conjunto de todas as curvas suaves parametrizadas  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\gamma(t_0) = x_0$  e  $\gamma(t_1) = x_1$ , as únicas possíveis trajetórias descritas pela partícula são aquelas que são pontos críticos para o funcional

$$\begin{array}{ccc} S_L : C([t_0, t_1], x_0, x_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \gamma & \longmapsto & \int_{\gamma} L dt \end{array}.$$

Ou seja, para qualquer variação suave  $\Gamma_s = (\gamma_1 + sc_1, \dots, \gamma_n + sc_n)$  temos  $\left. \frac{dS_L(\Gamma_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0$ , onde  $c_1, \dots, c_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  são arbitrárias e  $\gamma(t) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , i.e.,  $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ . O seguinte resultado de cálculo variacional é de grande utilidade neste sentido.

**Proposição 1.57** *Uma condição necessária e suficiente para que uma solução  $\gamma : I = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja um ponto crítico do funcional  $S_L$  é que sejam satisfeitas as chamadas equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0.$$

No exemplo a seguir vemos como utilizar este resultado.

**Demonstração.** Ver [24] ou [17]. ■

**Exemplo 1.58** *Em um sistema onde a força atuante é conservativa, i.e.,  $F = -\nabla V$ , onde  $V$  é a energia potencial, as equações de Euler-Lagrange se reduzem à segunda lei de Newton. De fato, como  $T = \frac{m\langle v, v \rangle}{2}$ , temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0 & \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \left( \frac{m\langle v, v \rangle}{2} - V \right)}{\partial \dot{\gamma}_i} \right) - \frac{\partial \left( \frac{m\langle v, v \rangle}{2} - V \right)}{\partial \gamma_i} = 0 \\ & \iff m\ddot{\gamma}_i - \left( -\frac{\partial V}{\partial \gamma_i} \right) = 0 \\ & \iff m\ddot{\gamma}_i - F^i = 0 \\ & \iff m\ddot{\gamma} = F. \end{aligned}$$

O mesmo princípio aplicado ao eletromagnetismo dá origem ao seguinte

**Exemplo 1.59** Considere uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  sob a ação de um campo eletromagnético  $(E(x, t), B(x, t))$  tendo o par  $(\phi(x, t), A(x, t))$  como potencial de calibre. Sua energia potencial é a função escalar dada por  $V = V(x, t) = q(\langle A, v \rangle - \phi)$ , onde  $v = \dot{\gamma}$  é a velocidade da partícula. Por analogia com o caso da mecânica clássica (cf. [17], p. 37), concluímos que a lagrangeana desse sistema é da forma

$$L(x, v, t) = \frac{mv^2}{2} - q\phi(x, t) + q \langle A(x, t), v \rangle. \quad (1.16)$$

Por outro lado, recorde do eletromagnetismo clássico que a força de Lorentz é determinada experimentalmente através de uma carga de teste (cf. [17], p. 4). No entanto, nos utilizando da lagrangeana acima, podemos reobtê-la através das equações de Euler-Lagrange que se reduzem à força de Lorentz. Segue de (1.16)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} \Rightarrow \\ 0 &= \frac{d}{dt} (m\dot{\gamma}_i + qA_i) - \frac{\partial [-q\phi + q \langle A, v \rangle]}{\partial \gamma_i} \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} (m\dot{\gamma}_i) &= q \left[ \frac{\partial [\langle A, v \rangle - \phi]}{\partial \gamma_i} - \frac{d}{dt} (A_i) \right] \Rightarrow \\ m\ddot{\gamma} &= q \left[ \nabla (\langle A, v \rangle - \phi) - \frac{dA}{dt} \right], \end{aligned}$$

o que coincide com o resultado obtido no Exemplo (1.5).

Para mais detalhes sobre o formalismo lagrangeano ou uma prova da equivalência entre o princípio da ação mínima e as equações de Euler-Lagrange, o leitor interessado pode consultar [24] ou [17]. O que nos interessa aqui é a “essência” do formalismo lagrangeano, ou seja, a ideia de que a partir de uma função lagrangeana  $L$ , que depende de  $\gamma(t)$  e  $\dot{\gamma}(t)$ , obtemos um conjunto de equações diferenciais, dependentes das derivadas parciais com relação a  $\gamma(t)$  e  $\dot{\gamma}(t)$ . Estas, juntamente com as condições iniciais, determinam a trajetória do sistema.

Estudar uma teoria de campos através do formalismo lagrangeano é fazer o análogo desta abordagem para o caso em que o sistema é descrito não pela posição de uma partícula em um dado tempo, mas sim pelo valor do campo em cada ponto do seu domínio de definição em cada instante de tempo dado. Muitas vezes, a ausência de uma definição matematicamente rigorosa do conceito de campo leva os físicos a falar em “espaço físico” aonde aqueles existem. Assim, em física evita-se falar em trajetória e utiliza-se o termo “evolução” do campo no espaço físico. Naturalmente, as equações determinam a evolução do sistema.

Considere, por exemplo, um sistema tal que o espaço físico (variedade diferenciável usada para modelar a situação) é o espaço-tempo de Minkowski e existe um único campo

relevante, um campo escalar real (i.e., uma função diferenciável)  $\phi : \mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathbb{R}$ , que satisfaz a lagrangeana da forma

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

A primeira observação a ser feita é que, diferente do caso de uma partícula, onde o estado da mesma era determinado pela posição em dado tempo, o “estado” do campo é determinado pelo seu valor em cada ponto do espaço físico e assim ele depende não apenas do parâmetro tempo, mas, eventualmente, das coordenadas espaciais. Desta forma, é natural esperar que na lagrangeana apareçam as derivadas do campo não somente com respeito ao tempo, mas também com respeito às coordenadas do espaço. O que queremos é encontrar quais são as “leis” que este campo obedece nestas condições, ou seja, as equações diferenciais que este campo deve satisfazer. Isto se faz assumindo como axioma o princípio de Hamilton. Isto é, a função  $\phi$  deve ser um ponto crítico do funcional de ação

$$\begin{aligned} S_L : C^\infty(\mathbb{R}^{1,3}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^{1,3}} L dx \end{aligned}$$

Novamente, um resultado de cálculo variacional é de grande utilidade neste caso.

**Proposição 1.60** *Uma condição necessária e suficiente para que a função  $\phi$  seja um ponto crítico do funcional  $S$  é que esta satisfaça as equações de Euler-Lagrange*

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

**Demonstração.** Ver [24], Capítulo 13, Seção 2. ■

Um outro resultado muito importante é:

**Proposição 1.61** *Duas funções lagrangeanas  $L$  e  $L'$  que diferem por um termo de divergência, i.e.,*

$$L' = L + \partial_\mu f^\mu,$$

onde  $f^0, \dots, f^n \in C^\infty(\mathbb{R}^{1,3})$ , conduzem às mesmas equações de movimento.

**Demonstração.** Ver [24], Capítulo 13, Seção 2. ■

Agora podemos encontrar as equações diferenciais que governam este sistema. De fato

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \partial^\nu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\
&= \partial_\mu \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \partial^\nu \phi \partial_\nu \phi \right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\
&= \partial_\mu \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2} g^{\nu\eta} \partial_\eta \phi \partial_\nu \phi \right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu (\delta_{\mu\eta} g^{\nu\eta} \partial_\nu \phi + \delta_{\mu\nu} g^{\nu\eta} \partial_\eta \phi) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\mu (2\delta_{\mu\nu} g^{\nu\eta} \partial_\eta \phi) \\
&= \partial_\mu (g^{\mu\eta} \partial_\eta \phi) \\
&= \partial_\mu (\partial^\mu \phi).
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)}{\partial \phi} = -\frac{\partial \left( \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)}{\partial \phi} = -m^2 \phi,$$

o que nos leva à seguinte equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - (-m^2 \phi) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0.$$

Em física, é comum chamar as equações que governam uma teoria de *campos de equações de movimento* ou *equações de campo*. O que acabamos de fazer foi encontrar as equações de movimento que governam este sistema hipotético. A seguir veremos exemplos de sistemas que serão parte integral de nossa discussão mais adiante.

### 1.4.3 Alguns exemplos

**Exemplo 1.62 (Campo escalar complexo sobre o espaço de Minkowski)** *Considere um sistema constituído por dois campos escalares complexos conjugados sobre o espaço-tempo de Minkowski, i.e., duas funções diferenciáveis  $\psi : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\bar{\psi} : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}$ , satisfazendo a lagrangeana*

$$L(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}) = \partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi}.$$

Agora temos uma teoria descrevendo dois campos, portanto devemos considerar a equação de Euler-Lagrange para cada um deles. Analisando com respeito a  $\psi$  obtemos,

$$\begin{aligned}\partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \psi)} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \Rightarrow \\ \partial_\nu \left( \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial(\partial_\nu \psi)} \right) &= \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial \psi} \Rightarrow \\ \partial_\nu \left( \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi})}{\partial(\partial_\nu \psi)} \right) &= -\frac{\partial(m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial \psi} \Rightarrow \\ \partial_\nu (\partial^\mu \bar{\psi} \delta_{\mu\nu}) &= -m^2 \bar{\psi} \Rightarrow \\ \partial_\nu \partial^\nu \bar{\psi} &= -m^2 \bar{\psi}.\end{aligned}$$

Isto é

$$\partial_\nu \partial^\nu \bar{\psi} - (-m^2 \bar{\psi}) = 0 \Rightarrow \square \bar{\psi} + m^2 \bar{\psi} = 0.$$

Agora, com respeito a  $\bar{\psi}$  temos,

$$\begin{aligned}\partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} \Rightarrow \\ \partial_\nu \left( \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})} \right) &= \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} \Rightarrow \\ \partial_\nu \left( \frac{\partial(\partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi})}{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})} \right) &= -\frac{\partial(m^2 \psi \bar{\psi})}{\partial \bar{\psi}} \Rightarrow \\ \partial_\nu (\partial^\mu \psi \delta_{\mu\nu}) &= -m^2 \psi \Rightarrow \\ \partial_\nu \partial^\nu \psi &= -m^2 \psi\end{aligned}$$

e portanto

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi - (-m^2 \psi) = 0 \Rightarrow \square \psi + m^2 \psi = 0.$$

Isto nos leva ao par de equações  $\square \psi + m^2 \psi = 0$  e  $\square \bar{\psi} + m^2 \bar{\psi} = 0$ , onde a primeira,

$$\square \psi + m^2 \psi = 0,$$

é a equação de Klein-Gordon, que é de grande relevância por ser a versão relativística da equação de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

Trataremos dela mais detidamente no último capítulo.

Os dois últimos exemplos de teoria de campos que nos interessam são:

**Exemplo 1.63 (Campo eletromagnético sem matéria)** Considere um sistema formado pelos campos  $A_\alpha : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\alpha = 0, \dots, 3$ , definidos sobre o espaço-tempo de Minkowski e que obedecem à seguinte lagrangeana

$$L(A_\alpha, \partial_\mu A_\alpha) = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},$$



onde  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  e

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= g^{i\alpha} F_{ij} g^{j\beta} \\ &= g^{i\alpha} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) g^{j\beta} \\ &= g^{i\alpha} \partial_i A_j g^{j\beta} - g^{i\alpha} \partial_j A_i g^{j\beta} \\ &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \end{aligned}$$

Neste caso,

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha).$$

Queremos obter as equações de movimento. Calculando o primeiro termo da equação de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{aligned} -4 \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} &= \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} \\ &= \frac{\partial ((\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha))}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} \\ &= \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} \\ &= (\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\alpha\gamma}) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (g^{\alpha i} \delta_{i\nu} \delta_{j\gamma} g^{j\beta} - g^{\beta k} \delta_{k\nu} \delta_{m\gamma} g^{m\alpha}) \\ &= (\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\alpha\gamma}) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (g^{\alpha\nu} g^{\gamma\beta} - g^{\beta\nu} g^{\gamma\alpha}) \\ &= \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma} \partial^\alpha A^\beta - \delta_{\beta\nu} \delta_{\alpha\gamma} \partial^\alpha A^\beta - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma} \partial^\beta A^\alpha + \delta_{\beta\nu} \delta_{\alpha\gamma} \partial^\beta A^\alpha \\ &\quad + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (g^{\alpha\nu} g^{\gamma\beta} - g^{\beta\nu} g^{\gamma\alpha}) \\ &= \partial^\nu A^\gamma - \partial^\gamma A^\nu - \partial^\gamma A^\nu + \partial^\nu A^\gamma + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (g^{\alpha\nu} g^{\gamma\beta} - g^{\beta\nu} g^{\gamma\alpha}) \\ &= \partial^\nu A^\gamma - \partial^\gamma A^\nu - \partial^\gamma A^\nu + \partial^\nu A^\gamma + \partial_\alpha A_\beta g^{\alpha\nu} g^{\gamma\beta} - \partial_\beta A_\alpha g^{\alpha\nu} g^{\gamma\beta} - \partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha g^{\beta\nu} g^{\gamma\alpha} \\ &= \partial^\nu A^\gamma - \partial^\gamma A^\nu - \partial^\gamma A^\nu + \partial^\nu A^\gamma + \partial^\nu A^\gamma - \partial^\gamma A^\nu - \partial^\gamma A^\nu + \partial^\nu A^\gamma \\ &= 4 (\partial^\nu A^\gamma - \partial^\gamma A^\nu) \\ &= 4 F^{\nu\gamma}. \end{aligned}$$

Logo, encontramos

$$\partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\gamma)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\gamma} = 0 \Rightarrow \partial_\nu (-F^{\nu\gamma}) - 0 = 0 \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\gamma} = 0.$$

E, ainda, como  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , temos

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = \partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) = 0.$$

Assim, nesta teoria valem

$$\begin{cases} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \\ \partial_\nu F^{\nu\gamma} = 0 \end{cases}$$

que são as equações de Maxwell no vácuo.

**Exemplo 1.64 (Campo eletromagnético com matéria)** *Considere que no exemplo anterior a lagrangeana toma a forma*

$$L_c(A_\alpha, \partial_\mu A_\alpha) = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + J^\mu A_\mu$$

onde  $J_\gamma : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\mu = 0, \dots, 3$ . Aplicando as Equações de Euler Lagrange com respeito a  $A_\mu$ , obtemos  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$ . Neste caso temos

$$\begin{cases} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \\ \partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha \end{cases}$$

que são as equações de Maxwell para um campo eletromagnético na presença de uma quadricorrente  $J_\gamma$ .

#### 1.4.4 Simetrias

Com estes exemplos em mãos, passamos agora a falar de um dos conceitos mais importantes das teorias de campo: *simetrias*. A grosso modo, estas nada mais são do que transformações que deixam invariantes um certo sistema físico e tem suas origem nos trabalhos de Marius Sophus Lie. Mais precisamente, temos a seguinte

**Definição 1.65** *Considere um sistema físico composto por uma variedade diferenciável (espaço físico)  $M$  de dimensão  $n$ , com coordenadas  $x^i$ , um conjunto de campos  $\phi_\alpha$  e uma lagrangeana  $L = L(\phi_\alpha(x^i), \partial_\mu \phi_\alpha(x^i))$ . Uma transformação é uma aplicação*

$$T : (x^i, \phi_\alpha) \mapsto (x'^i, \phi'_\alpha) = T((x^i, \phi_\alpha)),$$

no sistema físico considerado, obtendo-se assim um novo sistema composto pela mesma variedade  $M$  com coordenadas  $x'^i$ , campos  $\phi'_\alpha$  e lagrangeana

$$L'(\phi'_\alpha(x'^i), \partial_\mu \phi'_\alpha(x'^i)) = L(\phi_\alpha(x^i), \partial_\mu \phi_\alpha(x^i)).$$

A transformação é dita externa se  $T$  age exclusivamente sobre as coordenadas do espaço físico, ou seja,  $T : x^i \rightarrow x'^i$ . Ela é dita interna se age exclusivamente nos campos, i.e.,  $T : \phi_\alpha \rightarrow \phi'_\alpha$ .

Agora, recorde da Proposição 1.61 que duas funções lagrangeanas que diferem por um termo de divergência conduzem às mesmas equações de movimento. Em outras palavras, isto nos diz que uma simetria é uma transformação que não altera as leis físicas previstas pela teoria. Do ponto de vista físico, faz sentido a seguinte

**Definição 1.66** *Uma transformação em um sistema físico é dita uma simetria se*

$$L' = L + \partial_\mu \Lambda^\mu,$$

onde  $\Lambda^\mu = \Lambda^\mu(\phi_\alpha(x^i), \partial_\mu \phi_\alpha(x^i)) : M \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\mu = 1, \dots, n$ , são funções diferenciáveis. Se a transformação é interna (respec. externa), a simetria é dita interna (respec. externa).

Vejamos alguns situações concretas:

**Exemplo 1.67 (Simetrias de um campo escalar complexo)** *Considere a teoria do campo escalar complexo descrita acima. A transformação*

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\psi},$$

onde  $\alpha$  é uma constante real, é uma simetria deste sistema. De fato,

$$\begin{aligned} L' &= \partial'_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi}' - m^2 \psi' \bar{\psi}' \\ &= \partial_\mu (e^{i\alpha}\psi) \partial^\mu (e^{-i\alpha}\bar{\psi}) - m^2 (e^{i\alpha}\psi) (e^{-i\alpha}\bar{\psi}) \\ &= (e^{i\alpha} e^{-i\alpha}) \partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - (e^{i\alpha} e^{-i\alpha}) m^2 (\psi) (\bar{\psi}) \\ &= \partial_\mu \psi \partial^\mu \bar{\psi} - m^2 \psi \bar{\psi} \\ &= L \end{aligned}$$

como queríamos. Note ainda que esta transformação é uma simetria da equação de movimento deste sistema, pois se  $\psi$  é uma solução de  $\square\psi + m^2\psi = 0$ , então um cálculo imediato mostra que  $e^{i\alpha}\psi$  também é solução.

**Exemplo 1.68 (Simetria de um campo eletromagnético)** *A transformação*

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi,$$

onde  $\chi(t, x)$  é uma função diferenciável, é uma simetria interna da teoria do campo eletromagnético. De fato

$$\begin{aligned} F'_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha (A_\beta + \partial_\beta \chi) - \partial_\beta (A_\alpha + \partial_\alpha \chi) \\ &= \partial_\alpha A_\beta + \partial_\alpha \partial_\beta \chi - \partial_\beta A_\alpha - \partial_\beta \partial_\alpha \chi \\ &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \\ &= F_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Analogamente encontramos  $F'^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}$ , logo

$$L' = -\frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = L,$$

como afirmado. Claramente, a equação de movimento  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$  é invariante por tal transformação. Na verdade, esta é exatamente a invariância por transformações de calibre da teoria de Maxwell.

Uma observação importante no momento é que, apesar dos dois exemplos anteriores tratarem de simetrias internas, eles têm uma diferença crucial. O primeiro tem simetria por uma transformação que depende de um parâmetro  $\alpha$  constante, enquanto que o segundo por uma função  $\chi$  do espaço físico. Transformações como o primeiro caso, que agem igualmente em qualquer ponto do espaço, são chamadas transformações globais, enquanto que transformações que dependem do ponto sobre qual agem são chamadas transformações locais. Concluimos este capítulo com um último exemplo.

**Exemplo 1.69 (Invariância de Lorentz do eletromagnetismo)** *A transformação*

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = T^\mu_{\nu'} x^\nu,$$

onde  $T$  é a matriz mudança de coordenadas de uma transformação de Lorentz, é uma simetria externa da teoria do campo eletromagnético. De fato, a lagrangeana da teoria, na sua forma mais geral, é

$$L(A_\alpha, \partial_\mu A_\alpha) = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + J^\mu A_\mu,$$

que é exatamente a soma de dois produtos internos. Mais exatamente,

$$L = -\frac{1}{4} g(F, F) + g(J, A).$$

Como, por definição, transformações de Lorentz são aquelas que preservam este produto interno, a lagrangeana resultante será sempre igual à primeira. Como consequência, a equação  $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = J^\alpha$  é invariante por tal transformação.



# Capítulo 2

## Conexões em espaços fibrados

Neste capítulo iremos estudar alguns dos conceitos matemáticos centrais na tentativa de geometrização da física, a saber: os espaços fibrados e suas conexões. Para tal, utilizamos como referências principais [34], [9], [10], [21], [37] e [35].

### 2.1 Fibrados em retas e fibrados em círculos

A noção intuitiva de espaço fibrado consiste em uma união disjunta de cópias de uma certa variedade diferenciável, parametrizada por uma outra variedade, de maneira que esta união tenha também estrutura de variedade diferenciável localmente dada por um produto. Na literatura é comum denominá-los respectivamente de fibra típica, base e espaço total.

As variedades diferenciáveis são construídas de forma a constituir uma colagem de objetos onde se possa realizar o cálculo diferencial e integral no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  de forma consistente. Neste sentido, um espaço fibrado é uma variedade diferenciável que localmente tem a estrutura de variedade produto entre duas variedades. Note que, em geral, estas estruturas produto não são globais, o que de fato torna a construção interessante.

Por simplicidade, nos restringiremos a precisar este conceito apenas em dois casos, o primeiro em que a fibra típica é o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e o segundo em que a fibra é o círculo  $S^1$  (pensado aqui como o grupo de Lie  $U(1)$  dos números complexos de módulo 1). Na literatura, estes são conhecidos por “*fibrados em retas complexas*” e “*fibrados em círculos*”.

Esta seção é destinada a apresentar os conceitos básicos fundamentais a este trabalho. Começaremos por definir os fibrados em retas complexas e verificar alguns fatos a estes relacionados, em seguida faremos o mesmo para os fibrados em círculos e terminamos a seção com a noção de fibrados associados e conceitos relacionados.

### 2.1.1 A Fibrados em retas complexas

#### A.1 Definição e exemplos.

**Definição 2.1** Um fibrado em retas complexas sobre uma variedade  $M$  é uma variedade  $E$  junto com uma aplicação  $\pi : E \longrightarrow M$  tais que:

- i). Para todo  $x \in M$  tem-se que  $\pi^{-1}(x) = E_x$  é um espaço vetorial complexo de dimensão um;
- ii). Para todo  $x \in M$  existe uma vizinhança aberta  $U_i \subset M$  de  $x$ , chamada carta trivializadora, e um difeomorfismo  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ , chamado de trivialização local, tal que

$$\varphi_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{C}$$

para todo  $x \in U_i$  e  $\varphi_i|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$  é um isomorfismo linear. Denotamos tal conjunto por  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ , ou simplesmente  $E \xrightarrow{\pi} M$ .

Alguns pontos valem ser ressaltados na definição de fibrados em retas complexas. Primeiramente observe que o fato de  $\varphi_i$  ser um difeomorfismo garante que  $\varphi_i(E_x)$  é um difeomorfismo entre  $E_x$  e  $\{x\} \times \mathbb{C}$ ,  $\forall x \in U_i$ . Em outras palavras,  $\pi^{-1}(x) = E_x$  (i.e., a fibra de  $E$  sobre  $x$ ) é uma cópia de  $\mathbb{C}$  dentro de  $E$ . Isso justifica a afirmação de que um fibrado em retas complexas é uma família de retas complexas parametrizadas por uma variedade base. O segundo ponto a ser ressaltado é que a condição ii) da definição garante a existência de uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  onde estão definidas trivializações locais  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$ . Ao conjunto  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ , chamamos de *atlas fibrado* ou *atlas trivializador* do fibrado em retas complexas. De agora em diante omitiremos o adjetivo complexas por comodidade.

**Exemplo 2.2 (Fibrado em retas Trivial)** Dada uma variedade  $M$ , a variedade produto  $E = M \times \mathbb{C}$  junto com a projeção canônica  $\pi(x, z) = x$  constitui trivialmente um fibrado. A este chamamos de fibrado em retas trivial sobre  $M$ .

**Exemplo 2.3 (Fibrado Tautológico)** Recordemos da análise complexa que define-se como a reta projetiva complexa  $\mathbb{C}P^1$  ao conjunto das retas (complexas) que passam pela origem de  $\mathbb{C}^2$ . Denotamos a reta que tem a direção do vetor  $z = (z_0, z_1)$  por  $[z] = [z_0, z_1]$ . Note que  $[\lambda z_0, \lambda z_1] = [z_0, z_1]$  para qualquer número complexo  $\lambda$  não nulo. Definindo dois conjuntos abertos  $U_i$ , com  $i = 0, 1$ , dados por  $U_i = \{[z_0, z_1] : z_i \neq 0\}$  e coordenadas dadas por  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\psi_0([z]) = z_1/z_0$  e  $\psi_1([z]) = z_0/z_1$  temos que  $\mathbb{C}P^1$  adquire uma estrutura de variedade que é difeomorfa a  $S^2$ , onde um difeomorfismo explícito é dado por  $(x, y, z) \rightarrow [x + iy, 1 - z]$  em que a imagem de  $U_0$  é o conjunto  $U_N = S^2 - \{0, 0, -1\}$  e de

$U_1$  é  $U_S = S^2 - \{0, 0, 1\}$ . Em particular temos em  $U_0$  um sistema de coordenadas dado por  $[1, t]$  já que

$$z_0 \neq 0 \Rightarrow [z_0, z_1] = [(1/z_0)z_0, (1/z_0)z_1] = [1, z_1/z_0] = [1, t]$$

e analogamente em  $U_1$  temos um sistema de coordenadas dado por  $[s, 1]$ . Temos ainda um biholomorfismo entre  $\mathbb{C}P^1$  e  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , a esfera de Riemann, dado por  $\psi([z_0, z_1]) = z_0/z_1$ . Sendo  $H = \{(w, [z]) : w = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}^*\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1$  e  $\pi : H \rightarrow \mathbb{C}P^1$  dada por  $\pi((w, [z])) = [z]$ , então  $\mathbb{C} \hookrightarrow H \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$  é um fibrado vetorial em retas complexas chamado de **fibrado tautológico** sobre  $\mathbb{C}P^1$ . Um atlas fibrado é obtido tomando-se os abertos  $U_0$  e  $U_1$  e neles as trivializações dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \quad \pi^{-1}(U_0) &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{C} \\ ((z, zt), [1, t]) &\longmapsto ([1, t], z\sqrt{|t|^2 + 1}) \\ \varphi_1 : \quad \pi^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \mathbb{C} \\ ((sw, w), [s, 1]) &\longmapsto ([s, 1], w\sqrt{|s|^2 + 1}) \end{aligned}$$

**Exemplo 2.4 (Espaço tangente de superfícies riemannianas)** Considere uma superfície riemanniana  $(M, g)$  orientada, veremos que sendo  $TM$  o seu espaço tangente, este é também um fibrado em retas sobre  $M$ . Em  $TM$  consideramos a projeção  $\pi : TM \rightarrow M$  tal que  $(p, v) = p$ , claramente  $\pi^{-1}(p) = T_pM$ . Podemos ainda definir um operador global  $J$  que para cada  $p \in M$  age em  $T_pM$  como uma rotação por  $\pi/2$  no sentido positivo e ainda  $J^2 = -Id$ . Assim dado um número complexo  $z = a + bi$ , podemos para cada  $v \in T_pM$  definir  $z \cdot v = (a + Jb)v$  e desse modo temos que  $T_pM$  se torna um espaço vetorial complexo de dimensão um. Sabemos que para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  e um difeomorfismo  $\check{\varphi} : U \subset M \rightarrow \check{U} \subset \mathbb{R}^2$ . Desta maneira temos um difeomorfismo  $\hat{\varphi} : TU \rightarrow \check{U} \times \mathbb{R}^2$  e considerando  $\phi : \check{U} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \check{U} \times \mathbb{C}$  tal que  $\phi(x, y, m, n) = (x, y, m + in)$  teremos um difeomorfismo  $\varphi = \phi \circ \hat{\varphi} : TU \rightarrow \check{U} \times \mathbb{C}$  como queríamos.

**A.2 Os cociclos de transição.** Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas e fixemos um atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ . Temos a seguinte

**Proposição 2.5** A cada par de abertos  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , corresponde uma função suave  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ , chamada de função de transição da carta trivializadora  $U_i$  para a carta  $U_j$ , de forma que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, \zeta_j) = (x, g_{ij}(x)\zeta_j) = (x, \zeta_i). \quad (2.1)$$

Além disso, as funções cumprem as condições de cociclo

$$\begin{cases} g_{ii}(x) = 1 & \text{se } x \in U_i \\ g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x) & \text{se } x \in U_i \cap U_j \cap U_k \end{cases} \quad (2.2)$$



**Demonstração.** Imediata a partir do item ii) da Definição 2.1. ■

**Definição 2.6** A família  $\{g_{ij}\}$  de funções suaves como na proposição anterior é denominada cociclo de transição associado ao atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ . As condições de cociclo nos garantem que o conjunto imagem de todas as funções de transição formam um subgrupo do grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^*$ , a este subgrupo chamamos de grupo estrutural do fibrado em retas.

**Exemplo 2.7** As funções de transição no fibrado trivial  $M \times \mathbb{C}$  são todas iguais a 1, de fato dados dois abertos  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , para cada  $x \in U_i \cap U_j$  segue que  $(x, 1 \cdot \zeta_j) = (x, \zeta_i)$ .

**Exemplo 2.8** No fibrado tautológico temos que  $U_0 \cap U_1 = \{[z_0, z_1] : z_0 \cdot z_1 \neq 0\}$ . Para encontrarmos a função de transição  $g_{10}([z_0, z_1])$  devemos inicialmente explicitar uma expressão para  $\varphi_0^{-1} : U_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U_0) \subset H$ , de fato

$$\varphi_0^{-1}([1, t], z) = \left( \left( \frac{z}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right), [1, t] \right)$$

é a inversa de  $\varphi_0$  uma vez que

$$\begin{aligned} \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}([1, t], z) &= \varphi_0 \left( \left( \frac{z}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right), [1, t] \right) \\ &= \left( [1, t], \frac{z(\sqrt{|t|^2 + 1})}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right) \\ &= ([1, t], z) \end{aligned}$$

assim teremos

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}([1, t], z) &= \varphi_1 \left( \left( \frac{z}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right), [1, t] \right) \\ &= \varphi_1 \left( \left( \frac{1}{t} \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right), \left[ \frac{1}{t}, 1 \right] \right) \\ &= \left( \left[ \frac{1}{t}, 1 \right], \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \sqrt{\left| \frac{1}{t} \right|^2 + 1} \right) \\ &= \left( \left[ \frac{1}{t}, 1 \right], \frac{tz}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \sqrt{\frac{1 + |t|^2}{|t|^2}} \right) \\ &= \left( [1, t], \frac{t}{|t|} z \right) \end{aligned}$$

para todo  $t \neq 0$ . Logo

$$g_{10}([z_0, z_1]) = \frac{t}{|t|} = \frac{z_1/|z_1|}{z_0/|z_0|}.$$

Em diversas situações concretas o que nos é disponível em primeira instância é um cociclo de transição. É notável e operacional que a partir de tais objetos se possa construir um fibrado em retas complexas. Isto é formalizado no

**Teorema 2.9** *Dada uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de uma variedade  $M$  e funções  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$  que satisfaçam as condições de cociclo, então existe um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  tal que  $g_{\alpha\beta}$  são suas funções de transição.*

**Demonstração.** Considere  $\tilde{M}$  como sendo a união disjunta  $\cup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{C})$ . Colaremos estes abertos através das aplicações  $g_{\alpha\beta}$ . Dado um ponto  $m_\alpha \in U_\alpha$ , vamos denotá-lo por  $(m, \alpha)$ , assim se  $U_\beta$  é tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  e o ponto  $m_\alpha \in U_\alpha \cap U_\beta$ , a escrita de  $m_\alpha$  como incluso no aberto  $U_\beta$  será  $(m, \beta)$ . Agora considere o conjunto  $\tilde{M}$  cujo elementos são  $(m, \alpha, \lambda) := ((m, \alpha), \lambda)$  onde  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Uma conta simples mostra que a relação  $(m, \alpha, \lambda) \sim (n, \beta, \mu)$  dada por  $m = n$  e  $g_{\beta\alpha}(m) \lambda = \mu$  é de equivalência. Mais precisamente, temos que a reflexividade de  $\sim$  advém da condição  $g_{ii}(x) = 1$ , a simetria, da condição  $g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = 1$  e a transitividade, da condição  $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = 1$ . Agora, vamos denotar por  $[(m, \alpha, \lambda)]$  a classe de equivalência de  $(m, \alpha, \lambda)$  e por  $L$  o conjunto destas classes de equivalência. Defina neste conjunto as operações adição

$$[(m, \alpha, \lambda)] + [(n, \beta, \mu)] = [(m, \alpha, \lambda + \mu)]$$

e a multiplicação por escalar

$$z [(m, \alpha, \lambda)] = [(m, \alpha, z\lambda)].$$

e seja

$$\begin{array}{ccc} \pi : & L & \longrightarrow M \\ & [(\lambda, m, \alpha)] & \longmapsto m \end{array}.$$

A aplicação  $\pi$  está bem definida pela definição de  $\sim$  e as duas operações definidas fazem de  $\pi^{-1}(m)$  um espaço vetorial complexo de dimensão 1. Finalmente, defina  $s_\alpha(m) = [(1, m, \alpha)]$ . Então

$$s_\alpha(m) = [(m, \alpha, 1)] = [(m, \beta, g_{\alpha\beta}(m))] = g_{\alpha\beta}(m) s_\beta(m)$$

como queríamos.

Por último, seja  $W_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$  e considere a bijeção

$$\begin{array}{ccc} \psi_\alpha : & W_\alpha & \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & [\alpha, x, z] & \longmapsto (x, z) \end{array}.$$

Esta é uma trivialização local. Note que

$$(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(x, z) = (x, g_{\beta\alpha}(x) \cdot z)$$

é um difeomorfismo de  $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$  em sí mesmo. Segue daí que  $L$  admite estrutura de variedade diferenciável. ■

### A.3 Seções locais e funções complexas

Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas sobre  $M$  e fixemos um aberto  $U \subset M$ .

**Definição 2.10** *Uma aplicação suave  $s : U \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id|_U$  é chamada seção local sobre  $U$  do fibrado em retas. Ao conjunto de todas as seções locais definidas sobre  $U$  denotamos por  $\Gamma(U, E)$ .*

**Exemplo 2.11 (Gráfico de uma função complexa)** *Dada uma função complexa definida sobre uma variedade  $M$ , isto é,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Temos que  $s(x) = (x, \psi(x)) \in M \times \mathbb{C}$ , o gráfico desta função, é uma seção no fibrado em retas trivial  $M \times \mathbb{C}$  e, portanto,  $\psi \in \Gamma(M, M \times \mathbb{C})$ .*

**Exemplo 2.12 (Seção nula)** *Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas, como cada fibra  $E_x$  é um espaço vetorial complexo de dimensão um, temos que cada fibra tem um vetor nulo, denotemos o elemento nulo de  $E_x$  por  $0_x$ . Assim, todo fibrado em retas admite uma seção global dada por  $s_0(x) = 0_x$  e, como dada uma trivialização local  $\varphi_i$  temos que  $\varphi_i|_{E_x}$  é isomorfismo linear para cada  $x \in U_i$ , então  $s_0(x) = \varphi_i^{-1}(x, 0)$ , para qualquer que seja a trivialização  $\varphi_i$ , o que nos diz que esta aplicação esta bem definida e ainda é suave. A esta chamamos de seção nula do fibrado em retas.*

Temos também imediatamente que

**Proposição 2.13** *Definindo a soma entre duas seções locais como a soma feita ponto a ponto e o produto por escalar (número complexo) também ponto a ponto,  $\Gamma(U, E)$  tem estrutura de espaço vetorial, com  $s_0$  sendo o vetor nulo.*

A próxima proposição estabelece uma bijeção entre seções locais e trivializações locais.

**Proposição 2.14 (Seção local vs Trivialização local)** *Seja  $E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas. São válidas*

1. *A cada seção local  $s : U \rightarrow E$  que não se anula em ponto algum corresponde uma trivialização local  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}$  cuja inversa cumpre*

$$\varphi_i^{-1}(x, \zeta) = \zeta s_i(x);$$

2. *Dada uma trivialização local  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}$  então  $s : U \rightarrow E$  dada por*

$$s_i(x) = \varphi_i^{-1}(x, 1)$$

*é uma seção local que nunca se anula.*

**Demonstração.** Imediata. ■

**Definição 2.15** *Um referencial local do fibrado em retas  $E \xrightarrow{\pi} M$  sobre um aberto  $U$  é tão somente uma seção local  $s \in \Gamma(U, E)$  que nunca se anula.*

Em seguida, como preparação para o terreno para caracterizar trivializações globais, introduziremos as noções de aplicação fibrado e de isomorfismo fibrado. Para isto, fixemos dois fibrados em retas  $(E, M, \pi)$  e  $(F, N, \pi')$ .

**Definição 2.16** *Dizemos que uma aplicação suave  $\Theta : E \rightarrow F$  é uma aplicação fibrada em retas se para todo  $u \in E$  e  $w \in F$  com*

$$\Theta(u) = w$$

*tivermos que*

$$\Theta|_{E_{\pi(u)}} : E_{\pi(u)} \longrightarrow F_{\pi(w)}$$

*é isomorfismo  $\mathbb{C}$ -linear.*

Um fato que decorre imediatamente da definição anterior é que uma aplicação fibrada em retas  $\Theta : E \rightarrow F$  induz uma aplicação  $\bar{\Theta} : M \rightarrow N$  definida por  $\bar{\Theta}(\pi(u)) = \pi'(\Theta(u))$ .

**Definição 2.17 (Isomorfismo fibrado)** *Sejam  $(E, M, \pi)$  e  $(E', M, \pi')$  fibrados em retas sobre uma mesma variedade  $M$ .*

1. *Um isomorfismo fibrado entre  $(E, M, \pi)$  e  $(E', M, \pi')$  é uma aplicação fibrada  $\Theta : E \rightarrow E'$  que é um difeomorfismo e a aplicação induzida  $\bar{\Theta} : M \rightarrow M$  é a identidade.*
2.  *$(E, M, \pi)$  é dito trivial se é isomorfo como fibrado em retas ao fibrado em retas trivial.*

E agora podemos enunciar o seguinte resultado.

**Proposição 2.18 (Trivialidade de fibrados em retas)** *Um fibrado em retas  $E \xrightarrow{\pi} M$  é trivial se, e somente se, admite um referencial global.*

**Demonstração.** Seja  $\Theta : E \rightarrow M \times \mathbb{C}$  um isomorfismo fibrado entre  $E$  e  $M \times \mathbb{C}$ , então  $\Theta^{-1}(x, 1)$  define um referencial global para  $E$ . Reciprocamente, suponha que  $s : M \rightarrow E$  seja um referencial global e considere  $\Theta : M \times \mathbb{C} \rightarrow E$  dada por  $\Theta(x, \zeta) = s(x)\zeta$ . Claramente esta é uma aplicação fibrada em retas, pois para cada  $x \in M$  temos que  $s(x) \in \mathbb{C}^*$  e assim  $\zeta \rightarrow s(x)\zeta$  é um isomorfismo entre retas complexas.  $\Theta$  é ainda biunívoca, diferenciável e ainda com inversa diferenciável, logo um isomorfismo fibrado.

■

Finalmente, as relações entre seções locais e cociclos se dá da forma como segue: Considere trivializações locais  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Se  $s \in \Gamma(U_i \cap U_j, E)$ , existem funções  $\psi_i, \psi_j : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $s = \psi_i s_i = \psi_j s_j$ , onde  $s_i$  e  $s_j$  são os referenciais

locais associados a  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$ , logo  $\varphi_i(\psi_i(x)s_i(x)) = (x, \psi_i(x))$  e  $\varphi_j(\psi_j(x)s_j(x)) = (x, \psi_j(x))$ . Portanto

$$\psi_i = g_{ij}\psi_j. \quad (2.3)$$

Disto decorre que

$$\psi_i s_i = \psi_j s_j \Rightarrow (g_{ij}\psi_j) s_i = \psi_j s_j \Rightarrow g_{ij} s_i = s_j \Rightarrow g_{ji} g_{ij} s_i = g_{ji} s_j,$$

logo

$$s_i = g_{ji} s_j. \quad (2.4)$$

Reciprocamente, dado um atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  de  $E$  com referenciais associados  $s_i$ , temos que um conjunto de funções  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  tais que nas interseções de seus domínios satisfaçam (2.3) define uma seção global em  $E$ .

## 2.1.2 B Fibrados em círculos

Seguiremos agora com os fibrados em círculos, ou melhor fibrados com fibra e grupo estrutural  $U(1)$ .

**B.1 Definição e exemplos.** Começaremos recordando que dada uma variedade diferenciável  $P$  e uma aplicação  $R : P \times U(1) \rightarrow P$ ,  $R$  é chamada uma ação à direita de  $U(1)$  em  $P$  se  $R(u, 1) = u$  e  $R(R(u, g), h) = R(u, g \cdot h)$ . Denotaremos  $R(u, g)$  por simplesmente  $u \cdot g$ . Agora podemos introduzir o conceito de fibrado em círculos.

**Definição 2.19** *Um fibrado em círculos  $(P, M, \pi, R)$  sobre uma variedade  $M$  é uma variedade  $P$ , junto com uma aplicação suave  $\pi : P \rightarrow M$  e uma ação suave à direita  $R$  de  $U(1)$  em  $P$ , tais que*

*i). Para quaisquer  $u \in P$  e  $g \in U(1)$  vale*

$$\pi(u \cdot g) = \pi(u); \quad (2.5)$$

*ii). Para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança aberta  $U_i \subset M$  de  $p$ , chamada carta trivializadora, e um difeomorfismo  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times U(1)$ , chamado trivialização local, tal que  $\varphi_i$  é da forma*

$$\varphi_i(u) = (\pi(u), f_i(u)) \quad (2.6)$$

*onde  $f_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U(1)$  satisfaz*

$$f_i(u \cdot g) = f_i(u) \cdot g; \forall u \in P, \forall g \in S^1. \quad (2.7)$$

*Denotamos tal conjunto por  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$ , quando não houver risco de confusão quanto à ação, ou ainda por  $P(M, U(1))$ , quando não houver risco de confusão quanto à projeção  $\pi$ .*

Vejamos agora alguns exemplos de fibrados em círculos.

**Exemplo 2.20 (Fibrado em círculos trivial)** Dada uma variedade  $M$ , a variedade produto  $P = M \times \mathbb{U}(1)$  juntamente com a projeção  $\pi(u, g) = u$  e a ação  $R : P \times \mathbb{U}(1) \rightarrow P$  dada por  $R((u, g), h) = (u, g \cdot h)$  constitui um fibrado em círculos sobre  $M$ . A este chamamos fibrado em círculos trivial sobre  $M$ . Em particular se tomarmos  $M = S^1$  segue que o toro  $T^2 = S^1 \times \mathbb{U}(1)$  é um fibrado em círculos sobre  $S^1$  onde a ação à direita são rotações da fibra.

**Exemplo 2.21 (Fibrado de Hopf)** Sendo  $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ , veremos que é possível construir um fibrado em círculos  $\mathbb{U}(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$  sobre  $\mathbb{C}P^1$ , a este fibrado denomina-se fibrado de Hopf complexo. Considere a ação  $R : S^3 \times \mathbb{U}(1) \rightarrow S^3$  dada por  $R((z_0, z_1), g) = (gz_0, gz_1)$  e a projeção  $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  dada por  $\pi(z_0, z_1) = [z_0, z_1]$ . De fato temos que a condição i) da definição é satisfeita uma vez que

$$\pi((z_0, z_1) \cdot g) = \pi(gz_0, gz_1) = [gz_0, gz_1] = [z_0, z_1] = \pi(z_0, z_1).$$

Para verificarmos que a condição ii) é satisfeita devemos considerar a cobertura  $U_i$  de  $\mathbb{C}P^1$ , com  $i = 0, 1$ , tal que  $U_i = \{[z_0, z_1] : z_i \neq 0\}$ . Desse modo temos  $\pi^{-1}(U_i) = \{(z_0, z_1) \in S^3 : z_i \neq 0\}$  e assim

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \pi^{-1}(U_0) &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{U}(1) \\ (z_0, z_1) &\longmapsto \left([z_0, z_1], \frac{z_0}{|z_0|}\right) \\ \varphi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \mathbb{U}(1) \\ (z_0, z_1) &\longmapsto \left([z_0, z_1], \frac{z_1}{|z_1|}\right) \end{aligned}$$

são tais que

$$\varphi_i(z_0, z_1) = (\pi(z_0, z_1), f_i(z_0, z_1))$$

onde  $f_i(z_0, z_1) = \frac{z_i}{|z_i|}$  satisfaz

$$f_i((z_0, z_1) \cdot g) = f_i((gz_0, gz_1)) = \frac{gz_i}{|gz_i|} = \frac{gz_i}{|z_i|} = \frac{z_i}{|z_i|} \cdot g = f_i((z_0, z_1)) \cdot g$$

como queríamos. Uma vez que  $\mathbb{C}P^1$  é difeomorfo a  $S^2$  e  $\mathbb{U}(1)$  é difeomorfo a  $S^1$ , é comum na literatura denotar este fibrado por  $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ .

Vemos aqui uma situação muito similar ao fibrados em retas, uma vez que a condição ii) da definição assegura que um fibrado em círculos sobre  $M$  é, a grosso modo, uma família de círculos parametrizados por  $M$ . Temos ainda o seguinte

**Lema 2.22** Para cada  $u \in P$ , a fibra sobre  $\pi(u)$  coincide com a órbita de  $u$  pela ação de  $\mathbb{U}(1)$ , i.e.,

$$P_{\pi(u)} = \{u \cdot g : g \in \mathbb{U}(1)\} = u \cdot \mathbb{U}(1).$$

**Demonstração.** Primeiramente observe que segue de (2.5) que  $\pi^{-1}(\pi(u)) \supset u \cdot U(1)$ . Considere agora  $u' \in \pi^{-1}(\pi(u))$  e seja  $\varphi_i$  uma trivialização tal que  $\pi(u) \in U_i$ . Temos imediatamente que  $\pi(u') = \pi(u) = x$ , logo  $\varphi_i(u) = (\pi(u), f_i(u))$  e  $\varphi_i(u') = (\pi(u), f_i(u'))$ . Portanto,  $f_i(u), f_i(u') \in U(1)$ , de onde segue que existe  $g \in U(1)$  tal que  $f_i(u)g = f_i(u')$ . Por outro lado, segue de (2.7) que  $f_i(ug) = f_i(u')$ , logo

$$\varphi_i(ug) = (\pi(ug), f_i(ug)) = (\pi(u), f_i(u')) = (\pi(u'), f_i(u')) = \varphi_i(u').$$

Como  $\varphi_i$  é difeomorfismo, temos que  $u' = ug$ , o que nos diz que  $\pi^{-1}(\pi(u)) \subset u \cdot U(1)$ . Segue o resultado desejado. ■

**B.2 Os cociclos de transição.** Observe que a condição ii) da Definição 2.19 garante a existência de uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  onde estão definidas trivializações locais  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times U(1)$ , dadas por  $\varphi_i = (\pi, f_i)$ . Ao conjunto  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ , chamamos de *atlas trivializador* do fibrado em círculos. Assim como nos fibrados em retas, podemos definir em cada dois abertos  $U_i$  e  $U_j$  no atlas trivializador do fibrado em círculos tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , as chamadas *função de transição* entre  $U_j$  e  $U_i$ ,  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  definidas por  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, g) = (x, g_{ij}(x) \cdot g)$ . Esta nomenclatura faz sentido já que um mesmo ponto  $u$  no espaço total  $P$  tem coordenadas  $(x, g)$  pela trivialização  $\varphi_j$  e  $(x, g_{ij}(x)g)$  pela trivialização  $\varphi_i$ .

De fato estas funções estão bem definidas pois dados  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , segue que  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  é um difeomorfismo de  $(U_i \cap U_j) \times U(1)$  em si mesmo e que preserva o primeiro fator, pois  $\varphi_i = (\pi, f_i)$ . Mais precisamente para  $x \in U_i \cap U_j$  temos

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, g) = (x, g_{ij}(x, g)),$$

onde, para cada  $x$ , temos uma aplicação  $g_{ij}(x, \cdot) : U(1) \rightarrow U(1)$ . Mais ainda, segue de (2.7) que esta deve ser invariante pela ação à direita, ou seja,

$$g_{ij}(x, g)h = g_{ij}(x, gh), \quad \forall g, h \in U(1).$$

Portanto tomando  $g = 1$ , a aplicação  $g_{ij}(x, \cdot)$  coincide com a multiplicação à esquerda em  $U(1)$  por  $g_{ij}(x, 1) \in U(1)$ . Assim tem sentido denotarmos esta aplicação apenas por  $g_{ij}(x) \cdot g := g_{ij}(x, g)$ .

Vale ainda destacar que as funções de transição relativas ao atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  só fazem sentido se satisfizerem as seguintes condições

- a).  $g_{ii}(x) = 1$ , para  $x \in U_i$ ;
- b).  $g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) = 1$ , para  $x \in U_i \cap U_j$  e
- c).  $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = 1$ , para  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ .

Tais condições são chamadas de condições de cociclo.

**Exemplo 2.23** As funções de transição no fibrado trivial  $M \times U(1)$  são todas iguais a 1, de fato dados dois abertos  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , para cada  $x \in U_i \cap U_j$  segue que  $(x, 1 \cdot g_j) = (x, g_i)$ .

**Exemplo 2.24** No fibrado de Hopf  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$  temos que  $U_0 \cap U_1 = \{[z_0, z_1] : z_0 \cdot z_1 \neq 0\}$ . Para encontrarmos a função de transição  $g_{10}(x)$  devemos inicialmente explicitar uma expressão para  $\varphi_0^{-1} : U_0 \times U(1) \rightarrow \pi^{-1}(U_0) \subset S^3$ , de fato

$$\varphi_0^{-1}([1, t], g) = \left( \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right)$$

é a inversa de  $\varphi_0$  uma vez que

$$\begin{aligned} \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}([1, t], g) &= \varphi_0 \left( \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right) \\ &= \left( \left[ \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right], \frac{\frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}}{\left| \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right|} \right) \\ &= \left( \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}} [1, t], \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \frac{|\sqrt{|t|^2 + 1}|}{|g|} \right) \\ &= ([1, t], g) \end{aligned}$$

assim teremos

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}([1, t], g) &= \varphi_1 \left( \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right) \\ &= \left( \left[ \frac{g}{\sqrt{|t|^2 + 1}}, \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right], \frac{\frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}}}{\left| \frac{tg}{\sqrt{|t|^2 + 1}} \right|} \right) \\ &= \left( [1, t], \frac{tg}{|tg|} \right) \\ &= \left( [1, t], g \cdot \frac{t}{|t|} \right) \end{aligned}$$

para todo  $t \neq 0$ . Logo

$$g_{10}([z_0, z_1]) = \frac{t}{|t|} = \frac{z_1/|z_1|}{z_0/|z_0|} = \frac{z_1|z_0|}{z_0|z_1|}.$$

Convém para interesses futuros expressarmos esta função de transição em coordenadas esféricas, o que é possível uma vez que  $\mathbb{C}P^1$  e  $S^2$  são difeomorfos. Para isso introduziremos em  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  as coordenadas  $(z_0, z_1) = (\cos \phi e^{i\xi}, \sin \phi e^{i\zeta})$  com  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ , desta forma teremos

$$\pi(z_0, z_1) = [\cos \phi e^{i\xi}, \sin \phi e^{i\zeta}] = [\cos \phi e^{i(\xi - \zeta)}, \sin \phi]$$



então

$$\begin{aligned}
 g_{10}([z_0, z_1]) &= g_{10}([\cos \phi e^{i\xi-\zeta}, \sin \phi]) \\
 &= \frac{(\sin \phi) |\cos \phi e^{i\xi-\zeta}|}{(\cos \phi e^{i\xi-\zeta}) |\sin \phi|} \\
 &= e^{-i(\xi-\zeta)} \frac{(\sin \phi) |\cos \phi|}{(\cos \phi) |\sin \phi|} \\
 &= e^{-i(\xi-\zeta)}.
 \end{aligned}$$

Como

$$[\cos \phi e^{i\xi-\zeta}, \sin \phi] = [\cos \phi (\cos(\xi - \zeta) + i \sin(\xi - \zeta)), \sin \phi]$$

segue pelo difeomorfismo  $(x, y, z) \rightarrow [x + iy, 1 - z]$  entre  $\mathbb{C}P^1$  e  $S^2$  que  $\theta := \xi - \zeta$  é o parâmetro usual em coordenadas esféricas. Assim, como fibrado sobre  $S^2$  com cartas trivializadoras  $U_N = S^2 - \{0, 0, -1\}$  e  $U_S = S^2 - \{0, 0, 1\}$ , o fibrado de Hopf tem como função de transição

$$g_{SN}(\theta, \phi) = e^{-i\theta}.$$

Mesmo um fibrado sendo um objeto com uma estrutura global, a existência de funções de transição entre trivializações locais nos permite estudar tal estrutura localmente e, mais importante, conhecendo como estas trivializações locais se “colam”, podemos recuperar completamente a estrutura global inicial. Mais precisamente temos

**Teorema 2.25** *Dada uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de uma variedade  $M$  e funções  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$  que satisfaçam as condições de cociclo, então existe um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  tal que  $g_{ij}$  são suas funções de transição.*

**Demonstração.** A prova é a adaptação direta para o presente caso da demonstração feita para o Teorema 2.9. Observar que no presente caso ao invés de se definir um produto por escalar complexo na fibra, definir-se-á uma ação à direita do grupo  $U(1)$  na fibra. ■

De maneira análoga aos fibrados em retas podemos nos fibrados em círculos generalizar o conceito de gráfico de uma função.

**Definição 2.26** *Seja  $P(M, U(1))$  um fibrado em círculos. Uma aplicação suave  $s : U \subset M \rightarrow P$  tal que  $\pi \circ s = Id|_U$ , é chamada seção local sobre  $U$  do fibrado em círculos. O conjunto de todas as seções locais definidas sobre  $U$  será denotado por  $\Gamma(U, P)$ .*

**B.3 Seções locais e funções locais em  $U(1)$ .** Dada uma trivialização local  $\varphi_i$  e uma aplicação diferenciável  $f : U_i \rightarrow U(1)$ , temos que  $s(x) = \varphi_i^{-1}(x, f(x))$  define uma seção local sobre  $U_i$ . Tomando-se  $f(x) \equiv 1$  a seção  $s(x) = \varphi_i^{-1}(x, 1)$  chamamos de *seção local canônica* associada a  $\varphi_i$ . Reciprocamente, dada uma seção local  $s \in \Gamma(U_i, P)$  e, uma vez que

$$\pi^{-1}(U_i) = \bigcup_{x \in U_i} \pi^{-1}(x) = \bigcup_{x \in U_i} \{s(x)g : g \in U(1)\}$$

pois  $s(x) \in P_x$ , temos que  $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times U(1)$ , definida por

$$\varphi_i(s(x)g) = (x, g),$$

é uma trivialização local para  $\pi^{-1}(U_i)$ , já que é claramente uma bijeção, pelo Lema 2.22, e é suave pois  $\varphi_i(u) = (\pi, f_i)$ . Dado  $u \in \pi^{-1}(U_i)$  e uma trivialização  $\varphi_j$  tal que  $\pi(u) \in U_j$ , temos

$$\begin{aligned} f_j(u) &= f_j(s \circ \pi(u) \cdot g) = ((f_j \circ s \circ \pi)(u)) \cdot g \Rightarrow \\ g &= f_j(u)((f_j \circ s \circ \pi)(u))^{-1} = f_i(u), \end{aligned}$$

o que nos diz que  $f_i$  é suave. Sua inversa também suave pois  $\varphi_i^{-1}(x, g) = s(x)g$  é a composição de duas aplicações suaves. Assim estabelecemos uma correspondência biunívoca entre seções locais e trivializações locais de um fibrado em círculos.

Podemos explicitar como se relacionam duas seções locais que tais que seus domínios tenham interseção não vazia. De fato sendo  $x \in U_i \cap U_j$ ,  $s_i \in \Gamma(U_i, P)$  e  $s_j \in \Gamma(U_j, P)$  seções locais canônicas associadas às trivializações  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$ , respectivamente, teremos

$$s_i(x) = \varphi_i^{-1}(x, 1) = \varphi_j^{-1}(x, g_{ji}(x) \cdot 1) = \varphi_j^{-1}(x, 1)g_{ji}(x) = s_j(x)g_{ji}(x),$$

onde  $g_{ji}(x)$  é a função de transição entre  $\varphi_i$  e  $\varphi_j$ .

**B.4 Aplicações fibradas.** Na verdade, essa correspondência consequentemente muito importantes. Para demonstrar este fato, precisaremos introduzir alguns conceitos.

**Definição 2.27** *Dados dois fibrados em círculos  $(P, M, \pi, R)$  e  $(Q, N, \pi', R')$ , dizemos que uma aplicação suave  $\Phi : P \rightarrow Q$  é uma aplicação fibrada (em círculos) se*

$$\Phi(u) = w \Rightarrow \Phi(P_{\pi(u)}) = Q_{\pi'(w)}. \quad (2.8)$$

*Em particular,  $\Phi$  induz uma aplicação  $\bar{\Phi} : M \rightarrow N$  definida por  $\bar{\Phi}(\pi(u)) = \pi'(\Phi(u))$ . Dois fibrados em círculos,  $(P, M, \pi, R)$  e  $(P', M, \pi', R')$ , são ditos equivalentes se existe uma aplicação fibrada em círculos  $\Phi : P \rightarrow P'$  tal que  $\Phi$  seja um difeomorfismo e  $\bar{\Phi}$  seja a aplicação identidade. Dizemos que um fibrado em círculos é trivial se este for equivalente ao fibrado em círculos trivial.*

Concluimos as definições básicas envolvendo fibrados em círculos com o seguinte resultado:

**Proposição 2.28** *Um fibrado em círculos é trivial se e somente se admite uma seção global.*

**Demonstração.** Seja  $(P, M, \pi, R)$  um fibrado em círculos sobre  $M$  e  $s \in \Gamma(M, P)$  uma seção global. Sabemos que para cada  $x \in M$  tem-se  $P_x = s(x) \cdot U(1)$  e assim cada  $u \in P$  é unicamente escrito como  $s(x)g$  para algum  $x \in M$  e  $g \in U(1)$ . Considere, então,  $\Phi : P \rightarrow M \times U(1)$  dada por  $\Phi(s(x)g) = (x, g)$ . Já vimos que esta aplicação é um difeomorfismo e, como claramente esta satisfaz (2.8), temos que tal fibrado é trivial. Reciprocamente, suponha que  $\Phi : M \times U(1) \rightarrow P$  seja uma aplicação fibrada em círculos que estabeleça uma equivalência entre este dois fibrados. Então, cada  $g \in U(1)$   $s_g$  definida por  $s_g(x) = \Phi(x, g)$  é uma seção global, i.e.,  $s \in \Gamma(M, P)$ . ■

### 2.1.3 C Fibrados associados

Iremos agora estabelecer relações estruturais entre fibrados em retas complexas e fibrados em círculos, usando como ponte para tal os cociclos de transição das mesmas.

**Definição 2.29** *Dado um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e funções de transição  $g_{ij}$ , dizemos que um fibrado em retas  $(E, M, \pi)$  é associado a a  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  se admitir atlas trivializador  $\{U_i, \tilde{\varphi}_i\}_{i \in I}$  e funções de transição  $h_{ij}$  tais que  $h_{ij} = g_{ij}$  para todos  $i, j \in I$ .*

De fato, pelos Teoremas 2.25 e 2.9, dado um fibrado em círculos sempre existe um fibrado em retas associado a este. Reciprocamente, dado um fibrado em retas com funções de transição assumindo valores em  $U(1)$ , existe um fibrado em círculos que lhe é associado.

**Exemplo 2.30** *No Exemplo 2.7 vimos que dada uma variedade  $M$  as funções de transição de seu fibrado em retas trivial são todas identicamente iguais a 1 e no Exemplo 2.23 vimos que o mesmo acontece com as funções de transição do seu fibrado em círculos trivial. Dessa maneira para qualquer variedade  $M$  temos que seus fibrados triviais são associados.*

**Exemplo 2.31** *Os fibrados tautológico e de Hopf sobre  $\mathbb{C}P^1$  são associados. De fato temos pelo Exemplo 2.8 que as funções de transição do fibrado tautológico são dadas por*

$$g_{10}([z_0, z_1]) = \frac{z_1/|z_1|}{z_0/|z_0|}$$

*e que pelo Exemplo 2.24 obtemos o mesmo para o fibrado de Hopf.*

A diferença fundamental entre um fibrado em retas que é associado a um fibrado em círculos para um fibrado em retas qualquer, é que suas funções de transição assumem valores apenas em  $U(1) \subsetneq \mathbb{C}^*$ . Na verdade, essa diferença tem a importante consequência de podermos definir um produto escalar hermitiano em cada fibra. Recorde que um produto escalar hermitiano em um espaço vetorial complexo  $V$ , é uma aplicação bilinear  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$i) h(v, u) = \overline{h(u, v)}, \quad \forall v, u \in V;$$

$$ii) h(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Sejam  $\varphi_i, \varphi_j$  trivializações locais com referenciais canônicos dados respectivamente por  $s_i, s_j$ , então duas seções globais quaisquer  $\Psi, \Phi$  podem ser escritas localmente na forma  $\Psi = \psi_i s_i = \psi_j s_j$  e  $\Phi = \phi_i s_i = \phi_j s_j$ , onde  $\psi_i, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  são funções complexas. Segue de (2.3) que

$$\overline{\psi_i} \phi_i = \overline{\psi_j g_{ij}} \phi_j g_{ij} = \overline{\psi_j} g_{ij}^{-1} \phi_j g_{ij} = \overline{\psi_j} \phi_j.$$

Portanto, fica bem definido o produto interno

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \overline{\psi_i} \phi_i, \quad (2.9)$$

podemos perceber que esta operação não depende de nenhuma trivialização em particular, logo está globalmente definida. Mais ainda,

$$\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi, \Psi \rangle} \quad (2.10)$$

é uma norma bem definida em cada fibra.

**Definição 2.32** *Um fibrado em retas  $(E, M, \pi)$  munido de uma família de produtos escalares hermitianos*

$$\begin{aligned} h_x : \pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s(x), t(x)) &\longmapsto h_x(s(x), t(x)) = \langle s, t \rangle_x \end{aligned}$$

*definidos fibra a fibra e que varia suavemente é chamado de fibrado em retas hermitiano. À família de produtos  $h$  chamamos de estrutura hermitiana do fibrado em retas.*

Assim um fibrado em retas associado a um fibrado em círculos possui uma estrutura hermitiana canônica.

## 2.2 Conexões em fibrados

Até o momento vimos conceitos envolvendo fibrados em círculos e fibrados em retas, vimos que podemos estudar estes espaços como sendo localmente um espaço produto e em particular vimos que podemos definir um análogo à noção de função diferenciável em tal estrutura, i.e., uma seção local. Uma pergunta natural a ser feita é se certas noções do cálculo podem ser estendidas para tais aplicações como, por exemplo, a noção de derivada direcional. Nesta seção nos ocuparemos de apresentar um conceito que responde a tal questão.

### 2.2.1 A Conexões em fibrados em retas complexas

Passaremos agora à construção de um conceito de derivação das seções de um fibrado por retas, avaliando algumas de suas consequências.

**A.1 Conexões lineares** Começamos por levantar a questão natural do que seria uma noção de variação de uma seção em relação a uma dada direção, mais precisamente, sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas,  $s$  uma seção e  $X = X(x) \in T_x M$  um vetor tangente a  $x \in M$  o que seria a derivada direcional de  $s$  com relação a  $X$  em  $x$ . Para precisar esta questão lembremos da definição de derivada direcional da análise, assim considere uma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = X$  queremos encontrar, caso exista, o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}$$

no entanto a diferença  $s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))$  não faz o menor sentido já que  $s(\gamma(t)) \in \pi^{-1}(\gamma(t))$  e  $s(\gamma(0)) \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ , i.e., pertencem a espaços vetoriais complexos diferentes.

Portanto, iremos construir um operador diferencial que generalize as propriedades desejadas da derivada direcional, a este objeto chamaremos de conexão linear no fibrado em retas.

**Definição 2.33** Uma conexão linear em um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  é uma aplicação linear

$$\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz, i.e., tal que para toda  $s \in \Gamma(M, E)$  e  $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$  tenhamos

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

E assim temos

**Definição 2.34** Sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas com uma conexão  $\nabla$ ,  $s \in \Gamma(M, E)$  uma seção e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  definimos a derivada covariante de  $s$  com respeito a  $X$  em relação a conexão  $\nabla$  como sendo a seção

$$\nabla_X s = \nabla s(X) \tag{2.11}$$

**Exemplo 2.35** Considere o fibrado em retas trivial  $E = M \times \mathbb{C}$  sobre uma variedade  $M$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $s \in \Gamma(M, E)$ . Temos que

$$\nabla_X s = (x, ds(x) \cdot X(x)) = (x, X(s))$$

onde  $d$  é o operador que associa a cada função complexa a sua diferencial é uma conexão sobre  $E$ , já que este é linear e satisfaz a regra de Leibniz. Dessa forma concluímos que a noção de conexão é uma generalização da noção de derivação.

Convém agora introduzir escritas em coordenadas para uma conexão em um fibrado em retas, pois só desta maneira é que poderemos realizar cálculos em situações práticas, antes vejamos os seguintes resultados técnicos

**Proposição 2.36** *Um fibrado em retas sempre admite uma conexão.*

**Demonstração.** Sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas, tome uma cobertura aberta de  $M$  dada pelo seu atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ , assim temos em cada  $U_i$  uma seção local  $s_i$  que não se anula em ponto algum de  $U_i$ . Se  $\psi$  é uma seção de  $E$  podemos escrevê-la localmente como  $\psi|_{U_i} = \psi_i s_i$ . Tomando uma partição da unidade  $\rho_i$  subordinada a essa cobertura, note que  $\rho_i s_i$  se estende suavemente a toda  $M$ . Então

$$\nabla \psi = \sum d\psi_i \rho_i s_i$$

define uma conexão sobre  $E$  uma vez que é linear e obedece à regra de Leibniz pelas propriedades da diferencial  $d$ . ■

**Proposição 2.37** *Se  $\nabla$  é uma conexão em um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  e  $U \subset M$  é um aberto, então existe uma única conexão  $\nabla_U$  em  $E|_U \rightarrow U$  tal que*

$$\nabla s|_U = \nabla_U(s|_U)$$

**Demonstração.** Primeiramente verificaremos que se  $s$  é uma seção que se anula identicamente em uma vizinhança  $U$  de um ponto  $x \in M$ , então  $\nabla(s)(x) = 0$ . De fato nestas condições podemos encontrar uma função  $f$  sobre  $M$  que igual a 1 fora de  $U$  e igual a zero em alguma vizinhança de  $x$  tal que  $f s = s$  e assim

$$\nabla(s)(x) = \nabla(f s)(x) = df(x)s(x) + f(x)\nabla(s)(x) = 0$$

E portanto se duas seções  $s$  e  $t$  coincidem em uma vizinhança  $U$  de um ponto  $x$ , temos que  $(t - s)(x) = 0$  logo  $\nabla(t - s)(x) = 0$  e por linearidade  $\nabla(s)(x) = \nabla(t)(x)$ . Seja  $s \in \Gamma(U, E)$  e  $x \in U$  então podemos multiplicar esta  $s$  por uma função bump  $h$  que seja 1 em uma vizinhança de  $x$  de maneira que  $\hat{s} \in \Gamma(M, E)$  definida por

$$\hat{s}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin U \\ h s(y) & \text{se } y \in U \end{cases}$$

estende  $s$  sobre  $M$  e assim podemos definir  $\nabla_U(s)(x) = \nabla(\hat{s})(x)$ . Caso seja escolhida uma diferente função bump  $h'$  que estende  $s$  a uma seção  $\tilde{s}$ , temos que  $\hat{s}$  e  $\tilde{s}$  coincidem em uma vizinhança de  $x$  e portanto  $\nabla_U(s)(x)$  está bem definida. ■

**A.2 Formas de conexão.** Dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma conexão  $\nabla$  e uma trivialização local  $U_i$  deste, o resultado anterior nos garante que faz sentido estudar esta conexão restrita a  $E|_{U_i} \rightarrow U_i$ . Sendo  $s_i$  o referencial canônico sobre  $U_i$  temos que  $\nabla s_i \in \Gamma(U_i, T^*U_i \otimes E|_{U_i})$  e então existe uma 1-forma  $A_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathbb{C}$ , i.e., assumindo valores complexos tal que

$$\nabla s_i = A_i \otimes s_i$$

a esta 1-forma chamamos de *forma local da conexão*  $\nabla$  induzida pelo referencial  $s_i$ . Na verdade a forma de conexão induzida determina completamente a conexão restrita a  $U_i$  pois dada uma seção qualquer  $s \in \Gamma(M, E)$ , quando restrita a  $U_i$ , esta pode ser escrita como  $s|_{U_i} = \psi_i s_i$  onde  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  e assim

$$\begin{aligned} \nabla s &= \nabla(\psi_i s_i) \\ &= d\psi_i \otimes s_i + \psi_i \nabla s_i \\ &= d\psi_i \otimes s_i + \psi_i A_i \otimes s_i \\ &= (d\psi_i + \psi_i A_i) \otimes s_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

É conveniente que estudemos como se comporta a forma de conexão quando mudamos o referencial. Mais precisamente, sejam  $s_i$  e  $s_j$  dois referenciais tais que a interseção de seus domínios é não-vazia, sabemos que estes determinam trivializações locais e ainda que são relacionados por

$$s_i = g_{ji} s_j.$$

Sendo  $U$  a interseção do domínio destes referenciais e  $s$  uma seção definida em  $U$ , temos que  $s = s_i \psi_i = s_j \psi_j$ . Logo

$$\psi_i = \psi_j g_{ji}^{-1} = \psi_j g_{ij}.$$

Assim temos

$$\nabla s_i = \nabla(g_{ji} s_j) = dg_{ji} \otimes s_j + g_{ji} \nabla s_j.$$

Como  $\nabla s_i = A_i \otimes s_i$  e  $\nabla s_j = A_j \otimes s_j$ , segue que

$$\begin{aligned} A_i \otimes s_i &= dg_{ji} \otimes s_j + g_{ji} A_j \otimes s_j \Rightarrow \\ A_i \otimes s_i &= dg_{ji} \otimes g_{ji}^{-1} s_i + g_{ji} A_j \otimes (g_{ji}^{-1} s_i) \Rightarrow \\ A_i &= dg_{ji} g_{ji}^{-1} + g_{ji} A_j g_{ji}^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}. \tag{2.13}$$

Aqui destacamos o fato da função  $g_{ij}$  transformar o referencial  $s_j$  no referencial  $s_i$  e não a componente de uma seção em relação ao referencial  $s_j$  na componente de uma seção em relação ao referencial  $s_i$ . Isso guarda relação com a comparação entre mudanças de bases e mudanças de coordenadas na Álgebra Linear.

É importante observar que as formas locais de conexão guardam toda a informação referente à conexão, mais precisamente temos que

**Proposição 2.38** *Dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e uma família de 1-formas  $\{A_i\}_{i \in I}$  que satisfaçam*

$$A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$$

*sempre que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então existe uma conexão  $\nabla$  em  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  tal que  $\nabla s_i = A_i \otimes s_i$ , onde  $s_i$  são os referenciais associados ao atlas trivializador.*

**Demonstração.** Já sabemos pela Proposição 2.37 que  $\nabla$  pode ser vista localmente. Assim tomando trivializações locais  $U_i$  e  $U_j$  tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  temos para uma seção  $\xi \in \Gamma(M, E)$  que

$$\nabla \xi|_{U_i} = (d\xi_i + A_i \xi_i) \otimes s_i \quad e \quad \nabla \xi|_{U_j} = (d\xi_j + A_j \xi_j) \otimes s_j.$$

Assim por um lado temos  $\nabla \xi|_{U_i \cap U_j} = (d\xi_i + A_i \xi_i) \otimes s_i$  e por outro  $\nabla \xi|_{U_i \cap U_j} = (d\xi_j + A_j \xi_j) \otimes s_j$ . Sabemos que  $\xi_j = g_{ji} \xi_i$  e  $s_j = g_{ij} s_i$  com  $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$  e por hipótese  $A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$  ou  $A_j = A_i + g_{ij}^{-1} dg_{ij}$  logo

$$\begin{aligned} \nabla \xi|_{U_i \cap U_j} &= (d\xi_j + A_j \xi_j) \otimes s_j \\ &= [d(g_{ij}^{-1} \xi_i) + A_j (g_{ij}^{-1} \xi_i)] \otimes (g_{ij} s_i) \\ &= [-g_{ij}^{-2} dg_{ij} \xi_i + g_{ij}^{-1} d\xi_i + A_j (g_{ij}^{-1} \xi_i)] \otimes (g_{ij} s_i) \\ &= [-g_{ij}^{-1} dg_{ij} \xi_i + d\xi_i + A_j \xi_i] \otimes s_i \\ &= [d\xi_i + (A_j - g_{ij}^{-1} dg_{ij}) \xi_i] \otimes s_i \\ &= [d\xi_i + A_i \xi_i] \otimes s_i \end{aligned}$$

o que nos diz que nas interseções de trivializações diferentes a derivada covariante de uma seção está bem definida e portanto temos definida uma conexão. ■

**A.3 Transporte paralelo e holonomia.** Em posse do conceito de derivação covariante, podemos definir quando uma seção varia ou não ao longo de uma curva em relação a uma dada conexão, mais precisamente temos a seguinte

**Definição 2.39** *Dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  com conexão  $\nabla$ , dizemos que uma seção  $s \in \Gamma(M, E)$  é paralela ao longo de uma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  em relação a conexão  $\nabla$  se*

$$\nabla_{\gamma'(t)} s \equiv 0 \tag{2.14}$$



A escrita local da conexão em termos de formas nos permite caracterizar a condição de seção paralela ao longo de uma curva em termos destas 1-formas, basta reinterpretar a condição (2.14) nestes termos. De fato, consideremos uma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i$ , um referencial local  $s_i$  sobre  $U_i$  e uma seção local tal que  $s = s|_\gamma = \psi_i(t)s_i(\gamma(t))$ , então  $s$  é paralela ao longo de  $\gamma$  se, e somente se,

$$0 \equiv \nabla_{\gamma'(t)}s = \nabla_{\gamma'(t)}(\psi_i(t)s_i) = (d\psi_i(t) + \psi_i A_i) \cdot (\gamma'(t)) \otimes s_i$$

Como  $s_i$  é um referencial, isso acontece precisamente quando

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} \equiv -\psi_i(t)A_i(t), \quad (2.15)$$

onde  $A_i(t) = A_i(\gamma'(t))$ . Assim temos uma equação diferencial como condição de paralelismo e com base nela temos a seguinte

**Definição 2.40** *Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas munido de uma conexão  $\nabla$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $s \in \Gamma(M, E)$  uma seção paralela ao longo de  $\gamma$  em relação a  $\nabla$ . Chamamos de transporte paralelo de  $u = s(\gamma(0)) \in E_{\gamma(0)}$  ao longo de  $\gamma$  em relação a  $\nabla$  ao único ponto  $u' \in E_{\gamma(1)}$  tal que  $u' = s(1)$ .*

Note que a definição é consistente, uma vez que trata-se de uma EDO com condição inicial. Esta definição também justifica o nome conexão, uma vez que conecta (compara) fibras diferentes. Observe ainda que o transporte paralelo define uma aplicação

$$P_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$$

que é na verdade um isomorfismo, uma vez que as soluções da EDO (2.15) dependem linearmente da condição inicial.

Influenciados pela aplicação de primeiro retorno de Poincaré, daremos destaque especial ao caso em que  $\gamma$  é uma curva fechada e, portanto, o transporte paralelo define um automorfismo na fibra  $E_{\gamma(0)}$ . Este automorfismo é chamado de *holonomia* da curva  $\gamma$  em relação a conexão  $\nabla$  e será denotado por  $\text{hol}(\gamma, \nabla)$ , i.e.,

$$\begin{array}{ccc} P_\gamma : E_{\gamma(0)} & \longrightarrow & E_{\gamma(0)} \\ u & \longmapsto & \text{hol}(\gamma, \nabla) \cdot u \end{array}$$

Caso a curva  $\gamma$  esteja toda contida em um aberto onde está definido um referencial local  $s_i$ , a holonomia do caminho pode ser escrita como segue:

**Proposição 2.41** *Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas munido de uma conexão  $\nabla$ , dada localmente por  $\nabla_{s_i} = A_i \otimes s_i$ , e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i \subset M$  um caminho fechado inteiramente contido numa carta trivializadora  $U_i$ , então*

$$\text{hol}(\gamma, \nabla) = \exp \left( - \int_\gamma A_i \right), \quad (2.16)$$

onde  $A_i$  é a forma de conexão associada ao referencial  $s_i$ .

**Demonstração.** Sendo  $s = s|_\gamma = \psi_i(t)s_i(\gamma(t))$ , então segue de (2.15) que  $d \log \psi_i(t) \equiv -A_i(t)$ . O resultado segue do teorema fundamental do cálculo, uma vez que

$$\begin{aligned} \text{hol}(\gamma, \nabla)(u) &= \psi_i(1) = \exp \log \psi_i(1) \\ &= \exp \left( \log \psi_i(0) + \int_0^1 d \log \psi_i(t) \right) \\ &= \exp \left( \log \psi_i(0) - \int_0^1 A_i(t) \right) \\ &= \exp \left( - \int_\gamma A_i \right) \cdot u, \end{aligned}$$

onde  $u = \psi_i(0)$ . ■

**A.4 Curvatura e forma de curvatura.** Veremos agora como aparece naturalmente um dos conceitos mais importantes relacionados à conexão de um fibrado. Vimos no Exemplo 2.35 que o operador diferencial de uma função complexa sobre uma variedade  $M$  define uma conexão no fibrado trivial  $M \times \mathbb{C}$ . Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $s \in \Gamma(M, E)$  podemos avaliar a derivada covariante de  $s$  com respeito ao colchete de Lie entre  $X$  e  $Y$

$$\begin{aligned} \nabla_{[X, Y]}s &= (x, ds \cdot [X, Y]) \\ &= (x, [X, Y](s)) \\ &= (x, XY(s)) - (x, YX(s)) \\ &= (x, X(ds \cdot Y)) - (x, Y(ds \cdot X)) \\ &= (x, d\{ds \cdot Y\} \cdot X) - (x, d\{ds \cdot X\} \cdot Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s \end{aligned}$$

onde omitimos a dependência de  $x$  por conveniência.

A equação  $\nabla_{[X, Y]}s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s$  não é satisfeita para qualquer conexão, o que significa que em geral a derivada covariante de uma conexão não é comutativa. Essa não comutatividade recebe um nome especial dado pela

**Definição 2.42** Sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas munido de uma conexão  $\nabla$ ,  $X$  e  $Y$  dois campos vetoriais em  $M$ , a aplicação que associa o par  $\{X, Y\}$  ao operador

$$K(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

que age sobre  $\Gamma(M, E)$ , é chamada de curvatura da conexão.

**Exemplo 2.43** Temos que a curvatura da conexão

$$\nabla_X s = (x, ds(x) \cdot X(x))$$

sobre o fibrado trivial  $M \times \mathbb{C}$  é identicamente nula.

Dados um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma conexão  $\nabla$ ,  $s \in \Gamma(M, E)$  uma seção e  $\psi_i s_i$  sua escrita local em termos de um referencial local  $s_i$  sobre um aberto  $U_i$ , segue pela definição que em relação a este referencial a curvatura da conexão pode ser escrita como

$$K(X, Y)s = \psi_i F_i(X, Y)s_i$$

onde  $F_i$  é uma 2-forma sobre  $U_i$ , que é chamada de *forma local de curvatura* da conexão  $\nabla$ . O seguinte resultado nos fornece uma escrita local para esta forma.

**Proposição 2.44** *Dados um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma conexão  $\nabla$ ,  $s \in \Gamma(M, E)$  uma seção e  $\psi_i s_i$  sua escrita local em termos de um referencial local  $s_i$  sobre um aberto  $U_i$ ,  $\psi_i F_i(X, Y)s_i$  a expressão local da curvatura e  $A_i$  a forma local da conexão associada a  $s_i$ , temos*

$$F_i = dA_i$$

**Demonstração.** O resultado segue aplicando o seguinte resultado geral para 1-formas diferenciais

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]).$$

De fato

$$\begin{aligned} F_i(X, Y)s_i &= \nabla_X \nabla_Y s_j - \nabla_Y \nabla_X s_j - \nabla_{[X, Y]} s_j \\ &= \nabla_X (A_j(Y)s_j) - \nabla_Y (A_j(X)s_j) - A_j([X, Y])s_j \\ &= d[A_j(Y)](X)s_j + A_j(Y)\nabla_X s_j - d[A_j(X)](Y)s_j - A_j(X)\nabla_Y s_j - A_j([X, Y])s_j \\ &= X(A_j(Y))s_j + A_j(Y)\nabla_X s_j - Y(A_j(X))s_j - A_j(X)\nabla_Y s_j - A_j([X, Y])s_j \\ &= X(A_j(Y))s_j + A_j(Y)A_j(X)s_j - Y(A_j(X))s_j - A_j(X)A_j(Y)s_j - A_j([X, Y])s_j \\ &= X(A_j(Y))s_j - Y(A_j(X))s_j - A_j([X, Y])s_j \\ &= dA_j(X, Y)s_j \end{aligned}$$

como queríamos. ■

A expressão (2.13) nos garante que a 2-forma  $F_i$  não depende de nenhum referencial em particular, de fato

$$dA_i = d(A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}) = dA_j.$$

Assim tem sentido

**Definição 2.45** *A 2-forma fechada globalmente definida por*

$$F = dA_i$$

*é chamada de forma de curvatura da conexão  $\nabla$  e não depende de nenhuma 1-forma de conexão induzida por algum referencial em particular.*

**Observação 2.46** *Em vista do Exemplo 2.4 é possível ainda verificar que a conexão de Levi-Civita no fibrado tangente de uma superfície riemanniana  $S$  induz unicamente uma conexão no respectivo fibrado em retas. Desta maneira é possível mostrar que a curvatura de tal conexão é dada por*

$$F = -\mathbf{i}K\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

onde  $K$  é a curvatura gaussiana de  $S$  e  $\sigma_1 \wedge \sigma_2$  é a forma de área canônica associada à métrica riemanniana de  $S$ . Indicamos ao leitor interessado que consulte a seção 16.3d de [21] para uma apresentação deste fato.

**A.4 Curvatura e holonomia.** Podemos interpretar a holonomia em termos da curvatura como segue

**Proposição 2.47** *Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas munido de uma conexão  $\nabla$ ,  $\Sigma$  uma subvariedade compacta de  $M$  de dimensão dois e fronteira dada por uma curva suave e fechada  $\gamma$ , então*

$$\text{hol}(\gamma, \nabla) = \exp\left(-\int_{\Sigma} F\right)$$

**Demonstração.** Primeiro recorde de (2.16) que se  $\gamma$  está contida numa carta trivializadora local, i.e., escolhido um referencial local, então

$$\text{hol}(\gamma, \nabla) = \exp\left(-\int_{\gamma} A_i\right).$$

Portanto se  $\Sigma \subset \pi^{-1}(U_i)$ , o resultado segue do teorema de Stokes, uma vez que  $F_i = dA_i$ . Caso  $\Sigma$  não esteja toda contida dentro de uma carta trivializadora podemos, por compacidade, triangularizar  $\Sigma$  de maneira que cada triângulo  $T_i$  esteja contido em alguma carta trivializadora  $U_i$ . Aplicando-se (2.16) a cada triângulo, temos

$$\begin{aligned} \text{hol}\left(\sum \partial T_i, \nabla\right) &= \sum_i \exp\left(-\int_{\partial T_i} A_i\right) \\ &= \sum_i \exp\left(-\int_{T_i} F\right) \\ &= \exp\left(-\int_{\Sigma} F\right). \end{aligned}$$

Observando o cancelamento das holonomias nos lados dos triângulos interiores a  $\Sigma$ , concluímos que

$$\text{hol}\left(\sum \partial T_i, \nabla\right) = \text{hol}(\gamma, \nabla).$$

Segue o resultado desejado. ■

## 2.2.2 B Conexões em fibrados por círculos

Passaremos agora a adaptação das ideias construídas na seção anterior aos fibrados por círculos e a relação entre suas associações.

**B.1 Conexões de Cartan-Ehresmann.** Considere um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  e uma seção local  $s \in \Gamma(U_i, P)$  neste fibrado, precisamos estabelecer uma forma de estudar a variação de uma seção com relação a um campo tangente de vetores  $X$  num certo ponto  $x \in M$ . Observe que, como decorrência do Lema (2.22),  $s$  pode ser escrita localmente na forma  $s(x) = g(x) \cdot s_i(x)$ , onde  $g : U_i \rightarrow U(1)$  é uma aplicação diferenciável e  $s_i$  é a seção canônica associada a trivialização  $\varphi_i$ . Como queremos analisar o comportamento de  $s$  numa dada direção  $X(x)$ , podemos considerar uma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i \subset M$  de forma que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma'(0) = X(x)$  e olhar para a restrição  $s|_\gamma$ . Assim,  $s$  assume a forma

$$s = s(t) = g(t) \cdot s_i(t)$$

onde  $s_i(t) = s_i|_\gamma$  e  $g(t)$  é uma aplicação  $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U(1)$ . Mas observe que dados  $a, b \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , em geral temos  $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ , de onde segue que  $s(a)$  e  $s(b)$  estão em fibras diferentes. Portanto, em geral não existe uma maneira natural, muito menos única, de compará-los. A conclusão a que chegamos é que para atribuir uma noção de variação de uma seção precisamos acrescentar ao fibrado em círculos uma estrutura adicional. Esta estrutura foi criada por Elie Cartan e desenvolvida por Charles Ehresmann para espaços fibrados até mesmo mais gerais que os vistos aqui. O leitor interessado em uma melhor contextualização histórica e técnica pode consultar [51].

Resumidamente a ideia original de Cartan, quando restrita aos fibrados em círculos, consistia no estudo de uma família de 1-formas definidas nas trivializações locais e que assumiam valores puramente imaginários (1-formas assumindo valores na álgebra de Lie de  $U(1)$ ) satisfazendo ainda certas condições de compatibilidade. Foi Ehresmann quem percebeu que estas formas colavam para definir uma única forma global no espaço total do fibrado, a esta ele chamou de forma de Cartan. Mais tarde percebeu-se que a esta forma está relacionado um objeto puramente geométrico, a saber uma distribuição que satisfaz certas propriedades, que permite a generalização da ideia de conexão para espaços fibrados mais gerais.

Neste trabalho optamos, por questões de objetividade, fazer uma exposição seguindo [9] e [21] como referência, que basicamente segue tal como aconteceu historicamente, isto é, partimos de um objeto local e constatamos sua natureza global intrínseca. Vale ressaltar que em algumas referências é feito o caminho contrário, partindo do objeto global até sua escrita local. O leitor interessado pode consultar o capítulo 10 de [37]. Começaremos pela

**Definição 2.48** *Uma conexão de Cartan num fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  é uma família  $\{A_i\}_{i \in I}$  de 1-formas diferenciais  $A_i \in$*

$\Omega^1(U_i) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$  tais que se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  vale

$$A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji} \quad (2.17)$$

onde  $g_{ji}$  é a função de transição entre  $U_j$  e  $U_i$ .

A seguinte proposição nos garante que, apesar de a definição acima estar em termos locais, ela nos fornece um objeto globalmente definido no espaço total  $P$ . Para isso considere uma trivialização  $\varphi_i$  e sua respectiva carta trivializadora  $U_i$ , tomando  $(x, g_i) := (x, e^{i\theta_i})$  coordenadas em  $U_i \times U(1)$  temos

**Proposição 2.49** Em  $(U_i \cap U_j) \times U(1)$ , vale a igualdade

$$A_i + \mathbf{id}\theta_i = A_j + \mathbf{id}\theta_j.$$

**Demonstração.** Sabemos que  $A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$ . Observando que  $g_{ji}^{-1} dg_{ji} = d \log g_{ij}$  e lembrando que  $g_i = g_{ij} g_j$ , temos

$$d \log g_i = d \log g_{ij} + d \log g_j$$

de onde segue  $g_{ji}^{-1} dg_{ji} = d \log g_i - d \log g_j$ . E com isso teremos em  $(U_i \cap U_j) \times U(1)$

$$A_i + d \log g_i = A_j + d \log g_j ,$$

ou seja,

$$A_i + \mathbf{id}\theta_i = A_j + \mathbf{id}\theta_j ,$$

como queríamos demonstrar. ■

O resultado acima nos permite definir uma 1-forma  $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$ . Esta 1-forma é conhecida na literatura como *forma de Cartan*, a forma  $\omega$  e a família  $\{A_i\}_{i \in I}$  determinam igualmente uma conexão em um fibrado em círculos. De agora em diante denotaremos por  $\omega$  a conexão ficando implícito que

$$(\varphi_i^{-1})^* \omega = A_i + \mathbf{id}\theta_i$$

é sua escrita local.

Recordemos que uma  $k$ -distribuição regular sobre uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  é um subfibrado  $\mathcal{H} \subset TM$  tal que para cada  $x \in M$ ,  $\mathcal{H}_x$  é um subespaço de dimensão  $k \leq n$  de  $T_x M$ . A distribuição é dita suave se para cada  $x \in M$  e  $X_0 \in \mathcal{H}_x$  existir um campo vetorial suave  $X$  definido numa vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $X(y) \in \mathcal{H}_y, \forall y \in U_x$  e  $X(x) = X_0$ . Podemos da forma de Cartan  $\omega$  em um fibrado em círculos  $P$  obter uma distribuição  $\mathcal{H}_\omega$  em  $TP$  dada por  $\mathcal{H}_\omega(u) = \text{Nuc}(\omega(u))$ , a esta chama-se *distribuição de Ehresmann*.

Antes de estudarmos alguns conceitos relacionados à conexão de Cartan, observemos que

**Proposição 2.50** *Todo fibrado em círculos admite uma conexão de Cartan.*

**Demonstração.** Considere um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ . Pelo Teorema 2.9 existe um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  associado a este e pelo Teorema 2.36 este admite uma conexão  $\nabla$  cujas formas locais satisfazem

$$A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$$

onde  $g_{ji}^{-1} dg_{ji} \in \Omega^1(U_i \cap U_j) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$ ,  $A_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathbb{C}$  e  $A_j \in \Omega^1(U_j) \otimes \mathbb{C}$ . Desta maneira  $\tilde{A}_i := \text{Im } A_i$  e  $\tilde{A}_j := \text{Im } A_j$  são tais que  $\tilde{A}_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$  e  $\tilde{A}_j \in \Omega^1(U_j) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$  e em  $U_i \cap U_j$  vale

$$\tilde{A}_i = \tilde{A}_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$$

ou seja, a família  $\{\tilde{A}_i\}_{i \in I}$  define uma conexão de Cartan em  $P$ . ■

**B.2 Transporte paralelo e holonomia.** Passaremos agora à análise do conceito de transporte paralelo em fibrados em círculos.

**Definição 2.51** *Dado um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e uma conexão de Cartan  $\omega$ , dizemos que uma seção local  $s \in \Gamma(U_i, P)$  é paralela se está contida na distribuição de Ehresmann  $\mathcal{H}_\omega$ , i.e.,*

$$s(p) \in \mathcal{H}_P(p), \quad \forall p \in U.$$

Uma caracterização local das seções paralelas é dada pela seguinte proposição a qual omitiremos a prova por ser de menor relevância em nossa exposição, o leitor interessado pode encontrá-la na seção 10.1.4 de [37] Teorema 10.2.

**Proposição 2.52** *Seja  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em círculos com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e  $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$  uma conexão de Cartan sobre  $P$ . Então uma seção local  $s \in \Gamma(U_i, P)$  é paralela se, e somente se,*

$$A_i(\gamma'(t)) + g^{-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) = 0 \tag{2.18}$$

onde  $s = s(t) = g(t) \cdot s_i(t)$ .

Naturalmente, não esperamos que uma seção em geral seja paralela ao longo de uma curva em relação a uma certa conexão. No entanto, podemos estabelecer a noção de uma curva no espaço total que a grosso modo seria o levantamento de uma curva da variedade base por uma seção paralela ao longo desta curva, mais precisamente:

**Definição 2.53** *Dado um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  munido de uma conexão de Cartan  $\omega_P$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva. Então diremos que uma curva  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  é um levantamento horizontal de  $\gamma$  se:*

$$i). \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma;$$

ii).  $\tilde{\gamma}'$  está contida na distribuição de (conexão) de Ehresmann  $\mathcal{H}_P = \text{Nuc}(\omega_P)$ , i.e.,

$$\tilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_P(\gamma(t)).$$

Alguns comentários a respeito da definição acima são necessários. Como fruto do Teorema de Picard-Lindelöf, podemos garantir a existência e a unicidade desse levantamento, uma vez que fixemos um ponto inicial para  $\tilde{\gamma}(0)$  na fibra  $P_{\gamma(0)}$ . De fato, tome  $U_i \subset M$  tal que  $\gamma(0) \in U_i$  e  $g \in U(1)$  tal que  $u = g \cdot s_i(\gamma(0))$ , uma vez que, localmente, obter o levantamento horizontal  $\tilde{\gamma}(t) = g(t) \cdot s_i(\gamma(t))$  que passa por  $u$  se resume a resolver a equação diferencial ordinária (2.18) com condição inicial  $g(0) = g$ . Dessa forma, como a curva é compacta, basta repetir este argumento uma quantidade finita de vezes para obter o resultado desejado.

**Definição 2.54** *Seja  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em círculos munido de uma conexão de Cartan  $\omega$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  uma curva de classe  $C^1$  e  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$  o levantamento horizontal de  $\gamma$  por  $u_0 \in P_{\gamma(0)}$ . Então chamamos de transporte paralelo de  $u_0$  ao longo de  $\gamma$  (em relação à conexão  $\omega$ ) ao único ponto  $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in P_{\gamma(1)}$ .*

Assim, justifica-se o nome “conexão”, pois esta estrutura adicional nos permite comparar pontos que estão em fibras distintas de um mesmo fibrado, ou seja “conecta” fibras diferentes. Em particular, uma conexão em um fibrado em círculos nos permite estabelecer uma aplicação entre fibras sobre extremos distintos de uma curva, i.e.,

$$\Gamma(\gamma) : P_{\gamma(0)} \rightarrow P_{\gamma(1)}.$$

Note que esta aplicação depende tanto da conexão, como da curva  $\gamma$ . Um caso especial e muito importante é quando  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva fechada, i.e.,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Neste caso,  $\Gamma(\gamma)$  é uma aplicação que leva um elemento  $u \in P_{\gamma(0)}$  em um elemento  $u' \in P_{\gamma(0)}$ , em outras palavras, é um automorfismo de  $P_{\gamma(0)}$ . A esse automorfismo chamamos de *holonomia* da conexão  $\omega$  ao longo da curva  $\gamma$  e escrevemos  $\text{hol}(\gamma, \omega)$ .

Em certas situações é interessante ter uma expressão explícita para a holonomia de uma conexão ao longo de um curva, nos contentaremos em encontrá-la no caso especial em que a curva  $\gamma$  se encontra toda contida em uma carta trivializadora.

**Proposição 2.55** *Seja  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em círculos munido de uma conexão de Cartan  $\omega$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_i \subset M$  um caminho fechado inteiramente contido numa carta trivializadora  $U_i$ , então*

$$\text{hol}(\gamma, \omega)(u) = \exp\left(-\int_{\gamma} A_i\right) \cdot u$$



**Demonstração.** Sendo  $x = \gamma(0)$ , tome  $u \in P_x$ . Logo, se  $s_i$  é a seção local canônica da carta trivializadora  $U_i$ , então  $u = g \cdot s_i(x)$  para algum  $g \in U(1)$ . Afim de encontrarmos a holonomia do caminho  $\gamma$ , precisamos fazer o transporte paralelo de  $u$  ao longo de  $\gamma$ , i.e., resolver o problema de Cauchy

$$A_i(t) + g^{-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) = 0, \quad g(0) = g,$$

onde  $A_i(t) = A_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Multiplicando-se a equação por  $g(t)$  e ajustando ambos os lados teremos

$$\frac{d}{dt} g(t) = -g(t) A_i(t) \quad g(0) = g,$$

que é uma EDO de primeira ordem, linear e homogênea com condição inicial. Portanto tem solução única da forma

$$g(t) = g \exp \left( - \int_0^t A_i(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \right).$$

Assim o transporte paralelo de  $u$  ao longo de  $\gamma$  é dado por

$$\begin{aligned} u' &= \left[ g \exp \left( - \int_0^1 A_i(\gamma'(s)) ds \right) \right] \cdot s_i(x) \\ &= \left( - \int_\gamma A_i \right) \cdot [g \cdot s_i(x)] \\ &= \exp \left( - \int_\gamma A_i \right) \cdot u, \end{aligned}$$

como desejado. ■

O resultado acima ainda nos garante que a aplicação  $\text{hol}(\gamma, \omega)$  é a multiplicação por um mesmo elemento de  $U(1)$  seja qual for o ponto  $u$  considerado. De fato para tal basta mudarmos a condição inicial, mas que no final conduz a mesma multiplicação.

**B.3 Curvatura.** Até agora vimos que dado um fibrado em círculos podemos acrescentar a este uma estrutura adicional, i.e. uma conexão, e estudar objetos provenientes desta estrutura adicional como transporte paralelo e holonomia, um outro objeto de grande importância associado a uma conexão é motivado pela

**Proposição 2.56** *Em  $U_i \cap U_j$  vale*

$$dA_i = dA_j$$

**Demonstração.** Basta tomarmos a derivada exterior de (2.17)

$$\begin{aligned} d(A_i) &= d(A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji}) \\ &= dA_j + d(g_{ji}^{-1} dg_{ji}) \\ &= dA_j + d[d \log(g_{ji})] \\ &= dA_j, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Portanto as 2-formas  $dA_i$  definem uma 2-forma global  $F = dA_i$  no fibrado em círculos.

**Definição 2.57** A 2-forma  $\Omega = \pi^*F$  é chamada de forma de curvatura da conexão  $\omega$ .

**Proposição 2.58** Vale a relação

$$\Omega = d\omega$$

onde  $\omega$  é a forma de Cartan.

**Demonstração.** Imediata da definição de  $\Omega$  e de  $F$ . ■

### 2.2.3 C Conexões em fibrados associados.

Passaremos agora às relações entre fibrados em círculos e fibrados em retas associados.

Começemos relembrando da Proposição 2.38 que dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  com atlas trivializador  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e uma família de 1-formas  $\{A_i\}_{i \in I}$  que satisfaçam  $A_i = A_j + g_{ji}^{-1}dg_{ji}$  sempre que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então existe uma conexão  $\nabla$  em  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  tal que  $\nabla s_i = A_i \otimes s_i$ , onde  $s_i$  são os referenciais associados ao atlas trivializador. Assim tem sentido a seguinte

**Definição 2.59** Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas associado a um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma conexão de Cartan  $\omega$ . Então a família de 1-formas  $\{A_i\}_{i \in I}$  induzidas por  $\omega$  definem uma conexão linear em  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ . Esta conexão será chamada de conexão induzida por  $\omega$  e será denotada por  $\nabla^\omega$ .

As seguintes considerações nos mostram que esta conexão tem propriedades importantes.

**Definição 2.60** Dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma estrutura hermitiana  $h$ , dizemos que uma conexão em  $E$  é compatível com sua estrutura hermitiana, ou ainda que é uma conexão métrica, se para quaisquer  $s, r \in \Gamma(M, E)$  restritas a uma curva  $\gamma$ , i.e.,  $s = s(t)$  e  $r = r(t)$ , tivermos

$$d\langle s, r \rangle = \langle s, \nabla r \rangle + \langle \nabla s, r \rangle \quad (2.19)$$

Dessa forma, se  $\nabla$  é uma conexão compatível com a estrutura hermitiana e  $s, r$  são duas seções paralelas ao longo de uma curva  $\gamma$ , então a equação (2.19) garante que o produto internos entre  $s$  e  $r$  ao longo da curva não varia, uma vez que  $d\langle s, r \rangle = 0$ . Isso justificar o termo conexão compatível com a estrutura hermitiana (produto interno).

**Proposição 2.61** Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas associado a um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  munido de uma conexão  $\omega$ , então a conexão induzida  $\nabla^\omega$  é compatível com a estrutura hermitiana canônica de  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ .

**Demonstração.** Como a conexão induzida e a métrica hermitiana canônica são objetos com estrutura local podemos analisa-los em uma trivialização. Assim sendo tome um referencial local  $s_i$  com forma de conexão  $A_i$  e duas seções locais  $\Psi, \Phi \in \Gamma(M, E)$  restritas a alguma curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U_i$ , i.e.  $\Psi = \psi_i(t)s_i$  e  $\Phi = \phi_i(t)s_i$ , teremos então

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \nabla \Phi \rangle + \langle \nabla \Psi, \Phi \rangle &= \langle \psi_i s_i, (d\phi_i + A_i \phi_i) s_i \rangle + \langle (d\psi_i + A_i \psi_i) s_i, \phi_i s_i \rangle \\ &= \overline{\psi_i} d\phi_i + \overline{\psi_i} A_i \phi_i + \overline{d\psi_i} \phi_i + \overline{A_i \psi_i} \phi_i \end{aligned}$$

como  $A_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \text{Im } \mathbb{C}$  temos que a conexão induzida satisfaz  $\overline{A_i} = -A_i$  logo

$$\langle \Psi, \nabla \Phi \rangle + \langle \nabla \Psi, \Phi \rangle = \overline{\psi_i} d\phi_i + \overline{d\psi_i} \phi_i = d(\overline{\psi_i} \phi_i) = d\langle \Psi, \Phi \rangle$$

como queríamos ■

**Observação 2.62** *Toda vez que escrevermos  $(\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M, \nabla^\omega)$  estaremos mencionando um fibrado em retas associado a um fibrado em círculos com conexão  $\omega$ , munido de uma conexão  $\nabla^\omega$ , tal que  $\nabla^\omega$  é a conexão induzida por  $\omega$ .*

Concluiremos esta seção apresentando de maneira explícita como se relacionam as escritas locais de uma dada seção e uma dada 1-forma de conexão por uma mudança de trivialização local para o caso particular de um fibrado em retas  $(\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M, \nabla^\omega)$ . Considere duas trivializações locais  $(U_i, \varphi_i)$  e  $(U_j, \varphi_j)$ , tais que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , sabemos que uma seção  $s \in \Gamma(M, E)$  é escrita localmente como  $s = \psi_i s_i = \psi_j s_j$ , onde  $s_i, s_j$  são os referenciais locais associados. Estes referenciais ainda possuem formas de conexão induzidas  $A_i$  e  $A_j$  i.e.,  $\nabla s_i = A_i \otimes s_i$  e  $\nabla s_j = A_j \otimes s_j$ , e nestas condições temos que

$$\begin{cases} \psi_i = g_{ij} \psi_j \\ A_i = A_j + g_{ji}^{-1} dg_{ji} \end{cases}$$

onde  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{U}(1)$  é a função de transição. Sabemos que  $g_{ij}$  pode ser escrita como  $g_{ij}(x) = e^{i\chi}$ , onde  $\chi : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave; segue que  $g_{ji}^{-1} dg_{ji} = e^{i\chi} d(e^{-i\chi}) = -i \cdot d\chi$ . Portanto,

$$\begin{cases} \psi_i = e^{i\chi} \psi_j, \\ A_i = A_j - i \cdot d\chi. \end{cases}$$

Ou seja, o efeito local de se passar de uma trivialização para outra é traduzido por

$$\begin{cases} \psi \rightarrow e^{i\chi} \psi \\ A \rightarrow A - i \cdot d\chi \end{cases} \quad (2.20)$$

## 2.3 Formas de Chern e Classes de Chern

Até o momento, introduzimos os conceitos de fibrados em círculos e em retas sobre uma variedade  $M$ , vimos que estes têm uma estrutura local em forma de produtos cartesianos

$U_\alpha \times F$ , onde  $\{U_\alpha\}$  é uma cobertura aberta de  $M$  e  $F$  é a fibra ( $\mathbb{C}$  ou  $S^1$ , em nosso caso). No entanto, estes produtos cartesianos  $U_\alpha \times F$  podem ser colados de diversas formas distintas a depender do grupo estrutural do fibrado. Mostramos que existe uma noção de equivalência entre tais estruturas, sem no entanto estabelecer algum critério que nos permita diferenciar uma dada estrutura global de outra. Feito isto, estudamos estruturas adicionais nestes fibrados, chamadas conexões, e mostramos que estas nos permitem introduzir a noção de deslocamento sem variação. Além disso, verificamos que a esta estrutura está associada uma família de formas locais e que destas podemos obter um objeto global em relação a tal estrutura, i.e., a curvatura da conexão.

Veremos nesta seção que, apesar da curvatura ser obtida através da colagem de uma família de objetos locais, é possível obter dela informações da estrutura global do próprio fibrado. Começaremos pelos conceitos fundamentais.

**Definição 2.63** *Dado um fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  com conexão  $\nabla$ , a forma*

$$c_1(E, \nabla) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} F_\nabla$$

*é chamada forma de Chern do fibrado em retas.*

Escrevemos  $c_1(E, \nabla)$  para explicitar que a forma depende da conexão e, certamente, do fibrado em si. Vale observar que estas formas são sempre fechadas uma vez que a curvatura de uma conexão é localmente exata.

**Proposição 2.64** *Dadas duas conexões  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$ , então  $\nabla^1 = \nabla^2 + \eta$  onde  $\eta$  é uma 1-forma e  $F_{\nabla^1} = F_{\nabla^2} + d\eta$ .*

**Demonstração.** Localmente dado um referencial  $s_i$  temos que existe uma 1-forma  $\eta_i$  tal que  $A_i^1 = A_i^2 + \eta_i$ . Como para um outro referencial  $s_j$  temos  $A_i^1 = A_j^1 + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$  e  $A_i^2 = A_j^2 + g_{ji}^{-1} dg_{ji}$  segue que

$$\eta_j = A_j^1 - A_j^2 = (A_i^1 - g_{ji}^{-1} dg_{ji}) - (A_i^2 - g_{ji}^{-1} dg_{ji}) = A_i^1 - A_i^2 = \eta_i$$

logo  $\eta := \eta_i = \eta_j$  é uma 1-forma global. Como  $F_{\nabla^1} = dA_i^1$  e  $F_{\nabla^2} = dA_i^2$  temos que  $F_{\nabla^1} = F_{\nabla^2} + d\eta$ . ■

Para entendermos melhor a importância do resultado acima, recordemos a noção básica de *cohomologia de de Rham* de uma variedade  $M$ . Sendo  $\Omega^r(M, \mathbb{C})$  o espaço de todas as  $r$ -formas diferenciáveis assumindo valores complexos sobre  $M$  e  $C^r(M, \mathbb{C})$  o seu subespaço formado pelas formas fechadas, define-se como o grupo de cohomologia de dimensão  $r$  de  $M$  ao espaço quociente

$$H^r(M, \mathbb{C}) = \frac{C^r(M, \mathbb{C})}{d\Omega^r(M, \mathbb{C})}$$

e um elemento de  $H^r(M, \mathbb{C})$  é por sua vez uma classe de cohomologia de dimensão  $r$ . Se  $\alpha \in C^r(M, \mathbb{C})$ , então denotamos sua classe de cohomologia por  $\{\alpha\}$ . Assim dois

elementos quaisquer  $\alpha_2, \alpha_1 \in \{\alpha\}$  são  $r$ -formas que diferem por uma  $r$ -forma exata, isto é,  $\alpha_2 = \alpha_1 + d\beta$  onde  $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$ . Da proposição acima segue diretamente que

**Corolário 2.65** *A classe  $\{c_1(E, \nabla)\} \in H^2(M, \mathbb{C})$  não depende de nenhuma conexão em particular.*

O corolário anterior nos diz que a classe  $\{c_1(E, \nabla)\}$  é um objeto intrínseco ao fibrado, o que nos motiva a abandonar a notação  $\{c_1(E, \nabla)\}$  e adotar  $\{c_1(E)\}$  no lugar, e como um fibrado em retas sempre admite uma conexão ainda tem sentido definir

**Definição 2.66** *A classe  $\{c_1(E)\}$  é chamada de classe de Chern do fibrado em retas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ .*

Nos valendo da classe de Chern do fibrado associado temos naturalmente uma classe de Chern para o fibrado em círculos.

**Definição 2.67** *Dado um fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  com conexão  $\omega$ , a forma*

$$c_1(P, \omega) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} F$$

onde  $F$  é a escrita local de  $\Omega = d\omega$ , é chamada forma de Chern do fibrado em círculos.  $E$  a classe  $\{c_1(P)\}$ , que não depende da escolha de  $\omega$ , é chamada de classe de Chern do fibrado.

O seguinte resultado já apresenta um grande passo em nossa teoria

**Proposição 2.68** *Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas e  $S \subset M$  uma superfície compacta então  $\int_S c_1(E)$  é um número inteiro independente da conexão usada para encontrar  $c_1(E)$ .*

**Demonstração.** Como  $S$  é compacta e sendo  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  duas conexões temos  $F_{\nabla^1} = F_{\nabla^2} + d\eta$  portanto pelo Teorema de Stokes segue que

$$\int_S F_{\nabla^1} = \int_S F_{\nabla^2} + \int_{\partial S} \eta = \int_S F_{\nabla^2}.$$

Tome uma família de discos  $D_t$  em  $S$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_t = p$$

para algum ponto  $p$  em  $S$ . Pela Proposição 2.47, para cada  $t$  a holonomia da conexão sobre a fronteira de  $D_t$  pode ser calculada integrando-se a curvatura sobre  $D_t$  ou sobre  $S \setminus D_t$ . Assim temos, levando em conta a orientação

$$\exp\left(\int_{S \setminus D_t} F\right) = \exp\left(-\int_{D_t} F\right).$$

Tomando o limite  $t \rightarrow 0$  temos

$$\exp\left(\int_S F\right) = 1$$

e portanto

$$\int_S F = i2k\pi$$

para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , de onde segue o resultado. ■

Assim definimos

**Definição 2.69** Sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} S$  um fibrado em retas sobre uma superfície compacta  $S$ , o número  $\int_S c_1(E)$  é chamado de número de Chern de  $E$ .

Uma pergunta natural é identificar se a classe de Chern nos fornece alguma informação sobre o fibrado. Nos contentaremos neste trabalho em mostrar que a resposta é afirmativa pelo menos no caso do fibrado em retas ser associado a um fibrado em círculos. Antes disso precisaremos de definições e resultados preliminares.

**Definição 2.70** Sendo  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas e  $N \subset M$  uma subvariedade, chamamos de restrição de  $E$  sobre  $N$  a subvariedade  $F \subset E$  formada pelos pontos  $x \in E$  tal que  $\pi(x) \in N$ . Denotaremos este fibrado por  $E|_N$  e chamaremos de subfibrado de  $E$  sobre  $N$ . Nestas condições dizemos que uma aplicação suave  $s : N \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id$  é uma seção sobre  $N$ .

Claramente  $\mathbb{C} \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} N$  é também um fibrado em retas pois sendo  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  um atlas trivializador de  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  com funções de transição  $g_{ij}$ , temos que  $\{\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i\}_{i \in I}$ , onde  $\tilde{U}_i = U_i \cap N$  e  $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i|_{\pi^{-1}(\tilde{U}_i)}$ , é um atlas trivializador de  $\mathbb{C} \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} N$  com funções de transição dadas por  $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}|_{U_i}$ . Uma seção  $s : N \rightarrow E$  sobre  $N$  define também uma seção no fibrado  $\mathbb{C} \hookrightarrow F \xrightarrow{\pi} N$ , vale destacar que sendo  $s' : M \rightarrow E$ ,  $s = s'|_N$  define uma seção sobre  $N$ , no entanto a recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, dada uma seção suave sobre  $N$ , então esta nem sempre é a restrição de uma seção suave  $s' : M \rightarrow E$ .

Em particular dada uma variedade  $M$  de dimensão  $n \geq 2$ , sendo  $S \subset M$  uma superfície, uma aplicação suave  $s : S \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id$  é uma seção sobre  $S$  do subfibrado  $E|_S$ . Observemos que  $E|_S$  é uma variedade de dimensão real igual a quatro e a imagem  $s(S) \subset E|_S$  é uma subvariedade de dimensão real igual a dois o que vale em particular para a seção nula, i.e.,  $s_0(S) \subset E|_S$  tem dimensão real igual a dois. Assim  $s(S)$  e  $s_0(S)$  são duas superfícies em uma variedade de dimensão quatro e portanto suas interseções podem ser uma variedade vazia (não coincidem em ponto algum), de dimensão zero (coincidem em pontos isolados), de dimensão um (coincidem ao longo de curvas) ou de dimensão dois (uma está contida dentro da outra), logo podemos sempre considerar seções sobre  $S$  que tenham zeros isolados.

Consideremos uma tal seção e chamemos de  $s$ , sejam  $p$  um zero de  $s$ ,  $V \subset S$  um aberto tal que  $p$  seja o único zero contido no seu interior,  $U_i$  uma vizinhança trivializadora de  $p$ ,  $U = U_i \cap V$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  é uma curva fechada simples (que não se autointersecta) tal que  $p$  pertence a componente conexa que está inteiramente contida em  $U$  e é limitada pela curva  $\gamma$ . Sendo  $U_i$  uma carta trivializadora com trivialização  $\varphi_i$ , existe uma aplicação  $\tilde{s} : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\varphi_i(s(x)) = (x, \tilde{s}(x))$ , e assim podemos considerar uma aplicação  $\psi : U - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\psi(x) = \frac{\tilde{s}(x)}{\|\tilde{s}(x)\|}$$

que assume seus valores em  $U(1)$  e portanto pode ser escrita como  $\psi(x) = e^{i\alpha(x)}$  observe que para cada  $x \in U$ ,  $\alpha(x)$  mede o ângulo  $\sphericalangle(\psi(x), 1)$  entre  $\psi(x)$  e 1. O seguinte resultado nos dá uma informação importante sobre o saldo total da variação deste ângulo.

**Lema 2.71** *Nas condições acima sendo*

$$j_s(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\alpha$$

temos que

- i)  $j_s(p)$  é um número inteiro.
- ii)  $j_s(p)$  não depende da curva escolhida.
- iii)  $j_s(p)$  não depende da trivialização escolhida.

**Demonstração.** i) Observe que  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  é uma aplicação contínua tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , desta maneira tem-se  $\psi(\gamma(a)) = \psi(\gamma(b))$  e portanto segue que

$$\cos \alpha(\gamma(a)) = \cos \alpha(\gamma(b)) \quad e \quad \sin \alpha(\gamma(a)) = \sin \alpha(\gamma(b))$$

e assim  $\alpha(\gamma(b)) = \alpha(\gamma(a)) + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Disto temos

$$j_s(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\alpha = \frac{1}{2\pi} (\alpha(\gamma(b)) - \alpha(\gamma(a))) = \frac{1}{2\pi} 2k\pi = k.$$

ii) Observe que  $j_s(p)$  depende continuamente da curva  $\gamma$ , mas como este é um número inteiro temos que deve permanecer constante quando deformamos a curva continuamente.

iii) Considere que  $p \in V \subset U_i \cap U_j$ , dessa forma temos

$$\psi_i(x) = \frac{\tilde{s}_i(x)}{\|\tilde{s}_i(x)\|} = e^{i\alpha(x)} \quad e \quad \psi_j(x) = \frac{\tilde{s}_j(x)}{\|\tilde{s}_j(x)\|} = e^{i\beta(x)}$$

e como  $\tilde{s}_j(x) = g_{ji}(x)\tilde{s}_i(x)$  temos

$$e^{i\beta(x)} = \frac{\tilde{s}_j(x)}{\|\tilde{s}_j(x)\|} = \frac{g_{ji}(x)\tilde{s}_i(x)}{\|g_{ji}(x)\tilde{s}_i(x)\|} = g_{ji}(x) \frac{\tilde{s}_i(x)}{\|\tilde{s}_i(x)\|} = g_{ji}(x)e^{i\alpha(x)}.$$

Escrevendo  $g_{ji}(x)$  na forma  $e^{i\chi(x)}$ , isto é  $e^{i\beta(x)} = e^{i\chi(x)} \cdot e^{i\alpha(x)}$ , vale

$$dg_{ji}(x) = \mathbf{i}e^{i\chi(x)}d\chi \Rightarrow \mathbf{i}d\chi = \frac{dg_{ji}(x)}{g_{ji}(x)} = d(\ln g_{ji}(x))$$

assim como  $\gamma$  é uma curva fechada teremos

$$\int_{\gamma} d\beta = \int_{\gamma} (d\alpha + d\chi) = \int_{\gamma} d\alpha - \mathbf{i} \int_{\gamma} d(\ln g_{ji}(x)) = \int_{\gamma} d\alpha$$

e portanto  $j_s(p)$  não depende da trivialização escolhida. ■

O lema acima motiva

**Definição 2.72** O número  $j_s(p)$  é chamado índice da seção  $s : S \rightarrow E$  no ponto  $p$ .

Agora estamos prontos para enunciar e provar o resultado central desta seção.

**Teorema 2.73 (Teorema de Chern para fibrados em retas)** Seja  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  um fibrado em retas associado a um fibrado em círculos e  $S \subset M$  uma superfície compacta, suave e orientada. Então

$$\int_S c_1(E)$$

é um número inteiro e representa a soma dos índices de qualquer seção  $s : S \rightarrow E$  que tenha um número finito de zeros.

**Demonstração.** Sendo  $S \subset M$  uma superfície compacta, suave e orientada, considere o subfibrado  $E|_S$ , este será associado a um subfibrado  $P|_S$  onde  $U(1) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  é o fibrado associado de  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ . Tome  $s : S \rightarrow E$  que tenha um número finito de zeros  $\{p_a\}_{a \in I}$ . Para cada  $a$ , denotemos por  $D_a$  um disco de centro  $p_a$  tal que  $D_a \subset S$  esteja inteiramente contido em uma carta trivializadora  $U_a \subset S$ . Desta maneira tomando-se

$$\bar{S} = S - \bigcup_{a \in I} D_a$$

teremos que  $\bar{s} : \bar{S} \rightarrow E$  tal que  $\bar{s} = s|_{\bar{S}}$  não se anula em ponto algum do subfibrado  $E|_{\bar{S}}$ . Podemos tomar em  $E|_S$  uma conexão  $\nabla^\omega$ , induzida por uma conexão de Cartan  $\omega$  em  $P|_S$ , com forma de curvatura  $F^\nabla$ . Desta maneira temos

$$\int_S c_1(E) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \int_S F^\nabla = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\bar{S}} F^\nabla,$$

onde o limite é fazendo cada  $D_a$  tendendo a  $p_a$ . Observe que pela Proposição 2.68 a integral acima é um número inteiro e não depende desta escolha em particular para a forma de Chern.



Como  $\bar{s}$  não se anula em ponto algum, temos pelo Teorema 2.18 que  $E|_{\bar{S}}$  é um fibrado trivial e portanto seu fibrado associado  $P|_{\bar{S}}$  é também trivial. Nos valendo da estrutura hermitiana canônica de  $E|_{\bar{S}}$ , podemos normalizar  $\bar{s} : \bar{S} \rightarrow E$  fazendo

$$f := \frac{\bar{s}}{\|\bar{s}\|}.$$

Desta maneira, sendo  $\varphi : \pi^{-1}(\bar{S}) \rightarrow \bar{S} \times \mathbb{C}$  a trivialização cuja a inversa cumpre  $\varphi^{-1}(x, z) = z \cdot \bar{s}(x)$ , temos que existe  $\tilde{f} : \bar{S} \rightarrow \text{U}(1)$  tal que

$$\varphi(f(x)) = (x, \tilde{f}(x)).$$

Como  $P|_{\bar{S}}$  é trivial então  $\tilde{f}$  define uma seção em  $P|_{\bar{S}}$ , denotemos tal seção por  $h$ . Uma vez que  $\nabla^\omega$  é a conexão induzida pela conexão de Cartan, a forma de curvatura  $F^\nabla$  de  $\nabla^\omega$  coincide com a forma de curvatura  $h^*\Omega = F^\omega$ , isto é,  $F^\omega = F^\nabla$ . Disto segue

$$\int_S c_1(E) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\bar{S}} F^\nabla = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\bar{S}} F^\omega = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\bar{S}} h^*\Omega = \int_{h(\bar{S})} \Omega.$$

Aplicando a Proposição 2.58 e em seguida o Teorema de Stokes obtemos

$$\int_{h(\bar{S})} \Omega = \int_{h(\bar{S})} d\omega = \int_{\partial(h(\bar{S}))} \omega.$$

Para cada  $a$  denote  $\sigma_a = \partial(h(S - D_a))$  assim temos

$$\int_{\partial(h(\bar{S}))} \omega = \sum_{a \in I} \int_{\sigma_a} \omega.$$

Como cada  $D_a$  está inteiramente contido em uma carta trivializadora  $U_a$  com trivialização  $\varphi_a$ , podemos olhar para a escrita local de cada uma destas integrais no somatório. Para isso tome  $\theta_a : (U_a - p_a) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_a(h(x)) = (x, e^{\mathbf{i}\theta_a(x)})$ , desta forma  $\varphi_a(\sigma_a) = \phi_a$  onde  $\phi_a = \{(x, e^{\mathbf{i}\theta_a(x)}) \in U_a \times \text{U}(1) : x \in \partial(S - D_a)\}$ . Assim para cada  $a$  temos

$$\int_{\sigma_a} \omega = \int_{\varphi_a(\sigma_a)} (\varphi_a^{-1})^* \omega$$

e ainda pela escrita local da forma de Cartan

$$\int_{\varphi_a(\sigma_a)} (\varphi_a^{-1})^* \omega = \int_{\phi_a} A_a + \mathbf{i}d\theta_a = \int_{\partial(S - D_a)} (A_a + \mathbf{i}d\theta_a) = - \int_{\partial D_a} (A_a + \mathbf{i}d\theta_a).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_S c_1(E) &= \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \sum_{a \in I} \left[ - \int_{\partial D_a} (A_a + \mathbf{i}d\theta_a) \right] \\ &= \sum_{a \in I} \left[ - \left( \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\partial D_a} A_a \right) - \left( \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\partial D_a} \mathbf{i}d\theta_a \right) \right] \end{aligned}$$

e pelo Teorema de Stokes

$$\int_{\partial D_a} A_a = \int_{D_a} dA_a,$$

o que implica

$$\frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\partial D_a} A_a = 0,$$

logo

$$\int_S c_1(E) = \sum_{a \in I} - \left( \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \lim \int_{\partial D_a} \mathbf{id}\theta_a \right) = \sum_{a \in I} \lim \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_a} d\theta_a.$$

Como  $\theta_a(x)$  é a função ângulo da seção  $s$  no ponto  $p_a$ , temos que  $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_a} d\theta_a = j_s(p_a)$  e pelo Lema 2.71 o limite  $\lim \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_a} d\theta_a$  permanece constante, assim

$$\int_S c_1(E) = \sum_{a \in I} j_s(p_a)$$

como queríamos. ■

Já vimos pela Proposição 2.18 que um fibrado em retas é trivial se, e somente se, admite uma seção que não se anula em ponto algum, portanto o teorema acima nos diz que a forma de Chern, mais precisamente os possíveis números de Chern das superfícies compactas contidas na variedade base, é um invariante que nos dá uma medida do quanto um fibrado em retas deixa de ser trivial. Temos também pela Proposição 2.68 que o número de Chern do fibrado em retas sobre uma superfície é um número inteiro que só depende do fibrado, desse modo o teorema acima nos afirma que a soma dos índices de qualquer seção de um dado fibrado sobre uma superfície é sempre o mesmo.

**Observação 2.74** *Em vista do Exemplo 2.4 e da Observação 2.46, o teorema acima é uma generalização do famoso Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies, pois quando restrito ao fibrado em retas proveniente do fibrado tangente da superfície em questão o teorema afirma que*

$$\int_S c_1(E) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \int F_{\nabla} = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \int -\mathbf{i}K\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sum j_s(p)$$

e uma vez que uma seção em tal fibrado é tão somente um campo de vetores tangentes à superfície temos

$$\int K\sigma_1 \wedge \sigma_2 = 2\pi \left( \sum j_s(p) \right).$$

É interessante observar que na seção 17.3 de [21] é apresentada uma prova do teorema de Gauss-Bonnet utilizando-se de resultados e conceitos relacionados a fibrados em retas e suas conexões, para em seguida na seção 17.4 esboçar a prova do Teorema de Chern para fibrados em retas. Neste trabalho fizemos o contrário, provamos o Teorema de Chern de forma rigorosa e deixamos a título de curiosidade que o Teorema de Gauss-Bonnet segue como corolário. Na verdade, o Teorema de Chern é um resultado muito mais geral

*e que foge ao escopo de nosso trabalho, a versão aqui apresentada é uma versão muito particular do mesmo. No melhor de nosso conhecimento, o enunciado e ideia da prova aqui utilizados são devidos a Theodore Frankel, o que fizemos foi detalhar esta ideia e formalizar o conceito de índice, que para este caso só foi apresentado por Frankel de forma intuitiva.*

# Capítulo 3

## Aplicações em teoria de calibre

Neste capítulo utilizamos principalmente as referências [26], [17], [11], [45] e [39] para apresentar conceitos básicos de mecânica quântica e da teoria de calibre proposta. Em seguida mostraremos como se dá a correspondência entre geometria de fibrados e teoria de calibre, para finalmente estudar a geometrização de dois objetos de estudo da física. O faremos seguindo principalmente [21], [54], [37], [35] e [36].

### 3.1 Eletromagnetismo e teoria de Calibre

Passaremos agora às correlações entre o eletromagnetismo e a geometria dos espaços fibrados.

#### 3.1.1 Quantização canônica: A regra de correspondência

Começaremos esta seção descrevendo o que vem a ser a quantização (canônica) de um sistema clássico. O faremos de acordo com os objetivos e necessidades do presente trabalho, logo não temos aqui a pretensão de produzir um texto que sirva de introdução a mecânica quântica, nem tão pouco dar a ela algum significado.<sup>1</sup> Ao leitor interessado em uma introdução mais detalhada, recomendamos a leitura dos primeiros cinco capítulos de [26], o primeiro capítulo de [37], o capítulo dois de [17] e ainda o primeiro capítulo de [11]. Mais uma vez, iremos considerar normalizar algumas constantes físicas como 1 e todas as aplicações como sendo de classe  $C^\infty$ , a menos de menção explícita em contrário.

Começemos por descrever resumidamente o sistema clássico mais simples possível (segundo o formalismo lagrangiano), o de uma única partícula que descreve uma trajetória dada por

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

---

<sup>1</sup>Aliás, segundo R. Feynman: “... ninguém realmente entende a mecânica quântica”, (ver Prefácio de [26])

sujeita a uma lagrangeana  $L = L(x, v)$ . Como sabemos, sua trajetória deverá obedecer as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0.$$

Recorde que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a solução destas equações e que  $\gamma(t)$  representa o ponto em  $\mathbb{R}^3$  onde se encontra a partícula no instante  $t \in [a, b]$ .

Acontece que esta descrição gera grandes inconsistências ao tentarmos descrever situações em escalas de nível atômico [37]. Tal problema só foi contornado após uma intensa revolução na física, no início do século XX, que culminou no que conhecemos hoje como mecânica quântica. A grosso modo, a quantização canônica de um sistema clássico é feita da seguinte forma: Inicialmente obtemos a chamada função hamiltoniana através da transformação de Legendre

$$H(q, p) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}),$$

onde  $p_i$  é o chamado *momento generalizado* e é dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Em seguida consideramos que o sistema é descrito por uma aplicação

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

chamada *função de onda* da partícula. Mais ainda, esta deve obedecer a *equação de Schrödinger*

$$\hat{E}\psi = \hat{H}\psi, \tag{3.1}$$

onde  $\hat{E}$  é um operador diferencial dado por

$$\hat{E} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t}$$

e  $\hat{H}$  é também um operador diferencial obtido fazendo-se as seguintes substituições na função hamiltoniana

$$\hat{q}_i = q_i, \quad \hat{p}_i = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Em resumo, a equação de Schrödinger para um dado sistema é construída escrevendo-se o Hamiltoniano clássico para o sistema e empregando-se a chamada *regra de correspondência* para substituir as grandezas clássicas no hamiltoniano pelos operadores acima descritos.

A solução da equação de Schrödinger, i.e., a função de onda, tem a seguinte interpretação: para cada  $t_0 \in [a, b]$  fixado, a função

$$P(\Omega, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |\psi(t_0, x)|^2 dx \tag{3.2}$$

fornece a probabilidade da partícula estar contida na região  $\Omega$  no instante  $t_0$ , esta interpretação claramente só permite que consideremos soluções tais que  $P(\mathbb{R}^3, t_0) = 1$  para qualquer  $t_0$ . Vejamos agora alguns exemplos de quantização canônica afim de esclarecer o conceito.

**Exemplo 3.1 (Equação de Schrödinger para uma partícula livre)** *Uma partícula livre está sujeita a uma lagrangeana da forma*

$$L = \frac{mv^2}{2},$$

como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i,$$

sua função hamiltoniana é dada por

$$H(q, p) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) = \sum_k mv_k v_k - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

de onde segue que

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (-i\nabla)^2 = -\frac{1}{2m} \Delta.$$

Assim a equação (3.1) assume a forma

$$i \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi, \quad (3.3)$$

que é a equação de Schrödinger para uma partícula livre.

**Exemplo 3.2** *Uma partícula sujeita a uma força conservativa  $F = -\nabla V$  tem como lagrangeana*

$$L = \frac{mv^2}{2} - V.$$

Assim

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) = \sum_k mv_k v_k - \frac{mv^2}{2} + V = \frac{p^2}{2m} + V,$$

de onde segue que

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \Delta + V.$$

Logo a equação (3.1) assume a forma

$$i \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi + V\psi.$$

**Exemplo 3.3 (Eq. de Schrödinger para uma partícula num campo eletromagnético)**

Segue do Exemplo 1.59 que uma partícula de carga  $q$  sujeita à ação de um campo eletromagnético  $(E, B)$  com potencial dado por  $(\phi, A)$  está submetida a uma lagrangeana da forma  $L = \frac{mv^2}{2} - q\phi + qA \cdot v$ . Por outro lado, se além do campo magnético, consideramos

a ação de um potencial  $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ , então a lagrangeana assume a forma (cf. [21], p. 439)<sup>2</sup>

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\phi + qA \cdot v - V(x).$$

Assim, como

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv + qA \Rightarrow v = \frac{p}{m} - \frac{qA}{m}$$

então

$$\begin{aligned} H &= p \cdot v - L \\ &= p \cdot \left( \frac{p}{m} - \frac{qA}{m} \right) - \frac{mv^2}{2} + q\phi - qA \cdot v + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{m} - \frac{qp \cdot A}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{p}{m} - \frac{qA}{m} \right)^2 + q\phi - qA \cdot v + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{m} - \frac{qp \cdot A}{m} - \frac{p \cdot p}{2m} + \frac{qp \cdot A}{m} - \frac{qqA \cdot A}{2m} + q\phi - qA \cdot v + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{2m} - \frac{qqA \cdot A}{2m} + q\phi - qA \cdot v + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{2m} - \frac{qqA \cdot A}{2m} + q\phi - qA \cdot \left( \frac{p}{m} - \frac{qA}{m} \right) + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{2m} - \frac{qqA \cdot A}{2m} + q\phi - \frac{qA \cdot p}{m} + \frac{qqA \cdot A}{m} + V(x) \\ &= \frac{p \cdot p}{2m} - \frac{qA \cdot p}{m} + \frac{qqA \cdot A}{2m} + q\phi + V(x) \\ &= \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi + V(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (-\mathbf{i}\nabla - qA)^2 + q\phi + V.$$

Assim, a equação de Schrödinger assume a forma  $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[ \frac{1}{2m} (-\mathbf{i}\nabla - qA)^2 \right] \psi + q\phi\psi + V \cdot \psi$ . Somando-se os devidos termos em ambos os lados e multiplicando-se pelas constantes apropriadas, segue que

$$\mathbf{i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}q\phi \right] \psi = -\frac{1}{2m} [\nabla - \mathbf{i}qA]^2 \psi + V \cdot \psi, \quad (3.4)$$

onde  $A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$  e  $[\nabla - \mathbf{i}qA]\xi = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x_j} - A_j \xi \right)$ , é a equação que descreve uma partícula carregada sobre efeito de um campo eletromagnético.

### 3.1.2 Transformações locais e a equação de Schrödinger modificada

Veremos agora que a equação original de Schrödinger possui uma simetria, mas que do ponto de vista teórico esta ainda não é toda a simetria esperada da teoria. Primeiramente

<sup>2</sup>Note que os potenciais definidos em nosso texto e em [21], p. 437, têm os sinais trocados.

observe que se  $\psi$  for uma solução de (3.3), então  $e^{i\alpha}\psi$  também será solução desta equação  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras, a transformação  $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$  é uma simetria (global) da equação. Sob certo sentido esta simetria já era esperada. De fato, se se supõe que a única informação física relevante da função de onda  $\psi$  é o valor  $|\psi|^2$ , então a função de probabilidade  $P(\Omega, t_0)$ , dada por (3.2), não se altera em vista da referida transformação.<sup>3</sup> Pelo mesmo motivo, sendo  $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, então  $\psi' = e^{i\chi(x,t)}\psi$  fornece a mesma função de probabilidade  $P(\Omega, t_0)$ . Assim, torna-se natural perguntar se a transformação  $\psi \rightarrow e^{i\chi(x,t)}\psi$  é também uma simetria da equação. Em caso contrário, pergunta-se: que tipo de equação diferencial assemelhada à equação original ela deveria satisfazer? A resposta vem na forma da seguinte:

**Proposição 3.4** *Se a função de onda  $\psi$  satisfaz a equação de Schrödinger*

$$i \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi,$$

então  $\psi' = e^{i\chi(x,t)}\psi$  satisfaz a equação

$$i \left[ \frac{d}{dt} + i \frac{d\chi}{dt} \right] \psi' = -\frac{1}{2m} [\nabla + i\nabla\chi]^2 \psi'$$

para toda função diferenciável  $\chi$ .

**Demonstração.** Suponha que  $e^{i\chi(x,t)}\psi$  satisfaça a equação de Schrödinger, temos por um lado

$$\frac{d(e^{i\chi}\psi)}{dt} = \frac{de^{i\chi}}{dt}\psi + e^{i\chi}\frac{d\psi}{dt} = e^{i\chi}i\frac{d\chi}{dt}\psi + e^{i\chi}\frac{d\psi}{dt} = e^{i\chi} \left[ i\frac{d\chi}{dt}\psi + \frac{d\psi}{dt} \right]$$

e de outro

$$\begin{aligned} \Delta(e^{i\chi}\psi) &= \nabla \cdot \{ \nabla [e^{i\chi}\psi] \} = \nabla \cdot \{ \nabla e^{i\chi}\psi + e^{i\chi}\nabla\psi \} = \nabla \cdot \{ e^{i\chi}i\nabla\chi\psi + e^{i\chi}\nabla\psi \} \\ &= \nabla \cdot \{ e^{i\chi} [i\nabla\chi\psi + \nabla\psi] \} = \nabla e^{i\chi} \cdot [i\nabla\chi\psi + \nabla\psi] + e^{i\chi}\nabla \cdot [i\nabla\chi\psi + \nabla\psi] \\ &= [e^{i\chi}i\nabla\chi] \cdot [i\nabla\chi\psi + \nabla\psi] + e^{i\chi} [i\Delta\chi\psi + i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + \Delta\psi] \\ &= e^{i\chi} \{ [i\nabla\chi] \cdot [i\nabla\chi\psi + \nabla\psi] + [i\Delta\chi\psi + i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + \Delta\psi] \} \\ &= e^{i\chi} \{ -\nabla\chi \cdot \nabla\chi\psi + [i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + i\Delta\chi\psi + i\nabla\chi \cdot \nabla\psi] + \Delta\psi \} \\ &= e^{i\chi} \{ -(\nabla\chi \cdot \nabla\chi)\psi + [i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + (\nabla \cdot i\nabla\chi)\psi] + \Delta\psi \} \\ &= e^{i\chi} \{ -(\nabla\chi \cdot \nabla\chi)\psi + [i\nabla\chi \cdot \nabla\psi + \nabla \cdot (i\nabla\chi\psi)] + \Delta\psi \} \\ &= e^{i\chi} \{ [\nabla + i\nabla\chi] [(\nabla + i\nabla\chi)\psi] \} = e^{i\chi} \{ [\nabla + i\nabla\chi]^2 \psi \}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Veremos em breve que esta suposição é falsa. Quando estudarmos o efeito Aharonov-Bohm, ficará claro o papel da fase no estudo do eletromagnetismo.



Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \frac{d(e^{\mathbf{i}\chi}\psi)}{dt} &= -\frac{1}{2m} \Delta(e^{\mathbf{i}\chi}\psi) \Rightarrow \\ \mathbf{i} e^{\mathbf{i}\chi} \left[ \mathbf{i} \frac{d\chi}{dt} \psi + \frac{d\psi}{dt} \right] &= -\frac{1}{2m} e^{\mathbf{i}\chi} \{ [\nabla + \mathbf{i}\nabla\chi]^2 \psi \} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbf{i} \left[ \frac{d}{dt} + \mathbf{i} \frac{d\chi}{dt} \right] \psi = -\frac{1}{2m} [\nabla + \mathbf{i}\nabla\chi]^2 \psi.$$

Dessa forma, se  $\psi' = e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi$  satisfaz a equação de Schrödinger, então  $\psi = e^{-\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi'$  satisfaz a equação acima, ou seja, a transformação  $\psi' \rightarrow e^{-\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi'$  acarreta as seguintes mudanças na equação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} + \mathbf{i} \frac{d\chi}{dt} \\ \nabla \rightarrow \nabla + \mathbf{i}\nabla\chi \end{cases}$$

Reciprocamente

$$\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} - \mathbf{i} \frac{d\chi}{dt} \\ \nabla \rightarrow \nabla - \mathbf{i}\nabla\chi \end{cases}$$

Como desejado. ■

Em física, a transformação  $\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\alpha}\psi$  é chamada de *transformação global*, pois a mudança feita na função de onda não depende do lugar no espaço ou do instante no tempo em que é feita. Já a transformação  $\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi$  é chamada de *transformação local*, pois a mudança feita na função de onda é espaço-tempo dependente, diz-se ainda que uma equação é *globalmente* (respect. *localmente*) *invariante* se é invariante por transformações globais (respect. locais).

O resultado acima nos diz que a equação de Schrödinger para uma partícula livre (Exemplo 3.1) é globalmente invariante, porém não é localmente invariante. Mas observe que a existência de uma simetria global viola os princípios da relatividade restrita ([47], p. 93), portanto, o que é esperado é a invariância local. Concluímos que é a equação de Schrödinger que deve ser adaptada para que seja invariante local.

Observando atentamente a prova do resultado anterior, podemos perceber que o fator essencial para que a equação não seja invariante local é que a derivação ordinária não comuta com a multiplicação por  $e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}$ , i.e.,

$$\partial_\mu (e^{\mathbf{i}\chi}\psi) = \mathbf{i}\partial_\mu\chi e^{\mathbf{i}\chi}\psi + e^{\mathbf{i}\chi}\partial_\mu\psi \neq e^{\mathbf{i}\chi}\partial_\mu\psi.$$

Aparentemente, a maneira mais simples de corrigirmos isso (Ver seção 3.B de [39] e seção 4.2 de [45]) é encontrando um operador de derivação que comute com tal multiplicação, i.e., uma operador  $D$  tal que a transformação  $\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi$  implique na transformação  $D_\mu\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}D_\mu\psi$ , o que só é possível se o próprio operador mudar por  $D_\mu \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}D_\mu e^{-\mathbf{i}\chi(x,t)}$ . Uma vez que a transformação  $\psi \rightarrow e^{\mathbf{i}\chi(x,t)}\psi$  é espaço-tempo dependente, o mesmo deve valer para o operador  $D$ .

No entanto, há uma questão filosófica e técnica crucial aqui: ao levarmos em consideração as transformações locais (pense em  $\chi$  como uma função bump), somos levados naturalmente a trocar o operador diferencial global  $\partial$  por uma família de operadores diferenciais locais associada a uma cobertura aberta de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Como analogia, sugerimos o leitor a se recordar do processo de continuação analítica introduzida por Riemann quando estudava a equação hipergeométrica ou, mais simplesmente, os ramos de logaritmo. Quando buscamos uma solução para a EDO  $y' = 1/x$  em  $\mathbb{C}^*$ , chegamos nos chamados ramos de logaritmo complexo, que não estão definido em todo  $\mathbb{C}^*$  mas em cortes deste. Esses ramos, uma vez analisados do ponto de vista da continuação analítica, levam Riemann a introduzir o conceito de superfície de Riemann. No caso em tela, tanto a equação como as soluções tem seu ambiente natural definido nesta superfície chamada de superfície de Riemann do logaritmo.

Como dissemos, iremos raciocinar de maneira análoga, i.e., procuraremos famílias de operadores diferenciais locais que “corrijam” a equação de Schrödinger localmente, para depois buscarmos o ambiente geométrico natural para a sua existência global.

Seja  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura aberta de  $\mathbb{R}^{1,3}$  e  $D^\alpha = (D_0^\alpha, \dots, D_3^\alpha)$  os operadores diferenciais locais desejados e  $e^{i\chi_{\beta\alpha}}$  uma transformação local em  $U_{\alpha\beta}$ , a sugestão mais natural é que estes sejam da forma  $D_{\alpha,j} = \partial_j - \mathbf{i}G_{\alpha,j}$ , onde  $G_{\alpha,j}$  são as componentes de um quadricovetor (i.e., 1-formas diferenciais).<sup>1</sup> Por outro lado, como a derivação parcial  $\partial_j$  é constante ao longo de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , então na interseção  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  teremos  $D_{\alpha,j} \rightarrow D_{\beta,j} = \partial_j - \mathbf{i}G_{\beta,j}$ . Assim

$$\begin{aligned} e^{i\chi_{\beta\alpha}} D_{\alpha,j} \psi &= D_{\beta,j} e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi \\ \Downarrow \\ e^{i\chi_{\beta\alpha}} (\partial_j - \mathbf{i}G_{\alpha,j}) \psi &= (\partial_j - \mathbf{i}G_{\beta,j}) e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi \\ &= \partial_j (e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi) - \mathbf{i}G_{\beta,j} (e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi) \\ &= \mathbf{i}\partial_j \chi_{\beta\alpha} e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi + e^{i\chi_{\beta\alpha}} \partial_j \psi - \mathbf{i}G_{\beta,j} (e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi) \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} e^{i\chi_{\beta\alpha}} \partial_j \psi - e^{i\chi_{\beta\alpha}} \mathbf{i}G_{\alpha,j} \psi &= \mathbf{i}\partial_j \chi_{\beta\alpha} e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi + e^{i\chi_{\beta\alpha}} \partial_j \psi - \mathbf{i}G_{\beta,j} e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi \Rightarrow \\ (-\mathbf{i}G_{\alpha,j}) e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi &= (\mathbf{i}\partial_j \chi_{\beta\alpha} - \mathbf{i}G_{\beta,j}) e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi \end{aligned}$$

ou seja

$$G_{\beta,j} = G_{\alpha,j} - \partial_j \chi_{\beta\alpha}$$

é a maneira como o campo de covetores  $G_{\alpha,j}$  deve se comportar por mudança de coordenadas.

<sup>1</sup>Devido a questões técnicas, teremos de abrir mão temporariamente da notação clássica de tensores usada na física.

A conclusão a que chegamos é que se a equação que determina o sistema físico ao invés de ser da forma

$$\mathbf{i}\partial_0\psi = -\frac{1}{2m}\partial_j\partial^j\psi$$

com  $j = 1, \dots, 3$  de 1 a 3, deve ser da forma

$$\mathbf{i}D_0\psi = -\frac{1}{2m}D_{\alpha,j}D^{\alpha,j}\psi,$$

i.e.,

$$\mathbf{i}\left[\frac{d}{dt} - \mathbf{i}g_\alpha\right]\psi = -\frac{1}{2m}\{[\nabla - \mathbf{i}G_\alpha]^2\}\psi \quad (3.5)$$

onde  $g_\alpha = G_{\alpha,0}$  e  $G_\alpha = (G_{\alpha,1}, G_{\alpha,2}, G_{\alpha,3})$  satisfazem as equações de transição

$$\begin{cases} G_\alpha \rightarrow G_\beta = G_\alpha - d|_{\mathbb{R}^3}\chi_{\beta\alpha}, \\ g_\alpha \rightarrow g_\beta = g_\alpha - \frac{d\chi_{\beta\alpha}}{dt}, \end{cases} \quad (3.6)$$

devido à invariância com relação às simetrias da forma

$$\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta = e^{\mathbf{i}\chi_{\beta\alpha}}\psi_\alpha.$$

Note que a grandeza definida por

$$M_{\alpha\beta} = \partial_\alpha G_\beta - \partial_\beta G_\alpha$$

é invariante pela transformação descrita acima. Assim, tal como o módulo ao quadrado da função de onda, é de se esperar que este invariante tenha alguma interpretação física. Na verdade, já conhecemos uma grandeza física que é obtida dessa maneira, a saber, o campo eletromagnético. De fato tomando-se  $G_{\alpha,j} = A_{\alpha,j}$ , i.e.,  $(g_\alpha, G_\alpha) = (-\phi_\alpha, A_\alpha)$  temos que  $M_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$  e a transformação vista acima é a já conhecida transformação de calibre. Note ainda que, com esta notação a equação (3.5) assume a forma

$$\mathbf{i}\left[\frac{d}{dt} + \mathbf{i}\phi_\alpha\right]\psi = -\frac{1}{2m}\{[\nabla - \mathbf{i}A_\alpha]^2\}\psi$$

que, a menos da constante multiplicativa  $q$ , é exatamente a equação (3.4) que descreve uma partícula carregada na presença do campo eletromagnético  $F_{\alpha\beta}$ .

Em física, o processo de se trocar  $\partial_j$  por  $D_{\alpha,j} = \partial_j - \mathbf{i}qA_{\alpha,j}$  na equação de Schrödinger é conhecido como *acoplamento mínimo*, o operador  $D_j$  é chamado de *derivada de calibre* e o par  $(\phi_\alpha, A_\alpha)$  é chamado de *potencial de calibre*. Agora podemos entender o por que deste nome, já que a presença do potencial do campo eletromagnético compensa, através da transformação de calibre, a mudança feita pela transformação local sobre a função de onda, i.e., ele “calibra” a equação de Schrödinger e por isso o nome potencial de calibre. Como veremos, este processo de correção da equação de Schrödinger para adaptá-las à realidade relativística leva naturalmente à uma geometrização da física.

### 3.1.3 Conexões e derivadas de calibre

À primeira vista, parece impressionante o fato de que partindo apenas de um princípio fundamental (invariância da fenômeno física por certas transformações na função de onda) podemos concluir a existência de uma nova entidade física (o potencial de um campo eletromagnético) e ainda como esta interage com a matéria (Equação 3.4). Por trás de tudo isso estão a *Teoria dos Grupos de Transformação* de Marius Sophus Lie ([29]) e o *Teorema de Noether*<sup>4</sup>, este importando da mecânica clássica. Todo este estudo que fizemos bem como suas implicações é o que se chama em física de *teoria de calibre*. Seu princípio fundamental é de que a equação de Schrödinger deve ser invariante local, este é o chamado *princípio da invariância de calibre*.

O ponto que devemos destacar aqui é que o estado quântico de uma partícula nesta teoria de calibre passa a ser descrito não por uma única aplicação  $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaz a equação de Schrödinger, mas sim por uma família  $\{\psi_\alpha\}$  de aplicações definidas em abertos (eventualmente diferentes) de uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  tais que nas interseções destes abertos funções  $\psi_\alpha$  e  $\psi_\beta$  diferentes se relacionam da seguinte forma

$$\psi_\beta = e^{i\chi_{\beta\alpha}} \psi_\alpha, \quad (3.7)$$

onde  $\chi_{\beta\alpha}$  é uma função diferenciável definida sobre  $U_{\beta\alpha}$ . Além disso, se  $\psi_\alpha$  satisfaz a equação de Schrödinger com o potencial  $A_\alpha$ , então  $\psi_\beta$  satisfaz a equação de Schrödinger com potencial

$$A_\beta = A_\alpha - d\chi_{\beta\alpha}. \quad (3.8)$$

Dessa forma, definindo-se

$$\mathcal{A}_\alpha = \mathbf{i}(g_\alpha dt + G_{\alpha,j} dx^j), \quad (3.9)$$

e recordando o estudo das conexões em espaço fibrados feita no §C da Seção 2.2, mais precisamente as equações estabelecidas em (2.20), vemos que (3.7) nos leva a definir uma conexão no fibrado em retas complexas  $\mathbb{C} \hookrightarrow E \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  cujos cociclos de transição são determinados por  $e^{i\chi_{\beta\alpha}}$  e que (3.9) define uma conexão de Cartan-Ehresmann em  $E$ . Eis aí o ambiente geométrico procurado.

Além disso, como o campo de força eletromagnético  $F$  satisfaz  $F = dA_\alpha$ , concluímos que este pode ser interpretado como a curvatura de tal conexão. Vale ressaltar que a conexão induzida em um fibrado em retas associado, tem sua escrita local dada por uma 1-forma com valores puramente imaginários, assim, a 1-forma de potencial de calibre vem a ser apenas o coeficiente real destas primeiras.

Mais precisamente considere o sistema de coordenadas  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (t, x)$  em  $\mathbb{R}^4$  e seja  $U \subset \mathbb{R}^4$  um aberto aonde esteja definido um potencial de calibre  $(\phi_U, A_U)$ .

---

<sup>4</sup>Emmy Noether elaborou o Teorema de Noether, que explica as conexões entre simetrias e as leis de conservação em física teórica ([38], [4]).

Então ficam bem definidas a 1-forma de calibre

$$\mathcal{A}_U = \mathbf{i}q(-\phi_U d\mathbf{x}^0 + A_{U,1}d\mathbf{x}^1 + A_{U,2}d\mathbf{x}^2 + A_{U,3}d\mathbf{x}^3)$$

e a conexão linear  $\nabla_U : \Gamma(E_U) \longrightarrow \Lambda^1(T^*U, E_U)$

$$\nabla_U(\xi \cdot \mathbf{s}_U) = (d\xi + \mathcal{A}_U) \otimes \mathbf{s}_U, \quad \mathbf{s}_U(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 1),$$

definida nas seções do fibrado trivial em  $E_U = U \times \mathbb{C}$  e tomando valores em  $\Lambda^1(T^*U, E_U) = \Lambda^1(T^*U) \otimes \Gamma(E_U)$ . Dessa forma, se pretendemos visualizar esta conexão linear como a manifestação de uma conexão linear num fibrado em retas, precisamos estudar cuidadosamente seu comportamento por mudança de coordenadas.

Agora recorde de (1.15) que a forma eletromagnética satisfaz a relação  $F = dA_U$ . Uma vez que  $F$  está bem definida em todo  $\mathbb{R}^4$ , então  $A_U - A_V$  é uma 1-forma fechada em  $U \cap V$ . Se  $U \cap V$  for simplesmente conexa, segue do Lema de Poincaré que  $A_U - A_V$  será exata, o que implicará na existência de uma função diferenciável  $f_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$A_U = A_V - df_{UV}.$$

Por conseguinte, teremos

$$\mathcal{A}_U = \mathcal{A}_V - \mathbf{i}q \cdot df_{UV}. \quad (3.10)$$

Comparando-se esta equação com (2.20), concluímos que será possível geometrizar estas soluções locais da equação de Schrödinger como manifestações de seções locais de um fibrado por retas com grupo estrutural  $U(1) = S^1$  e aplicações de transição

$$g_{UV}(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{i}qf_{UV}(\mathbf{x}))$$

se pudermos obter uma cobertura boa de  $\mathbb{R}^4$  (i.e., tal que as interseções dois a dois são simplesmente conexas) que satisfaçam a condição de cociclo

$$g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = 1$$

sempre que  $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ .

**Observação 3.5** *Note que a existência de funções diferenciáveis  $f_{UV} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo (3.10) ocorre mesmo na ausência de coberturas boas. O caso particular que veremos na próxima seção é um exemplo disso.*

Resta-nos agora verificar como podemos interpretar as soluções locais da equação de Schrödinger como manifestação de seções locais deste fibrado.

**Proposição 3.6 (Princípio da invariância do calibre de Weyl)** *Se  $\psi$  satisfaz a equação de Schrödinger (3.4) com forma de calibre  $\mathcal{A}$ , então*

$$\exp(\mathbf{i}q \cdot f(\mathbf{x}))\psi$$

*satisfaz a equação de Schrödinger (3.4) com forma de calibre  $\mathcal{A} - \mathbf{i}q \cdot df$ .*

**Demonstração.** Como se tratam de cálculos imediatos muito similares as já executados na Proposição 3.4, deixaremos os detalhes para o leitor interessado. ■

Criamos assim um dicionário entre o estudo de fibrados e a teoria de calibre:

Teoria de calibre	Fibrados
Função de onda	Escrita local de seções de fibrados em retas
Potencial de calibre	Conexão de Cartan no fibrado em círculos
Campo de força	Forma de curvatura da conexão de Cartan
Transformação local	Ação local dos cociclos de transição nas seções
Transformação de calibre	Ação local dos cociclos de transição nas formas de conexão

Veremos nas próximas duas seções como esta correspondência entre geometria e física nos fornece um melhor entendimento de dois fenômenos estudados em teoria de calibre, a saber: os *monopolos magnéticos* e *efeito Aharonov-Bohm*. Mais ainda, veremos como surgem naturalmente a manifestação física de mais dois objetos geométricos: as classes de Chern e a holonomia.

## 3.2 Monopolos magnéticos

Nesta seção iremos estudar a geometrização da solução quântica do sistema monopolo-carga.

### 3.2.1 Revisitando o potencial de calibre do monopolo

Recordemos do Exemplo 1.55 que o monopolo magnético de carga  $g$  gera um campo de força eletromagnético em  $\mathbb{R}^{1,3}$  dado em coordenadas esféricas por

$$F(\phi, \theta) = g \operatorname{sen} \phi d\phi \wedge d\theta$$

e que pode ser descrito pelos potenciais de calibre

$$\begin{aligned} A_+(\rho, \phi, \theta) &= g(1 - \cos \phi)d\theta, \text{ definido em } U_+ = \Omega - Z_- \\ A_-(\rho, \phi, \theta) &= -g(1 + \cos \phi)d\theta, \text{ definido em } U_- = \Omega - Z_+ \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{0\}$  e  $Z_-$  e  $Z_+$  são respectivamente as partes negativa e positiva do eixo  $z$ . Mais ainda, estes potenciais estão relacionados pela transformação de calibre

$$A_+ - A_- = d(2g\theta). \quad (3.12)$$

Como estes são constantes no tempo e não dependem do raio, podemos nos restringir a estudá-los em  $S^2$ . Neste caso, teremos uma 2-forma de força  $F = g \operatorname{sen} \phi d\phi \wedge d\theta$  com

potenciais

$$\begin{aligned} A_N = A_+|_{S^2} &= g(1 - \cos \phi)d\theta \quad \text{definido em } U_N = U_+ \cap S^2 = S^2 - \{0, 0, -1\}; \\ A_S = A_-|_{S^2} &= -g(1 + \cos \phi)d\theta \quad \text{definido em } U_S = U_- \cap S^2 = S^2 - \{0, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que do ponto de vista clássico estes potenciais não têm nenhuma relevância física, até mesmo por não serem únicos, não passando de mera ferramenta de cálculo que visa simplificar o formato de certas equações. No entanto, esta visão muda dramaticamente com o advento da mecânica quântica. Para entendermos o porque disso, devemos considerar um sistema um pouco mais complicado do que um monopolo isolado. Novamente, iremos considerar um monopolo situado na origem de um referencial inercial. Agora introduzimos uma partícula elétrica em movimento com carga  $q$  numa vizinhança deste monopolo. Como vimos (cf. Exemplo 1.5), do ponto de vista clássico, o movimento da partícula é governada pela segunda Lei de Newton através da chamada Força de Lorentz.

**Observação 3.7** *Embora os detalhes do movimento no modelo clássico não sejam necessários para os nossos propósitos, eles são bastante interessantes. O leitor pode achar divertido modificar os procedimentos usuais de cálculo para a solução do problema de Kepler afim de mostrar que, em geral, a carga é constrangida a mover-se sobre um cone cujo vértice está na localização do monopolo. (ver seção 9.4 de [17])*

### 3.2.2 A quantização (canônica) do sistema monopolo-carga

No entanto, (cf. §3.1) a visão atual desse tipo de sistema é um pouco diferente. A carga não é pensada como uma partícula “pontual”, mas sim como um objeto quântico descrito pela sua função de onda  $\psi(t, x, y, z)$ . Esta é uma função complexa de valores em  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  (no espaço tridimensional) e  $t \in \mathbb{R}$  (no tempo), que acredita-se conter todas as informações fisicamente mensuráveis sobre a carga. Por exemplo, a probabilidade de encontrar a carga em torno de  $R$  região do espaço, em algum instante de tempo  $t$  é calculado por meio da integração de  $|\psi|^2 = \bar{\psi}\psi$  sobre  $R$ . A função de onda  $\psi$  para  $q$  é encontrada resolvendo a chamada equação de Schrödinger para o sistema de monopolo-carga. Recorde que a equação de Schrödinger para um dado sistema é construído escrevendo-se o Hamiltoniano clássico para o sistema e empregando o que é chamado de “regra de correspondência” para substituir as grandezas clássicas no hamiltoniano por um operador apropriado.

**Exemplo 3.8 (Equação de Schrödinger do monopolo de Dirac)** *Recorde do Exemplo 1.59 que uma partícula de carga  $q$  sujeita à ação de um campo eletromagnético  $(E, B)$  com potencial dado por  $(\phi, A)$  está submetida a uma lagrangeana da forma*

$$L = \frac{mv^2}{2} - q\phi + qA \cdot v - V(x).$$

o que daria a descrição clássica do sistema. Mas, seguindo a regra de correspondência para obter a quantização canônica do sistema, vimos no Exemplo 3.3 que a equação que descreve uma partícula carregada sobre efeito de um campo eletromagnético (a equação de Schrödinger corrigida) é dada por

$$\mathbf{i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{i}q\phi \right] \psi = -\frac{1}{2m} [\nabla - \mathbf{i}qA]^2 \psi + V \cdot \psi. \quad (3.14)$$

No caso particular do sistema monopolo-carga teremos potenciais dados por (3.11) ou (3.13), a depender do modelo matemático considerado.

Como  $E = 0$ , então podemos tomar  $\phi = 0$ . Portanto, do ponto de vista geométrico, a única característica relevante para a nossa investigação é que o Hamiltoniano para uma carga em um campo eletromagnético envolve, de maneira essencial, o potencial vetor  $A$  para o campo eletromagnético (cf. (3.10)). Naturalmente, este potencial vetor não é único.

Dessa forma, segue da Proposição (3.6) que a substituição de  $A$  por  $A - d\Omega$  na equação de Schrödinger (3.14) leva à substituição da solução  $\psi$  por  $e^{iq\Omega}\psi$ , i.e.:

$$A \rightarrow A - d\Omega \implies \psi \rightarrow e^{iq\Omega}\psi,$$

onde  $e^{iq\Omega}$  é um número complexo de módulo um, uma vez que  $\Omega : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma função (diferenciável) real.<sup>5</sup>

Assim, a mudança  $A \rightarrow A - \nabla\Omega$  altera unicamente a fase e não o módulo (amplitude) da função de onda  $\psi$ . Por algum tempo ficou a impressão de que as mudanças de fase da função de onda não possuíam significado físico, uma vez que todas as quantidades fisicamente mensuráveis (conhecidas) associadas à carga  $q$  dependiam apenas do módulo quadrado  $|\psi|^2$  e este é o mesmo para  $\psi$  e  $e^{iq\Omega}\psi$ . Na próxima seção, veremos que essa é uma interpretação equivocada.

Antes de passarmos à geometrização das soluções da equação de Schrödinger, regressemos aos dois potenciais vetores locais  $A_N$  e  $A_S$  para o monopolo dados por (3.13) e definidos respectivamente em  $U_N$  e  $U_S$ . Sejam  $\psi_N$  e  $\psi_S$  funções de onda para a carga determinadas (através da equação de Schrödinger) pelos potenciais  $A_N$  e  $A_S$ , segue de (3.12) que

$$\psi_N = e^{i(2qg\theta)}\psi_S$$

em  $U_N \cap U_S$ . Mas em  $U_N \cap U_S$  (que contém o círculo  $(\rho, \phi, \theta) = (1, \pi/2, \theta)$ ) tanto a  $\psi_N$  quanto a  $\psi_S$  atribui-se exatamente um (único) valor complexo para cada ponto. Assim, para cada  $t$  fixo, a mudança  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  deve deixar ambos  $\psi_N$  e  $\psi_S$  inalterados. Isso implica que a aplicação  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  deve deixar  $e^{i(2qg\theta)}$  inalterada. Desta forma

$$e^{i(2qg\theta)} = e^{i(2qg(\theta+2\pi))} = e^{i(2qg\theta)} e^{i(4qg\pi)},$$

<sup>5</sup>Talvez frustrando um pouco os possíveis leitores oriundos da física, escolheremos os referenciais de forma que a constante de Dirac  $\hbar$  seja igual a um.



de onde segue que

$$e^{i(4qg\pi)} = 1;$$

ou seja  $4qg\pi = 2n\pi$  para algum inteiro  $n$ . Concluimos que

$$qg = n/2 \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.15)$$

Esta é a célebre *condição de quantização de Dirac* e pode ser interpretada como segue: se apenas um único monopolo magnético (com carga  $g$ ) existir, então a carga de qualquer partícula elétrica deve ser “quantizada”, i.e., vem apenas em múltiplos inteiros de uma quantidade básica de carga ( $q = n(1/2g)$ ).<sup>6</sup> Como a carga é de fato quantizada na natureza e uma vez que nenhuma outra explicação plausível para este fato já foi oferecida, a existência de monopolos magnéticos torna-se uma possibilidade bastante tentadora. Esta questão foi levantada inicialmente pelo físico britânico Paul Dirac em [12].

### 3.2.3 Geometrizando o sistema

No intuito de geometrizar o sistema monopolo-carga, passaremos agora a recordar o recitório estabelecido no §3.1.3. Recorde de (3.10) que as formas de conexão respeitam, na interseção de seus domínios, à equação

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_S - \mathbf{i}q \cdot df_{NS},$$

onde  $\mathcal{A}_N = \mathbf{i}qA_N$ ,  $\mathcal{A}_S = \mathbf{i}qA_S$  e  $f_{NS} = 2g\theta$ . Em particular, as esperadas aplicações de transição devem assumir a forma

$$g_{NS}(\mathbf{x}) = \exp(2\mathbf{i}qg\theta). \quad (3.16)$$

Além disso, segue da Proposição 3.6 que

$$\psi_N = e^{\mathbf{i}(2qg\theta)}\psi_S$$

Logo, a condição de quantização de Dirac (3.15) permite-nos então concluir que  $\psi_N \mathbf{s}_N = \psi_S \mathbf{s}_S$ , onde  $\mathbf{s}_N(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 1)$  (respect.  $\mathbf{s}_S(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 1)$ ) é uma seção diferenciável de  $U_N \times \mathbb{C}$  (respect.  $U_S \times \mathbb{C}$ ), geram uma seção global do fibrado com retas complexas definido pela aplicação de transição (3.16) munido de uma conexão linear definida pelas formas de calibre  $\mathcal{A}_N$  e  $\mathcal{A}_S$ .

Acabamos de constatar que a condição de quantização de Dirac é suficiente para a geometrização das soluções da equação de Schrödinger. Como consequência do Teorema 2.73, veremos que ela é também necessária. Em outras palavras, iremos mostrar que não

---

<sup>6</sup>A formato fisicamente correto da condição de quantização de Dirac usando as unidade de medida padrão da física é  $2qg/\hbar = n$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

é possível realizar as soluções da equação de Schrodinger em outros fibrado que não os dados por (3.16).

Suponhamos que exista um fibrado por retas complexas  $E$  munido de uma conexão dado pelas 1-formas de calibre  $\mathcal{A}_N$  e  $\mathcal{A}_S$ . Recordemos também de (1.15) que o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = \int_{S^2} B \cdot dS = \int_{S^2} \frac{g}{r^2} e_r \cdot ndA = \frac{g}{R^2} \int_{S^2} dA = \frac{g}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi g.$$

Por outro lado, segue de (1.15) e do teorema de Stokes que a integral da forma de força nos dá

$$\int_{S^2} F = \int_{U_N} dA_N + \int_{U_S} dA_S = \int_{S^1} A_N - \int_{S^1} A_S = \int_{S^1} d(2g\theta) = 2g \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi g$$

ou seja

$$\Phi = \int_{S^2} B \cdot dS = \int_{S^2} F = 4\pi g.$$

Como a forma de Chern de um fibrado em círculos é dada por

$$c_1(P, \omega) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \mathcal{F},$$

onde  $\mathcal{F} = \mathbf{i}qF$  é a forma de curvatura da conexão definida pelas formas de calibre  $\mathcal{A}_N$  e  $\mathcal{A}_S$ , então

$$\int_{S^2} c_1(P) = \int_{S^2} \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \mathcal{F} = \int_{S^2} \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \mathbf{i}qF = \frac{-1}{2\pi} q \int_{S^2} F = \frac{-1}{2\pi} 4\pi qg = -2qg$$

o que nos diz que o número de Chern deste fibrado é igual a  $-2qg$ . O Teorema 2.73 nos garante que este é sempre um número inteiro o que mostra que a geometrização da equação de Schrodinger num fibrado principal só pode se dar de forma a respeitar a condição de quantização de Dirac.

Já sabemos que o número de Chern de um fibrado não depende de nenhuma conexão em particular mas apenas da estrutura do fibrado em si. Desta forma, cada valor  $2qg \in \mathbb{Z}$  do sistema monopolo-partícula carregada pode ser modelado em um fibrado diferente de número de Chern  $n = -2qg$ . Resumidamente, para cada  $n$  temos um fibrado  $U(1) \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\pi_n} S^2$  com formas locais de conexão, função de transição e forma de curvatura dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= \mathbf{i} \left( \frac{-n}{2} \right) (1 - \cos \phi) d\theta; & \mathcal{A}_S &= -\mathbf{i} \left( \frac{-n}{2} \right) (1 + \cos \phi) d\theta; & g_{NS} &= e^{-n\theta \mathbf{i}}, \\ \mathcal{F} &= \mathbf{i} \left( \frac{-n}{2} \right) \text{sen } \phi d\phi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Observe que já conhecemos alguns casos particulares destes fibrados.

**Exemplo 3.9** Quando  $n = 0$  a função de transição é  $g_{NS} = e^{-0\theta i} = 1$ , ou seja, o fibrado em círculos em questão é o fibrado trivial  $U(1) \hookrightarrow S^2 \times U(1) \xrightarrow{\pi} S^2$ . Assim uma partícula neste ambiente é estudada através de uma seção  $\psi$  do fibrado em retas associado, neste caso o fibrado em retas trivial  $S^2 \times \mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.10** No caso em que  $n = 1$  ou  $n = -1$  as funções de transição são respectivamente  $g_{NS} = e^{-\theta i}$  e  $g_{SN} = e^{\theta i}$  ou  $g_{NS} = e^{\theta i}$  e  $g_{SN} = e^{-\theta i}$  que são as funções de transição do fibrado de Hopf  $U(1) \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  (cf. Exemplo 2.24). Desta forma quando  $n = \pm 1$  o potencial de calibre do monopolo é uma conexão no fibrado de Hopf e estudo da interação entre uma partícula e este monopolo é feito através de uma seção no fibrado tautológico, que é o associado ao de Hopf.

Para  $n > 1$  teremos fibrados com cociclos de transição mais envolventes. Por exemplo, é possível mostrar que para  $n = 2$  o monopolo magnético em questão é modelado pelo fibrado em círculos  $U(1) \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\pi} S^2$  e uma partícula interagindo com este é descrita por uma seção no fibrado tangente da esfera de Riemann, mas isto está fora do escopo deste trabalho. O leitor interessado pode consultar [36].

Concluimos esta seção observando que, dos exemplos acima, o número de Chern do fibrado do fibrado tautológico é igual a 1 e pelo Teorema 2.73 qualquer seção sobre este terá ao menos um ponto singular e pelo Teorema 2.18 este fibrado não é trivial. Disto temos que o seu fibrado associado, o fibrado de Hopf, também não é trivial, pois não é associado ao fibrado em retas trivial. Desta maneira, os estudos dos monopolos nos permitiu concluir fatos matemáticos não elementares.

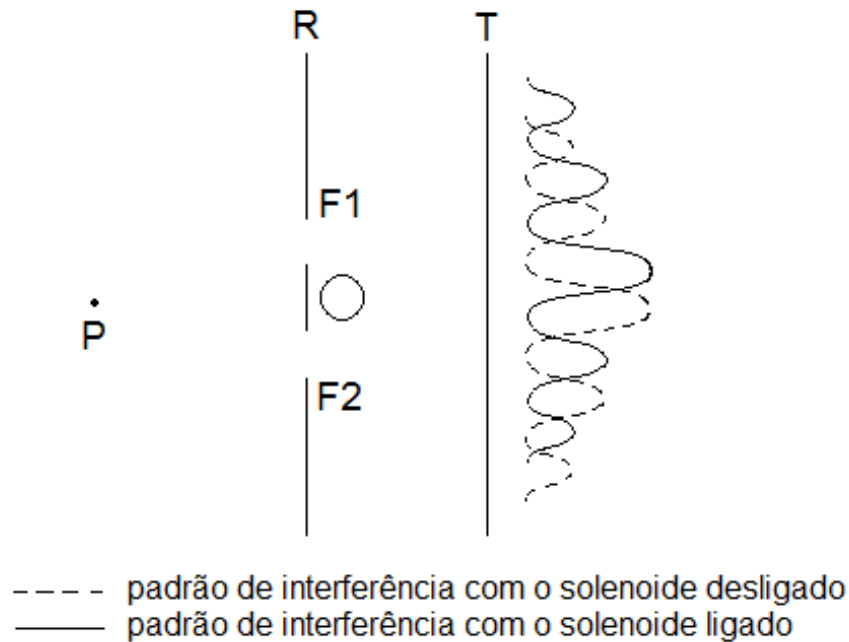
### 3.3 Efeito Aharonov-Bohm

Introduzimos os potenciais de calibre no Capítulo 1 e destacamos seu aparecimento historicamente como ferramenta facilitadora no operacional de equações diferenciais. Uma pergunta natural é se estes são mera manipulação matemática ou têm alguma relevância física, i.e., se podem ser experimentalmente detectados. Classicamente, uma partícula sujeita a ação de um campo eletromagnético experimenta a força de Lorentz  $F = q(E + v \times B)$ . Quanticamente, é a equação de Schrödinger

$$\mathbf{i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi \right] \psi = -\frac{1}{2m} [\nabla - \mathbf{i}qA]^2 \psi$$

que descreve tal influência e nesta os potenciais aparecem explicitamente, o que sugere que estes campos (potenciais de calibre) têm de fato alguma realidade física.

Foi no ano de 1959 que Yakir Aharonov e David Bohm propuseram em [2] um experimento que viria a confirmar essa expectativa. Na figura abaixo apresentamos um esboço do aparato envolvido no experimento.



**Figura 1.** *Experimento Aharonov-Bohm*

Um feixe de elétrons é lançado de um ponto  $P$  em direção a uma tela  $T$  protegida por uma outra tela  $R$  com duas fendas  $F_1$  e  $F_2$ . Por trás da parte do meio da tela  $R$  está um solenoide de dimensões (diâmetro e altura) de forma que quando ligada uma corrente elétrica o campo magnético produzido seja igual (aproximadamente) ao de um solenoide infinito. Os elétrons atingem a tela  $T$  formando um padrão de interferência específico e quando é ligada a corrente elétrica no solenoide este padrão sofre um deslocamento ao longo de  $T$ .

Fisicamente o que se passa é o seguinte: sabemos que um elétron é descrito por uma função de onda  $\psi$  e que o módulo ao quadrado desta fornece a probabilidade dele estar numa dada região do espaço. Com o solenoide desligado, a função de onda  $\psi$  associada ao feixe de elétrons é dividida em duas ao incidir na tela  $R$ , uma  $\psi_1$  que passa por  $F_1$  e uma  $\psi_2$  que passa por  $F_2$ , e estas se encontram novamente na tela  $T$ . Desse modo, a probabilidade de se encontrar um elétron num ponto  $Q$  qualquer da tela  $T$  é dada por  $|\psi_1(Q) + \psi_2(Q)|^2$ . Uma conta simples nos mostra que isto induz um padrão construtivo-destrutivo resultante da sobreposição das funções  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , omitindo a dependência de  $Q$ .

Mais precisamente, sendo  $\psi_1 = |\psi_1|e^{i\alpha}$  e  $\psi_2 = |\psi_2|e^{i\beta}$  teremos

$$\begin{aligned}
|\psi_1 + \psi_2|^2 &= (\psi_1 + \psi_2) \overline{(\psi_1 + \psi_2)} \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1 \overline{\psi_2} + \psi_2 \overline{\psi_1} \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1|e^{i\alpha} \overline{|\psi_2|e^{i\beta}} + |\psi_2|e^{i\beta} \overline{|\psi_1|e^{i\alpha}} \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2| (e^{i\alpha}e^{-i\beta} + e^{i\beta}e^{-i\alpha}) \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2| (e^{i\alpha-\beta} + e^{i\beta-\alpha}) \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2|2 \cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

Claramente esta interferência depende da diferença de fase  $\alpha - \beta$  das funções  $\psi_1$  e  $\psi_2$  no ponto na tela, de modo que o efeito construtivo é máximo quando  $\alpha - \beta = 2k\pi$  e o efeito destrutivo é máximo quando  $|\alpha - \beta| = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para entendermos o que ocorre quando é ligado o solenoide, recordemos do Exemplo 1.6 que no exterior do solenoide o campo magnético  $B$  é identicamente nulo e o potencial é dado por

$$\begin{aligned}
A(t, x) &= \begin{cases} \frac{B_0}{2}(-y, x, 0) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq a \\ \frac{B_0 a^2}{2} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right) & \text{se } \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} > a \end{cases} \\
\phi(t, x) &= 0.
\end{aligned}$$

ou seja  $B = 0$  e  $A$  não.

De acordo com [47] a função de onda de uma partícula livre é dada por  $\psi = |\psi|e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$ , onde  $p$  é o momento e  $r$  é o vetor posição (cf. e.g. [47]). Sabemos da Seção 3.1 que sob efeito de um campo magnético o momento muda por  $p \rightarrow p - qA$  (vide Exemplo 3.3). Portanto, (considerando  $q = 1$  por simplicidade) na presença do campo magnético a função de onda será

$$\psi^A := |\psi|e^{i((\mathbf{p}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{r})} = |\psi|e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}e^{-i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})}$$

Assim a fase da partícula muda pontualmente por  $\alpha \rightarrow \alpha - A \cdot r$ . Afim de calcularmos a diferença total, devemos somar essas diferenças ao longo de toda a trajetória  $\gamma$  da partícula. Logo

$$\Delta\alpha = - \int_{\gamma} A dr$$

Portanto, num ponto  $Q$  sobre a tela  $T$  (ver Figura 1), as funções de onda são dadas por  $\psi_1^A = |\psi_1|e^{i\alpha}e^{iS_1}$  e  $\psi_2^A = |\psi_2|e^{i\beta}e^{iS_2}$ , onde

$$S_1 = -q \int_{\gamma_1} A dr, \quad S_2 = -q \int_{\gamma_2} A dr$$

e  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são curvas que ligam  $P$  a  $Q$  através de  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente. A nova interferência em  $Q$  será dada por

$$\begin{aligned}
|\psi_1^A + \psi_2^A|^2 &= (\psi_1^A + \psi_2^A) \overline{(\psi_1^A + \psi_2^A)} \\
&= ||\psi_1|e^{i\alpha}e^{iS_1}|^2 + ||\psi_2|e^{i\beta}e^{iS_2}|^2 + |\psi_1|e^{i\alpha}e^{iS_1}|\overline{|\psi_2|e^{i\beta}e^{iS_2}} + \overline{|\psi_1|e^{i\alpha}e^{iS_1}}|\psi_2|e^{i\beta}e^{iS_2} \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2| \left( e^{i\alpha}e^{iS_1}\overline{e^{i\beta}e^{iS_2}} + \overline{e^{i\alpha}e^{iS_1}}e^{i\beta}e^{iS_2} \right) \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2| \left( e^{i(\alpha-\beta+S_1-S_2)} + \overline{e^{i(\alpha-\beta+S_1-S_2)}} \right) \\
&= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2|2 \cos(\alpha - \beta + S_1 - S_2).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
S &:= S_1 - S_2 = - \left( \int_{\gamma_1} A dr - \int_{\gamma_2} A dr \right) \\
&= - \left( \int_{\gamma_1} A dr + \int_{-\gamma_2} A dr \right) \\
&= - \int_{\gamma} A dr = -\Phi
\end{aligned} \tag{3.17}$$

temos

$$|\psi_1^A + \psi_2^A|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_1||\psi_2|2 \cos(\alpha - \beta - \Phi)$$

ou seja, o padrão de interferência sofre um deslocamento horizontal proporcional ao fluxo magnético no interior do solenoide.

Uma vez que o campo eletromagnético é identicamente nulo na região em que os elétrons passam, a força de Lorentz é também nula. Dessa forma, a teoria clássica supostamente previa que nenhuma influência deveria ocorrer. No entanto, acabamos de ver que quanticamente o fato do potencial de calibre não ser nulo conduz a consequências observáveis, mostrando assim de uma vez por todas que o potencial possui sim existência física. Essa previsão foi confirmada experimentalmente por Robert G. Chambers em 1960 ([6]).

Veremos agora como o efeito Aharonov-Bohm pode ser naturalmente interpretado como um evento se manifestando em um espaço fibrado munido de uma conexão. Uma vez que estamos estudando as função de onda das partículas, o fibrado em questão deverá ser um fibrado em retas  $E$ , veremos agora como determiná-lo. Como estamos estudando apenas o que se passa fora do solenoide, o potencial será

$$A(t, x) = \frac{B_0 a^2}{2} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right)$$

podemos então considerar o solenoide como sendo de raio  $a = 0$  e como do Exemplo 1.6 temos

$$\frac{B_0 a^2}{2} = \frac{\Phi}{2\pi},$$

usaremos o potencial

$$A(t, x) = \frac{\Phi}{2\pi} \left( \frac{-y}{(x^2 + y^2)}, \frac{x}{(x^2 + y^2)}, 0 \right)$$

com o solenoide sendo a origem do plano. Como o fenômeno é essencialmente bidimensional e não depende do tempo, tomaremos  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  como variedade base. Assim o fibrado em questão será o fibrado trivial  $E = M \times \mathbb{C}$  munido da conexão

$$\mathcal{A} = \mathbf{i}A = \frac{\mathbf{i}\Phi}{2\pi(x^2 + y^2)} (-ydx + xdy).$$

Queremos agora destacar um fato geral relacionado à propriedade da conexão ser compatível com a métrica canônica deste fibrado. Considere dois pontos  $p, q \in M$  e dois caminhos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  distintos que ligam  $p$  a  $q$ . Tomando duas seções  $s, t \in \Gamma(M, E)$ , podemos fazer o transporte paralelo de  $s(p)$  ao longo de  $\gamma_2$  e  $t(p)$  ao longo de  $\gamma_1$ , encontrando respectivamente  $\tilde{s}(q)$  e  $\tilde{t}(q)$ . Como  $E$  tem uma estrutura métrica canônica, os comprimentos e ângulos são medidas intrínsecas, portanto,  $s(p)$  e  $t(p)$  possuem uma diferença de fase  $\theta$  bem definida, bem como  $\tilde{s}(q)$  e  $\tilde{t}(q)$  possuem uma diferença de fase  $\phi$ , também bem definida.

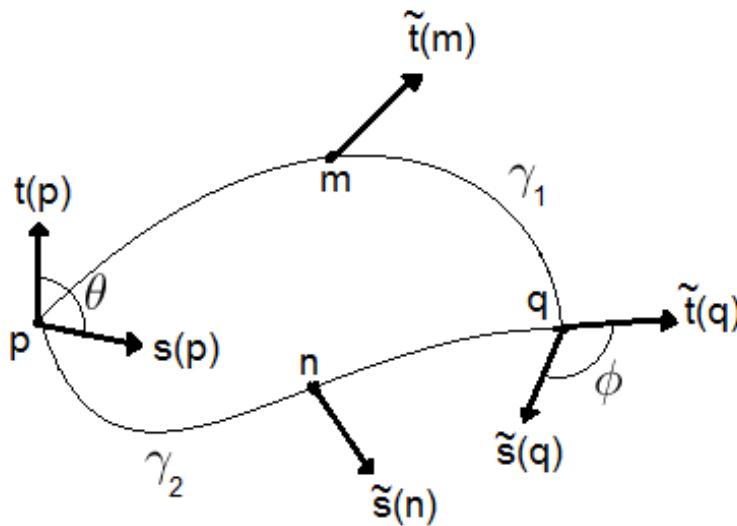


Figura 2.

Como a conexão é compatível com a métrica, se transportarmos  $\tilde{s}(q)$  e  $\tilde{t}(q)$  ao longo de  $\gamma_2$  em sentido contrário teremos que o transporte paralelo de  $\tilde{s}(q)$  será  $\hat{s}(p) = s(p)$ , enquanto o de  $\tilde{t}(q)$  será  $\hat{t}(p)$  de modo que a diferença de fase entre  $s(p)$  e  $\hat{t}(p)$  também será  $\phi$ . Portanto a diferença de fase entre  $\tilde{s}(q)$  e  $\tilde{t}(q)$  será a diferença de fase entre  $s(p)$  e  $t(p)$  acrescida da diferença de fase resultante da holonomia  $\lambda := \text{hol}(\gamma, \nabla)$  do caminho fechado  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ .

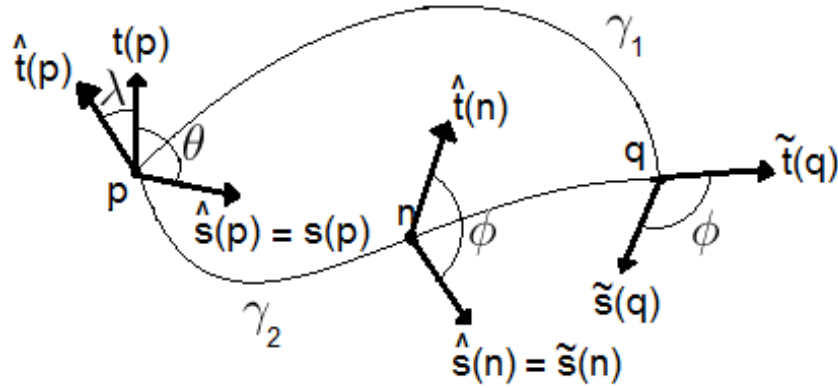


Figura 3.

No caso particular do efeito Aharonov-Bohm, teremos  $s(p) = \psi_2(P)$ ,  $t(p) = \psi_1(P)$ ,  $\tilde{s}(q) = \psi_2^A(Q)$ , e  $\tilde{t}(q) = \psi_1^A(Q)$ . De (2.16) e de (3.17) segue

$$\text{hol}(\gamma, \nabla) = \exp\left(-\int_{\gamma} \mathcal{A}\right) = \exp\left(-\int_{\gamma} \mathbf{i}A dr\right) = \exp(-\mathbf{i}\Phi)$$

e portanto a diferença de fase  $S$  equivale à holonomia do caminho.

Disto concluímos que o efeito Aharonov-Bohm é, do ponto de vista da geometria de fibrados, a manifestação física da holonomia proveniente de uma certa conexão. Em [54] Wu e Yang asseveram que:

*“o campo de força  $F_{ij}$  não descreve completamente a física ou seja, situações diferentes podem ter o mesmo campo de força (...) o que fornece uma descrição completa é o fator de fase  $\exp(-i\Phi)$ .”*

Em termos geométricos: *A curvatura não fornece uma descrição completa da estrutura geométrica, mas sim a holonomia.* No caso do efeito Aharonov-Bohm temos uma geometria com curvatura zero porém holonomia não trivial.





# Conclusão

A classe de Chern é um invariante do fibrado (seja em retas ou em círculos) e o teorema de Chern para fibrados em retas (Teorema 2.73) nos garante que o número de Chern de uma superfície qualquer contida na variedade base nos dá a soma mínima dos índices de qualquer seção sobre tal superfície e conseqüentemente sobre toda a variedade. Uma vez que um fibrado em retas é trivial se, e somente se, admitir uma seção global que não se anula em ponto algum (Teorema 2.18), temos que a classe de Chern de um fibrado nos dá a obstrução total deste fibrado ser trivial. Em outras palavras a classe de Chern de um fibrado mede a sua não-trivialidade.

Como resultado do diálogo entre geometria e física, as classes de Chern nos permitiram concluir que para cada monopolo de diferente carga a situação física será modelada em um diferente fibrado. Reciprocamente, os potenciais de calibre provenientes dos monopolos de diferentes cargas nos fornecem conexões em diferentes fibrados sobre  $S^2$ . Em particular, concluimos com isto que o fibrado de Hopf não é trivial e ainda que qualquer seção no fibrado tautológico terá no mínimo um ponto singular. Apesar de ser um fenômeno relacionado ao campo magnético, vimos que o efeito Aharonov-Bohm não pode ser previsto ou explicado pela teoria eletromagnética clássica, o que só foi possível através da mecânica quântica. A diferença crucial é que na mecânica quântica temos o conceito de fase e esta interage diretamente com o potencial de calibre. Aqui, do diálogo entre geometria e física, pudemos constatar que o efeito Aharonov-Bohm é a manifestação física do conceito geométrico de holonomia. No caminho inverso, este nos forneceu um exemplo de uma geometria que possui curvatura nula porém holonomia não-trivial.

Os fibrados em retas e em círculos vistos aqui são naturalmente generalizados. Os fibrados em retas são casos particulares de *fibrados vetoriais*, onde a fibra, ao invés de ser necessariamente um espaço vetorial complexo de dimensão 1, pode ser um espaço vetorial (real, complexo ou quaterniônico) de dimensão  $n$  qualquer. Nos fibrados vetoriais temos naturalmente a extensão de todos os resultados apresentados aqui, com ligeiras diferenças, por exemplo a trivialidade é equivalente a  $n$  seções linearmente independentes em todo ponto, ao invés de uma seção global que nunca se anula. O fato podermos olhar para apenas uma seção facilitou bastante o estudo restrito aos fibrados em retas. Já a generalização dos fibrados em círculos são os *fibrados principais*, onde a fibra, ao invés de ser necessariamente o grupo de Lie  $U(1)$ , pode ser um grupo de Lie qualquer, inclusive

grupos não-abelianos. Aqui o fato de  $U(1)$  ser abeliano nos poupou de uma construção teórica muito mais elaborada. O leitor interessado em tais generalizações pode consultar [37], [21] e [35].

Impondo-se o princípio da invariância de calibre sobre a mecânica quântica de uma partícula livre, obtivemos a teoria de calibre mais simples conhecida, a da mecânica quântica de uma partícula na presença de um campo eletromagnético. As teorias de calibre modernas em geral são ligeiramente diferentes: impõe-se o princípio da invariância de calibre sobre uma teoria de campos lagrangeana. O leitor interessado em tais teorias pode, após o presente trabalho, consultar [17], [3] e [33]. Destacamos que atualmente em física teórica o estudo e procura por equivalentes ao efeito Aharonov-Bohm e a monopolos magnéticos em tais teorias constitui uma ativa área de pesquisa. O leitor pode por exemplo consultar em [47] que monopolos magnéticos são casos particulares do que se conhece hoje como sólitons topológicos.

Assim como apresentado neste trabalho, as mais modernas teorias de calibre são estudadas usando-se do que há de mais moderno no estudo de espaços fibrados. Recomendamos como referências para este assunto [5] e [22]. Destacamos que a própria formulação correta e rigorosa, do ponto de vista matemático, de tais teorias é por si só uma área de pesquisa. Por exemplo, na tese [49], defendida em 2007, o autor se propõe a *"dar uma contribuição à questão de como implementar o conceito de simetria global e simetria local na teoria geométrica de campos"*.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New York. 2002.
- [2] Y.Aharonov, D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in Quantum Theory*. Physical Review 115: 485–491. 1959.
- [3] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, *Notes for a Course on Classical Fields*. Preprint - disponível em <http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/classnotes.html> - acessado em 28/10/2012.
- [4] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York. 1989.
- [5] D. Bleeker, *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston. 1981.
- [6] R.G. Chambers, *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux*. Physical Review Letters 5: 3–5. 1960.
- [7] S.S. Chern, *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. Annals of Mathematics, Vol. 45. 1944.
- [8] S.S. Chern, *On the curvatura integra in Riemannian manifold*, Annals of Mathematics, Vol. 46. 1945.
- [9] S.S. Chern, *Circle bundles*, Lecture Notes in Mathematics - Geometry and Topology, Vol. 597. Springer-Verlag, New York. 1977.
- [10] S.S. Chern, *Vector Bundles with a connection*, Coletânia: Studies in Mathematics, Vol 27 - Global Differential Geometry. The Mathematical Association of America. 1989.
- [11] C. Cohen-Tanoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, New Jersey. 1992.

- [12] P.A.M. Dirac, *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Royal Society, A133, 60–72. 1931.
- [13] P.A.M. Dirac, *The Theory of Magnetic Poles*, Physical Review 74, 817–830. 1948.
- [14] M. Do Carmo, *Geometria Riemanianna*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA. 4<sup>a</sup> ed. 2008.
- [15] M. Do Carmo, *Geometria diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, Rio de Janeiro. 4<sup>a</sup> ed. 2010.
- [16] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik der bewegten Körper*. Annalen der Physik 17: 891–921. 1905.
- [17] B. Felsager, *Geometry, Particles, and Fields*. Springer-Verlag, New York. 1998.
- [18] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Feynman Lectures on Physics, Vol.I*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston. 1964.
- [19] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Feynman Lectures on Physics, Vol.II*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston. 1964.
- [20] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Feynman Lectures on Physics, Vol.III*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston. 1964.
- [21] T. Frankel, *The Geometry of Physics, An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge. 1997.
- [22] D.S. Freed, *Classical Field Theory and Supersymmetry*. IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 11. American Mathematical Society, Rode Island. 2001.
- [23] I.M. Gelfand, V.S. Fomin, *Calculus of Variations*. Dover, New York. 2000.
- [24] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston. 3<sup>a</sup> ed. 2002.
- [25] D.J. Griffiths, *Introduction to Eletrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey. 3<sup>a</sup> ed. 1999.
- [26] D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, New Jersey. 1994.
- [27] M. Kaku, *Quantum Field Theory - A Modern Introduction*. Oxford University Press, Oxford. 1993.
- [28] J. Leveugle, *Poincaré et la Relativité*. La Jaune et la Rouge: 31–51. Avril, 1994.
- [29] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*. 1888. Reprinted by Chelsea Publishing Co, New York. 1970.

- [30] H.A. Lorentz, *Electromagnetic Phenomena in a System Moving With Any Velocity Less Than That of Light*. Proc.Royal Acad. Amsterdam. 1904.
- [31] C. Marchal, *Henri Poincaré : Une Contribution Décisive à la Relativité*. Disponível em <http://www-cosmosaf.iap.fr/Poincare.htm> - acessado em 28/10/2012.
- [32] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 201. American Mathematical Society, Rode Island. 1997.
- [33] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*. World Scientific Publishing, Singapore. 1983.
- [34] M. Murray, *Line Bundles. Honours 1996*. 2008. Disponível em [http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/line\\_bundles.pdf](http://www.maths.adelaide.edu.au/michael.murray/line_bundles.pdf) - acessado em 29/10/2012.
- [35] G.L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Foundations*. Springer Verlag, New York. 1997.
- [36] G.L. Naber, *Topology, Geometry, and Gauge Fields: Interactions*. Springer Verlag, New York. 1997.
- [37] M. Nakahara, *Geometry Topology and Physics*. Odense University Press, Odense, Dinamarca. 1981.
- [38] E. Noether, *Invariant Variation Problems*. 1918. Tradução para o inglês de M.A. Tavel. 2005. Disponível em <http://arxiv.org/pdf/physics/0503066%20English%20translation%20of%20Noether%27s%20paper> - acessado em 28/10/2012.
- [39] L. O’Raifeartaigh, N. Straumann, *Gauge Theory: Historical Origins and Some Modern Developments*. Reviews of Modern Physics 1, Vol. 72. 2000.
- [40] H. Poincaré, *La Mesure du Temps*. Revue de Métaphysique et de Morale, 6: 371–384. 1898.
- [41] H. Poincaré, *La Science et l’Hypothèse*. Edition Flammarion, Paris. 1902.
- [42] H. Poincaré, *L’état Actuel et l’Avenir de la Physique Mathématique*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 28: 302–324. 1904.
- [43] H. Poincaré, *Sur la Dynamique de l’Électron*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 140: 1504–1508. 1905.
- [44] H. Poincaré, *Sur la Dynamique de l’Électron*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21: 129–175. 1906.

- [45] C. Quigley, *On the Origins of Gauge Theory*. 2003. Disponível em [http://www.math.toronto.edu/~colliand/426\\_03/Papers03/C\\_Quigley.pdf](http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/C_Quigley.pdf) - acessado em 29/10/2012.
- [46] H. Römer, M. Forg, *Elementare Feldtheorie*. VCH-Verlag, Weinheim, Alemanha. 1993. Tradução para o português disponível em <http://www.ime.usp.br/~forger/cursport.html> - acessado em 28/10/2012.
- [47] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge. 2<sup>a</sup> ed. (1985) 1996.
- [48] C.C. Silva, *Da Força ao Tensor: Evolução do Conceito Físico e da Representação Matemática do Campo Eletromagnético*. Tese de Doutorado, Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade de Campinas. 2002 - Disponível em <http://webbif.ifi.unicamp.br/tesesOnline/teses/IF487.pdf> - acessado em 28/10/2012.
- [49] B.L. Soares, *Simetrias Locais e Globais em Teoria de Calibre*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. 2007.
- [50] M. Tsampanlis, *Special Relativity - An Introduction with 200 Problems Solution*. Springer-Verlag, New York. 2010.
- [51] C. Marle, *The Works of Charles Ehresmann on connections*. Banach Center Publ. 76 (2007), 65-86
- [52] R. Utiyama, *Invariant Theoretical Interpretation of Interaction*. Physical Review 5, Vol. 101. 1956.
- [53] H. Weyl, *Gravitation and the Electron*. Palmer Physical Laboratory, Vol. 15, Princeton. 1929.
- [54] T.T. Wu, C.N. Yang, *Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields*, Physical Review 12, Vol. 12. 1975.
- [55] C.N. Yang, R.L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*. Physical Review 1, Vol. 96. 1954.