

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

LUCAS CALEGARI TAVARES

**O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

SÃO MATEUS-ES

2024

LUCAS CALEGARI TAVARES

**O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB) do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito à obtenção do Título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Área de concentração: Ensino de Matemática. Orientador: Prof. Dr. Lucio Souza Fassarella.

SÃO MATEUS-ES

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

T231p Tavares, Lucas Calegari, 1996-
O pensamento computacional na resolução de problemas discretos: seu valor didático à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica / Lucas Calegari Tavares. - 2024.
138 f. : il.

Orientador: Lúcio Souza Fassarella.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Ensino de Matemática. 2. Problema dos Coelhos de Fibonacci. 3. Experiência Didática. 4. Educação Básica. I. Fassarella, Lúcio Souza. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37


LUCAS CALEGARI TAVARES

**O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA
TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 10 de julho de 2024.


COMISSÃO EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 LUCIO SOUZA FASSARELLA
Data: 10/07/2024 14:44:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Documento assinado digitalmente
 VALDINEI CEZAR CARDOSO
Data: 10/07/2024 21:23:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Valdinei Cezar Cardoso
Universidade Federal do Espírito Santo

Documento assinado digitalmente
 ALEX JORDANE DE OLIVEIRA
Data: 10/07/2024 17:19:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alex Jordane de Oliveira
Insituto Federal do Espírito Santo

Dedico à minha família: Dilma, Daniel e Rafael. Vocês são minha inspiração!

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar ao Pai, ao Filho e ao Espírito Santo.

Agradeço a todos que confiaram que eu poderia chegar aqui, em especial, a pessoa que mais me encorajou, minha esposa Dilma.

Aos meus filhos, Daniel e Rafael, agradeço por serem combustível de evolução em minha vida, amo vocês.

Aos meus pais, Naildo e Franciani, agradeço pelo dom da vida e por sempre me aconselhar pelo caminho dos estudos. Ao meu irmão, Mateus, agradeço pelo companheirismo.

Agradeço a todos os professores que tive em minha vida, em especial aos professores do Ensino Básico. Quero lembrar da minha professora de alfabetização Luciana e das minhas professoras de Ensino Fundamental Anos Iniciais: Sidijani e Tânia.

Ao meu professor orientador, Lúcio, um agradecimento especial. Desde a graduação almejava cursar mestrado no PPGEEB com sua orientação, visitando seu site frequentemente. Agradeço por toda paciência e disponibilidade.

Agradeço a todos os professores do PPGEEB, em particular aos que realizei disciplinas: Prof. Jair, Prof. Valdinei, Prof.^a Rita e Prof.^a Andrea. As aulas foram de suma importância para a realização desta dissertação.

Agradeço à Secretaria de Estado de Educação do Espírito Santo pela liberação da pesquisa em uma de suas escolas. Aos alunos que participaram desta pesquisa, meus sinceros agradecimentos, vocês são parte integrante deste trabalho e foram sensacionais durante a aplicação da atividade.

RESUMO

Pesquisa com abordagem qualitativa e objetivo exploratório que investigou o seguinte problema de pesquisa: "Qual é o valor didático da resolução de problemas discretos com uso do pensamento computacional para a aprendizagem de funções recursivas?". O objetivo geral consiste em verificar o valor didático da resolução de problemas discretos com o uso do pensamento computacional para o aprendizado de funções recursivas. Tem por referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa define o conceito de valor didático, utilizando o conceito de coordenação de registros. Na pesquisa bibliográfica, buscou-se referenciais teóricos que envolvessem atividades com aspectos da computação desplugada, no intuito de utilizar o pensamento computacional como abordagem heurística na resolução de problemas. Os dados foram coletados por meio de pesquisa de campo e na resolução de atividades por meio do pesquisador. Na pesquisa de campo foi aplicada uma atividade com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais. A pesquisa identifica os registros de representação utilizados na resolução de problemas discretos envolvendo recursividade, classificando as conversões entre eles quanto à congruência e, no caso das representações auxiliares, suas funções de acordo com a classificação de Moretti e Baerle. Conclui-se que atividades com valor didático fomentam a combinação de diferentes registros semióticos, possibilitando uma melhor compreensão dos objetos matemáticos estudados. Essa abordagem pode orientar outros profissionais da educação na criação de atividades que potencializam a aprendizagem matemática dos estudantes no Ensino Básico.

Palavras Chave: Ensino de Matemática. Problema dos Coelhos de Fibonacci. Experiência Didática. Educação Básica.

ABSTRACT

Research with a qualitative approach and exploratory objective that investigated the following research problem: "What is the didactic value of solving discrete problems using computational thinking for learning recursive functions?". The general objective is to verify the didactic value of solving discrete problems using computational thinking to learn recursive functions. Its theoretical reference is the Theory of Semiotic Representation Records. The research defines the concept of didactic value, using the concept of record coordination. In the bibliographical research, we sought theoretical references that involve activities with aspects of unplugged computing, with no intention of using computational thinking as a heuristic approach to problem solving. The data was found through field research and in solving activities through the researcher. In the field research, an activity was carried out with students in the 9th year of Final Years Elementary School. The research identifies the representation registers used in solving discrete problems involved in recursion, classifying the gaps between them regarding congruence and, in the case of auxiliary representations, their functions according to Moretti and Baerle's classification. It is concluded that activities with didactic value encouraged the combination of different semiotic registers, enabling a better understanding of the mathematical objects studied. This approach can guide other education professionals in creating activities that enhance students' mathematical learning in Basic Education.

Keywords: Teaching Mathematics. Fibonacci Rabbit Problem. Didactic Experience. Basic education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Os pilares do pensamento computacional em forma de etapas na resolução de um problema.	31
Figura 2 - Fluxograma do algoritmo para avaliação de estudantes.	33
Figura 3 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático.	43
Figura 4 - Exemplo de processos de conversão e tratamento.	45
Figura 5 - Valor didático de uma atividade como coordenação de vários registros...	49
Figura 6 - Exemplos de conversão entre registros de língua materna para registro algébrico.	53
Figura 7 - Representação auxiliar para casais de coelhos que geram (adultos) e não geram (jovens) novos casais.	60
Figura 8 - Dinâmica da geração de novos casais.	60
Figura 9 - Primeiro mês da população de coelhos.	61
Figura 10 - Segundo mês da população de coelhos.	61
Figura 11 - Terceiro mês da população de coelhos.	61
Figura 12 - Quarto mês da população de coelhos.	62
Figura 13 - Quinto mês da população de coelhos.	63
Figura 14 - Sétimo mês da população de coelhos.	64
Figura 15 - Disposição inicial de uma Torre de Hanói com seis discos.	66
Figura 16 - Resolução do problema da Torre de Hanói com dois discos.	68
Figura 17 - Resolução do problema da Torre de Hanói com três discos – Parte I. ...	68
Figura 18 - Resolução do problema da Torre de Hanói com três discos – Parte II. ...	69
Figura 19 - Diagonais de um quadrilátero.	76
Figura 20 – Primeira questão sobre o descritor Saeb D32 - identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).	80
Figura 21 - Segunda questão sobre o descritor Saeb D32 - identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).	82
Figura 22 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL usando imagens de coelhos.	86
Figura 23 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna RH.	87

Figura 24 - Representação auxiliar usando registro figural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ.....	88
Figura 25 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL usando círculos para cada casal.....	88
Figura 26 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL.....	89
Figura 27 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ.....	89
Figura 28 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ (Legenda).	90
Figura 29 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pela aluna LR.	90
Figura 30 - Tentativa da estudante HN de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.	91
Figura 31 - Tentativa da estudante MR de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.	91
Figura 32 - Uso de diferentes registros e suas respectivas conversões feitas pela estudante LR.....	92
Figura 37 - Tentativa do estudante AL de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.	93
Figura 34 - Uso do registro numérico pela estudante CS no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.....	94
Figura 35 - Uso do registro numérico pelo estudante LZ no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.....	95
Figura 36 - Uso do registro numérico pela estudante LR no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.....	95
Figura 37 - Uso do registro numérico pela estudante AL no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.....	96
Figura 38 - Sequência formada pelo LZ na busca pelo reconhecimento de padrões.	97
Figura 39 - Operações de tratamento realizadas pelo aluno LZ para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.	97
Figura 40 - Operações de tratamento para obtenção do 12º termo da sequência encontrada realizado pela aluna LR.	98

Figura 41 - Operações de tratamento realizadas pela aluna EL para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.	98
Figura 42 - Operações de tratamento realizadas pela aluna CS para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.	99
Figura 43 - Operações de tratamento realizadas pela aluna HN para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.	99
Figura 44 - Operações de tratamento realizadas pela aluna RH para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.	99
Figura 45 - Registro algébrico da função recursiva envolvida no problema dos coelhos.	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Citações do pensamento computacional na BNCC.....	17
Quadro 2 – Possíveis relações entre os pilares do pensamento computacional e as etapas na resolução de um problema segundo Pólya.....	23
Quadro 3 - Pseudocódigo para avaliação das notas dos estudantes.....	34
Quadro 4 - Processos mentais envolvidos no pensamento computacional.	38
Quadro 5 - Tipos de registro de representação semiótica empregados no desenvolvimento da Matemática.	41
Quadro 6 - Descrições de alguns registros mais utilizados na matemática.....	44
Quadro 7 - Síntese de uma conversão do registro em língua materna para registro algébrico I.....	63
Quadro 8 - Relação entre alguns polígonos e diagonais que partem de um único vértice (Dv).	74
Quadro 9 - Síntese de uma conversão do registro em língua materna para registro algébrico II.....	75
Quadro 10 - Número de diagonais em alguns polígonos.	75
Quadro 11 - Pseudocódigo para o cálculo de número de diagonais de um polígono convexo com N lados.	77
Quadro 12 - Síntese das conversões entre registros envolvidas na resolução da questão da Figura 20.	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Sequência de Fibonacci na geração de coelhos de acordo com o problema proposto.	65
Tabela 2 - Relação do número de discos e o número de movimentos necessários para realização do objetivo referente à Torre De Hanói.	70
Tabela 3 - Relação entre as potências de base 2 e o número de movimentos necessários para realização do objetivo referente à Torre De Hanói.	71
Tabela 4 - Síntese do processo da regularidade observada nas figuras envolvidas na questão da Figura 20.	80
Tabela 5 - Síntese do processo da regularidade observada nas figuras envolvidas na questão da Figura 21.	83

LISTA DE SIGLAS

PPGEEB	Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
ORM Grande PoA	Olimpíada Regional de Matemática de Porto Alegre
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Sedu-ES	Secretaria de Estado de Educação do Espírito Santo
Saeb	Sistema de Avaliação da Educação Básica
EO	Estudo Orientado

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
1. REVISÃO DE LITERATURA	26
2. ENSINO E O PENSAMENTO COMPUTACIONAL	29
2.1 PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SEUS QUATRO PILARES.....	30
2.2 PENSAMENTO COMPUTACIONAL: FLUXOGRAMAS E PSEUCÓDIGOS.....	32
2.3 PENSAMENTO COMPUTACIONAL E A COMPUTAÇÃO DESPLUGADA	35
2.4 PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	35
3. ENSINO E A TEORIA DOS REGISTROS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	40
3.1 DIFERENTES TIPOS DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA USADOS NA MATEMÁTICA.....	42
3.3 VALOR DIDÁTICO DE UMA ATIVIDADE MATEMÁTICA	47
3.4 PARADOXO COGNITIVO DA MATEMÁTICA.....	50
3.5 REPRESENTAÇÕES AUXILIARES	51
3.6 CONGRUÊNCIA DE CONVERSÃO ENTRE REGISTROS.....	52
4. METODOLOGIA DA PESQUISA	55
5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS UTILIZANDO PENSAMENTO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DO SEU VALOR DIDÁTICO	59
5.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: O PROBLEMA DOS COELHOS	59
5.2 TORRE DE HANÓI.....	66
5.3 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO NÚMERO DE DIAGONAIS DE POLÍGONO CONVEXO COM N LADOS.....	73
5.4 IDENTIFICANDO A EXPRESSÃO ALGÉBRICA QUE EXPRESSA UMA REGULARIDADE OBSERVADA EM SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS.....	77
5.5 IDENTIFICANDO A EXPRESSÃO ALGÉBRICA QUE EXPRESSA UMA REGULARIDADE OBSERVADA EM SEQUÊNCIAS DE FIGURAS	79
6. RELATO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA	85
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	103

REFERÊNCIAS.....	108
APÊNDICE.....	115
APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA PARA SEDU/ES.....	115
APÊNDICE B – TERMO DE CIÊNCIA PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA CIENTÍFICA NA SEDU/ES.....	119
APÊNDICE C – DECLARAÇÃO DE ANUÊNCIA PRÉVIA SEDU/ES.....	121
APÊNDICE D – FOLHA DE ROSTO PLATAFORMA BRASIL.....	123
APÊNDICE E – DECLARAÇÃO DE COMPROMISSO DO PESQUISADOR.....	125
APÊNDICE F – REGISTRO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS.....	126
APÊNDICE G – REGISTRO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	129
APÊNDICE H – ATIVIDADE UTILIZADA COM OS ESTUDANTES PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA CIENTÍFICA.....	132
APÊNDICE I – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP LOCALIZADO NO CEUNES.....	133
APÊNDICE J – CARTA DE AUTORIZAÇÃO DE PESQUISA CIENTÍFICA PELA SEDU/ES.....	137

INTRODUÇÃO

A matemática pode ser definida como o estudo dos números, formas e relações, sendo que seu uso remonta basicamente aos primórdios da humanidade (Boyer, 1974). De fato, contar, medir, mensurar, etc. são intrínsecos ao ser humano e à sua relação com o mundo.

Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade (Boyer, 1974, p. 1).

Com o avanço industrial e a automatização de muitos processos, tornou-se necessário otimizar o tempo de realização de cálculos e tarefas. Neste sentido, fez-se necessário automatizá-las ou mecanizá-las, particularmente em casos onde os cálculos matemáticos são demasiado longos. Assim, foi desenvolvido o computador, a máquina de computar (Braga; Guerra; Reis, 2010).

É fato que hoje em dia os computadores estão em praticamente todos os lugares mediando as relações humanas. Deste modo, tal qual a matemática é ensinada em suas bases desde o Ensino Básico, surgem discussões sobre a necessidade de o computador estar presente no Ensino Básico, seja como tópico do currículo (como assunto para ensinar e aprender) ou como instrumento didático (para ensinar matemática, por exemplo). Um dos primeiros teóricos a discutir isso foi Seymour Papert¹ (1980; 2007).

Mas como usar a computação no ensino básico? Ensinando o que são *hardware* ou *software*? Ensinando formatação de máquinas? Basicamente, afirmamos baseado em Wing (2016), que não devemos ensinar somente e/ou de maneira principal os aspectos que muitas vezes se tornam obsoletos em pouco tempo, mas sim a forma de pensar computacionalmente, ou seja, a lógica por trás das construções

¹ Seymour Papert foi um pioneiro na defesa do uso dos computadores na Educação Básica. Uma de suas grandes obras foi a criação de uma linguagem de programação especificamente para ser usada por crianças em processos de aprendizagem: LOGO, em 1967. Em seus estudos, Papert foi muito influenciado por Piaget e sua teoria Construtivista. No Construcionismo de Papert, o aluno deve construir o aprendizado a partir de objetos de real interesse, ou seja, é utilizada a curiosidade infantil para combustível de uma aprendizagem significativa (Papert 1980; 2007).

apresentadas. Desta maneira, a proposta da inserção do mundo computacional na escola passa pela consideração do que chamamos de pensamento computacional.

O Pensamento Computacional é uma metodologia que se adquire aprendendo conceitos da Ciência da Computação e, portanto, não se caracteriza como uma disciplina por si. Entretanto, como metodologia, pode e deve ser utilizado, de maneira interdisciplinar, em qualquer outra disciplina (Vicari *et al.*, 2018, p. 25)

O aprendizado do pensamento computacional seria tão importante quanto o da escrita, leitura e aritmética e envolve

[...] capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (Brasil, 2018, p. 474).

Ou seja, os estudantes devem aprender não somente a utilizar um computador, mas entender e refletir sobre maneiras de reprodução do pensamento computacional em sua forma de trabalhar e organizar informações em sua vida cotidiana, acadêmica ou profissional. Com isso, dentro do próprio ensino da matemática nas salas de aula, devemos inserir o pensamento computacional e, no trabalho com os conteúdos curriculares, destacar por meio dessa abordagem como ela pode ser aplicada na resolução de problemas.

A ênfase nos conceitos da Ciência da Computação tem sido justificada com base no argumento que atividades realizadas no âmbito dessa ciência desenvolvem habilidades do pensamento crítico e computacional, e permitem entender como criar com as tecnologias digitais, e não simplesmente utilizá-las como máquinas de escritório (Valente, 2016, p. 867)

Mais do que nunca, a sociedade tem demandas acerca de um mundo digital e automatizado. Segundo Vicari *et al.* (2018) “a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas”. Para tanto, uma mão de obra qualificada é indispensável para o desenvolvimento da nação. Em uma carta aberta assinada por várias empresas de tecnologia, estas afirmam que precisam de talentos, de maneira imediata e não conseguem encontrar (Vicari *et al.*, 2018).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preconiza o desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica “[...] visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos” (Brasil, 2018). Na BNCC, o termo “pensamento computacional” aparece nove vezes salientando em todas elas que a

aprendizagem matemática favorece o desenvolvimento do pensamento computacional (Quadro 1).

Quadro 1 - Citações do pensamento computacional na BNCC.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266).
Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa (Brasil, 2018, p. 271).
Associado ao pensamento computacional , cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma (Brasil, 2018, p. 271).
A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos (Brasil, 2018, p. 271).
A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional , visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos (Brasil, 2018, p. 471).
[...] pensamento computacional : envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (Brasil, 2018, p. 474);
[...] utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional , o espírito de investigação e a criatividade (Brasil, 2018, p. 475).
Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional , por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas (Brasil, 2018, p. 528).
Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional , iniciado na etapa anterior (Brasil, 2018, p. 528).

Fonte: O próprio autor.

Dentro da sociedade do conhecimento tecnológico, existem competências que são imprescindíveis na forma de pensar, que são úteis tanto na resolução de problemas computacionais como no dia a dia. Neste sentido, o World Economic Forum (2020) lista importantes habilidades a serem adquiridas pelos jovens de brasileiros, tais como:

Aprendizagem ativa e estratégias de aprendizagem; Pensamento analítico e inovação; Criatividade, originalidade e iniciativa; Liderança e influência social; Inteligência emocional; Pensamento crítico e análise; Resolução de problemas complexos; Resiliência, tolerância ao estresse e flexibilidade; Design e programação de tecnologia; Orientação de serviço; Raciocínio, resolução de problemas e ideação; Solução de problemas e experiência do usuário; Uso, monitoramento e controle de tecnologia; Análise e avaliação de sistemas; Persuasão e negociação (World Economic Forum, 2020, p. 71).

Indo em encontro a estas habilidades necessárias, Wing (2016) defende o pensamento computacional como uma forma de abordar problemas logicamente e de maneira organizada.

No processo de aprender a codificar², as pessoas aprendem muitas outras coisas. Eles não estão apenas aprendendo a codificar, eles estão codificando para aprender. Além de aprender ideias matemáticas e computacionais (como variáveis e condicionais), eles também estão aprendendo estratégias para resolver problemas, projetar projetos e comunicar ideias. Essas habilidades são úteis não apenas para cientistas da computação, mas para todos, independentemente da idade, interesses ou ocupação (Resnick, 2013, p. 1, tradução nossa).

Segundo Zapata-Ros (2015), o aprendizado da abordagem do pensamento computacional deve acontecer desde o Ensino Básico e a formação deve estar baseada em atividades que trabalhem essas habilidades. Como afirma a BNCC, os alunos devem ser “[...] estimulados a desenvolver o pensamento computacional” (Brasil, 2018, p. 528). Neste sentido, este trabalho visa apresentar um recorte específico de sugestões de problemas visando o uso instrumental do pensamento computacional no ensino da matemática.

Uma consideração feita por Papert (1980) é que não devemos tomar os computadores como instrutores dos estudantes, ao contrário, são os próprios estudantes que educam as máquinas. Ou seja, como os computadores executam tarefas pré-programadas, o usuário é que deve utilizá-lo como ferramenta construtiva. Nesta perspectiva construcionista, o computador torna-se uma ferramenta de metodologia ativa para o aprendizado. Como afirma Wing (2016, p. 4), “[...] computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante.” A partir disso, entendemos que o pensamento computacional é uma abordagem de resolução de problemas que vai muito além de apenas programar por meio de uma linguagem específica. Com isso, em Brackmann

² Na escrita de Resnick (2013), codificar significa escrever um programa de computador.

(2017) encontramos uma definição dos chamados “quatro pilares do pensamento computacional”, que visam elucidar suas potencialidades e embasar sua prática: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos.

O Pensamento Computacional envolve identificar um problema complexo e quebrá-lo em pedaços menores e mais fáceis de gerenciar (DECOMPOSIÇÃO). Cada um desses problemas menores pode ser analisado individualmente com maior profundidade, identificando problemas parecidos que já foram solucionados anteriormente (RECONHECIMENTO DE PADRÕES), focando apenas nos detalhes que são importantes, enquanto informações irrelevantes são ignoradas (ABSTRAÇÃO). Por último, passos ou regras simples podem ser criados para resolver cada um dos subproblemas encontrados (ALGORITMOS). Seguindo os passos ou regras utilizadas para criar um código, é possível também ser compreendido por sistemas computacionais e, conseqüentemente, utilizado na resolução de problemas complexos eficientemente, independentemente da carreira profissional que o estudante deseja seguir (Brackmann, 2017, p. 33).

Dentro desse contexto, a BNCC destaca o papel dos algoritmos na formação discente. O documento define o algoritmo como “[...] uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema” (Brasil, 2018, p. 271). Podemos acrescentar a existência de uma relação entre a linguagem algorítmica e linguagem algébrica, ou seja, o ensino de matemática seria favorecido pela aplicação do pensamento computacional.

A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração (Brasil, 2018, p. 471).

Dentro de nosso trabalho, vamos abordar o pensamento computacional a partir de situações ou conjuntos de dados em problemas discretos. Essas questões envolvem elementos que podem ser contados individualmente, ou seja, não constituem uma continuidade, no sentido da Análise Real.

Assim como o sistema de números reais representa um papel central na Matemática contínua, os inteiros são o instrumento principal da Matemática discreta. A Matemática discreta oferece excelentes modelos e ferramentas para analisar fenômenos do mundo real que podem modificar-se de forma abrupta e que estão claramente em um estado ou em outro (Scheinerman, 2017, p. 22).

Neste contexto da Análise Real, um conjunto de dados discreto pode ser caracterizado pela propriedade de que podemos encontrar uma vizinhança para cada ponto do conjunto que inclui apenas aquele ponto específico e mais nenhum outro.

Em outras palavras, baseado em Lima (2006) podemos dizer que:

Um conjunto A é dito discreto se, e somente se, para cada elemento x em A , com x pertencente aos números reais, existe um $r > 0$ tal que a interseção do intervalo aberto $(x - r, x + r)$ com A contém somente o ponto x .

Os conjuntos dos números Naturais e Inteiros são exemplos desse tipo de conjunto numérico. Considere o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$ como exemplo. Cada ponto neste conjunto é um ponto isolado porque podemos escolher um intervalo suficientemente pequeno (basta fazer $r = 0,5$, por exemplo) ao redor de cada ponto para garantir que não haja outros pontos do conjunto dentro desse raio.

Neste trabalho vamos definir como problemas discretos aqueles cujo conjunto de dados a serem analisados formam um domínio discreto. Além disso, vamos analisar casos onde é possível formular uma função recursiva com domínio discreto. Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma função recursiva se ela se define em termos de si mesma onde: A é o domínio discreto da função e B é o contradomínio também discreto.

Ao longo desta dissertação, vamos elencar os conceitos principais do pensamento computacional, mostrando suas potencialidades e possíveis restrições em seu uso no ensino básico. Para aplicar as ideias envolvendo o pensamento computacional, vamos utilizar o conceito de funções recursivas discretas. O porquê da escolha deste tópico da matemática básica? Sabemos que o mundo das funções é abrangente e fez-se necessário a escolha de um tipo específico para poder aplicar os conhecimentos discutidos ao longo da dissertação. Ademais, as funções recursivas discretas possibilitam a criação de algoritmos que são um dos pilares do pensamento computacional.

Além disso, destacamos que neste trabalho utilizaremos de uma abordagem desplugada. *As atividades de pensamento computacional desplugadas são atividades que envolvem a resolução de problemas com o uso dos quatro pilares do pensamento*

computacional sem a utilização de computadores ou dispositivos eletrônicos. Em nossa visão, esta abordagem é mais acessível para o ensino básico, pois as atividades desplugadas ajudam os alunos a aprender os fundamentos do pensamento computacional sem depender de acesso a um computador, o que é valioso frente a escolas que muitas vezes não dispõem destas ferramentas tecnológicas. Essas atividades podem ser realizadas em sala de aula promovendo os quatro pilares do pensamento computacional.

Baseados na BNCC (Brasil, 2018), afirmamos que o pensamento computacional oferece possibilidades para construções de abordagens didáticas que visam auxiliar na sistematização e aplicações de soluções de problemas.

A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. [...] Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade (Onuchic, 1999, p. 203).

Com isso, convém dissertar sobre a que tipo de problemas estamos tratando. Baseado em uma competência específica de matemática para o Ensino Fundamental na BNCC (Brasil, 2018), temos que:

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 223).

Neste contexto, vamos considerar um *problema* como sendo situação que necessita de solução, ou seja, onde o sujeito resolvidor não dispõe de uma forma imediata de resolução.

Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução do problema os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (Onuchic, 1999, p. 215).

Podemos afirmar que a resolução de um problema pressupõe que a situação é de certa maneira complexa ao nível do entendimento do sujeito, ao ponto de tornar-se um problema de fato e que no processo de resolução se faz necessária a utilização

de um conhecimento anterior para o entendimento dos detalhes implícitos do problema.

Além do entendimento das relações entre matemática e o pensamento computacional, outra motivação para nossa investigação é a busca por vias que permitam aos alunos superar as dificuldades tipicamente encontradas na resolução de problemas matemáticos, especialmente no que diz respeito à elaboração de estratégias. Pólya (2006) discute extensivamente o tema e propõe organizar a resolução de problemas num esquema de quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. É nesse sentido que focamos o pensamento computacional e buscamos nos seus pilares um suporte para a resolução de problemas no âmbito do ensino da matemática. Comentário semelhante pode ser feito em relação à *espiral descrição-execução-reflexão-depuração* de Valente (2005), definida como um ciclo de quatro etapas para resolução de problemas matemáticos por meio da programação de computadores no âmbito da abordagem construcionista para a aprendizagem matemática.³ Com esse entendimento, o foco no pensamento computacional fornece um modo análogo, complementar ou alternativo para ensinar os alunos a abordarem problemas matemáticos.

Neste sentido, sugerimos no Quadro 2 possíveis relações entre os pilares do pensamento computacional e as etapas na resolução de um problema segundo Pólya. Ou seja, essas relações sugeridas dependem do problema analisado, não sendo uma proposta definitiva de possíveis relações. Visto que, por exemplo, um algoritmo pode ser parte de um plano de resolução em sua execução ou pode também ser a própria solução buscada inicialmente. Mas o mais importante é notar nas palavras de Pólya que é

[...] fundamental compreender, planejar, executar, verificar e interpretar o problema para que a partir da abstração (definida como a combinação de analogia, generalização e especialização) e a decomposição da situação-problema na busca com sucesso na resolução (Pólya, 2006, p. 17).

³ Embora abordagem de Valente (2005) envolva explicitamente a programação, podemos estabelecer paralelos entre as etapas da sua espiral e as fases de Pólya que não a envolvem necessariamente (Moraes, 2020).

Quadro 2 – Possíveis relações entre os pilares do pensamento computacional e as etapas na resolução de um problema segundo Pólya.

PILARES DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL	ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA SEGUNDO PÓLYA	ASPECTOS DE CONGRUÊNCIA DE OBJETIVOS
Abstração	Reconhecendo um problema	Reconhece informações importantes; Elimina informações secundárias
Decomposição	Estabelecer um plano	Dividir; Conquistar; Combinar;
Reconhecimento de padrões	Estabelecer um plano e executar um plano	Comparar com casos já resolvidos
Algoritmos	Executar um plano	Plano de ação; Sequência de ações para executar a resolução; Método de solução de problemas ordenados; Pode ser implementado em uma lógica de programação.

Fonte: O próprio autor.

Acreditamos que o problema de uma pesquisa se configura como norteadora de seu objetivo. Para buscar responder nosso problema de pesquisa de que a resolução de problemas discretos usando como abordagem o pensamento computacional tem seu

valor no ensino básico, usaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval⁴, cunhando um termo chamado *valor didático*.

Com isso, podemos sintetizar nosso problema de pesquisa desta maneira:

Qual é o valor didático da resolução de problemas discretos com uso do pensamento computacional para a aprendizagem de funções recursivas?

Nesse sentido, elaboramos os seguintes objetivos:

Objetivo Geral

- Verificar o valor didático da resolução de problemas discretos com o uso do pensamento computacional para o aprendizado de funções recursivas.

Objetivos Específicos

- Definir o conceito de valor didático de atividades para o ensino da matemática, partindo da TRRS e buscando eventual suporte na literatura.
- Entender como a aplicação do pensamento computacional afeta a coordenação entre registros de representação semiótica empregados na resolução em problemas discretos envolvendo recursividade.
- Identificar os registros de representação semiótica empregados na resolução em problemas discretos envolvendo recursividade, classificar as conversões entre eles quanto à congruência e, no caso das representações auxiliares, suas funções de acordo com a classificação de Moretti e Baerle (2015).

Metodologicamente, o desenvolvimento da pesquisa envolveu duas etapas. Na primeira etapa, exploramos resoluções de alguns problemas discretos buscando identificar as representações semióticas que emergiam, suas funções e as conversões envolvidas, bem como avaliar seu valor didático. Na segunda etapa, aplicamos um dos problemas explorados, o famoso *problema dos coelhos* de Fibonacci, a um grupo de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública e analisamos

⁴ Pesquisador francês, professor emérito em Ciências da Educação na Université du Littoral Côte d'Opale, França. Ele também é filósofo e psicólogo de formação.

suas resoluções à luz da TRRS tendo em vista confrontar os resultados com as expectativas produzidas na primeira etapa.

A dissertação está dividida nos seguintes capítulos, além desta Introdução: Revisão de Literatura, quando será apresentado os resultados de pesquisas em banco de dados sobre o estágio atual das pesquisas na área; Ensino e o Pensamento Computacional, quando apresentamos os conceitos essenciais do pensamento computacional e sua relação com o ensino, subsidiando a resolução de questões propostas; Ensino e a Teoria dos Registros das Representação Semiótica, capítulo que disserta sobre o referencial teórico primordial da dissertação e fixamos a base das análises a serem feitas ao longo dela; Metodologia da Pesquisa; Resolução de problemas discretos utilizando pensamento computacional e análise do valor didático, neste capítulo o próprio pesquisador resolve questões partir dos pilares do pensamento computacional em atividades desplugadas e realiza as análise das resoluções visando destacar o valor didático das atividades envolvidas; Relato da Experiência Didática, neste capítulo fazemos a descrição detalhada da pesquisa de campo e analisamos as resoluções dos estudantes via TRRS; Considerações Finais.

1. REVISÃO DE LITERATURA

Fizemos uma pesquisa bibliográfica acerca do pensamento computacional aplicado no Ensino Básico com atividades desplugadas. Esta pesquisa foi realizada em outubro de 2022, nas plataformas do Google Scholar⁵, Catálogo de Teses e Dissertações da Capes⁶ e o portal Scielo⁷.

Pesquisando artigos sobre "pensamento computacional; atividades desplugadas; ensino", pela plataforma do Google Scholar obtivemos 572 resultados. No Catálogo de Teses e Dissertações, ao pesquisar o termo "pensamento computacional", obtivemos 53971 resultados. No Scielo, pesquisando o termo "pensamento computacional" tivemos 16 resultados e colocando junto o termo "ensino" alcançamos 8 resultados.

Colocamos os seguintes critérios aos escolher os textos:

- **Critérios de inclusão:** trabalhos abordando o uso de atividades desplugadas com o pensamento computacional, ou trabalhos que ofereçam subsídios para a preparação de uma abordagem didática para este fim.
- **Critérios de exclusão:** trabalhos que não abordam o uso didático do pensamento computacional ou que usam ferramentas eletrônicas para abordar o pensamento computacional⁸.

Dentre as referências selecionadas, vamos destacar algumas consideradas principais dentro do referencial teórico. Uma delas é o trabalho *Pensamento Computacional: revisão bibliográfica*, publicado em 2018. Foi desenvolvido em conjunto pela UFRGS e o MEC, com participação direta de Rosa Maria Vicari, Álvaro Moreira e Paulo Blauth Menezes, além da colaboração de Crediné Silva de Menezes, Daltro Nunes, Maria Aparecida C. Livi. Basicamente, o trabalho apresenta em seus primeiros capítulos a metodologia utilizada na pesquisa para depois entrar no assunto principal que é a definição de pensamento computacional. O trabalho apresenta em dois capítulos abordagens de atividades envolvendo pensamento computacional tanto plugadas

⁵ <https://scholar.google.com/>

⁶ <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/>

⁷ <https://www.scielo.br/>

⁸ Não estamos interessados em atividades com o uso plugado do pensamento computacional (ver seção 2.4).

(*plugged*) quanto desplugadas (*unplugged*). Ele é utilizado como material de referência nos cursos oferecidos via AVAMEC⁹ sobre o assunto. Além dos capítulos citados, o trabalho traz avaliação de materiais voltados ao desenvolvimento do pensamento computacional; críticas às pesquisas sobre pensamento computacional; integração com outras disciplinas além da matemática; formação de professores e panorama global da área.

Um outro trabalho selecionado é a tese de Christian Puhlmann Brackmann, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação (CINTED) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), intitulada *Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através De Atividades Desplugadas Na Educação Básica*, publicada em 2017. Em sua tese, Brackmann apresenta logo após a introdução um capítulo sobre pensamento computacional, dividindo em definição, os quatro pilares, benefícios, contradições, integração na Educação Básica e abordagem desplugada e avaliação. Repare que basicamente é a mesma divisão de Vicari *et al.* (2018) ao tratar conceitualmente o pensamento computacional. Logo após, o autor apresenta capítulos sobre o estado da arte e o panorama do pensamento computacional na Educação Básica em vários países do mundo. Esta pesquisa foi aplicada tanto na Espanha quanto no Brasil e aplica um ferramental didático visando o ensino das habilidades do pensamento computacional. No conjunto das obras que analisamos, é um dos materiais mais completos em pensamento computacional escritos em Língua Portuguesa, sendo citado na maioria dos trabalhos sobre este assunto. Sua abordagem desplugada nos é referência nesta pesquisa dando embasamento teórico e viabilidade de execução.

O artigo *Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica* foi escrito por Thiago Schumacher Barcelos e Ismar Frango Silveira e publicado no ano de 2012. O objetivo principal do trabalho é a aplicação dos conceitos do pensamento computacional na Educação Básica. Destaca a necessidade desta habilidade para o mercado de trabalho, mostra as relações dela com documentos educacionais como os PCN, visto que a BNCC

⁹ <https://avamec.mec.gov.br/>

ainda não havia sido publicada. Destaca a relação entre símbolos e códigos, possibilitando ao nosso trabalho de relacionar este aspecto com a TRRS.

Pensamento computacional: Una nueva alfabetización digital é um artigo de Miguel Zapata-Ros, pertencente à *Universidad de Murcia* na Espanha. Ele foi publicado na *Revista de Educación a Distancia* em 2015. A problemática discutida é a tese de que o pensamento computacional é uma habilidade a ser aprendida tal qual a leitura e escrita, ou seja, faz-se necessária uma “alfabetização” sobre o pensamento computacional. Esta alfabetização, segundo Zapata-Ros, passa por ensinar este tipo de raciocínio no ensino básico desde as primeiras séries, possibilitando ao aluno crescer no campo da computação, não necessariamente profissional, mas como uma competência para o cidadão do século XXI. Ele discorre sobre conceitos importantes dentro da temática como criatividade, resolução de problemas, pensamento abstrato e iteração. Destacamos a relação que Zapata-Ros faz entre o pensamento computacional e a resolução de problemas, citando Pólya ao tratar do conceito de heurística¹⁰. A relevância deste artigo, em nossa opinião, está na forma que o autor justifica a necessidade do desenvolvimento do pensamento computacional desde o Ensino Básico.

Exploring the intersection of algebraic and computational thinking é um artigo de Kajsa Bråting e Cecilia Kilhamn, publicado em 2020. Este artigo destaca a implementação da programação na matemática escolar como tendência em diversos países e como esta novidade pode dialogar com o pensamento algébrico e a sua aprendizagem. Para fazer isso, os autores usaram a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Neste sentido este trabalho nos interessa, pois tem interseção com nossos objetivos. O trabalho citado propõe uma análise da maneira que a sintaxe e a semântica das linguagens de programação dialogam com simbolismo algébrico correspondente. Ou seja, uma análise de conversão de registros à luz da TRRS. Estes processos de análise nos são caros, visto a nossa pretensão de análise de resoluções de questões.

¹⁰ Etimologicamente, a palavra *heurística* deriva do grego e tem o sentido de “[...] encontrar, descobrir, inventar” (Balieiro Filho, 2017, local.156). Como adjetivo, heurística qualifica aquilo “[...] que serve para descobrir” (Polya, 2006, p.99). Na acepção de um dicionário, o termo recebe um significado diferente do nosso, embora semelhante: “[...] conjunto de regras e métodos para chegar-se à invenção, à descoberta ou à resolução de problemas” (Heurística, 2024).

2. ENSINO E O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Seymour Papert usou o termo "pensamento computacional" pela primeira vez em 1980. Embora existam muitas definições diferentes, o pensamento computacional geralmente envolve a resolução de problemas usando conceitos e métodos da ciência da computação.

O Pensamento Computacional é uma abordagem de ensino que usa diversas técnicas oriundas da Ciência da Computação e vem gerando um novo foco educacional no quesito inovação nas escolas mundiais como um conjunto de competências de solução de problemas que devem ser compreendidos por uma nova geração de estudantes em conjunto com as novas competências do século 21 (i.e., pensamento crítico, colaboração, etc.) (Brackmann, 2017, p. 8).

A formulação de problemas em termos computacionais, a criação de soluções algorítmicas, a representação e manipulação de dados e a automatização de processos são todos componentes do pensamento computacional, de acordo com Wing (2016). Segundo Resnick (2013), o pensamento computacional é um tipo de pensamento que se concentra em como dados podem ser representados e processados computacionalmente para resolver problemas complexos.

Sabemos que uma habilidade essencial para o século XXI é a capacidade de pensar computacionalmente (Wing, 2016). No contexto de abordagens usando o pensamento computacional, o aluno deve ter controle do seu processo de aprendizagem, pois ele é o "solucionador de problemas". Neste sentido, sabendo que o pensamento computacional é "[...] uma habilidade de pensamento humano que usa abordagens analíticas e algorítmicas para formular, analisar e resolver problemas" (Bocconi, 2016, p. 9), afirmamos que utilizaremos neste trabalho a perspectiva do pensamento computacional como uma capacidade heurística nas resoluções de problemas.

Com isso, afirmamos que o pensamento computacional pode ser empregado numa abordagem de ensino baseada na (ou voltada para a) resolução de problemas. Ou seja, muito mais que apenas técnicas da Ciência da Computação, esta abordagem refere-se à capacidade de abordar problemas de forma sistemática. Neste tipo de abordagem de ensino, sobressaem os chamados "pilares do pensamento computacional": abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmos.

2.1 PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SEUS QUATRO PILARES

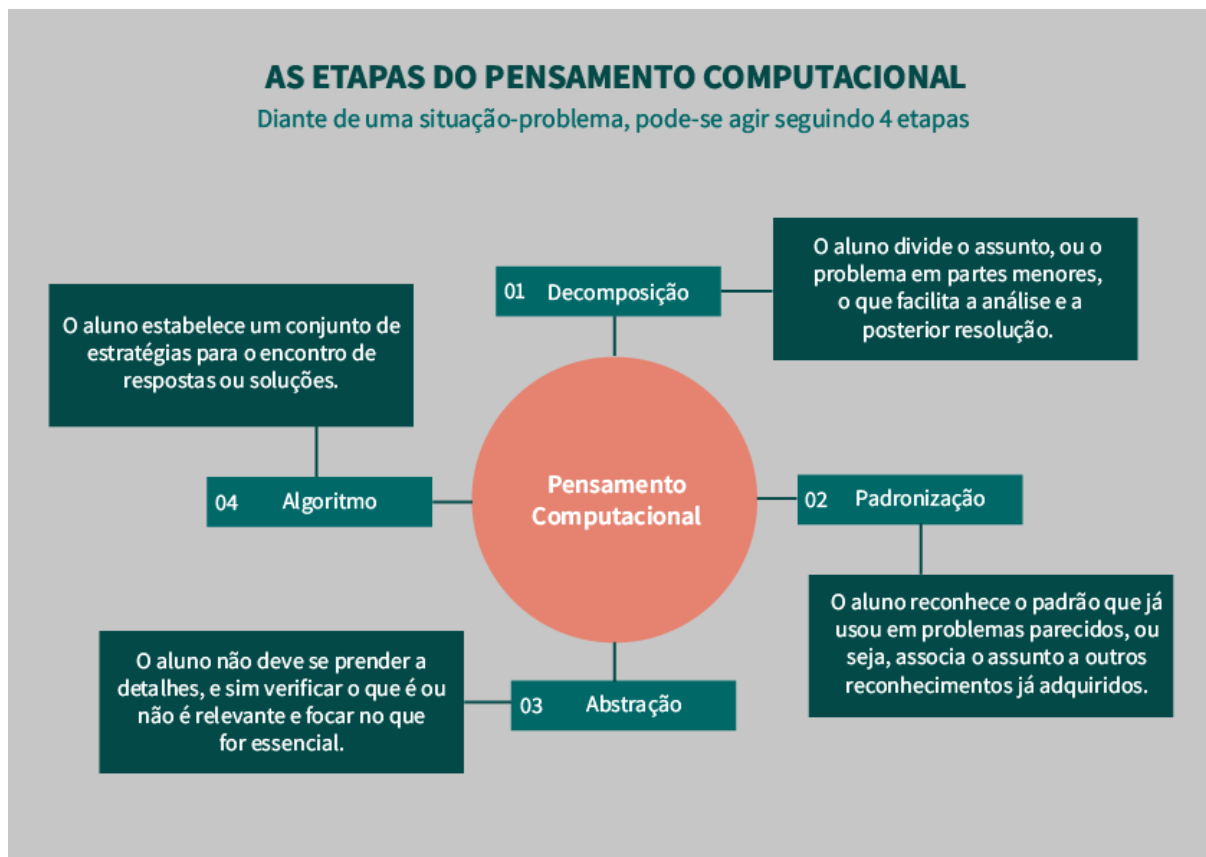
A BNCC afirma que os alunos devem desenvolver habilidades de pensamento computacional ao longo da Educação Básica, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Isso envolve a capacidade de solucionar problemas de forma eficiente, dividindo-os em partes menores, identificando padrões e desenvolvendo algoritmos que podem ser implementados tanto de maneira desplugada quanto em um computador (Brasil, 2018). A BNCC também enfatiza que o pensamento computacional envolve a capacidade de trabalhar com dados de forma criativa e sistemática, utilizando tecnologias e ferramentas para resolver problemas complexos e automatizar processos.

O pensamento computacional envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (Brasil, 2019, p. 474).

O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente (Brackmann, 2017, p. 29).

Sendo assim, o pensamento computacional é um modo de abordar problemas, geralmente envolvendo quatro pilares: Abstração, Decomposição, Reconhecimento de Padrões e Algoritmos. Temos que ter em conta que “[...] os Quatro Pilares têm grande importância e são interdependentes durante o processo de formulação de soluções computacionalmente viáveis” (Brackmann, 2017, p. 33). Ou seja, eles não funcionam como etapas rigidamente estabelecidas para a resolução de um problema, mas são competências específicas que estabelecem a habilidade de pensar computacionalmente. No entanto, podemos aplicar este modo de pensar na resolução de problemas, pois muitas vezes estes pilares nos servem como um norte que indica um caminho a seguir no processo de busca de soluções, como vemos na Figura 1.

Figura 1 – Os pilares do pensamento computacional em forma de etapas na resolução de um problema.



Fonte: Espírito Santo, 2023a, p. 8.

Neste sentido, segundo Brackmann (2017, p. 33), os quatro pilares podem ser entendidos como dimensões do pensamento computacional “para atingir o objetivo principal: a resolução de problemas”. Deste modo, os pilares servem como abordagens heurísticas na resolução de problemas, ou seja, um raciocínio “[...] que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta” (Polya, 2006, p. 152).

A abstração envolve a filtragem e classificação dos dados. Ou seja, busca focar apenas nos elementos essenciais de um determinado problema. A decomposição é a capacidade de visualização do problema em partes menores e mais controláveis. Isso fornece uma melhor capacidade de pensar em resoluções para cada uma dessas partes. Além disso, não somente saber decompor o problema, é necessário saber formas de como reconstituí-lo para solucionar o problema como um todo. Por exemplo, ao se multiplicar 12 por 56, em vez de aplicar o algoritmo da multiplicação, em um

estilo “arme e efetue” podemos decompor o cálculo em pedaços menores e mais fáceis de resolver. Por exemplo, como $12 = 10 + 2$, então $12 \times 56 = 10 \times 56 + 2 \times 56 = 560 + 112$; agora, podemos aplicar a decomposição novamente: como $112 = 100 + 10 + 2$, segue que $12 \times 56 = 560 + 100 + 10 + 2 = 660 + 10 + 2 = 670 + 2 = 672$. Veja que o problema original foi decomposto em multiplicações por 10 e 2, que são relativamente mais fáceis, e depois em problemas de somas simples onde se mudava apenas os algarismos de uma ordem numérica por vez.

O pilar de reconhecimento de padrões envolve a capacidade dos alunos de identificar situações novas em situações que já foram enfrentadas ou até mesmo numa estratégia indutiva, reconhecer um padrão intrínseco ao problema. Caso precisássemos multiplicar 13 por 56, podemos decompor a questão em $12 \times 56 + 56$, pois pelo exemplo anterior temos que $12 \times 56 = 672$, então $13 \times 56 = 672 + 56 = 736$. Como consequência, foi possível realizar o cálculo por meio da utilização de um resultado anteriormente conhecido.

O pilar algoritmo trabalha instruções ordenadas para a solução de um problema que podem ser escritas em formato de diagrama, pseudocódigos ou em linguagem de programação. Estas regras são comandos finitos que oferecem uma solução. Esses algoritmos são usados na programação de computadores em uma linguagem específica, como Python, Logo, C, C++, Java *etc.* No entanto, o pilar dos algoritmos não requer a programação de computadores, podendo se reduzir à mera descrição geral de ações a serem executadas em uma estratégia de resolução. Também entendemos que os pilares do pensamento computacional são sinérgicos e que sua aplicação não precisa obedecer a uma ordem preestabelecida (*e.g.*, a decomposição, seguida pelo reconhecimento de padrões, pela abstração e, por fim, pela algoritmização).

2.2 PENSAMENTO COMPUTACIONAL: FLUXOGRAMAS E PSEUCÓDIGOS

Encontramos no dicionário Michaelis uma definição para fluxograma. Ele é a

representação gráfica, por meio de símbolos geométricos próprios, que apresenta o fluxo ou a sequência normal de um procedimento, problema ou

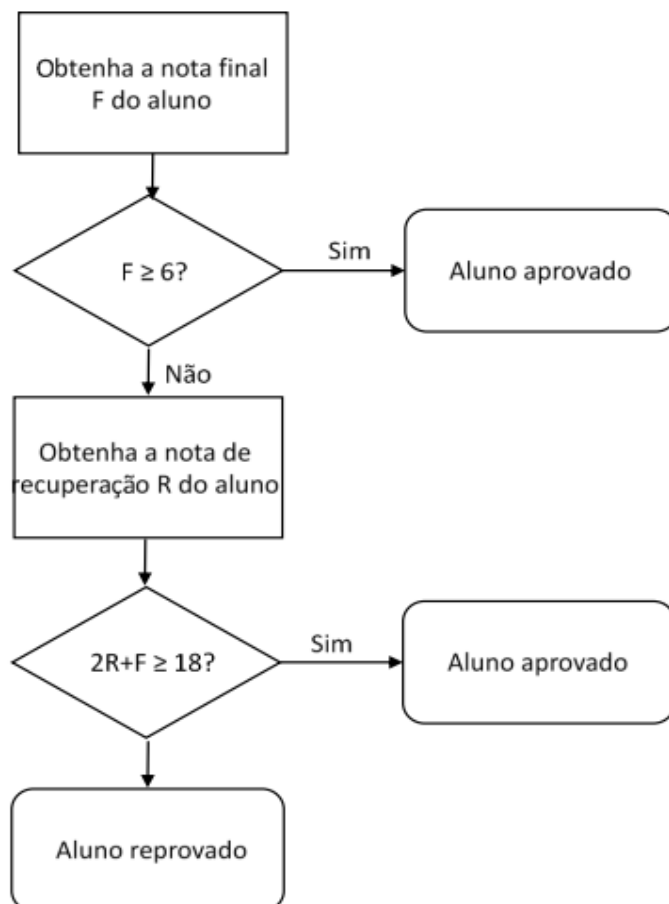
sistema, que permite visualizar, por meio de ilustrações, de maneira sintética, as diversas etapas de um processo (Fluxograma, 2022).

Podemos decompor um procedimento complexo em suas partes mais simples e transformá-los em uma visão sistêmica, relacioná-los e ordená-los de forma didática e elucidativa, o que pode ser representado graficamente por um fluxograma.

Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser apresentado graficamente por um fluxograma (Brasil, 2018, p. 271).

Desta maneira, este esforço pode ser sintetizado em um algoritmo que consiste em uma sequência finita de etapas que permitem a resolução de um problema. Destacamos na Figura 2 um fluxograma de um algoritmo para avaliação das notas de estudantes.

Figura 2 - Fluxograma do algoritmo para avaliação de estudantes.



Temos as distinções e significados dos componentes de um fluxograma. Eles mostram o caráter, a função e a localização de cada passo do algoritmo. Os retângulos representam os passos do processamento onde a informação é normalmente adicionada ao processo. Os losangos são os momentos em que um dado deve ser analisado e uma decisão tomada a partir de uma regra pré-estabelecida. As superelipses (figuras que parecem retângulos, mas seus “cantos são arredondados”) indicam quando um processo algorítmico começa ou termina. Por fim, as setas indicam a direção do fluxo do pensamento computacional e o caminho que o algoritmo deve seguir. No exemplo da Figura 2, temos um algoritmo que pode ser usado para determinar se um aluno específico foi aprovado em uma disciplina. Os retângulos contêm os dados da nota do aluno, os losangos contêm a predefinição da regra e como ela é aplicada aos dados de entrada, e as superelipses mostram a solução que foi encontrada após uma análise algorítmica. Nota-se também que o algoritmo retorna um valor falso ou verdadeiro quando uma regra é aplicada a um losango.

Além disso, podemos citar também o pseudocódigo como forma de exprimir um algoritmo. Nele se apresenta o algoritmo que está sendo preparado para uma aplicação em uma linguagem de programação, por exemplo, e é um instrumento muito utilizado para representar algoritmos. Por exemplo, o algoritmo da figura 2 pode ser escrito na forma de pseudocódigo como a seguir (Quadro 3):

Quadro 3 - Pseudocódigo para avaliação das notas dos estudantes.

```
Obtenha a nota final F do aluno.  
Se  $F \geq 6$ :  
    O aluno é aprovado.  
Senão:  
    Obtenha a nota de recuperação R do aluno.  
    Se  $2R + F \geq 18$ :  
        O aluno é aprovado.  
    Senão:  
        O aluno é reprovado.
```

Fonte: Carvalho, 2020, p. 2.

2.3 PENSAMENTO COMPUTACIONAL E A COMPUTAÇÃO DESPLUGADA

No contexto do pensamento computacional, podemos oferecer dois tipos de abordagens: a plugada ou a desplugada. A computação desplugada, conforme Bell, Witten e Fellows (2011), está relacionada a atividades que contribuam para o desenvolvimento do pensamento computacional e dispensa o uso de meios eletrônicos, como computadores, celulares, tablets, etc. Infelizmente, nossa experiência pessoal mostra que a maioria das escolas que frequentamos não possuem laboratórios equipados para o uso da “computação plugada”. Desta maneira, no Ensino Básico, a abordagem “desplugada” se apresenta como promissora, a nosso ver, visto que pode ser trabalhada em resoluções de problemas matemáticos, pensamento recursivo, e tudo o mais que possa ser trabalhado a partir da abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmos. Neste sentido, vamos mostrar em capítulos posteriores atividades com potencial para tanto.

Além do mais, afirmamos que muito mais que trabalhar uma técnica computacional específica, o desenvolvimento das habilidades envolvendo o pensamento computacional tem muito mais a ver com o “como é feito” em relação do que “é feito”, ou seja, o objetivo é aprender durante o processo. Outros autores, como Vieira, Passos e Barreto (2013), também destacam o uso da abordagem desplugada quando relacionam essa abordagem aos seguintes aspectos: não requer equipamentos; ser uma metodologia ativa; uma mesma atividade pode ser aplicada em diversas variações de abordagem; valorização a autonomia e iniciativa dos estudantes; ser flexível quanto aos possíveis erros, focando no processo.

2.4 PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Cada vez mais, as tendências educacionais evidenciam uma busca pelo desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos da Educação Básica (Brasil, 2018). Ele pode ser usado em várias áreas de ensino, mas é particularmente útil para o ensino de matemática. Ademais, autores como Bundy (2007) definem o pensamento computacional como um conjunto de habilidades que, embora sejam

mais comuns na criação de programas computacionais, também podem ser usadas como uma forma de resolver problemas específicos em várias áreas. Veja que não afirmamos "resolução de problemas matemáticos", pois o pensamento computacional pode ser usado em qualquer campo do conhecimento. Assim, acreditamos que a primeira impressão de que o pensamento computacional está relacionado apenas à área da informática não é verdadeira.

Como já mencionamos, o pensamento computacional pode ser considerado de modo plugado ou desplugado. Alguns exemplos de atividades do ensino básico que envolvem o pensamento computacional são:

- Elaboração de jogos: Os alunos podem realizar essa atividade de forma lúdica e colaborativa criando jogos, seja de maneira plugada ou desplugada, como animações usando softwares de programação visual ou até mesmo jogos de tabuleiro, por exemplo (Gomes; Fassarella, 2022).
- Análise de dados estatísticos: neste tipo de abordagem, o estudante pode se envolver na identificação de padrões e na criação de algoritmos para a manipulação de dados sobre variadas temáticas, ou seja, podendo realizar um trabalho de maneira interdisciplinar (Fassarella, 2021).
- Resolução de problemas: O estudante, com o uso do pensamento computacional, baseado nos quatro pilares, atua na elaboração de algoritmos e estratégias de decomposição e abstração que contribuem na resolução de problemas de cunho matemático (Fassarella, 2021).
- Programação de robôs: Esta abordagem, a nosso ver, está crescendo nos meios escolares, promovendo o desenvolvimento do pensamento computacional por meio da criação de algoritmos e identificação de padrões, muitas vezes usando a plataforma Arduino (Oliveira, 2022).

Ou seja, podemos elencar como uma consequência do desenvolvimento do pensamento computacional o auxílio na resolução de problemas por meio de uma

organização com análise lógica dos dados. Além disso, na resolução de problemas, o indivíduo proficiente nas habilidades e competências em torno deste tipo de pensamento pode usá-lo como recurso que permite implementar estratégias alternativas, até mesmo envolvendo o uso da alta capacidade de computadores para realizar cálculos aritméticos, plotar gráficos e executar algoritmos. Além disso, o pensamento computacional oferece recursos transversais como:

[...] confiança em lidar com a complexidade; persistência ao trabalhar com problemas difíceis; tolerância para ambiguidades; a capacidade de lidar com os problemas em aberto; a capacidade de se comunicar e trabalhar com outros para alcançar um objetivo ou solução em comum (Vicari *et al.*, 2018, p. 29).

Concluimos então que o desenvolvimento do pensamento computacional ajuda os alunos não somente na resolução problemas, automatizando tarefas repetitivas e reduzindo a probabilidade de erros humanos, mas também permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades de tomada de decisões e pensamento crítico. Ou seja, esse desenvolvimento torna-se uma contribuição na promoção do aluno para atuar em áreas diversas de nossa sociedade e também para a sua formação integral como indivíduo.

Os conhecimentos em Computação são tão importantes para a vida na sociedade contemporânea quanto os conhecimentos básicos de Matemática, Filosofia, Física, dentre outras, assim como contar, abstrair, pensar, relacionar ou medir. Desta forma, torna-se fundamental tanto no presente quanto no futuro que todos os indivíduos tenham conhecimentos básicos de Computação (Brackmann, 2017, p. 17).

Sabendo dos objetivos da Educação Básica presentes na Constituição Federal de 1988, a saber em seu Art. 214, os alunos, em geral, com o aprendizado do pensamento computacional, tende a ter mais oportunidades profissionais em um mundo cada vez mais digital e conectado.

A lei estabelecerá o plano nacional de educação, de duração plurianual, visando à articulação e ao desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis e à integração das ações do Poder Público que conduzam à: I - erradicação do analfabetismo; II - universalização do atendimento escolar; III - melhoria da qualidade do ensino; IV - formação para o trabalho; V - promoção humanística, científica e tecnológica do País (Brasil, 1988).

A partir disso, Wing (2016) escreve que uma habilidade essencial para o século XXI é a capacidade de pensar computacionalmente. Neste sentido, o pensamento computacional envolve competências e habilidades importantes na preparação das

crianças de hoje em dia, preparando-as para futuras carreiras, ajudando-as a compreender melhor os desafios que encontrarem e a desenvolverem habilidades na resolução de problemas diversos. O quadro 4 apresenta processos mentais e competências básicas envolvidas no pensamento computacional.

Quadro 4 - Processos mentais envolvidos no pensamento computacional.

Processos mentais envolvidos no pensamento computacional	
Coleta de dados	O processo de coletar informações de forma adequada.
Análise de dados	Dar sentido aos dados, encontrar padrões e tirar conclusões.
Representação de dados	Representar e organizar os dados em gráficos, tabelas, textos e imagens.
Decomposição de problemas	Quebrar tarefas em partes gerenciáveis, menores.
Abstração	Reduzir a complexidade para definir a ideia principal.
Algoritmo e Procedimentos	Definir um conjunto de passos ordenados para resolver um problema ou atingir algum fim.
Automação	Usar computadores ou máquinas para fazer tarefas repetitivas e tediosas.
Paralelização	Organizar recursos para, simultaneamente, realizar tarefas para um objetivo comum.
Simulação	Representar ou modelar um processo.

Fonte: Espírito Santo, 2023a, p. 12.

No contexto do ensino básico, não há idade específica para ensinar pensamento computacional. No entanto, obviamente, é fundamental que as atividades estejam adaptadas à faixa etária dos alunos. Corroborando com esta tese, vemos na BNCC indicações neste sentido, onde a proposta educacional é a promoção de maneira gradual do desenvolvimento do pensamento computacional.

[...] os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (Brasil, 2018, p. 528)

Além disso, os alunos da Educação Básica podem encontrar na capacidade de pensar computacionalmente uma ferramenta útil para, por exemplo, resolver tarefas e/ou problemas matemáticos que incluem funções recursivas. Em nosso trabalho vamos apresentar exemplos deste tipo de abordagem nos capítulos 5 e 6.

3. ENSINO E A TEORIA DOS REGISTROS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Segundo Duval, “[...] não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação” (2009, p. 29). A representação semiótica é a construção de um objeto que visa passar uma informação por meio de um sistema de signos e de suas relações, “[...] porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (Duval, 2009, p. 29). Isso implica a seleção de elementos relevantes e sua organização em uma estrutura coerente que possa ser interpretada por outros, pois:

O desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas da mesma maneira que as imagens mentais são uma interiorização das percepções (Duval, 2009, p. 17).

Caso não haja representação semiótica, não há raciocínio e tampouco comunicação em matemática. Como afirma Duval (2009, p. 15), “[...] as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática”. Desenvolvendo esta ideia, podemos dizer que:

[...] no contexto geral da semiótica o signo é relacionado a um objeto concreto, como o desenho de uma cadeira para representar o objeto que utilizamos para sentar, porém na especificidade da matemática o símbolo (signo) representa um objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito). De fato, o objeto matemático não é perceptível, ou seja, é abstrato; assim, seu acesso se dá via representações semióticas (Lourenço; Oliveira, 2018, p. 85).

Com isso, a ligação entre objeto e suas múltiplas representações é tão intrínseca que podemos afirmar a existência de uma dificuldade em discernir o objeto das suas representações.

[...] não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguirmos, um objeto de sua representação [...] porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. [...] é o objeto representado que importa e não suas diversas representações semióticas possíveis. (Duval, 2009, p. 14)

Neste sentido, pode-se afirmar que o ensino da matemática depende das representações semióticas, pois para a aquisição, desenvolvimento e expressão do conhecimento matemático é necessário a existência de vários sistemas de representação e a coordenação entre eles. No quadro 5 a seguir, temos diferentes tipos de registros de representação semiótica empregados no desenvolvimento da Matemática.

Quadro 5 - Tipos de registro de representação semiótica empregados no desenvolvimento da Matemática.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS PLURIFUNCIONAIS (os tratamentos não são algoritmizáveis)	Língua natural: associações verbais (conceituais); descrição, definição, explicação; Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos; modelização de estruturas físicas (ex. cristais, moléculas ...)
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (os tratamentos são principalmente algoritmizáveis)	Sistema de escrita: - numérico (binária, decimal, fracionária...); - algébrico; - simbólico (línguas formais); Cálculo literal, algébrico, formal...	Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: (Duval, 2004, p. 52 *apud* Moretti; Baerle, 2022)

Dessa maneira, a matemática diferencia-se de outros tipos de conhecimento, pois os outros domínios científicos podem utilizar de sistemas de representações não semióticos, ou seja, os instrumentos usados para análise e transformação dos objetos conseguem ter um acesso real ao que é estudado e/ou experimentado, coisa que é

impossível na matemática. Além disso,

[...] toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual (Duval, 2009, p. 91).

Ou seja,

[...] para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las (Duval, 2009, p. 91).

No próximo subcapítulo, veremos exemplos de diferentes tipos de registros de representação semiótica (Figura 3). Devido à evolução da matemática, uma ampla gama de sistemas semióticos fora desenvolvido e pode ser encontrado em vários textos, mesmo não relacionados à matemática, como em jornais e em várias mídias associadas (Moretti; Baerle, 2022).

3.1 DIFERENTES TIPOS DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA USADOS NA MATEMÁTICA

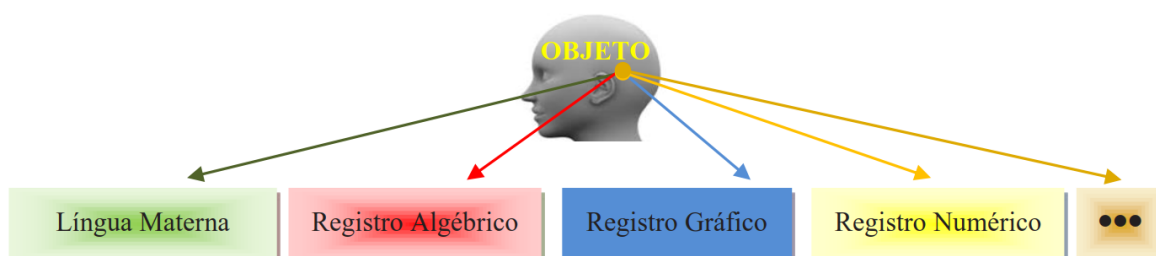
Alguém poderia conjecturar que poderíamos facilitar a aprendizagem da Matemática reduzindo os registros de representação semiótica empregados. Contudo, a diversidade de registros e a necessidade de articulá-los é intrínseca à própria atividade Matemática, por três razões básicas (Duval, 2012):

- I. *economia de tratamento*: cada registro de representação semiótica admite tratamentos mais ou menos eficientes, a depender da finalidade.
- II. *complementaridade dos registros*: registros diferentes permitem representar conteúdos diferentes de um mesmo objeto matemático;
- III. *necessidade de coordenação de diferentes registros para que haja conceituação*: apreensão dos objetos matemáticos depende da distinção fundamental entre representante e representado, o que só ocorre pela coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica para representar cada objeto matemático específico. Noutras palavras, “[...] a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a

coordenação de ao menos dois registros de representação [...]” (Duval, 2012, p. 282).

Neste sentido, em relação aos possíveis registros de representação de um objeto matemático (Figura 3), temos a seguinte classificação: Língua Natural (ou Língua Materna), Algébrico, Numérico e Gráfico (Henriques; Almouloud, 2016); registros Figural e Figural Dinâmico (Salazar; Almouloud, 2015); e Registro Algorítmico ou Computacional (Fassarella, 2020) (Santos, Fassarella, 2023).

Figura 3 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático.



Fonte: Henriques; Almouloud, 2016, p. 468.

No Quadro 6 a seguir, podemos ver algumas definições.

Quadro 6 - Descrições de alguns registros mais utilizados na matemática.

TIPOS DE REGISTROS	DESCRIÇÃO
Língua natural	A língua que usamos diariamente para nos comunicar é chamada de língua natural ou materna. O registro em língua natural é usado, entre outras coisas, para propor e discutir problemas, explicando raciocínios e comunicando ideias matemáticas seja de forma verbal ou escrita.
Algébrico	O registro algébrico implica o uso de expressões e símbolos para representar quantidades ou objetos. Basicamente, é a manipulação sistemática de símbolos para modelar problemas e encontrar soluções.
Numérico	Basicamente o registro numérico constitui o uso dos algarismos para representar quantidades e realizar operações de tratamento como cálculos aritméticos. Também é destacável o seu uso na medição de grandezas físicas.
Gráfico	O registro gráfico é aquele que apela à percepção visual-espacial do indivíduo. Este registro aparece como gráficos e diagramas.

Fonte: O próprio autor.

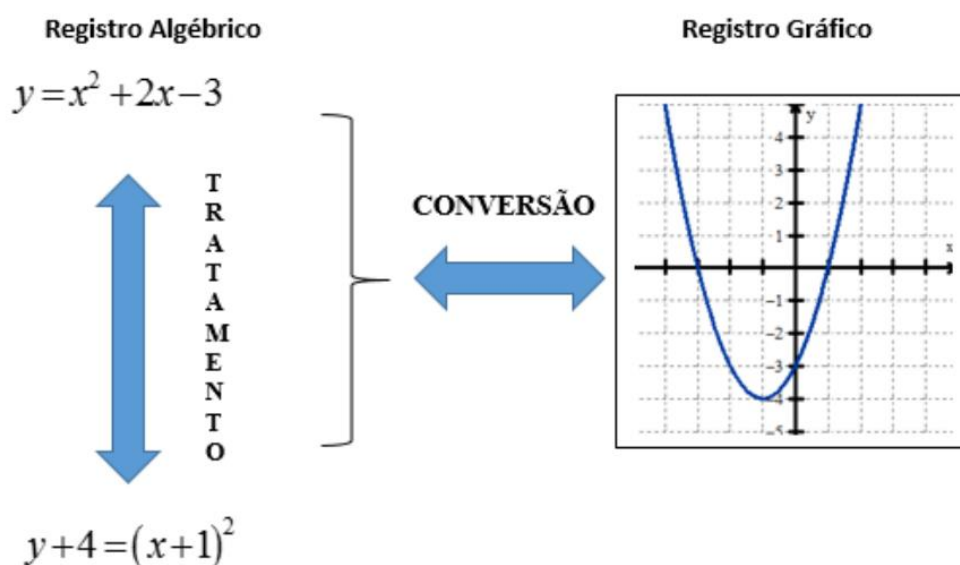
Os Registros de representações semióticas são sistemas semióticos que cumprem duas condições (1) regras de formação de representações, que estabelecem os signos do sistema semiótico e como eles podem ser usadas para representar objetos matemáticos e também (2) transformações de representações, que podem ser de dois tipos:

- **Tratamentos:** quando ocorre uma mudança de representação dentro do próprio registro inicial, segundo regras específicas do registro, nas palavras de Duval, “é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema” (Duval, 2009, p. 56-57);
- **Conversões:** quando ocorre uma mudança de representação, saindo de um registro inicial e partindo para um registro de chegada, nas palavras de Duval,

“é transformar a representação de um objeto, dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, num outro registro” (Duval, 2009, p. 58-59).

Note então que a diferença entre conversão e tratamento está na relação interna/externa, observe um exemplo:

Figura 4 - Exemplo de processos de conversão e tratamento.



Fonte: Denardi, 2017, p. 7.

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, ou seja, ele segue as regras de funcionamento dentro de um mesmo registro de representação.

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. (Duval, 2009, p. 56-57)

A conversão é uma transformação externa, ou seja, faz passar de um registro para outro.

As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”, “codificação” etc. são operações que a uma representação de um registro dado fazem correspondência em uma outra representação num registro. A conversão então é uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida. A ilustração é colocada em correspondência de uma palavra, de uma frase, ou de um enunciado com uma figura ou com um de seus elementos. A passagem inversa, da imagem a um texto pode ser uma descrição ou uma interpretação.

A colocação em equação de dados de um enunciado do problema é a conversão de diferentes expressões linguísticas de relações em outras expressões dessas relações no registro de uma escritura simbólica (Duval, 2009, p. 58-59).

Portanto, as representações semióticas são criadas em sistemas semióticos conhecidos como registros de representações semióticas, ou seja, o Registro de Representação Semiótica está para um sistema assim como a Representação Semiótica estaria para um conceito deste mesmo sistema, em outras palavras, o Registro de representação semiótica estaria para a Língua Portuguesa, assim como a Representação semiótica estaria para a frase, por exemplo.

Duval defende, a partir de uma compreensão teórica e de dados empíricos, que as representações semióticas são essenciais para o pensamento matemático em si, não apenas para sua representação. Por isso ele diz (2009, p. 17) que “[...] não há *noésis* [*i.e.*, compreensão] sem *semiósisis* [*i.e.*, representação], [pois] é a *semiósisis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*”.

Assim, uma representação semiótica explicita um certo aspecto dos objetos matemáticos, sendo uma produção baseada em signos pertencentes a um sistema próprio de significação e funcionamento (que seria o registro de representação semiótica). Desta maneira, utilizamos diferentes registros de representações semióticas na matemática, pelo fato de que cada um apresenta um conjunto de aspectos diferentes dos objetos matemáticos, destacando-conteúdo específicos.

A representações semióticas são representações ao mesmo tempo conscientes e externas. Com efeito, elas permitem uma “visão de objeto através da percepção de estímulos (pontos, trações, caracteres, sons...) tendo valor de “significante”. Há uma grande variedade de representações semióticas possíveis: figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões linguísticas, etc. (Duval, 2009, p. 44).

A partir da conveniência e também do contexto, destacamos que um dado registro é mais interessante em relação a outro diante de uma ação a realizar ou objetivo a representar, pois por mais que seja natural empregar determinado registro para representar um dado objeto matemático, a conveniência depende do contexto.

A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações

“equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza (Duval, 2009, p. 32).

No próximo subcapítulo vamos definir o conceito de “valor didático”, a partir do conceito de coordenação entre registros.

3.3 VALOR DIDÁTICO DE UMA ATIVIDADE MATEMÁTICA

A coordenação de registros é a capacidade de reconhecimento de um mesmo objeto matemático em registros distintos e “[...] se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (Duval, 2012, p. 282).

[...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos. [...] A ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais. (Duval, 2009, p. 63)

Duval complementa que é a coordenação de vários registros de representação semiótica é que possibilita a compreensão de um objeto matemático (2009). A BNCC e também o currículo do Espírito Santo reiteram esta necessidade de exprimir respostas e conclusões em diferentes registros:

Enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (Espírito Santo, 2020a, p. 170).

Duval argumenta que os diferentes registros semióticos devem ser combinados de forma coordenada para se facilitar a compreensão e a resolução de problemas matemáticos diversos, tese conhecida como *hipótese fundamental da aprendizagem matemática*.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado (Duval, 2012, p. 270).

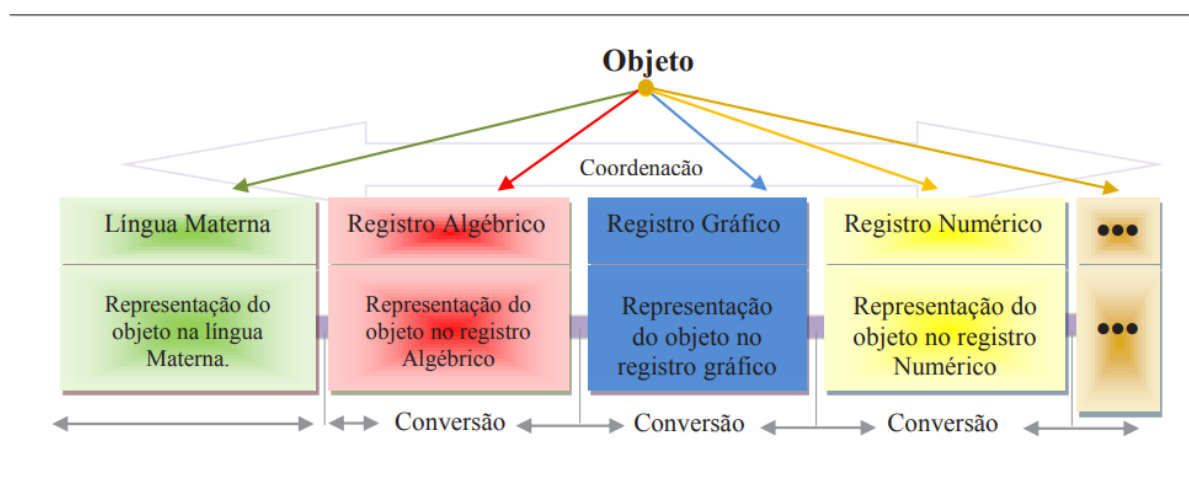
Essa coordenação ajuda a orientar o ensino, criar material didático e avaliar o aprendizado dos alunos.

A que corresponde a existência de muitos registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano? [...] Duas respostas são geralmente propostas para explicar esta necessidade [de coordenar diferentes registros], tendo em vista a diversidade de registros no funcionamento do pensamento humano. Elas estão centradas nos custos de tratamento e nas limitações representativas específicas a cada registro. Propõe-se uma terceira [função da coordenação de diferentes registros no funcionamento do pensamento humano], centrada na condição necessária de uma diferenciação entre representante e representado (Duval, 2012, p. 278).

Como já dissemos, a aprendizagem da Matemática depende do conhecimento dos registros de representação semiótica e da habilidade para transformar as representações. Acontece que “[...] numerosas observações, nos diferentes níveis de escolaridade, mostram que a coordenação não se efetua espontaneamente para a maior parte dos sujeitos [...]” (Duval, 2012, p. 284). Portanto, é necessário que o professor de Matemática busque sistematicamente levar seus alunos a desenvolverem a coordenação de diferentes registros de representação semiótica.

Uma atividade matemática deve proporcionar o desenvolvimento da coordenação de diferentes registros, presumivelmente por meio das conversões envolvidas. Neste sentido, vamos considerar que uma atividade tem “valor didático” caso ela cumpra a seguinte condição: *proporcionar a realização de conversões entre diferentes registros, estimulando o desenvolvimento da coordenação entre eles*. Ou seja, em termos gerais, este termo refere-se à potencialidade de uma atividade em proporcionar aprendizado partindo do pressuposto que ela consegue gerar oportunidades da coordenação de diferentes registros (Figura 5).

Figura 5 - Valor didático de uma atividade como coordenação de vários registros.



Fonte: Henriques; Almouloud, 2016, p. 470.

Embora o termo “valor didático” não esteja no vocabulário de Duval (2009; 2012), ele trabalha com esse conceito noutros termos:

[...] uma aprendizagem que leve em consideração a ligação estreita que existe entre a *noesis* [cognição] e *semiose* [representação] deve, então, elevar os alunos a uma condição de tomada de conscientização mais global e, para tal, são necessárias atividades de ensino mais específicas. Nesta perspectiva, três tipos de atividade extremamente diferentes impõem-se [...]: o primeiro tipo concerne a *apreensão das representações semióticas*; o segundo, a *aprendizagem de tratamentos* próprios de uma certa categoria de registros e; o terceiro tipo concerne o *modo de produção de representações complexas*¹¹ (Duval, 2012, p. 285).

Neste sentido, mostraremos em capítulos posteriores atividades nas quais é possível reconhecer o valor didático de sua aplicação em sala de aula, na medida que elas favorecem a prática de conversões entre diferentes registros, potencialmente gerando um maior aprendizado pelos estudantes.

Cabe uma importante ressalva sobre essa definição para o valor didático de atividades matemáticas. A contribuição de uma atividade didática para o aprendizado depende de diversos fatores extrínsecos, que vão desde as características individuais dos aprendizes até seu contexto educacional e social. Além disso, incluem a relação entre professor e aluno e também as circunstâncias em que a atividade é proposta. Por exemplo, podemos esperar que qualquer atividade didática será ineficaz quando

¹¹ “Chama-se *representação complexa* toda representação que ‘expõe um procedimento’: um texto, um cálculo com diversas etapas, um raciocínio” (Duval, 2012, p.28, ênfase acrescentada).

aplicada a alunos desinteressados, ou quando o professor não tem habilidade e competência necessárias para subsidiar o engajamento dos estudantes com uma preparação e orientações adequadas. Portanto, o valor didático de uma atividade matemática seria apenas uma potencialidade, não uma característica que lhe é intrínseca. Admitindo essa ressalva, entendemos que o conceito pode ser pensado abstratamente, de modo que o valor didático de uma atividade matemática se manifeste pela quantidade e qualidade dos tratamentos e conversões que pode proporcionar, mantendo a consciência de que a realização desse potencial depende do contexto de sua aplicação.

3.4 PARADOXO COGNITIVO DA MATEMÁTICA

Muitas das dificuldades dos estudantes no aprendizado de matemática advêm de dificuldades ligadas ao *paradoxo cognitivo da matemática* e dificuldades ligadas ao modo de ver a matemática e utilizar a língua natural. Destacamos que para Duval, o paradoxo cognitivo da matemática consiste no fato de que os objetos matemáticos (1) só podem ser acessados mediante representações semióticas, mas (2), ao mesmo tempo, não podem ser identificados com nenhuma delas. Deste modo, a superação desta dificuldade passa-se pela utilização de diferentes registros semióticos aliada a capacidade de conversão entre esses registros (Duval, 2009).

Duval argumenta que a falta de distinção entre os objetos matemático e uma (qualquer) de suas representações pode levar a uma série de erros conceituais e a dificuldades de compreensão de conceitos matemáticos. Para superar essa dificuldade, ele propõe a utilização dos diferentes registros semióticos (gráfico, numérico, algébrico e língua materna, por exemplo).

Mudar a forma de uma representação se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível. Tudo se passa como se a compreensão que a grande maioria dos estudantes tivesse de um conteúdo ficasse limitada à forma de representação utilizada. [...] Em outros termos, a operação de conversão se revela ser nem trivial nem cognitivamente neutra (Duval, 2009, p. 34-35).

Com isso, nota-se que a resolução de problemas matemáticos envolve a utilização de diferentes registros semióticos em conjunto. Acontece que “[...] numerosas observações, nos diferentes níveis de escolaridade, mostram que a coordenação não se efetua espontaneamente para a maior parte dos sujeitos [...]” (Duval, 2012, p. 284). Sendo assim, o papel do docente é ser um mediador entre as exigências de apreensão dos objetos matemáticos e suas múltiplas representações. Portanto, é necessário que o professor de Matemática busque sistematicamente levar seus alunos a desenvolverem a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, ou seja, que tenha como fundamento da sua prática a aplicação de atividades com significativo valor didático.

3.5 REPRESENTAÇÕES AUXILIARES

As representações auxiliares são representações semióticas utilizadas nas etapas intermediárias de uma atividade matemática. Elas valorizam o conhecimento e a maneira de pensar individualmente. Isso acontece, pois uma pessoa pode usar diagramas, desenhos, traços que não estavam dispostos em um determinado problema inicial para construir a argumentação de uma resolução. Desta maneira, consegue-se investigar aspectos importantes, possibilitando a expressão da solução final de um problema. Veja então que as representações auxiliares têm a finalidade de servir como campo de reflexão matemática no trabalho entre as representações iniciais (propostas de problemas, por exemplo) e finais (expressões finais das soluções).

As representações auxiliares desempenham sete possíveis papéis, de acordo com Moretti e Baerle (2022):

1. *Aporte de informações complementares*: incluem informações que não estão presentes na representação principal e complementam os enunciados;
2. *Interpretação heurística ou tratamento transitório*: como tratamentos visuais para a escolha de procedimentos na resolução de problemas;
3. *Interpretação explicativa*: apresenta informações implícitas ou explícitas de maneira diferente da representação inicial;

4. *Organização ou seleção de elementos relevantes*: ocorre quando a representação principal contém uma quantidade significativa de dados que precisam ser distinguidos;
5. *Exemplo*: apresenta um modelo de um objeto previamente definido;
6. *Ilustração*: fornece uma imagem que está relacionada à representação principal;
7. *Material*: substitui a representação principal por um objeto que tem a capacidade de lidar com situações específicas;

3.6 CONGRUÊNCIA DE CONVERSÃO ENTRE REGISTROS

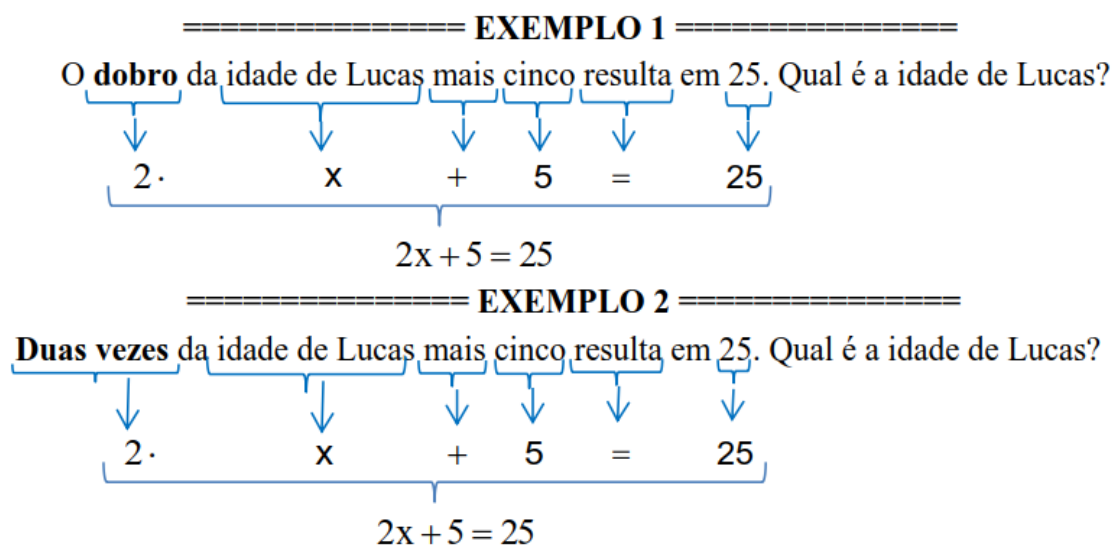
Em relação à conversão entre os diferentes registros, devemos lembrar da noção de congruência deste processo. Para Duval (2009; 2012), uma conversão congruente deve cumprir as seguintes condições:

1. *correspondência semântica entre as unidades de significado da representação de saída e de chegada* - Uma unidade elementar pode ser associada a cada unidade significativa simples de uma das representações;
2. *univocidade semântica terminal* - No registro da representação de chegada, cada unidade significativa elementar corresponde a uma única unidade significativa elementar da representação de partida;
3. *preservação da estrutura organizacional* - As unidades de significado das representações de saída e de chegada são da mesma ordem.

Note que a congruência se refere à capacidade de converter informações de um registro semiótico para outro registro de maneira que se envolva correspondências e relações entre os elementos tratados, preservando as estruturas e propriedades do registro original para o de destino. Note que, para isso, faz-se necessário um conhecimento sobre a própria estrutura interna dos registros tratados, para entender como eles podem se relacionar.

Vamos exemplificar como observar os critérios da congruência entre registros. Observe a figura 6.

Figura 6 - Exemplos de conversão entre registros de língua materna para registro algébrico.



Fonte: Lourenço; Oliveira, 2018, p. 87.

No exemplo 1, o registro em língua natural tem a palavra “dobro”, onde esta palavra corresponde a apenas um signo. Quando ocorre a conversão para o registro algébrico, vemos o número dois e o símbolo da operação da multiplicação, ou seja, temos dois signos. Desta maneira, esta conversão do exemplo 1 não cumpre o critério (1), ou seja, a correspondência semântica entre as unidades de significado. Já no exemplo 2, vemos o uso do termo “duas vezes”, que no registro em língua natural indica 2 signos, tendo assim o cumprimento do critério (1) para a congruência de conversão entre registros (Lourenço; Oliveira, 2018).

Em relação ao critério (2), note que ambos os exemplos registram na representação de chegada, uma unidade significativa elementar correspondente a cada uma única unidade significativa elementar da representação de partida. Em relação ao critério (3) as ordens das unidades de significado são as mesmas tanto na representação de chegada quanto de saída, em ambos os exemplos. Para Lourenço e Oliveira (2018, p. 88) um exemplo de como o critério (3) poderia não ser contemplado seria o seguinte:

“Se adicionarmos um número ao dobro da idade de Lucas, obteremos 25. Qual é a idade de Lucas, sabendo que o número adicionado foi o cinco?”

Desta maneira, fica evidente que a não congruência na conversão entre registros semióticos ocorre quando pelo menos um dos requisitos da congruência não é cumprido. Com isso, verifica-se que uma conversão congruente é trivial, “[...] e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código” (Duval, 2012, p. 284). Já as conversões não congruentes são difíceis de realizar:

Quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente (Duval, 2012, p. 284).

A falta de congruência na conversão entre registros semióticos possibilita uma provável incompreensão do objeto matemático envolvido, ocasionado a limitação da capacidade do aluno de construir o aprendizado.

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo explorará o método utilizado para investigar a resolução de questões envolvendo funções recursivas usando o pensamento computacional como norteador. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval servirá de base teórica para análise das resoluções. Segundo Gil (2002, p. 17), uma pesquisa é um “[...] procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos”. Neste sentido, destacamos que esta pesquisa consiste em verificar o valor didático da resolução de problemas discretos com o uso do pensamento computacional para o aprendizado de funções recursivas.

Quanto à abordagem, essa pesquisa se classifica como qualitativa. A pesquisa qualitativa é uma metodologia que visa compreender os comportamentos, percepções e fenômenos sociais. Desta maneira, o pesquisador busca realizar uma investigação interpretativa visando descobrir o significado das ações e experiências daqueles que dela participam de alguma. Ou seja, neste tipo de pesquisa consideramos o ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador, na maioria das vezes, torna-se o principal instrumento de uma investigação descritiva (Bogdan; Biklen, 1994). Além disso, este tipo de pesquisa caracteriza-se pela transitoriedade de seus resultados, ou seja, não vem trazer uma resposta final a um problema delimitado, mas sim providenciar subsídios para a compreensão dos fenômenos estudados.

A partir do foco qualitativo da pesquisa, foi permitido uma melhor compreensão dos processos mentais e na análise dos métodos usados na resolução das questões propostas. Neste sentido o processo é descritivo, onde buscamos entender os desafios enfrentados ao usar o pensamento computacional para resolver esses problemas na perspectiva do Ensino Básico (Mertens, 2010).

O autor e os estudantes foco da pesquisa de campo, usando o pensamento computacional para resolver questões matemáticas, empregam estratégias utilizando os quatro pilares, decompondo problemas complexos em etapas menores, identificando padrões e usando abstrações para representar os problemas em termos

computacionais. Neste sentido, a pesquisa tem caráter exploratório (Sampieri; Collado; Lucio, 2013), principalmente pois apresenta temas com uma perspectiva que permite a familiarização com os objetos estudados.

A pesquisa de campo envolve alunos do 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Pio XII, localizada na cidade de São Mateus-ES. A maioria dos estudantes dessa escola advém de bairros da periferia da cidade, além de estarem em situação de vulnerabilidade social.

O processo de comunicação do consentimento e do assentimento livre e esclarecido foi feito de maneira oral durante uma aula de matemática nas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental. Justificamos a população escolhida para o estudo, na expectativa que estes alunos estejam mais preparados para resolver o nível de atividades matemáticas que serão propostas na pesquisa.

Aos alunos que aceitaram participar da pesquisa foi dada a oportunidade de resolver uma atividade com um problema matemático. Os alunos envolvidos na pesquisa são alunos que apresentam grande interesse pela disciplina de matemática e conseqüentemente apresentam resultados satisfatórios de aprendizado.

O objetivo é verificar se atividade proposta proporciona a coordenação de vários registros, favorecendo o uso de conversões. A aplicação da atividade foi realizada em uma sala e tempo reservados para este fim, dentro da própria rotina escolar dos estudantes. A atividade consiste na aplicação do problema dos Coelhos. Este problema foi posto por Leonardo de Pisa, mundialmente conhecido como Fibonacci. Em uma folha com uma breve descrição dos quatro pilares do pensamento computacional, temos a seguinte questão: *Uma pessoa tem um casal de coelhos recém nascidos, e os cria dentro de um lugar que é cercado e protegido. Supondo que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês após o primeiro mês de vida, quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016)?*

As resoluções dos alunos foram feitas em papel e recolhidas pelo professor pesquisador ao fim de uma aula de cem minutos voltada especificamente a esta

pesquisa. Para tanto, esperávamos um envolvimento dos estudantes, em que estes sejam capazes de articular em suas respostas aspectos do pensamento computacional, utilizando diferentes registros para encontrar os resultados durante a confecção das soluções.

Desta maneira, no percurso da pesquisa, o pesquisador utilizou de suas experiências e perspectivas no intuito de compreender os processos estudados. O pesquisador não busca quantificar resultados de maneira objetiva e positivista, pelo contrário, no estudo das subjetividades, busca explicar as intenções e os métodos (Garnica, 2004).

Os aspectos essenciais da pesquisa qualitativa [...] consistem na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos (Flick, 2009, p. 23).

A pesquisa visou a análise de um ferramental pedagógico com possível aplicação prática e específica, envolvendo o âmbito do ensino de matemática e resolução de problemas, em vista do objetivo específico de entender como a aplicação do pensamento computacional afeta a coordenação entre registros de representação semiótica empregados na resolução em problemas discretos envolvendo recursividade. Com isso, em relação aos objetivos a pesquisa apresenta-se do tipo exploratória, pois visa

[...] o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. Na maioria dos casos, essas pesquisas envolvem: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que 'estimulem a compreensão' (Gil, 2008, p. 42).

Nosso foco principal é o item c da citação anterior, ou seja, a análise de exemplos que 'estimulem a compreensão'. Baseado em Neuman (2014), a pesquisa qualitativa nos oferece em campo de análise capaz de envolver diferentes teorias e/ou procedimentos. Como os registros produzidos pelo pesquisador e pelos estudantes são de representações semióticas, a análise de dados foi feita de modo qualitativo via TRRS. Duval propôs uma estrutura teórica para ajudar a entender como as pessoas constroem e manipulam várias formas de representação ao lidar com problemas matemáticos. Assim, ao analisar nossos dados, ou seja, as

representações semióticas produzidas durante a resolução das questões a partir dos pilares do pensamento computacional, buscamos evidenciar aspectos das atividades de tratamento e conversão, especialmente visando mostrar a conversão entre registros, evidenciando o valor didático potencial das atividades propostas.

5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS UTILIZANDO PENSAMENTO COMPUTACIONAL E ANÁLISE DO SEU VALOR DIDÁTICO

Os problemas apresentados a seguir são extraídos de uma apostila de Treinamento Olímpico feitos pelos professores da Olimpíada Regional de Matemática de Porto Alegre¹². A justificativa para a escolha de uma Olimpíada Regional de fora do Espírito Santo, em detrimento das Olimpíadas regionais mais próximas ou até mesmo a Olimpíada Nacional (OBMEP) consiste no fato de que a Olimpíada Regional de Matemática de Porto Alegre tem em seu portal¹³ atividades voltadas para as funções recursivas, ou seja, foram ao encontro do que precisávamos para aplicar nosso estudo, facilitando o processo de busca de questões.

5.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: O PROBLEMA DOS COELHOS

O *problema dos coelhos* foi escolhido, entre diversas possibilidades, por ser um problema discreto com aspecto lúdico, além de historicamente relevante. Ele apareceu no *Liber abbaci* (Livro de cálculo), escrito em 1202 por Leonardo de Pisa (1170-1850), italiano, considerado por muitos o maior matemático da idade média ocidental e que se tornou mundialmente conhecido como Fibonacci (Devlin, 2011).¹⁴

Uma pessoa tem um casal de coelhos recém nascidos, e os cria dentro de um lugar que é cercado e protegido. Supondo que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês após o primeiro mês de vida, quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016)?

¹² Álvaro Ramos, Ricardo Misturini e Susana Frómeta, professores do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, são responsáveis pela realização da ORM Grande Porto Alegre a partir de 2021. A Olimpíada Regional é sediada pela Grande Porto Alegre desde 2002.

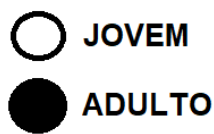
¹³ <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/olimpa5.htm>

¹⁴ Fibonacci “[...] não inventou o problema [dos coelhos], o qual remonta pelo menos aos matemáticos indianos dos primeiros séculos da Era Comum que desenvolveram o sistema numérico descrito no *Liber abbaci*. Contudo, ele percebeu claramente, tal como os seus antecessores hindus, que se trata de um excelente problema para praticar o uso do novo sistema numérico. Embora as gerações posteriores de historiadores matemáticos considerassem *Liber abbaci* um dos livros mais influentes de todos os tempos, para a maioria das pessoas a maior fama do seu autor residiria neste problema” (Devlin, 2011, p. 143, tradução nossa).

Nossa proposta é abordar o problema usando utilizando os pilares do pensamento computacional. Primeiramente precisamos realizar uma *abstração* para que possamos utilizar representações auxiliares para abordar nossa estratégia. Para diferenciar os casais de coelhos que podem gerar outro casal, dos que ainda não podem por estarem no 1º mês de vida, vamos designar de casais de coelhos:

- Adultos, podem gerar outro casal, pois já passaram do 1º mês de vida.
- Jovens, ainda estão no 1º mês de vida.

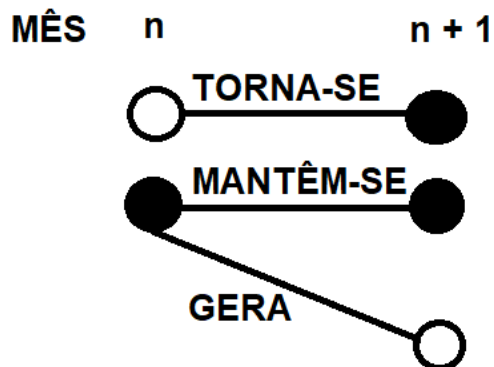
Figura 7 - Representação auxiliar para casais de coelhos que geram (adultos) e não geram (jovens) novos casais.



Fonte: O próprio autor.

Desta maneira, usando esta representação auxiliar podemos reconhecer um padrão. Dentro desse padrão podemos observar uma *decomposição* do problema, visto que resume bem a dinâmica da geração de coelhos.

Figura 8 - Dinâmica da geração de novos casais.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 8 acima vemos uma operação de tratamento em relação a representação auxiliar criada na Figura 7. Deste modo, podemos dizer que dado um mês n , um determinado casal de coelhos, no próximo mês:

- Torna-se um adulto, se jovem.
- Gera um novo casal e mantém-se no próximo mês, se adulto.

Desta maneira, para conseguirmos calcular a população de casais de coelhos no 12º mês, precisamos entender a dinâmica populacional, para buscar *reconhecer* algum padrão numérico para a criação de um algoritmo.

Figura 9 - Primeiro mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor.

Note que podemos converter a representação auxiliar na forma de registro figural em registro numérico. O valor didático da atividade começa a ficar mais evidente, a partir que as conversões vão aparecendo.

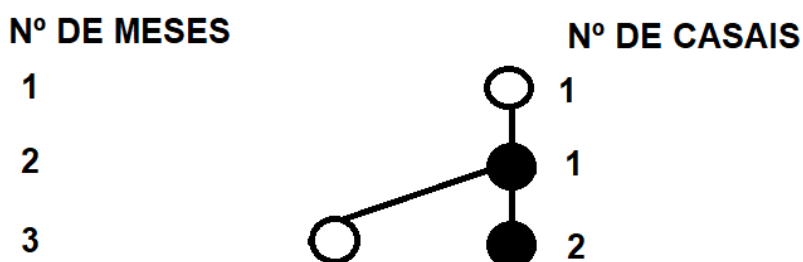
Figura 10 - Segundo mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor.

Note que o primeiro casal já está adulto, logo no próximo mês já gerará um novo casal.

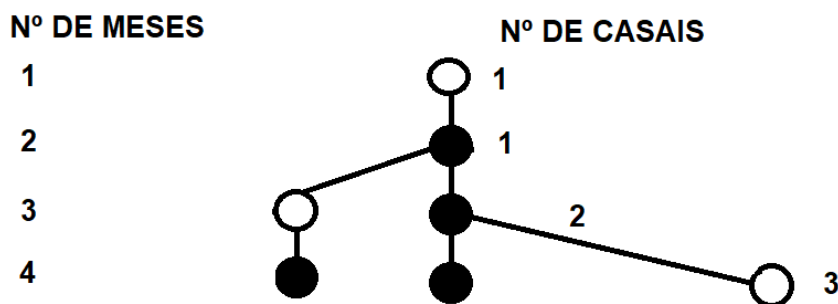
Figura 11 - Terceiro mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor.

Repare que a população do terceiro mês é exatamente igual à soma dos dois meses anteriores. Vamos analisar se esse padrão se repete e o motivo.

Figura 12 - Quarto mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor.

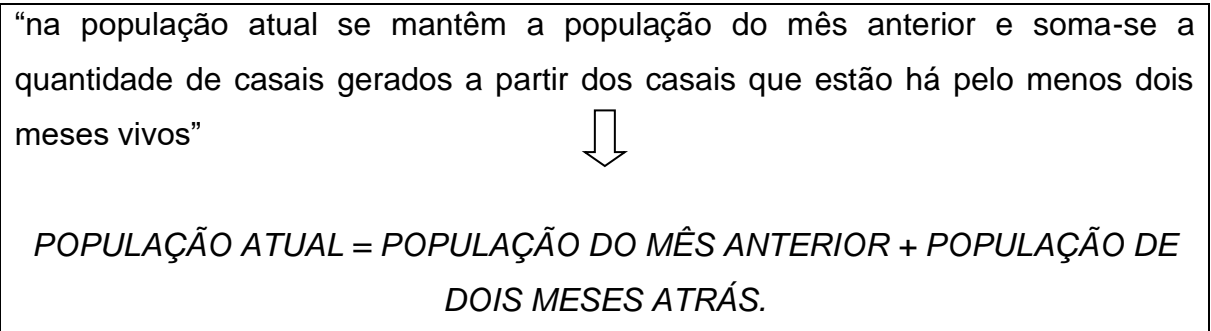
Perceba que na população atual se mantêm a população do mês anterior e soma-se a quantidade de casais gerados a partir dos casais que estão há pelo menos dois meses vivos. Nesse *reconhecimento de padrão*, distinguimos uma operação de conversão entre o registro figural em registro em língua materna. Note que esta conversão é não congruente, visto que não observamos a *preservação da estrutura organizacional* em situações que estamos enumerando a quantidade de elementos de um determinado conjunto de objetos, ou seja, “contando”. Com isso as unidades de significado das representações de saída e de chegada não são da mesma ordem. Além disso, neste processo de conversão, não observamos *univocidade semântica terminal* pois, pelo mesmo motivo anterior, estamos convertendo uma representação auxiliar, com todos os seus significados postos, em apenas um algarismo que simboliza a totalidade de elementos ali presentes. Note que isto implica que no registro da representação de chegada cada unidade significativa elementar não corresponde a uma única unidade significativa elementar da representação de partida.

Além disso, podemos converter em registro algébrico:

$$\text{POPULAÇÃO ATUAL} = \text{POPULAÇÃO DO MÊS ANTERIOR} + \text{POPULAÇÃO DE DOIS MESES ATRÁS.}$$

Esta conversão também é não congruente, visto que cada unidade significativa elementar não corresponde a uma única unidade significativa elementar da representação de partida. No Quadro 7 temos a síntese desta conversão. Observe que em língua materna não usamos a palavra “igual” referente ao símbolo “=”.

Quadro 7 - Síntese de uma conversão do registro em língua materna para registro algébrico I.



Fonte: O próprio autor.

Com um padrão reconhecido, conseguimos montar uma função recursiva onde n é o valor numérico do mês e $f(n)$ a população de casais de coelhos em um determinado mês. Assim:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

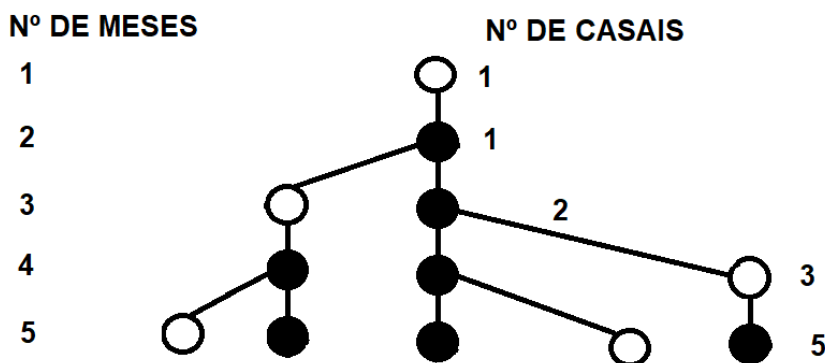
ou suas variações, como

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Dando para mensurar pela figura que:

$$f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5.$$

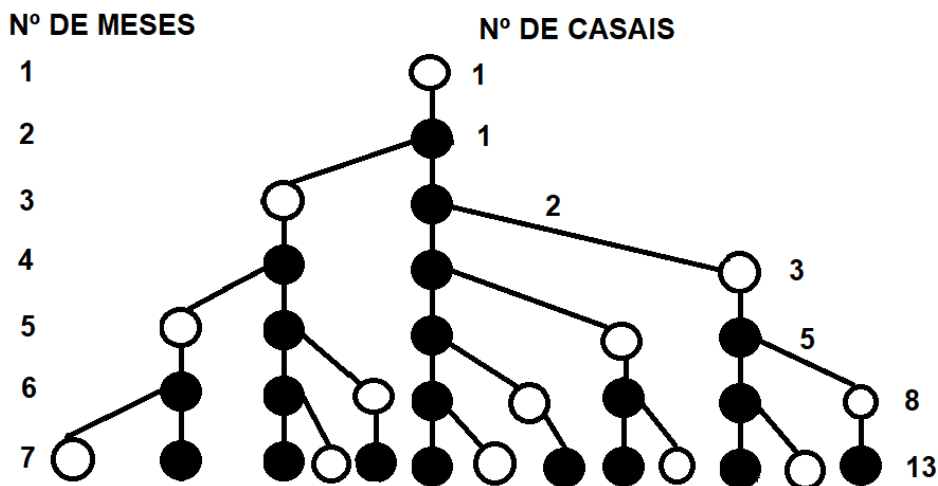
Figura 13 - Quinto mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor.

Com essa função recursiva podemos descrever um *algoritmo* em linguagem de programação, ou até mesmo fazer operações de tratamento para conseguir calcular o $f(12)$, que será o número de casais dentro de um ano. A Representação auxiliar utilizada serve para reconhecer um padrão e conseguir perceber uma sequência onde o termo atual é sempre a soma das duas anteriores. O processo que leva a representação auxiliar em registro figural a registro numérico se chama conversão e neste trabalho a sua presença indica o valor didático da atividade ou abordagem didática.

Figura 14 - Sétimo mês da população de coelhos.



Fonte: O próprio autor

Agora, a partir de operações de tratamento entre registros, vamos obter o $f(12)$ a partir dos resultados já alcançados:

$$f(8) = f(7) + f(6),$$

$$f(8) = 13 + 8,$$

$$f(8) = 21.$$

$$f(9) = f(8) + f(7),$$

$$f(9) = 21 + 13,$$

$$f(9) = 34.$$

$$f(10) = f(9) + f(8),$$

$$f(10) = 34 + 21,$$

$$f(10) = 55.$$

$$f(11) = f(10) + f(9),$$

$$f(11) = 55 + 34,$$

$$f(11) = 89.$$

$$f(12) = f(11) + f(10),$$

$$f(12) = 89 + 55,$$

$$f(12) = 144.$$

As operações de tratamento acima podem ser escritas também por meio de outro registro: uma tabela indicando os resultados (Tabela 1). Por meio desse registro, ao invés de utilizar o registro algébrico para chegar até ao $f(12)$ como feito anteriormente, podemos somar com cálculos mentais ou usando a representação auxiliar do algoritmo da soma para ir preenchendo a tabela até o 12^o mês.

Tabela 1 - Sequência de Fibonacci na geração de coelhos de acordo com o problema proposto.

MÊS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
QUANTIDADE DE CASAIS	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Fonte: O próprio autor

A representação auxiliar aqui utilizada para entender a dinâmica populacional dos coelhos, desempenha três funções: (i) interpretação heurística ou tratamento transitório, pois se trata de tratamentos visuais para a escolha de procedimentos na resolução de problemas, pois obviamente será por meio da representação auxiliar o raciocínio da resolução; (ii) interpretação explicativa, pois apresenta informações que estão implícitas na representação inicial (enunciado do problema em língua natural), sendo este aspecto fortemente apresentado na dinâmica da Figura 8; (iii) ilustração, pois fornece uma maneira de ver uma imagem daquilo que está relacionado à representação principal;

Ao longo do processo, observamos que a contribuição dos pilares do pensamento computacional teve o caráter heurístico de organizar e subsidiar ações estratégicas. Portanto, a partir da decomposição e abstração conseguimos criar uma representação auxiliar que possibilitou o reconhecimento de um padrão para a formação de um algoritmo. Além disso, processos de conversões e tratamento foram vistos em todo o processo. Por fim, concluímos o problema encontrando a solução de que, após um ano, segundo a natureza de procriação e coelhos proposta, teremos 144 casais de coelhos.

5.2 TORRE DE HANÓI

A Torre de Hanói é um daqueles problemas conhecidos como "quebra-cabeça". Basicamente, temos uma base com três pinos, com discos dispostos uns sobre os outros em cada um. Estes discos são organizados de ordem crescente de diâmetro, com os maiores embaixo. O número de discos pode variar. O comando consiste em passar os discos para outro pino, de maneira que pode usar o terceiro como auxiliar, mas não podendo colocar um disco maior sobre um menor.

Figura 15 - Disposição inicial de uma Torre de Hanói com seis discos.



Fonte: Página na Web dos Clubes de Matemática da Obmep¹⁵.

Nesta dissertação, o objetivo será resolver este problema com o menor número de passos possíveis, mostrando os pilares do pensamento computacional. O matemático francês Édouard Lucas, apresentou esse problema em 1890 em forma de lenda. A lenda conta que Deus criou a Torre de Brahma no início dos tempos e colocou 64

¹⁵ Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/>. Acesso em: 8 jan. 2024.

discos de ouro maciço na primeira haste. Desta forma, Deus chamou seus sacerdotes e lhes disse que transferissem todos os discos para a terceira haste de acordo com as regras mencionadas anteriormente. Os sacerdotes então obedeceram e começaram a remover os discos todos os dias. Além disso, Deus afirmou que a Torre de Brahma irá ruir quando eles concluírem o trabalho e desta forma o mundo acabará (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, [2018?]).

Podemos dizer que quando analisada em diferentes estágios de desenvolvimento infantil, a aplicação pedagógica da Torre de Hanói revela-se multifacetada. Por meio de simples regras de classificação baseadas em cores e tamanhos, conceitos básicos podem ser introduzidos desde o ensino pré-escolar. Em situações de nivelamento escolar em razão da pandemia da Covid-19, podemos afirmar que este tipo de atividade também é útil no Ensino Fundamental Anos Finais. Em tal situação, a manipulação da Torre de Hanói melhora a coordenação motora, a identificação de formas e a compreensão da ordem crescente e decrescente, entre outras funções importantes do processo de aprendizado.

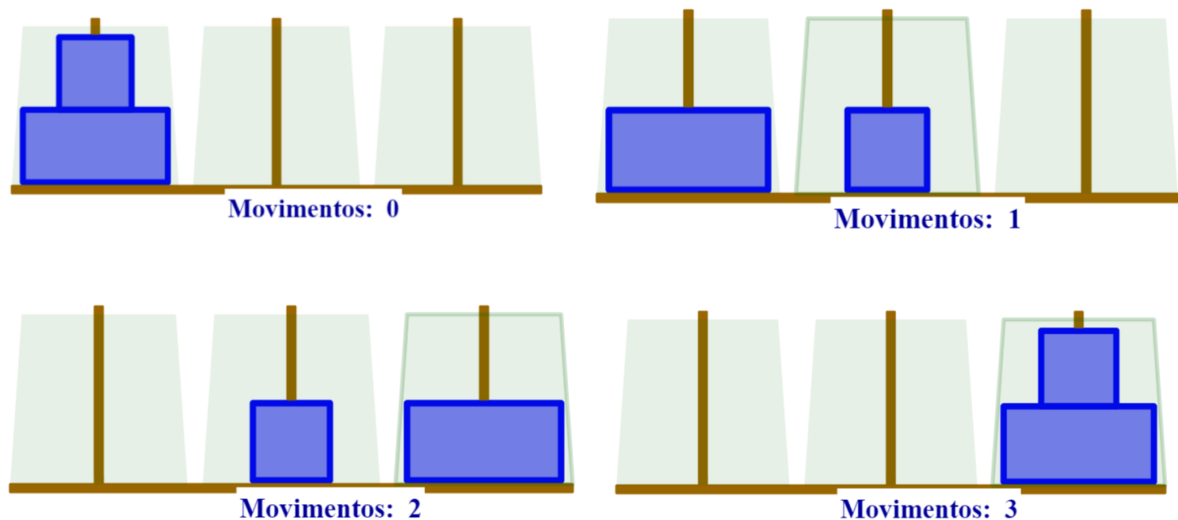
O jogo é uma ferramenta útil para desenvolver estratégias de transferência de peças. Essa abordagem incorpora elementos como contagem de movimentos e desenvolvimento do raciocínio lógico. Os estudantes têm a chance de se envolverem em uma das partes mais importantes do raciocínio matemático: a resolução de problemas. Neste sentido, o estudante ao resolver problemas como este analisado, lhe é proporcionado experiências enriquecedoras no desenvolvimento do pensamento analítico, principalmente pelo fato de serem desafiados a resolver configurações mais complexas gradualmente (quando se aumenta o número de discos).

Vamos responder a seguinte pergunta: Para resolver o problema apresentado, quantos movimentos mínimos são necessários para atingir o objetivo? Antes de mais nada, lembramos que a resposta do problema depende do número de discos e isso nos sugere a estratégia de resolver primeiro os casos mais simples (com dois, três e quatro discos) para depois buscar o padrão que se aplica aos casos mais complexos. Usando os pilares do pensamento computacional, vamos tentar reconhecer algum padrão a partir da abstração e decomposição do problema. Desta maneira, nosso

objetivo é encontrar alguma fórmula que exprima o número de movimentos mínimo em função do número de discos.

Vamos decompor o problema em número de discos. Caso tenhamos apenas um disco, basta um movimento. Caso tenhamos apenas dois discos:

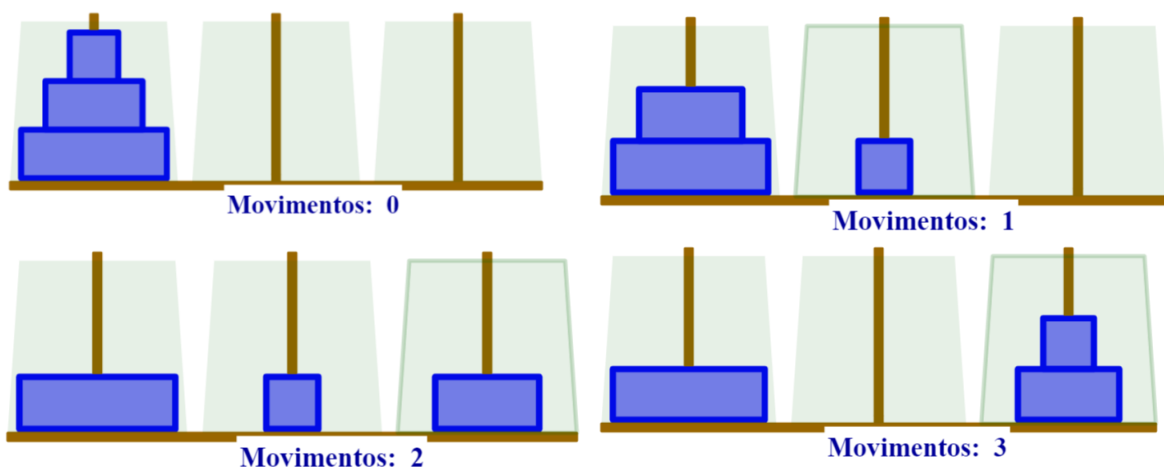
Figura 16 - Resolução do problema da Torre de Hanói com dois discos.



Fonte: Página na Web dos Clubes de Matemática da Obmep¹⁶.

Então, para o caso da Torre de Hanói com dois discos, o número mínimo de movimentos para resolver o problema é 3, simbolicamente: $N(2) = 3$. Agora vamos montar a Torre de Hanói com três discos:

Figura 17 - Resolução do problema da Torre de Hanói com três discos – Parte I.

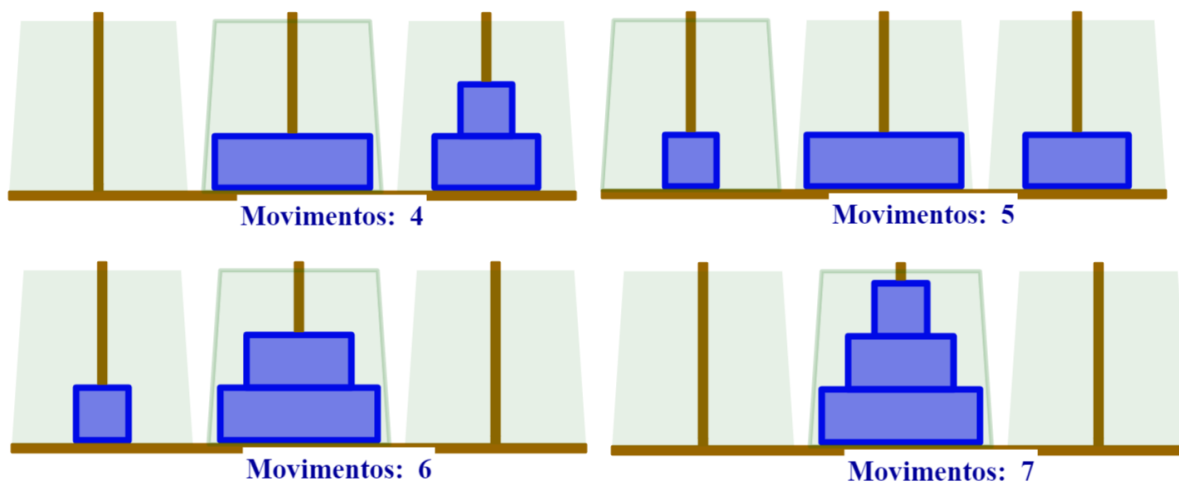


Fonte: Página na Web dos Clubes de Matemática da Obmep.

¹⁶ Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/>. Acesso em: 8 jan. 2024.

Repare que até este passo não mudou nada em relação ao problema anterior com dois discos.

Figura 18 - Resolução do problema da Torre de Hanói com três discos – Parte II.



Fonte: Página na Web dos Clubes de Matemática da Obmep¹⁷.

Podemos notar um padrão naquilo que já foi feito: Seja n o número de discos, precisamos realizar o jogo com $n - 1$ discos duas vezes. Primeiro, movemos os $n - 1$ discos de um pino para outro, usando o pino restante como auxiliar. O disco maior é descoberto por isso. Agora movemos o maior para o pino de chegada. Agora jogamos novamente os discos $n - 1$ do auxiliar para o pino de chegada, usando o pino inicial como auxiliar, e empilhamos todos no pino de chegada sem quebrar as regras. Então, vamos ver o número mínimo de movimentos. Usando operações de tratamento algébrico, vamos retirar informações dos registros figurais utilizados na elucidação do problema para tentar montar uma função recursiva que descreva este problema. Note que ao fazer este procedimento, estamos realizando uma operação de conversão dentre registros, evidenciando o potencial valor didático desta atividade.

Seja $M(n)$, o número de movimentos mínimos necessários para passar dos discos do pino inicial para o de chegada. Como reconhecemos um padrão no parágrafo, vamos utilizá-lo da seguinte forma: Para retirar o último disco do pino inicial é necessário retirar os $n - 1$ discos primeiro para o pino auxiliar, ou seja, já temos como dizer que no mínimo vemos $M(n-1)$ movimentos. Para retirar o disco maior do pino inicial para o de chegada já temos $M(n-1) + 1$ movimento. Note que este caminho dedutivo está

¹⁷ Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/>. Acesso em: 8 jan. 2024.

sendo promissor, pois agora basta somarmos a quantidade de movimentos necessárias para retirarmos os discos do pino auxiliar para o pino de chegada, ou seja, adicionando $M(n-1)$ movimentos. Concluimos com a seguinte função recursiva:

$$M(n) = M(n-1) + 1 + M(n-1) \Rightarrow M(n) = 2 M(n-1) + 1.$$

Como já sabemos que $M(0) = 0$, $M(1) = 1$, $M(2) = 3$ e $M(3) = 7$, conseguimos montar a seguinte tabela partir de operações de tratamento:

Tabela 2 - Relação do número de discos e o número de movimentos necessários para realização do objetivo referente à Torre De Hanói.

Número de discos	Números de movimentos necessários.
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023

Fonte: O próprio autor.

Note que na sequência descoberta existe uma similaridade com as potências de base 2.

Tabela 3 - Relação entre as potências de base 2 e o número de movimentos necessários para realização do objetivo referente à Torre De Hanói.

Potências de base 2.	Números de movimentos necessários.
$2^0 = 1$	0
$2^1 = 2$	1
$2^2 = 4$	3
$2^3 = 8$	7
$2^4 = 16$	15
$2^5 = 32$	31
$2^6 = 64$	63
$2^7 = 128$	127
$2^8 = 256$	255
$2^9 = 512$	511
$2^{10} = 1024$	1023

Fonte: O próprio autor.

Podemos então deduzir que: $M(n) = 2^n - 1$. Afirmamos que esta fórmula é verdadeira pois vamos provar por indução finita este fato. No entanto, em turmas de Ensino Fundamental Anos Finais, acreditamos que a prova possa mais confundir do que elucidar. No entanto, por experiência própria, existem exceções, ou seja, algumas turmas tem facilidade em demonstrações, onde a que vem a seguir, se exposta em turmas mais avançadas, seria de grande valia para a formação matemática dos estudantes.

Demonstração da fórmula $M(n) = 2^n - 1$, com $n \geq 1$:

Para $M(1)$, temos que $M(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Logo, verdadeiro pelo que já verificamos na atividade.

Supondo que $M(n) = 2^n - 1$ é verdadeiro, vamos mostrar que $M(n + 1) = 2^{n+1} - 1$ também é verdade. Veja que por padrão já reconhecido, temos:

$$M(n) = 2 M(n-1) + 1 \Rightarrow$$

$$M(n + 1) = 2 M(n) + 1.$$

Por hipótese de indução:

$$M(n + 1) = 2 [2^n - 1] + 1. \quad \Rightarrow$$

$$M(n + 1) = 2^{n+1} - 2 + 1. \quad \Rightarrow$$

$$M(n + 1) = 2^{n+1} - 1.$$

Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $M(n) = 2^n - 1$.

Voltemos à pergunta inicial da lenda apresentada por Édouard Lucas: Em um problema de Torre de Hanói com 64 discos, quantos movimentos mínimos são necessários para movimentar os discos do pino inicial para o de chegada?

Usando a fórmula deduzida, temos que:

$$M(64) = 2^{64} - 1 = 18.446.073.709.551.616 - 1 = 18.446.073.709.551.615.$$

Por curiosidade, na lenda descrita dizia que quando o problema fosse resolvido, o mundo como conhecemos chegaria ao seu fim. Desta maneira, poderíamos mensurar que: caso cada movimento durasse um segundo, quantos anos teríamos até o fim do mundo?

18.446.073.709.551.615 movimentos ÷ 60 segundos ÷ 60 minutos ÷ 24 horas ÷ 365 dias = 53.176.583.396 anos aproximadamente.

Nesta resolução temos uma conversão do registro figural para o registro algébrico que não é congruente. Podemos mensurar que dificilmente um objeto concreto seja um registro que se converta de maneira congruente a um registro algébrico, isso porque não existiria uma unidade elementar no registro de saída que possa ser associada a cada unidade significativa simples do registro de chegada (critério 1 da congruência entre registros). Nesta dissertação a Torre de Hanói foi simulada via software¹⁸ fornecida no Portal da Obmep. No entanto, ela simula uma torre concreta. Portanto, o critério 1 não foi atendimento em nossas conversões. Além disso, neste sentido, estes registros figurais expostos na resolução são representações auxiliares que visam

¹⁸ <https://www.geogebra.org/m/s5hd5qum>

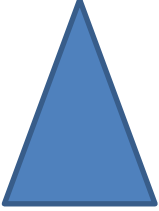
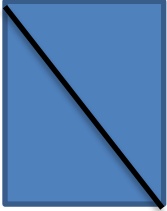
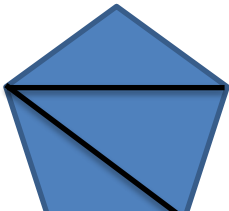
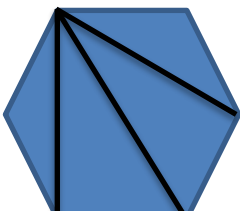
elucidar a questão disposta. No âmbito das figuras geradas, estas são representações auxiliares com funções de interpretação heurística (tratamentos visuais para a escolha de procedimentos na resolução de problemas) e também de ilustração (fornece uma imagem que está relacionada à representação principal); Em relação ao material concreto da Torre de Hanói utilizados em algumas escolas, podemos afirmar que estes configuram-se também como representações auxiliares do tipo material, pois substitui a representação principal por um objeto que teria a capacidade de lidar com situações específicas.

5.3 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO NÚMERO DE DIAGONAIS DE POLÍGONO CONVEXO COM N LADOS.

Usando os pilares do pensamento computacional, vamos deduzir uma fórmula para o cálculo do número de diagonais de polígono convexo com n lados. Queremos destacar que a simples “decoreba” da fórmula, cria uma falsa sensação de aprendizagem, pois caso o estudante esqueça a mesma, ele já não consegue resolver este tipo de problema. O próprio entendimento de como surge a fórmula, ou seja, sua fundamentação, faz com que o aluno consiga resolver seus problemas em diferentes contextos, pois cria um arcabouço matemático embasado em diferentes registros, gerando valor didático.

Denotaremos N como o número de lados de um polígono. Primeiramente, vamos decompor o problema em pedaços menores, ou seja, vamos tentar entender como funciona as diagonais que partem de um único vértice (D_v), de alguns polígonos:

Quadro 8 - Relação entre alguns polígonos e diagonais que partem de um único vértice (D_v).

N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
			
$D_v = 0$	$D_v = 1$	$D_v = 2$	$D_v = 3$

Fonte: O próprio autor

Conseguimos reconhecer um padrão, a partir dos registros acima, que fixado um determinado vértice, com o mesmo não se consegue construir uma diagonal que parta para si mesmo ou aos dois vértices vizinhos. Desta maneira concluímos que o número de diagonais que parte de um único vértice (D_v) de um polígono convexo com N lados é:

$$D_v(N) = N - 3.$$

Note que até este momento, já realizamos operações de conversões entre registros. Quando decomparamos o problema em pedaços menores para entender como funciona as diagonais que partem de um único vértice (D_v), de alguns polígonos, houve uma conversão de registro figural para registro numérico. Afirmamos que esta conversão é não congruente pelo fato de que o processo de contagem não preserva a correspondência semântica entre as unidades de significado da representação de saída e de chegada. No segundo momento que reconhecemos o padrão e definimos uma fórmula, temos a conversão do registro em língua materna para algébrica. Pelo Quadro 9 percebe-se que não conseguimos identificar nenhum dos três critérios de congruência de conversão entre registros.

Quadro 9 - Síntese de uma conversão do registro em língua materna para registro algébrico II.

“fixado um determinado vértice, com o mesmo não se consegue construir uma diagonal que parta para si mesmo ou aos dois vértices vizinhos”

$$\Downarrow$$

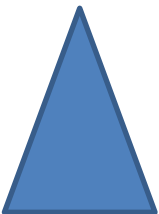
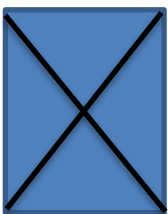
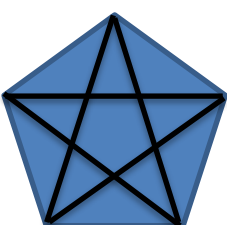
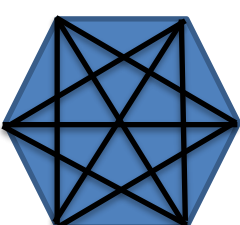
$$D_v(N) = N - 3.$$

Fonte: O próprio autor.

Tanto no Quadro 8, quanto no Quadro 10 e Figura 19, temos uma representação auxiliar com função de interpretação heurística (tratamentos visuais para a escolha de procedimentos na resolução de problemas) e também de ilustração (fornece uma imagem que está relacionada à representação principal);

Agora, podemos usar o pilar abstração, ou seja, reconhecer aquilo que de fato é importante para a resolução do problema, para entender que: para buscar uma fórmula geral para o número de diagonais em todo o polígono (D), basta multiplicarmos a quantidade de vértices de um polígono pela quantidade de diagonais que parte de cada vértice, certo? Será que é isso mesmo? Vamos analisar por meio do registro figural.

Quadro 10 - Número de diagonais em alguns polígonos.

N = 3	N = 4	N = 5	N = 6
			
D = 0	D = 2	D = 5	D = 18

Fonte: O próprio autor

Note pelo registro gráfico que encontramos determinados valores para o número de diagonais dos quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Caso nossa intuição estiver certa, teríamos que:

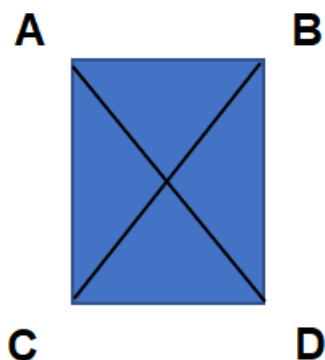
$$D = N \times (N - 3).$$

No entanto, para o quadrilátero já vemos que não está correto, pois para $N = 4$:

$$D = N \times (N - 3) = 4 \times (4 - 3) = 4 \times 1 = 4.$$

Note que graficamente vimos que $D = 2$ e não 4. Isso significa que a fórmula proposta está deixando passar alguma informação importante. Esta é a seguinte:

Figura 19 - Diagonais de um quadrilátero.



Fonte: O próprio autor

A diagonal que parte do vértice A e vai para o vértice D é a mesma diagonal que parte de D e vai para A, ou seja, o segmento de reta AD é o mesmo segmento de reta DA. Desta maneira, estamos contando duas vezes a mesma diagonal. O mesmo acontece nos casos do pentágono e do hexágono:

Para $N = 5$:

$$D = N \times (N - 3) = 5 \times (5 - 3) = 5 \times 2 = 10.$$

Para $N = 6$:

$$D = N \times (N - 3) = 6 \times (6 - 3) = 6 \times 3 = 18.$$

Reconhecemos este padrão de contarmos sempre duas vezes a mesma diagonal.

Para resolver este problema, basta fazermos uma divisão por dois. Desta maneira, a fórmula procurada é:

$$D = \frac{N \times (N-3)}{2}.$$

Repare que novamente fizemos operações de conversões entre registros e até mesmo de tratamento. Reconhecemos o valor didático deste tipo de atividade, pois favorece a conversão entre diferentes registros, potencialmente gerando um maior aprendizado pelos estudantes. Poderíamos também enunciar um algoritmo em

pseudocódigo para o cálculo de número de diagonais de um polígono convexo com N lados:

Quadro 11 - Pseudocódigo para o cálculo de número de diagonais de um polígono convexo com N lados.

Obtenha o número de diagonais D de um polígono convexo com N lados.

Se $N < 3$:

Imprima "O polígono deve ter pelo menos 3 lados."

Senão:

Retorne

$$D = \frac{Nx(N-3)}{2}$$

Fonte: O próprio autor

5.4 IDENTIFICANDO A EXPRESSÃO ALGÉBRICA QUE EXPRESSA UMA REGULARIDADE OBSERVADA EM SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS

EXEMPLO: DADA A SEGUINTE SEQUÊNCIA 5, 9, 18, 34, ..., VAMOS ENCONTRAR O DÉCIMO TERMO.

Denotamos o n-ésimo termo desta sequência por $f(n)$, para cada inteiro n. Em um primeiro momento vamos usar o pilar Abstração e denotar que:

$$f(1) = 5.$$

$$f(2) = 9.$$

$$f(3) = 18.$$

$$f(4) = 34.$$

Em busca de reconhecer algum padrão, vamos decompor o problema para comparar duplas de termos e também usaremos uma representação auxiliar com função de interpretação heurística (tratamentos visuais para a escolha de procedimentos na resolução de problemas) em forma de registro gráfico para tanto:

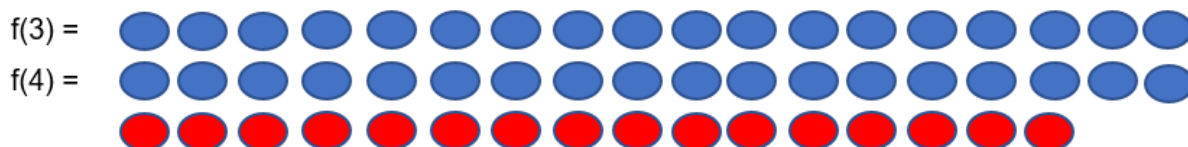
$$f(1) = \text{● ● ● ● ●}$$

$$f(2) = \text{● ● ● ● ● ● ● ● ● ●}$$

Note que o $f(2) = f(1) + 4$.



Note que o $f(3) = f(2) + 9$.



Note que o $f(4) = f(3) + 16$.

Além disso, reconhecemos que os números 4, 9 e 16 são quadrados perfeitos, ou seja:

$$4 = 2^2.$$

$$9 = 3^2.$$

$$16 = 4^2.$$

Podemos então reescrever que:

$$f(1) = 5$$

$$f(2) = f(1) + 2^2.$$

$$f(3) = f(2) + 3^2.$$

$$f(4) = f(3) + 4^2.$$

Portanto, podemos escrever em termos de uma função recursiva o algoritmo que descreve este problema:

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(n) = f(n - 1) + n^2 \end{cases}$$

Note que em relação a sequência numérica do enunciado do problema, usando os pilares do pensamento computacional (decomposição, abstração, reconhecimento de padrões e algoritmo) fizemos duas conversões: (I) do registro figural para registro numérico e após uma conversão de (II) registro numérico para registro algébrico, reduzindo a sequência dada em uma função de forma geral recursiva com domínio discreto. Reconhecemos o valor didático deste tipo de atividade, pois favorece a conversão entre diferentes registros, potencialmente gerando um maior aprendizado

pelos estudantes. Observamos que as conversões são não congruentes. Na conversão (1) novamente afirmamos que pelo fato de o processo de contagem não preservar a correspondência semântica entre as unidades de significado da representação de saída e de chegada, temos que a conversão entre os registros é não congruente. Na conversão (II), a generalização por uma fórmula recursiva faz com que fique implícito as informações em registro numérico descritas anteriormente, tendo que substituir o valor de n para que retorne o valor numérico buscado. De fato, afirmamos que a generalização por fórmulas também é uma conversão não congruente devido à falta dos três critérios de congruência.

Desta maneira, para calcular $f(10)$, basta fazer operações de tratamento como a seguir:

$$f(10) = f(9) + 10^2.$$

$$f(10) = f(8) + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(7) + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(6) + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(5) + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(4) + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(3) + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(2) + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = f(1) + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = 5 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

$$f(10) = 5 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100.$$

$$f(10) = 389.$$

5.5 IDENTIFICANDO A EXPRESSÃO ALGÉBRICA QUE EXPRESSA UMA REGULARIDADE OBSERVADA EM SEQUÊNCIAS DE FIGURAS

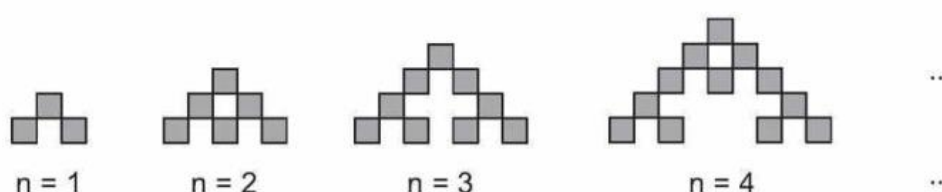
As questões a seguir foram selecionadas a partir de um material fornecido pela Secretaria de Estado de Educação do Espírito Santo (Sedu-ES), via site¹⁹, para os professores utilizarem na preparação dos alunos para a aplicação da avaliação do

¹⁹ <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/recomposicaodasaprendizagens/>

Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) 2023²⁰. Vamos mostrar a potencialidade desta questão a partir da resolução via pensamento computacional.

Figura 20 – Primeira questão sobre o descritor Saeb D32 - identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).

(M090274G5) A sequência de figuras abaixo possui uma regularidade e pode ser representada por uma expressão algébrica que relaciona a quantidade de quadradinhos coloridos de cinza em cada figura, de acordo com a posição em que essa figura ocupa nessa sequência.



Qual é a expressão algébrica que permite calcular a quantidade de quadradinhos em cinza da n -ésima figura dessa sequência?

- A) $n + 1$
- B) $3n$
- C) $3n + 3$
- D) $6n - 3$

Fonte: Página da Web sobre Recomposição de Aprendizagens – Sedu/ES²¹.

Note que a própria forma que a questão é apresentada nos indica um caminho vinculado ao pilar reconhecimento de padrões. No primeiro momento, vamos utilizar dos pilares decomposição e abstração para entendermos o que está ocorrendo a cada etapa ($n=1$, $n=2$, $n=3$, ...). Em relação à decomposição, analisaremos cada etapa e em relação à abstração realizaremos uma síntese do processo da regularidade, observada por meio de uma tabela.

Tabela 4 - Síntese do processo da regularidade observada nas figuras envolvidas na questão da Figura 20.

n	1	2	3	4
Quantidade de quadrados	3	6	9	12

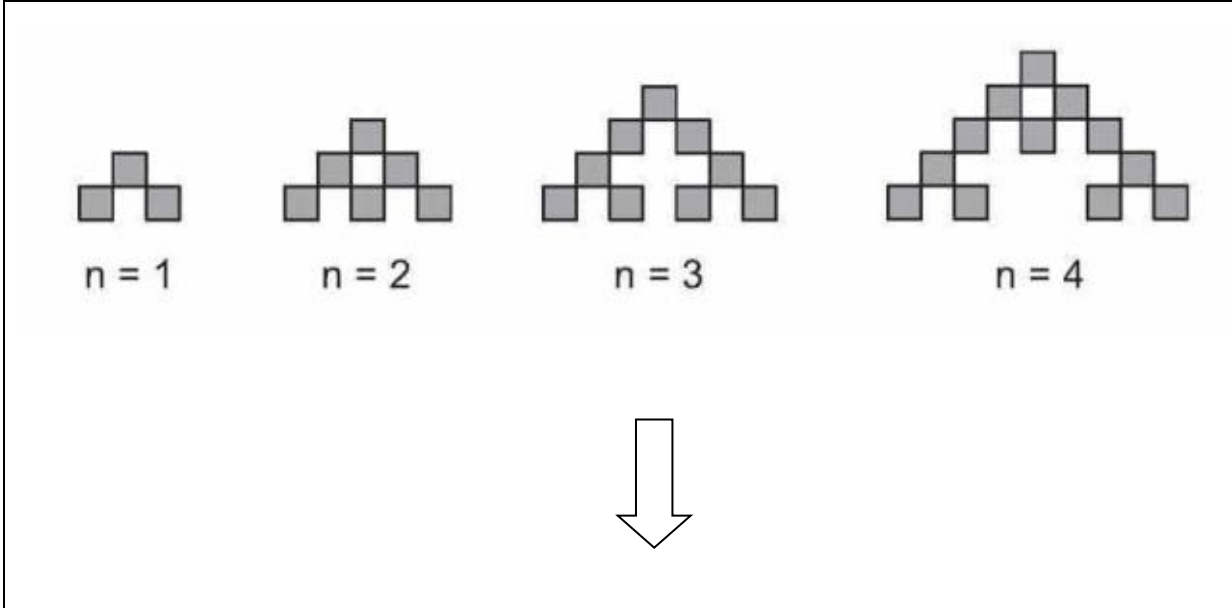
Fonte: O próprio autor.

²⁰ O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) visa fazer um diagnóstico da Educação Básica no Brasil. É uma avaliação externa em larga escala realizada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, vinculado ao Ministério da Educação.

²¹ Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/recomposicaodasaprendizagens/>. Acesso em: 15 ago. 2023.

Observe que acabamos de realizar uma conversão entre registros, passamos do registro figural para o registro numérico. Este último organizado em um tipo de representação específica, uma tabela. Pelo fato de o processo de contagem não preservar a correspondência semântica entre as unidades de significado da representação de saída e de chegada, temos que a conversão entre os registros é não congruente.

Quadro 12 - Síntese das conversões entre registros envolvidas na resolução da questão da Figura 20.



n	1	2	3	4
Quantidade de quadrados	3	6	9	12

Fonte: O próprio autor.

Com isso, a partir desta tabela é possível reconhecer um padrão. A quantidade de quadrados em cada figura é um número múltiplo de três. O padrão facilmente identificado no registro numérico não está claro no registro figural, pois não se percebe (facilmente) um padrão geométrico na sequência de figuras. Com isso, basta descrever este padrão em uma linguagem algébrica. Aqui temos a segunda conversão, o registro em língua natural para o registro algébrico:

A quantidade de quadrados para cada valor de n é um número múltiplo de três.



$3n$, com n inteiro.

Portanto a resposta correta à questão é o item b. Caso quiséssemos a resposta em forma de função recursiva ao invés da expressão algébrica teríamos:

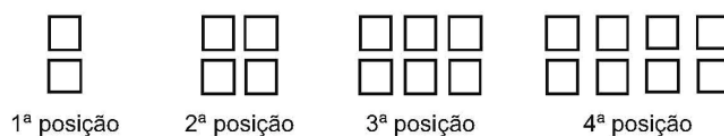
$$f(n) = 3n.$$

Destacamos que em relação a sequência figurada do enunciado do problema, usando os pilares do pensamento computacional (decomposição, abstração, reconhecimento de padrões e algoritmo), fizemos conversões a registros numéricos, registros em língua natural e também registros algébricos, reduzindo a sequência dada em uma função de forma geral recursiva com domínio discreto. Reconhecemos o valor didático deste tipo de atividade, pois favorece a conversão entre diferentes registros, potencialmente gerando um maior aprendizado pelos estudantes.

A seguir, apresentamos uma outra questão envolvendo regularidade em sequências de figuras:

Figura 21 - Segunda questão sobre o descritor Saeb D32 - identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões).

(M090588A9) Observe a sequência de quadrados que Flávio desenhou.



A expressão algébrica que representa a quantidade de quadrados de cada figura em função da posição que ela ocupa na sequência é

- A) $2 + n$
- B) $2 + n^2$
- C) $2 \times n$
- D) $20 + n$

Fonte: Página da Web sobre Recomposição de Aprendizagens – Sedu/ES²².

²² Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/recomposicaodasaprendizagens/>. Acesso em: 15 ago. 2023.

Novamente, pelo mesmo motivo da questão anterior, usaremos uma conversão não congruente entre o registro figural para o numérico para podermos montar uma relação de pares ordenados de função recursiva discreta.

Tabela 5 - Síntese do processo da regularidade observada nas figuras envolvidas na questão da Figura 21.

n	1	2	3	4
Quantidade de quadrados	2	4	6	8

Fonte: O próprio autor.

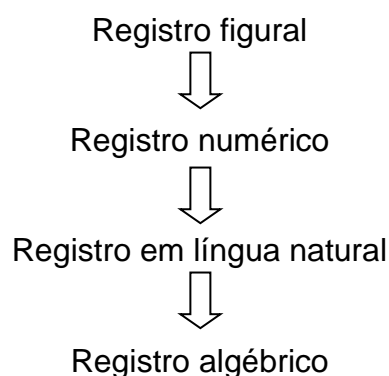
A conversão do padrão encontrado em registro numérico para uma expressão algébrica passa-se pelo seguinte reconhecimento:

“A quantidade de quadrados para cada valor de n é um múltiplo de dois.”

Com isso, desta conversão do registro numérico para o registro em linguagem natural, podemos, enfim, encontrar a expressão algébrica:

“ $2n$, com n inteiro”

Deste modo, podemos sintetizar o fluxo de conversões da seguinte maneira:



Portanto, reconhecemos o valor didático deste tipo de atividade, pois favorece a conversão entre diferentes registros, potencialmente gerando um maior aprendizado pelos estudantes.

Neste capítulo, analisamos a resolução de alguns problemas matemáticos envolvendo recorrência seguindo o pensamento computacional visando mostrar seu valor didático pela explicitação das conversões envolvidas. Com a mesma perspectiva, na próxima seção descrevemos uma experiência didática em que estudantes da Educação Básica resolvem um dos problemas deste capítulo e analisamos suas resoluções.

6. RELATO DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

A atividade foi realizada por dez alunos que aceitaram participar da pesquisa. Em uma aula da disciplina de Estudo Orientado (EO)²³ os alunos retiraram-se junto com o professor para uma sala especialmente organizada para a aplicação desta atividade. Baseado na Pedagogia da Presença²⁴, uma diretriz da Educação em Tempo Integral no Estado do Espírito Santo, os estudantes estavam dispostos em mesas redondas com cinco alunos cada. A ideia consistia em permitir que os alunos colaborassem na resolução do problema. Nesta descrição e análise vamos tratar cada aluno com um pseudônimo, a saber: LZ, EL, LR, AL, RY, CS, MR, HN, DS e RH.

O professor pesquisador apresentou os objetivos da atividade: utilizar os pilares do pensamento computacional em nosso auxílio na resolução de um problema. Após isso, ele leu e entregou uma folha com o enunciado da questão e com uma breve introdução aos quatro pilares do pensamento computacional. O problema era o seguinte:

Uma pessoa tem um casal de coelhos recém nascidos, e os cria dentro de um lugar que é cercado e protegido. Supondo que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês após o primeiro mês de vida, quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016)?

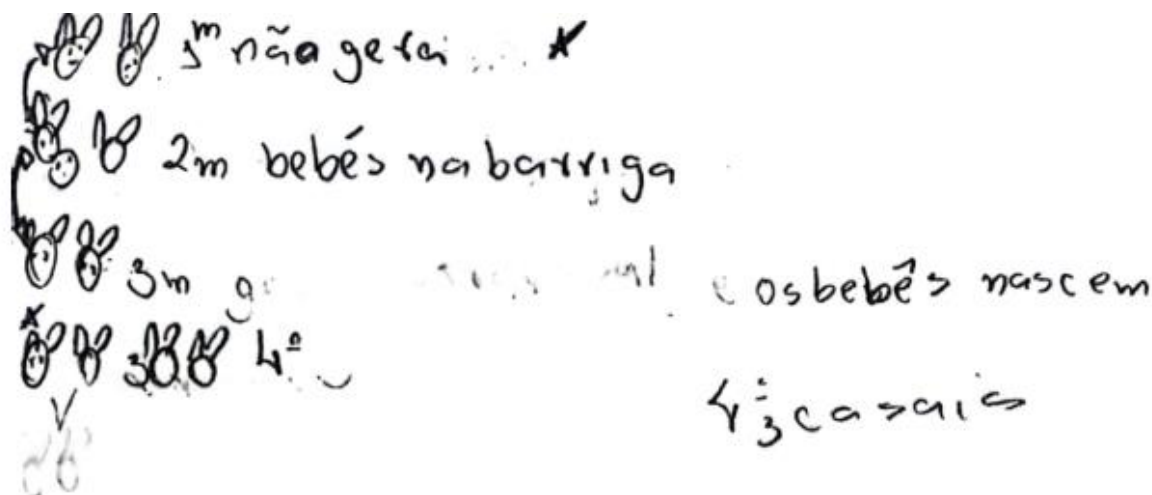
Os alunos perceberam de imediato ao ler o problema proposto que o mesmo não tinha uma solução imediata ou um caminho pré-definido para resolvê-lo. O professor destacou que essa é uma definição do que é um problema matemático e acalmou seus alunos encorajando-os a não desistirem de buscar uma solução.

²³ “O EO consiste na aquisição e no desenvolvimento de técnicas e de rotinas de estudo que possibilitem a organização do processo de aprendizagem dos estudantes, visando a assegurar-lhes o direito à educação de qualidade com foco no protagonismo juvenil e na equidade” (Espírito Santo, 2020b, p. 1).

²⁴ “É um princípio que está presente em todas as ações de toda a equipe escolar, por meio de ações participativas e afirmativas em todo o cotidiano da escola. A materialização desse princípio se dá por meio do estabelecer de vínculos de consideração, afeto, respeito e reciprocidade entre os estudantes e os educadores” (Espírito Santo, 2020c, p. 1).

O professor pesquisador planejou sempre utilizar os pilares do pensamento computacional em suas abordagens/intervenções junto aos alunos. No primeiro momento, o professor fez uma breve introdução sobre o assunto, destacando que por meio desses pilares poderíamos encontrar a solução pretendida mais facilmente. Com isso, em um primeiro momento, o professor orientou aos alunos que começassem a solução buscando-a por meio da decomposição, ou seja, dividindo o problema que se apresentava complexo em um problema menor que eles conseguissem começar seus trabalhos. O professor destacou a necessidade de decompor o problema de maneira que os alunos possam estudar e entender o que acontece mês a mês antes de tentar mensurar de maneira imediata o 12º mês. Na figura 22, vemos uma tentativa de resolução da aluna EL pensando a partir da decomposição mês a mês do problema. Perceba o uso de uma representação auxiliar com uma função de *Interpretação heurística ou tratamento transitório*. Neste tipo de representação o objetivo é usar de um tratamento visual para a escolha de procedimentos na resolução de problemas. Desta maneira, esta aluna está usando do registro figural.

Figura 22 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL usando imagens de coelhos.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Alguns alunos dividiram os doze meses propostos na atividade em janeiro, fevereiro, março, até dezembro. Interessante dizer que em nenhum momento se tentou dizer que os doze meses consistiam um ano de calendário começando em janeiro, mas eles optaram por pensar assim. Note que este registro em tabela (Figura 23), da estudante RH, usa uma representação auxiliar para incluir informações que não estão

presentes na representação principal e complementam os enunciados. É claro, neste exemplo, a complementação foi feita pela estudante à sua maneira. Entendemos que podemos identificar a função desta representação auxiliar como um *aporte de informações complementares*.

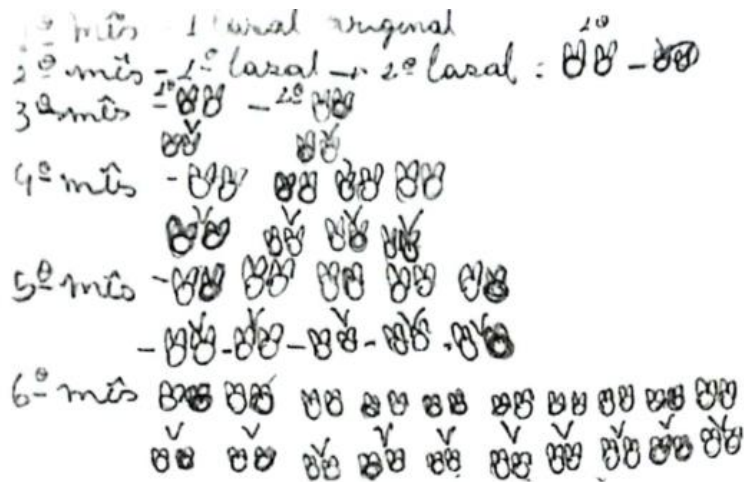
Figura 23 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna RH.

JANEIRO 1º casal	FEVEREIRO 1º filho	MARÇO nascimento do primeiro filho	ABRIL geração do 2º filho	MAIO 2 nasce
1	1	2	3	5
JUNHO 1ª geração de mais	JULHO 2 nasce	AGOSTO gera 1	SETEMBRO 2 nasce	OCTUBRO
8	13	55	89	
NOVEMBRO	DEZEMBRO 2 nasce			

Fonte: Arquivos da pesquisa.

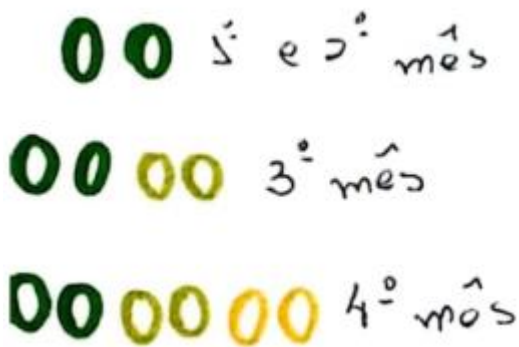
Em relação às representações auxiliares, muitos tentaram desenhar os coelhos, inclusive diferenciando macho e fêmea, ao invés de usar apenas um símbolo para representar o casal. Segue exemplos nas figuras 24 e 25. Mais uma vez, o objetivo é usar de um tratamento visual para a escolha de procedimentos na resolução de problemas, ou seja, uma representação auxiliar com função de Interpretação Heurística.

Figura 24 - Representação auxiliar usando registro figural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Figura 25 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL usando círculos para cada casal.

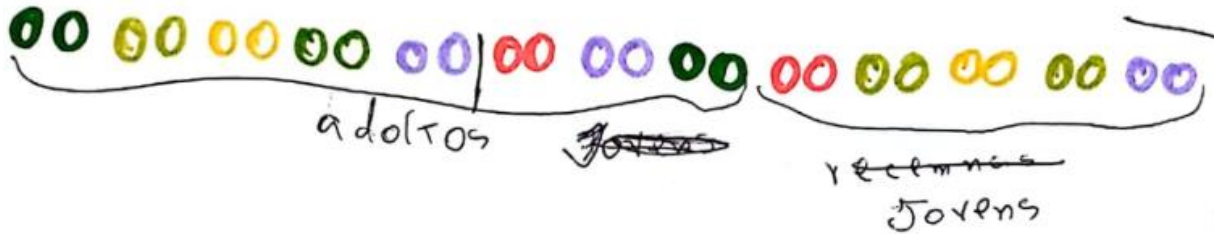


Fonte: Arquivos da pesquisa.

As discussões iniciais orbitaram em torno do entendimento do quando pode-se gerar um novo casal. Alguns termos surgiram nessa discussão, como “casal neném”, “casal jovem”, “casal adulto”, “casal recém-nascido”, etc. Acredito que esses termos em registro em língua natural podem exercer uma função de representação auxiliar no sentido de interpretação explicativa, pois apresentam informações implícitas de maneira diferente da representação inicial que explicou a dinâmica geracional pelo enunciado da questão. Os estudantes consideraram dar nomes a cada momento de vida dos coelhos. As figuras 26, 27, 28 e 29 ilustram partes das soluções dos estudantes EL, LZ e LR exemplificando essa situação.

Na figura 26 a estudante utiliza diferentes cores para designar diferentes casais de coelhos.

Figura 26 - Representação auxiliar na resolução do problema dos coelhos pela aluna EL.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Na figura 27 percebemos que a representação não corresponde à sequência de casais de coelhos do problema, pois no quarto mês deveria haver 3 casais de coelhos, mas o aluno só registra dois.

Figura 27 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ.

1º mês - 1º casal
 2º mês - 1º casal (recém-nascido)
 3º mês - 1º casal - 2º casal
 4º mês - 1º casal - 2º casal (varem)
 3º casal (recém-nascido)

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Na figura 28, as frases do aluno mostram a dificuldade de raciocinar abstratamente, pois ele teve que recorrer ao "mecanismo" da gestação para explicar o fato de que casais jovens não produzem filhos.

Figura 28 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pelo aluno LZ (Legenda).

Recém nascidos: acabaram de nascer de um ca-
 sal adulto. Eles não têm um casal.
 Adultos: já estão na última fase, geram filhotes a cada mês.
 Jovens: Estão gerando filhotes em seus úteros, ainda não tem
 filhotes.

Fonte: Arquivos da pesquisa.

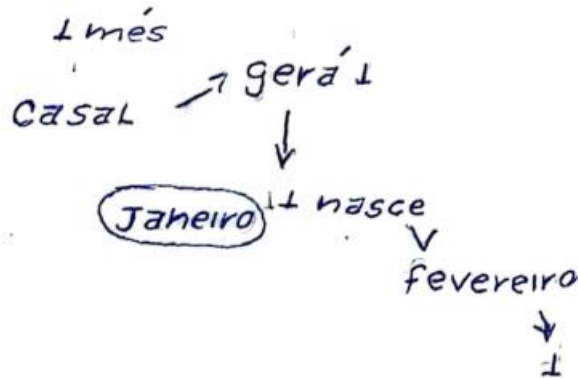
Figura 29 - Representação auxiliar usando registro em língua natural na resolução do problema dos coelhos pela aluna LR.

1° adulto
 2° adulto
 3° adulto
 4° jovem
 5° jovem
 6° recém
 7° recém
 8° recém

Fonte: Arquivos da pesquisa.

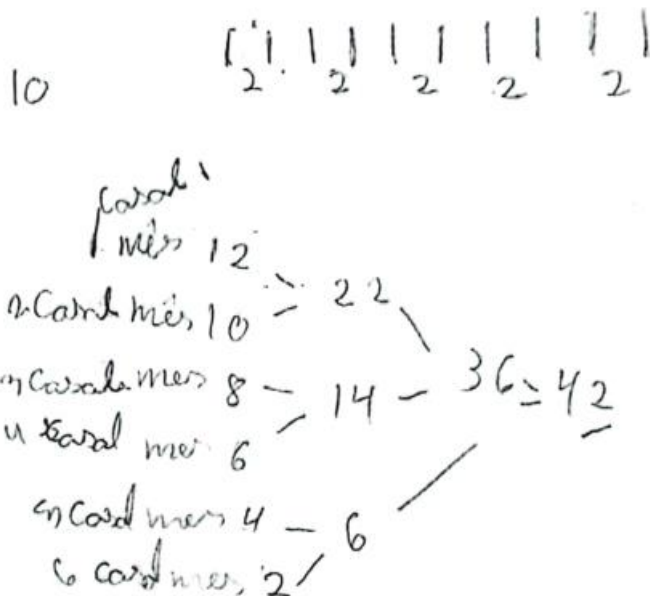
O professor pesquisador teve que intervir para deixar claro a dinâmica geracional proposta e para evitar que surgissem soluções equivocadas oriundas de um entendimento diferente do que está sendo proposto no problema. “O casal de coelhos torna-se gerador a partir do segundo mês, com seu casal filho nascendo no terceiro”. Esse entendimento tornou-se unânime após a intervenção do professor. Nas figuras 30 e 31 vemos tentativas dos estudantes na busca por um padrão.

Figura 30 - Tentativa da estudante HN de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Figura 31 - Tentativa da estudante MR de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.

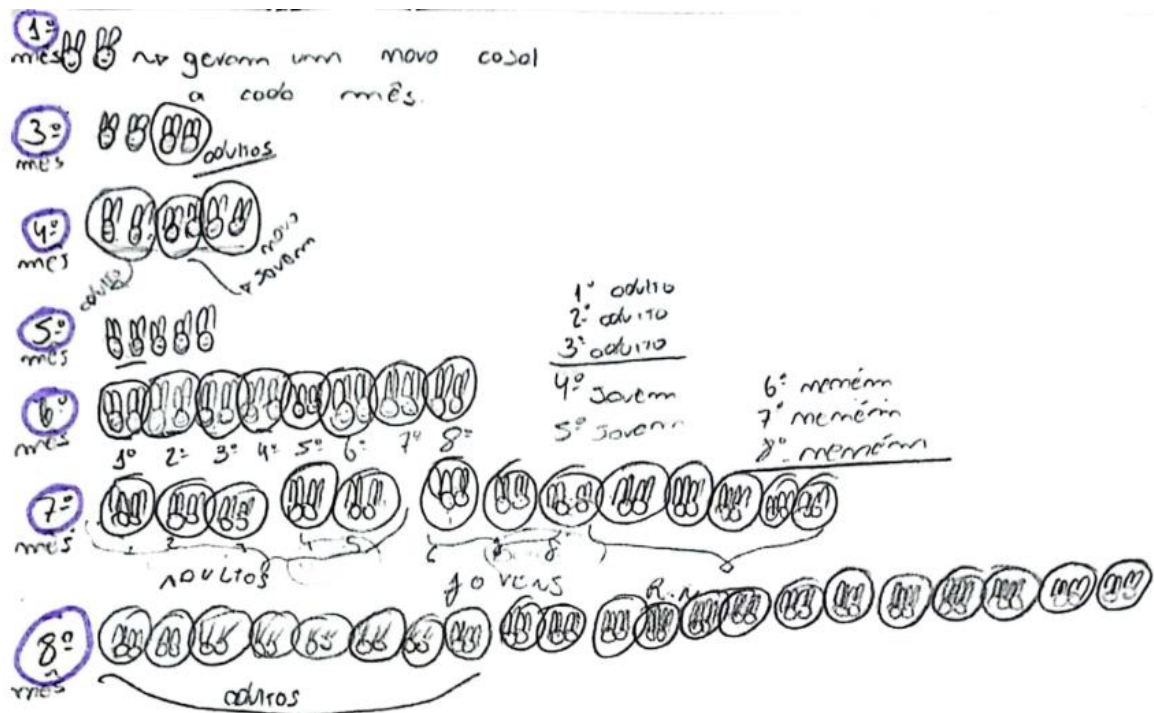


Fonte: Arquivos da pesquisa.

Com isso, as tentativas dos alunos foram na direção de continuar com as representações auxiliares em registro figural para buscar reconhecer algum padrão. O professor sempre entrevistava usando o vocabulário e entendimento sobre os pilares do pensamento computacional, ou seja, buscava fazer com que os estudantes percebessem um caminho de decompor os desafios encontrados no processo de

solução, abstraído por meio de registros figurais ou numéricos, para poder enfim reconhecer algum padrão em algum momento. Por meio das representações auxiliares em registro figural, o professor percebeu que os alunos estavam progredindo em relação aos meses, mas sem o uso de um pensamento mais generalista, ou seja, estavam de maneira analógica buscando a solução. Uma conclusão que emerge é que há dificuldade para os alunos abstraírem, no sentido de perceberem o caso geral partir de casos particulares. Em particular, a dificuldade dos alunos para generalizar está atrelada à uma conversão não congruente, visto que na generalização por fórmulas temos a falta dos três critérios de congruência (ver o capítulo anterior). A figura 32 representa esta situação onde a estudante LR já estava no estudo do oitavo mês a partir do registro figural. Note que nesta solução temos o uso de conversões entre registros figural, registros em língua natural e registros numéricos, indicando o valor didático desta atividade.

Figura 32 - Uso de diferentes registros e suas respectivas conversões feitas pela estudante LR.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Nenhum aluno sequer cogitou levar em conta a possibilidade de morte de coelhos e somente alguns perceberam que poderiam focar nos casais de coelhos em vez de nos indivíduos. Algumas dessas representações sugerem que os alunos intuíram que os

casais de coelhos formavam uma unidade de significado do problema e raciocinaram com base nisso, apesar de representarem os casais com o desenho de pares de coelhos, conforme vemos na Figura 24 e na Figura 32. A semelhança entre essas figuras pode ser explicada pelo fato de os alunos trabalharem colaborativamente, o que significa compartilhar ideias e reproduzir ações. Comprovando que isso aconteceu, notamos na Figura 32 que não há um desenho para a população de coelhos no segundo mês (um casal) e que o desenho correspondente ao quinto mês está incompleto (deveria haver cinco casais), indicando que a aluna LR deve ter obtido de algum colega a informação para desenhar os números corretos de coelhos no terceiro mês (dois casais) e no sexto mês (oito casais).

A seguir, vemos na figura 37 como o estudante AL escreveu seus raciocínios em registro em língua natural para poder refletir sobre a dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo problema.

Figura 33 - Tentativa do estudante AL de entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.

no 1^o mês temos um casal
 no 2^o mês estão gerando
 no 3^o mês vai ter 2 casais que são os dois primeiros que ficaram adultos,
 no 4^o mês vai ser 3 casais porque o do 3^o mês gerou mais um casal
 no 5^o mês vai ser 5 casais porque os 4 primeiros são adultos e temos um
 casal.
 no 6^o mês vai ser 8 casais porque os 3 do mês 5 são adultos e então
 geraram mais 3 casais
 no 7^o mês vai ser 13 porque os 5 primeiros geraram mais 3 casais.

Fonte: Arquivos da pesquisa.

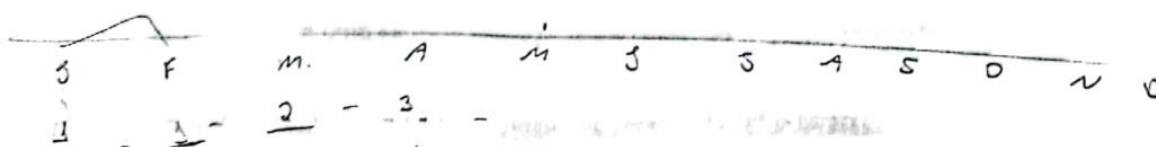
O professor novamente intervém mostrando aos alunos que as representações auxiliares utilizadas por eles não solucionariam o problema em tempo ótimo, visto que o número de casais a cada mês estava crescendo e a capacidade da representação em registro figural em folha de papel A4 poderia tornar-se cada vez mais difícil.

Os alunos persistiam nessa estratégia apesar de encontrarem dificuldades em prosseguir e nenhum deles tomou a iniciativa de recorrer ao registro numérico ou algébrico. Presumivelmente, essa falta de iniciativa deve-se à pouca familiaridade dos

alunos com conversões envolvendo esses registros e indica o fenômeno do “enclausuramento”, o qual se opõe à compreensão em matemática e decorre de um ensino que privilegia os tratamentos em detrimento das conversões (Duval, 2005). Diante dessa dificuldade, pode surpreender o fato de que os alunos converteram as informações do problema com relativa facilidade do registro na língua natural para o registro figural, mas não deste ou daquele para os registros numérico ou algébrico. Presumimos que isso decorre de o registro figural elaborado por eles ser caracteristicamente analógico, portanto, intuitivo, enquanto os registros numérico e algébrico não possuem essa característica.

Dessa maneira, o professor deu a seguinte orientação aos estudantes: “Foque na pergunta do problema proposto. O objetivo é encontrar o número de casais no 12º mês”. Em pouco tempo alguns estudantes, como LZ, EL e RY, perceberam que poderiam contar os casais de coelhos já obtidos nos seus registros para tentar encontrar a resposta sem precisar de desenhar os casais de coelhos em todos os meses que faltavam, conforme ilustra a figura 34. Ou seja, eles perceberam que a solução do problema sendo em registro numérico, tornava-se necessário em algum momento da resolução voltar à este registro (Figura 34).

Figura 34 - Uso do registro numérico pela estudante CS no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Portanto, o próprio uso das representações auxiliares, quando se tem em vista o valor numérico da solução do problema, proporciona a possibilidade de realizar uma conversão entre o registro figural e numérico. Podemos dizer que após uma melhor compreensão do problema, os alunos estavam se aproximando da solução final. Com isso, foram feitas as conversões, exemplificadas nas figuras 35 e 36 entre o registro utilizado na representação auxiliar para um registro numérico, onde acreditava-se que o aluno poderia reconhecer de maneira mais simples algum padrão.

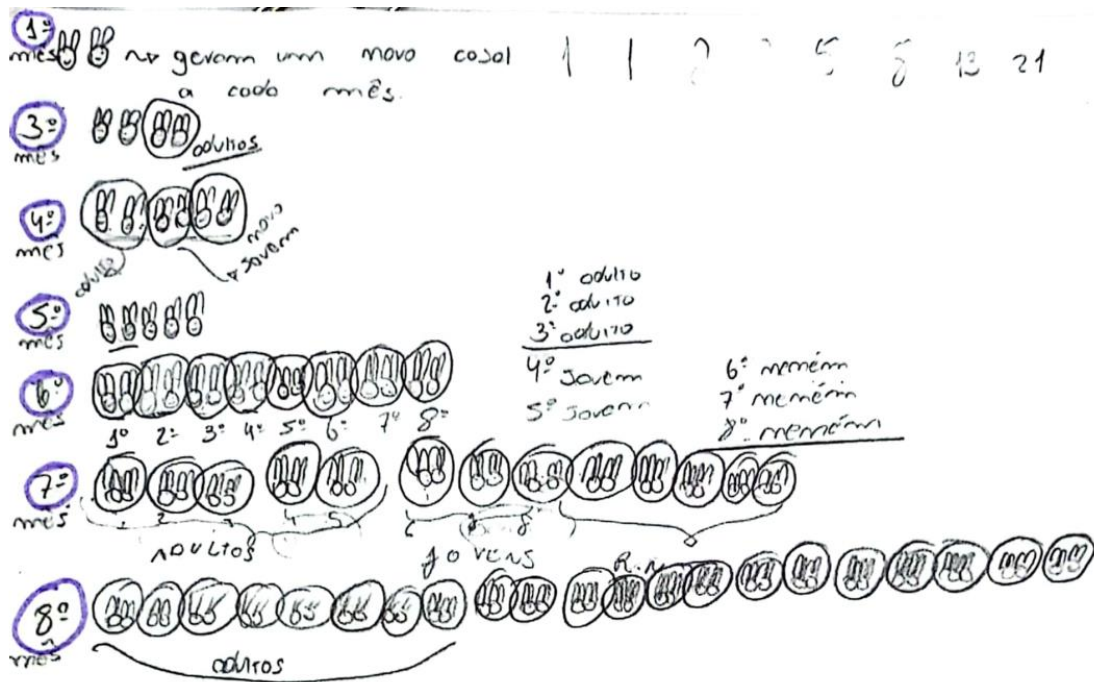
Figura 35 - Uso do registro numérico pelo estudante LZ no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.

1º mês - 1º casal
 2º mês - 1º casal (Recém-nascido)
 3º mês - 1º casal - 2º casal
 4º mês - 1º casal - 2º casal (jovem)
 3º casal (Recém-nascido)
 5º - 1º casal - 2º casal (ADULTO) 3º (jovem)
 4º casal (R.N) 5º casal (R.N)
 6º 1º casal 2º casal 3º casal 4º casal (j.) 5º (j.)
 6º casal (R.N) 7º casal (R.N) 8º casal (R.N)

1-1-2-3-5-8

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Figura 36 - Uso do registro numérico pela estudante LR no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

O professor afirmou que os números de casais a cada mês formavam uma sequência e, tal qual foi estudado e avaliado nas atividades em sala de aula regular sobre o descritor D32 (Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)), o próximo passo para a solução seria utilizar do pilar reconhecimento de padrões para podermos generalizar numa fórmula ou expressão algébrica que determinaria a solução do 12º mês. Ou

seja, para nós, neste contexto, esta fórmula pretendida poderia ser entendida como um algoritmo que retorna a solução. Deixamos claro que estes estudantes ainda não tiveram contato na vida escolar com o conceito de função. Portanto a abordagem foi feita em cima da expressão algébrica. A expressão de recursividade a ser descoberta foi discutida como uma expressão definida por termos de si mesma, ou seja, que precisa de um resultado anterior para ser calculada. Na figura 37 a seguir vemos a sequência numérica formada pelo aluno AL:

Figura 37 - Uso do registro numérico pela estudante AL no entendimento da dinâmica geracional dos coelhos proposta pelo enunciado do problema.

1º mês 2 coelhos
 2º mês 1 casal
 3º mês 2 casais
 4º mês 3 casais
 5º mês 5 casais
 6º mês 8 casais
 7º mês 13 casais

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Com a sequência formada, o problema passa a ser reconhecer o padrão que gera o próximo termo da sequência, pois assim eles conseguiriam chegar no 12º termo. Em língua natural, o professor começou a dizer: “um, um, dois” “um, um, dois”. Depois também disse: “um, dois, três”, “um, dois, três”. Essa intervenção foi pensada de maneira a usar a língua materna de maneira oral para facilitar o reconhecimento de algum padrão por parte dos alunos. De maneira muito sagaz, o estudante LZ foi o primeiro que percebeu que o próximo termo poderia ser a soma dos dois anteriores. Desta maneira, ele aplicou aos termos que ele já havia encontrado via registro figural e percebeu que o padrão estava sendo aplicado em todos os termos. Na figura 38 vemos como ele definiu:

Figura 38 - Sequência formada pelo LZ na busca pelo reconhecimento de padrões.

1-1-2-3-5-8-13-21-34

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Entusiasmado com a descoberta, ele fez operações de tratamento com registro numérico chegando ao resultado final bem antes de seus colegas (Figura 39):

Figura 39 - Operações de tratamento realizadas pelo aluno LZ para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 + 1 \\
 \hline
 2 \\
 + 3 \\
 \hline
 5 \\
 + 8 \\
 \hline
 13 \\
 + 21 \\
 \hline
 34 \\
 + 21 \\
 \hline
 55 \\
 + 34 \\
 \hline
 89 \\
 + 55 \\
 \hline
 144
 \end{array}$$

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Os estudantes LR e EL estava ao lado de LZ na mesma mesa e entusiasmados com a descoberta do colega, LR e EL não podiam deixar de perguntar como ele havia chegado a esta conclusão de 144 casais de coelhos e LZ disse: “É só somar os dois números antes do que você quer”. Este registro em língua natural feito pelo aluno foi assim convertido por suas colegas (Figuras 40 e 41):

Figura 40 - Operações de tratamento para obtenção do 12º termo da sequência encontrada realizado pela aluna LR.

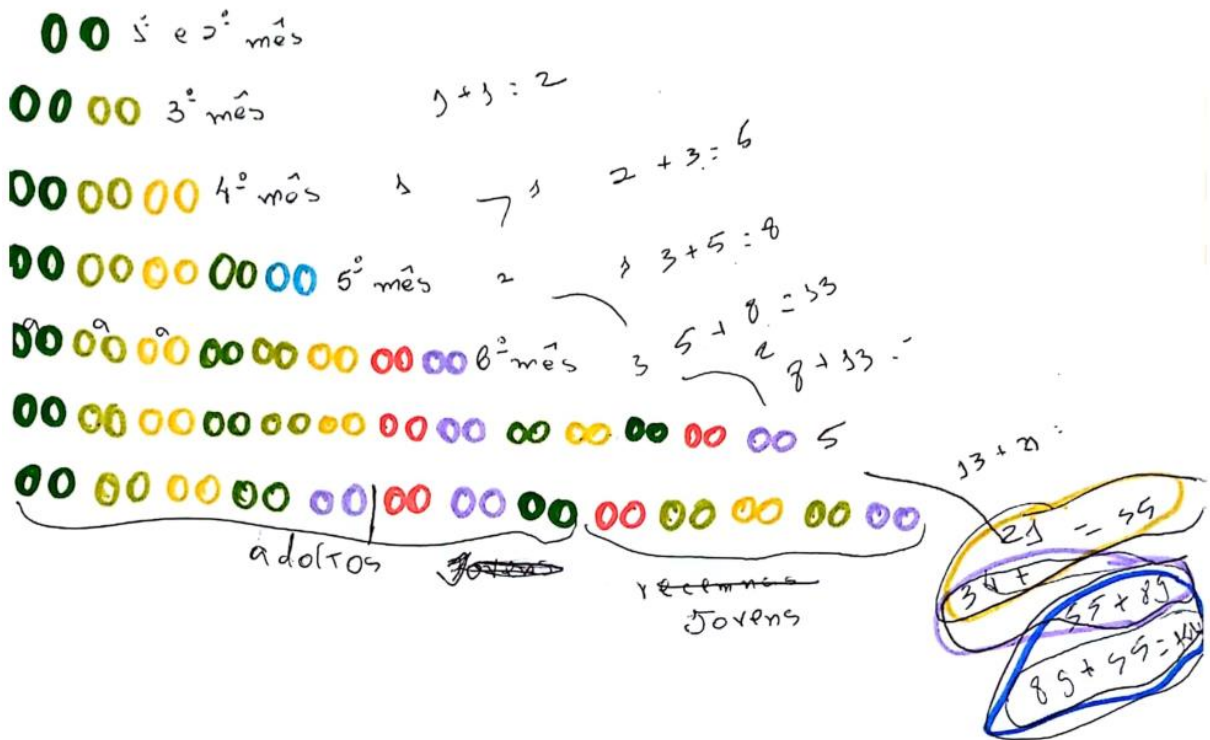
1 + 1 2 + 3 5 + 8 13 + 21 34 + 55 89 + 144

↳ tive que calcular valores anteriores do comço de filhotes.

algoritmo = soma dos meses anteriores.

Fonte: Arquivos da pesquisa.

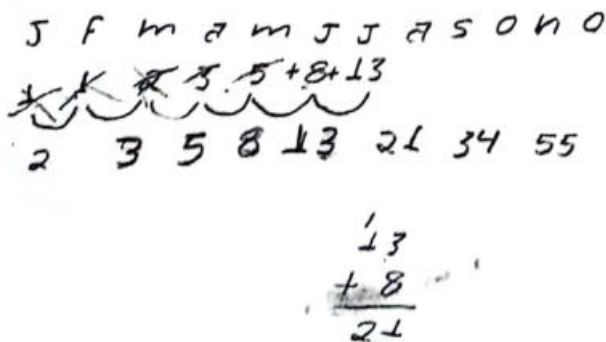
Figura 41 - Operações de tratamento realizadas pela aluna EL para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

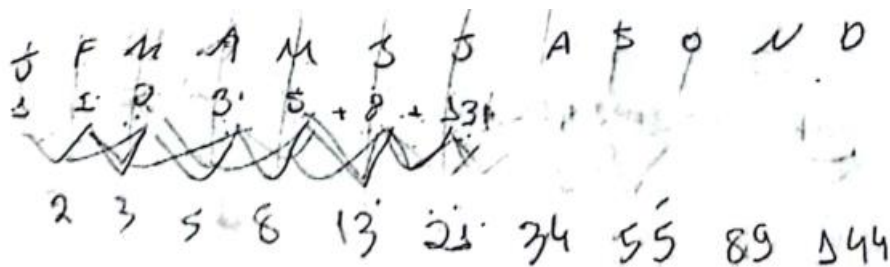
Como vemos nas figuras 42, 43 e 44, ao ser compartilhada esta informação pelos alunos aos colegas próximos, começaram a surgir os seguintes registros:

Figura 42 - Operações de tratamento realizadas pela aluna CS para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.



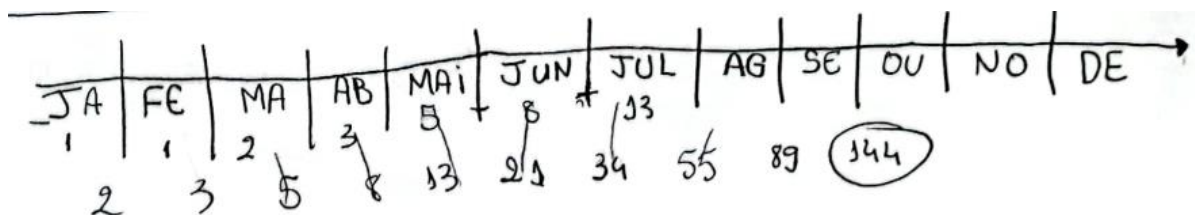
Fonte: Arquivos da pesquisa.

Figura 43 - Operações de tratamento realizadas pela aluna HN para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Figura 44 - Operações de tratamento realizadas pela aluna RH para obtenção do 12º termo da sequência do problema dos coelhos.



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Note que são operações de tratamento dentro do registro numérico, mas também são usados setas, quadros e tabelas como representações auxiliares para organização ou seleção de elementos relevantes.

Com a obtenção da solução final por parte dos estudantes, o professor pesquisador reforçou o pilar algoritmo do pensamento computacional, afirmando a possibilidade de formarmos uma regra geral para a sequência encontrada. Foi destacado pelo professor que a necessidade de utilizar de termos anteriores da própria sequência para encontrar o próximo termo é chamado de recursividade e é muito usado na computação. Destacou que caso precisássemos saber a quantidade de casais de coelhos no 100º mês poderíamos construir um algoritmo e usar o computador para calcular usando uma fórmula de recorrência (Figura 45), pois com um maior número de meses, tornar-se-ia cada vez mais inviável ficar realizando operações de tratamento com registros numéricos. Os alunos concordaram e o professor realizou o seguinte registro (Figura 45) na folha de LZ. Destacamos que o professor teve que precipitar a fórmula para poder concluir a atividade antes do tempo acabar.

Figura 45 - Registro algébrico da função recursiva envolvida no problema dos coelhos.

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2)$$

Fonte: Arquivos da pesquisa.

O estudante LZ perguntou se a letra ‘f’ utilizada era oriunda da palavra fórmula. O professor considerou bem interessante esta observação e explicou que letra utilizada poderia ser qualquer uma e que o importante desta representação em registro algébrico era a noção do que se quer representar com o “x-1” e o “x-2”. Esta noção foi entendida foi pelos alunos a partir da proficiência alcançada por eles anteriormente nos descritores SAEB que envolvem expressões algébricas.

Concluindo a aula, verificamos que o tempo foi relativamente suficiente para a realização da atividade e que os alunos ficaram entusiasmados com esse tipo de desafio matemático, a ponto de se disponibilizarem a participar de novas pesquisas. Assim, concluímos este momento com os estudantes agradecendo-os pelo aceite em participar da pesquisa. Pessoalmente, estávamos felizes pelo êxito deles em conseguir alcançar a solução no problema proposto. Como percebe-se por este relato,

o valor didático da atividade foi avaliado e em nossa consideração o objetivo foi alcançado:

- Entendemos como a aplicação do pensamento computacional afeta a coordenação entre registros de representação semiótica empregados na resolução em problemas discretos envolvendo recursividade.
- Identificamos os registros de representação semiótica empregados na resolução em problemas discretos envolvendo recursividade, classificamos as conversões entre eles quanto à congruência e, no caso das representações auxiliares, suas funções de acordo com a classificação de Moretti e Baerle (2022).

Ressaltamos que a fórmula de recorrência que apresentamos ao final envolve uma função, denotada por " $f(x)$ ". Não discutimos ou se aprofundamos no conceito, presumindo que para os propósitos da atividade bastaria aos alunos um entendimento intuitivo de função. Desta maneira, usamos dos objetos já reconhecidos por estes alunos, como as expressões algébricas, para poder introduzi-los na recursividade em problemas discretos.

Sintetizando a experiência com os alunos, podemos dizer que o pensamento computacional serviu para a abordagem do problema proposto, ensejando estratégias de resolução. O problema proporcionou conversões entre diferentes registros (língua natural, figural, numérico e algébrico) potencializando o entendimento dos conceitos envolvidos, particularmente o de funções recursivas. Por fim, entendemos que o valor didático da atividade foi demonstrado em face dessas constatações e que ela serviu também para o professor-pesquisador identificar deficiências no conhecimento matemático dos alunos, funcionando também como avaliação diagnóstica.

Tanto em nossa resolução no Capítulo 5 quanto na resolução dos alunos, poderíamos ter resolvido o problema dos coelhos sem apelar para uma representação auxiliar (figural) – por exemplo, deduzindo diretamente do enunciado a fórmula de recorrência para a população mensal de coelhos. Isso nem é tão difícil de fazer: a partir do terceiro mês, a população em um mês (digamos mês " n ") é a soma do número de casais no mês anterior (mês " $n-1$ ") mais o número de casais que são gerados no mês anterior; ora, o número de casais gerados no mês anterior é igual ao número de casais adultos

nesse mês (aqueles casais capazes de se reproduzir) e esse número é igual ao número de casais que havia no mês que antecedeu o mês anterior (mês “n-2”); logo, a população de coelhos em um mês a partir do terceiro é igual à soma da população no mês anterior com a população no mês que antecede o anterior. Todavia, julgamos mais fácil – e imaginamos que o leitor concorde conosco – construir uma figura que representasse a situação e os alunos foram pelo mesmo caminho, mostrando que ela é natural ou mesmo espontânea. Observamos que as representações produzidas pelos alunos foram de grande valia para que pudessem interpretar e resolver o problema, servindo de suporte para suas reflexões e também para comunicar ideias.

Cabe salientar que a fórmula de recorrência obtida indutivamente pelos alunos a partir de nossas representações figurais precisava de uma justificativa *a posteriori*. Matematicamente, é importante salientar que a verificação de uma propriedade ou regra em instâncias que não exaurem seu campo de aplicação não constitui justificativa lógica suficiente de sua validade geral. Considerando que as demonstrações matemáticas são exemplos paradigmáticos de argumentação dedutiva, entendemos que elas devem ser abordadas em sala de aula; mas o professor deve ponderar sobre o que e quando demonstrar, bem como sobre o grau de formalismo que é adequado para os alunos. Na experiência em tela, a regra obtida pode ser justificada com base no Princípio da Indução (Lima, 2006), mas julgamos não ser viável discuti-la em sala de aula por uma razão circunstancial e outra metodológica: circunstancialmente, a limitação do tempo disponível para realizar a atividade não permitiria aprofundamentos desse tipo; metodologicamente, o objetivo da experiência estava na investigação do valor didático da resolução de um problema com o uso do pensamento computacional e pouco ou nenhum ganho seria obtido com uma discussão do formalismo algébrico e rigorismo lógico incidentais.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho, abordamos o uso do pensamento computacional no ensino da matemática, focando especificamente problemas discretos. Embora o uso do pensamento computacional tenha sido instrumental, é razoável pensar que a abordagem didática serve tanto para a aprendizagem matemática quanto para o desenvolvimento do próprio pensamento computacional.

A BNCC reforça a necessidade do desenvolvimento do pensamento computacional e contribuiu na escolha da TRRS para base metodológica de nossa pesquisa na medida que o documento indica que o ensino de matemática deve ter "[...] em vista que eles [os estudantes] precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens" (Brasil, 2018, p. 271).

Neste sentido, nossa pesquisa buscou responder: *Qual é o valor didático da resolução de problemas discretos com uso do pensamento computacional para a aprendizagem de funções recursivas?*

Esta pergunta indica um termo por nós defendido neste trabalho: "valor didático". Definimos que uma atividade matemática para o Ensino Básico tem valor didático caso *proporcione a realização de conversões entre diferentes registros, estimulando o desenvolvimento da coordenação entre eles.*

Nossa inspiração é Duval (2009), que explica como coordenação de vários registros de representação semiótica facilita a compreensão e a resolução de problemas matemáticos. Esta tese de Duval é conhecida como hipótese fundamental da aprendizagem matemática.

Em nossa investigação bibliográfica buscamos referenciais teóricos envolvendo atividades com computação desplugada, visando utilizar o pensamento computacional como abordagem pedagógica na resolução de problemas. Percebemos que tanto a BNCC, como o currículo do Espírito Santo enfatizam a importância de expressar respostas e sintetizar conclusões utilizando diversos registros.

A metodologia de pesquisa utilizada tem uma abordagem qualitativa do tipo exploratória. Aplicamos uma atividade matemática em uma escola de Ensino Fundamental Anos Finais, além de resolvermos outras atividades por meio do pesquisador. Em relação à nossa experiência didática com estudantes, confirmamos a necessidade de que no ensino da matemática podemos inserir o pensamento computacional e, no trabalho com os conteúdos curriculares, destacar por meio dessa abordagem como o pensamento computacional pode ser aplicado na resolução de problemas diversos. Em particular, em relação ao problema que foi aplicado no grupo experimental, destacamos seu valor didático na medida que ele favoreceu a conversão entre registros e a coordenação entre eles. Não somente isso, a atividade demonstrou favorecer um engajamento dos estudantes, propiciando um aprendizado ativo e protagonista. Prova disso foi a colaboração eficaz entre alunos que ocorreu durante a aplicação da atividade, além da utilização de representações auxiliares que demonstraram inventividade e sagacidade por parte dos estudantes.

Outra parte importante desta pesquisa foi a identificação dos registros de representação utilizados na resolução de problemas discretos envolvendo recursividade, onde classificamos as conversões entre eles quanto à congruência e, no caso das representações auxiliares, suas funções de acordo com a classificação de Moretti e Baerle (2015).

Retomamos também um aspecto interessante da resolução do problema pelos estudantes, que é o fato de nenhum deles ter cogitado considerar a possibilidade de morte de coelhos. Apesar do enunciado não mencionar a morte, essa possibilidade deveria ser levada em conta pelos alunos se eles presumissem que se trata de uma situação real. O fenômeno parece refletir o entendimento tácito por parte dos estudantes de que os problemas das aulas de matemática são artificiais e descolados da realidade, com resoluções que dependem do emprego de algum truque ou fórmula mágica, em vez de conhecimento e raciocínio comum (Nunes; Carraher; Schliemann, 2015). Ainda que seja inevitável lidar com problemas idealizados, o ensino de matemática precisa ajudar os alunos a compreenderem o papel e o valor das idealizações até mesmo quando pretendemos modelar a realidade. Para tanto, os professores podem discutir os problemas apresentados destacando seus aspectos simplificadores, bem como recorrer a metodologias de ensino que enfatizam a

aplicação da matemática em situações concretas, como a modelagem matemática (Bassanezi, 2015). Não tivemos essa preocupação na nossa experiência didática, mas uma análise em retrospecto sugere que pesquisas futuras investiguem como a presença de idealização nos problemas matemáticos influencia o engajamento dos estudantes e seu desempenho na resolução.

Duval (2009; 2012) propõe que a aprendizagem da matemática depende fundamentalmente da coordenação de diferentes registros de representação semiótica na representação dos objetos matemáticos. Embora concordemos com ele, outras habilidades sobressaíram em nossa experiência e elas nos parecem também serem relevantes para a compreensão da aprendizagem matemática: as habilidades para abstrair, lidar com idealizações e justificar conclusões, cujo grau de desenvolvimento podemos chamar de *maturidade matemática*. Ora, vimos que a resolução para o problema dos coelhos desenvolvida pelos pesquisadores e pelos alunos seguiram caminhos similares diante da orientação para aplicar os pilares do pensamento computacional; todavia, os alunos não manifestaram estranheza, crítica ou sequer percepção de que os casais de coelhos não estavam sujeitos à morte – uma clara idealização do problema se comparado à realidade; muitos também não explicitaram o fato de que os casais de coelhos constituíam as menores unidades significativas do problema, em vez de os indivíduos – demonstrando limitações em sua habilidade para abstrair os dados relevantes do problema; também não houve iniciativa para justificar logicamente função recursiva que determina a população de coelhos, verificada correta apenas para alguns meses. Essas limitações parecem não ter prejudicado a resolução do problema, mas poderiam constituir obstruções em situações mais complexas. A maturidade matemática (ou noção equivalente) não esteve no foco de nossa pesquisa, mas estamos convencidos de ser uma questão que merece ser investigada.

As discussões sobre o pensamento computacional mostram que ele tem lugar no currículo da Educação Básica e nos fazem pensar sobre sua possível relevância para a aprendizagem da matemática, especialmente no contexto da resolução de problemas. Vimos que o uso instrumental do pensamento computacional como heurística para a resolução de problemas matemáticos constitui uma orientação para abordagem de problema pelos professores, na dimensão do ensino, e pelos alunos,

na dimensão da aprendizagem. Acreditamos ser bastante promissor combinar essa abordagem com a robótica educacional (Oliveira, 2022) ou a computação desplugada (Bell; Witten; Fellows, 2011), esta última visando introduzir os alunos ao mundo computação por meio de atividades que não dependem do computador. Tal combinação proporcionaria um reforço mútuo dos diferentes esforços educacionais, além de integrar diferentes disciplinas em torno do núcleo comum dado pelo pensamento computacional. Todavia, pensando estritamente na resolução de problemas matemáticos, cabe questionar se a introdução do pensamento computacional acrescenta algo às contribuições de Polya e outros que já se debruçaram sobre a resolução de problemas (Onuchic, 1999), pois entendemos que muito do que escrevemos na análise do problema dos coelhos pode ser reescrito nos termos das quatro fases de Polya em vez de nos quatro pilares do pensamento computacional. De toda forma, as considerações sobre o pensamento computacional são pertinentes para os professores de matemática que precisam estar em contínua atualização de seus conhecimentos e métodos (D'Ambrosio, 2005).

Neste sentido, nossa pesquisa contribui para reflexões acerca do ensino de matemática e oferece subsídios para escolha de atividades a serem desenvolvidas com os estudantes do Ensino Básico. Com isso, queremos destacar outros possíveis desenvolvimentos para trabalhos futuros:

- i) a utilidade do conceito de valor didático pode ser investigada em pesquisas de campo que comparem o aprendizado proporcionado pelo emprego de atividades que tenham muitos, poucos ou nenhum problema de alto valor didático;
- ii) o conceito de valor didático pode ser utilizado para avaliar a qualidade dos exercícios e problemas propostos em livros didáticos;
- iii) o conceito de valor didático pode ser analisado em relação ao aspecto de envolver necessariamente conversões não congruentes: isso atrapalha ou ajuda?
- iv) como o valor didático de uma atividade sobressai quando desenvolvida por professores diferentes?

Concluimos que, potencialmente, atividades com valor didático fomentam a combinação de diferentes registros semióticos. Em particular, as funções recursivas ou atividades que estimulam questões de recursividade podem ser resolvidas via

pilares do pensamento computacional. De fato, isto possibilita uma provável compreensão dos objetos matemáticos estudados.

REFERÊNCIAS

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: quatro episódios da história da heurística**. [S. l.]: Editora Unesp Digital, 2017. 201 p. ISBN 978-85- 9546-176-5. DOI <https://doi.org/10.7476/9788595461765>.

Disponível em: <https://books.scielo.org/id/mvxd6/pdf/balieiro-9788595461765.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2024.

BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica. **XX Workshop sobre Educação em Computação**, Curitiba, p. 1-10, 2012. Disponível em:

<http://www2.sbc.org.br/csbc2012/anais_csbc/eventos/wei/artigos/Pensamento%20Computacional%20e%20Educacao%20Matematica%20Relacoes%20para%20o%20Ensino%20de%20Computacao%20na%20Educacao%20Basica.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática - teoria e prática**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2015. 240 p. ISBN 978-85-7244-893-2.

BELL, Tim; WITTEN, Ian H.; FELLOWS, Mike. **Ensinando Ciência da Computação sem o uso do computador**: Tradução coordenada por Luciano Porto Barreto.

Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2011. 113 p. Disponível em: <<https://classic.csunplugged.org/documents/books/portuguese/CSUnpluggedTeachers-portuguese-brazil-feb-2011.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2024.

BOCCONI, S. et al. Developing computational thinking in compulsory education: Implications for policy and practice. **European Commission, JRC Science for Policy Report**, Publications Office of the European Union, Luxembourg, v. 68, 2016. Disponível em:< <https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC104188>>. Acesso em: 27/09/2023.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução de Maria João Sara dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**: Tradução: Elza F. Gomide. 1. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974. 489 p. v. 1.

BRACKMANN, Christian Puhlmann. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de Atividades Desplugadas na Educação Básica**. Orientador: Dante Augusto Couto Barone. 2017. 226 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>>. Acesso em 12 dez. 2022.

BRAGA, Marco; GUERRA, Andreia; REIS, José Claudio. **Breve História da Ciência Moderna**: Das Máquinas do mundo ao Universo-Máquina. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2010. 136 p. v. 2. ISBN 978-85-7110-781-6.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. [Constituição (1988)]. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 11 jan. 2024.

BRÅTING, Kajsa; KILHAMN, Cecilia. Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, [s. l.], ano 2021, v. 23, n. 2, p. 170-185, 2021. DOI 10.1080/10986065.2020.1779012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/342347516_Exploring_the_intersection_of_algebraic_and_computational_thinking>. Acesso em: 20 out. 2023.

BUNDY, Alan. Computational Thinking is Pervasive. **Journal of Scientific and Practical Computing**, v. 1, p. 67–69, 2007. Disponível em: <<http://www.spclab.com/publisher/journals/Vol1No2/N1.pdf>>. Acesso em 5 nov. 2023.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Algoritmos: Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio. **Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA**, Rio de Janeiro, p. 1-3, 2020. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2020/01/PAPMEM_JAN_2020_Algoritmos.pdf>. Acesso em 9 mai. 2024.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Armadilha da Mesmice em Educação Matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, v. 18, n. 24, p. 1-15, 24 set. 2005. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10500>. Acesso em: 23 jul. 2024.

DENARDI, Vânia Bolzan. Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática**, Pelotas, p. 1-13, 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_vania_denardi.pdf. Acesso em: 17 maio 2024.

DEVLIN, Keith. **The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution**. New York: Bloomsbury Publishing PLC, 2011. 192 p.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara(org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, São Paulo. Papyrus, p. 11-33, 2ª ed, 2005.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**: Fascículo I. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p. ISBN 9788578610357.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 10 mar. 2023.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação (Sedu). **Currículo do Espírito Santo. Matemática**. Vitória: Secretaria de Estado da Educação (Sedu), 2020a. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/documentos/>. Acesso em: 15 jan. 2024.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação (Sedu). **Diretrizes Curriculares e Operacionais para o Estudo Orientado 2020**. Vitória: Secretaria de Estado da Educação (Sedu), 2020b. Disponível em: <https://blogteca.sedu.es.gov.br/novoensinomedio/wp-content/uploads/2020/02/Ementa-Estudo-Orientado.pdf>. Acesso em: 2 mai. 2024.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação (Sedu). **Pedagogia da Presença**. Vitória: Secretaria de Estado da Educação (Sedu), 2020c. Disponível em: <https://sedu.es.gov.br/Media/sedu/EscoLAR/Pedagogia%20da%20Presen%C3%A7a.pdf>. Acesso em: 2 mai. 2024.

ESPÍRITO SANTO (Vitória). Secretaria de Estado da Educação (Sedu) (org.). Pensamento computacional: apropriação do conceito à prática: Formação Ensino Maker - Turma 1. 1. ed. Vitória: Plataforma E-Cefope, 2023a. 20 p. v. 1. Disponível em: <http://http://cursos.sedu.es.gov.br/course/view.php?id=681§ion=1>. Acesso em: 7 nov. 2023.

ESPÍRITO SANTO (Vitória). Secretaria de Estado de Educação. Currículo do Espírito Santo. *In: Recomposição das aprendizagens*. [S. l.], [2023b]. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/recomposicaodasaprendizagens/>. Acesso em: 15 ago. 2023.

FASSARELLA, Lúcio Souza. Desconexão procedimental e programação no ensino-aprendizagem da matemática: considerações a partir da teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 1-24, dez. 2020. DOI <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e76610>. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/76610>. Acesso em 4 mar. 2023.

FASSARELLA, Lúcio Souza. Estimando probabilidades por simulações computacionais. **Revista Professor de Matemática Online**: Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, [s. l.], v. 9, ed. 2, p. 240-251, 2021. DOI <https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo917>. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2021/02/art17_vol9_PMO_SBM_2021.pdf. Acesso em: 11 abr. 2023.

FASSARELLA, Lúcio Souza. Aspectos semióticos da programação na aprendizagem da matemática. **Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC**, São Mateus, ano 2022, v. 1, ed. 1, p. 62-68, 2023. Disponível em: https://www.even3.com.br/ermac_es_2022/. Acesso em: 15 maio 2024.

FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FLUXOGRAMA. In: MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. [S. l.]: Melhoramentos, 2015. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/palavra/OVW2/fluxograma/>. Acesso em: 15 jan. 2024.

GARNICA, A. V. M. **História Oral e Educação Matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo - SP. Editora Atlas, 2008.

GOMES, Roger da Trindade; FASSARELLA, Lúcio Souza. Prática de construção de jogos digitais: uma experiência marcante no Novo Ensino Médio. **Kiri-Kerê - Pesquisa em Ensino**, [s. l.], ed. 12, p. 277-297, 2022. DOI <https://doi.org/10.47456/krkr.v1i12.37984>. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/kirikere/article/view/37984>. Acesso em: 30 ago. 2022.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. DOI <https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/abstract/?lang=pt&format=html>. Acesso em: 20 set. 2021.

HEURÍSTICA. In: AULETE, Dicionário Online Caldas Aulete. Disponível em: <https://aulete.com.br/heur%C3%ADstica/>. Acesso em: 13 jul. 2024.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA (Rio de Janeiro). Portal OBMEP. Clubes de Matemática da Obmep. In: **Jogo: Torre de Hanói**. [S. l.], [2018?]. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/>. Acesso em: 8 jan. 2024.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**: Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 189 p. v. 1. ISBN 85-244-0048-X.

LOURENÇO, Édrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo César. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, ed. 1, p. 84-109, 2018. DOI <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p84-109>. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/35043>. Acesso em: 20 mar. 2024.

MAZZARO, Paola; SCHIMIGUEL, Juliano. Computação Desplugada: Representação de Imagens. **Revista Ubiquidade**, [s. l.], v. 6, ed. 1, p. 56-59, 2023. Disponível em: <https://revistas.anchieta.br/index.php/RevistaUbiquidade/article/view/2066/1776>. Acesso em: 7 ago. 2024.

MORAES, Fabio Atila Cardoso. **A Programação como ferramenta didático-pedagógica para o ensino de Geometria na Educação Básica em um ambiente construcionista**. 2020. 247 p. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, Universidade Federal do Espírito Santo., São Mateus, 2020. Disponível em: https://sappg.ufes.br/tese_drupal//tese_14489_167%20-%20%E1bio%20%E1tila%20moraes%20cardoso.pdf. Acesso em: 7 ago. 2024.

MERTENS, Donna. **Research and evaluation in education and psychology: integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods**. 3. ed. Los Angeles: Sage, 2010.

MORETTI, Mérciles Thadeu; BAERLE, Lucilene Dal Medico. O uso de Representações Auxiliares na Aprendizagem Matemática: Um Olhar Semiocognitivo segundo Raymond Duval. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, ano 2022, v. 24, ed. 1, p. 582-610, 2015. DOI <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p582-610>. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/55409>>. Acesso em: 12 mar. 2023.

NUNES, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015. 208 p. ISBN 978-8524918018.

NEUMAN, Willian Lawrence. **Social research methods: qualitative and quantitative approaches**. 7. ed. Harlow: Person, 2014.

OLIVEIRA, Dayvidson Ribeiro de. **O pensamento computacional e a Robótica Educacional**. Orientador: Prof.^a Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo. 2022. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/23388/1/DRO11072022.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2023.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

PAPERT, Seymour. **Mindstorms: children, computers and powerful ideas**. New York: Basic Books, 1980.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**. Edição revisada. Porto Alegre: ArtMed, 2007.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência: Rio de Janeiro, 2006.

RESNICK, Mitchel. **Learn to Code, Code to Learn**. 2013. Disponível em: <<http://web.media.mit.edu/~mres/papers/L2CC2L-handout.pdf>>. Acesso em: 20 nov. 2022.

SALAZAR, Jesus Victoria Flores; ALMOULOUD, Saddo Ag. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, ed. 5, p. 919-941, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325>. Acesso em: 19 maio 2023.

SAMPIERI, Roberto Hernández; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Maria del Pilar Baptista. **Metodologia de pesquisa**. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANTOS, Mônica Romana de Oliveira; FASSARELLA, Lúcio Souza. Programação Aplicada ao Ensino de Matemática sob a perspectiva da Teoria Dos Registros de Representação Semiótica: Uma experiência didática com as noções de variáveis dependente e independente na Função Afim. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 12, ed. 28, p. 287-310, 2023. DOI <https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.287-310>. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7636>. Acesso em: 17 maio 2024.

SCHEINERMAN, Edward. **Matemática discreta: Uma introdução**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 616 p. v. 1. ISBN 9788522125340.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL (Porto Alegre). Olimpíada Regional de Matemática (ed.). **Resolução Recursiva de Problemas**. [S. l.], 2016. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/curso2016-6.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2023.

VALENTE, José Armando. **Informática Na Educação: Como, Para Que e Por Que**. Departamento de Multimeios e Nied - Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, p. 1–128, 2005.

VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno: Dossiê Temático - "Web Currículo: contexto, aprendizado e conhecimento". **Revista e-Curriculum**, São Paulo, ano 2016, v. 14, ed. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/view/29051/20655>>. Acesso em 20 jun. 2022.

VICARI, Rosa Maria; MOREIRA, Álvaro; MENEZES, Paulo Blauth; MENEZES, Crediné Silva de; NUNES, Daltro; LIVI, Maria Aparecida C. **Pensamento Computacional**: Revisão Bibliográfica. 2. ed. Porto Alegre: Desenvolvido no âmbito do Projeto UFRGS/MEC, 2018. 192 p. v. 1. Disponível em: < <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/197566>>. Acesso em 12 dez. 2022.

VIEIRA, Anacilia.; PASSOS, Odette.; BARRETO, Raimundo. Um Relato de Experiência do Uso da Técnica Computação Desplugada. *In: Anais do XXI WEI*, p. 670-679. 2013. Disponível em: < <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/27763>>. Acesso em 16 jan. 2024.

WING, Jeannette. PENSAMENTO COMPUTACIONAL – Um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, ano 2016, v. 9, n. 2, ed. 1, p. 1-10, 2016. DOI 10.3895/rbect.v9n2.4711. Disponível em: < <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>>. Acesso em 31 ago. 2022.

ZAPATA-ROS, Miguel. Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital: Computational Thinking: A New Digital Literacy. **Revista de Educación a Distancia.**, Murcia, Espanha, ano 2015, v. 1, ed. 46, p. 1-47, 2015. Disponível em: < <https://revistas.um.es/red/article/view/240321>>. Acesso em: 16 jan. 2023.

WORLD ECONOMIC FORUM (Suíça). **The Future of Jobs Report 2020**: October 2020. Genebra: WEF, 2020. 163 p. v. 1. Disponível em: https://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs_2020.pdf. Acesso em: 18 jan. 2024.

APÊNDICE

APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA PARA SEDU/ES.



ANEXO II

FOLHA DE ROSTO – APRESENTAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA E DE INFORMAÇÕES SOBRE TRATAMENTO DE DADOS

PROJETO DE PESQUISA
Título: O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.
Instituição de Ensino: Universidade Federal do Espírito Santo - Centro Universitário Norte do Espírito Santo.
Orientador responsável: Prof. Dr. Lucio Souza Fassarella.
Unidade(s) de Campo pretendida(s): EEEFM Pio XII
Sujeitos da pesquisa: estudantes de 6º ao 9º ano do ensino fundamental;
Dados a serem coletados: Registros escritos pelos alunos envolvendo possíveis soluções de problemas matemáticos aplicados via questionário.
Submissão a Comitê de Ética em Pesquisa: A pesquisa será apreciada por Comitê de Ética em Pesquisa, conforme Resoluções nº 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde. A apreciação será feita pelo CEPE da própria Universidade vinculada. Ela se faz necessária em caso de pesquisas que envolvam entrevista, questionário, observação e outras interações com pessoas
Resumo: O tema do trabalho envolve o estudo dos registros usados pelos alunos ao resolver questões de matemática discreta usando os pilares do pensamento computacional. O objetivo é mostrar o valor didático de atividades de ensino que favorecem a conversão entre registros na solução das mesmas. Para tanto são aplicadas atividades com potencial valor didático para que se analise nas respostas dos alunos se houve ou não conversões no processo de resolução.
Justificativa: O tema é de fundamental importância no ensino básico pois busca explicar o motivo de determinadas atividades matemáticas favorecerem o aprendizado e outras não. Para tanto, é levado em conta a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Nela, o autor justifica que uma atividade tem potencial de desenvolver uma determinada habilidade ao estudante caso esta atividade favoreça a conversão entre diversos registros. Vamos aplicar uma questão com este potencial valor didático a alunos do nono ano do ensino fundamental visando verificar a validade de nossa hipótese. Atualmente, eu sou professor regente e efetivo da rede estadual de ensino e pretendo aplicar com meus próprios alunos. Neste sentido, os primeiros que serão favorecidos com o resultado dessa pesquisa são os membros da comunidade escolar que atuou. Além disso, com a publicação da dissertação e compartilhamento com meus colegas, esta atividade a ser aplicada durante a pesquisa estará validada e justificada sua aplicação por outros professores.
Objetivos: Objetivo Geral: Descrever, compreender e explicar se a resolução computacional de problemas discretos possui valor didático para o ensino do conceito de funções recursivas. Objetivos Específicos: Definir o conceito de valor didático de atividades para o ensino da matemática, partindo da TRRS e buscando eventual suporte na literatura; Elencar, resolver e analisar problemas discretos e suas resoluções na perspectiva de avaliar seu valor didático para o ensino de funções recursivas.
Revisão da Literatura Científica: Dentre as referências selecionadas, vamos destacar algumas consideradas principais dentro do referencial teórico. Uma delas é o trabalho Pensamento Computacional: revisão bibliográfica, desenvolvido em conjunto pela UFRGS e o Mec, com participação direta de Rosa Maria Vicari, Álvaro Moreira e Paulo Blauth Menezes, publicado em 2018. Basicamente, o trabalho apresenta em seus primeiros capítulos a metodologia utilizada na pesquisa para depois entrar no assunto principal que é a definição de pensamento computacional. O trabalho apresenta em dois capítulos diferentes abordagens de atividades envolvendo PC tanto plugadas (Plugged) quanto desplugadas (Unplugged). Um outro trabalho selecionado é a Tese de doutorado de



Christian Puhmann Brackmann, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação (CINTED) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), intitulada Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através De Atividades Desplugadas Na Educação Básica, sendo publicada em 2017. Em sua tese, Brackmann apresenta logo após a introdução um capítulo sobre Pensamento Computacional, dividindo em definição, os quatro pilares, benefícios, contradições, integração na Educação Básica e abordagem desplugada e avaliação. Pensamento computacional: Una nueva alfabetización digital é um artigo de Miguel Zapata, pertencente à Universidad de Murcia na Espanha. Ele foi publicado na Revista de Educación a Distancia em 2015. A problemática discutida é a tese de que o pensamento computacional é uma habilidade a ser aprendida tal qual a leitura e escrita, ou seja, faz-se necessária uma “alfabetização” sobre o PC. Esta alfabetização, segundo Zapata, passa por ensinar este tipo de raciocínio no ensino básico desde as primeiras séries, possibilitando ao aluno crescer no campo da computação, não necessariamente profissional, mas como uma competência para o cidadão do século XXI. Exploring the intersection of algebraic and computational thinking é um artigo de Kajsa Bråting e Cecilia Kilhamn, publicado em 2020. Pelo fato de ser recente, ele nos traz perspectivas do estado do conhecimento de maneira ainda mais veemente. Este artigo destaca a implementação da programação na matemática escolar como tendência em diversos países e como esta novidade pode dialogar com o pensamento algébrico e a sua aprendizagem.

Método ou encaminhamento metodológico: Desta maneira, em síntese, a pesquisa qualitativa envolve a resolução de questões envolvendo funções recursivas usando pensamento computacional e a análise das mesmas via Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A análise das resoluções usando o referencial teórico da TRRS ajudará a descobrir como o pensamento computacional é usado em vários registros de representação semiótica e definirmos o valor didático dos problemas propostos no ensino de Matemática Discreta, mais especificamente, funções recursivas, no ensino básico. Segundo Nasser (2008, p. 273), “quando se trata de coleta de dados e sua produção, as reflexões e os conselhos metodológicos se centram, sobretudo, na questão da seleção dos dados de observação e na da classificação das anotações de campo”. Motivados neste sentido, a coleta de dados, ou seja, a aplicação do questionário e o recolhimento das resoluções será no mês de fevereiro de 2024. A pesquisa envolverá alunos do 9º ano do ensino fundamental II da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Pio XII, localizada na cidade de São Mateus-ES. Após o recolhimento das respostas dos estudantes, serão analisadas as soluções a partir do referencial teórico. A escola envolvida é de tempo Integral e a escolha da turma (9º ano) se refere aos finalistas desse segmento, pois a escola não oferece ensino médio em caráter regular. Pretendemos aplicar a uma turma de 35 alunos com faixa etária de 14 a 16 anos. Sabemos que toda pesquisa que envolve seres humanos envolve riscos em vários tipos e graus. A probabilidade é pequena, mas em algum momento, pode ocorrer que as pessoas que estão envolvidas no processo de ensino e aprendizagem se sintam constrangidas, e isso pode alterar a dinâmica das relações de ensino existentes. Os benefícios dessa pesquisa, principalmente, é a contribuição desta para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino de matemática, que, por sua vez, melhora a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa, contribuindo para a qualidade do ensino oferecido. Os dados dos participantes não serão divulgados a qualquer momento durante o curso da pesquisa, nem mesmo após sua publicação. Como resultado, usaremos nomes inventados para nomear os participantes na escrita e na análise da coleta de dados, ou seja, as normas de confiabilidade entre pesquisador e pesquisado serão aplicadas ao tratar os dados coletados com responsabilidade.

Cronograma:

Mês/Ano/ Atividade	Comitê de Ética	Aplicação do Questionário e Coleta de Dados	Análise dos dados	Finalização da Dissertação	Defesa da dissertação	Entrega da dissertação final
11/2023	x					
12/2023	x					



01/2024	x					
02/2024		x				
03/2024			x	x		
04/2024					x	
05/2024						x

Resultados esperados: Os resultados esperados são soluções fornecidas pelos alunos para posterior análise usando como metodologia a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tanto espera-se um envolvimento dos estudantes, onde estes sejam capazes de articular em suas respostas aspectos do pensamento computacional, utilizando diferentes registros para encontrar os resultados durante a confecção das soluções.

Referências:

BRACKMANN, Christian Puhlmann. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica.** 2017. 226 f.

BRÁTING, Kiasa. KILHAMN, Cecilia. **Exploring the intersection of algebraic and computational thinking.** Mathematical Thinking and Learning, DOI: 10.1080/10986065.2020.1779012. 2021.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Como Analisar a Questão Crucial da Compreensão em Matemática?** REVEMAT, v.13, n.2, p.1-27. DOI:105007/1981-1322.2018v13n2p01. 2018.

NASSER, Ana Cristina: **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos,** Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

VICARI, Rosa Maria, MOREIRA, Álvaro & MENEZES, Paulo Blauth. **Pensamento Computacional: revisão bibliográfica.** Porto Alegre. Ufrgs. 2018.

ZAPATA, Miguel. **Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital.** Revista de Educación a Distancia. 2015.

Anexos:

ATIVIDADE – PROBLEMA DISCRETO E RECURSIVO USANDO O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

O pensamento computacional é um modo de abordar problemas, geralmente envolvendo quatro pilares: Decomposição que consiste em dividir um problema complexo em partes menores e mais fáceis de resolver; Reconhecimento de padrões que consiste em analisar padrões ou soluções, examinando conjuntos de informações diferentes para encontrar possíveis semelhanças e diferenças; Abstração que está relacionada com a consideração em aspectos essenciais de uma situação, tratando de maneira irrelevante aspectos que não são importantes; Algoritmos que são usados para criar um regramento ou passo-a-passo na construção de uma série de etapas lógicas para resolver um problema.


Baseado neste pensamento, tente resolver o desafio abaixo:




Uma pessoa tem um casal de coelhos recém nascidos, e os cria dentro de um lugar que é cercado e protegido. Supondo que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês após o primeiro mês de vida, quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano?

TRATAMENTO DE DADOS
Os dados pessoais devem ser coletados observando os princípios da boa-fé, segurança, prevenção e outros trazidos pela Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD) em seu artigo 6º.
Dados pessoais a serem coletados: Não serão coletados dados pessoais.
Finalidade da coleta dos dados: Não serão coletados dados pessoais.
Medidas e controles de segurança da informação adotados no tratamento dos dados coletados: Não serão coletados dados pessoais.
Dados serão compartilhados com terceiros? Se sim, com quem e por quê? Não serão coletados dados pessoais.
Os dados serão anonimizados nos resultados obtidos ou serão expostos de forma que o titular será identificado ou ser possível sua identificação? Não serão coletados dados pessoais.
Após o termino da pesquisa, os dados serão apagados ou minimizados conforme previsto na LGPD? Não serão coletados dados pessoais.

Vitória, 22 de Novembro de 2023

Documento assinado digitalmente
 LUCIO SOUZA FASSARELLA
 Data: 22/11/2023 20:06:35-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

 nome e assinatura do(a) orientador(a) requerente

Documento assinado digitalmente
 LUCAS CALEGARI TAVARES
 Data: 23/11/2023 15:46:30-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

 nome e assinatura do(a) pesquisador(a) requerente

APÊNDICE B – TERMO DE CIÊNCIA PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA CIENTÍFICA NA SEDU/ES.



ANEXO IV

TERMO DE CIÊNCIA DE CONDIÇÕES PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA CIENTÍFICA

Eu, Lúcio Souza Fassarella, CPF n.º [REDAZIDO], orientador e professor do curso de Pós Graduação em Ensino na Educação Básica na Instituição Universidade Federal do Espírito Santo venho me comprometer com a realização de pesquisa intitulada O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA nos estabelecimentos vinculados à Secretaria de Estado da Educação (SEDU/ES), conforme cláusulas e condições a seguir estabelecidas:

CLÁUSULA 1ª – O Termo de Ciência formaliza as condições básicas para a realização de pesquisa junto à Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo, sendo obrigatória a apresentação do Projeto de Pesquisa, o qual passa a ser parte integrante deste Termo, devidamente aprovado pela Instituição de ensino superior, na qual o orientador esteja vinculado. O Projeto de Pesquisa deverá explicitar com clareza a justificativa, os objetivos, a metodologia e o cronograma.

CLÁUSULA 2ª – O presente Termo de Ciência de Pesquisa não cria vínculo empregatício entre o(a) Pesquisador(a) e a SEDU/ES.

- I. Sendo o CONCEDENTE a Secretaria de Estado da Educação quando a pesquisa for realizada na SEDU e suas unidades, a saber: gerências, assessorias, coordenações, Superintendência Regional de Educação (SRE) e unidades escolares públicas estaduais;
- II. Sendo denominado(a) PESQUISADOR (A) orientador (a) responsável pela pesquisa, que assina este termo e solicita a realização da pesquisa.

CLÁUSULA 3ª – Ficam estabelecidas as seguintes condições básicas para a realização da pesquisa:

- I. Este Termo de Ciência terá vigência de acordo com o período estabelecido no cronograma apresentado no projeto de pesquisa (CLÁUSULA 1ª), podendo ser renunciado a qualquer momento, unilateralmente, mediante comunicação escrita com justificativa;
- II. A pesquisa será realizada em horário compatível com a Unidade da SEDU, de acordo com escala previamente elaborada pelo Gestor da Unidade;
- III. O não cumprimento das obrigações do (a) PESQUISADOR (A) previstas neste Termo, configurará pendência do (a) PESQUISADOR (A) para com a SEDU/ES, podendo ser negada a autorização de futuras pesquisas do (a) PESQUISADOR (A) e dos demais autores da pesquisa nomeados no Requerimento para Autorização de Realização da Pesquisa Científica (Anexo I);

CLÁUSULA 4ª – No desenvolvimento da pesquisa caberá ao (à) Pesquisador (a):

- I. cumprir, com empenho e interesse, a programação estabelecida para sua pesquisa;
- II. ater-se à finalidade da pesquisa, indicada no projeto, na folha de rosto (Anexo II) no requerimento de autorização (Anexo I);
- III. observar e obedecer às normas internas da SEDU/ES e do Serviço Público Estadual, bem como outras eventuais recomendações emanadas pelo Gestor da Unidade;
- IV. primar pelo comportamento ético e moral dentro da Unidade;
- V. elaborar e entregar o relatório final de sua pesquisa em mídia digital à Secretaria de Estado da Educação, assim como demais publicações originadas da pesquisa;
- VI. cumprir com o prazo estabelecido em cronograma próprio.

CLÁUSULA 5ª – O(A) PESQUISADOR(A) se compromete a manter sigilo em relação às informações consideradas



confidenciais a que poderão ter acesso na Unidade Educacional. São partes do compromisso:

- I. Zelar pela privacidade do conteúdo acessado, preservando os indivíduos citados nas bases de dados disponíveis;
- II. Utilizar os dados disponíveis exclusivamente para as finalidades constantes no projeto;
- III. Não permitir, por nenhum motivo, que pessoas ou instituições não autorizadas pela SEDU tenham acesso aos dados ou indivíduos;
- IV. Vetar a divulgação - por qualquer meio de comunicação - de dados ou informações que identifiquem os sujeitos de pesquisa e outras variáveis das bases de dados que permitam a identificação dos indivíduos, e
- V. Não praticar e não permitir qualquer ação que comprometa a integridade dos indivíduos ou das bases de dados disponíveis.

CLÁUSULA 6ª – A pesquisa se dará dentro das normas éticas vigentes, de acordo com os Direitos Humanos, Resoluções n.º 466/2012 e 510/2016, do Conselho Nacional de Saúde, Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), Lei Federal n.º 13.709/2018 (Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais), Decreto Estadual n.º 4.922-R/2021 (Política de Proteção de Dados Pessoais e da Privacidade do Poder Executivo Estadual) e complementares.


- I. Se a pesquisa envolver seres humanos, deverá ser entregue uma cópia do parecer de aprovação por Comitê de Ética em Pesquisa – CEP;
- II. A coleta dos dados poderá ser iniciada somente após a emissão da Carta de Autorização pela SEDU;
- III. Os dados coletados serão de uso específico para o desenvolvimento da pesquisa em questão, conforme as normas vigentes. Caso os dados coletados sirvam para uma outra pesquisa, o pesquisador deverá encaminhar novo projeto para análise da Secretaria de Estado da Educação, bem como autorização;
- IV. Qualquer alteração, exclusão ou inclusão na pesquisa será comunicada e, se necessário, solicitada a mudança ao Órgão CONCEDENTE.

CLÁUSULA 7ª – Constituem motivos para o cancelamento automático da vigência do presente Termo de Ciência:

- I. O término da pesquisa, depois da entrega do resultado aos envolvidos;
- II. A qualquer tempo, por interesse da SEDU/ES, mediante comunicação escrita com justificativa;
- III. A pedido do (a) PESQUISADOR (A), mediante comunicação escrita com justificativa;
- IV. O descumprimento de qualquer compromisso assumido na oportunidade da assinatura do Termo.

E por estar de comum acordo com as condições deste Termo de Ciência, assino.

Vitória, 22 de novembro de 2023.

Documento assinado digitalmente
 LUCIO SOUZA FASSARELLA
 Data: 22/11/2023 20:06:35-0300
 Verifique em <https://validar.it.gov.br>

assinatura do(a) pesquisador(a) orientador(a)

APÊNDICE C – DECLARAÇÃO DE ANUÊNCIA PRÉVIA SEDU/ES.



GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

DECLARAÇÃO DE ANUÊNCIA PRÉVIA

Eu, **VITOR AMORIM DE ANGELO**, na qualidade de responsável pela **SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO ESPÍRITO SANTO – SEDU/ES**, autorizo a realização da pesquisa intitulada “**O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**”, a ser conduzida sob a responsabilidade do pesquisador **Lucas Calegari Tavares**, sendo orientado pelo professor **Prof. Dr. Lucio Souza Fassarella**. Declaro, ainda, que esta instituição apresenta infraestrutura necessária à realização da referida pesquisa.

Esta declaração é válida apenas no caso de haver parecer favorável do Comitê de Ética em Pesquisa.

Vitória, 29 de novembro de 2023.

VITOR AMORIM DE ANGELO
Secretário de Estado da Educação

ASSINATURA

Documento original assinado eletronicamente, conforme MP 2200-2/2001, art. 10, § 2º, por:

VITOR AMORIM DE ANGELO
SECRETARIO DE ESTADO
SEDU - SEDU - GOVES
assinado em 29/11/2023 16:06:53 -03:00

**INFORMAÇÕES DO DOCUMENTO**

Documento capturado em 29/11/2023 16:06:53 (HORÁRIO DE BRASÍLIA - UTC-3)
por VITOR AMORIM DE ANGELO (SECRETARIO DE ESTADO - SEDU - SEDU - GOVES)
Valor Legal: ORIGINAL | Natureza: DOCUMENTO NATO-DIGITAL

A disponibilidade do documento pode ser conferida pelo link: <https://e-docs.es.gov.br/d/2023-X7XXKV>

APÊNDICE D – FOLHA DE ROSTO PLATAFORMA BRASIL.



MINISTÉRIO DA SAÚDE - Conselho Nacional de Saúde - Comissão Nacional de Ética em Pesquisa – CONEP

FOLHA DE ROSTO PARA PESQUISA ENVOLVENDO SERES HUMANOS

<p>1. Projeto de Pesquisa: O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.</p>			
<p>2. Número de Participantes da Pesquisa: 35</p>			
<p>3. Área Temática:</p>			
<p>4. Área do Conhecimento: Grande Área 1. Ciências Exatas e da Terra , Grande Área 7. Ciências Humanas, Ensino</p>			
PESQUISADOR			
<p>5. Nome: LUCAS CALEGARI TAVARES</p>			
<p>6. CPF: [REDACTED]</p>		<p>7. Endereço (Rua, n.º): [REDACTED]</p>	
<p>8. Nacionalidade: BRASILEIRO</p>	<p>9. Telefone: [REDACTED]</p>	<p>10. Outro Telefone:</p>	<p>11. Email: [REDACTED]</p>
<p>Termo de Compromisso: Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e a publicar os resultados sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do projeto acima. Tenho ciência que essa folha será anexada ao projeto devidamente assinada por todos os responsáveis e fará parte integrante da documentação do mesmo.</p>			
<p>Data: ____ / ____ / ____</p>		<p>Assinatura _____</p>	
<p style="font-size: small; margin: 0;">Documento assinado digitalmente LUCAS CALEGARI TAVARES Data: 13/03/2024 16:29:14-0300 Verifique em https://validar.it.gov.br</p>			
INSTITUIÇÃO PROPONENTE			
<p>12. Nome: CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO</p>		<p>13. CNPJ: [REDACTED]</p>	<p>14. Unidade/Órgão: CENTRO UNIVERSITARIO NORTE DO ESPIRITO SANTO - CEUNES</p>
<p>15. Telefone: (27) 3312-1516</p>	<p>16. Outro Telefone:</p>		
<p>Termo de Compromisso (do responsável pela instituição): Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas Complementares e como esta instituição tem condições para o desenvolvimento deste projeto, autorizo sua execução.</p>			
<p>Responsável: <u>Luiz Antonio Favero Filho</u></p>		<p>CPF: [REDACTED]</p>	
<p>Cargo/Função: <u>Diretor do Ceunes</u></p>			
<p>Data: ____ / ____ / ____</p>		<p>Assinatura _____</p>	
PATROCINADOR PRINCIPAL			
<p>Não se aplica.</p>			



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
LUIZ ANTONIO FAVERO FILHO - SIAPE 1561793
Diretor do Centro Universitário Norte do Espírito Santo
Centro Universitário Norte do Espírito Santo - CEUNES
Em 15/03/2024 às 08:51

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/894396?tipoArquivo=O>

APÊNDICE E – DECLARAÇÃO DE COMPROMISSO DO PESQUISADOR.




DECLARAÇÃO DE COMPROMISSO DO PESQUISADOR

Eu, Lucas Calegari Tavares, RG [REDACTED], CPF: [REDACTED], matrícula de nº [REDACTED] do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, modalidade Mestrado Acadêmico da Universidade Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – CEUNES responsável pela pesquisa intitulada **“O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA”**, que tem por objetivo geral descrever, compreender e explicar se a resolução computacional de problemas discretos possui valor didático para o ensino do conceito de funções recursivas.

Comprometo-me a:

1. Iniciar a coleta de dados somente após o projeto de pesquisa ser aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos.
2. Obedecer às disposições éticas de proteger os participantes da pesquisa, garantindo-lhes o máximo de benefícios e o mínimo de riscos.
3. Assegurar a privacidade das pessoas citadas nos documentos institucionais ou contratadas diretamente, de modo a proteger suas imagens, bem como garantir que não utilizará as informações coletadas em prejuízo dessas pessoas ou da instituição, respeitando deste modo as Diretrizes Éticas da Pesquisa envolvendo Seres Humanos, nos termos estabelecidos na Resolução CNS nº 466/2012, e obedecendo as disposições legais estabelecidas na Constituição Federal Brasileira, art. 5º, inciso X e XIV e no Código Civil, art. 20.
4. Apresentar o relatório final com os resultados da pesquisa.

São Mateus - ES, 04 de dezembro de 2023.

Documento assinado digitalmente
 LUCAS CALEGARI TAVARES
 Data: 04/12/2023 11:27:20-0300
 Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Pesquisador Responsável

Centro Universitário Norte do Espírito Santo
 Rodovia BR 101 Norte, km 60, Bairro Litorâneo, CEP 29932-540 Tel.: (27) 3312-1569 São Mateus – ES
 Sítio eletrônico: <http://www.ceunes.ufes.br>

APÊNDICE F – REGISTRO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS.



REGISTRO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS

O (a) menor _____ pelo (a) qual o (a) senhor (a) é responsável está sendo convidado a participar da pesquisa intitulada “**O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**”, sob a responsabilidade de Lucas Calegari Tavares, aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica - PPGEEB (Mestrado) da Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – Campus São Mateus.

Justificativa

Em nossa pesquisa, destacamos os conceitos principais do pensamento computacional, mostrando suas potencialidades e possíveis restrições em seu uso. Para aplicar todo esse conhecimento, vamos utilizar o conceito de funções recursivas discretas, aplicando um problema deste assunto em uma turma de Ensino Fundamental Anos Finais. As funções recursivas discretas possibilitam a criação de algoritmos que são um dos pilares do pensamento computacional. Para validar ou não nossas hipóteses, faremos uso da Teoria dos Registros de Representação, cunhando um termo chamado valor didático. Este termo refere-se à potencialidade de uma atividade partindo do pressuposto que esta consegue gerar oportunidades da troca de registros semióticos favorecendo assim uma assimilação e aprendizado por parte do estudante.

Objetivo da Pesquisa

A pesquisa tem por objetivo descrever, compreender e explicar se a resolução computacional de problemas discretos possui valor didático para o ensino do conceito de funções recursivas.

Procedimento para obtenção dos dados

Esta pesquisa será feita na EEEFM Pio XII situada no município de São Mateus, Espírito Santo. Aos alunos que aceitarem a participar da pesquisa será dada a oportunidade de resolver uma atividade diagnóstica com uma questão matemática. Os dados que serão analisados pelo professor pesquisador serão a resolução desta questão de matemática realizada pelos alunos por escrito. As resoluções dos alunos serão feitas em papel e recolhidas pelo professor pesquisador ao fim de uma aula de 100 minutos voltada especificamente a esta pesquisa. As resoluções serão analisadas a partir da chamada Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Riscos e Desconforto

Sabemos que toda pesquisa que envolve seres humanos envolve riscos em vários tipos e graus. A probabilidade é pequena, mas em algum momento, pode ocorrer que as pessoas que estão envolvidas no processo de ensino e aprendizagem se sintam constrangidas, e isso pode alterar a dinâmica das relações de ensino existentes. Em decorrência da participação dos participantes na condição de alunos do professor pesquisador, na resolução de problemas de matemática, acredita-se que o fato de estarem sendo colocados em "xeque" quanto ao seu conhecimento matemático, poderá causar constrangimentos em relação aos demais pares, por exemplo, se tiver estudantes com dificuldades em matemática.

Garantia de ressarcimento financeiro e indenização

A participação na pesquisa não envolve valor econômico a receber ou a pagar. No entanto destacamos que existe a garantia de ressarcimento ao participante da pesquisa e a indenização mediante eventuais danos decorrentes da pesquisa, desde que comprovados por meio de decisão judicial ou extrajudicial, de acordo com o item IV.4.c da Resolução CNS 466/12.

Benefícios

Os benefícios dessa pesquisa estão relacionados à sua contribuição para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino em matemática e, como decorrência disso, melhorar a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa, colaborando para a qualidade do ensino a ser oferecido.

Garantia do Sigilo e Privacidade

Os dados dos participantes serão mantidos em sigilo durante todo o desenvolvimento da pesquisa, inclusive após a publicação. Portanto usaremos nomes fictícios ao nos referirmos aos participantes na escrita e na análise da coleta de dados. Os dados coletados serão tratados com responsabilidade respeitando toda a informação, que será registrada na íntegra, seguindo as normas de confiabilidade entre pesquisador e pesquisado. Todos os dados coletados nesta pesquisa ficarão armazenados em arquivo, físico e digital, sob guarda e responsabilidade do/a pesquisador(a), por um período mínimo de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa conforme a Resolução CNS no 510 de 2016, Art. 28, Inciso IV.

Garantia de recusa em Participar da Pesquisa e/ou Retirada de Consentimento

O menor pelo qual o (a) Sr. (a) é responsável não é obrigado (a) a participar da pesquisa, podendo deixar de participar dela a qualquer momento de sua execução, sem que haja penalidades ou prejuízos decorrentes de sua recusa. Caso decida retirar seu consentimento, o (a) Sr. (a) não mais será contatado (a) pelo pesquisador.

Garantia aos participantes do acesso aos resultados da pesquisa

Considerando os princípios éticos das pesquisas em Ciências Humanas e Sociais (Resolução CNS no 510 de 2016, Art. 3º, Inciso IV), concordamos na “garantia aos participantes do acesso aos resultados da pesquisa” e o compromisso do/a pesquisador(a) de divulgar os resultados da pesquisa em formato plenamente acessível e compreensível ao grupo ou população que foi pesquisada (Resolução CNS no 510 de 2016, Art. 17, Inciso VI).

Esclarecimento de dúvidas

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o (a) Sr. (a) pode contatar a pesquisador Lucas Calegari Tavares, no telefone [REDACTED]. O (a) Sr (a) também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa – Campus do CEUNES pelo telefone (27) 3312-1519, e-mail: cepceunes@gmail.com/ comitedeetica.ceunes@institucional.ufes.br, endereço Rodovia BR 101 Norte, Km 60, Bairro Litorâneo, São Mateus, ES, CEP: 29.932-540. Nesse sentido, gostaria de contar com a sua colaboração, através de seu Consentimento Livre e Esclarecido.



DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO DOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS

Declaro que fui verbalmente informado (a) e esclarecido (a) sobre o presente documento, entendendo todos os termos acima expostos, e que voluntariamente aceito a participação do (a) menor pelo (a) qual sou responsável e compreendo que posso retirar meu consentimento e interrompê-lo a qualquer momento, sem penalidade. Também declaro ter recebido uma via deste Registro de Consentimento Livre e Esclarecido, de igual teor, assinada pela pesquisadora principal e rubricada em todas as páginas.

São Mateus - ES, _____ de _____ de 2024.

Assinatura do pai/ou mãe/ou responsável legal

Na qualidade de pesquisador responsável pela pesquisa **“O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA”**, eu, Lucas Calegari Tavares, declaro ter cumprido as exigências do termo IV.3, da Resolução CNS 466/12, a qual estabelece diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos.

São Mateus - ES, _____ de _____ de 2024.

Pesquisador Responsável

APÊNDICE G – REGISTRO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.



REGISTRO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, _____, estou sendo convidado (a) a participar da pesquisa intitulada **“O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA”**, sob a responsabilidade de Lucas Calegari Tavares, aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica - PPGEEB (Mestrado) da Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – Campus São Mateus.

Justificativa

Em nossa pesquisa, queremos mostrar os conceitos principais do pensamento computacional, mostrando suas potencialidades e possíveis restrições em seu uso. Para aplicar todo esse conhecimento, vamos utilizar um problema envolvendo o assunto de recursividade. Para validar ou não nossas hipóteses, faremos uso da Teoria dos Registros de Representação, cunhando um termo chamado valor didático. Este termo refere-se ao potencial de uma atividade, ou seja, se a atividade favorece uma assimilação e aprendizado por parte do estudante. Desta maneira, você estudante está sendo convidado a nos ajudar a entender melhor sobre uma questão matemática específica que vamos aplicar a vocês que aceitem participar da pesquisa.

Objetivo da Pesquisa

A pesquisa tem por objetivo descrever, compreender e explicar se a resolução computacional de problemas discretos possui valor didático para o ensino do conceito de funções recursivas.

Procedimento para obtenção dos dados

Esta pesquisa será feita na EEEFM Pio XII situada no município de São Mateus, Espírito Santo. Aos alunos que aceitem a participar da pesquisa será dada a oportunidade de resolver uma atividade diagnóstica com uma questão matemática. Os dados que serão analisados pelo professor pesquisador serão a resolução desta questão de matemática realizada pelos alunos por escrito. As resoluções dos alunos serão feitas em papel e recolhidas pelo professor pesquisador ao fim de uma aula de 100 minutos voltada especificamente a esta pesquisa. As resoluções serão analisadas a partir da chamada Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Riscos e Desconforto

Sabemos que toda pesquisa que envolve seres humanos envolve riscos em vários tipos e graus. A probabilidade é pequena, mas em algum momento, pode ocorrer que as pessoas que estão envolvidas no processo escolar se sintam constrangidas. Ao participar na resolução de problemas de matemática, acredita-se que o fato de vocês estarem sendo colocados em "xeque" quanto ao seu conhecimento, poderá causar constrangimentos em relação aos outros estudantes participantes da pesquisa, por exemplo, quando houver estudantes com grandes dificuldades em matemática.

Garantia de ressarcimento financeiro e indenização

A participação na pesquisa não envolve valor econômico a receber ou a pagar. No entanto destacamos que existe a garantia de ressarcimento ao participante da pesquisa e a indenização mediante eventuais danos decorrentes da pesquisa, desde que comprovados por meio de decisão judicial ou extrajudicial, de acordo com o item IV.4.c da Resolução CNS 466/12.

Centro Universitário Norte do Espírito Santo
Rodovia BR 101 Norte, km 60, Bairro Litorâneo, CEP 29 932-540 Tel.: (27) 3312-1569 São Mateus – ES
Site eletrônico: <http://www.ceunes.ufes.br>

Benefícios

Os benefícios dessa pesquisa estão relacionados à sua contribuição para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino em matemática e, como decorrência disso, melhorar a sua própria aprendizagem colaborando para a qualidade do ensino a ser oferecido pelo seu professor.

Garantia do Sigilo e Privacidade

Os seus dados serão mantidos em sigilo durante todo o desenvolvimento da pesquisa, inclusive após a publicação. Portanto usaremos nomes fictícios ao nos referirmos a algum aluno na escrita e na análise da coleta de dados. Os dados coletados serão tratados com responsabilidade respeitando toda a informação, que será registrada na íntegra, seguindo as normas de confiabilidade entre pesquisador e pesquisado. Todos os dados coletados nesta pesquisa ficarão armazenados em arquivo, físico e digital, sob guarda e responsabilidade do/a pesquisador(a), por um período mínimo de 5 (cinco) anos após o término da pesquisa conforme a Resolução CNS no 510 de 2016, Art. 28, Inciso IV.

Garantia de recusa em Participar da Pesquisa e/ou Retirada de Consentimento

Você não é obrigado (a) a participar da pesquisa, podendo deixar de participar dela a qualquer momento de sua execução. Caso decida retirar seu assentimento, você não sofrerá qualquer prejuízo ou penalidades decorrentes de sua recusa.

Garantia aos participantes do acesso aos resultados da pesquisa

Considerando os princípios éticos das pesquisas em Ciências Humanas e Sociais, damos a garantia aos alunos participantes do acesso aos resultados desta pesquisa. O professor pesquisador se compromete em divulgar os resultados da pesquisa em formato plenamente acessível e compreensível aos alunos que aceitarem a participar da pesquisa

Esclarecimento de dúvidas

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o estudante pode contatar o pesquisador Lucas Calegari Tavares, no telefone [REDACTED]. O estudante também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa – Campus do CEUNES pelo telefone (27) 3312-1519, e-mail: cepceunes@gmail.com/ comitedeetica.ceunes@institucional.ufes.br, endereço Rodovia BR 101 Norte, Km 60, Bairro Litorâneo, São Mateus, ES, CEP: 29.932-540. Nesse sentido, gostaria de contar com a sua colaboração, através de seu Consentimento Livre e Esclarecido.

OBS: Esse Registro de Assentimento Livre e Esclarecido será lido para o (a) participante menor de 18 anos na presença de uma testemunha.

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA

Eu fui informado (a) pelo pesquisador responsável do presente estudo sobre os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste REGISTRO DE ASSENTIMENTO e tive a oportunidade de fazer perguntas, assim como, todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu recebi uma via deste Registro de Assentimento, de igual teor, assinada pelo pesquisador principal e rubricada em todas as páginas.

São Mateus - ES, ____ de _____ de 2024.

Assinatura do (a) participante menor de 18 anos

Na qualidade de pesquisador responsável pela pesquisa **“O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA”**, eu, Lucas Calegari Tavares, declaro ter cumprido as exigências do termo IV.3, da Resolução CNS 466/12, a qual estabelece diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos.

São Mateus - ES, _____ de _____ de 2024.

Pesquisador Responsável

APÊNDICE H – ATIVIDADE UTILIZADA COM OS ESTUDANTES PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA CIENTÍFICA.

ATIVIDADE – PROBLEMA DISCRETO E RECURSIVO USANDO O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

O pensamento computacional é um modo de abordar problemas, geralmente envolvendo quatro pilares:

- *Decomposição* que consiste em dividir um problema complexo em partes menores e mais fáceis de resolver;
- *Reconhecimento de padrões* que consiste em analisar padrões ou soluções, examinando conjuntos de informações diferentes para encontrar possíveis semelhanças e diferenças;
- *Abstração* que está relacionada com a consideração em aspectos essenciais de uma situação, tratando de maneira irrelevante aspectos que não são importantes;
- *Algoritmos* que são usados para criar um regramento ou passo-a-passo na construção de uma série de etapas lógicas para resolver um problema.

Baseado neste pensamento, tente resolver o desafio abaixo:

Uma pessoa tem um casal de coelhos recém nascidos, e os cria dentro de um lugar que é cercado e protegido. Supondo que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês após o primeiro mês de vida, quantos casais de coelhos teremos dentro de um ano?

APÊNDICE I – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP LOCALIZADO NO CEUNES.

CENTRO UNIVERSITÁRIO
NORTE DO ESPÍRITO SANTO -
UFES



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

Pesquisador: LUCAS CALEGARI TAVARES

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 76567223.4.0000.5063

Instituição Proponente: CENTRO UNIVERSITARIO NORTE DO ESPIRITO SANTO - CEUNES

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.767.041

Apresentação do Projeto:

O tema do trabalho envolve o estudo dos registros usados pelos alunos ao resolver questões de matemática discreta usando os pilares do pensamento computacional. O objetivo é mostrar o valor didático de atividades de ensino que favorecem a conversão entre registros na solução das mesmas. Para tanto são aplicadas atividades com potencial valor didático para que se analise nas respostas dos alunos se houve ou não conversões no processo de resolução

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Descrever, compreender e explicar se a resolução computacional de problemas discretos possui valor didático para o ensino do conceito de funções recursivas.

Objetivo Secundário:

Definir o conceito de valor didático de atividades para o ensino da matemática, partindo da TRRS e buscando eventual suporte na literatura;

Elencar, resolver e analisar problemas discretos e suas resoluções na perspectiva de avaliar seu valor didático para o ensino de funções recursivas.

Endereço: Rodovia BR101 Norte, Km 60
Bairro: Litorâneo **CEP:** 29.932-540
UF: ES **Município:** SAO MATEUS
Telefone: (27)3312-1519 **Fax:** (27)3312-1510 **E-mail:** cepceunes@gmail.com

**CENTRO UNIVERSITÁRIO
NORTE DO ESPÍRITO SANTO -
UFES**



Continuação do Parecer: 6.767.041

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Foi informado pelo pesquisador:

Riscos:

Sabemos que toda pesquisa que envolve seres humanos envolve riscos em vários tipos e graus. A probabilidade é pequena, mas em algum momento, pode ocorrer que as pessoas que estão envolvidas no processo de ensino e aprendizagem se sintam constrangidas, e isso pode alterar a dinâmica das relações de ensino existentes. Em decorrência da participação dos participantes na condição de alunos do professor pesquisador, na resolução de problemas de matemática, acredita-se que o fato de estarem sendo colocados em "xeque" quanto ao seu conhecimento matemático, poderá causar constrangimentos em relação aos demais pares, por exemplo, se tiver estudantes com dificuldades em matemática.

Benefícios:

Os benefícios dessa pesquisa, principalmente, é a contribuição dessa para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino de matemática, que, por sua vez, melhora a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa, contribuindo para a qualidade do ensino oferecido.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

O pesquisador acrescenta que os resultados esperados são soluções fornecidas pelos alunos para posterior análise usando como metodologia a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para tanto espera-se um envolvimento dos estudantes, onde estes sejam capazes de articular em suas respostas aspectos do pensamento computacional, utilizando diferentes registros para encontrar os resultados durante a confecção das soluções.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Vide campo "Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações".

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Todas as solicitações foram atendidas, sendo o parecer de aprovado.

Considerações Finais a critério do CEP:

Sr(a). Pesquisador(a),

a) Segundo a Resolução 466/2012 (CONEP/CNS), a eticidade da pesquisa implica em assegurar aos participantes da pesquisa os benefícios resultantes do projeto, seja em termos de retorno

Endereço: Rodovia BR101 Norte, Km 60	CEP: 29.932-540
Bairro: Litorâneo	
UF: ES	Município: SAO MATEUS
Telefone: (27)3312-1519	Fax: (27)3312-1510
	E-mail: cepceunes@gmail.com

**CENTRO UNIVERSITÁRIO
NORTE DO ESPÍRITO SANTO -
UFES**



Continuação do Parecer: 6.767.041

social, acesso aos procedimentos, produtos ou agentes da pesquisa (Título III, 1.n). Tal imperativo deve constar nos Projetos e devem ser previstas formas de tais benefícios;

b) De acordo com a Resolução 466/2012 (CONEP/CNS), o pesquisador deve apresentar Relatórios Semestrais de sua pesquisa (Título X, X.1, item 3, letra b). Para pesquisa com duração menor que um ano, Relatório Final (Regimento Interno do CEP/CEUNES, Art. 34°). Os Relatórios Parcial e Final devem ser enviados através da Plataforma Brasil (item "enviar notificação", anexar o respectivo documento);

c) Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e suas justificativas (Norma Operacional CNS nº 001/2013, 2.1.H.1).

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2259328.pdf	11/04/2024 15:12:47		Aceito
Folha de Rosto	folhaDeRosto_Lucas_PPGEEB.pdf	11/04/2024 15:12:08	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	REGISTRO_DE_ASSENTIMENTO_LIVRE_E_ESCLARECIDO_DESTINADO_A_O_PARTICIPANTE_MENOR_DE_18_A_NOS.docx	11/04/2024 15:10:02	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
Recurso Anexado pelo Pesquisador	CARTA_RESPOSTA_v2.docx	11/04/2024 15:09:18	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
Outros	ATIVIDADE_DIAGNOSTICA.docx	11/04/2024 15:07:51	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	REGISTRO_DE_CONSENTIMENTO_LIVRE_E_ESCLARECIDO_DESTINADO_AOS_PAIS_OU_RESPONSÁVEIS_LEGALIS.docx	11/04/2024 15:07:23	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	RELATORIO.docx	11/04/2024 15:07:12	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Declaracao_de_Anuencia_Previa_Lucas_Calegari_Tavares.pdf	11/12/2023 10:23:56	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito
Declaração de concordância	Declaracao_do_Pesquisador_assinado.pdf	04/12/2023 13:55:43	LUCAS CALEGARI TAVARES	Aceito

Endereço: Rodovia BR101 Norte, Km 60
Bairro: Litorâneo **CEP:** 29.932-540
UF: ES **Município:** SAO MATEUS
Telefone: (27)3312-1519 **Fax:** (27)3312-1510 **E-mail:** cepceunes@gmail.com

CENTRO UNIVERSITÁRIO
NORTE DO ESPÍRITO SANTO -
UFES



Continuação do Parecer: 6.767.041

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

SAO MATEUS, 16 de Abril de 2024

Assinado por:

Juliano Manvailer Martins
(Coordenador(a))

Endereço: Rodovia BR101 Norte, Km 60

Bairro: Litorâneo

CEP: 29.932-540

UF: ES

Município: SAO MATEUS

Telefone: (27)3312-1519

Fax: (27)3312-1510

E-mail: cepceunes@gmail.com

APÊNDICE J – CARTA DE AUTORIZAÇÃO DE PESQUISA CIENTÍFICA PELA SEDU/ES.



CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Declaramos para os devidos fins que a realização da pesquisa intitulada “O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DISCRETOS: SEU VALOR DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA, realizada por Lucas Calegari Tavares sob o CPF [REDACTED], nas dependências da(s) unidade(s) abaixo listada(s), está autorizada mediante entrega de Parecer do Comitê de Ética da CENTRO UNIVERSITARIO NORTE DO ESPIRITO SANTO – CEUNES com CAAE (Certificado de Apresentação de Apreciação Ética) nº 76567223.4.0000.5063

Unidades em que a pesquisa será desenvolvida: EEEFM Pio XII

Vitória, 19 de abril de 2024.

VITOR AMORIM DE ANGELO
Secretário de Estado da Educação

Documento original assinado eletronicamente, conforme MP 2200-2/2001, art. 10, § 2º, por:

VITOR AMORIM DE ANGELO

SECRETARIO DE ESTADO

SEDU - SEDU - GOVES

assinado em 19/04/2024 11:10:17 -03:00



INFORMAÇÕES DO DOCUMENTO

Documento capturado em 19/04/2024 11:10:17 (HORÁRIO DE BRASÍLIA - UTC-3)
por VITOR AMORIM DE ANGELO (SECRETARIO DE ESTADO - SEDU - SEDU - GOVES)
Valor Legal: ORIGINAL | Natureza: DOCUMENTO NATO-DIGITAL

A disponibilidade do documento pode ser conferida pelo link: <https://e-docs.es.gov.br/d/2024-ZZFW75>