

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rodrigo Martins de Siqueira Barbosa

**GRAVITAÇÃO QUÂNTICA EM LAÇOS:  
MODELO DE CHERN-SIMONS  
E GRAVITAÇÃO EM 2+1 DIMENSÕES**

Vitória  
2011

RODRIGO MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA

**GRAVITAÇÃO QUÂNTICA EM LAÇOS:  
MODELO DE CHERN-SIMONS  
E GRAVITAÇÃO EM 2+1 DIMENSÕES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

Co-orientador: Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

Vitória  
2011

**“GRAVITAÇÃO QUÂNTICA EM LAÇOS: MODELO  
DE CHERN-SIMONS E GRAVITAÇÃO EM 2+1  
DIMENSÕES”**

**RODRIGO MARTINS DE SIQUEIRA BARBOSA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Olivier Piguet  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Dr. Maria Cristina B. Abdalla Ribeiro  
IFT/UNESP

À minha mãe, meu pai e minha irmã... simplesmente insubstituíveis!

## Agradecimentos

São muitos aqueles que merecem agradecimento por me ajudarem a concluir o trabalho, e nomear todos aqui seria difícil... Gostaria de agradecer a minha família que sempre me apoiou em todas as circunstâncias, desde sempre! Cabe aqui um agradecimento aos meus vários colegas: Zui Oporto, Valdi Antonio, Diego Mendonça, Alex Rios, Ruan Couto, Luis Ivan, Ulisses Câmara, Gabriel Luchini e José André Lourenço. Ainda em tempo, gostaria de agradecer alguns professores que me ajudaram nesse empreendimento: Clisthenis, que sempre esteve presente durante as discussões dos assuntos do trabalho, dando idéias e sempre ajudando!; Galen, que me ajudou a aprender muitas coisas, e teve muita paciência corrigindo meu texto e tentando entender o trabalho, e me mostrando as dúvidas que ainda não sabia responder; e Ricardo C. Berrêdo, pelas longas conversas durante as aulas na graduação. Bons tempos! Um agradecimento especial merece o Prof. Olivier Piguet: Ele me orientou durante quatro anos (duas iniciações científicas e durante o mestrado). Durante este tempo, aprendi com ele grande parte do que sei sobre física, e adquiri profundo respeito pelo seu trabalho, seu conhecimento e pela pessoa que ele é: Paciente, gentil e sempre acessível e aberto para discussão. Muito obrigado!

Este trabalho foi realizado com o financiamento do CNPq.

“The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.” (Albert Einstein)

## Resumo

A teoria da Gravitação Quântica de Laços proporciona uma área de trabalho bastante interessante para se trabalhar com a quantização de teorias de calibre de forma geral. Em um trabalho de Witten, em 1989, é proposto que a teoria da Relatividade Geral em 2+1 dimensões pode ser descrita como uma teoria de calibre através de uma ação de Chern-Simons sob o grupo de Poincaré. O Propósito então passa a tratar de uma possível descrição quântica da gravitação em 2+1 dimensões através do modelo de Chern-Simons, e fazer uma discussão sobre os observáveis deste modelo.

## **Abstract**

The theory of Loop Quantum Gravity gives us an very interesting framework to handle the quantization of general gauge theories. On a work by Witten, 1989, it is proposed that General Relativity on 2+1 dimensions could be described as a gauge theory of a Chern-Simons action over a Poincaré gauge group. The purpose of this work then is to make a possible quantum description of gravitation on 2+1 dimensions by the Chern-Simons model, and make a discussion about the observables of this model.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão: Relatividade Geral</b>	<b>6</b>
2.1	Bases e Métrica . . . . .	7
2.2	Geodésica e Transporte Paralelo . . . . .	11
2.3	Derivada Covariante . . . . .	15
2.4	Equação de Einstein . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Formalismo de Primeira Ordem para a Gravitação</b>	<b>23</b>
3.1	Vielbein . . . . .	24
3.2	Conexão de Lorentz . . . . .	26
3.3	Tensores Invariantes . . . . .	28
3.4	Curvatura . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Gravitação em 2+1 Dimensões: Ação de Chern-Simons</b>	<b>33</b>
4.1	Sem Constante Cosmológica . . . . .	33
4.2	Com Constante Cosmológica . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Chern-Simons Abeliano</b>	<b>45</b>
5.1	Revisão: Mecânica Hamiltoniana . . . . .	45
5.2	Teoria de Chern-Simons Abeliana . . . . .	48
5.2.1	Quantização da Teoria Abeliana . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Quantização da Teoria de Chern-Simons não-abeliana</b>	<b>61</b>
6.1	Análise Canônica . . . . .	61
6.2	Espaço de Hilbert Cinemático . . . . .	64
6.3	Resolução dos vínculos . . . . .	69
6.3.1	Vínculo de Gauss . . . . .	69
6.3.2	Difeomorfismos em $z$ . . . . .	71

<b>7</b>	<b>Chern-Simons Quantizado: Discussão sobre os Observáveis</b>	<b>75</b>
7.1	Apêndice . . . . .	85
7.1.1	Variação da Ação de Wess-Zumino . . . . .	85
7.1.2	Variação da Ação do modelo- $\sigma$ . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Fixação de Gauge para a Gravitação com constante cosmológica: Relação com Chern-Simons</b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>104</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Desde o começo do século XX, os físicos têm se deparado com inúmeras questões relacionadas com a natureza dos fenômenos em pequena escala, como o comportamento das moléculas, átomos e escalas ainda menores como o comportamento dos elétrons sob a influência de campos magnéticos, etc. Todas estas questões resultaram na formulação de uma teoria que explicasse a dinâmica destes fenômenos de forma consistente: a Mecânica Quântica. Apesar de se consistir como uma teoria cujas bases de formulação se basearam exclusivamente em dados experimentais (ou seja, não partiram de princípios prévios), seu enorme sucesso experimental consolidou-a como uma das teorias fundamentais da natureza, desconhecendo limites de aplicabilidade, até o presente momento. Esta teoria prediz, de forma geral, que algumas das quantidades físicas conhecidas são quantizadas: seus valores permitidos são enumeráveis, e normalmente possuem um estado fundamental, de menor energia possível. Desta forma, a teoria quântica não só conseguiu prever com grande exatidão os dados experimentais, mas também eliminou problemas

do tipo Catástrofe Ultra-violeta e singularidades nas teorias, mas o preço a ser pago também foi grande: o conceito de determinismo, vigente na época de sua criação (da teoria quântica), teve de ser largamente revisto, com grandes consequências filosóficas e muita resistência inicial na aceitação da teoria entre os físicos.

Por outro lado acontecia, ao mesmo tempo, outra revolução, tão grande quanto a Mecânica Quântica, iniciada por Albert Einstein, através da teoria da Relatividade Geral. Esta, utilizando-se da recém-desenvolvida Geometria Diferencial, propôs-se a explicar os eventos gravitacionais de larga escala. Através do Princípio de Equivalência, Einstein propôs que a força gravitacional se comportava como uma força fictícia, pois uma aceleração num referencial reproduziria artificialmente a gravidade, de forma que não existem quaisquer experimentos capazes de diferenciar tal aceleração da força gravitacional original. Este princípio abriu caminho para que se sugerisse que a trajetória de uma partícula sob ação de uma força gravitacional fosse, na verdade, uma geodésica da variedade espaço-tempo. Estes conceitos também trouxeram grandes problemas filosóficos, que mudaram completamente o quadro de tempo absoluto que existia até o final do século XIX, e trouxe a tona novas questões sobre a simultaneidade de eventos, natureza do espaço-tempo, entre outros, e uma grande fauna de novos objetos físicos a serem estudados, como as cordas cósmicas, buracos negros, buracos de minhoca, entre muitos outros. A Relatividade Geral foi um dos grandes sucessos do século XX, com um grande número de experimentos também confirmando todas previsões, e ocupa também uma posição de teoria fundamental, pois é a melhor descrição que temos da interação gravitacional.

Uma tentativa natural seria de analisar fenômenos físicos que envolvessem estas duas teorias: um evento na proximidade da singularidade de um buraco negro, por exemplo, se encaixaria nas condições, já que um campo gravitacional muito forte atua numa região muito pequena do espaço, e nenhuma das interações pode ser desprezada. Porém as primeiras tentativas de se quantizar a Relatividade Geral foram largamente frustradas[1][2][3], devido ao número infinito de quantidades infinitas emergentes da tentativa.

O desenvolvimento da teoria quântica dos campos trouxe uma nova compreensão sobre o comportamento das partículas sub-atômicas. Obtivemos uma unificação de duas interações conhecidas em uma única conhecida como "Eletrofraca", restando unificar as interações forte e gravitacional. O desenvolvimento do modelo Eletrofraco foi possível graças ao desenvolvimento paralelo da teoria de Renormalização[5], onde as quantidades divergentes no ultravioleta são eliminadas através de uma redefinição dos parâmetros da teoria; o custo é que a cada tipo de divergência renormalizada é atribuído um parâmetro arbitrário. Este preço, para o caso Eletrofraco, é aceitável, uma vez que o número de tais parâmetros renormalizados é finito, basta fazer uma quantidade finita de experimentos para determiná-los, e a partir de então, é possível fazer previsões utilizando-se o modelo. Isto funciona muito bem para o caso Eletrofraco, porém, ao tentarmos aplicar a teoria de Renormalização na quantização da Relatividade Geral, obtemos uma quantidade infinita de parâmetros de renormalização, e isto constitui a falha de sua aplicação nesta teoria.

Mais recentemente, a continuidade da pesquisa em teoria de Renormalização mostrou um resultado bastante interessante: certas teorias de gauge

do tipo "topológicas" não somente são renormalizáveis mas também finitas, livres de divergências ultravioletas.. Apesar de interessante, isto não teria resultados práticos para a Relatividade Geral, até que Witten publicasse em 1989 um artigo mostrando que a Relatividade Geral, em 2+1 dimensões, era uma teoria de gauge tipo Chern-Simons sob o grupo de Poincaré. Paralelamente, começou a ganhar força uma teoria de quantização da Relatividade Geral conhecida por Gravitação Quântica em Laços (Loop Quantum Gravity)[6][7] [8][9], que consegue levar o formalismo de Quantização Canônica de Dirac para a Relatividade Geral, e conseguir resultados quantizados para as quantidades geométricas da Relatividade Geral: Área, Volume, etc.

Este trabalho consiste no estudo destas teorias de quantização da Relatividade Geral através das técnicas da Gravitação Quântica em Laços, aplicadas numa teoria de Chern-Simons não-abeliana, e suas relações com a Relatividade Geral em 2+1 dimensões. Os resultados mostrados nos capítulos 7 e 8, concernentes a discussão dos observáveis na teoria quântica de Chern-Simons e a fixação de gauge para a Relatividade Geral com constante cosmológica são novos.

No capítulo 2 fazemos uma breve revisão sobre a teoria da Relatividade Geral com a notação usual, de segunda ordem, partindo de resultados no espaço euclidiano que introduzem a notação utilizada e são generalizados, sem perda, para os casos não-euclidianos. No capítulo 3 introduzimos a Relatividade Geral como uma teoria de primeira ordem, utilizando a linguagem das formas diferenciais, e construímos os objetos necessários para se trabalhar, posteriormente, com a sua quantização. No capítulo 4 mostramos a relação

existente entre a Relatividade Geral e a teoria de Chern-Simons, e mostramos a ambiguidade existente para a definição da ação no caso com constante cosmológica não-nula. No capítulo 5 revisamos o formalismo canônico de quantização para sistemas mecânicos vinculados, e aplicamos este formalismo na teoria de Chern-Simons abeliana. No capítulo 6 descrevemos a quantização da teoria de Chern-Simons não-abeliana, restringindo nossa variedade a um cilindro. No capítulo 7 discutimos sobre os observáveis que podem ser construídos com a quantização da teoria no capítulo 6. No capítulo 8 demonstramos que a fixação de gauge da Relatividade Geral com uma constante cosmológica positiva consegue trazer à teoria os métodos aplicados no capítulo 6, onde o grupo de gauge é compacto.

## Capítulo 2

# Revisão: Relatividade Geral

Neste capítulo faremos uma breve revisão da teoria da Relatividade Geral, utilizando espaços euclidianos como base para definição do formalismo, que poderá ser estendido posteriormente para espaços não-euclidianos sem perda.

A Relatividade Geral é uma teoria de gravitação, cujo princípio fundamental consiste no “Princípio de Equivalência”, que passamos a enunciar.

Um objeto, na ausência de forças externas, deve se comportar como uma partícula livre movendo-se conforme a cinemática prescrita pela Relatividade Restrita. Poderíamos incluir forças externas, e a dinâmica ainda assim seria descrita pela extensão relativística das equações de Newton, com a condição que estas sejam forças reais, no sentido que não são forças de origem não-inercial. Este, porém, não corresponde ao caso da força gravitacional.

Forças não-inerciais, ao contrário das forças ditas reais, dependem do referencial em questão. Considere o exemplo de um elevador: um observador em seu interior, ao notar que a força Peso deixa de atuar ao seu redor, é



incapaz de aferir se a origem deste fenômeno decorre do fato do cabo do elevador ter sido cortado, e portanto, este se encontra em queda livre, ou se por algum motivo a força gravitacional deixou de atuar sobre o elevador. O “Princípio da Equivalência” então afirma que não existe experimento capaz de distinguir dentre estes dois eventos e, portanto, devem ser considerados equivalentes.

## 2.1 Bases e Métrica

Em relatividade restrita, o espaço vetorial das quantidades físicas é isomorfo a  $\mathbb{R}^4$ , equipado com uma “métrica”  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , responsável por subir ou descer os índices dos tensores. Para descrever a relatividade geral, precisamos definir mais precisamente estes objetos, para que não haja perda de generalidade através de hipóteses desnecessárias.

Consideremos uma partícula se movendo sob ação de uma força gravitacional. Como já citado, dependendo do referencial em que um observador se encontra, a medida da força gravitacional será diferente. Se queremos impor que a medição seja independente do referencial escolhido, devemos considerar outra forma de atuação da gravidade: ao invés de atuar diretamente na trajetória da partícula, ela atua deformando o espaço-tempo, de forma que a partícula percorra uma geodésica.

Se o espaço-tempo é curvo, perdemos a noção que tínhamos de espaço vetorial, no formato que havia na relatividade restrita. Portanto, precisamos definir um objeto matemático que descreva este espaço-tempo, e recuperar o conceito de espaço vetorial. Baseando-nos no Princípio da Equivalência,

afirmamos que numa região do espaço-tempo onde os efeitos gravitacionais são pequenos, podemos aproximar o espaço-tempo por um espaço-tempo de Minkowski, e utilizar os conceitos da relatividade restrita. De forma similar, tomando um ponto (evento)  $P$  do espaço-tempo, e analisando seu entorno, de maneira que a curvatura deste espaço-tempo seja desprezível, podemos supor que neste plano o espaço-tempo é do tipo Minkowski. Concluimos que o espaço-tempo pode ser considerado como rede muito refinada, onde cada célula é localmente um espaço de Minkowski. Esta pode ser considerada uma definição para o objeto que chamamos de “Variedade”: Uma união de espaços do tipo  $\mathbb{R}^n$ , definido de forma que haja uma certa continuidade entre estes espaços individuais. Matematicamente, uma variedade  $\mathcal{M}$  pode ser descrita em termos de um conjunto espaços  $\{V_n\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{M} = \cup_k V_k, \quad (2.1)$$

de forma que, dado  $i$ ,  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  para algum  $j$ , com  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Ainda considerando estes espaços  $V_i$  e  $V_j$ , vamos definir um mapeamento da variedade nestes espaços:  $\psi_i$  mapeando uma região da variedade no espaço vetorial:  $\psi_i : \mathcal{M} \mapsto V_i$ , e, da mesma forma,  $\psi_j : \mathcal{M} \mapsto V_j$ , numa região diferente da variedade. Na região da interseção entre esses dois espaços vetoriais, podemos nos referenciar a um vetor em  $V_i$  no espaço  $V_j$ , através da composição dos mapeamentos:  $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ . Este tipo de ligação entre os espaços  $V_k$ , uma vez que definimos uma regra  $\psi$  que cubra todos espaços  $V_k$ , pode ser definida como um sistema de coordenadas  $x^\mu$  sobre a variedade  $\mathcal{M}$ , de forma que um ponto  $P$  da variedade seja mapeado num vetor  $x^\mu$  em  $V_k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para definirmos um vetor nesta variedade, precisamos de um espaço vetorial apropriado para descrevê-lo. Uma escolha natural para um espaço vetorial, que localmente seja Minkowski, seria o espaço tangente associado a um ponto  $P$  da variedade. Neste espaço vetorial, uma base natural seria dada pelos vetores tangentes  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  no sistema de coordenadas  $x^\mu$ . Assim, um vetor  $v = (v^1, \dots, v^n)$  define um operador  $\sum_\mu v^\mu (\partial/\partial x^\mu)$ , e vice-versa.

É necessário notar que a base  $\{\partial/\partial x^\mu\}$  depende do mapeamento  $x^\mu$  feito; um mapeamento diferente produz uma base diferente. As duas, porém, estão relacionadas: Considere dois sistemas de coordenadas diferentes  $x$  e  $x'$ . As bases relativas a estes dois sistemas coordenados se relacionam pela regra da cadeia:

$$X'_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X_\nu, \quad (2.2)$$

onde  $X_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$  corresponde ao que chamamos de “Base Coordenada”. Desta forma, um vetor se transforma sob mudanças de sistema de coordenadas na forma

$$v'^\mu = \sum_{\nu=1}^n v^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.3)$$

Para definirmos um tensor, de forma geral, precisamos definir um espaço dual ao espaço  $V$ . Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre os números reais. No nosso caso, podemos tomar  $V$  como o espaço tangente  $T_p$  no ponto  $P$  da variedade. Considere a coleção  $V^*$  dos mapeamentos lineares  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Se definimos adição e produto escalar de tais mapeamentos

lineares da maneira usual, obtemos uma estrutura natural de um espaço vetorial em  $V^*$ . Chamamos  $V^*$  de “Espaço Dual” a  $V$ , e os elementos de  $V^*$  são chamados de “Vetores Duais”. Se  $v_1, \dots, v_n$  é uma base de  $V$ , podemos definir elementos  $v^{*1}, \dots, v^{*n} \in V^*$ , que serão uma base de  $V^*$ , por

$$v^{*\mu}(v_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (2.4)$$

Pode-se mostrar que o espaço dual a  $V^*$  é isomorfo a  $V$ , e assim o identificamos:  $(V^*)^* = V$ . Com isto, podemos definir um tensor. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita, e seja  $V^*$  seu espaço dual. Um tensor  $T$ , do tipo  $(k, l)$  em  $V$  é um mapeamento multilinear

$$T : V \times \dots(k \text{ vezes})\dots \times V \times V^* \times \dots(l \text{ vezes})\dots \times V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Em outras palavras, dado  $k$  vetores duais e  $l$  vetores normais,  $T$  produz um número real de forma que, se fixamos todos menos um dos vetores ou dos vetores duais, ele será um mapeamento linear no vetor restante. Usualmente denotamos a base no espaço dual  $V^*$  como  $\{dx^\mu\}$ , e chamamos as componentes  $v_\mu$  de um vetor  $v$  no espaço dual como “covariantes”:  $v = v_\mu dx^\mu$ , e as componentes  $v^\mu$  do vetor  $v$  no espaço  $V$  chamamos de “contravariantes”:  $v = v^\mu (\partial/\partial x^\mu)$ .

Utilizando (2.4) e (2.3), obtemos a lei de transformação dos vetores no espaço dual. Seja  $\omega_\mu$  um vetor de  $V^*$ . Então, sob uma troca de coordenadas:

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \omega_\mu. \quad (2.6)$$

Em geral, as componentes de um tensor  $T$  de tipo  $(k, l)$  se transformam como:

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_l=1}^n \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.7)$$

Vamos agora introduzir a noção de métrica. Intuitivamente, uma métrica deveria descrever a “distância quadrática infinitesimal” associada a deslocamentos infinitesimais, que são no nosso caso os próprios vetores tangentes.

Assim, já que “distância quadrática infinitesimal” deve ser quadrática no deslocamento, uma métrica  $g$  deve ser um mapeamento linear de  $V \times V$  nos reais, ou seja, um tensor do tipo  $(0,2)$ . Ainda, exigimos que a métrica seja simétrica e não-degenerada. Em outras palavras, uma métrica é um produto interno no espaço tangente em cada ponto. Em uma base coordenada, podemos expandir a métrica  $g$  em termos de suas componentes  $g_{\mu\nu}$ :

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (2.8)$$

## 2.2 Geodésica e Transporte Paralelo

De forma geral, uma geodésica corresponde ao caminho mais curto entre dois pontos da variedade. No caso Euclidiano, a geodésica entre dois pontos corresponde simplesmente a uma linha reta no plano cartesiano, ligando os pontos. Podemos construir uma extensão deste conceito para o caso em que a variedade é curva.

Seja  $r(s)$  os pontos de uma curva, parametrizada por  $s$ , e  $\lambda = \frac{dr}{ds}$  o vetor

tangente à curva. Definimos uma linha reta numa variedade curva como curvas cujos vetores tangentes  $\lambda$  são paralelos:

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0. \quad (2.9)$$

Dadas coordenadas curvilíneas  $x^\mu$ , definimos uma base natural  $\{X_\mu\} \equiv \{\partial/\partial x^\mu\}$ , de forma que, dada uma função  $f$  diferenciável, uma vetor  $k$  escrito nessa base é dado por

$$k \cdot f = k^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (2.10)$$

Como  $\lambda$  é um vetor, pode ser escrito na base covariante  $\lambda = \lambda^\mu X_\mu$ , e substituindo na equação da tangente, obtemos

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d}{ds}(\lambda^\mu X_\mu) = \frac{d\lambda^\mu}{ds} X_\mu + \lambda^\mu \frac{dX_\mu}{ds} = 0. \quad (2.11)$$

Podemos obter uma relação funcional para o termo  $dX_\mu/ds$ . Considere a quantidade

$$X_\mu \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \omega_\mu. \quad (2.12)$$

Podemos utilizar a regra da cadeia para escrever

$$\frac{d\omega_\mu}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.13)$$

como a função  $f$  considerada é qualquer, temos a relação funcional

$$\frac{d}{ds}X_{\mu} \cdot = \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} X_{\mu} \cdot = \dot{x}^{\nu} \partial_{\nu} X_{\mu} \cdot . \quad (2.14)$$

Podemos escrever a quantidade  $\partial_{\nu} X_{\mu}$  na base  $X_{\mu}$ , através da relação

$$\partial_{\mu} X_{\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} X_{\rho}, \quad (2.15)$$

onde a quantidade  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  é um coeficiente, que será depois identificado como "Conexão de Christoffel". Substituindo na equação (2.11), obtemos

$$(\dot{\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \lambda^{\nu} \dot{x}^{\rho}) X_{\mu} = 0. \quad (2.16)$$

E substituindo a relação

$$\lambda^{\mu} = \dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \quad (2.17)$$

obtemos a forma final da equação da geodésica

$$\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \frac{du^{\nu}}{ds} \frac{du^{\rho}}{ds} = 0. \quad (2.18)$$

Observe que, se o espaço é euclidiano,  $\partial_{\mu} X_{\nu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ , e a solução para a equação da geodésica resulta numa equação para uma reta, como era esperado.

Podemos escrever o coeficiente  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  em função da métrica. Supondo que a variedade tenha torsão nula<sup>1</sup>, notamos que os índices inferiores são

---

<sup>1</sup>O conceito de torsão é introduzido no capítulo 2 (eq. 30).

simétricos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} X_{\rho} = \partial_{\nu} X_{\mu} = \frac{d^2 r}{dx^{\nu} dx^{\mu}} = \frac{d^2 r}{du^{\mu} du^{\nu}} = \partial_{\mu} X_{\nu} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} X_{\rho}, \quad (2.19)$$

utilizando a definição da métrica:

$$g_{\mu\nu} = X_{\mu} \cdot X_{\nu} \implies \partial_{\rho} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} X_{\sigma} \cdot X_{\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} X_{\mu} \cdot X_{\sigma}, \quad (2.20)$$

alternando ciclicamente os índices, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_{\mu} g_{\nu\rho} &= \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} + \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\nu\sigma}, \\ \partial_{\nu} g_{\rho\mu} &= \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\rho\sigma}, \\ \partial_{\rho} g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\mu\sigma}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira, obtemos

$$2\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\sigma\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\nu} g_{\rho\mu}. \quad (2.22)$$

Basta contrair a equação com com  $g^{\sigma\mu}$  para obter:

$$\Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_{\rho} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\nu} g_{\rho\mu}). \quad (2.23)$$

Este objeto é chamado de “Conexão de Christoffel”. Ele é responsável pela transformação dos tensores entre pontos diferentes da variedade de forma a manter suas características tensoriais.

É importante salientar que, embora tenhamos utilizado a hipótese de



Torsão nula para esta demonstração, seu resultado é o mesmo para o caso onde a Torsão é não-nula. Para uma demonstração mais completa, nos referimos a literatura [11].

Com estes resultados obtidos, introduzimos o conceito de “Transporte Paralelo”. Este consiste em transportar um vetor (do espaço tangente) de um ponto da variedade para outro sem alterações em seu comprimento e direção.

Seja uma curva  $\gamma$  na variedade, parametrizada por um parâmetro  $t_0 \leq t \leq t_1$ , cuja posição de cada ponto da curva é dada por  $u^\mu(t)$ . Considere, associado à curva, um vetor  $\lambda^\mu(t)$ , com a condição que  $\lambda^\mu(t_0) = \lambda_0^\mu$ .

Desejamos efetuar um transporte paralelo do vetor  $\lambda(t)$  entre dois pontos da curva  $\gamma$ . Procedemos de forma análoga à feita para a geodésica.

Transportar paralelamente um vetor se traduz como impôr  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  ao longo da curva, e de maneira completamente análoga, obtemos

$$\dot{\lambda}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu \dot{u}^\rho = 0, \quad (2.24)$$

que descreve o transporte paralelo do vetor  $\lambda$ , com a condição inicial  $\lambda(t = t_0) = \lambda_0$ .

## 2.3 Derivada Covariante

O conceito de transporte paralelo, desenvolvido na seção passada, é importante para avaliar quantidades tensoriais que se encontram em diferentes pontos (do espaço tangente) da variedade. Em particular, podemos analisar

variações dessas quantidades entre pontos de diferença infinitesimal na variedade, e esperamos que esta variação esteja relacionada com a derivada desta quantidade. Construimos então o conceito de Derivada Absoluta e Derivada Covariante.

Considere um ponto  $P$  da variedade com coordenadas generalizadas  $x^\mu$ , e um ponto  $Q$  de coordenadas  $x^\mu + \delta x^\mu$  de forma que estes pontos sejam bastante próximos:  $\delta x^\mu \ll 1$ .

Seja  $\gamma$  uma curva que contenha os pontos  $P$  e  $Q$ , parametrizada por um parâmetro  $t : \gamma = \gamma(t)$ . Considere que  $P$  esteja associado ao valor  $t = u$ , e o ponto  $Q$  associado a  $t = u + \delta u$ .

Associado ao ponto  $P$  temos um vetor  $\lambda^\mu$ , e, ao ponto  $Q$  um vetor  $\bar{\lambda}^\mu \equiv \lambda^\mu + \delta \lambda^\mu$ , que corresponde ao transporte paralelo de  $\lambda^\mu$  sobre a curva  $\gamma$ . Dado o transporte infinitesimal, podemos aproximar a variação infinitesimal por

$$\delta \lambda^\mu \approx \frac{d\lambda^\mu}{du} \delta u, \quad (2.25)$$

e, utilizando a equação do transporte paralelo (2.24), obtemos que

$$d\lambda^\mu/du = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu dx^\rho/du. \quad (2.26)$$

Substituindo esses resultados, obtemos que

$$\bar{\lambda}^\mu \approx \lambda^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu \frac{dx^\rho}{du} \delta u \approx \lambda^\mu - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu \delta x^\rho. \quad (2.27)$$

Este resultado mostra que a conexão de Christoffel tem importante papel na comparação de quantidades tensoriais entre pontos infinitesimalmente

próximos. Se tentamos ignorar o transporte paralelo e comparamos simplesmente os vetores  $\lambda^\mu$  e  $\bar{\lambda}^\mu$ , teremos problemas, como mostramos abaixo.

Por definição, um vetor  $\lambda^\mu$  se transforma sob transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos) na forma

$$\lambda'^\mu = \chi_\nu^\mu \lambda^\nu, \quad (2.28)$$

onde  $\chi_\nu^\mu$  representa uma transformação linear geral,  $\chi_\nu^\mu = \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ , na base  $x^\mu$ . Para tratarmos da cinemática da teoria, precisamos lidar com velocidades, que são derivadas de vetores com relação a um parâmetro afim. Se tentamos verificar se a velocidade  $\lambda^\mu$  é um vetor, obtemos

$$\frac{d\lambda'^\mu}{du} = \frac{d}{du}(\chi_\nu^\mu \lambda^\nu) = \chi_\nu^\mu \frac{d\lambda^\nu}{du} + \frac{d\chi_\nu^\mu}{du} \lambda^\nu. \quad (2.29)$$

Portanto, verificamos que o termo extra  $d\chi_\nu^\mu/du$  na transformação desqualifica  $\lambda^\mu$  como uma quantidade vetorial. O motivo para a existência deste termo decorre que, quando executamos a derivação

$$\frac{d\lambda^\mu}{du} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\lambda^\mu(u + \delta u) - \lambda^\mu(u)}{\delta u} \quad (2.30)$$

estamos comparando vetores em pontos diferentes da variedade sem executar o transporte paralelo deles, ignorando totalmente a curvatura do espaço, representada pelo símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ .

Para corrigir esta falha, devemos modificar a derivada para levar o trans-

porte paralelo do vetor em conta:

$$\frac{\lambda^\mu(u + \delta u) - \bar{\lambda}^\mu}{\delta u} = \frac{d\lambda^\mu}{du} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu(u) \frac{\delta x^\rho}{\delta u}, \quad (2.31)$$

e quando tomamos o limite  $\delta u \rightarrow 0$ , obtemos

$$\frac{\mathbf{D}\lambda^\mu}{du} = \frac{d\lambda^\mu}{du} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu \frac{dx^\rho}{du}. \quad (2.32)$$

Note que para fazer o transporte paralelo, precisamos definir uma curva  $\gamma(u)$  para realizá-lo. Este tipo de derivação, através de um parâmetro afim sobre uma curva, é denominada de “Derivação Absoluta”, e pode ser facilmente verificado que este se comporta como vetor sobre os difeomorfismos:

$$\left( \frac{d\lambda^{\mu'}}{du} + \Gamma_{\nu'\rho'}^{\mu'} \lambda^{\nu'} \frac{dx^{\rho'}}{du} \right) = \chi_{\sigma'}^{\mu'} \left( \frac{d\lambda^\sigma}{du} + \Gamma_{\kappa\eta}^\sigma \lambda^\kappa \frac{dx^\eta}{du} \right). \quad (2.33)$$

Podemos utilizar esta noção de derivada absoluta para definir a derivada de um campo vetorial em uma determinada região do espaço.

Considere um campo vetorial  $\lambda^\mu = \lambda^\mu(x^\nu)$  definido em uma certa região espacial  $V$ , com coordenadas generalizadas  $x^\mu$ . Se  $\gamma(u)$  é uma curva parametrizada por  $u_0 \leq u \leq u_1$ , contida no interior de  $V$ , podemos restringir  $\lambda^\mu(x^\nu)$  a  $\gamma(u)$ , e definir sua derivada absoluta através da expressão 2.31.

Porém, nota-se que  $\dot{\lambda}^\mu = \frac{\partial \lambda^\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu$ , e podemos escrever

$$\frac{\mathbf{D}\lambda^\mu}{du} = \left( \frac{\partial \lambda^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \lambda^\nu \right) \dot{x}^\rho. \quad (2.34)$$

A expressão em parênteses não depende do caminho  $\gamma(u)$ , mas apenas

das componentes de  $\lambda^\mu$  e de suas derivadas no ponto  $x^\nu$ .

Note que esta expressão corresponde exatamente a lei de transformação de um tensor do tipo (1,1):

$$\left(\partial_{\rho'}\lambda^{\mu'} + \Gamma_{\nu'\rho'}^{\mu'}\lambda^{\nu'}\right) = \chi_{\sigma'}^{\mu'}\chi_{\rho'}^{\sigma'}\left(\partial_{\eta}\lambda^{\sigma} + \Gamma_{\eta\kappa}^{\sigma}\lambda^{\kappa}\right), \quad (2.35)$$

onde definimos a “Derivada Covariante” do campo tensorial  $\lambda^i$  através da expressão

$$D_{\rho}\lambda^{\mu} = \partial_{\rho}\lambda^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}\lambda^{\nu}. \quad (2.36)$$

Também é usual denotar a derivada covariante com “;” no subíndice do campo, como

$$D_{\rho}\lambda^{\mu} \equiv \lambda^{\mu}_{;\rho} \quad (2.37)$$

Para finalizar, é interessante notar que a derivada covariante da métrica é dada por

$$D_{\rho}g_{\mu\nu} = \partial_{\rho}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}g_{\nu\sigma} = 0 \quad (2.38)$$

devido às igualdades em (2.21). Esta propriedade do tensor métrico garante que o produto interno entre vetores é preservado durante o transporte paralelo:

$$\frac{\mathbf{D}(g_{\mu\nu}\lambda^{\mu}\mu^{\nu})}{du} = \frac{\mathbf{D}(g_{\mu\nu})}{du}\lambda^{\mu}\mu^{\nu} + g_{\mu\nu}\frac{\mathbf{D}(\lambda^{\mu})}{du}\mu^{\nu} + g_{\mu\nu}\lambda^{\mu}\frac{\mathbf{D}(\mu^{\nu})}{du} \quad (2.39)$$

onde  $\mathbf{D}(\lambda^\mu)/du = \mathbf{D}(\mu^\nu)/du = 0$  pois os vetores são transportados paralelamente. Isto garante que o comprimento e o ângulo entre vetores seja preservado durante o transporte paralelo.

## 2.4 Equação de Einstein

Para concluir nossa revisão, vamos definir o tensor de curvatura, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e introduzir as equações de Einstein.

Uma observação importante consiste em notar que as derivadas covariantes de ordem superior a 1 dependem da ordem em que são tomadas. Considere um campo  $\lambda_\mu$ , e sua derivada covariante, dada por:

$$D_\nu \lambda_\mu = \partial_\nu \lambda_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \lambda_\rho \quad (2.40)$$

se derivamos novamente, teremos

$$\begin{aligned} D_\rho(D_\nu \lambda_\mu) &= \partial_\rho(D_\nu \lambda_\mu) - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma(D_\nu \lambda_\sigma) - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma(D_\sigma \lambda_\mu) \\ &= \partial_\rho \partial_\nu \lambda_\mu - (\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \lambda_\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\rho \lambda_\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\eta (\partial_\nu \lambda_\eta - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \lambda_\sigma) \\ &\quad - \Gamma_{\nu\rho}^\eta (\partial_\eta \lambda_\mu - \Gamma_{\mu\eta}^\sigma \lambda_\sigma) \end{aligned} \quad (2.41)$$

se permutamos os índices  $\mu$  e  $\nu$  nestas equações, e subtraímos uma equação da outra, vamos obter

$$D_\nu D_\rho \lambda_\mu - D_\rho D_\nu \lambda_\mu = [D_\nu, D_\rho] \lambda_\mu = R_{\mu\nu\rho}^\sigma \lambda_\sigma, \quad (2.42)$$

onde

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\eta}\Gamma_{\eta\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\eta\rho}^{\sigma}. \quad (2.43)$$

O tensor  $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}$  é conhecido como “Tensor de Curvatura” (ou “tensor de Riemann-Christoffel” ou simplesmente “tensor de Riemann”). Note que este tensor, possuindo 4 índices terá  $D^4$  componentes, onde  $D$  é a dimensão da variedade. Levando em conta as simetrias deste tensor, inclusive a propriedade cíclica

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} + R_{\nu\rho\mu}^{\sigma} + R_{\rho\mu\nu}^{\sigma} = 0, \quad (2.44)$$

a quantidade de componentes independentes é reduzida para  $N^2(N^2 - 1)/12$ .

Através do tensor de Riemann, podemos construir outros dois tensores relacionados: o “tensor de Ricci”, contraindo dois índices :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma}^{\sigma}, \quad (2.45)$$

e o “escalar de Ricci”, contraindo o tensor de Ricci com a métrica:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Com estas quantidades, temos em mãos as ferramentas necessárias para escrever a equação de Einstein, que descreve a dinâmica do espaço-tempo. A idéia é de relacionar diretamente gravidade à presença de matéria, na forma

que a presença de matéria deforma o espaço-tempo:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

mas, como o próprio Einstein notou, esta equação não reproduz alguns efeitos esperados, como a curvatura da luz, e nem obedece algumas leis de conservação, como  $D_\mu T_{\nu\rho} = 0$  (Conservação da Energia e Momento). Pouco tempo depois, ele próprio sugeriu a modificação que reproduzia corretamente estes efeitos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.47)$$

e a constante  $k$  pode ser resolvida tomando o limite newtoniano clássico em baixas velocidades, onde obtemos o valor  $8\pi G/c^4$ . Portanto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

corresponde a equação de Einstein no formalismo métrico, e gera a dinâmica do espaço-tempo na presença de matéria. Note que esta é uma equação que depende da métrica e de suas derivadas, sendo uma equação diferencial parcial de segunda ordem no espaço e segunda ordem no tempo.



## Capítulo 3

# Formalismo de Primeira Ordem para a Gravitação

Um dos postulados de Einstein para descrever a teoria da Relatividade Geral é o Princípio da Equivalência, já citado no primeiro capítulo: pode-se confundir gravitação com a aceleração de um referencial, e, pensando ao contrário, um ambiente sem gravidade pode ser confundido com um referencial não-acelerado, onde as regras da relatividade restrita são válidas. Dado um certo ponto  $P$  de uma variedade  $D$ -dimensional, quanto mais próximo de uma vizinhança deste ponto analisamos, mais verdadeiro este princípio (da Equivalência) se torna, dependendo do nível de precisão necessário para efetuar as medidas. Uma boa aproximação, neste sentido, é o espaço tangente do ponto em questão, pois ele carrega consigo a simetria do grupo de Lorentz, e é local, no sentido que cada ponto da variedade possui seu próprio espaço tangente.

### 3.1 Vielbein

Se a distância dos pontos vizinhos a  $P$  for suficientemente pequena, podemos mapear pontos da variedade em vetores no espaço tangente. Dado um certo sistema de coordenadas curvilíneas no espaço tangente, podemos construir uma matriz jacobiana

$$\frac{dz^a}{dx^\mu} = e_\mu^a, \quad (3.1)$$

onde aqui  $x^\mu$  são as coordenadas do ponto na variedade e  $z^a$  são coordenadas no espaço tangente,  $a = 1, \dots, D$ ,  $\mu = 1, \dots, D$ . É suficiente considerarmos pontos infinitesimalmente próximos na variedade: se dois pontos na variedade têm uma distância  $dx^\mu$  entre eles, a distância entre seus respectivos mapeamentos no espaço tangente é dado por

$$dz^a = e_\mu^a(x) dx^\mu. \quad (3.2)$$

O objeto  $e_\mu^a(x)$  pode ser considerado como uma forma diferencial, e recebe o nome de vielbein. Ele possui características tensoriais, sendo covariante sob difeomorfismos em  $\mathcal{M}$

$$e_\mu^{\prime a} = \frac{\partial z^{\prime a}}{\partial z^b} e_\mu^b, \quad (3.3)$$

e contravariante sob transformações de Lorentz no espaço tangente  $T_p(x)$

$$e'^a{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e^a{}_\nu. \quad (3.4)$$

Esta correspondência nos permite referenciar tensores tanto na variedade  $\mathcal{M}$  quanto no espaço tangente. Consideremos um tensor  $\Pi^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(x)$  : seu respectivo representante no espaço tangente é dado por

$$\Pi^{a_1a_2\dots a_n}(x) = e_{\mu_1}^{a_1}(x)e_{\mu_2}^{a_2}(x)\dots e_{\mu_n}^{a_n}(x)\Pi^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(x), \quad (3.5)$$

o vielbein atua transformando índices do espaço-tempo em índices de Lorentz, e vice-versa (através da sua inversa,  $e_a^\mu(x)$ ).

Podemos utilizar as características do espaço tangente para reproduzir a métrica na variedade: No espaço tangente, a métrica  $ds^2$  é dada através da relação

$$ds^2 = \eta_{ab}dz^a dz^b, \quad (3.6)$$

onde  $\eta_{ab}$  corresponde à métrica  $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$  e podemos então utilizar (3.2) para escrever que

$$ds^2 = \eta_{ab}e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.7)$$

Portanto, ganhamos uma representação da métrica em termos do vielbein

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}e_\mu^a(x)e_\nu^b(x). \quad (3.8)$$

Vale notar que o vielbein carrega toda informação da métrica, pois esta é dada pela composição dos vielbeins; mas o inverso não é válido, pois existe uma infinidade de maneiras de definir os vielbeins de forma que descrevem a mesma métrica: em particular, rotações na base do espaço tangente gerariam coeficientes  $e_\mu^a$  diferentes, mas diretamente relacionados à mesma métrica na variedade. Isto ocorre porque o vielbein carrega mais informação em si do que a métrica: o vielbein carrega consigo  $D^2$  componentes, enquanto a métrica possui  $D(D + 1)/2$  componentes: as componentes a mais surgem do fato de que as rotações no espaço tangente estão sendo levadas em conta no vielbein, enquanto estas mesmas devem ser invisíveis para a métrica (a métrica não enxerga o que acontece no espaço tangente).

## 3.2 Conexão de Lorentz

Temos em cada ponto da variedade um espaço tangente associado, constituindo um fibrado sobre a variedade. Em cada espaço tangente, devemos ter transformações locais de Lorentz associadas, e portanto as transformações de Lorentz devem depender de  $x$ :  $\Lambda \equiv \Lambda(x)$ . Da mesma forma, queremos definir uma derivada no espaço tangente de um tensor  $\phi$ ,  $D\phi$ , de forma que este carregue as mesmas características tensoriais de  $\phi$ . Para isto, devemos compensar o fato de que cada espaço tangente associados a pontos diferentes são espaços vetoriais independentes, inserindo um termo que chamamos de “conexão de spin” dependente de  $x$ ,  $\omega_{b\mu}^a(x)$ , que transforma vetores de um espaço tangente em vetores de um espaço tangente associado a outro ponto diferente da variedade. Considere um campo tensorial  $\phi^a(x)$  que se

transforma como vetor sob transformações de Lorentz. Então, sua derivada covariante é definida por:

$$D_\mu \phi^a(x) = \partial_\mu \phi^a(x) + \omega_{b\mu}^a(x) \phi^b(x), \quad (3.9)$$

de forma que a conexão de spin se transforme também como um vetor de Lorentz, na forma

$$\omega_{b\mu}^a \rightarrow \omega'_{b\mu}{}^a = (\Lambda^{-1} \partial_\mu \Lambda + \Lambda^{-1} \omega_\mu \Lambda)_b^a = \Lambda^a_c \partial_\mu \Lambda_b^c + \Lambda^a_c \omega_{d\mu}^c \Lambda_b^d. \quad (3.10)$$

De forma similar à conexão de Christoffel, a conexão de spin é responsável pelo transporte paralelo de vetores entre espaços tangentes, cujos pontos ligados a variedade estão infinitesimalmente próximos:  $T_x$  e  $T_{x+dx}$ . O transporte paralelo de um campo  $\phi^a$  entre pontos  $x$  e  $x + dx$  é dado por

$$\bar{\phi}^a = \phi^a(x + dx) + dx^\mu \omega_{b\mu}^a(x) \phi^b(x) \quad (3.11)$$

$$= \phi^a(x) + dx^\mu (\partial_\mu \phi^a(x) + \omega_{b\mu}^a(x) \phi^b(x)) \quad (3.12)$$

$$:= \phi^a(x) + dx^\mu D_\mu \phi^a(x). \quad (3.13)$$

Portanto, a derivada covariante mede as mudanças nas coordenadas do tensor ocorridas durante o transporte paralelo entre pontos vizinhos

$$dx^\mu D_\mu \phi^a = \bar{\phi}^a - \phi^a \quad (3.14)$$

$$= dx^\mu (\partial_\mu \phi^a + \omega_{b\mu}^a(x) \phi^b(x)). \quad (3.15)$$

Note que as propriedades afins do espaço são carregadas na conexão de spin

$\omega_{b\mu}^a(x)$ , e esta é, a priori, totalmente arbitrária e independente da métrica.

### 3.3 Tensores Invariantes

O Grupo de Lorentz,  $SO(D-1,1)$ , possui dois tensores invariantes: a métrica de Minkowski  $\eta_{ab}$ , e o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita dado por  $\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}$ . Como são invariantes sobre o grupo de Lorentz, devem ter a mesma representação em todos espaços tangentes fibrados, de onde concluímos que sua derivada é nula. Utilizamos isso para concluir

$$0 = d\eta_{ab} = D\eta_{ab} \quad (3.16)$$

$$= d\eta_{ab} + \omega_b^c \eta_{ac} + \omega_a^c \eta_{cb} = 0, \quad (3.17)$$

de onde obtemos a condição (usamos a métrica  $\eta_{ab}$  para subir e descer os índices de Lorentz):

$$\omega_{ab\mu} = -\omega_{ba\mu} \quad (3.18)$$

e isto impõe que apenas existirão componentes antissimétricas na conexão de spin: isto reduz drasticamente a quantidade de componentes do tensor, que passa a ter  $D^2(D-1)/2$  componentes, em contraste com a conexão de Christoffel, que tem  $D^2(D+1)/2$  componentes: isto se deve ao fato de que a conexão de Christoffel não é função apenas da conexão de spin, mas também do vielbein<sup>1</sup>  $\Gamma \equiv \Gamma(e, \omega)$ .

É conveniente notar que, como foi definido, o vielbein e a conexão de spin

---

<sup>1</sup>para mais detalhes, ver [26].

são escritos como

$$e^a(x) = e^a_\mu(x)dx^\mu, \quad (3.19)$$

$$\omega^a_b(x) = \omega^a_{b\mu}(x)dx^\mu. \quad (3.20)$$

Estes objetos são formas diferenciais e, por definição, são independentes de uma escolha particular de coordenadas. Pode-se mostrar também que o conjunto destes objetos compostos com suas derivadas exteriores formam os blocos básicos para construção de uma teoria de calibre.

### 3.4 Curvatura

A derivada exterior de uma forma é dada através do operador  $dx^\mu \partial_\mu \wedge$ , e atuando numa  $p$ -forma  $\gamma_p$  resulta numa  $(p+1)$ -forma  $d\gamma_p$ . Se tentamos aplicar a derivada exterior mais uma vez, obtemos

$$d(d\gamma_p) = d^2\gamma_p = 0. \quad (3.21)$$

Isto decorre de que, embora as derivadas parciais comutem  $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ , as 1-formas são anti-comutativas  $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ .

Como resultado, a segunda derivada covariante acaba não sendo um operador diferencial, mas sim um operador puramente algébrico, relacionado a curvatura. Seja um campo  $\phi^a$ , e tomemos a segunda derivada covariante

dele:

$$D^2\phi^a = D(d\phi^a + \omega_b^a \wedge \phi^b) \quad (3.22)$$

$$= d(d\phi^a + \omega_b^a \wedge \phi^b) + \omega_b^a \wedge (d\phi^b + \omega_c^b \wedge \phi^c) \quad (3.23)$$

$$= d^2\phi^a + d\omega_b^a \wedge \phi^b - \omega_b^a \wedge d\phi^b + \omega_b^a \wedge d\phi^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b \wedge \phi^c \quad (3.24)$$

$$= (d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c)\phi^b. \quad (3.25)$$

O objeto entre parênteses é definido como sendo a curvatura da conexão de spin

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c. \quad (3.26)$$

É interessante notar a similaridade com a curvatura definida no capítulo 1, dada por

$$[D_a, D_b]\lambda_c = R^d{}_{abc}\lambda_d \quad (3.27)$$

Esta similaridade não é por acaso, pois esta curvatura corresponde exatamente a curvatura definida pela conexão de Christoffel, com a qual podemos relacionar mais precisamente por

$$R_b^a = \frac{1}{2}e_b^\sigma e_\rho^a R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (3.28)$$

e coincide também com a curvatura de algumas teorias de gauge, como é o caso da teoria de Yang-Mills, onde a curvatura da conexão de gauge  $A =$



$A_\mu dx^\mu$  é dada por

$$F = dA + A \wedge A. \quad (3.29)$$

Através da derivada covariante do vielbein, podemos construir a Torsão:

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b \quad (3.30)$$

Poderíamos tentar construir outros objetos a partir de derivadas covariantes de ordens mais altas, mas isto se mostra impossível devido a uma relação conhecida como “Identidades de Bianchi” [7], que corresponde às consequências de (3.21):

$$DF = 0, \quad (3.31)$$

$$DT = R \wedge e, \quad (3.32)$$

onde o  $F$  é a curvatura da teoria de gauge em questão. No nosso caso, obtemos

$$DR^a_b = dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b + \omega^c_b \wedge R^a_c = 0. \quad (3.33)$$

Por se tratar de uma identidade, ela não restringe as conexões possíveis: qualquer conexão satisfaz esta identidade. Graças a ela, se tentamos construir derivadas covariantes de ordem superior, não teremos nada novo.

Assim, ao tentarmos construir novos objetos derivados das relações que

já tínhamos, obteremos

$$De^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b = T^a, \quad (3.34)$$

$$DR_b^a = dR_b^a + \omega_c^a \wedge R_b^c + \omega_b^c \wedge R_c^a = 0, \quad (3.35)$$

$$DT^a = dT^a + \omega_b^a \wedge T^b \quad (3.36)$$

$$= d\omega_b^a \wedge e^b - \omega_b^a \wedge de^b + \omega_b^a \wedge de^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b \wedge e^c \quad (3.37)$$

$$= R_b^a \wedge e^b, \quad (3.38)$$

que corresponde justamente às equações de movimento e as duas identidades de Bianchi. Finalizamos este capítulo escrevendo a ação de Einstein-Hilbert em 4 dimensões com o formalismo de primeira ordem:

$$I_{E-H} = \int \epsilon^{abcd} (\alpha R^{ab} e^c e^d + \beta e^a e^b e^c e^d). \quad (3.39)$$

Para mostrar que esta ação, de fato, corresponde a ação de Einstein-Hilbert, basta verificar que esta reproduz as equações de movimento da Relatividade Geral. Basta calcular a variação da ação com relação a conexão para obtermos uma equação de vínculo de torsão nula, e variando com relação ao vielbein obtemos exatamente a equação de Einstein no vácuo. Mais detalhes sobre estas contas podem ser acompanhadas no capítulo 4, onde tratamos no caso especial da gravitação 2+1 dimensional.

# Capítulo 4

## Gravitação em 2+1 Dimensões: Ação de Chern-Simons

### 4.1 Sem Constante Cosmológica

Nós desejamos escrever uma teoria de Relatividade Geral sob uma variedade  $\mathcal{M}$   $D$ -dimensional, e mostrar que quando  $D = 2 + 1$ , a ação de Einstein-Hilbert coincide com a ação de Chern-Simons[15]. Uma vez mostrado isto, passaremos ao caso com constante cosmológica, onde propriedades interessantes da teoria surgem.

A variedade  $\mathcal{M}$  com assinatura<sup>1</sup> Lorentziana possui associado um espaço tangente  $T$  isomorfo a um espaço vetorial  $V$  com grupo  $SO(D - 1, 1)$ , equivalente a uma métrica de Lorentz  $\eta_{IJ} = \text{diag}(-, +\dots+)$  para subir e descer

---

<sup>1</sup>Assinatura corresponde ao termo da métrica que corresponde a coordenada temporal. Uma métrica  $\eta = \text{diag}(\sigma, 1, 1, 1)$  corresponde, no caso onde a assinatura é  $\sigma = 1$ , a um espaço Euclidiano, enquanto o caso  $\sigma = -1$  corresponde a um espaço Minkowskiano.

índices de grupo. Como um isomorfismo entre  $T$  e  $V$  não é definido de maneira única, podemos fazer uma escolha: esta será o vielbein  $e_I^\mu$ , que pode ser visto como uma 1-forma em  $V$  com condições de invertibilidade; da mesma forma, podemos definir uma conexão de spin  $\omega$  como uma conexão de  $SO(D-1, 1)$  em  $V$ .

A curvatura, definida em termos da conexão, é escrita como  $R = d\omega + \omega \wedge \omega$  ou, em termos de componentes:

$$(R_{\mu\nu})^I{}_J = \partial_\mu \omega_\nu^I{}_J - \partial_\nu \omega_\mu^I{}_J + [\omega_\mu, \omega_\nu]^I{}_J. \quad (4.1)$$

Em termos da curvatura e do vielbein, a ação de Einstein-Hilbert (em  $D = 4$ ), corresponde a

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} e \wedge e \wedge R = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J (R_{\rho\sigma})^K{}_L. \quad (4.2)$$

É fácil verificar que estas correspondem de fato as equações de movimento da relatividade geral; se tomamos a variação desta ação com respeito a conexão, obtemos a equação

$$D_\mu e_\nu^I - D_\nu e_\mu^I = 0, \quad (4.3)$$

indicando que a variedade  $\mathcal{M}$  tem torsão nula; e variando a ação com respeito ao vierbein, obtemos a equação

$$e_I^\rho (R_{\mu\rho})^I{}_J = 0. \quad (4.4)$$

Se multiplicamos esta equação por outro vielbein, facilmente vemos que

$$e_\nu^J e_I^\rho (R_{\mu\rho})^I{}_J = R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.5)$$

que corresponde exatamente a equação de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$  no vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R = 0$ ).

Nosso desejo é de escrever a Relatividade Geral como uma teoria de gauge. No grupo de Poincaré, a conexão de spin pode ser representada como o campo de gauge da simetria de Lorentz e o vielbein, como os geradores das translações. Poderíamos, então, afirmar “A Relatividade Geral é uma teoria de gauge sob o grupo de Poincaré em D dimensões.” Porém, a dificuldade surge na hora de escrever a ação em termo da conexão de gauge. Como exemplo, em 4 dimensões, a ação de Palatini (cujas equações de movimento correspondem às da Relatividade Geral) é escrita como  $S = \int_{\mathcal{M}} e \wedge e \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega)$ , e procuraríamos escrever esta ação em termos de uma conexão de gauge  $S = \int_{\mathcal{M}} A \wedge A \wedge (dA + A \wedge A)$ , onde  $A$  é a conexão de Poincaré. Porém, de fato, tal ação não existe nas teorias de gauge, pois não é possível se construir uma ação invariante nesta forma, e isto acontece para todas as variedades cuja dimensão D seja par. Portanto, em 4 dimensões, não podemos esperar que a Relatividade Geral seja uma teoria de gauge sob esta construção.

Porém, em 3 dimensões, a realidade é outra. A ação de Einstein-Hilbert é escrita como

$$S = \int_{\mathcal{M}} e \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon_{IJK} (e_\mu^I (\partial_\nu \omega_\rho^{JK} - \partial_\rho \omega_\nu^{JK} + [\omega_\nu, \omega_\rho]^{JK})) \quad (4.6)$$

e então passamos a procurar descrever a Relatividade Geral como uma teoria de gauge

$$S = \int_{\mathcal{M}} A \wedge (dA + \frac{2}{3}A \wedge A) \quad (4.7)$$

e esta corresponde a ação de Chern-Simons.

Então, doravante, vamos tentar mostrar que, de fato, gravitação em 2+1 dimensões sem constante cosmológica corresponde exatamente a uma teoria de Chern-Simons sob o grupo de gauge de Poincaré  $ISO(1, 2)$ .

Escrevendo  $A = A^I T_I$ , a parte quadrática da ação fica escrita como

$$Tr(T_I T_J) \times \int_{\mathcal{M}} (A^I \wedge dA^J), \quad (4.8)$$

onde  $d_{IJ} = Tr(T_I T_J)$  corresponde a uma “métrica” na álgebra de Lie, e  $Tr$  corresponde a uma forma invariante no grupo (forma de Killing), também representada pela notação  $\langle, \rangle$ .

Para escrever a ação de Chern-Simons, primeiro temos que ser capazes de mostrar que existe tal forma invariante no grupo de Poincaré.

Vamos primeiro considerar o caso geral de Poincaré  $ISO(D - 1, 1)$ . Os geradores de Lorentz são escritos como  $J^{IJ} = -J^{JI}$ , enquanto as translações são descritas pelos geradores  $P^I$ , com os índices  $I, J = 1, \dots, D$ . Uma expressão bilinear dos geradores teria a forma geral

$$W = \alpha J_{IJ} J^{IJ} + \beta P_I P^I, \quad (4.9)$$

que corresponde a um operador de Casimir. Porém, se a forma é invariante, ela deve comutar com os outros geradores, e se tentamos, por exemplo, impor

que  $W$  comute com  $P$ , verificamos que devemos impor que  $\beta = 0$ , e a partir de então, não estaremos mais construindo uma forma invariante não-degenerada sob o grupo.

O que torna possível descrever a gravitação neste caso é o fato que em  $D = 3$  existe o operador de Casimir[15]:

$$W = \epsilon_{IJK} J^{IJ} P^K, \quad (4.10)$$

que é uma forma invariante sob o grupo e não-degenerada.

Para efeito de contas, é mais simples trabalhar com o dual de Hodge do gerador de Lorentz

$$J^I = \frac{1}{2} \epsilon^{IJK} J_{JK} \quad (4.11)$$

sob esta forma, escrevemos a ação da forma quadrática invariante como

$$\langle J_I, P_J \rangle = \delta_{IJ} ; \langle J_I, J_J \rangle = \langle P_I, P_J \rangle = 0 \quad (4.12)$$

então as relações de comutação no grupo de Poincaré tomam a forma

$$[J_I, J_J] = \epsilon_{IJK} J_K, \quad (4.13)$$

$$[J_I, P_J] = \epsilon_{IJK} P_K, \quad (4.14)$$

$$[P_I, P_J] = 0. \quad (4.15)$$

Vamos agora construir a conexão de gauge  $A_\mu$  a partir dos geradores do grupo. Como desejamos que a conexão de spin esteja relacionado com os ge-

radores de Lorentz e o vierbein relacionado com os geradores das translações, escrevemos:

$$A_\mu = e_\mu^I P_I + \omega_\mu^I J_I. \quad (4.16)$$

Infinitesimalmente, associamos um parâmetro de gauge  $u = \rho_a P^a + \tau_a J^a$ , onde  $\rho_a$  e  $\tau_a$  são parâmetros infinitesimais.

A variação de  $A_I$  sobre uma transformação de gauge infinitesimal deve ser dada por

$$\delta A_\mu = -D_\mu u, \quad (4.17)$$

onde  $D_\mu$  denota a derivada covariante  $D_\mu u = \partial_\mu u + [A_\mu, u]$ .

Se substituimos na equação para a conexão, obtemos as transformações para os campos:

$$\delta e_\mu^I = -\partial_\mu \rho^I - \epsilon^{IJK} e_{\mu J} \tau_K - \epsilon^{IJK} \omega_{\mu J} \rho_K, \quad (4.18)$$

$$\delta \omega_\mu^I = -\partial_\mu \tau^I - \epsilon^{IJK} \omega_{\mu J} \tau_K. \quad (4.19)$$

Se calculamos a curvatura de  $A$ , obtemos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] &= P_I (\partial_\mu e_\nu^I - \partial_\nu e_\mu^I + \epsilon^{IJK} (\omega_{\mu J} e_{\nu K} - e_{\mu J} \omega_{\nu K})) \\ &+ J_I (\partial_\mu \omega_\nu^I - \partial_\nu \omega_\mu^I + \epsilon^{IJK} \omega_{\mu J} \omega_{\nu K}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como  $F_{\mu\nu}$  é uma 2-forma, podemos formar um invariante  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  se tomamos uma variedade de 4-dimensional  $\mathcal{M}_4$  sem bordas. Utilizando a forma de



Killing do grupo, obtemos a expressão:

$$S_4 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu e_\nu^I - \partial_\nu e_\mu^I + \epsilon^{IJK} (\omega_{\mu J} e_{\nu K} - e_{\mu J} \omega_{\nu K})) \cdot (\partial_\rho \omega_{\sigma I} - \partial_\sigma \omega_{\rho I} + \epsilon_{ILM} \omega_\rho^L \omega_\sigma^M) \quad (4.21)$$

Esta expressão é, de fato, uma derivada total  $U = dV$  e, portanto, se a fronteira de  $\mathcal{M}_4$  for  $\mathcal{M}$ , esta integral se reduz a uma integral em  $\mathcal{M}$ . Esta integral é, por definição, a ação de Chern-Simons, e é facilmente obtida como

$$S_{cs} = \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} (e_{\mu I} (\partial_\nu \omega_\rho^I - \partial_\rho \omega_\nu^I + \epsilon_{IJK} \omega_\nu^J \omega_\rho^K)), \quad (4.22)$$

que deve-se notar que é exatamente a ação de Einstein-Hilbert para o caso tridimensional no vácuo, dada por (4.6).

Com isto mostramos que a Relatividade Geral em 2+1 dimensões sem constante cosmológica é uma teoria de gauge do tipo Chern-Simons com grupo de gauge de Poincaré ISO(1,2).

## 4.2 Com Constante Cosmológica

É possível mostrar também que a Relatividade Geral com constante cosmológica também é uma teoria de gauge do tipo Chern-Simons, com um grupo De Sitter ou Anti-De Sitter, como mostrado em [15], mas algumas peculiaridades surgem, como a existência de duas ações de Chern-Simons equivalentes, no sentido das equações clássicas de movimento, mas que geram diferenças a nível quântico.

Começamos escrevendo a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica[11][15]

$$S_\Lambda = \int_{\mathcal{M}} \epsilon^{\mu\nu\rho} (e_{\mu I} (\partial_\nu \omega_\rho^I - \partial_\rho \omega_\nu^I) + \epsilon_{IJK} e_\mu^I \omega_\nu^J \omega_\rho^K + \frac{\Lambda}{3} \epsilon_{IJK} e_\mu^I e_\nu^J e_\rho^K). \quad (4.23)$$

As equações de movimento dizem agora não que o espaço-tempo é plano, mas sim que ele é localmente homogêneo, com curvatura constante  $\Lambda$ ; O espaço tangente não é mais um espaço de Minkowski, mas sim um espaço de De Sitter ( $\Lambda$  positivo) ou Anti-De Sitter ( $\Lambda$  negativo), e estes tem como grupo de simetria não mais  $ISO(1, 2)$ , mas sim  $SO(1, 3)$  ou  $SO(2, 2)$ , respectivamente.

As relações de comutação dos geradores em (Anti-)De Sitter são:

$$[J_I, J_J] = \epsilon_{IJK} J^K, \quad (4.24)$$

$$[J_I, P_J] = \epsilon_{IJK} P^K, \quad (4.25)$$

$$[P_I, P_J] = \Lambda \epsilon_{IJK} J^K. \quad (4.26)$$

Introduzindo a conexão de gauge da mesma forma que fizemos para o caso com  $\Lambda = 0$ , obtemos as leis de transformação

$$\delta e_\mu^I = -\partial_\mu \rho^I - \epsilon^{IJK} e_{\mu J} \tau_K - \epsilon^{IJK} \omega_{\mu J} \rho_K, \quad (4.27)$$

$$\delta \omega_\mu^I = -\partial_\mu \tau^I - \epsilon^{IJK} \omega_{\mu J} \tau_K - \Lambda \epsilon^{IJK} e_{\mu J} \rho_K, \quad (4.28)$$

e a equação para a curvatura é escrita como

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} = & P_I(\partial_\mu e_\nu{}^I - \partial_\nu e_\mu{}^I + \epsilon_{IJK}(\omega_\mu{}^J e_\nu{}^K - e_\mu{}^J \omega_\nu{}^K)) \\
& + J_I(\partial_\mu \omega_\nu{}^I - \partial_\nu \omega_\mu{}^I + \epsilon^{IJK}(\omega_{\mu J} \omega_{\nu K} + \Lambda e_{\mu J} e_{\nu K})). \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Utilizando o mesmo procedimento do caso sem constante cosmológica, escrevendo o invariante  $\int F^I F^J d_{IJ}$  e notando que é uma derivada total, obtemos a ação de Palatini (4.23) com constante cosmológica.

O que constitui fato notável é que a forma quadrática invariante que utilizamos até agora não é única quando trabalhamos com De Sitter ou Anti-De Sitter[15]. Deve-se apontar que existe uma segunda forma quadrática invariante, a saber

$$\langle J_I, J_J \rangle = \delta_{IJ} ; \langle J_I, P_J \rangle = 0 ; \langle P_I, P_J \rangle = \Lambda \delta_{IJ}. \quad (4.30)$$

Isto ocorre devido ao isomorfismo  $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ ,  $SO(2, 2) \simeq SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ , e no caso  $SO(1, 3)$ , embora este grupo não sofra este tipo de fatoração nos números reais, quando tomados números complexos a fatoração acontece, e resulta nas duas formas quadráticas que obtemos.

Seguindo os mesmos passos, mas utilizando esta nova forma quadrática para escrever o invariante  $\int F^I F^J d_{IJ}$ , e escrevendo-a como derivada total, obtemos a nova ação de Chern-Simons

$$\tilde{S}_\Lambda = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (\omega_\mu{}^I (\partial_\nu \omega_\rho{}^I - \partial_\rho \omega_\nu{}^I + \frac{2}{3} \epsilon_{IJK} \omega_\nu{}^J \omega_\rho{}^K))$$

$$+\Lambda e_\mu{}^I(\partial_\nu e_\rho{}^I - \partial_\rho e_\nu{}^I) + 2\Lambda\epsilon_{IJK}\omega_\mu{}^I e_\nu{}^J e_\rho{}^K. \quad (4.31)$$

Esta ação é invariante sob as transformações (4.27) e (4.28), e portanto, faz sentido adicioná-la a ação de Einstein-Hilbert original com um coeficiente arbitrário, uma vez que as equações de movimento clássicas geradas por esta são as mesmas da outra ação. É interessante notar que embora este fator arbitrário não influencie nas equações clássicas, ele influenciará quânticamente.

Introduzimos novos geradores, definidos por

$$J_I^\pm = \frac{1}{2}(J_I \pm \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}P_I), \quad (4.32)$$

e com esta reparametrização, a álgebra de Lie se torna

$$[J_I^+, J_J^+] = \epsilon_{IJK}J^{+K}, \quad (4.33)$$

$$[J_I^-, J_J^-] = \epsilon_{IJK}J^{-K}, \quad (4.34)$$

$$[J_I^+, J_J^-] = 0. \quad (4.35)$$

Note que, para  $\Lambda$  positivo, esta é a álgebra de Lie de  $SO(1, 2) \times SO(1, 2)$  ou  $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ . Utilizamos a métrica de Lorentz para subir e descer os índices.

As conexões correspondentes são

$$A_\mu{}^I{}^\pm = \omega_\mu{}^I \pm \sqrt{\Lambda}e_\mu{}^I. \quad (4.36)$$

A derivada covariante também se altera, de forma

$$D_\mu = \partial_\mu + J_I^+ A_\mu^{I+} + J_I^- A_\mu^{I-}. \quad (4.37)$$

As duas formas de Chern-Simons ficam escritas como

$$I^\pm = \int \epsilon^{\mu\nu\rho} (2A_\mu^{I\pm} \partial_\nu A_\rho^{I\pm} + \frac{2}{3} \epsilon_{IJK} A_\mu^{I\pm} A_\nu^{J\pm} A_\rho^{K\pm}). \quad (4.38)$$

As ações de Einstein-Hilbert estão relacionadas a esta de forma simples: a ação 'padrão' é obtida pela combinação  $S_\Lambda = \frac{4}{\sqrt{\Lambda}}(I^+ - I^-)$ , enquanto a ação 'exótica' obtida com a segunda forma quadrática é obtida por  $\tilde{S}_\Lambda = \frac{1}{2}(I^+ + I^-)$ .

A ação mais geral, como apontado em [18], é escrita como

$$S = S_\Lambda + \frac{1}{\gamma} \tilde{S}_\Lambda, \quad (4.39)$$

onde o parâmetro  $\gamma$  corresponde a um termo de proporcionalidade, que não tem influência nas equações clássicas de movimento. Porém,  $\gamma$  tem influências diretas na mecânica quântica, e se comporta como uma espécie de "Parâmetro de Immirzi", que é bastante comum na literatura de gravitação quântica[7][11][18]. Podemos então fazer análise canônica desta ação mais geral, para obter os colchetes de Poisson dados por

$$\{\omega_\mu^I(x), e_\nu^J(y)\} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \Lambda} \epsilon_{\mu\nu} \delta^{IJ} \delta^2(x - y) \quad (4.40)$$

$$\{\omega_\mu^I(x), \omega_\nu^J(y)\} = \frac{\sqrt{|\Lambda|}}{2} \frac{\Lambda\gamma}{\Lambda - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} \delta^{IJ} \delta^2(x - y) \quad (4.41)$$

$$\{e_\mu{}^I(x), e_\nu{}^J(y)\} = \frac{1}{2\sqrt{|\Lambda|}} \frac{\gamma}{\Lambda - \gamma^2} \epsilon_{\mu\nu} \delta^{IJ} \delta^2(x - y) \quad (4.42)$$

os campos  $\omega$  e  $e$  ainda são conjugados, mas agora ambos se tornaram não-comutativos. Podemos recuperar as relações canônicas tomando o limite  $\gamma \rightarrow \infty$ . Como os colchetes de Poisson são alterados, as relações de comutação na mecânica quântica dependerão do parâmetro  $\gamma$ , e isto altera os observáveis e a atuação dos operadores quânticos.

# Capítulo 5

## Chern-Simons Abeliano

### 5.1 Revisão: Mecânica Hamiltoniana

A Mecânica Quântica é considerada atualmente uma das teorias que fundamentam a física moderna, devido ao seu alto grau de precisão em todas as medidas efetuadas. O que desejamos aqui é construir a teoria de quantização usual de Dirac para sistemas mecânicos, aplicada numa teoria com invariância de calibre.

Começamos por considerar um sistema mecânico descrito por uma ação

$$S = \int \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int dt \int d^2q L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (5.1)$$

obedecendo as equações de Euler, que determinam as equações de movimento da teoria

$$\frac{dL}{dq_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{q}_i} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Vamos aqui assumir por simplicidade que a lagrangiana não depende explicitamente do tempo.

A dinâmica da lagrangiana é interessante por ter uma forma bastante condensada de se obter as equações de movimento, e de forma bastante simples. Ela nos permite identificar as variáveis generalizadas apropriadas para a resolução do problema clássico, reduzindo o espaço de configurações para que seja o de menor dimensão possível. Apesar disto, tem a desvantagem de que a variável canônica  $q_i$  e sua velocidade  $\dot{q}_i$  não são consideradas independentes e, portanto, acrescentam um grau a mais de complexidade, pois a equação (5.2) é uma equação de segunda ordem, com solução geralmente não-trivial. Do ponto de vista das equações diferenciais, é sempre mais interessante trabalhar-se dividindo uma equação diferencial de maior ordem em várias de primeira ordem (isto normalmente pode ser feito através de uma simples mudança de variáveis). Isto que nos motiva, inicialmente, a procurar uma mecânica de primeira ordem, que corresponde ao formalismo hamiltoniano.

Para convertermos nossa lagrangiana para o formalismo hamiltoniano, precisamos definir os momentos conjugados das variáveis canônicas, como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.3)$$

com a condição de que a matriz hessiana

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (5.4)$$



satisfaça  $\det W \neq 0$ , que garante que as equações (5.3) podem ser resolvidas para as velocidades. Caso esta condição não ocorra, teremos uma certa quantidade de equações, chamadas de vínculos primários, escritos na forma  $\phi_m(q, p) = 0$ ; estes vínculos são responsáveis pela redução da quantidade de variáveis generalizadas no espaço de configurações, sendo que eles precisam ser resolvidos em conjunto com as equações de movimento, restringindo a quantidade possível de soluções do sistema, e este caso será visto de agora em diante, no decorrer do trabalho.

Definimos a hamiltoniana através de uma transformação de Legendre:

$$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}), \quad (5.5)$$

com equações de movimento agora fornecidas pelo par de equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.6)$$

Podemos utilizar o formalismo de colchetes de Poisson

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}. \quad (5.7)$$

Através deste objeto, a relação entre as variáveis canônicas e seus momentos,

e a dinâmica do sistema ficam descritas de forma simples e elegante:

$$\delta_{ij} = \{q_i, p_j\}, \quad (5.8)$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (5.9)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.10)$$

de forma geral, a evolução temporal de uma variável  $A$  é dada pela expressão

$$\dot{A} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (5.11)$$

## 5.2 Teoria de Chern-Simons Abeliana

A teoria de Chern-Simons, por se tratar de uma teoria de campo, utilizará o formalismo de derivadas funcionais, típico à teoria quântica dos campos. Para uma breve revisão do assunto, pode-se consultar [12][25].

Vamos considerar uma ação de Chern-Simons com fontes, dada por uma conexão de gauge  $A_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , num espaço-tempo coordenado dado por  $(x^0, x^1, x^2) = (t, \vec{x})$ , dada por

$$S = \int_{\mathcal{M}} dt \mathcal{L} = \int dt \int d^2x \mathcal{L},$$

$$\mathcal{L} = \frac{k}{4} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + A_\mu J^\mu, \quad (5.12)$$

$$F_{\mu\nu} = dA = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.13)$$

onde  $J_\mu$  é uma corrente externa, e  $\mathcal{M}$  é uma variedade 3-dimensional compacta, que sempre[33] podemos separar como  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ . A ação e a conexão

se transformam através de tranformações de gauge do grupo U(1) são dadas por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (5.14)$$

$$S \rightarrow S + \int_{\partial\mathcal{M}} d\sigma_\mu \left( \frac{k}{4} \lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + \lambda J^\mu \right), \quad (5.15)$$

onde  $\partial\mathcal{M}$  denota a borda da variedade  $\mathcal{M}$ . Deve-se notar que a ação se transforma apenas por um termo de borda, e como a variação na borda é nula, este termo não afeta as equações de movimento, que serão invariantes de gauge. Se variamos a ação de Chern-Simons para a conexão, encontramos as equações de movimento

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \frac{k}{2} F^\mu + J^\mu = 0, \quad (5.16)$$

onde  $F^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \equiv \star F_{\nu\rho}$  é o dual de Hodge de  $F$ . Note que como  $\mathcal{L}$  é linear nas derivadas primeiras da conexão, a matriz hessiana será nula, e portanto, esperamos encontrar alguns vínculos primários. Vamos, portanto, utilizar o método de Dirac para tratar estes vínculos classicamente, que pode ser encontrado em [12]. Primeiro determinamos quem são os momentos conjugados

$$\Pi_{A_\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu)}, \quad (5.17)$$

e obtemos como momentos  $\Pi^0 \equiv \Pi_{A_0} = 0$ ,  $\Pi^1 \equiv \Pi_{A_1} = \frac{k}{2} A_2$  e  $\Pi^2 \equiv \Pi_{A_2} =$

$-\frac{k}{2}A_1$ . Com isto temos claramente quem são os vínculos primários:

$$\{\phi^m, m = 1, 2, 3\} \approx \{\Pi^0, \Pi^1 - \frac{k}{2}A_2, \Pi^2 + \frac{k}{2}A_1\}, \quad (5.18)$$

onde a notação “ $\approx$ ” utilizada indica uma igualdade fraca: esta igualdade pode apenas ser utilizada no final das contas. Podemos realizar a transformação de Legendre para obter a hamiltoniana

$$H = \int (d^2x \Pi_\mu \dot{A}^\mu - L) = - \int d^2x (\frac{k}{2} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + A_\mu J^\mu + \lambda_m \phi^m). \quad (5.19)$$

Note que precisamos incluir na hamiltoniana os vínculos primários através dos multiplicadores de lagrange  $\lambda_m$ , para calcularmos corretamente os vínculos secundários. Lembramos que a inclusão dos vínculos na hamiltoniana não altera as equações de movimento.

Agora temos que analisar a estabilidade dos vínculos primários, para que eles não se alterem durante a evolução do sistema: temos de impor que

$$\dot{\phi}^m = \{\phi^m, H\} \approx 0. \quad (5.20)$$

A estabilidade do primeiro vínculo é dada por

$$\dot{\phi}^1 = \{\phi^1, H\} = \{\Pi_0, \frac{k}{2} A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + A_\mu J^\mu + \lambda_m \phi^m\}, \quad (5.21)$$

$$= -\frac{k}{2} \epsilon^{0ab} F_{ab} - J^0 \approx 0, \quad (5.22)$$

onde  $a, b = 1, 2$ . Isto nos gera um vínculo secundário

$$\phi^4 = kF_{12} + J^0. \quad (5.23)$$

Se realizamos a análise de estabilidade dos outros vínculos, vamos obter

$$\dot{\phi}^2 = k(\lambda_3 - \partial_2 A_0) + J^1 \approx 0, \quad (5.24)$$

$$\dot{\phi}^3 = k(-\lambda_2 + \partial_1 A_0) + J^2 \approx 0, \quad (5.25)$$

e estes dois vínculos correspondem simplesmente a condições sobre os multiplicadores de Lagrange, e não produzem qualquer informação nova.

Verificamos agora a estabilidade do vínculo secundário  $\phi^4$ :

$$\dot{\phi}^4 = k\partial_2 \lambda_2 - k\partial_1 \lambda_3 + \partial_0 J^0 \approx 0 \quad (5.26)$$

Note ainda que se utilizamos as condições impostas na equação (5.24) e (5.25), obtemos  $\partial_\mu J^\mu \approx 0$ , que corresponde justamente à conservação da corrente.

Temos de analisar a classificação dos vínculos quanto à classe deles: Vínculos de Primeira Classe são os vínculos que tem colchetes de Poisson fracamente nulos com todos outros vínculos e com a Hamiltoniana, como é claramente o caso aqui do vínculo  $\chi^3 \equiv \phi^1$ . O vínculo  $\phi^4$ , ainda que não seja de primeira classe, pode ser escrito como de primeira classe se tomamos uma combinação linear com os outros vínculos, a saber:  $\chi^4 \equiv \partial_1 \phi^2 + \partial_2 \phi^3 + \phi^4 \approx 0$ ; Vínculos de Segunda Classe são aqueles que, ao contrário dos de Primeira Classe, possuem colchetes não-fracamente nulos com alguns vínculos, onde

aqui correspondem aos vínculos  $\chi^1 \equiv \phi^2$  e  $\chi^2 \equiv \phi^3$ . Como queremos que todos vínculos de segunda classe tenham colchetes nulos com todos vínculos, precisamos redefinir nosso colchete de Poisson, de forma que englobe os outros vínculos já calculados, e obrigue os vínculos de segunda classe a também terem colchetes nulos com os outros: Definimos o “Colchete de Dirac”

$$\{\phi^m, \phi^n\}_D = \{\phi^m, \phi^n\} - \{\phi^m, \chi^a\}(\Delta^{-1})_{ab}\{\chi^b, \phi^n\}, \quad (5.27)$$

onde  $\chi^a$  corresponde aos vínculos de Segunda Classe, e  $\Delta^{-1}$  corresponde a inversa da matriz dos vínculos  $\Delta^{ab} = \{\chi^a, \chi^b\}$ , no sentido da convolução.

No nosso caso, a matriz dos vínculos é dada por

$$\Delta = -k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (5.28)$$

e a inversa é dada simplesmente por  $\Delta^{-1} = \Delta/k$ , e os colchetes de Dirac ficam

$$\{\phi^m, \phi^n\}_D = \{\phi^m, \phi^n\} - \frac{1}{k}\{\phi^m, \chi^a\}\epsilon_{ab}\{\chi^b, \phi^n\}. \quad (5.29)$$

Com esta definição, temos que os colchetes dos vínculos de segunda classe são fortemente zero com qualquer quantidade. Portanto podemos tomá-los como zero, e resolvê-los imediatamente.

### 5.2.1 Quantização da Teoria Abelianas

Temos desenvolvido a mecânica hamiltoniana para uma ação de Chern-Simons cujo grupo de gauge  $U(1)$  é abeliano. Tratamos agora de sua quantização canônica.

O Procedimento usual de quantização consiste em se construir um espaço de Hilbert cinemático de funcionais de onda baseado nas coordenadas do espaço de fase, e então escolher os estados que obedecem os vínculos, que chamamos de "Estados Físicos".

Existe, neste ponto, uma certa ambiguidade de quantização. Podemos quantizar o espaço de fase da teoria, e impor os vínculos ao final, que corresponde ao caminho tradicional seguido pela Gravitação Quântica em Laços. Poderíamos também fazer o caminho oposto, reduzir o espaço de fase impondo de uma vez os vínculos e tentar quantizar a teoria a partir de então. Estes dois caminhos levam a teorias quânticas, em princípio, totalmente inequivalentes, e apenas a realização de experimentos pode indicar qual caminho é correto<sup>1</sup>. Justificamos o caminho escolhido pela sua generalidade em aplicação a diversos sistemas, em oposição ao segundo caminho, cujas contas de quantização precisam rever sua lógica a cada sistema diferente avaliado.

Primeiramente transformamos os colchetes de Dirac previamente definidos em comutadores, através da regra de correspondência

$$i\hbar\{\cdot, \cdot\}_D \leftrightarrow [\cdot, \cdot], \quad (5.30)$$

---

<sup>1</sup>Uma discussão detalhada sobre isto é feita em [7][8].

em particular, temos para os colchetes de Dirac a relação

$$\{A_a, \Pi_{A_b}\}_D = \left\{A_a, \frac{k}{2}\epsilon_{cb0}A_c\right\}_D = \frac{k}{2}\epsilon_{cb0}\{A_a, A_c\}_D. \quad (5.31)$$

Por outro lado, desenvolvendo os colchetes de Dirac pela sua definição (5.29), temos

$$\begin{aligned} \{A_a, \Pi_{A_b}\}_D &= \{A_a, \Pi_{A_b}\} - \frac{1}{k}\{A_a, \chi_a\}\epsilon^{ab}\{\chi_b, \Pi_{A_b}\} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ab}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Igualando as duas expressões desenvolvidas acima, obtemos a relação

$$\{A_1(x), A_2(y)\}_D = \frac{1}{k}\delta^2(x - y), \quad (5.33)$$

e utilizando a regra de quantização (5.30), obtemos o comutador para os operadores de campo:

$$[\hat{A}_1(x), \hat{A}_2(y)] = \frac{i}{k}\delta^2(x - y), \quad (5.34)$$

onde consideramos um sistema de unidades onde  $\hbar = 1$ . É importante observar que a notação utilizada  $A_a(x)$  representa na verdade  $A_a(x_1, x_2)$ ,  $a = 1, 2$ ; preferimos manter a notação  $A_a(x)$  por simplicidade, e procuramos tomar cuidado nos pontos onde esta pode causar confusão.

Os estados são descritos por funcionais de onda - na notação de Dirac:



$\Psi[A_1] = \langle A_1 | \Psi \rangle$ . Os operadores de campo atuam como

$$\langle A_1 | \hat{A}_1 | \Psi \rangle = A_1(x) \Psi[A_1], \quad (5.35)$$

$$\langle A_1 | \hat{A}_2 | \Psi \rangle = \frac{i}{k} \frac{\delta}{\delta A_1(x)} \Psi[A_1]. \quad (5.36)$$

Escolhemos aqui a “Polarização” onde  $A_1$  é a variável de configuração do funcional de onda. Pode-se mostrar que a escolha de  $A_2$  como variável de configuração nos daria uma teoria equivalente.

Esta representação nos permite escrever o vínculo de Gauss  $\phi_4 \approx 0$  como

$$\left[ \left( i \partial_1 \frac{\delta}{\delta A_1(x)} - k \partial_2 A_1(x) \right) + J^0 \right] \Psi[A_1] = 0. \quad (5.37)$$

Uma solução particular para esta equação pode ser dada pela fase <sup>2</sup>  $\Psi_0[A_1] = e^{2\pi i \alpha_0}$ , com  $\alpha_0$  dado por

$$\alpha_0 = -\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2 x A_1 (g^{-1} \partial_2 g) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2 x A_1(x) \int_0^{x'_1} J^0(x'_1, x_2) dx'_1, \quad (5.38)$$

onde  $g = g[A_1]$  é um funcional de  $A_1$  definido pela equação  $A_1 = g^{-1} \partial_1 g$ . A solução geral, portanto, pode ser dada por um funcional de onda na forma

$$\Psi[A_1] = \Psi_0[A_1] \psi^{\text{inv}}[A_1], \quad (5.39)$$

onde  $\psi^{\text{inv}}$  é solução da equação homogênea

$$\partial_1 \frac{\delta}{\delta A_1(x)} \psi^{\text{inv}}[A_1] = 0. \quad (5.40)$$

---

<sup>2</sup>Solução proposta por Jackiw[16], adaptada para o caso abeliano.

Precisamos agora definir uma medida de integração no espaço das configurações para nos permitir definir um produto interno entre os vetores de estado  $|\Psi\rangle$

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int d\mu \bar{\Psi}_1[A_1]\Psi_2[A_1], \quad (5.41)$$

onde  $d\mu$  é uma medida de integração no espaço das funções  $A_1$ , que vamos definir em seguida. Utilizando-nos das idéias por trás do formalismo de laços, passamos então a considerar funcionais de onda que, ao invés de depender de  $A_1$ , passam a depender de suas holonomias através de uma função  $f$ :

$$\Psi[A_1] = \Psi_0[A_1]f(h_\gamma[A_1]), \quad (5.42)$$

onde definimos uma holonomia  $h_\gamma$  por

$$h_\gamma[A_1(x)] = e^{\int_\gamma A_1(x(s))\dot{x}(s)ds}, \quad (5.43)$$

onde  $\gamma$  é um caminho orientado partindo do ponto  $p_1$  do espaço indo até  $p_2$ , parametrizado por  $s$ , com  $x_2$  constante. Note que a holonomia se transforma sob o grupo na forma

$$h'(x) = g^{-1}(p_2)h(x)g(p_1). \quad (5.44)$$

Como o grupo é  $U(1)$ , abeliano, podemos escrever de forma geral que seu

representante é da forma

$$g = e^{i\theta}, \quad (5.45)$$

com  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Então a lei de transformação da holonomia fica escrita como

$$h'(x) = e^{i(\theta(p_1) - \theta(p_2))} h(x). \quad (5.46)$$

Portanto a holonomia se transforma apenas por um coeficiente numérico, que depende apenas dos pontos inicial e final. Observamos que as holonomias invariantes de gauge são aquelas cujos caminhos  $\gamma$  são fechados (laços). Portanto vamos doravante nos restringir a tais holonomias, o que equivale a resolver o vínculo de Gauss, expresso na sua forma reduzida pela equação (5.40). Em coordenadas cilíndricas  $(\theta, z)$ , podemos renomear  $A_1 \equiv A_\theta$  e  $A_2 \equiv A_z$ . Para efetivamente utilizarmos esta restrição, devemos considerar alguma variedade espacial que reflita a condição de periodicidade que estamos impondo. Por exemplo, um cilindro satisfaz esta condição.

Definimos então um espaço *Cyl* de todos os funcionais de onda cujos parâmetros são combinações lineares finitas de funções de valores complexos  $f$  nas holonomias:

$$\Psi_{\Gamma, f}[A_1] = \Psi_0[A_1] f(h_{\gamma_1}[A_1], \dots, h_{\gamma_n}[A_1]), \quad (5.47)$$

onde definimos o grafo  $\Gamma$  como um conjunto de ciclos fechados:

$$\Gamma = \{\gamma_k, k = 1, \dots, n\}. \quad (5.48)$$

Os Elementos de  $Cyl$  são chamados de “funções cilíndricas”. Uma função cilíndrica é portanto um funcional de  $A_1$  que depende apenas dos valores da conexão nos pontos contidos nos caminhos  $\gamma_k$  considerados.

Queremos construir uma base para o espaço das funções cilíndricas. Como as holonomias são elementos do grupo, é conveniente escrever as funções das holonomias como uma expansão sob os elementos do grupo. Esta expansão corresponde ao “Teorema de Peter-Weyl” [7]. No nosso caso, o grupo  $U(1)$  permite uma expansão que corresponde à de Fourier:

$$f(g) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im\theta(g)}. \quad (5.49)$$

Generalizando para nosso caso, obtemos

$$f(h_1[A_1], \dots, h_k[A_1]) = \sum_{m_1, \dots, m_k = -\infty}^{\infty} \alpha_{m_1 \dots m_k} e^{im_1\theta_1[A_1]} \dots e^{im_k\theta_k[A_1]}. \quad (5.50)$$

Utilizando a notação de Dirac, definimos então nossos vetores de base  $|\Gamma, \vec{m}\rangle$ , a menos de um fator de normalização, de forma que

$$\langle A_1 | \Gamma, \vec{m} \rangle \equiv \Psi_{\Gamma, \vec{m}}[A_1] = N e^{im_1\theta_1[A_1]} \dots e^{im_k\theta_k[A_1]} \quad (5.51)$$

para obtermos o fator de normalização  $N$ , precisamos definir de uma vez o produto escalar entre estes vetores.

Definimos então o produto escalar, no caso onde os dois vetores correspondem ao mesmo grafo  $\Gamma$ , como

$$\langle \Gamma, f | \Gamma, f' \rangle = \int dg_1 \dots dg_k (f(g_1, \dots, g_n)^* f'(g_1, \dots, g_n)), \quad (5.52)$$

onde  $dg$  é a medida de Haar do grupo, que neste caso é dada por

$$\int f(g)dg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta, \quad (5.53)$$

que define a medida de integração funcional já mencionada em (5.41) no caso de  $U(1)$ . Isto nos possibilita definir o fator de normalização procurado fazendo

$$\begin{aligned} \langle \Gamma, \vec{m} | \Gamma, \vec{m}' \rangle &= N^2 \int d\theta_1 \dots d\theta_k e^{i(m_1\theta_1 + \dots + m_k\theta_k + i(m'_1\theta_1 + \dots + m'_k\theta_k))} \\ &= \delta_{\vec{m}, \vec{m}'}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde obtemos o fator de normalização  $N^2 = 1/(2\pi)^k$ . Podemos estender a noção de produto interno para vetores de grafos diferentes, tomando a união dos dois grafos  $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$  :

$$\langle \Gamma, \vec{m} | \Gamma', \vec{m}' \rangle = \langle \Gamma'', \vec{m} | \Gamma'', \vec{m}' \rangle \quad (5.55)$$

onde os  $m_i$  para as linhas de  $\Gamma''$  que não são linhas de  $\Gamma$  são tomados iguais a zero. Uma prescrição análoga vale para os  $m'_i$ . Como as representações irredutíveis das curvas com  $m_i = 0$  correspondem à identidade, incluí-las não altera a descrição do estado do sistema. Portanto, resolvemos excluir da base do nosso espaço vetorial os vetores que correspondem a pelo menos um dos  $m_i$  sendo igual a zero. Isto implica que, utilizando (5.54), obteremos

$$\langle \Gamma'', \vec{m} | \Gamma'', \vec{m}' \rangle = 0, \quad (5.56)$$

pois temos pelo menos uma linha de  $\Gamma''$  com  $m_i$  ou  $m'_i = 0$ . O espaço de Hilbert "cinemático",  $\mathcal{H}_{kin}$  corresponde a compleção de Cauchy de  $Cyl$ , que garante a convergência das funções  $f$ , de forma que haja validade do critério de Cauchy

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|\Psi_i - \Psi_j\|^2 = 0, \quad (5.57)$$

que garante a existência de um vetor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{kin}$  tal que  $|\psi\rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} |\psi_i\rangle$  no sentido da norma:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\psi_i - \psi\| = 0$ . Finalmente como  $\langle \Gamma, \vec{m} | \Gamma', \vec{m}' \rangle = 0$  se  $\Gamma \neq \Gamma'$ , temos uma estrutura de soma direta

$$\mathcal{H}_{kin} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\Gamma}, \quad (5.58)$$

onde  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  é o espaço restrito a um grafo  $\Gamma$ . Deve-se notar que, enquanto o espaço  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  é separável, o espaço  $\mathcal{H}_{kin}$  é não-separável.

A implementação dos difeomorfismos em  $x_2$  segue uma prescrição análoga à descrita no capítulo 6.

## Capítulo 6

# Quantização da Teoria de Chern-Simons não-abeliana

Nosso objetivo neste capítulo é quantizar a ação de Chern-Simons não-abeliana utilizando o formalismo de laços herdado da Gravitação Quântica de Laços, e descrever a atuação dos observáveis da teoria. Fazemos aqui uma revisão do trabalho de Gabriel, Clisthenis e Piguet [17].

### 6.1 Análise Canônica

Dada a ação de Chern-Simons

$$S = -k \int \langle A, dA + \frac{2}{3}A^2 \rangle, \quad (6.1)$$

com  $A$  sendo uma 1-forma sob uma variedade diferenciável  $\mathcal{M}$  na forma  $A = A_\mu^I T_I dx^\mu$  e  $T_I$  são os geradores do grupo de simetria  $G$  da teoria; o

produto  $\langle, \rangle$  corresponde a forma de Killing correspondente no grupo.

Queremos realizar o procedimento de quantização canônica de Dirac; para tal, precisaremos calcular a hamiltoniana do sistema, seus vínculos e seus respectivos colchetes de Poisson.

A priori, a ação é escrita como uma integração em uma variedade D-dimensional, não sendo necessária a introdução de uma idéia de tempo para esta continuar sendo válida; porém, se queremos seguir o formalismo canônico, precisamos identificar uma das dimensões como uma dimensão temporal, onde restringimos a topologia da variedade como  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , onde  $\Sigma$  corresponde a uma variedade bidimensional. Neste formato, podemos separar na ação a dimensão “temporal” da “espacial”, onde atribuímos à seção temporal o índice zero:

$$S = -k \int dt \int_{\Sigma} d^2x \epsilon^{ab} \text{Tr}(\dot{A}_a A_b + A_0 F_{ab}), \quad (6.2)$$

com  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a + f_{JK}^I A_a^J A_b^K$ ,  $a, b = 1, 2$  sendo a curvatura de  $A$ .

Calculando os momentos conjugados, temos:

$$\Pi_{A_a} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_a)} = A_b, \quad (6.3)$$

$$\Pi_{A_0} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} \approx 0, \quad (6.4)$$

que são os vínculos primários da teoria. Seus colchetes de Poisson são dados



por

$$\{A_a^I(x), \Pi_{A_a^J}(y)\} = \delta^{IJ} \delta^2(x-y) \implies \{A_a^I(x), A_b^J(y)\} = -\frac{1}{k} \epsilon_{ab} \delta^{IJ} \delta^2(x-y). \quad (6.5)$$

Podemos então calcular a hamiltoniana, fazendo a transformada de Legendre

$$H = \sum P_I \dot{Q}_I - L = -k \int d^2x \epsilon^{ab} \text{Tr}(A_0 F_{ab}). \quad (6.6)$$

Note que se calculamos a evolução do vínculo (6.4), obtemos

$$\dot{\Pi}_{A_0^I} = \{H, \Pi_{A_0^I}\} = -k \epsilon^{ab} F_{ab}^I \equiv G^I \approx 0, \quad (6.7)$$

que corresponde ao vínculo secundário da teoria; repare que se estamos numa teoria abeliana,  $G^I$  corresponde exatamente ao vínculo de Gauss, por exemplo, do eletromagnetismo. (ver capítulo 5).

Com estes resultados, podemos avançar no procedimento de quantização. Vamos fixar o grupo de calibre como sendo  $SU(2)$  e assumimos que a variedade espacial  $\Sigma$  residual da separação temporal feita seja cilíndrica. Associamos então os índices  $A_1 \equiv A_\theta$  e  $A_2 \equiv A_z$  e partimos agora para a construção de um espaço de Hilbert para os estados. Como a conexão espacial é composta por duas componentes que formam um par de variáveis conjugadas devemos escolher qual componente atuará como variável de configuração e conseqüentemente qual será o momento conjugado dela, o que equivale a escolher uma polarização.

## 6.2 Espaço de Hilbert Cinemático

Escolhemos  $A_\theta$  como variável de configuração, que se prova mais adequada para cumprir nosso objetivo de escrever os estados quânticos como funções de holonomias invariantes de calibre. Tendo em vista as relações de comutação induzidas por (6.5), temos:

$$\langle A_\theta | \hat{A}_\theta^I(x) | \Psi \rangle = A_\theta^I(x) \Psi[A_\theta], \quad (6.8)$$

$$\langle A_\theta | \hat{A}_z^I(x) | \Psi \rangle = \frac{1}{ik} \frac{\delta}{\delta A_\theta^I(x)} \Psi[A_\theta], \quad (6.9)$$

$$\Psi[A_\theta] \equiv \langle A_\theta | \Psi \rangle. \quad (6.10)$$

Uma vez definida esta polarização, podemos escrever a equação diferencial funcional para o vínculo de Gauss como

$$\hat{G}^I \Psi[A_\theta] = [i(\frac{\partial}{\partial_0} \frac{\delta}{\delta A_\theta^I} + f_{JK}^I A_\theta^J \frac{\delta}{\delta A_\theta^K}) + k(\frac{\partial}{\partial z} A_\theta^I)] \Psi[A_\theta] = 0. \quad (6.11)$$

Uma solução particular pode ser obtida através da fase  $\Psi_0[A_\theta] = e^{2\pi i \alpha_0}$ , com

$$\alpha_0 = \frac{k}{6\pi} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3x (\epsilon^{\mu\nu\rho} Tr(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g)) - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} Tr(A_\theta g^{-1} \partial_z g), \quad (6.12)$$

onde definimos  $g = g[A_\theta]$  como funcional de  $A_\theta$  através da equação

$$A_\theta = g^{-1} \partial_\theta g, \quad (6.13)$$

e  $\tilde{\Sigma}$  corresponde ao volume cujas bordas são delimitadas por  $\Sigma$ .

A importância desta solução particular consiste em podermos utilizá-la para reescrever o funcional de onda como

$$\Psi[A_\theta] = \Psi_0[A_\theta]\psi^{inv}[A_\theta], \quad (6.14)$$

onde o funcional  $\psi^{inv}[A_\theta]$  é solução de

$$\left(\frac{\partial}{\partial_0} \frac{\delta}{\delta A_\theta^I} + f_{JK}^I A_\theta^J \frac{\delta}{\delta A_\theta^K}\right)\psi^{inv}[A_\theta] = 0, \quad (6.15)$$

que corresponde a primeira parte do vínculo de Gauss, e gera as transformações infinitesimais em  $\theta$

$$\delta A_\theta^I = D_\theta \varepsilon^I, \quad (6.16)$$

$$\delta A_z^I = f_{JK}^I A_z^J \varepsilon^K. \quad (6.17)$$

Para construir o espaço de Hilbert, precisamos definir um produto interno entre os estados da teoria,

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \bar{\Psi}_1[A] \Psi_2[A], \quad (6.18)$$

onde  $\mathcal{D}\mathcal{A}$  corresponde a uma medida de integração no espaço das conexões, a ser definida, que seja compatível com a resolução do vínculo de Gauss.

Passamos então a escrever  $\Psi[A_\theta] = \Psi_0[A_\theta]\psi^{inv}[A_\theta]$  e tentamos resolver para  $\psi[A_\theta]$ .

Como a conexão se transforma de maneira não-homogênea em cada uma de suas componentes, seguimos o procedimento da Gravitação Quântica em

Laços de mudar o foco da conexão para as holonomias da conexão, que são elementos do grupo de gauge. Uma holonomia  $h(\gamma_z, \theta_1, \theta_2)$  é definida em um caminho com  $z$  constante  $\gamma = [\theta_1, \theta_2]$  em  $\Sigma$ , no contexto desse capítulo, como:

$$h(\gamma_z, \theta_1, \theta_2) = \mathcal{P}e^{\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta A_\theta^I(\theta, z) T_I}, \quad (6.19)$$

onde  $\mathcal{P}$  corresponde a uma ordenação de produto do caminho, que corresponde a tomar sempre os maiores valores de  $\theta$  da esquerda para a direita; esta escolha é justificada pois uma holonomia se transforma de maneira homogênea sob uma transformação de gauge

$$h(\gamma_z, \theta_1, \theta_2) \rightarrow g^{-1}(z, \theta_2) h(\gamma_z, \theta_1, \theta_2) g(z, \theta_1). \quad (6.20)$$

Os caminhos devem ser tomados a  $z$  constante, pois outro caminho envolveria a componente  $A_z$ , que não entra como argumento no funcional de onda.

Definimos o espaço Cyl que consiste de todos funcionais de onda na forma  $\Psi[A_\theta] = \Psi_0[A_\theta] \psi^{\text{inv}}[A_\theta]$  com  $\psi$  dado por combinações lineares finitas de funções complexas  $f$  das holonomias

$$\psi^{\text{inv}}[A_\theta] = \psi_{\Gamma, f}[A_\theta] = f(h(\gamma_1, \theta_1, \theta'_1), \dots, h(\gamma_k, \theta_k, \theta'_k), \dots, h(\gamma_N, \theta_N, \theta'_N)), \quad (6.21)$$

onde  $\Gamma$  denota o “grafo” definido como o conjunto (finito) de caminhos

$$\Gamma = \{\gamma_{z_k}, \theta_k, \theta'_k, k = 1, \dots, N\}. \quad (6.22)$$

Elementos de Cyl são chamados de “funções cilíndricas”; Uma função cilíndrica é, portanto, um funcional de  $A_\theta$  que, fora o termo de fase  $\Psi_0[A_\theta]$ , depende apenas dos valores que o seu argumento tem no grafo  $\Gamma$ .

Com esta construção, dados o grafo  $\Gamma$  e a função  $f$  podemos definir  $\psi[A_\theta]$ . Na notação de Dirac, temos

$$\psi_{\Gamma,f}[A_\theta] = \langle A_\theta | \Gamma, f \rangle. \quad (6.23)$$

Voltando ao problema de se definir a medida de integração, convém notar que agora, feita esta construção, os funcionais de onda são construídos com os  $\psi_{\Gamma,f}[A_\theta]$ , e estes por sua vez são feitos de funções de holonomias, que são elementos do grupo de gauge; portanto, os funcionais de onda  $\Psi[A_\theta]$  são elementos do grupo de gauge, e a medida de integração, antes puramente formal, pode ser tomada como sendo a medida de Haar do grupo[20]. Reescrevendo o produto interno sob esta construção, temos

$$\langle \Gamma, f | \Gamma, f' \rangle = \int dh_1 \dots dh_N \bar{f}(h_1, \dots, h_N) f'(h_1, \dots, h_N), \quad (6.24)$$

onde a medida de Haar  $dh_k$  é utilizada para integrar sobre o elemento do grupo  $h_k$ . Uma vez que a medida de Haar para um grupo compacto é normalizável, o produto interno é bem definido, uma vez que as funções  $f$  no grupo definindo as funções cilíndricas são integráveis. Vamos tomar uma medida de integração normalizada:  $\int dh = 1$ .

Podemos nos utilizar do Teorema de Peter-Weyl[21][7] para obter uma

base do espaço de Hilbert construído; Escrevemos

$$\begin{aligned}\Psi[A_\theta] &= \Psi_0[A_\theta] f(h(\gamma_1, \theta_1, \theta'_1), \dots, h(\gamma_k, \theta_k, \theta'_k), \dots, h(\gamma_N, \theta_N, \theta'_N)) \quad (6.25) \\ &= \Psi_0[A_\theta] \sum_{\beta_1 \dots \beta_N, j_1 \dots j_N} c_{\beta_1 \dots \beta_N, j_1 \dots j_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_N} R_{\alpha_1}^{\beta_1, j_1}(h(\gamma_{z_1}, \theta_1, \theta'_1)) \dots R_{\alpha_N}^{\beta_N, j_N}(h(\gamma_{z_N}, \theta_N, \theta'_N)),\end{aligned}$$

onde  $R_\alpha^{\beta, j}$  é o elemento de matriz de spin  $j$  da representação irredutível do elemento  $h$  do grupo <sup>1</sup>. Assim, para cada caminho  $\gamma_{z_k, \theta_k, \theta'_k}$  do grafo  $\Gamma$  nós podemos associar uma representação de spin  $j_k$  do grupo  $SU(2)$ . Assim, um estado caracterizado por um grafo  $|\Gamma, f\rangle$  pode ser escrito como  $|\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$ , e o produto interno, utilizando as representações irredutíveis do grupo, se torna

$$\begin{aligned}\langle \Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta} | \Gamma, \vec{j}', \vec{\alpha}', \vec{\beta}' \rangle &= \int \prod_{k=1}^N dh_k \overline{R_{\alpha_1}^{\beta_1, j_1}(h_1) \dots R_{\alpha_N}^{\beta_N, j_N}(h_N)} R_{\alpha'_1}^{\beta'_1, j'_1}(h_1) \dots R_{\alpha'_N}^{\beta'_N, j'_N}(h_N) \\ &= \delta_{\vec{j} \vec{j}'} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\beta \beta'}.\end{aligned} \quad (6.26)$$

Vale notar que as representações de spin zero correspondem a matriz identidade, e sua inserção num grafo  $\Gamma$  qualquer não altera o estado, uma vez que adicionar um link de spin zero corresponde a multiplicar por  $R^0(h) = 1$  na expressão do vetor de base acima, e isso não altera nada; para evitar ambiguidades, evitaremos incluir na expansão do estado em representações irredutíveis o termo de spin zero. Com esta restrição, fica claro que o conjunto de vetores  $|\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle; \forall \Gamma, \forall (\vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \cup |\emptyset\rangle$ , onde o vetor  $|\emptyset\rangle$  está associado ao grafo vazio  $\Gamma = \emptyset$  correspondente ao funcional de onda  $\Psi_\emptyset[A_\theta] = \langle A_\theta | \emptyset \rangle =$

---

<sup>1</sup>É interessante notar que o teorema de Peter-Weyl produz uma série de Fourier quando tomamos um grupo abeliano  $U(1)$ . Ver (5.50). Assim, consideramos que a expansão em (6.24) corresponde a uma generalização do conceito de série de Fourier para representações de grupos compactos não-abelianos.

1, é uma base ortonormal do espaço de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{kin}$ . Como consequência da fórmula de Peter-Weyl, válida para qualquer spin inclusive spin zero, vetores associados a grafos distintos são ortogonais. Portanto, o espaço de Hilbert das funções cilíndricas é a soma direta

$$\mathcal{H}_{cyl} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\Gamma}, \quad (6.27)$$

onde  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  é o espaço de Hilbert associado ao grafo  $\Gamma$ , e a soma é feita sobre todos grafos possíveis. O espaço de Hilbert Cinemático  $\mathcal{H}_{kin}$  é a compleção de Cauchy[22] de  $\mathcal{H}_{cyl}$ , e enquanto cada espaço  $\mathcal{H}_{\Gamma}$  é separável, este não é o caso para  $\mathcal{H}_{kin}$ .

## 6.3 Resolução dos vínculos

### 6.3.1 Vínculo de Gauss

Agora queremos construir o espaço de Hilbert físico, resolvendo o vínculo de Gauss. Ao invés de resolver explicitamente, voltando à equação funcional para o mesmo, podemos tomar um atalho notando que o vínculo de Gauss gera as transformações infinitesimais de calibre. Impor que os estados sejam invariantes de gauge automaticamente os qualifica como a solução do vínculo. Mais precisamente, levando em conta o fator de fase  $\Psi_0$ , vamos impor que o funcional  $\psi^{inv}[A_{\theta}]$ , dado em termo das holonomias, seja invariante sob as tranformações de gauge geradas pelo vínculo de Gauss reduzido (6.15). Em vista da lei de transformação da holonomia sob uma transformação de gauge, dada por (6.20), fica claro que os funcionais de onda reduzidos devem ser

funções do traço de holonomias em caminhos fechados (ciclos), ou seja, de laços de Wilson

$$h_z = \text{Tr } h(\gamma_{z,\theta,\theta}), \quad (6.28)$$

que dependem apenas da coordenada  $z$ , mas não do ângulo base  $\theta$ . Portanto os grafos são agora conjuntos  $C$  de ciclos, cada ciclo caracterizado por sua “altura”  $z$ :

$$C \leftrightarrow (z_1, \dots, z_n). \quad (6.29)$$

Esta condição de gauge define o espaço de Hilbert de Gauss  $\mathcal{H}_{Gauss}$ . Sua base é o conjunto de vetores ortonormais de redes de spin  $|C, J\rangle$ , que são dados pelos traços dos vetores de base de  $\mathcal{H}_{kin}$ :

$$\langle A_\theta | C, J \rangle = \Psi_0[A_\theta] \prod_{k=1}^n \chi^{j_k}(h_{z_k}), \quad (6.30)$$

com  $\chi^j(h_z) = \text{Tr } R^j(h_z)$  correspondendo ao caráter da representação irreduzível,  $J$  representando o conjunto de spins  $(j_1, \dots, j_n)$  e  $R^j$  é a representação irreduzível de spin  $j$  de  $SU(2)$ .

Temos a relação de ortogonalidade entre os vetores de base

$$\langle C, J | C', J' \rangle = \delta_{CC'} \delta_{JJ'}. \quad (6.31)$$

Vamos definir  $S_0$  como o espaço vetorial de todas as combinações lineares finitas de redes de spin

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |C_n, J_n\rangle \quad (6.32)$$

O espaço de Hilbert de Gauss  $\mathcal{H}_{Gauss}$  é a completção de Cauchy de  $S_0$ .



Este se decompõe em subespaços ortogonais de maneira análoga ao  $\mathcal{H}_{kin}$  :

$$\mathcal{H}_{Gauss} = \bigoplus_C \mathcal{H}_{Gauss}^C \quad (6.33)$$

O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_{Gauss}^C$  de um único grafo  $C$  é separável, mas  $\mathcal{H}_{Gauss}$  não é, já que os grafos são indexados por  $z$ , que é uma quantidade real.

Deve-se notar que, uma vez tendo obtido invariância dos estados sob transformações em  $\theta$ , as transformações em  $z$  não foram contempladas, e, portanto, precisam ser implementadas manualmente.

### 6.3.2 Difeomorfismos em $z$

Vamos então impor invariância sobre difeomorfismos finitos<sup>2</sup> em  $z$ , devido a dificuldades de se construir um gerador infinitesimal bem definido.

Seguimos o método de média sobre o grupo[23], baseado no triplo de Gel'fand[24]  $S_0 \subset \mathcal{H}_{Gauss} \subset S'_0$ , onde  $S_0$  é o subespaço das combinações lineares finitas de redes de spin já definidas, denso em  $\mathcal{H}_{Gauss}$ , e  $S'_0$  é o seu dual, cujos elementos são funcionais lineares  $\Phi$ , assumindo valores complexos, em  $S_0$

$$\Phi : S_0 \rightarrow \mathbb{C}, \Psi \rightarrow \langle \Phi, \Psi \rangle \in \mathbb{C}, \quad (6.34)$$

onde utilizamos a notação de Schwarz  $\langle, \rangle$  para funcionais.

O produto escalar em  $\mathcal{H}_{Gauss}$ , herdado de  $S_0$ , é explicitamente invariante sobre todos difeomorfismos espaciais, sendo que qualquer difeomorfismo  $\phi$  é representado por um operador unitário  $U_\phi$ . A ação de  $\phi$  em  $S'_0$  é então

---

<sup>2</sup>Não temos invariância sobre difeomorfismos infinitesimais neste caso. Isto é mostrado em [9].

definida pela dualidade

$$\langle U_\phi \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, U_\phi \Psi \rangle, \quad (6.35)$$

onde estamos interessados apenas nos difeomorfismos em  $z$ .

Os estados invariantes são agora dados pelos vetores de  $S'_0$  construídos a partir de qualquer vetor  $|\Psi\rangle$  de  $S_0$  aplicando-se o operador  $P_{\text{Diff}}$  - um “projektor” funcional

$$P_{\text{Diff}} : S_0 \rightarrow S'_0, \langle P_{\text{Diff}} \Psi, \Psi' \rangle = \sum_{\Psi''} \langle \Psi'' | \Psi' \rangle, \forall |\Psi' \rangle \in S_0, \quad (6.36)$$

onde a soma é feita sobre todos vetores  $|\Psi''\rangle$  de  $S_0$  que podem ser obtidos a partir de  $|\Psi\rangle$  por um difeomorfismo em  $z$ :  $|\Psi''\rangle = U_\phi |\Psi\rangle$ , e esta soma é sempre finita. De fato, os vetores  $|\Psi\rangle$  e  $|\Psi''\rangle$  são ambos superposições finitas de vetores de redes de spin:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=1}^M c_m |C_m, J_m\rangle, \quad (6.37)$$

$$|\Psi''\rangle = \sum_{n=1}^N c''_n |C''_n, J''_n\rangle. \quad (6.38)$$

Uma vez que duas redes de spin são ortogonais se seus respectivos grafos são diferentes, a soma em (6.36) tem contribuições apenas dos termos da expansão na qual dois grafos coincidem; porém, em nossa teoria, onde o espaço é unidimensional, apenas dois estados de redes de spin nestas condições existem:  $|C_m, J_m\rangle$  e  $|C''_m, J''_m\rangle$  sendo que este é obtido a partir de  $|C_m, J_m\rangle$  invertendo a ordem dos lados do grafo.

Os funcionais  $P_{\text{Diff}}\Psi$  definidos desta maneira são invariantes sobre difeomorfismos em  $z$ , como consequência da equação (6.35) que define a maneira com que os elementos de  $S'_0$  se transformam. Eles geram por definição o espaço vetorial que será o espaço de Hilbert físico da teoria,  $\mathcal{H}_{\text{phys}} \subset S'_0$ .

Agora definimos o produto escalar em  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  como

$$\langle P_{\text{Diff}}\Psi_1 | P_{\text{Diff}}\Psi_2 \rangle := \langle P_{\text{Diff}}\Psi_1, \Psi_2 \rangle, \quad (6.39)$$

onde  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \in S_0$ . Este produto é independente do estado particular  $|\Psi_2\rangle$  que utilizamos para definir  $|P_{\text{Diff}}\Psi_2\rangle$ .

Por construção, os vetores de  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  dependem apenas da classe de equivalência dos vetores de  $S_0$  sob difeomorfismos em  $z$ . Em particular, um vetor definido por (6.36) a partir de uma rede de spin  $|C, J\rangle$  não depende das particulares posições  $z_k$  dos ciclos constituintes do grafo  $C$ , mas apenas da quantidade destes ciclos, e do spin associado a estes. Seguindo a terminologia da *Loop Quantum Gravity*, chamaremos tal vetor um *s-knot* e vamos denotá-lo por  $|j_1, \dots, j_N\rangle \equiv |J\rangle$ :

$$|J\rangle = P_{\text{Diff}}|C, J\rangle. \quad (6.40)$$

O produto escalar de dois *s-knots* é dado por

$$\begin{aligned} \langle J, J' \rangle &= \langle j_1, \dots, j_N | j'_1, \dots, j'_{N'} \rangle \\ &= \delta_{NN'} (\delta_{j_1, j'_1} \dots \delta_{j_N, j'_{N'}} + \delta_{j_N, j'_1} \dots \delta_{j_1, j'_{N'}}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

O segundo termo no lado direito é devido a existência, conforme mencio-

nado antes, dos difeomorfismos em  $z$  que preservam o grafo mas invertem a ordem de seus ciclos. Portanto, dado que se identifique um vetor  $|j_1, j_2, \dots, j_N\rangle$  com seu “reverso”  $|j_N, \dots, j_2, j_1\rangle$ , os estados *s-knot* fornecem uma base para  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ .

Os *s-knots* sendo completamente caracterizados por conjuntos finitos de números semi-inteiros  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$  são claramente invariantes sobre todos difeomorfismos.  $\mathcal{H}_{\text{phys}}$  é portanto o espaço físico de estados da teoria de Chern-Simons em um cilindro. Sendo os vetores *s-knots* contáveis, este espaço de Hilbert é separável.

# Capítulo 7

## Chern-Simons Quantizado:

## Discussão sobre os Observáveis

Este capítulo se constitui como uma continuação natural do capítulo anterior. Introduzimos os observáveis de forma análoga à feita na gravitação quântica em laços, e obtemos a quantização de uma quantidade clássica, com seu espectro sendo uma quantidade física invariante sob difeomorfismos.

Um observável, corresponde a um operador auto-adjunto invariante de calibre que atua no espaço de Hilbert dos estados do sistema. É comum, por simplicidade, considerarmos uma base que diagonalize este operador, de forma a obtermos auto-valores relacionados de forma direta, e atribuir uma interpretação a estes auto-valores. Em suma, dado um sistema cujo estado é  $\Psi$ , queremos um operador  $\hat{W}$  para o qual  $\Psi$  seja um autovetor:

$$\hat{W}(x)\Psi[A] = w(x)\Psi[A] \tag{7.1}$$

onde  $w(x)$  corresponde a um auto-valor de  $\hat{\mathbb{W}}$ .

O espaço de estados que estamos considerando é  $\mathcal{H}_{Gauss}$ , o espaço de Hilbert cujo vínculo de Gauss foi resolvido. Neste caso, os estados ainda não são invariantes de difeomorfismos em  $z$ , e portanto não avaliamos os operadores no espaço físico  $\mathcal{H}_{phys}$ : segundo Rovelli[7], damos um nome especial a estes operadores, chamando-os de “observáveis parciais”.

Um estado de  $\mathcal{H}_{Gauss}$  pode ser dado através de uma combinação linear dos vetores básicos  $|C, J\rangle$ , definidos em (6.32) pela relação

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |C_n, J_n\rangle. \quad (7.2)$$

Os vetores básicos  $|C, J\rangle$  correspondem ao conjunto de ciclos fechados (grafos) em torno do cilindro:  $C_n = \{C_{n1}, \dots, C_{nk}\}$  corresponde à coleção de ciclos presentes no grafo  $\Gamma$  considerado em (6.22), e  $J_n = \{J_{n1}, \dots, J_{nk}\}$  a coloração de cada um destes ciclos. Convém lembrar que cada ciclo é caracterizado por um  $z$  constante, então a cada ciclo  $C_{nk}$  temos associado uma coordenada  $z_{nk}$ .

Relembramos também a relação que define o estado  $|\Psi\rangle$ , dado por (6.14):

$$\langle A_\theta | \Psi \rangle = \Psi_0[A_\theta] \psi^{inv}[A_\theta] = \Psi[A_\theta], \quad (7.3)$$

onde  $\psi^{inv}[A_\theta]$  corresponde as holonomias dos ciclos  $C_n$ .

Assim, estamos a procurar um operador diagonal na base  $|C, J\rangle$ , na forma

$$\hat{\mathbb{W}}(x)|C, J\rangle = w_{C,J}(x)|C, J\rangle. \quad (7.4)$$

Em princípio, o operador precisa atuar nas duas partes que compõem o funcional de onda: o fator de fase  $\Psi_0[A_\theta]$  e o termo da função das holonomias  $\psi^{\text{inv}}[A_\theta]$ . O termo de fase, porém, é de difícil manipulação, por envolver integrais funcionais pouco triviais (6.12), e ao invés de resolver o operador para as duas partes simultaneamente, procuramos encontrar um operador mais específico, que atue apenas nas funções das holonomias, na forma

$$\hat{W}(x)\Psi[A_\theta] = \Psi_0[A_\theta]\hat{W}\psi[A_\theta]. \quad (7.5)$$

Em particular, estamos interessados na atuação do operador  $\hat{A}_z$ , que corresponde a derivada funcional em relação à variável canônica (6.9),

$$\langle A_\theta | \hat{A}_z(x) | \Psi \rangle = \frac{1}{ik} \frac{\delta}{\delta A_\theta(x)} \Psi[A_\theta], \quad (7.6)$$

pois  $A_\theta$  e  $A_z$  correspondem aos blocos básicos de construção da teoria.

Uma relação importante é a maneira como o operador  $\hat{A}_z(x)$  atua numa holonomia: Considere um caminho qualquer  $\gamma$  no espaço, parametrizado por  $s \in [0, 1]$ , e considere uma holonomia  $h_\gamma[A_\theta]$  sobre este caminho. O operador de derivada funcional atua de forma a inserir um elemento do grupo num determinado ponto  $x \in \gamma(s)$ , de forma a dividir a holonomia em duas:

$$\frac{\delta}{\delta A_\theta^I(x)} h_\gamma[A_\theta] = i \int_\gamma \dot{\gamma}(s) \delta^2(\gamma(s), x) [h_{\gamma(0,x)} T_I h_{\gamma(x,1)}] ds, \quad (7.7)$$

onde utilizamos a notação  $\gamma(a, b)$ ,  $a \leq s \leq b$  para indicar que o caminho  $\gamma(s)$  considerado tem como intervalo de variação  $[a, b] \subset [0, 1]$ . Esta relação pode ser obtida de várias maneiras, a mais comum sendo abrir a holonomia como

um produto ordenado e trabalhar termo a termo; um caminho mais simples é proposto em [32]. Convém lembrar que trabalhamos aqui com um sistema de unidades onde  $\hbar = 1$ .

Portanto, conhecemos como o operador  $\hat{A}_z(x)$  atua nas holonomias (e consequentemente nas funções das holonomias). Sugerimos procurar um operador atuando na forma

$$\hat{\mathbb{W}}^I(x)\Psi[A_\theta] = \Psi_0[A_\theta]\hat{A}_z^I(x)\psi[A_\theta], \quad (7.8)$$

e passamos a procurar uma construção de  $\hat{\mathbb{W}}(x)$ .

Uma maneira encontrada consiste em escolher uma forma específica para  $\hat{\mathbb{W}}$ , separando dependência da variável canônica do seu momento conjugado

$$\hat{\mathbb{W}}^I = \hat{\chi}^I[A_\theta] + \hat{A}_z^I, \quad (7.9)$$

e procuramos descobrir  $\hat{\chi}^I[A_\theta]$ . Utilizando (7.8), temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{W}}^I\Psi[A_\theta] &= \chi^I\Psi_0[A_\theta]\psi[A_\theta] + \hat{A}_z^I(x)\Psi_0[A_\theta]\psi[A_\theta] + \Psi_0[A_\theta]\hat{A}_z^I(x)\psi[A_\theta] \\ &= \Psi_0[A_\theta]\hat{A}_z^I(x)\psi[A_\theta], \end{aligned} \quad (7.10)$$

obtemos então a relação

$$\chi^I\Psi_0[A_\theta]\psi[A_\theta] + \left(\hat{A}_z^I(x)\Psi_0[A_\theta]\right)\psi[A_\theta] = 0. \quad (7.11)$$

Precisamos calcular a maneira como  $\hat{A}_z$  atua no fator de fase. Resolvendo,



obtemos o resultado

$$\hat{A}_z^I \Psi_0[A_\theta] = \frac{1}{ik} \frac{\delta}{\delta A_\theta^I} \Psi_0[A_\theta] = \frac{1}{ik} \left( 2\pi i \frac{\delta \alpha_0}{\delta A_\theta^I} \right) = (g^{-1} \partial_z g) \Psi_0[A_\theta], \quad (7.12)$$

onde  $g = g[A_\theta]$  é um elemento do grupo, funcional de  $A_\theta$  definido pela relação (6.13). Demonstramos esta relação com mais detalhes no apêndice deste capítulo. Com isto, obtemos a seguinte relação

$$\chi^I \Psi_0[A_\theta] \psi[A_\theta] = -\hat{A}_z \Psi_0[A_\theta] \psi[A_\theta] \quad (7.13)$$

$$= -(g^{-1} \partial_z g) \Psi_0[A_\theta] \psi[A_\theta] \quad (7.14)$$

$$\Rightarrow (\chi^I + g^{-1} \partial_z g) \Psi_0[A_\theta] \psi[A_\theta] = 0. \quad (7.15)$$

A solução para esta equação consiste em

$$\chi^I = -g^{-1} \partial_z g \equiv \omega_z^I[A_\theta], \quad (7.16)$$

e, portanto, obtemos um operador que cumpre nossas exigências

$$\hat{\mathbb{W}}^I = \hat{A}_z^I - \hat{\omega}_z^I. \quad (7.17)$$

Vamos agora, utilizando o operador recém-construído, desenvolver um observável relacionado a uma curva na superfície do cilindro. Considere uma curva  $c$ , parametrizada por  $u \in [0, 1]$ . Por simplicidade, vamos considerar uma curva que tenha apenas um único valor associado a cada  $z$ , e cujas extremidades se encontrem em alturas diferentes. Esta escolha simplifica as contas e não há perda de generalidade, uma vez que sempre pode-se dividir a

curva em vários segmentos, e trabalhar com cada segmento individualmente. Ainda sem perda de generalidade, vamos considerar uma curva com  $\theta = \theta_0$  constante, uma vez que podemos sempre, dada uma curva qualquer  $c$  qualquer definida pelas condições anteriores, realizar um difeomorfismo em  $\theta$  de maneira a deformar a curva, transformando-a numa reta com  $\theta$  constante. Além disso, vamos considerar inicialmente, um subgrafo  $\Gamma' \subset \Gamma$  na qual contenha apenas uma curva  $\gamma_k$ .

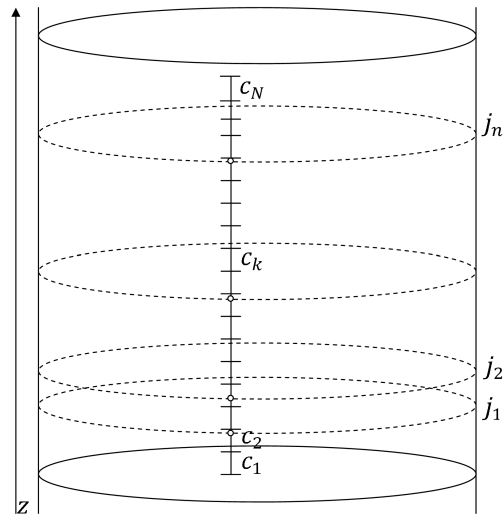


Figura 7.1: Caminho  $c$  sobre a superfície do cilindro. O caminho é particionado em um número  $N$  de segmentos suficiente para que cada segmento tenha apenas interseção com no máximo uma curva  $\gamma_k$ , representado na figura pela seu spin  $j_k$ .

Definimos um operador sobre a curva  $c$ :

$$\hat{W}_I = \int_z \hat{\mathbb{W}}_I(z) dz \quad (7.18)$$

onde integramos sobre o intervalo onde a curva é definida  $z \in [z_1, z_2]$ , e procuramos avaliar sua atuação sobre a holonomia  $h_{\gamma_k}[A_\theta]$ :

$$\begin{aligned} \hat{W}_I \Psi_0[A_\theta] h_{\gamma_k}[A_\theta] &= \Psi_0[A_\theta] \frac{1}{ik} \int_z \frac{\delta}{\delta A_\theta(\theta_0, z)} h_{\gamma_k}[A_\theta] \\ &= \Psi_0[A_\theta] \cdot \frac{1}{k} \int_z \int_\theta \delta(z - z_k) \delta(\theta - \theta_0) h_{\gamma_k(0, \theta)} T_I h_{\gamma_k(\theta, 2\pi)} d\theta dz \\ &= \frac{1}{k} \Psi_0[A_\theta] h_{\gamma_k(0, \theta_0)} T_I h_{\gamma_k(\theta_0, 2\pi)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Devido as considerações que tomamos, é garantido que estas integrais só assumem um valor não-nulo em um único ponto, que corresponde exatamente ao ponto  $P = (\theta_0, z_k)$  de interseção das duas curvas  $\gamma_k(\theta)$  e  $c(z)$ . Portanto, este operador será escrito como

$$\hat{W}_I \Psi_0[A_\theta] h_{\gamma_k}[A_\theta] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } P \text{ não existe,} \\ \Psi_0[A_\theta] \times \frac{1}{k} h_{\gamma_k(0, P)} T_I h_{\gamma_k(P, 1)} & , \text{ se } P \text{ existe.} \end{cases} \quad (7.20)$$

Este operador ainda não pode ser considerado um observável pois não é um invariante de calibre. Podemos contornar isto fazendo uma segunda aplicação deste operador sobre a holonomia, na representação de spin  $j_k$

$$\begin{aligned} \hat{W}^2 R^{(j_k)}(h_{\gamma_k}[A_\theta]) &= \frac{1}{k^2} R^{(j_k)}(h_{\gamma_k(0, P)}) R^{(j_k)}(T_I) R^{(j_k)}(T_I) R^{(j_k)}(h_{\gamma_k(P, 1)}) \\ &= -\frac{j_k(j_k + 1)}{k^2} R^{(j_k)}(h_{\gamma_k(0, P)}) R^{(j_k)}(h_{\gamma_k(P, 1)}), \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde utilizamos acima o Casimir do grupo  $SU(2)$ :

$$-\eta^{IJ}R^{(j)}(T_I)R^{(j)}(T_J) = j(j+1) \times R^{(j)}(1), \quad (7.22)$$

onde  $R^{(j)}(T_I)$  corresponde a representação irredutível do elemento do grupo  $T_I$ . Com isto, obtemos um operador invariante de calibre,  $\hat{L}$ , definido sobre os vetores correspondentes a grafos de 1 ciclo  $\gamma_k$

$$\hat{L}h_{\gamma_k}[A_\theta] = \sqrt{-\hat{W}_I^2}h_{\gamma_k}[A_\theta] \quad (7.23)$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{j_k(j_k+1)}h_{\gamma_k}[A_\theta], \quad (7.24)$$

ou, utilizando a notação de Dirac, podemos escrever

$$\hat{L}|C_k, J_k\rangle = \frac{1}{k} \sqrt{J_k(J_k+1)}|C_k, J_k\rangle. \quad (7.25)$$

Queremos agora estender os resultados para o caso para um grafo  $C$  geral. Consideramos a quantidade clássica

$$L := \int_c dz \sqrt{-\mathbb{W}^2(z)}, \quad (7.26)$$

podemos transformar esta integral numa soma de Riemann

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{l}{N} \sqrt{-\mathbb{W}^2(z_n)}, \quad (7.27)$$

onde  $l$  é o comprimento da curva  $c$ , e  $N$  é o número de segmentos na qual a curva é dividida. (ver figura 7.1)

Por outro lado, podemos criar uma quantidade que atua apenas num segmento  $c_n$  da curva

$$W_{c_n}^I := \int_{c_n} \mathbb{W}^I(z). \quad (7.28)$$

Note que, se o segmento  $c_n$  for pequeno o suficiente, podemos aproximar esta integral por

$$\int_{c_n} \mathbb{W}^I(z) \simeq \frac{l}{N} \mathbb{W}^I(z_n). \quad (7.29)$$

Assim, podemos definir uma quantidade que, em cada segmento, tem o valor

$$M_n := \sqrt{-(W_{c_n}^I)^2} \simeq \frac{l}{N} \sqrt{-\mathbb{W}^2(z_n)}, \quad (7.30)$$

que corresponde exatamente aos termos da soma de Riemann para  $L$ . Portanto, definimos<sup>1</sup>

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{l}{N} \sqrt{-\mathbb{W}^2(z_n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N M_n. \quad (7.31)$$

Para um valor suficientemente grande de  $N$ ,  $c_n \cap C$  contém apenas 0 ou

---

<sup>1</sup>O leitor poderia se perguntar por quê não definimos  $L$  simplesmente como  $\int_c dz \mathbb{W}^2(z)$ , uma vez que tomar a raiz parece desnecessário. Mas esta definição produziria um termo  $l^2/N^2$  em contrapartida ao termo da soma de Riemman  $l/N$ , e não poderíamos chegar à conclusão em (7.31).

1 ponto. Utilizando o resultado obtido em (7.24), temos então

$$\hat{M}_n|C, J\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } c_n \cap C = \emptyset, \\ \frac{1}{k} \sqrt{j_k(j_k + 1)}|C, J\rangle & \text{se } c_n \cap C \neq \emptyset, \end{cases} \quad (7.32)$$

portanto, se somamos em todos segmentos  $c_n$  da curva  $c$ , obtemos

$$\sum_{n=1}^N \hat{M}_n|C, J\rangle = \frac{1}{k} \sum_k \sqrt{j_k(j_k + 1)}|C, J\rangle, \quad (7.33)$$

onde a soma em  $k$  percorre todos os  $\gamma_k$  tais que  $c \cap \gamma_k \neq \emptyset$ . Note que neste ponto a soma não depende mais de  $N$ .

Isto justifica a definição do operador  $\hat{L}$  por

$$\hat{L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \hat{M}_n, \quad (7.34)$$

que é a quantização da quantidade clássica (7.26). Note que o espectro é invariante sob difeomorfismos em  $z$  e portanto, é uma quantidade física.

Devemos realçar que, embora o resultado seja físico, os estados considerados na atuação do operador não pertencem ao espaço de Hilbert físico  $\mathcal{H}_{phys}$ . Para definir este operador no espaço de Hilbert físico, precisamos definir sua atuação no espaço dual de  $S_0$ , do qual  $\mathcal{H}_{phys}$  é um subespaço. Esta continuação poderá ser considerada num trabalho futuro.

## 7.1 Apêndice

Este apêndice consiste na demonstração da equação (7.12). Em particular, estamos interessados na variação funcional do termo de fase presente no funcional de onda (6.12). Podemos identificar, dentro do termo de fase  $\alpha_0$ , duas ações típicas, uma sendo a ação de Wess-Zumino

$$S_{WZ} = \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \partial_\rho g), \quad (7.35)$$

e outra sendo a ação do modelo- $\sigma$

$$S_\sigma = \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2x A_\theta \omega_z, \quad (7.36)$$

onde  $\Sigma$  corresponde a variedade espacial, e  $\tilde{\Sigma}$  corresponde a variedade que possui  $\Sigma$  como borda. Feitas estas identificações, podemos reescrever o termo  $\alpha_0$

$$\delta\alpha_0 = \frac{k}{6\pi} \delta S_{WZ} - \frac{k}{2\pi} \delta S_\sigma = \frac{k}{2\pi} \left( \frac{1}{3} \delta S_{WZ} - \delta S_\sigma \right) \quad (7.37)$$

### 7.1.1 Variação da Ação de Wess-Zumino

Consideramos a Ação de Wess-Zumino (7.35). Para simplificar o tratamento, podemos utilizar a notação de formas diferenciais, para escrevermos

$$S_{WZ} = \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} (g^{-1} dg)^3. \quad (7.38)$$

Chamando o termo  $g^{-1} dg = \omega$ , com  $d\omega = -\omega^2$ , a integral obtém uma

forma simples

$$S_{WZ} = \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} \omega^3. \quad (7.39)$$

Passamos então a calcular a variação deste termo.

$$\begin{aligned} \delta S_{WZ} &= \delta \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} \omega^3 \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} \delta \omega \omega^2 \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} (g^{-1} d\delta g - g^{-1} \delta g g^{-1} dg) \omega^2 \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} d\delta g \omega^2 g^{-1} - \delta g \omega^3 g^{-1} \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} d(\delta g \omega^2 g^{-1}). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Usamos então o Teorema de Gauss para levar esta integral apenas para a borda do espaço, onde obtemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{WZ} &= 3 \text{Tr} \int_{\tilde{\Sigma}} d(\delta g \omega^2 g^{-1}) \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\Sigma} \delta g \omega^2 g^{-1} \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2 x \delta g \epsilon^{ab} (g^{-1} \partial_a g g^{-1} \partial_b g) g^{-1} \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2 x g^{-1} \delta g (g^{-1} \partial_\theta g g^{-1} \partial_z g - g^{-1} \partial_z g g^{-1} \partial_\theta g) \\ &= 3 \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2 x [A_\theta, \omega_z] g^{-1} \delta g, \end{aligned} \quad (7.41)$$

onde fizemos a identificação  $\omega_z = g^{-1} \partial_z g$  para simplificação.



### 7.1.2 Variação da Ação do modelo- $\sigma$

Consideramos agora a ação (7.36). Tomando sua variação com respeito a  $g$ , temos

$$\delta S_\sigma = \delta \text{Tr} \int_\Sigma d^2x A_\theta \omega_z = \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (\delta A_\theta \omega_z + A_\theta \delta \omega_z). \quad (7.42)$$

Podemos desenvolver as duas variações  $\delta A_\theta$  e  $\delta \omega_z$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \int_\Sigma d^2x \delta A_\theta &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x \delta(g^{-1} \partial_\theta g) = \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (-g^{-1} \delta g g^{-1} \partial_\theta g + g^{-1} \partial_\theta \delta g) \\ &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (-g^{-1} \delta g A_\theta + \partial_\theta (g^{-1} \delta g) + g^{-1} \partial_\theta g g^{-1} \delta g) \\ &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (\partial_\theta (g^{-1} \delta g) + A_\theta g^{-1} \delta g - g^{-1} \delta g A_\theta) \\ &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (\partial_\theta (g^{-1} \delta g) + [A_\theta, g^{-1} \delta g]) \\ &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x D_\theta (g^{-1} \delta g). \end{aligned} \quad (7.43)$$

O desenvolvimento para  $\delta \omega_z$  é totalmente similar, se consideramos uma derivada covariante na forma  $D_z \cdot = \partial_z \cdot + [\omega_z, \cdot]$ . Como a derivada covariante também segue uma regra de Leibniz, fazemos uma integração por partes, utilizando as relações desenvolvidas acima

$$\begin{aligned} \delta S_\sigma &= \text{Tr} \int_\Sigma d^2x (D_\theta (g^{-1} \delta g) \omega_z + A_\theta D_z (g^{-1} \delta g)) \\ &= -\text{Tr} \int_\Sigma d^2x g^{-1} \delta g [D_\theta \omega_z + D_z \omega_\theta]. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Podemos desenvolver estas derivadas covariantes e transformar em derivadas simples

$$\begin{aligned}
D_\theta \omega_z &= \partial_\theta(g^{-1}\partial_z g) + [A_\theta, g^{-1}\partial_z g] \\
&= [g^{-1}\partial_\theta\partial_z g] - g^{-1}\partial_z g g^{-1}\partial_\theta g \\
&= [\partial_z(g^{-1}\partial_\theta g) + g^{-1}\partial_z g g^{-1}\partial_\theta g] - g^{-1}\partial_z g g^{-1}\partial_\theta g \\
&= \partial_z A_\theta, \tag{7.45}
\end{aligned}$$

mais uma vez, de maneira totalmente análoga, pode-se proceder para encontrar a relação  $D_z A_\theta = \partial_\theta \omega_z$ . Utilizamos estes resultados para encontrar a variação do modelo- $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
\delta S_\sigma &= -\text{Tr} \int_\Sigma d^2 x g^{-1} \delta g (\partial_z A_\theta + \partial_\theta \omega_z) \\
&= -\text{Tr} \int_\Sigma d^2 x g^{-1} \delta g (\partial_z A_\theta + D_\theta \omega_z - [A_\theta, \omega_z]) \\
&= -2\text{Tr} \int_\Sigma d^2 x g^{-1} \delta g \partial_z A_\theta + \text{Tr} \int_\Sigma d^2 x g^{-1} \delta g [A_\theta, \omega_z]. \tag{7.46}
\end{aligned}$$

## Derivada Funcional da Fase

Com as variações em mãos, podemos substituir os resultados obtidos na equação (7.37), para obter:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_0 &= \frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2x g^{-1} \delta g \partial_z A_{\theta} \\
&= \frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2x D_{\theta} \omega_z g^{-1} \delta g \\
&= -\frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2x \omega_z D_{\theta} (g^{-1} \delta g) \\
&= -\frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2x \omega_z \delta A_{\theta},
\end{aligned} \tag{7.47}$$

com isto, obtemos facilmente a derivada funcional de  $\alpha_0$  em relação a  $A_{\theta}$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\alpha_0}{\delta A_{\theta}^I(\vec{x})} &= -\frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2y \omega_z^J \tau_J \frac{\delta A_{\theta}^J(\vec{y})}{\delta A_{\theta}^I(\vec{x})} \tau_J \\
&= -\frac{k}{\pi} \text{Tr} \int_{\Sigma} d^2y \omega_z^J \delta^{IJ} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \tau_J \tau_J \\
&= -\frac{k}{\pi} \text{Tr} \omega_z^I \tau_I \tau_I \\
&= \frac{k}{2\pi} \omega_z^I.
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Agora podemos voltar à primeira das igualdades (7.12) para concluir

$$\begin{aligned}
\hat{A}_z^I \Psi_0[A_{\theta}] &= \frac{1}{ik} \frac{\delta}{\delta A_{\theta}^I} \Psi_0[A_{\theta}] \\
&= \frac{1}{ik} \left( 2\pi i \frac{\delta\alpha_0}{\delta A_{\theta}^I} \right) \Psi_0[A_{\theta}] \\
&= \frac{1}{ik} \left( 2\pi i \frac{k}{2\pi} \omega_z^I \right) \Psi_0[A_{\theta}] \\
&= (g^{-1} \partial_z g) \Psi_0[A_{\theta}],
\end{aligned} \tag{7.49}$$

o que demonstra o resultado dado pela terceira igualdade (7.12)

## Capítulo 8

# Fixação de Gauge para a Gravitação com constante cosmológica: Relação com Chern-Simons

No capítulo 4 nós demonstramos que a Relatividade Geral em 2+1 dimensões pode ser escrita como uma teoria de Chern-Simons tendo como grupo de gauge o grupo de Poincaré, e de formas diferentes, mostramos que isto acontece independentemente da ação conter um termo de constante cosmológica, onde devido ao fato de possuímos dois casimires no grupo  $SO(3,1)$  (ou  $SO(2,2)$ ), podemos construir duas ações diferentes, porém que compartilham as mesmas equações de movimento, e portanto, são classicamente equivalentes.

Porém, sendo nosso interesse quantizar esta teoria, mais geral (no sentido que podemos reobter a Relatividade Geral sem constante cosmológica tomando os limites adequados), nos deparamos com um problema devido ao grupo de simetria: quando analisamos a quantização de Chern-Simons num cilindro, onde o grupo tomado era  $SU(2)$ , tivemos problemas em lidar com a direção não-compacta  $z$ , onde o vínculo relacionado a simetria translacional nesta direção produziu o fator de fase, que tornou a teoria bem menos trivial, e sua implementação teve de ser realizada de forma manual; Em geral, grupos não-compactos trazem problemas na definição das quantidades físicas na teoria quântica, e nem sempre é possível resolvê-las de forma analítica. Este é o tipo de problema que enfrentamos quando tentamos lidar com a quantização da Relatividade Geral: seu grupo de gauge (o grupo de Lorentz) é não-compacto, e sua quantização então é problemática.

Para contornar este tipo de problema, uma sugestão possível é a de fixar o gauge nas direções não-compactas, de forma a simplificar o grupo de simetrias associado. Poderíamos, por exemplo, escolher as direções não-compactas de  $SO(3,1)$  e fixá-las através de condições de gauge. O resultado esperado deste “congelamento” das simetrias seria que o grupo resultante fosse compacto, na forma  $SO(3)$ , cuja álgebra é isomorfo a  $su(2)$ , trazendo portanto a teoria à terrenos conhecidos, onde podemos utilizar nosso conhecimento do capítulo 7 para quantizá-la. Seguimos esta sugestão neste capítulo.

Este capítulo é um resumo do trabalho [30], em andamento.

Relembrando o que já fizemos, começamos por considerar a ação de

Chern-Simons

$$S = -\frac{k}{2} \int_{\mathcal{M}} \langle A, dA + \frac{2}{3} A \wedge A \rangle, \quad (8.1)$$

e relembramos que  $A$  é uma 1-forma:  $A = A_\mu dx^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ . Fazendo a separação da componente temporal  $A = A_t dx^0 + A_a dx^a$ , podemos escrever a ação como

$$S = -\frac{k}{2} \int_{\mathbb{R}} dx^0 \int_{\Sigma} \langle \dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A} \rangle + 2 \langle A_t, \mathbf{F} \rangle, \quad (8.2)$$

na qual fatorizamos a variedade em  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ , e  $\mathbf{A} = A_a dx^a$ ,  $a = 1, 2$ .

Agora devemos lembrar que a conexão espacial  $\mathbf{A}$  é escrita em termos da álgebra de Lie do grupo de gauge, onde escolhemos o setor  $\Lambda > 0$ , definido por uma constante cosmológica positiva (já definida em 4.23), e a assinatura  $\sigma = \pm 1$  que nos permite escolher entre os grupos  $SO(4)$  Euclidiano ou  $SO(3, 1)$  Lorentziano. Escrevemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^i K_i + \mathbf{A}_2^i L_i, \quad (8.3)$$

onde  $K_i$  correspondem aos geradores de *boosts* e  $L_i$  corresponde aos geradores de rotação no grupo  $SO(3, 1)$  (ou  $SO(4)$ ), e os índices correspondem a  $i, j = 1, 2, 3$ . Para fixar a notação, escrevemos a conexão de forma completa:

$$A = (A_{t1}^i K_i + A_{t2}^i L_i) dx^0 + (A_{a1}^i K_i + A_{a2}^i L_i) dx^a \quad (8.4)$$

Observe que, sob esta notação, os coeficientes da conexão são objetos de

3 índices  $A_{I\mu}^i$ , com  $i = 1, 2, 3$ ,  $I = 1, 2$ , e  $\mu = 0, 1, 2 \equiv t, x, y$ .

Note que fazendo isto separamos qual parte da conexão está relacionada aos *boosts* e qual está relacionada às rotações: como citado antes, nossa intenção é de congelar estes *boosts*. A álgebra de Lie destes geradores é dada por

$$[L_i, L_j] = \varepsilon_{ij}{}^k L_k, [L_i, K_j] = \varepsilon_{ij}{}^k K_k, [K_i, K_j] = \sigma \varepsilon_{ij}{}^k J_k \quad (8.5)$$

Podemos relacionar os geradores e a conexão com os resultados que tínhamos anteriormente através de

$$K = (J_2, -J_1, P_0/\sqrt{\Lambda}), \quad (8.6)$$

$$L = (P_2/\sqrt{\Lambda}, -P_1/\sqrt{\Lambda}, \sigma J_0), \quad (8.7)$$

$$\mathbf{A}_1 = (\omega^2, -\omega^1, e^0 \sqrt{\Lambda}), \quad (8.8)$$

$$\mathbf{A}_2 = (e^2 \sqrt{\Lambda}, -e^1 \sqrt{\Lambda}, \sigma \omega^0), \quad (8.9)$$

onde os  $J_i$  e  $P_i$  formam uma base da álgebra de Lie, que já foi definida em (4.24),(4.25),(4.26).

Como tínhamos anteriormente, as formas quadráticas invariantes aqui são os dois Casimir do grupo, que podemos escrever como  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1$  e o outro Casimir dado por  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle^* = \sigma \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2$ , e a notação  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^i \mathbf{B}_i$ , uma vez que todos elementos do grupo utilizam a métrica tridimensional  $\delta_{ij}$  para subir e descer índices. Com isto, a ação (4.39) fica



sendo escrita na forma

$$\begin{aligned}
S &= \int dx^0 \mathcal{L} \\
&= -\frac{k}{2} \int_{\mathbb{R}} dx^0 \int_{\Sigma} \left[ \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \left( \mathbf{A}_2 - \frac{\sigma}{\gamma} \mathbf{A}_1 \right) + \dot{\mathbf{A}}_2 \cdot \left( \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\gamma} \mathbf{A}_2 \right) \right] \\
&\quad - \mathcal{G}_1(A_{t1}) - \mathcal{G}_2(A_{t2}), \tag{8.10}
\end{aligned}$$

onde definimos funcionais  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  por

$$\mathcal{G}_1(\varepsilon) \equiv k \int_{\Sigma} \varepsilon \cdot \left[ \mathbf{F} + \frac{\sigma}{2} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1 - \frac{\sigma}{\gamma} D\mathbf{A}_1 \right], \tag{8.11}$$

$$\mathcal{G}_2(\varepsilon) \equiv k \int_{\Sigma} \varepsilon \cdot \left[ D\mathbf{A}_1 - \frac{1}{\gamma} \left( \mathbf{F} + \frac{\sigma}{2} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1 \right) \right], \tag{8.12}$$

e utilizamos a derivada covariante definida por  $D\mathbf{A}_1 = d\mathbf{A}_1 + [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1]$ , em conjunto com a notação  $[A, B] = A \times B$ .

Queremos agora realizar a análise canônica desta ação, e obter o Hamiltoniano associado. Definindo os momentos das variáveis canônicas

$$\Pi^1 = \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{A}}_1} = -\frac{k}{2} \left( \mathbf{A}_2 - \frac{\sigma}{\gamma} \mathbf{A}_1 \right), \tag{8.13}$$

$$\Pi^2 = \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{A}}_2} = -\frac{k}{2} \left( \mathbf{A}_1 - \frac{1}{\gamma} \mathbf{A}_2 \right), \tag{8.14}$$

$$\Pi^{t1} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{A}}_{t1}} = 0, \tag{8.15}$$

$$\Pi^{t2} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{A}}_{t2}} = 0, \tag{8.16}$$

de onde obtemos os vínculos primários

$$\chi^1 = \Pi^1 + \frac{k}{2}(\mathbf{A}_2 - \frac{\sigma}{\gamma}\mathbf{A}_1) \approx 0, \quad (8.17)$$

$$\chi^2 = \Pi^2 + \frac{k}{2}(\mathbf{A}_1 - \frac{1}{\gamma}\mathbf{A}_2) \approx 0, \quad (8.18)$$

$$\chi^{t1} = \Pi^{t1} \approx 0, \quad (8.19)$$

$$\chi^{t2} = \Pi^{t2} \approx 0, \quad (8.20)$$

e obtemos os colchetes de Poisson entre os vínculos, lembrando os colchetes fundamentais  $\{\mathbf{A}_I, \Pi^J\} = \{\mathbf{A}_{tI}, \Pi^{tJ}\} = \delta_I^J$ :

$$\{\chi^1, \chi^1\} = -\frac{\sigma}{\gamma}k\epsilon, \quad (8.21)$$

$$\{\chi^1, \chi^2\} = k\epsilon, \quad (8.22)$$

$$\{\chi^2, \chi^2\} = -\frac{1}{\gamma}k\epsilon. \quad (8.23)$$

Com isto construímos a matriz  $\Delta$  dos vínculos  $\chi^1$  e  $\chi^2$ , já que os vínculos  $\chi^3$  e  $\chi^4$  já possuem colchetes nulos com todos outros vínculos:

$$\Delta = k\epsilon\Omega, \quad (8.24)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{\gamma} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

a inversa dela é dada por

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\det \Omega} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\gamma} & -1 \\ -1 & -\frac{\sigma}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

onde o termo  $\det\Omega$  é

$$\det \Omega = \frac{\sigma}{\gamma^2} - 1. \quad (8.27)$$

Como os colchetes entre os vínculos primários não são nulos, precisamos construir os colchetes de Dirac:

$$\{\chi^I, \chi^J\}_D = \{\chi^I, \chi^J\} - \{\chi^I, \chi^K\}(\Delta^{-1})_{KL}\{\chi^L, \chi^J\}. \quad (8.28)$$

Embora aqui tenha sido escrito de forma geral, mais como um lembrete, é simples de visualizar que os novos colchetes zeram nos vínculos.

Obtemos então os colchetes de Dirac para as variáveis canônicas:

$$\{A_{a1}^i, A_{b1}^j\}_D = \frac{1}{k}\epsilon_{ab}\delta^{ij}\frac{\gamma}{\sigma - \gamma^2}, \quad (8.29)$$

$$\{A_{a1}^i, A_{b2}^j\}_D = \frac{1}{k}\epsilon_{ab}\delta^{ij}\frac{\gamma^2}{\sigma - \gamma^2}, \quad (8.30)$$

$$\{A_{a2}^i, A_{b2}^j\}_D = \frac{1}{k}\epsilon_{ab}\delta^{ij}\frac{\sigma\gamma}{\sigma - \gamma^2}. \quad (8.31)$$

Os vínculos secundários, que garantem a estabilidade dos vínculos  $\Pi^{t1}$  e  $\Pi^{t2}$  são dados exatamente por  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . Com isto, podemos escrever a Hamiltoniana deste sistema na forma

$$H = \mathcal{G}_1(A_{t1}) + \mathcal{G}_2(A_{t2}) + \int \lambda_{t1}\Pi^{t1} + \lambda_{t2}\Pi^{t2}. \quad (8.32)$$

As variáveis do espaço de fase são  $A_{x1}, A_{y1}, A_{x2}, A_{y2}, A_{t1}, \Pi^{t1}, A_{t2}, \Pi^{t2}$ , pois uma vez que construímos os colchetes de Dirac para os vínculos  $\chi^1$  e  $\chi^2$ ,

podemos considerá-los fortemente zero, e resolver para os vínculos  $\Pi^1$  e  $\Pi^2$ .

Com a ajuda da variação dos vínculos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$

$$\delta\mathcal{G}_1(\eta) = k\sigma\left(\frac{1}{\gamma}D\eta - \mathbf{A}_1 \times \eta\right)\delta\mathbf{A}_1 - k\left(D\eta - \frac{\sigma}{\gamma}\mathbf{A}_1 \times \eta\right)\delta\mathbf{A}_2, \quad (8.33)$$

$$\delta\mathcal{G}_2(\eta) = -k\left(D\eta - \frac{\sigma}{\gamma}\mathbf{A}_1 \times \eta\right)\delta\mathbf{A}_1 + k\left(\frac{1}{\gamma}D\eta - \mathbf{A}_1 \times \eta\right)\delta\mathbf{A}_2, \quad (8.34)$$

podemos calcular os colchetes de Dirac dos vínculos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$

$$\{\mathcal{G}_1(\eta), \mathcal{G}_2(\eta')\}_D = \sigma\mathcal{G}_2(\eta \times \eta'), \quad (8.35)$$

$$\{\mathcal{G}_1(\eta), \mathcal{G}_1(\eta')\}_D = \mathcal{G}_1(\eta \times \eta'), \quad (8.36)$$

$$\{\mathcal{G}_2(\eta), \mathcal{G}_2(\eta')\}_D = \mathcal{G}_2(\eta \times \eta'), \quad (8.37)$$

mostrando que estes vínculos são de primeira classe e que eles geram as transformações de gauge dadas por

$$\{\mathcal{G}_1(\eta), \mathbf{A}_1\}_D = D\eta, \quad (8.38)$$

$$\{\mathcal{G}_1(\eta), \mathbf{A}_2\}_D = \sigma\eta \times \mathbf{A}_1, \quad (8.39)$$

$$\{\mathcal{G}_2(\eta), \mathbf{A}_1\}_D = \eta \times \mathbf{A}_1, \quad (8.40)$$

$$\{\mathcal{G}_2(\eta), \mathbf{A}_2\}_D = D\eta. \quad (8.41)$$

Estas transformações de gauge correspondem àquelas encontradas na teoria BF<sup>1</sup>, onde as duas primeiras transformações de gauge correspondem as transformações “topológicas” enquanto as duas últimas correspondem às

---

<sup>1</sup>A teoria BF corresponde a uma outra teoria de gauge, onde temos dois campos de gauge independentes B e A. Esta formulação permite uma descrição da Relatividade Geral em 4 dimensões como uma teoria de gauge. Para uma descrição detalhada, ver [7][8].

transformações de gauge usuais. Neste caso podemos interpretar  $\mathbf{A}_1$  como a conexão e  $\mathbf{A}_2$  como campo  $B$  na teoria  $BF$ .

Agora vamos escolher uma fixação de gauge. Queremos fixar o gauge para uma das simetrias não-compactas, então escolhemos um dos coeficientes dos boosts  $\mathbf{A}_1$ : por exemplo  $A_{y1} = 0$ .

Implementar esta condição de gauge na teoria significa impor mais um vínculo, e este deve entrar na Hamiltoniana,

$$H = \mathcal{G}_1(A_{t1}) + \mathcal{G}_2(A_{t2}) + \int \lambda_{t1}\Pi^{t1} + \lambda_{t2}\Pi^{t2} + \mu A_{y1}, \quad (8.42)$$

e analisando sua consistência

$$\dot{A}_{y1} = \{A_{y1}, H\}_D = \{A_{y1}, \mathcal{G}_1(A_{t1})\}_D + \{A_{y1}, \mathcal{G}_2(A_{t2})\}_D \quad (8.43)$$

$$= -D_y A_{t1} - A_{y1} \times A_{t1} \quad (8.44)$$

$$= -D_y A_{t1}, \quad (8.45)$$

que corresponde a um novo vínculo, que também acrescentamos ao hamiltoniano

$$H = \mathcal{G}_1(A_{t1}) + \mathcal{G}_2(A_{t2}) + \int \lambda_{t1}\Pi^{t1} + \lambda_{t2}\Pi^{t2} + \mu A_{y1} + \nu D_y A_{t1}. \quad (8.46)$$

É fácil ver que  $\Pi^{t2}$  é um vínculo de primeira classe; o outro vínculo de primeira classe é  $\mathcal{G}_2$ , cujos colchetes com os novos vínculos são dados por

$$\{\mathcal{G}_2, A_{y1}\}_D = \delta \times A_{y1} \approx 0. \quad (8.47)$$

Para calcular o colchete com o vínculo  $\mathcal{G}_3 \equiv D_y A_{t1}$ , definimos seu *smeared*  $\mathcal{G}_3(\eta) = \int \eta D_y A_{t1}$ , obtendo

$$\{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_4\} = \int \eta (D_y \delta \times A_{t1}) = - \int \delta \times \eta D_y A_{t1} \approx 0, \quad (8.48)$$

e os outros vínculos,  $\mathcal{G}_1, \Pi^{t1}, A_{y1}, D_y A_{t1}$ , são de segunda classe. Queremos então construir novos colchetes de Dirac para estes vínculos.

Uma observação importante é de que  $A_{t1}$  se comporta como um multiplicador de Lagrange, e  $D_y A_{t1} = 0$ , seria uma condição que fixa este multiplicador, portanto, não aparecerá como vínculo: fixamos  $\nu = 0$  em (8.46).

A matriz dos vínculos é dada por

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_y \delta, \quad (8.49)$$

e sua inversa é dada por

$$\tilde{\Delta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} f, \quad (8.50)$$

onde  $f$  é definido de tal maneira que o corresponde ao inverso de  $D_y \delta$  no sentido de convolução

$$D_y \delta \star f = f \star D_y \delta = \delta. \quad (8.51)$$

Construímos os colchetes de Dirac de segunda geração

$$\{\chi^i, \chi^j\}_{D2} = \{\chi^i, \chi^j\}_D - \{\chi^i, \chi^k\}_D (\tilde{\Delta}^{-1})_{kl} \{\chi^l, \chi^j\}_D. \quad (8.52)$$

Isto faz com que os vínculos de segunda classe sejam tomados como fortemente zero a partir de agora, isto é

$$\mathcal{G}_1 = 0, \quad (8.53)$$

$$\Pi^{t1} = 0, \quad (8.54)$$

$$A_{y1} = 0, \quad (8.55)$$

$$D_y A_{t1} = 0. \quad (8.56)$$

Portanto com a fixação de gauge  $A_{y1} = 0$  nosso espaço de fase se reduziu bastante, tendo como variáveis agora

$$A_{x1}, A_{x2}, A_{y2}, A_{t2}, \Pi^{t2}. \quad (8.57)$$

Note que o espaço de fase deve ser composto por metade de coordenadas como variáveis canônicas e metade como seus momentos conjugados, e algo como um espaço de fase com dimensão ímpar não existe; de fato, podemos eliminar uma das variáveis canônicas utilizando relações conhecidas para expressá-la como função das outras. Utilizaremos o vínculo  $\mathcal{G}_1$  para escrever

$$\mathcal{G}_1 = F + \frac{\sigma}{2} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1 - \frac{\sigma}{\gamma} D \mathbf{A}_1. \quad (8.58)$$

Abrindo em componentes e impondo  $A_{y1} = 0$  teremos

$$0 = \partial_x A_{y2} - \partial_y A_{x2} + A_{x2} \times A_{y2} - \frac{\sigma}{\gamma} (-\partial_y A_{x1} - A_{y2} \times A_{x1}) \quad (8.59)$$

$$= \partial_x A_{y2} - D_y (A_{x2} - \frac{\sigma}{\gamma} A_{x1}), \quad (8.60)$$

e devemos escolher uma das componentes para ser escrita em função das outras, como por exemplo, podemos escrever

$$D_y A_{x1} = \sigma \gamma (\partial_x A_{y2} - D_y A_{x2}). \quad (8.61)$$

A Hamiltoniana, após a fixação de gauge, é escrita como

$$H = \mathcal{G}_2(A_{t2}) + \int \lambda_{t2} \Pi^{t2}, \quad (8.62)$$

e abrindo, temos

$$H = \frac{k}{\gamma} \int A_{t2} [D_y (A_{x2} - \gamma A_{x1}) - \partial_x A_{y2}] + \int \lambda_{t2} \Pi^{t2}. \quad (8.63)$$

Se substituimos (8.61), obtemos

$$H = k \sigma \gamma \det \Omega \int A_{t2} (\partial_x A_{y2} - \partial_y A_{x2} + [A_{x2}, A_{y2}]), \quad (8.64)$$

onde  $\det \Omega$  foi definido em (8.26). Podemos simplificar, definindo um novo objeto  $\bar{A} = (A_{t2}, A_{x2}, A_{y2}) \equiv (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$ , e escrevemos

$$H = k \gamma \det \Omega \int \bar{A}_1 (\partial_2 \bar{A}_3 - \partial_3 \bar{A}_2 + [\bar{A}_2, \bar{A}_3]), \quad (8.65)$$



que corresponde a um termo de Chern-Simons neste objeto, com um grupo compacto  $SO(3)$ . Deve-se notar que, observando (8.27), esta teoria é mal-definida no caso onde  $\gamma^2 = \sigma$ , onde temos um determinante nulo para a matriz  $\Delta$  dos vínculos e, portanto, não podemos definir um colchete de Dirac. Isto não acontece no caso onde  $\gamma = 0$ , onde temos uma teoria bem-definida, já feita no capítulo 4.

# Capítulo 9

## Considerações Finais

Trabalhamos, de forma integrada, na construção do modelo de Chern-Simons, tanto sua quantização, nos moldes da Loop Quantum Gravity, quanto sua equivalência com a gravitação em 2+1 dimensões. De certa forma, constitui-se de uma das teorias de gauge mais simples, mas como pôde-se ver neste trabalho, não significa de forma alguma que seja trivial; muito pelo contrário, apesar da aparente simplicidade, existem aplicações em várias teorias além da gravitacional, como por exemplo o efeito Hall quântico, cuja interação entre os elétrons é descrito por uma ação de Chern-Simons, e sua quantização é também feita em [31].

Através da exploração da quantização do modelo de Chern-Simons, pudemos investigar a atuação dos observáveis neste modelo, e compará-los com os existentes na gravitação em 2+1 dimensões: o operador obtido através da quantização possui similaridade com o operador de área no modelo BF, e é invariante de gauge. Em sua construção, utilizamos o espaço dos estados cujo vínculo de Gauss estava resolvido, e estes estados não eram invariantes sob

difeomorfismos em  $z$ ; ainda assim, o espectro obtido era independente de  $z$  e, portanto, pode ser considerado uma quantidade física. Pode-se considerar, em algum trabalho futuro, estender este operador para o espaço de Hilbert físico.

Também exploramos, pelo outro lado, a gravitação em 2+1 dimensões como um modelo de Chern-Simons, analisando a inclusão da constante cosmológica; como estamos interessados na quantização deste modelo, precisamos ter grupos compactos para definir uma base no espaço de Hilbert cinemático, e este não era o caso. Surgiu então, a idéia de, da mesma forma que se faz na eletrodinâmica e na gravitação quântica (com modelo BF), tomar uma fixação de gauge que eliminasse os graus de liberdade não-compactos do grupo; de fato, no final obtemos uma ação típica de Chern-Simons, como era de se esperar, com um grupo compacto  $SO(3)$ , cuja quantização não apresenta quaisquer problemas aparentes, podendo até mesmo nos guiar pelo capítulo 6 para efetuar-la.

Por efeito de aprendizado, a quantidade de assuntos necessários para se compreender o trabalho é ampla: sistemas clássicos vinculados, relatividade geral, formas diferenciais, teoria de grupos, teorias de gauge, mecânica quântica, formalismo de laços para a gravitação, dentre outros itens mais específicos em cada capítulo, como por exemplo o teorema de Peter-Weyl, que é de extrema importância para definir o espaço de Hilbert na Loop Quantum Gravity.

Para uma futura continuação do assunto tratado neste trabalho, é possível se analisar uma possível quantização de uma teoria de Chern-Simons em dimensões maiores, e verificar se existe uma correspondência com a gravitação;

um possível resultado que se pode obter seria, analisando o caso de uma ação de Chern-Simons em 5 dimensões, poderíamos impor a mão um vínculo anulando uma destas dimensões, para se ter uma tentativa de quantização da gravitação em 3+1 dimensões sob uma formulação canônica, onde pode-se estudar também a aplicação de um formalismo de Spin-foams para Chern-Simons, e verificar se existe uma equivalência com os resultados conhecidos.

# Referências

- [1] Deser, S., “General Relativity and the Divergence Problem in Quantum Field Theory” *Rev. Mod. Phys.* **29-3**, 417-423 (1957).
- [2] Deser, S. and van Nieuwenhuizen, P., “One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields”, *Phys. Rev. D* **10-2**, 401-410 (1974).
- [3] Deser, S. and van Nieuwenhuizen, P., “Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system”, *Phys. Rev. D* **10-2**, 411-420 (1974).
- [4] G. 't Hooft and M. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields ” *Nuc. Phys. B* **44**, 189-213 (1972).
- [5] G. 't Hooft, “Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields,” *Nucl. Phys.* **B35**, 167-188 (1971).
- [6] A. Ashtekar, 1987, ”New Hamiltonian formulation of general relativity”, *Phys. Rev. D* **36**, 1587-1602
- [7] C. Rovelli, “Quantum gravity,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 455 p. on *Mathematical Physics*, 2004, ISBN 0 521 83733 2
- [8] T. Thiemann, “Modern canonical quantum general relativity,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007) 819 p. [gr-qc/0110034]. *Monographs on Mathematical Physics*, 2008, ISBN 978-0-521-74187-3
- [9] R. Gambini, J. Pullin, “Loops, knots, gauge theories and quantum gravity,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 321 p.
- [10] J. Foster, J. D. Nightingale, “A short course in general relativity,” New York, USA: Springer (1995) 250 p.
- [11] R. M. Wald, “General Relativity,” Chicago, Usa: Univ. Pr. ( 1984) 491p.
- [12] N.A. Lemos, “Mecânica Analítica”, Editora Livraria da Física, 2007, ISBN 85-88325-24-1

- [13] A. Einstein, “The Meaning of Relativity”, Princeton University Press, 1988, ISBN 0-691-02352-2
- [14] J.D. Jackson, “Classical Eelectrodynamics”, John Wiley & Sons Inc., 1998, ISBN 978-0-471-30932-1
- [15] E.Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System,” Nucl. Phys. **B311**, 46 (1988).
- [16] G. V. Dunne, R. Jackiw, C. A. Trugenberger, “Chern-Simons Theory in the Schrodinger Representation,” Annals Phys. **194**, 197 (1989).
- [17] C. P. Constantinidis, G. Luchini, O. Piguet, “The Hilbert space of Chern-Simons theory on the cylinder. A Loop Quantum Gravity approach,” Class. Quant. Grav. **27**, 065009 (2010). [arXiv:0907.3240 [gr-qc]].
- [18] V. Bonzom, E. R. Livine, Class. Quant. Grav. **25**, 195024 (2008). [arXiv:0801.4241 [gr-qc]].
- [19] Plancherel, Michel; Leffler, Mittag (1910), ”Contribution à l’étude de la représentation d’une fonction arbitraire par les intégrales définies”, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 30: 289-335, doi:10.1007/BF03014877
- [20] Haar, A. (1933), ”Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen”, Annals of Mathematics, 2 34 (1): 147-169
- [21] Peter, F.; Weyl, H. (1927), ”Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe”, Math. Ann. 97: 737-755, doi:10.1007/BF01447892.
- [22] Kreyszig, Erwin, Introductory functional analysis with applications (Wiley, New York, 1978). ISBN 0-471-03729-X
- [23] D. Marolf, Class. Quant. Grav. 12 (1995) 1199, gr-qc/9404053.
- [24] I. M. Gelfand and N. J. Vilenkin. Generalized Functions, vol. 4: Some Applications of Harmonic Analysis. Rigged Hilbert Spaces. Academic Press, New York, 1964.
- [25] A. W. Wipf, “Hamilton’s formalism for systems with constraints,” [hep-th/9312078].
- [26] J. Zanelli, “Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008),” [hep-th/0502193].

- [27] J. Zanelli, “Uses of Chern-Simons actions,” AIP Conf. Proc. **1031**, 115-129 (2008). [arXiv:0805.1778 [hep-th]].
- [28] J.C. Barata, “Curso de Física-Matemática”, [http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/capitulos.html](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html)
- [29] C.P. Constantinidis, Z. Oporto, O. Piguet, ”Generalized Chern-Simons Gravity: Classical Formalism”, PoS(ICFI 2010)030
- [30] C.P. Constantinidis, Z. Oporto, O. Piguet, R.M.S. Barbosa, (trabalho em andamento)
- [31] A. P. Balachandran, A. M. Srivastava, “Chern-Simons dynamics and the quantum Hall effect,” [hep-th/9111006].
- [32] J. Lewandowski, E. T. Newman, C. Rovelli, J. Math. Phys. **34**, 4646-4654 (1993).
- [33] Mess, G. (1990). Lorentz spacetimes of constant curvature, Institut des Hautes Etudes Scientifiques preprint IHES/M/90/28.