

Demetrio Cardoso Daltio

Números Complexos e Aplicações

Vitória

2025

Demetrio Cardoso Daltio

Números Complexos e Aplicações

Dissertação de mestrado apresentada ao
PROFMAT como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de
Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória

2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

C268n CARDOSO DALTIO, DEMETRIO, 1983-
 Números Complexos e Aplicações / DEMETRIO
CARDOSO DALTIO. - 2025.
 73 p.

Orientador: MOACIR ROSADO FILHO.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Números Complexos. 2. Trigonometria. 3. Fasores. 4. Equações cúbicas e quárticas. I. ROSADO FILHO, MOACIR. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Números Complexos e Aplicações”

Demétrio Cardoso Daltio

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 24/10/2025 por:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Orientador – UFES

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Examinador interno – UFES

Prof. Dr. Fidelis Zanetti de Castro
Examinador externo – UFES





folha_de_assinaturas_Demetrio_Cardoso_Daltio

Data e Hora de Criação: 15/10/2025 às 10:56:52

Documentos que originaram esse envelope:

- folha_de_assinaturas_Demetrio_Cardoso_Daltio.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 245e73db0bb3090165064c1db2d3c12dde93ffc48b4064bcc5a14d9df409a148

[SHA512]: 4181415eb461fa787b13d51c547ebcfe1d932a8f7164aad0cb7c53a18bd7b9d4c4cbca7356c8440ee628f8cc634be97ebad8c956b4eec460a7fdd60b6f994a7e

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Fidelis Zanetti de Castro (fidelis.castro@gmail.com)

Data/Hora: 24/10/2025 - 15:54:36, IP: 179.102.141.80, Geolocalização: [-20.275616, -40.303941]

[SHA256]: 070b5ceabb9eb5b0a2079e09315c92034680617597d0471e2b33d647e548ebac

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)

Data/Hora: 25/10/2025 - 06:55:31, IP: 187.36.172.141

[SHA256]: 0fce949b37830a86091ac0b9637cdeae75715ceb8b81e96b77ffc9a6e7182f92

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacir.rosado@ufes.br)

Data/Hora: 24/10/2025 - 18:16:40, IP: 179.95.223.202, Geolocalização: [-20.295099, -40.296509]

[SHA256]: 2fba69ece5a62aa2ceea901a1e6c4523a38cb48ecceffe9fff2077e7e5c0b7fb

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

25/10/2025 06:55:31 - Envelope finalizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141

25/10/2025 06:55:31 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141

25/10/2025 06:55:25 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141

24/10/2025 18:16:40 - Assinatura realizada por moacir.rosado@ufes.br, IP 179.95.223.202

24/10/2025 15:54:36 - Assinatura realizada por fidelis.castro@gmail.com, IP 179.102.141.80

24/10/2025 15:54:30 - Envelope visualizado por fidelis.castro@gmail.com, IP 179.102.141.80

24/10/2025 07:00:22 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

24/10/2025 07:00:21 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

15/10/2025 10:56:52 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104

A Deus, sempre!

Agradecimentos

À minha família, sobretudo minha esposa WILLIANA, que sempre esteve ao meu lado apoiando, aos meus queridos filhos DANIEL e ISABELA. Aos meus pais, por apoiar desde o início as minhas escolhas. Ao meu orientador professor Dr. Moacir, que prontamente aceitou a missão de me orientar, sempre com sua imensa paciência. Aos meus colegas de turma, pois juntos enfrentamos horas de estrada, sempre com muita energia, animação e companheirismo. Aos meus professores do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFES, por compartilhar seus conhecimentos com muita qualidade e entusiasmo, estando sempre dispostos a ajudarem. A todos que, de alguma forma, ajudaram com boas contribuições. E a duas pessoas que com o tempo se tornaram muito especiais. Obrigado Tia Sula e Tia Carmen. Vocês são como bênçãos de Deus.

“A força motriz de uma invenção matemática não é o raciocínio, mas a imaginação”.
Augustus De Morgan.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sistemático sobre os números complexos, abordando desde sua construção algébrica até algumas de suas aplicações práticas. Inicialmente são exploradas as definições formais, propriedades e representações geométrica e trigonométrica, destacando a relevância dos complexos na ampliação do corpo dos números reais. Em seguida, são discutidas aplicações no campo das Engenharias, em especial na análise de circuitos elétricos de corrente alternada por meio da teoria dos fasores, evidenciando a importância dos complexos na modelagem de fenômenos oscilatórios. No âmbito da trigonometria, o trabalho mostra como a representação polar dos números complexos permite demonstrar identidades fundamentais, como as fórmulas de adição, além de fazer uma abordagem elegante para o cálculo de potências e raízes. Por fim, o estudo aborda e demonstra as fórmulas de Cardano para equações cúbicas e quárticas. Conclui-se que os números complexos, além de ampliarem a estrutura numérica da Matemática, possuem um caráter interdisciplinar que conecta teoria, aplicações práticas e história da Matemática, consolidando-se como uma ferramenta indispensável no desenvolvimento científico e tecnológico.

Palavras-chave: Números Complexos, Trigonometria, Fasores, Equações cúbicas e quárticas.

Abstract

This work presents a systematic study of complex numbers, ranging from their algebraic construction to some of their practical applications. It begins with formal definitions, properties, and geometric and trigonometric representations, emphasizing the role of complex numbers in extending the real number system. Subsequently, applications in engineering are discussed, particularly in the analysis of alternating current electrical circuits through phasor theory, which illustrates the importance of complex numbers in modeling oscillatory phenomena. In the context of trigonometry, the study demonstrates how the polar representation of complex numbers enables the proof of fundamental identities, such as addition formulas, while also providing an elegant method for calculating powers and roots. Finally, Cardano's formulas for cubic and quartic equations are presented and examined. The work concludes that complex numbers, beyond extending the numerical structure of mathematics, possess an interdisciplinary character that bridges theory, practical applications, and the history of mathematics, thereby consolidating their role as an indispensable tool in scientific and technological development.

Keywords: Complex Numbers, Trigonometry, Phasors, Cubic and Quartic Equations.

Lista de ilustrações

Figura 2.2.1– Representação de um ponto qualquer no plano complexo.	22
Figura 2.2.2– Representação dos números z_1, z_2, \dots, z_5 no plano complexo.	22
Figura 2.2.3– Representação de números complexos como vetores.	23
Figura 2.2.4– Representação da soma vetorial de números complexos.	24
Figura 2.2.5– Representação gráfica de números complexos conjugados.	25
Figura 2.2.6– Representação gráfica do módulo de z .	28
Figura 2.2.7– Representação gráfica do argumento de z , dado por θ .	30
Figura 2.2.8– Representação gráfica do exemplo 2.2.7(a).	31
Figura 2.2.9– Representação gráfica do exemplo 2.2.7(b).	32
Figura 2.2.10– Representação gráfica do exemplo 2.2.8(a).	33
Figura 2.2.11– Representação gráfica do exemplo 2.2.8(b).	33
Figura 2.2.12– Representação gráfica do exemplo 2.2.8(c).	34
Figura 2.2.13– Representação gráfica do exemplo 2.2.9.	35
Figura 2.2.14– Vértice A_1 de um pentágono regular, com centro em O .	40
Figura 3.0.1– Representação da lei das correntes.	43
Figura 3.1.1– Representação gráfica de uma soma de fasores.	46
Figura 3.1.2– Circuito RL .	47
Figura 3.1.3– Representação da aplicação \mathcal{F} .	49
Figura 4.1.1– Triângulos congruentes em uma circunferência unitária.	52
Figura 4.1.2– Representação para demonstrar o seno e o cosseno da soma de dois ângulos.	54
Figura 4.1.3– Representação gráfica das raízes cúbicas do número complexo $z_1 =$ $\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$.	56
Figura 4.1.4– Representação das raízes quintuplas da unidade.	57
Figura 4.1.5– Representação gráfica da lei dos cossenos	58
Figura 4.1.6– Representação gráfica da lei dos senos.	59
Figura 4.1.7– Números complexos na forma polar em função de R, α, β e γ .	60
Figura 4.1.8– Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito.	61
Figura 4.1.9– Representação gráfica da lei dos senos por meio de vetores.	62
Figura 4.1.10– Representação gráfica da lei dos senos por meio de vetores.	63

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E SUA ARITMÉTICA	15
2.1	Pares Ordenados	15
2.2	Conjunto dos números Complexos	15
2.2.1	Propriedades	16
2.2.2	Definição da operação de subtração	17
2.2.3	Definição da operação de divisão	17
2.2.4	Forma algébrica	18
2.2.5	Unidade Imaginária	19
2.2.6	Representação geométrica	21
2.2.7	Conjugado de um número complexo	24
2.2.8	Interpretação geométrica do conjugado	25
2.2.9	Propriedades do conjugado	25
2.2.10	Divisão de dois números complexos com o auxílio do conjugado	27
2.2.11	Módulo de um número complexo	27
2.2.12	Propriedades do módulo	29
2.2.13	Argumento	30
2.2.14	Forma polar (ou trigonométrica)	32
2.2.15	Multiplicação de números complexos na forma polar	34
2.2.16	Divisão de números complexos na forma polar	35
2.2.17	Potenciação de números complexos na forma polar	36
2.2.18	Radiciação de números complexos na forma polar	37
2.2.19	A segunda fórmula de De Moivre	38
2.2.20	Problema de Geometria que envolve Rotação	39
3	APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS	42
3.1	Procedimento algébrico para a soma de senóides	43
4	APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA TRIGONOMETRIA	52
4.1	Representação polar dos números complexos	52
5	FÓRMULAS PARA EQUAÇÕES CÚBICAS E QUÁRTICAS	64
5.1	Equações cúbicas e a Fórmula de Cardano	64

5.2	Redução da equação cúbica	64
5.2.1	Equações quárticas	68
6	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	73

1 Introdução

A história da Matemática é marcada por sucessivas ampliações do conceito de número. Dos naturais aos reais, cada extensão surgiu como resposta a problemas até então sem solução, revelando a necessidade de novos instrumentos conceituais. Nesse contexto, os números complexos representam uma das conquistas mais significativas, pois não apenas solucionaram impasses algébricos relacionados às equações polinomiais, mas também abriram portas para novos ramos da ciência.

O surgimento dos números complexos remonta aos estudos do século XVI sobre equações cúbicas e quárticas, com contribuições de matemáticos como Girolano Cardano, Rafael Bombelli e Ludovico Ferrari. Embora inicialmente recebidos com desconfiança, esses números foram gradualmente legitimados pelo cenário científico, consolidando-se no século XVIII, graças aos trabalhos de Leonhard Euler e Carl Friedrich Gauss, como parte essencial da Álgebra.

Do ponto de vista matemático, os números complexos não constituem apenas uma generalização dos números reais, mas também uma estrutura dotada de propriedades próprias, cuja representação geométrica no plano cartesiano revela uma profunda ligação entre Álgebra e Geometria. Essa dualidade interpretativa lhes confere uma posição singular: são, ao mesmo tempo, entidades algébricas abstratas e ferramentas de visualização geométrica.

Além de sua relevância teórica, os complexos desempenham papel central em diversas áreas aplicadas, como Física, Engenharias e Computação. Na análise de circuitos elétricos, por exemplo, a teoria dos fasores mostra-se indispensável para a compreensão dos fenômenos de corrente alternada. Da mesma forma, na Matemática Pura, os números complexos possibilitam formulações elegantes de resultados clássicos, como as identidades trigonométricas e a resolução de equações algébricas.

A escolha dessa temática justifica-se por duas razões principais. A primeira, pela compreensão dos números complexos, que é essencial para o fortalecimento da formação matemática, estabelecendo uma conexão entre diferentes áreas do conhecimento, com a Álgebra, a Trigonometria e a Geometria. Já a segunda razão trata-se pela aplicabilidade prática em disciplinas como a Física e a Engenharia, que confere ao tema um caráter interdisciplinar que reforça a importância de sua sistematização em trabalhos acadêmicos.

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece os números complexos como parte integrante da formação do estudante do Ensino Médio, destacando sua relevância na resolução de equações polinomiais, na interpretação geométrica e construção de modelos matemáticos aplicados. Assim, este trabalho dialoga diretamente com as competências e habilidades previstas no BNCC, oferecendo subsídios tanto para a prática docente quanto para a aprendizagem significativa desse conteúdo.

O presente trabalho tem por objetivo examinar os números complexos em suas múltiplas dimensões (histórica, geométrica, algébrica e aplicada), evidenciando sua relevância enquanto estrutura matemática de caráter unificador, explorando sua representação geométrica e trigonométrica, analisando aplicações básicas, em especial no estudo de circuitos elétricos por meio da teoria dos fasores. Destina-se a estudantes de nível médio, além de cursos de graduação em Matemática, professores e pesquisadores interessados em compreender de forma mais aprofundada a teoria dos números complexos e suas aplicações.

Sobre a estrutura, o trabalho se desenvolve da seguinte forma: o Capítulo 2 introduz a construção algébrica dos números complexos, definindo operações fundamentais e propriedades. No final do capítulo é apresentada uma aplicação na Geometria, cujo objetivo é apresentar uma fórmula para a obtenção de qualquer vértice de um polígono regular de n lados, centrado na origem do plano complexo. O Capítulo 3 desenvolve a teoria dos fasores, relacionando-a aos números complexos e aplicando-a na análise de circuitos de corrente alternada. Já o Capítulo 4 apresenta demonstrações de fórmulas trigonométricas utilizando a representação polar dos complexos. O capítulo 5 revisita as soluções das equações cúbicas e quárticas, destacando o papel histórico dos números complexos.

2 Conjunto dos números complexos e sua aritmética

2.1 Pares Ordenados

Sendo \mathbb{R} o conjunto dos números reais, definimos o produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sendo

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

Isto significa que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um par ordenado formado por dois números reais quaisquer. Considere $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. Definiremos:

Igualdade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, os primeiros termos de cada par forem iguais, bem como os segundos termos forem iguais. Assim,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \quad (2.1)$$

Adição: a soma de dois pares ordenados será um novo par ordenado (x, y) cujo primeiro termo x é a soma dos dois primeiros termos a e c de cada par ordenado, e o segundo termo y é a soma dos dois segundos termos b e d de cada par ordenado. Assim,

$$(a, b) + (c, d) = (x, y), \text{ em que } \begin{cases} x = a + c \\ y = b + d \end{cases} \quad (2.2)$$

Multiplicação: o produto de dois pares ordenados será um novo par ordenado (x, y) , cujo primeiro termo x é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos dois segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo y é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro. Assim,

$$(a, b) \cdot (c, d) = (x, y), \text{ em que } \begin{cases} x = ac - bd \\ y = ad + bc \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 Conjunto dos números Complexos

Denomina-se **conjunto dos números complexos** o conjunto formado pelos pares ordenados (a, b) , com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, em que estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação, conforme (2.1), (2.2) e (2.3). Denotaremos esse conjunto por \mathbb{C} . Assim, se $z \in \mathbb{C}$, então

$$z = (a, b), \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2.2.1.

a) Dados $z_1 = (3, -2)$ e $z_2 = (1, 2)$, temos que

$$z_1 + z_2 = (3, -2) + (1, 2) = (3 + 1, -2 + 2) = (4, 0)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3, -2) \cdot (1, 2) = (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2, 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1) = (7, 4)$$

b) Ainda considerando $z_1 = (3, -2)$ e $z_2 = (1, 2)$, qual deve ser o número complexo z_3 tal que $z_1 + z_3 = z_2$? Seja $z_3 = (x, y)$, um número complexo. Segue que

$$z_1 + z_3 = z_2 \Leftrightarrow (3, -2) + (x, y) = (1, 2) \Leftrightarrow (3 + x, -2 + y) = (1, 2)$$

$$\Leftrightarrow 3 + x = 1 \text{ e } -2 + y = 2$$

ou seja, $x = -2$ e $y = 4$. Assim, o complexo procurado é $z_3 = (-2, 4)$

2.2.1 Propriedades

Sejam z , w e v números complexos. As operações de adição e multiplicação definidas em (2.2) e (2.3) satisfazem as:

propriedades da adição:

(i) comutativa: $z + w = w + z$;

(ii) associativa: $(z + w) + v = z + (w + v)$;

(iii) elemento neutro: existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + z_0 = z_0 + z = z$.

O elemento neutro da adição é $z_0 = (0, 0)$;

(iv) elemento oposto: para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z + z' = z' + z = z_0$.

O complexo z' também é chamado de **elemento simétrico** de z , ou ainda, **inverso aditivo** de z . Denotaremos por $-z$ o elemento oposto de z , de modo que, se $z = (a, b)$ então $-z = -(a, b) = (-a, -b)$.

propriedades da multiplicação:

(i) comutativa: $z \cdot w = w \cdot z$;

(ii) associativa: $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot v$;

(iii) elemento neutro: existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z_1 = z_1 \cdot z = z$.

No conjunto \mathbb{C} , o elemento neutro da multiplicação é o complexo $z_1 = (1, 0)$, pois:

$$z \cdot z_1 = (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = z$$

$$z_1 \cdot z = (1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b) = z;$$

- (iv) elemento inverso: para $z \neq (0, 0)$ existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z' = z' \cdot z = (1, 0)$.
Portanto, existe um elemento chamado inverso multiplicativo $z' = \frac{1}{z}$ tal que

$$z \cdot z' = z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0);$$

- (v) propriedade distributiva em relação a adição:

$$z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v.$$

2.2.2 Definição da operação de subtração

A partir da propriedade do elemento oposto, dados dois números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, sempre existe um único complexo w tal que $z_1 + w = z_2$, uma vez que:

$$\begin{aligned} z_1 + w = z_2 &\Rightarrow z'_1 + (z_1 + w) = z'_1 + z_2 \\ &\Rightarrow (z'_1 + z_2) + w = z_2 + z'_1 \\ &\Rightarrow z_0 + w = z_2 + z'_1 \quad (z_0 \text{ é o elemento neutro da adição}) \\ &\Rightarrow w = z_2 + z'_1 \end{aligned}$$

Chamaremos esse número w de **diferença** entre os complexos z_2 e z_1 . Indicaremos essa diferença por $z_2 - z_1$. Assim,

$$z_2 - z_1 = (c, d) - (a, b) = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b)$$

2.2.3 Definição da operação de divisão

A partir da propriedade da existência do elemento inverso, dados os números complexos $z_1 = (a, b)$ (com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) e $z_2 = (c, d)$, existe um único número complexo w tal que $z_1 \cdot w = z_2$, pois

$$\begin{aligned} z_1 \cdot w &\Leftrightarrow z'_1 \cdot (z_1 \cdot w) = z'_1 \cdot z_2 \\ &\Leftrightarrow (z'_1 \cdot z_1) \cdot w = z_2 \cdot z'_1 \\ &\Leftrightarrow (1, 0) \cdot w = z_2 \cdot z'_1 \Leftrightarrow w = z_2 \cdot z'_1 \end{aligned}$$

Chamaremos esse número w de **quociente** entre z_2 e z_1 e indicaremos por $\frac{z_2}{z_1}$.

Considere um número complexo $z = (a, b) \neq (0, 0)$. Como $z \neq (0, 0)$, então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, o que significa que $a^2 + b^2 \neq 0$. Vamos calcular o seu inverso multiplicativo $w = (x, y)$ em função de a e b .

$$\begin{aligned} z \cdot w = (1, 0) &\Leftrightarrow (a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \\ &\Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \\ &\Leftrightarrow ax - by = 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\Leftrightarrow ay + bx = 0 \tag{2.5}$$

Multiplicando a equação (2.4) por $-b$, a equação (2.5) por a e, em seguida, somando as duas novas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -abx + b^2y = -b \\ a^2y + abx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2y + b^2y = -b \Leftrightarrow (a^2 + b^2)y = -b \\ \Leftrightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Substituindo esse resultado na equação (2.5), temos

$$ay + bx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{b}y \Leftrightarrow x = -\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Assim, o inverso multiplicativo de $z = (a, b)$ é

$$w = (x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

desde que $(a, b) \neq (0, 0)$.

2.2.4 Forma algébrica

Na equação $x^2 + 4x + 5 = 0$, tem-se que

$$x^2 + 4x + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + 1 = 0$$

Como $(x + 2)^2$ é sempre positivo, não existe x real tal que essa equação seja satisfeita. Assim, dizemos que a equação não possui solução em \mathbb{R} . No entanto, ainda que não possua soluções reais, podemos considerar

$$(x + 2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = -1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{-1}$$

Seja R' o conjunto formado pelos pares ordenados $R' = \{(a, b) \in \mathbb{C} | b = 0\}$. Vamos agora relacionar o conjunto R' ao conjunto \mathbb{R} através da função f , de modo que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \rightarrow (x, 0) \in R'$$

Por exemplo,

(a) para $x = 1$, $f(1) \rightarrow (1, 0)$

(b) para $x = 2$, $f(2) \rightarrow (2, 0)$

(c) para $x = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Note que a função f é uma função:

- **injetiva**, pois dados x_1 e x_2 em \mathbb{R} , com $x_1 \neq x_2$,

$$f(x_1) = (x_1, 0) \neq (x_2, 0) = f(x_2),$$

conforme a definição de igualdade de pares ordenados;

- **sobrejetiva**, pois para todo par ordenado $(x, 0)$ em R' , sempre há um correspondente x em \mathbb{R} através de f ;
- **bijetiva**, pois f é injetiva e sobrejetiva. Além disso, a função f é munida das operações de adição e multiplicação, pois para todo $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$:
 - $f(a + b) = (a + b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$ o que mostra que a soma $a + b$ corresponde, através de f , à soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$;
 - $f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (a \cdot 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$ o que mostra que o produto $a \cdot b$ corresponde, através de f , ao produto dos pares ordenados $(a, 0)$ e $(b, 0)$.

Assim, por f ser uma função bijetiva e por manter as operações de adição e multiplicação, dizemos que R' e \mathbb{R} são isomorfos. Consequentemente, realizar operações com pares ordenados $(x, 0)$ nos leva a resultados similares aos obtidos operando com números reais x . Assim, fica válida a igualdade

$$(x, 0) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

que usaremos daqui por diante. Ao admitir esta igualdade, teremos em particular, os elementos neutros da adição e da multiplicação:

$$0 = (0, 0) \text{ e } 1 = (1, 0).$$

Assim, o corpo \mathbb{R} dos números reais passa a ser considerado subconjunto do corpo \mathbb{C} dos números complexos

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.2.5 Unidade Imaginária

Associaremos ao número complexo $(0, 1)$ o símbolo i e o denominaremos **unidade imaginária**. Assim,

$$i = (0, 1)$$

Observe que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

ou seja,

$$i^2 = -1$$

que é a propriedade fundamental da unidade imaginária. Aplicando a propriedade associativa da multiplicação, temos:

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que as potências de i sempre terão como resultados -1 , $-i$, 1 e i , nessa ordem. De maneira geral, para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} i^{4n} &= (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1 \\ i^{4n+1} &= i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^{4n+2} &= i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ i^{4n+3} &= i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \end{aligned}$$

Considere agora um número complexo $z = (a, b)$ qualquer, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Segue que

$$\begin{aligned} z &= (a, b) = (a + 0, 0 + b) = (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

ou seja,

$$z = a + b \cdot i,$$

onde i é a unidade imaginária. Isso significa que todo número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito na forma $z = a + b \cdot i$ de maneira única. Essa nova representação é denominada **forma algébrica do complexo** z . O número a é denominado **parte real** de z e o número b é denominado **parte imaginária** de z . Dado um número complexo $z = a + b \cdot i$, indicaremos

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ e } b = \operatorname{Im}(z)$$

Chamaremos de **real** todo número complexo cuja parte imaginária é nula. Será denominado **imaginário puro** todo número complexo cuja parte real é igual a zero e a imaginária não. Por exemplo:

a) $z = 3 + 0i = 3$ é um número real.

b) $z = 0 + 2i = 2i$ é um número imaginário puro.

Usar a representação de um número complexo na sua forma algébrica é mais conveniente pela praticidade na realização das operações. Na forma algébrica, as definições de igualdade, adição e multiplicação de dois números complexos $z_1 = a + b \cdot i$ e $z_2 = c + d \cdot i$ passam a ficar:

- Igualdade: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$, o que significa que para dois números complexos serem iguais, esses números precisam possuir partes reais iguais e partes imaginárias iguais.
- Adição: $z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$, o que significa que a soma de dois números complexos é um número complexo cuja parte real é a soma das partes reais desses dois números complexos e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginárias desses mesmos dois números complexos.
- Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i)(c + d \cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$, o que significa que o produto de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de $(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i)$, aplicando a propriedade distributiva e levando em conta que $i^2 = -1$.

Exemplo 2.2.2. Dados os complexos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 4i$ e $z_3 = -4 - i$, tem-se que:

a) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 4i) = (2 - 1) + (3 + 4)i = 1 + 7i$

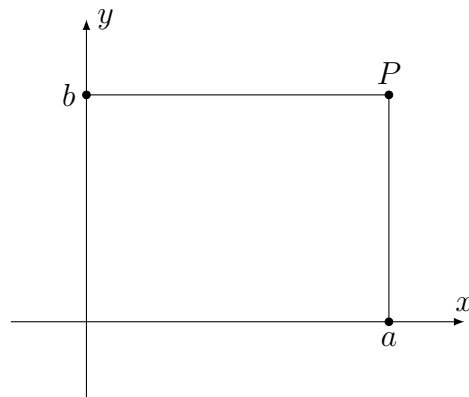
b) $z_2 \cdot z_3 = (-1 + 4i)(-4 - i) = (-1)(-4) + (-1)(-i) + 4i(-4) + 4i(-i) = 8 - 15i$

2.2.6 Representação geométrica

Já sabemos que a cada número complexo $z = a + bi$ corresponde um único par de números reais (a, b) . Por sua vez, a cada par de números reais (a, b) está associado um ponto único no plano cartesiano. Sendo assim, é possível associar sempre a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto P do plano, com coordenadas a e b , ou seja, $P(a, b)$.

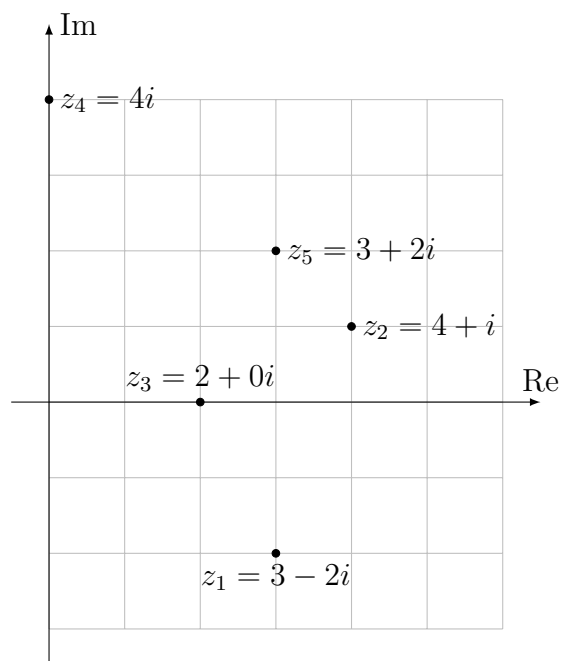
O plano cartesiano utilizado para a representação geométrica dos números complexos é denominado **plano complexo** ou plano de **Argand-Gauss**. Nesse contexto, denomina-se **afixo** de um número complexo $a + bi$, o ponto $P \in \mathbb{R}^2$ que lhe corresponde no plano.

Figura 2.2.1 – Representação de um ponto qualquer no plano complexo.



Fonte: acervo do autor.

Exemplo 2.2.3. Vamos representar geometricamente os números complexos $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 4 + i$, $z_3 = 2$, $z_4 = 4i$ e $z_5 = 3 + 2i$.

Figura 2.2.2 – Representação dos números z_1, z_2, \dots, z_5 no plano complexo.

Fonte: acervo do autor.

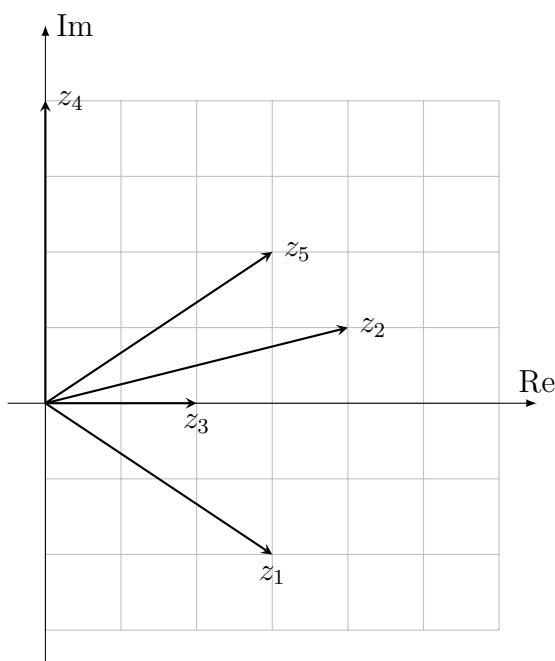
- $z_1 = 3 - 2i$ está associado ao ponto $(3, -2)$.
- $z_2 = 4 + i$ está associado ao ponto $(4, 1)$.
- $z_3 = 2$ está associado ao ponto $(2, 0)$.
- $z_4 = 4i$ está associado ao ponto $(0, 4)$.
- $z_5 = 3 + 2i$ está associado ao ponto $(3, 2)$.

Pode-se observar que:

1. Os números complexos reais pertencem ao eixo das abscissas (eixo x), mantendo a correspondência segundo a qual para cada número real existe um ponto da reta que se associa a esse número. Assim, chamaremos o eixo x de **eixo real** e representaremos por Re .
2. Os imaginários puros pertencem ao eixo das ordenadas (eixo y). Assim, chamaremos o eixo y de **eixo imaginário** e representaremos por Im .
3. Os demais números complexos $a + bi$ (com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) pertencem aos vários quadrantes, de acordo com os sinais de a e b .
4. A relação entre os números complexos e os pontos no plano é biunívoca, ou seja, para cada número complexo, existe um, e somente um, ponto do plano, e vice-versa.
5. Podemos associar a cada complexo $z = a + bi$, um único vetor cujas extremidades são a origem do sistema de coordenadas cartesianas $O(0, 0)$ e o ponto $P(a, b)$, afixo do número complexo $z = a + bi$.

A Figura (2.2.3) mostra a representação na forma vetorial dos números complexos z_1 , z_2 , z_3 , z_4 e z_5 do exemplo anterior:

Figura 2.2.3 – Representação de números complexos como vetores.



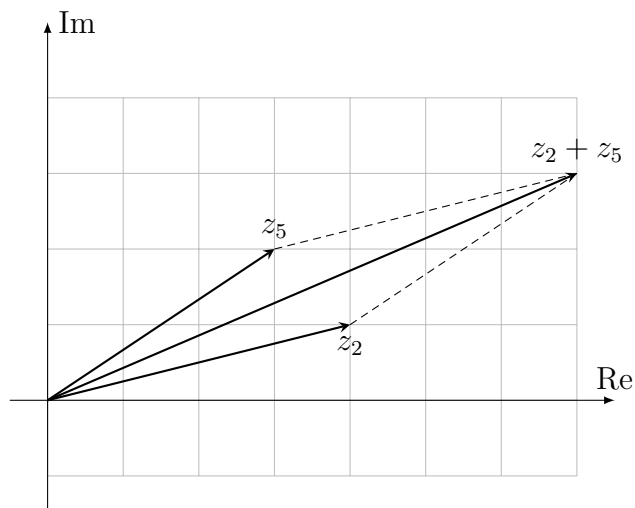
Fonte: acervo do autor.

A Figura (2.2.4) mostra que a soma dos números complexos $z_2 = 4 + i$ e $z_5 = 3 + 2i$, representados por vetores, resulta em

$$z_2 + z_5 = (4 + i) + (3 + 2i) = 7 + 3i,$$

que é representado pelo vetor $\overrightarrow{z_2 + z_5}$. Observe que se aplica a regra do paralelogramo para soma de vetores.

Figura 2.2.4 – Representação da soma vetorial de números complexos.



Fonte: acervo do autor.

A associação dos números complexos $z = a + bi$ com a notação de vetores permite o uso de números complexos em diversos campos das Ciências, nos quais as grandezas são vetoriais. Como exemplos, tem-se o estudo da eletricidade, de ondas e oscilações, mecânica quântica e controle de sistemas dinâmicos, em sua maioria a nível superior.

2.2.7 Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi = (a, b)$, denominaremos conjugado de z o número complexo $\bar{z} = a - bi = (a, -b)$. Assim,

$$z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$$

Observe que o conjugado do número complexo \bar{z} é z , pois

$$\bar{z} = a - bi \Leftrightarrow \overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$$

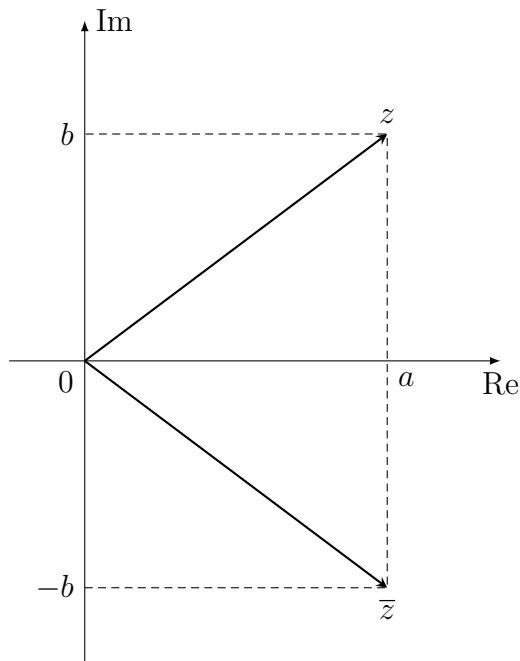
Exemplo 2.2.4.

- Se $z = 2 + 3i$, então seu conjugado é $\bar{z} = 2 - 3i$.
- Se $z = 1 - \frac{4}{3}i$, então seu conjugado é $\bar{z} = 1 + \frac{4}{3}i$.
- Se $z = 2$, então seu conjugado é $\bar{z} = 2$. Note que o conjugado de um número complexo real é o próprio número real.
- Se $z = 4i$, então seu conjugado é $\bar{z} = -4i$. Note que o conjugado de um número imaginário puro é o seu oposto aditivo.

2.2.8 Interpretação geométrica do conjugado

Geometricamente, o conjugado \bar{z} de um número complexo z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo real. A figura abaixo mostra os complexos $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, representados por vetores.

Figura 2.2.5 – Representação gráfica de números complexos conjugados.



Fonte: acervo do autor.

2.2.9 Propriedades do conjugado

Para todo $z = a + bi$ complexo:

$$1^a) \quad z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$$

De fato,

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a + 0i = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$$

$$2^a) \quad z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot i$$

De fato,

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (b - (-b))i = 0a + 2bi = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) \cdot i$$

$$3^a) \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

De fato,

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow (a + bi) = (a - bi)$$

Da definição de igualdade, devemos ter

$$a = a \text{ e } b = -b \Leftrightarrow b = 0$$

Logo, $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$

$$4^a) \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

De fato,

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + a \cdot (-b)i + bi \cdot a + (bi) \cdot (-bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Agora, dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

$$5^a) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

De fato,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a + c) + (-b - d)i \\ &= a - bi + c - di \\ &= \overline{a + bi} + \overline{c + di} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

$$6^a) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

De fato,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} \\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i \\ &= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i \\ &= (a - bi) \cdot (c - di) \\ &= \overline{a - bi} \cdot \overline{c - di} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

2.2.10 Divisão de dois números complexos com o auxílio do conjugado

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_1 \neq 0$, a divisão entre z_2 e z_1 pode ser obtido de uma forma mais prática com o auxílio do conjugado de z_1 . Uma vez que

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{z_2 \cdot \bar{z}_1}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (c + di) \cdot (a - bi) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \left[(ca + bd) + (-bc + da) \right] i \\ &= \frac{ca + bd}{a^2 + b^2} + \frac{da - bc}{a^2 + b^2} i. \end{aligned}$$

Ou seja, para calcular $\frac{z_2}{z_1}$ basta efetuar o produto do numerador, bem como do denominador, pelo conjugado do denominador.

Exemplo 2.2.5. A divisão entre os números complexos $4 + 3i$ e $3 + 2i$ é:

$$\frac{4 + 3i}{3 + 2i} = \frac{4 + 3i}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = \frac{(12 + 6) + (-8 + 9)i}{3^2 + 2^2} = \frac{18}{13} + \frac{1}{13}i$$

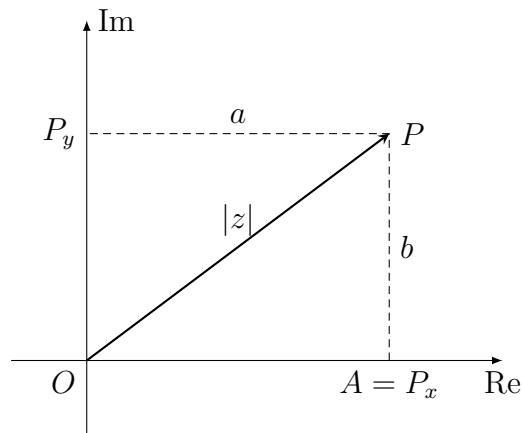
2.2.11 Módulo de um número complexo

Definimos como **módulo** (ou **norma**) de um número complexo, a distância do afixo desse número à origem O do sistema de coordenadas. Denotaremos por $|z|$ o módulo do número complexo z . Assim, dado $z = a + bi$ e considerando $P(a, b)$ como sendo o afixo de z , conforme a figura (2.2.6), tem-se pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OAP :

$$OP^2 = AO^2 + AP^2 \Leftrightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 2.2.6. O módulo do número complexo:

- $z_1 = 2 + 3i$ é $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$;
- $z_2 = -3 + 4i$ é $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;
- $z_3 = 6$ é $|z_3| = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$;
- $z_4 = 3i$ é $|z_4| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$;
- $z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é $|z_5| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

Figura 2.2.6 – Representação gráfica do módulo de z .

Fonte: acervo do autor.

Observação 2.2.1. Dado um número complexo $z = a + bi$ qualquer:

- (i) O módulo de z (com $z \neq 0$) é sempre positivo, isto é, $|z| > 0$. Isto se justifica pelo fato de $a^2 + b^2 > 0$.
- (ii) O módulo de $z = 0$ é $|z| = 0$. Isso significa que o único número complexo cujo módulo vale zero é $z = 0$.
- (iii) O módulo de z é igual ao módulo do seu conjugado \bar{z} , pois

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

- (iv) O produto entre um número complexo e seu conjugado é o quadrado do módulo desse número. Ou seja, dado um número complexo $z = a + bi$, então $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, uma vez que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (4ª propriedade do conjugado);
- (v) A parte real de z é sempre menor ou igual ao módulo da parte real de z , que por sua vez, é menor ou igual ao módulo de z . Ou seja,

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

- (vi) A parte imaginária de z é sempre menor ou igual ao módulo da parte imaginária de z , que por sua vez é menor ou igual ao módulo de z . Ou seja,

$$\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

2.2.12 Propriedades do módulo

Dados dois números complexos z_1 e z_2 , com $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tem-se:

1º) **módulo do produto:** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

De fato,

$$\begin{aligned}
 |z_1 \cdot z_2| &= |(a + bi) \cdot (c + di)| \\
 &= |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\
 &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
 &= \sqrt{(ac)^2 - 2 \cdot (ac) \cdot (bd) + (bd)^2 + (ad)^2 + 2 \cdot (ad) \cdot (bc) + (bc)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot (c^2 + d^2) + b^2 \cdot (c^2 + d^2)} \\
 &= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)} \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\
 &= |a + bi| \cdot |c + di| \\
 &= |z_1| \cdot |z_2|
 \end{aligned}$$

Outra forma de demonstrar esta propriedade é com o auxílio da observação [2.2.1 \(iv\)](#), em que:

$$\begin{aligned}
 |z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) \\
 &= (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) \\
 &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \quad \therefore \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|
 \end{aligned}$$

2º) **módulo do quociente:** $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$, com $z_1 \neq 0$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 &= \frac{z_2}{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{z_2}{z_1} \right)} \\
 &= \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \\
 &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_2}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} \\
 &= \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} \quad \therefore \quad \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}
 \end{aligned}$$

3º) **desigualdade triangular:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = \\
 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + (\overline{z_1})(z_2) \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1z_2} \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq \\
 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| = \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2
 \end{aligned}$$

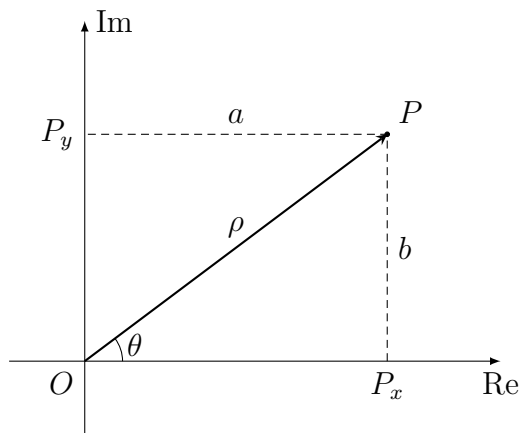
donde $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2.2.13 Argumento

Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, considere θ o ângulo formado pelo segmento \overline{OP} com o eixo real positivo, conforme a figura (2.2.7), em que O é a origem do plano complexo e P é o afixo de z . Observe que, sendo ρ o módulo de z , tem-se:

$$\cos\theta = \frac{OP_x}{OP} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{OP_y}{OP}$$

Figura 2.2.7 – Representação gráfica do argumento de z , dado por θ .



Fonte: acervo do autor.

Para o caso em que $z = 0$, teremos $\rho = 0$. Neste caso, o ângulo θ não se define. Podemos notar também que, fixado um número complexo z não nulo, os valores de $\cos\theta$

e $\text{sen}\theta$ ficam determinados, mas o argumento θ pode assumir infinitos valores devido a congruência dos arcos ao longo das voltas. Por exemplo, dado $z = 2 + 2i$, tem-se que

$$\rho = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

onde $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Assim, dado $z \neq 0$, chamaremos de argumento principal de z (e representaremos por $\arg(z)$) o arco de medida θ_0 , com $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, tal que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. No exemplo acima, o argumento principal é $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ rad.

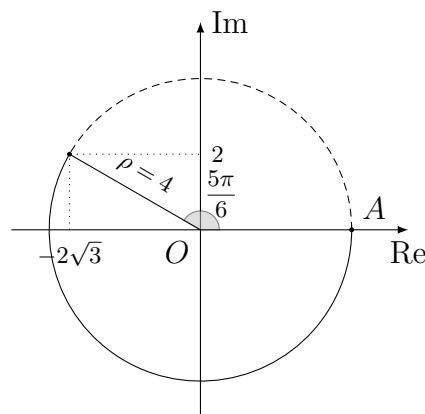
Exemplo 2.2.7. Calcule o módulo e o argumento do número complexo:

$$(a) \quad z_1 = -2\sqrt{3} + 2i \quad \therefore \quad \rho = |z_1| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \text{ Logo, o argumento principal é } \theta_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

Figura 2.2.8 – Representação gráfica do exemplo 2.2.7(a).



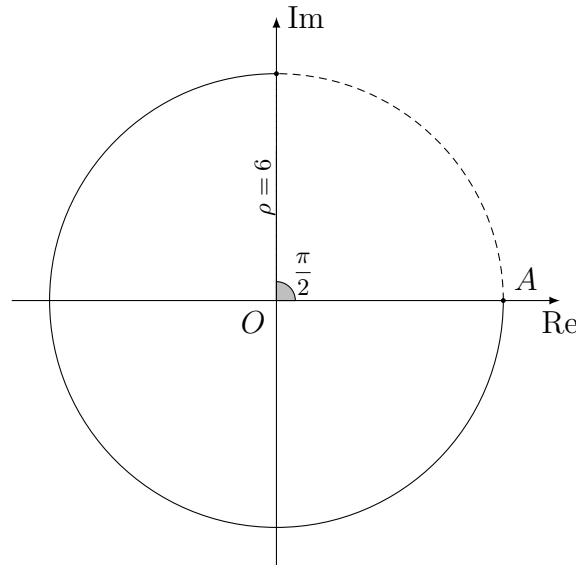
Fonte: acervo do autor.

$$(b) \quad z_2 = 6i \quad \therefore \quad \rho = |z_2| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{6} = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \text{ Logo, o argumento principal é } \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Figura 2.2.9 – Representação gráfica do exemplo 2.2.7(b).



Fonte: acervo do autor.

2.2.14 Forma polar (ou trigonométrica)

Dado um número complexo, $z = a + bi$, já vimos que $a = \rho \cos\theta$ e $b = \rho \operatorname{sen}\theta$ onde θ e ρ são, respectivamente, o argumento principal e o módulo de z . Assim,

$$z = a + bi = (\rho \cos\theta) + (\rho \operatorname{sen}\theta)i$$

ou seja,

$$z = \rho \cos\theta + i \rho \operatorname{sen}\theta \quad (2.6)$$

A igualdade (2.6) é chamada **forma polar** do número complexo z (ou **forma trigonométrica**). Os valores $\rho \cos\theta$ e $\rho \operatorname{sen}\theta$ são suas coordenadas polares no plano complexo.

Exemplo 2.2.8. Passe para a forma polar os seguintes números complexos:

$$(a) \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \therefore \quad \rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \therefore \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Logo, a forma polar de z_1 é

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

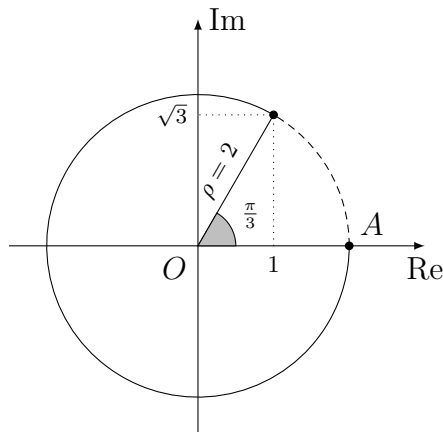
$$(b) \quad z_2 = 3 - 3i \quad \therefore \quad \rho = |z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{-3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore$$

$$\theta_0 = \frac{7\pi}{4} \text{ rad.}$$

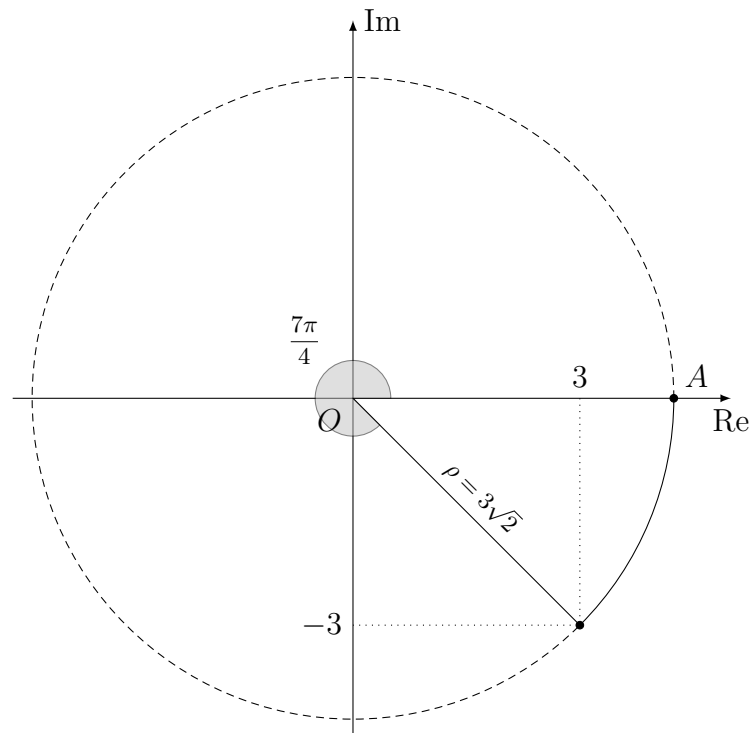
$$\text{Logo, a forma polar de } z_2 \text{ é } z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right).$$

Figura 2.2.10 – Representação gráfica do exemplo 2.2.8(a).



Fonte: acervo do autor.

Figura 2.2.11 – Representação gráfica do exemplo 2.2.8(b).



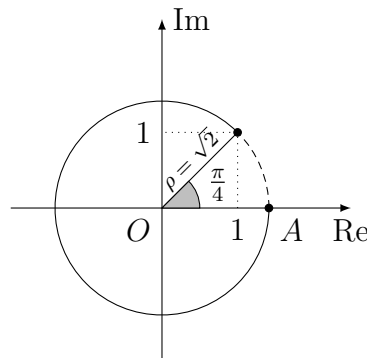
Fonte: acervo do autor.

$$(c) \quad z_3 = 1 + i \quad \therefore \quad \rho = |z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Logo, a forma polar de $z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen} \frac{\pi}{4} \right)$.

Figura 2.2.12 – Representação gráfica do exemplo 2.2.8(c)



Fonte: acervo do autor.

2.2.15 Multiplicação de números complexos na forma polar

Consideremos os números complexos z_1 e z_2 , dados na forma polar:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

O produto $z_1 z_2$ é dado por:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)] [\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 + i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i (\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Observe que o produto entre dois números complexos escritos na sua forma polar é igual ao número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à 1ª volta positiva.

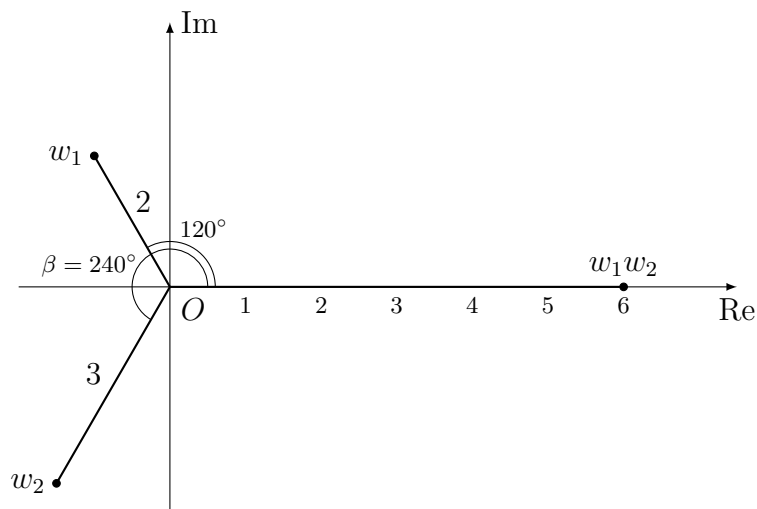
Exemplo 2.2.9.

Dados os números complexos: $w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ e $w_2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$, o produto $w_1 w_2$ é dado por

$$w_1 w_2 = 2 \cdot 3 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = 6(\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi))$$

Observação 2.2.2. A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos.

Figura 2.2.13 – Representação gráfica do exemplo 2.2.9



Fonte: acervo do autor.

2.2.16 Divisão de números complexos na forma polar

Consideremos os números complexos z_1 e z_2 , com $z_1 \neq 0$, dados na forma polar:

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

O quociente $\frac{z_2}{z_1}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)}{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)} \\ &= \frac{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \cdot (\cos\theta_1 - i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_1 - i \operatorname{sen}\theta_1)} \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\cos\theta_2\cos\theta_1 - i \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 - i^2 \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\theta_1 - i^2 \operatorname{sen}^2\theta_1} \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) - i(\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1} \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot [\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned}$$

Podemos assim concluir que a divisão entre dois números complexos na sua forma polar é um número complexo cujo módulo é a razão entre os módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzido à 1ª volta positiva, ou seja, $0 \leq \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \leq 2\pi$, com $z_1 \neq 0$.

Exemplo 2.2.10. Sendo $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, vamos calcular o quociente $\frac{z_2}{z_1}$. Observe que os módulos de z_1 e z_2 são $\rho_1 = 3$ e $\rho_2 = 5$, enquanto

que os argumentos são $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ radianos e $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ radianos. Assim, a divisão resultará em:

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot [\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)] \\ &= \frac{5}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{5}{3} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

2.2.17 Potenciação de números complexos na forma polar

Potências de números complexos podem ser obtidas de um modo mais fácil por meio de um algoritmo denominado de **Primeira fórmula De Moivre**.

Seja z um número complexo e $n \in \mathbb{N}^*$. A potência z^n é definida como

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ fatores}}.$$

Vejamos inicialmente o que acontece para o caso em que $n = 2$. Considerando z na sua forma polar, ou seja, $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ temos:

$$\begin{aligned}z^2 &= z \cdot z \\ &= \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ &= \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)] \\ &= \rho^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)]\end{aligned}$$

Vejamos agora o que acontece para $n = 3$.

$$\begin{aligned}z^3 &= z^2 \cdot z \\ &= \rho^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)] \cdot \rho [\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta] \\ &= \rho^2 \cdot \rho [\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)] \\ &= \rho^3 [\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)]\end{aligned}$$

Sendo assim, para um número complexo z representado na sua forma polar, a potência z^n resultará em um número complexo cujo módulo é igual ao módulo de z elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n , reduzido à primeira volta positiva $0 \leq \arg(z^n) \leq 2\pi$. Ou seja:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

A demonstração para o caso geral pode ser obtida usando o Princípio da Indução Finita sobre n , uma vez que $n \in \mathbb{N}$.

Quando $|z| = 1$, ou seja, $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, tem-se da Primeira Fórmula de De Moivre:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta),$$

onde n é um inteiro positivo. Geometricamente, essa fórmula significa que elevar o complexo unitário $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ à potência n equivale a realizar n rotações sucessivas de ângulo θ .

Como exemplo, vamos calcular $\cos(3\theta)$ e $\operatorname{sen}(3\theta)$. Aplicando a primeira fórmula de De Moivre:

$$\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 \quad (2.7)$$

Aplicando o Binômio de Newton para realizar o desenvolvimento, tem-se:

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2(i \cdot \operatorname{sen}\theta) + 3(\cos\theta)(i \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 + (i \operatorname{sen}\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + i (3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (2.7) e (2.8), obtemos:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\operatorname{sen}(3\theta) = 3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

2.2.18 Radiciação de números complexos na forma polar

Dado um número complexo z e um número natural n , definiremos **raiz n -ésima** de z o número complexo w tal que $w^n = z$. Assim:

$$\sqrt[n]{z} = w \quad \Leftrightarrow \quad w^n = z$$

Exemplo 2.2.11.

(a) As raízes quadradas do número complexo 25 são 5 e -5 , pois:

$$5^2 = 25 \quad \text{e} \quad (-5)^2 = 25$$

(b) As raízes quartas do número complexo 81 são 3, -3 , $3i$ e $-3i$, pois:

$$3^4 = 81, \quad (-3)^4 = 81, \quad (3i)^4 = 81 \quad \text{e} \quad (-3i)^4 = 81$$

(c) As raízes cúbicas do número complexo 1 são $-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o próprio 1, pois:

$$1^3 = 1, \quad \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1.$$

(d) A única raiz quarta do número complexo 0 é 0, pois 0 é o único número complexo tal que $0^4 = 0$.

Diante os exemplos acima, surge a seguinte questão: quantas raízes n -ésimas possui um número complexo $z \neq 0$ e por quais métodos é possível determiná-las?

2.2.19 A segunda fórmula de De Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$. Encontrar as raízes n -ésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$w = |w|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$$

de modo que $w^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números w tal que:

$$[|w|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)]^n = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$|w|^n(\cos(n\alpha) + i \cdot \text{sen}(n\alpha)) = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Da igualdade:

$$w^n = |w|^n(\cos(n\alpha) + i \cdot \text{sen}(n\alpha)) = z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

vem $|w|^n = \rho$, $\cos(n\alpha) = \cos\theta$ e $\text{sen}(n\alpha) = \text{sen}\theta$. De $|w|^n = \rho$, temos $|w| = \sqrt[n]{\rho}$ (sendo sempre real e positivo). De $\cos(n\alpha) = \cos\theta$ e $\text{sen}(n\alpha) = \text{sen}\theta$, temos:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k < n$. Assim, concluímos que:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Essa é a segunda fórmula de De Moivre e é válida para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Após $k = n-1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n-1$, temos n raízes distintas. Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

Assim, qualquer número complexo z , não nulo, admite n raízes n -ésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2k\pi}{n}$. Observemos que

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] = w_0 \cdot \xi_k,$$

sendo $\xi_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n} \right)^k = \xi_1^k$.

As raízes n -ésimas da unidade, ou seja, as raízes n -ésimas de $z = 1$ são:

$$\xi_0 = \xi_1^0 = 1, \quad \xi_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n}, \quad \xi_2 = \xi_1^2, \quad \dots, \quad \xi_{n-1} = \xi_1^{n-1}.$$

Observação

Demonstração da Propriedade da desigualdade triangular usando a forma polar. A representação do número complexo na sua forma polar torna as operações de potenciação e radiciação menos trabalhosas conforme veremos mais a seguir.

Vamos provar agora a propriedade da desigualdade triangular da soma dos módulos de dois complexos. Dados os números complexos

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

vamos calcular $z_1 + z_2$ e mostrar que é menor do que $|z_1| + |z_2|$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) + \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2) + i(\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{(\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2)^2 + (\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2)^2} \\ &= \sqrt{\rho_1^2(\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1) + \rho_2^2(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2) + 2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)} \\ &= \sqrt{\rho_1^2 \cdot 1 + \rho_2^2 \cdot 1 + 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Como $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ assume sempre valor inferior ou igual a 1, segue que

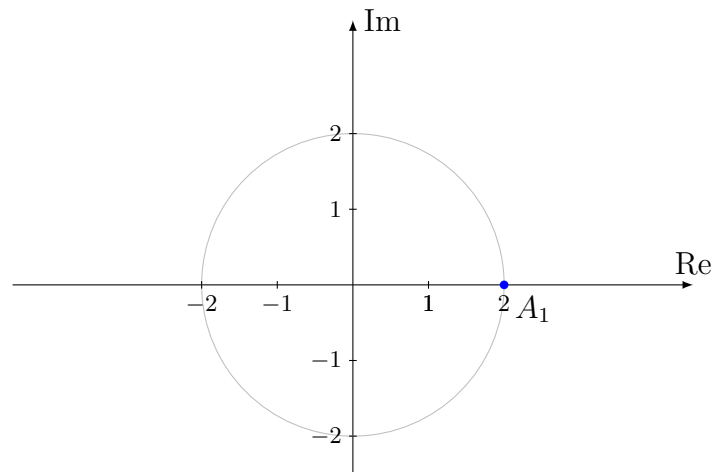
$$|z_1 + z_2| \leq \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2} = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2} = \rho_1 + \rho_2 = |z_1| + |z_2|$$

2.2.20 Problema de Geometria que envolve Rotação

Números complexos podem ser usados para resolver problemas de Geometria Plana que envolvem rotação. Por exemplo, seja $A_1 = (2, 0)$ um dos vértices de um pentágono regular. Suponha desejarmos obter os demais vértices desse polígono com o auxílio de números complexos, supondo que o centro do polígono é a origem do plano complexo.

Seja $z_1 = 2(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)$ (ou, na forma algébrica $z_1 = 2 + 0i$) o número complexo cujo afixo é o vértice A_1 . Vamos chamar de z_2, z_3, z_4 e z_5 números complexos cujos afixos são respectivamente, os vértices A_2, A_3, A_4 e A_5 , vértices desse pentágono. Já sabemos que multiplicar um complexo ω por $\cos\theta_0 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_0$, resultará em um complexo de mesmo módulo que w , porém com um argumento igual a $\theta = \theta_0 + \arg(\omega)$. Além disso, os lados de um polígono regular ficam subentendidos por ângulos centrais de mesma abertura. Assim, cada ângulo central do pentágono medirá $\theta = \frac{2\pi}{5}$ radianos. Considere então o número complexo

$$\xi = \cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$$

Figura 2.2.14 – Vértice A_1 de um pentágono regular, com centro em O .

Fonte: acervo do autor.

no qual será o responsável por gerar os demais vértices. Para obtermos o vértice A_2 , vamos calcular o número complexo z_2 efetuando a multiplicação na forma polar de z_1 e ξ , uma vez que ξ provocará uma rotação $\frac{2\pi}{5}$ radianos em z_1 . Assim:

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 \cdot \xi = 2(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0) \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= 2 \left[\cos \left(0 + \frac{2\pi}{5} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left(0 + \frac{2\pi}{5} \right) \right] \\ &= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

Os demais vértices podem ser obtidos, um a um, sempre multiplicando o vértice anterior por ξ . Segue, então que:

$$\begin{aligned} z_3 &= z_2 \cdot \xi = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right) \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= z_3 \cdot \xi = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5} \right) \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= z_4 \cdot \xi = 2 \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5} \right) \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

Observe que se efetuarmos mais uma vez a multiplicação, retornaremos para o complexo $z_1 = 2(\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)$, uma vez que $\frac{10\pi}{5}$ radianos é cômulo a 0 radianos.

Podemos obter um vértice específico sem precisar calcular um por um. Basta fazermos

$$z_k = z_1 \cdot \xi^{k-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

ou

$$z_k = 2 \left[\cos \frac{(k-1) \cdot 2\pi}{5} + i \cdot \text{sen} \frac{(k-1) \cdot 2\pi}{5} \right], \quad k \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

Suponha agora um polígono regular de n lados, sendo $A_1 = (a, b)$, um vértice qualquer desse polígono. Seja z_1 o número complexo cujo afixo é o ponto A_1 . Vamos inicialmente representar z_1 na sua forma polar.

$$z_1 = \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta), \quad \text{com } \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad \text{sen} \theta = \frac{b}{\rho}$$

Sendo $\xi = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n}$
tem-se:

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 \cdot \xi = \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta) \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= z_2 \cdot \xi = \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{4\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{4\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

⋮

$$z_n = z_{n-1} \cdot \xi = \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{n} \right) \right]$$

Para determinarmos um vértice A_k específico desse polígono regular de n lados, basta calcularmos o número complexo z_k tal que:

$$z_k = z_1 \xi^{k-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

ou

$$z_k = \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{(k-1) \cdot 2\pi}{n} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\theta + \frac{(k-1) \cdot 2\pi}{n} \right) \right], \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

3 Aplicação dos números complexos na análise de circuitos elétricos

Uma das aplicações tecnológicas mais relevantes dos números complexos ocorre no estudo de fasores, amplamente utilizado na **análise de circuitos elétricos de corrente alternada (CA)**. Essa abordagem não apenas confere sentido prático ao conteúdo como também proporciona uma excelente oportunidade interdisciplinar entre as áreas da Matemática, da Física e das Engenharias.

A teoria dos fasores simplifica significativamente os cálculos envolvendo sinais senoidais de mesma frequência, além de favorecer uma compreensão mais intuitiva dos cálculos relativos aos fenômenos oscilatórios. Considerando que a única exigência conceitual para sua introdução reside no domínio das operações básicas com números complexos, tanto na forma cartesiana quanto na trigonométrica, não há impedimento teórico para que esse conteúdo seja explorado no ensino médio ou nos cursos introdutórios de graduação.

Na análise de sinais senoidais em circuito da corrente alternada, é recorrente a necessidade de expressar a soma de duas funções senoidais de mesmo período, porém com fases distintas, como uma única função senoidal equivalente. Em termos formais, dadas as funções:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha), \quad g(t) = G_m \cos(\omega t + \beta), \quad \text{com } F_m, G_m > 0,$$

deseja-se obter:

$$f(t) + g(t) = H_m \cos(\omega t + \phi),$$

onde H_m representa a nova amplitude resultante e ϕ a fase da função composta. Nesta formulação, os parâmetros F_m e α correspondem, respectivamente, à **amplitude** e à **fase** da função $f(t)$, enquanto ω denota a **frequência angular**, a qual permanece constante. O período mínimo das funções é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Como exemplo concreto, considere um nó de um circuito elétrico onde convergem três ramos. Suponha que duas correntes senoidais:

$$\mathbf{i}_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \alpha_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{i}_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \alpha_2),$$

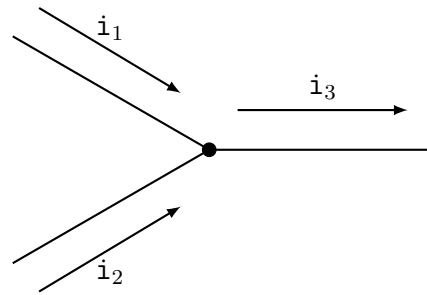
entrem por dois desses ramos. Conforme a lei das correntes (1ª Lei de Kirchoff), a corrente que sai pelo terceiro ramo será a soma:

$$\mathbf{i}_3(t) = \mathbf{i}_1(t) + \mathbf{i}_2(t), \text{ figura } \boxed{3.0.1}$$

e deseja-se expressá-la também na forma senoidal:

$$\mathbf{i}_3(t) = I_{3m} \cos(\omega t + \alpha_3).$$

Figura 3.0.1 – Representação da lei das correntes.



Fonte: acervo do autor.

3.1 Procedimento algébrico para a soma de senóides

Dadas as funções iniciais:

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha), \quad g(t) = G_m \cos(\omega t + \beta),$$

usamos a identidade trigonométrica para a soma dos cossenos:

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= F_m \cos(\omega t + \alpha) + G_m \cos(\omega t + \beta) \\ &= F_m (\cos(\omega t) \cos \alpha - \text{sen}(\omega t) \text{sen} \alpha) + G_m (\cos(\omega t) \cos \beta - \text{sen}(\omega t) \text{sen} \beta) \\ &= (F_m \cos \alpha + G_m \cos \beta) \cos(\omega t) - (F_m \text{sen} \alpha + G_m \text{sen} \beta) \text{sen}(\omega t) \\ &= a \cos(\omega t) - b \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

com:

$$a = F_m \cos \alpha + G_m \cos \beta, \quad b = F_m \text{sen} \alpha + G_m \text{sen} \beta,$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$a \cos(\omega t) - b \text{sen}(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{sen}(\omega t) \right).$$

Uma vez que os coeficientes do cosseno e do seno no segundo membro formam um par que satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$, existe um ângulo ϕ tal que:

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{sen} \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \cos(\omega t) - \text{sen} \phi \text{sen}(\omega t)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t + \phi) \\ &= H_m \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

com:

$$H_m = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right),$$

para $a = F_m \cos \alpha + G_m \cos \beta$ e $b = F_m \text{sen} \alpha + G_m \text{sen} \beta$.

Exemplo 3.1.1. Suponha que tenhamos duas funções senoidais, ambas com mesma frequência angular ω , mas com fases diferentes, sendo essas fases iguais a $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad e $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad, amplitudes iguais a $F_m = 3$ ampères e $G_m = 2$ ampères. Assim, as funções senoidais ficam descritas pelas fórmulas $f(t) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ e $g(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$. Vamos obter uma nova função $h(t)$ que represente a soma dessas duas funções, ou seja:

$$h(t) = f(t) + g(t) = H_m \cos(\omega t + \phi).$$

Para isso, vamos calcular inicialmente os coeficientes a e b utilizando as fórmulas

$$a = F_m \cos\alpha + G_m \cos\beta \text{ e } b = F_m \sin\alpha + G_m \sin\beta;$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} a = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot 0,866 + 2 \cdot 0,707 \approx 4,012$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} b = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot 0,500 + 2 \cdot 0,707 \approx 2,914$$

Agora, calculando a nova amplitude H_m :

$$H_m = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{(4,012)^2 + (2,914)^2} \approx \sqrt{24,589} \approx 4,959 \text{ volts}$$

Por fim, a nova fase ϕ será:

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{2,914}{4,012}\right) \approx \arctan(0,726) \approx 0,629 \text{ rad}$$

(observe que $a > 0$ e $b > 0$ e, assim ϕ é um arco do primeiro quadrante). Portanto, podemos reescrever a soma como:

$$f(t) + g(t) \approx 4,959 \cdot \cos(\omega t + 0,629)$$

Essa transformação mostra como duas funções senoidais com fases diferentes podem ser somadas e expressas como uma única função senoidal equivalentes.

Exemplo 3.1.2. Soma de funções senoidais com representação gráfica.

Considere as seguintes funções senoidais:

$$f(t) = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(t) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Determinar a função senoidal que representa a soma dessas duas funções. Observe que as amplitudes são $F_m = 4$ volts e $G_m = 3$ volts, enquanto que as fases são $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad

e $\beta = \frac{\pi}{6}$ rad. Para obtermos a nova função $h(t)$ tal que $h(t) = f(t) + g(t)$, precisamos primeiramente calcular os coeficientes a e b utilizando as fórmulas

$$a = F_m \cos\alpha + G_m \cos\beta \text{ e } b = F_m \sen\alpha + G_m \sen\beta :$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} a = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot 0,500 + 3 \cdot 0,866 \approx 4,598$$

$$\left. \begin{array}{l} \sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} b = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot 0,866 + 3 \cdot 0,500 \approx 4,964$$

Agora, calculando a nova amplitude H_m :

$$H_m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(4,598)^2 + (4,964)^2} = \sqrt{45,783} \approx 6,766 \text{ volts}$$

Por fim, a nova fase ϕ será:

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4,964}{4,598}\right) \approx \arctan(1,080) \approx 0,824 \text{ rad}$$

(observe que $a > 0$ e $b > 0$ e, assim ϕ é um arco do primeiro quadrante). Portanto, podemos reescrever a soma como:

$$f(t) + g(t) \approx 6,766 \cdot \cos(\omega t + 0,824)$$

No entanto, cabe ressaltar que o cálculo de $f(t) + g(t)$ na análise de circuitos elétricos em corrente alternada não segue o procedimento usual de adição de funções no domínio do tempo. No contexto da engenharia elétrica, essa operação é realizada por meio da representação fasorial das grandezas envolvidas. Para isso, vamos definir o fasor correspondente à $f(t) + g(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$.

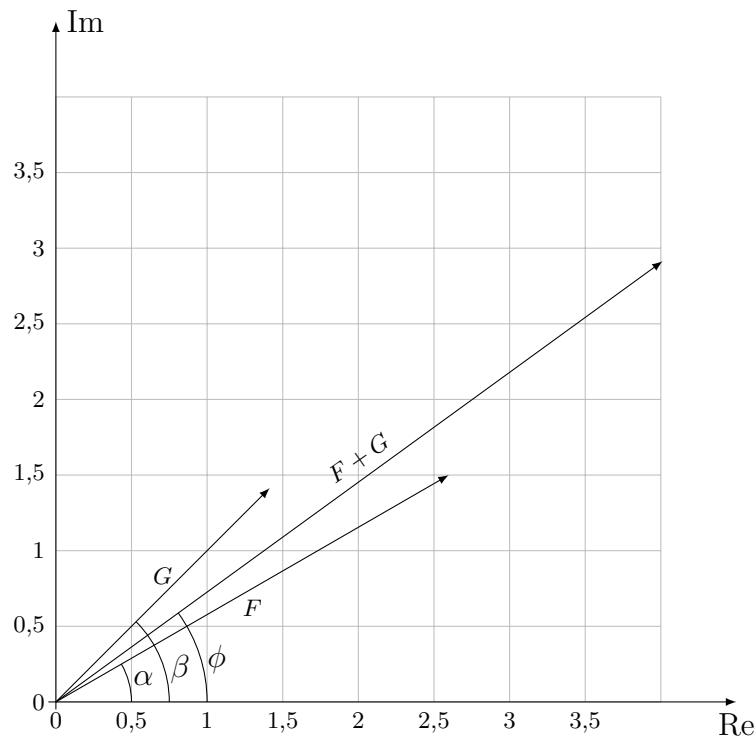
Definição

Seja $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$ uma função periódica. O fasor associado a essa função é o número complexo $F = F_m(\cos\alpha + i \sen\alpha)$, onde i representa a unidade imaginária. De forma recíproca, dado o fasor $F = F_m(\cos\alpha + i \sen\alpha)$, a função correspondente no domínio do tempo é $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$.

Observação 3.1.1. No contexto da Engenharia Elétrica e suas subáreas, é comum utilizar a letra j para representar a unidade imaginária, a fim de evitar ambiguidade com a letra i , frequentemente empregada para denotar corrente elétrica. Contudo, neste trabalho, a opção será a de manter a notação convencional da Matemática Pura, utilizando i para a unidade imaginária e o símbolo i para representar a corrente elétrica.

Na análise de circuitos elétricos e corrente alternada (CA) o somatório das funções como $f(t) + g(t)$ é realizado por meio da soma dos seus respectivos fasores F e G . Assim, a função resultante $f(t) + g(t)$ é obtida a partir da função associada ao fasor $F + G$. Uma justificativa geral para esse procedimento será apresentada ao final deste capítulo.

Figura 3.1.1 – Representação gráfica de uma soma de fasores.



Fonte: acervo do autor.

No exemplo a seguir, vamos somar as mesmas funções do exemplo [3.1.1](#) usando fasores.

Exemplo 3.1.3. Sejam $f(t) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ e $g(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$. Nesse caso, $F_m = 3$ ampères, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad, $G_m = 2$ ampères e $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad. O fasor associado à função $f(t)$ é

$$F = F_m(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) \quad \therefore \quad F = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Já o fasor associado à função $g(t)$ é $G = G_m(\cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \frac{\pi}{4}\right)$

$$G = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Assim, a soma dos fasores é:

$$F + G = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) + (\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$F + G \approx 4,012 + i \cdot 2,914 = \sqrt{4,012^2 + 2,914^2}(\cos \phi + i \cdot \sen \phi) \approx 4,959(\cos \phi + i \cdot \sen \phi),$$

ϕ é uma arco tal que $\phi = \arctan\left(\frac{2,914}{4,012}\right) \approx 0,629$ (observe que $a > 0$ e $b > 0$ e, com isso, ϕ é um arco do primeiro quadrante). Assim,

$$F + G = 4,959(\cos 0,629 + i \cdot \sen 0,629)$$

e $f(t) + g(t)$ é a função associada a esse fasor, isto é,

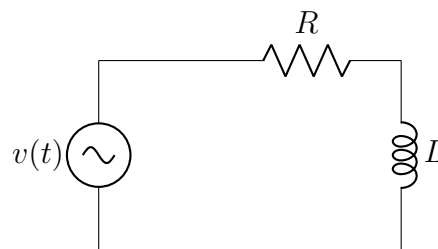
$$f(t) + g(t) \approx 4,959 \cos(\omega t + 0,629),$$

que é a mesma expressão obtida para $f(t) + g(t)$ no exemplo [3.1.1](#), sem o uso de fasores.

Observação 3.1.2. O uso de fasores constitui um método mais prático e operacional na análise de circuitos elétricos. Quando esse recurso não é utilizado, torna-se necessário memorizar as expressões correspondentes aos coeficientes a , b e ao ângulo ϕ , ou, alternativamente, repetir integralmente o procedimento analítico apresentado no início do texto. A seguir, veremos um exemplo de aplicação da representação fasorial na análise de um circuito elétrico simples.

Exemplo 3.1.4. Considere um circuito em série do tipo RL , composto por um resistor ideal e um indutor ideal conectados em série a uma fonte de tensão elétrica, conforme ilustrado na figura [3.1.2](#).

Figura 3.1.2 – Circuito RL .



Fonte: acervo do autor.

Supondo que a corrente elétrica no circuito seja dada por $i(t) = I \cos(\omega t)$ ampères, deseja-se determinar a expressão da tensão elétrica $v(t)$, em volts, aplicado ao circuito. Considere que a resistência do resistor é R ohms e a indutância do indutor é L henrys. De acordo com a teoria de circuitos em corrente alternada, a tensão elétrica sobre o resistor é dada por:

$$v_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I \cos(\omega t) \text{ volts.}$$

Já a tensão elétrica sobre o indutor é dada por:

$$v_L(t) = \omega L \cdot I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ volts.}$$

Nota-se que a corrente do resistor está em fase com a tensão sobre ele, enquanto, no indutor, a corrente está **atrasada de** $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão. Como os elementos estão conectados em série, a tensão total sobre o circuito é a soma das tensões parciais:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) \quad (\text{Lei das Tensões ou 2ª Lei de Kirchoff})$$

$$v(t) = R \cdot I \cos(\omega t) + \omega L \cdot I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Para somar essas funções, usaremos a representação fasorial:

- O fasor associado a $R \cdot I \cos(\omega t)$ é RI (real).
- O fasor associado a $\omega L \cdot I \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ é $\omega L \cdot I \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \omega L \cdot I \cdot i$ (imaginário). Portanto, o fasor da tensão total é:

$$V = RI + \omega L \cdot I \cdot i$$

Por exemplo, suponha que a corrente elétrica sobre o indutor seja dada por

$$i(t) = 5 \cos(120\pi t) \text{ ampères.}$$

Deseja-se determinar a expressão da tensão elétrica $v(t)$ aplicado ao circuito. Considere que a resistência do resistor é $R = 100$ ohms, a indutância é $L = 4$ henrys e que ω é dado em radianos por segundo. De acordo com a teoria de circuitos em corrente alternada, o fasor da tensão elétrica total será:

$$V = RI + \omega L \cdot I \cdot i = 100 \cdot 5 + 120\pi \cdot 4 \cdot 5 \cdot i = 500 + 2400\pi \cdot i$$

Calculando o módulo e o argumento desse fasor:

$$V = \sqrt{(500)^2 + (2400\pi)^2} \approx 7556,38$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2400\pi}{500}\right) \approx 1,505 \text{ rad}$$

(observe que $a > 0$ e $b > 0$ e, com isso, ϕ é um arco do primeiro quadrante). Logo, a fasor da tensão total pode ser escrito como:

$$V = 7556,38(\cos 1,505 + i \cdot \text{sen} 1,505) \text{ volts}$$

e a função da tensão no domínio do tempo é:

$$v(t) = 7556,38 \cos(120\pi t + 1,505) \text{ volts.}$$

Por que o procedimento com fasores é válida?

Ao associar um fasor $F = F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$ à função $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$, define-se uma aplicação \mathcal{F} do conjunto das funções da forma $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$ no conjunto dos números complexos (figura 3.1.3), dada por:

$$\mathcal{F}(f) = F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha).$$

1. Pode-se verificar que essa aplicação está bem definida. Com efeito, suponha que duas funções $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$ e $f'(t) = F'_m \cos(\omega t + \alpha')$ sejam iguais para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$F_m \cos(\omega t + \alpha) = F'_m \cos(\omega t + \alpha') \text{ para todo } t \text{ real.}$$

Em particular, avaliando a igualdade em dois instantes distintos:

- Para $t = 0$, obtemos:

$$F_m \cos \alpha = F'_m \cos \alpha'.$$

- Para $t = \frac{\pi}{2\omega}$, temos:

$$F_m \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = F'_m \cos\left(\alpha' + \frac{\pi}{2}\right)$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } \theta$, segue que:

$$F_m(-\text{sen } \alpha) = F'_m(-\text{sen } \alpha') \quad F_m \text{sen } \alpha' = F'_m \text{sen } \alpha'$$

Dessa forma, segue que:

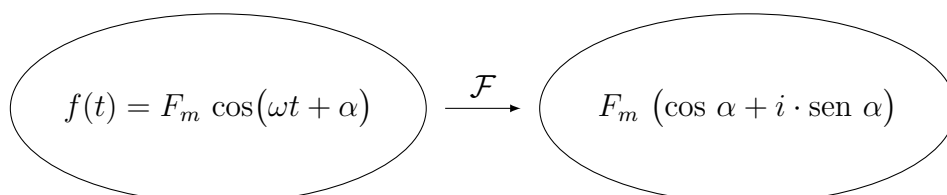
$$F'_m \cos \alpha = F'_m \cos \alpha' \text{ e } F_m \text{sen } \alpha = F'_m \text{sen } \alpha'.$$

Portanto, os fasores associados são iguais:

$$\mathcal{F}(f) = F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha) = F'_m(\cos \alpha' + i \cdot \text{sen } \alpha') = \mathcal{F}(f'),$$

O que demonstra que a aplicação \mathcal{F} está bem definida.

Figura 3.1.3 – Representação da aplicação \mathcal{F} .



Fonte: acervo do autor.

2. A função \mathcal{F} é bijetiva. De fato, ela é:

- sobrejetiva, pois, dado um número complexo $F = F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$, existe uma função $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$ tal que $\mathcal{F}(f) = F$.
- além disso, \mathcal{F} é injetiva, pois, se

$$f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha), \quad g(t) = G_m \cos(\omega t + \beta)$$

e, se $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$, ou seja,

$$F_m \cos(\omega t + \alpha) = G_m \cos(\omega t + \beta),$$

então necessariamente $F_m = G_m$ e $\alpha = \beta + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $f(t) = g(t)$, o que demonstra a injetividade.

- Assim, sendo \mathcal{F} bijetiva, ela admite inversa, dada por $\mathcal{F}^{-1}(F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)) = f$, onde $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$. Ou seja, a função associada ao fasor $F_m(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$ é precisamente $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$.

3. Vamos agora demonstrar que, se $f(t) = F_m \cos(\omega t + \alpha)$ e $g(t) = G_m \cos(\omega t + \beta)$, então $\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$. Isto é, o fasor associado à soma $f(t) + g(t)$ é igual à soma dos fasores associados a $f(t)$ e $g(t)$. De fato, como visto anteriormente, a soma $f(t) + g(t)$ pode ser expressa como $f(t) + g(t) = H_m \cos(\omega t + \phi)$, onde

$$a = F_m \cos \alpha + G_m \cos \beta,$$

$$b = F_m \text{sen } \alpha + G_m \text{sen } \beta,$$

$$H_m = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos \phi = \frac{a}{H_m} \text{ e}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{b}{H_m}$$

ou, de modo equivalente, $\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. O fasor associado à função $f(t) + g(t)$ é, portanto:

$$\mathcal{F}(f + g) = H_m(\cos \phi + i \cdot \text{sen } \phi).$$

Por outro lado, a soma dos fasores de f e g é:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g) &= F + G \\
 &= F_m (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha) + G_m (\cos \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta) \\
 &= (F_m \cos \alpha + G_m \cos \beta) + i \cdot (F_m \operatorname{sen} \alpha + G_m \operatorname{sen} \beta) \\
 &= a + i \cdot b \\
 &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\
 &= H_m \left(\frac{a}{H_m} + i \cdot \frac{b}{H_m} \right) \\
 &= H_m (\cos \phi + i \cdot \operatorname{sen} \phi)
 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$. Como consequência,

$$f + g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f + g)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)),$$

ou seja, a função $f(t) + g(t)$ é exatamente aquela associada à soma dos fasores de f e g .

4 Aplicações dos números complexos na trigonometria

4.1 Representação polar dos números complexos

A representação polar dos números complexos possibilita uma interpretação geométrica da multiplicação dos complexos, a qual analisaremos a seguir. Inicialmente convém registrar algumas identidades trigonométricas fundamentais. Para qualquer número real x , tem-se:

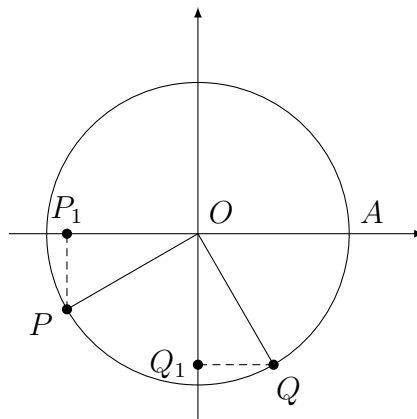
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

A validade dessas afirmações pode ser confirmada pela figura [4.1.1](#). Nela observa-se que os triângulos OPP_1 e OQQ_1 são congruentes pelo caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o), uma vez que $Q\hat{O}Q_1 \equiv P\hat{O}P_1$, $OP \equiv OQ$ (pois ambos correspondem ao raio da circunferência unitária), e $O\hat{Q}_1Q \equiv O\hat{P}_1P$. Como consequência imediata, obtemos (em módulo):

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= |QQ_1| = |PP_1| = |\operatorname{sen} x|, \\ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= |OQ_1| = |OP_1| = |\cos x|. \end{aligned}$$

Portanto, as identidades trigonométricas acima ficam demonstradas em valor absoluto. Ressalta-se, entretanto, que, como x e $x + \frac{\pi}{2}$ situam-se sempre em quadrantes adjacentes, os sinais das funções devem ser ajustados de acordo com o quadrante considerado. Ainda que a ilustração tenha sido construída no terceiro quadrante, o raciocínio desenvolvido é válido em qualquer região do plano cartesiano.

Figura 4.1.1 – Triângulos congruentes em uma circunferência unitária.



Fonte: livro [\[2\]](#) das referências.

Vamos agora interpretar geometricamente a multiplicação de dois números complexos unitários, isto é, de módulo igual a 1. Um complexo desse tipo pode ser expresso como $w_1 = \cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1$, o qual corresponde a um ponto no círculo unitário S . Consideremos a multiplicação de w_1 pelo número imaginário i :

$$\begin{aligned} i \cdot w_1 &= i \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1) \\ &= -\operatorname{sen} \theta_1 + i \cdot \cos \theta_1 \\ &= \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

Logo, multiplicar w_1 por i equivale a aplicar uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$ radianos no ponto w_1 . Seja agora outro número complexo unitário $w_2 = \cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2$. Então:

$$w_2 \cdot w_1 = (\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2) \cdot w_1 = (\cos \theta_2)w_1 + (\operatorname{sen} \theta_2)i \cdot w_1.$$

Isso mostra que o vetor correspondente a $w_2 \cdot w_1$ é a soma (diagonal do paralelogramo) dos vetores perpendiculares $(\cos \theta_2)w_1$ e $(\operatorname{sen} \theta_2)i \cdot w_1$. Se adotarmos um sistema de coordenadas xOy no qual o eixo Ox coincide com Ow_1 (como na Figura [4.1.2](#)), concluímos que o ângulo entre w_1 e $w_2 \cdot w_1$ é precisamente θ_2 .

Dessa forma, conclui-se que multiplicar dois números complexos unitários w_1 e w_2 corresponde, geometricamente, a girar um deles em um ângulo positivo igual ao argumento do outro. No caso em que os complexos não são unitários, escrevemos:

$$z_1 = \rho_1 \cdot w_1, \quad z_2 = \rho_2 \cdot w_2, \quad \text{com} \quad |w_1| = |w_2| = 1.$$

Assim, o produto assume a expressão:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot w_1) \cdot (\rho_2 \cdot w_2) = \rho_1 \rho_2 w_1 w_2.$$

Ou seja, primeiro realizamos a multiplicação dos complexos unitários correspondentes, como descrito, e depois multiplicamos o resultado pelo número real $\rho_1 \rho_2$.

A principal consequência dessa interpretação é a seguinte proposição, que pode ser considerada o Teorema Fundamental da Trigonometria.

Teorema 4.1.1. (Fórmulas de adição da Trigonometria) Se x e y são números reais quaisquer. Então, são válidas as seguintes identidades:

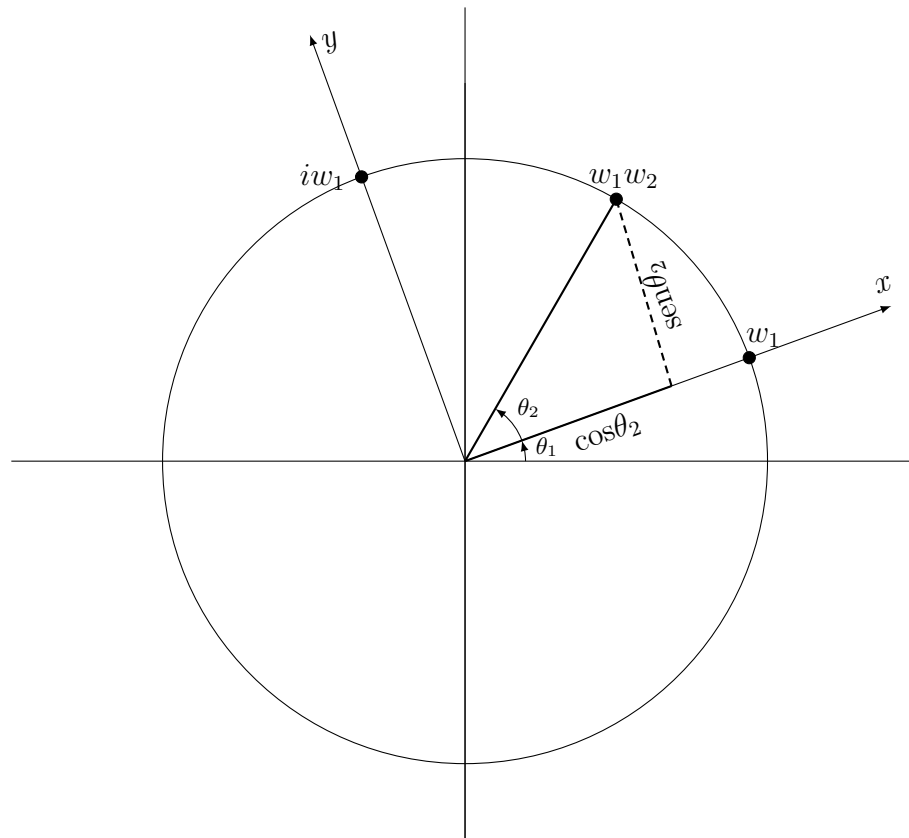
$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \end{aligned}$$

Demonstração

Suponhamos inicialmente que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Definimos:

$$w_1 = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad w_2 = \cos y + i \cdot \operatorname{sen} y.$$

Figura 4.1.2 – Representação para demonstrar o seno e o cosseno da soma de dois ângulos.



Fonte: livro [2] das referências.

Pela interpretação geométrica da multiplicação de números complexos, o produto w_1w_2 é obtido aplicando ao ponto w_1 uma rotação positiva de ângulo y . Assim:

$$w_1w_2 = \cos(x + y) + i \cdot \text{sen}(x + y) \quad (4.1)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} w_1w_2 &= (\cos x + i \text{sen } x)(\cos y + i \text{sen } y) \\ &= (\cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y) + i(\text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Comparando as partes reais e imaginárias de (4.1) e (4.2), obtemos as fórmulas de adição:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x.$$

Portanto, o teorema está demonstrado para o caso particular. Para x e y arbitrários, escolhamos inteiros k e m tais que

$$0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi, \quad 0 \leq y + 2m\pi = y' < 2\pi.$$

Por definição das funções trigonométricas periódicas, tem-se:

$$\cos x = \cos x', \quad \text{sen } x = \text{sen } x', \quad \cos y = \cos y', \quad \text{sen } y = \text{sen } y'$$

Além disso, segue-se imediatamente que:

$$\cos(x + y) = \cos(x' + y'), \quad \text{sen}(x + y) = \text{sen}(x' + y').$$

Como as relações já foram demonstradas para x' e y' , segue-se que valem também para quaisquer x e y reais.

A partir do Teorema Fundamental da Trigonometria decorre um vasto conjunto de identidades trigonométricas. Contudo, não é recomendável tentar memorizar todas elas, sendo suficiente conhecer as fórmulas fundamentais, das quais as demais se deduzem.

Outra aplicação relevante da fórmula de De Moivre é o cálculo de raízes de números complexos. Por exemplo, vamos achar as raízes cúbicas de $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Primeiro, escrevemos o número complexo na sua forma polar:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},$$

tomando o cuidado de incluir todas as determinações do argumento z . Assim, as raízes cúbicas de z são da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Calculando explicitamente as raízes, tem-se que os possíveis valores de w_k são:

- Para $k = 0$,

$$w_0 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

- Para $k = 1$,

$$w_1 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$

- Para $k = 2$,

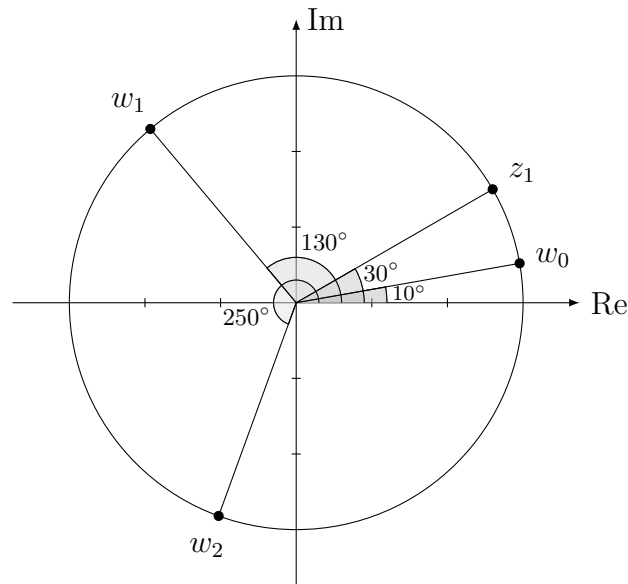
$$w_2 = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{13\pi}{9}\right)$$

- Para $k = 3$,

$$\begin{aligned} w_3 &= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{9}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{9}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right) = w_0 \end{aligned}$$

Observe que a partir de $k = 3$ as raízes começam a se repetir. O mesmo pode ser dito para valores negativos de k , pois para $k = -1$, obtemos w_2 , para $k = -2$, obtemos w_1 e a partir daí recomeça a repetição. Assim, concluímos que as demais soluções se repetem de modo que existem exatamente três raízes cúbicas distintas w_0, w_1 e w_2 , dispostas sobre o círculo unitário com separação angular de $\frac{2\pi}{3}$ radianos, conforme figura 4.1.3.

Figura 4.1.3 – Representação gráfica das raízes cúbicas do número complexo $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$.



Fonte: acervo do autor.

De modo geral, se

$$z = \cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi),$$

então as raízes n -ésimas w_k de z são dadas por:

$$w_k = \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Seguindo um raciocínio similar ao do exemplo acima, é possível notar que os valores $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ dão raízes $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ distintas, correspondentes a ângulos

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

respectivamente. Já para os valores restantes, $k = n, n + 1, \dots$, os ângulos começam a se repetir dando

$$\frac{\theta}{n} + 2\pi, \frac{\theta}{n} + 2\pi + \frac{2\pi}{n}, \dots,$$

respectivamente. Além disso, os valores negativos de k não fornecem nada além das raízes já obtidas. Conclui-se então que um número complexo possui exatamente n raízes de ordem n .

Neste outro exemplo, vamos obter as raízes quintas do número 1. Esse número é representado na sua forma polar por $1 = \cos(2k\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(2k\pi)$. Uma raiz quintupla de 1 é da forma

$$w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right), \text{ com } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Assim, obtemos os seguintes valores:

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

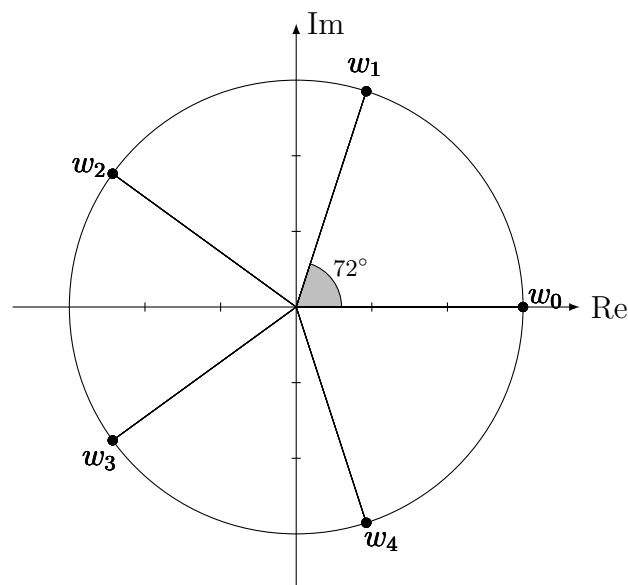
$$w_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$w_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

Essas raízes se distribuem uniformemente sobre o círculo unitário, dividindo-o em cinco partes iguais (figura [4.1.4](#)).

Figura 4.1.4 – Representação das raízes quintuplas da unidade.



Fonte: acervo do autor.

Generalizando, as n raízes n -ésima da unidade dividem o círculo unitário em n arcos de mesma medida. A seguir, apresentaremos uma alternativa para a dedução da Lei do Cosseno e da Lei dos Senos.

Teorema 4.1.2. (Lei do Cosseno) Em um triângulo ABC qualquer, é válido a seguinte relação:

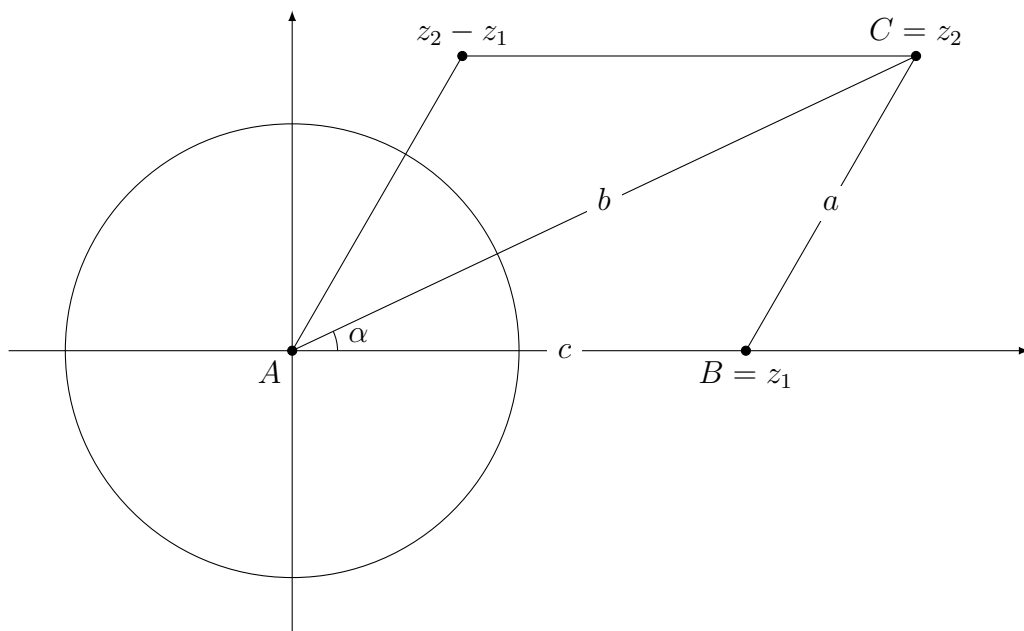
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

onde a , b e c são as medidas dos comprimentos dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C .

Demonstração

Escolhemos um sistema de coordenadas xOy de modo que A coincida com a origem O e que o lado AB esteja sobre o eixo real. Assim, os pontos podem ser representados por números complexos: $z_1 = \rho_1$, representado por B , e $z_2 = \rho_2(\cos \alpha + i \cdot \sen \alpha)$, representado por C , conforme a figura 4.1.5, onde $\rho_1 = c$ e $\rho_2 = b$.

Figura 4.1.5 – Representação gráfica da lei dos cossenos



Fonte: livro [2] das referências.

Segue que: $|z_1 - z_2|^2 = a^2$ e

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_2 - z_1) \cdot (\overline{z_2 - z_1}) = (z_2 - z_1) \cdot (\overline{z_2} - \overline{z_1}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}) \end{aligned}$$

Como $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = c^2$, $z_2 \overline{z_2} = |z_2|^2 = b^2$ e, além disso,

$$z_2 \overline{z_1} = \rho_2(\cos \alpha + i \cdot \sen \alpha) \cdot \rho_1 = \rho_1 \rho_2(\cos \alpha + i \cdot \sen \alpha) \text{ e}$$

$$z_1 \bar{z}_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \alpha - i \cdot \text{sen } \alpha)$$

temos $z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 = \rho_1 \rho_2 (2 \cos \alpha)$ e, portanto,

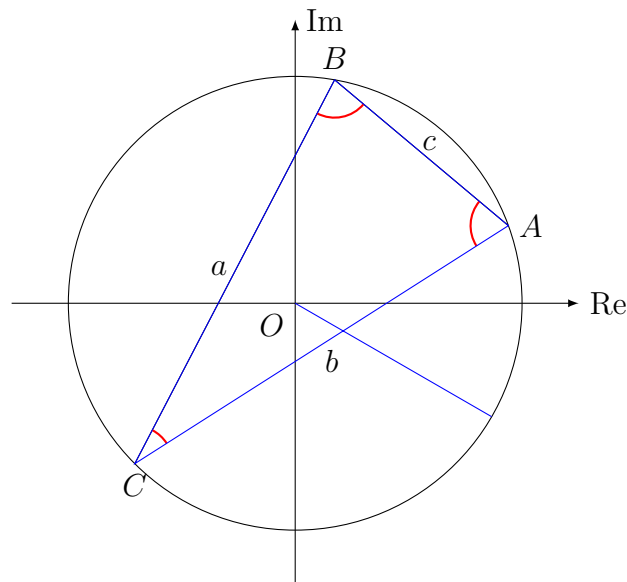
$$|z_1 - z_2|^2 = a^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Teorema 4.1.3. (Lei dos Senos) Em um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de raio R , com lados $a = BC$, $b = AC$ e $c = BA$ e ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , é válida a seguinte relação:

$$\frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen} \hat{C}} = 2R.$$

Figura 4.1.6 – Representação gráfica da lei dos senos.



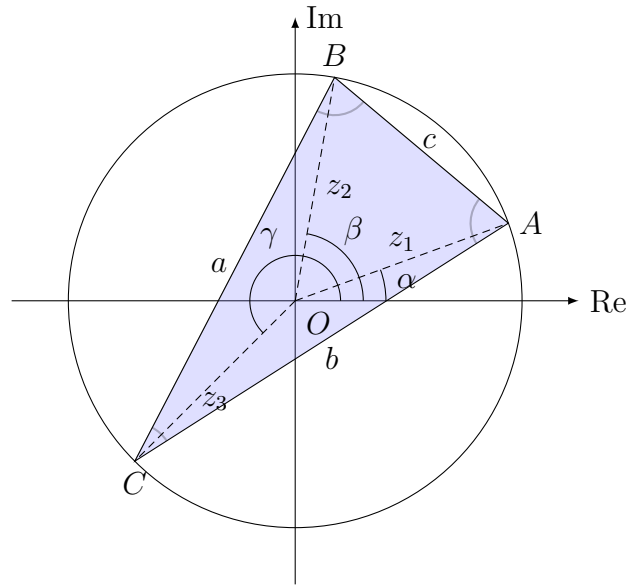
Fonte: acervo do autor.

Demonstração

Considere o ponto O como sendo o centro da circunferência circunscrita na origem do plano complexo, de raio igual a R e represente os vértices por números complexos na forma polar, sendo A o afixo de $z_1 = R(\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$, B o afixo de $z_2 = R(\cos \beta + i \text{sen } \beta)$ e C o afixo de $z_3 = R(\cos \gamma + i \text{sen } \gamma)$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. (Os ângulos α, β, γ correspondem às medidas dos ângulos formados pelos raios OA , OB e OC com o eixo real positivo, contados no sentido anti-horário). A figura 4.1.7 ilustra isso.

O lado oposto ao ângulo \hat{A} é a corda BC ; seu comprimento é

$$a = |BC| = |C - B| = R|(\cos \gamma - \cos \beta) + i(\text{sen } \gamma - \text{sen } \beta)|.$$

Figura 4.1.7 – Números complexos na forma polar em função de R , α , β e γ .


Fonte: acervo do autor.

Aplicando as identidades trigonométricas da diferença de dois cossenos e a diferença de dois senos, tem-se

$$\cos \gamma - \cos \beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \beta = 2\cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right)$$

e substituindo em $C - B$, obtemos:

$$\begin{aligned} C - B &= R \cdot \left[-2\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) + 2 \cdot i \cdot \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \right] \\ &= 2R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Com isso, o módulo será:

$$|C - B| = 2R \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \right| \cdot \left| -\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) + i \cdot \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \right|. \quad (4.3)$$

Uma vez que

$$|-\operatorname{sen} \alpha + i \cdot \cos \alpha|^2 = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1,$$

segue que

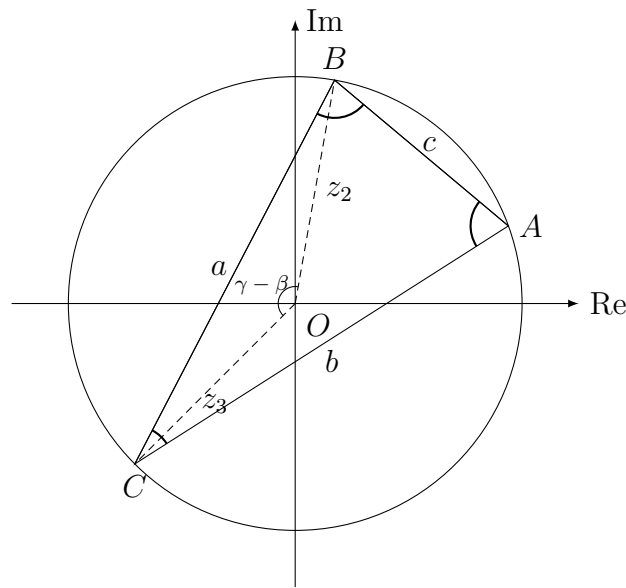
$$a = |C - B| = 2R \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \right| \cdot \underbrace{\left| -\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \right|}_1$$

$$a = 2R \cdot \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma - \beta}{2} \right) \right|$$

Resta relacionar o ângulo $\frac{\gamma - \beta}{2}$ com o ângulo interno \hat{A} . O ângulo central subtendido pela corda BC é $B\hat{O}C = |\gamma - \beta|$ (figura 4.1.8). Pela propriedade dos ângulos inscritos, o ângulo inscrito em \hat{A} que subtende a mesma corda satisfaz

$$\hat{A} = \frac{1}{2}B\hat{O}C = \frac{1}{2}|\gamma - \beta|.$$

Figura 4.1.8 – Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito.



Fonte: acervo do autor.

Como $0 < \hat{A} < \pi$, tem-se $\operatorname{sen} \hat{A} = \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma - \beta}{2} \right) \right|$. Portanto, $a = 2R \operatorname{sen} \hat{A}$. Usando esse mesmo procedimento para as cordas CA e AB , obtemos:

$$b = 2R \operatorname{sen} \hat{B} \quad \text{e} \quad c = 2R \operatorname{sen} \hat{C}.$$

Dividindo cada igualdade por $\operatorname{sen} \hat{A}$, $\operatorname{sen} \hat{B}$, e $\operatorname{sen} \hat{C}$, respectivamente, conclui-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R,$$

o que é exatamente a Lei dos Senos.

Outra forma de demonstrar Uma outra demonstração pode ser dada com o auxílio de vetores, não abrindo mão do uso dos números complexos. Considere um triângulo qualquer ABC , com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Escolhemos um sistema de coordenadas xOy de modo que o vértice A coincida com a origem O e B esteja sobre o eixo positivo Ox positivo. Vamos admitir, sem perda de generalidades, que o ponto C esteja no semiplano superior, conforme a figura 4.1.8 (o caso em que C está no semiplano inferior é similar). Sejam

$z_1 = c$ e $z_2 = b(\cos\hat{A} + i \cdot \text{sen}\hat{A})$ os números complexos cujos afixos são, respectivamente, os pontos B e C .

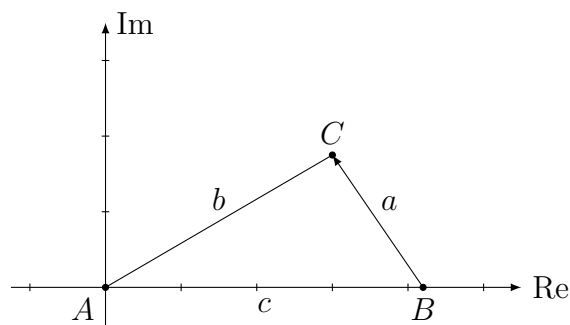
Tem-se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_2} - 1 = 0 \quad (4.4)$$

No entanto, observe que o vetor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ tem módulo igual a a e argumento $\pi - \hat{B}$ radianos. Sendo assim,

$$\overrightarrow{z_1 z_2} = z_2 - z_1 = a[\cos(\pi - \hat{B}) + i \cdot \text{sen}(\pi - \hat{B})] \quad (4.5)$$

Figura 4.1.9 – Representação gráfica da lei dos senos por meio de vetores.



Fonte: acervo do autor.

Substituindo (4.5) em (4.4), segue que:

$$\frac{a[\cos(\pi - \hat{B}) + i \cdot \text{sen}(\pi - \hat{B})]}{b(\cos\hat{A} + i \cdot \text{sen}\hat{A})} + \frac{c}{b(\cos\hat{A} + i \cdot \text{sen}\hat{A})} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{b}[\cos(\pi - \hat{B} - \hat{A}) + i \cdot \text{sen}(\pi - \hat{B} - \hat{A})] + \frac{c}{b}[\cos(-\hat{A}) + i \cdot \text{sen}(-\hat{A})] - 1 = 0$$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Rightarrow \hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$ e lembrando que $\cos(-\hat{A}) = \cos(\hat{A})$ e $\text{sen}(-\hat{A}) = -\text{sen}(\hat{A})$, segue que:

$$\frac{a}{b}[\cos\hat{C} + i \cdot \text{sen}\hat{C}] + \frac{c}{b}[\cos\hat{A} - i \cdot \text{sen}\hat{A}] - 1 = 0$$

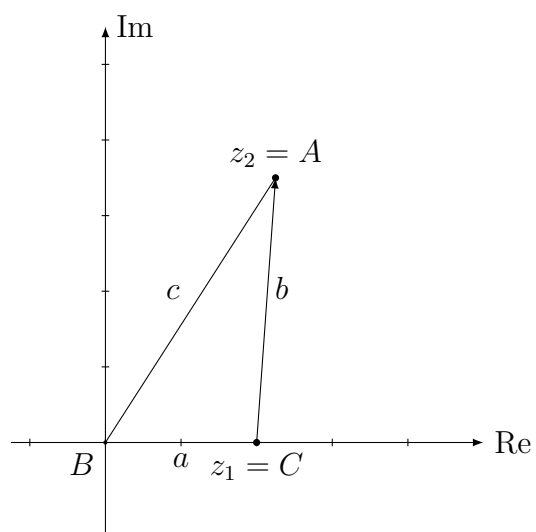
Igualando a parte imaginária em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\frac{a}{b}\text{sen}\hat{C} - \frac{c}{b}\text{sen}\hat{A} = 0 \Rightarrow a\text{sen}\hat{C} - c\text{sen}\hat{A} = 0 \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}.$$

Escolhendo agora o sistema de coordenadas xOy de modo que B coincida com O e C sobre o eixo Ox positivo e procedendo de maneira análoga, mostra-se que

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\hat{A}}.$$

Figura 4.1.10 – Representação gráfica da lei dos senos por meio de vetores.



Fonte: acervo do autor.

5 Fórmulas para equações cúbicas e quárticas

5.1 Equações cúbicas e a Fórmula de Cardano

As equações cúbicas, também conhecidas como equações de 3° grau são equações polinomiais da forma geral:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0)$$

Esse tipo de equação foi estudado desde a Antiguidade, mas sua solução exata somente foi descoberta no século XVI, pelos matemáticos italianos Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia e sistematizada por Girolano Cardano em sua obra *Ars Magna* (1545). A chamada fórmula de Cardano representa um marco na história da álgebra, abrindo caminho para o desenvolvimento dos números complexos.

5.2 Redução da equação cúbica

O primeiro passo consiste em eliminar o termo quadrático. Seja a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a \neq 0). \quad (5.1)$$

Dividindo toda a equação (5.1) por a , obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Em seguida, fazemos a mudança de variável:

$$x = y + k \quad (5.2)$$

Substituindo em (5.1) e fazendo o desenvolvimento, segue que:

$$(y + k)^3 + \frac{b}{a}(y + k)^2 + \frac{c}{a}(y + k) + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + \left(3k + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3k^2 + \frac{2bk + c}{a}\right)y + \left(k^3 + \frac{bk^2 + ck + d}{a}\right) = 0$$

e, com isso, devemos ter

$$3k + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow k = -\frac{b}{3a} \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2), então

$$x = y - \frac{b}{3a}$$

Essa substituição tem o objetivo de eliminar o termo em y^2 , reduzindo a equação a chamada forma reduzida da cúbica:

$$y^3 + py + q = 0, \quad (5.4)$$

onde

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Considere agora

$$y = u + v \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.4) e desenvolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q &= 0. \end{aligned}$$

Impondo a condição de que $3uv + p = 0$, a última equação recai no sistema

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad (5.6)$$

Note que u^3 e v^3 são raízes da equação

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{3} = 0 \quad (5.7)$$

uma vez que a soma é $-q$ e o produto é $-\frac{p^3}{3}$. Resolvendo essa equação, obtemos as raízes

$$z_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Assim,

$$u^3 = z_1 \Rightarrow u = \sqrt[3]{z_1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{z_1} \\ u_2 = w\sqrt[3]{z_1} \\ u_3 = w^2\sqrt[3]{z_1} \end{cases} \quad v^3 = z_2 \Rightarrow v = \sqrt[3]{z_2} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt[3]{z_2} \\ v_2 = w^2\sqrt[3]{z_2} \\ v_3 = w\sqrt[3]{z_2} \end{cases}$$

onde $w = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade, conforme obtido no exemplo [2.2.11\(c\)](#).

Segue-se então que a equação (5.4) possui como soluções, as chamadas fórmulas de Cardano:

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} \\ &= \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ y_2 &= u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{z_1} + w^2\sqrt[3]{z_2} \\ &= w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ y_3 &= u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{z_1} + w\sqrt[3]{z_2} \\ &= w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

Retornando à equação (5.1), obtemos para x as raízes:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

O valor

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

é chamado discriminante da cúbica, e determina a natureza das raízes:

- se $\Delta > 0$: uma raiz é real e duas raízes são complexas conjugadas e não reais;
- se $\Delta = 0$: todas as raízes reais, pelo menos duas iguais;
- se $\Delta < 0$: três raízes reais distintas, (caso em que surgem números complexos intermediários – o chamado caso irredutível)

A fórmula de Cardano constitui um dos maiores avanços da álgebra renascentista, pois não apenas ofereceu a primeira solução geral para equações cúbicas, mas também forçou os matemáticos a aceitar o uso dos números complexos, mesmo quando o resultado final era real. Esse episódio histórico marcou o início da álgebra moderna. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 5.2.1. (O caso $\Delta > 0$).

Vamos resolver a equação $x^3 - 6x + 8 = 0$.

Solução

Observe que a equação já está na forma reduzida $y^3 + py + q = 0$ com $p = -6$ e $q = 8$. O discriminante é

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = 16 - 8 > 0.$$

Pelo método de Cardano, tomemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{8}{2} + \sqrt{8} = -4 + 2\sqrt{2} \quad \therefore \quad u = \sqrt[3]{-4 + 2\sqrt{2}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{8}{2} - \sqrt{8} = -4 - 2\sqrt{2} \quad \therefore \quad v = \sqrt[3]{-4 - 2\sqrt{2}}$$

Então, a raiz real é:

$$x_1 = u + v = \sqrt[3]{-4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-4 - 2\sqrt{2}}$$

e as outras duas raízes obtêm-se multiplicando u e v pelas raízes cúbicas da unidade

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} :$$

$$x_2 = wu + w^2v, \quad x_3 = w^2u + wv,$$

$$x_2 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-4 + 2\sqrt{2}} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-4 - 2\sqrt{2}}$$

$$x_3 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-4 + 2\sqrt{2}} + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-4 - 2\sqrt{2}}$$

Exemplo 5.2.2. (o caso $\Delta < 0$)

Vamos agora resolver a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Solução

Observe que a equação também já se encontra na forma reduzida, com $p = -3$ e $q = 1$. O valor do discriminante, nesse caso, será:

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4} < 0.$$

Nesse caso, é mais conveniente representar u^3 e v^3 na sua forma polar. Para isso, sejam

$$U = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de modo que $\arg(U) \in [-\pi, \pi]$ e $\arg(V) \in [-\pi, \pi]$.

Observe que

$$|U| = |V| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \arg(U) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{e} \quad \arg(V) = \frac{-2\pi}{3} \text{ rad}.$$

Isso significa que as formas polares de U e V são

$$U = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{e} \quad V = \left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{-2\pi}{3} \right)$$

Segue, da Segunda Fórmula de De Moivre, para $k \in \{0, 1, 2\}$ e $l \in \{0, 1, 2\}$:

$$u_k = \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right) \quad \text{e}$$

$$v_l = \left(\cos \frac{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right),$$

ou seja,

$$u_k = \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) \quad \text{e}$$

$$v_l = \cos \left(\frac{-2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left(\frac{-2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right).$$

Fazendo $k = l = 0$, obtemos a raiz real

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + v_0 = \cos \frac{2\pi}{9} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{-2\pi}{9} + i \cdot \text{sen} \frac{-2\pi}{9} \\ &= \cos \frac{2\pi}{9} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} - i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{9} \\ &= 2\cos \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

Para os demais valores de k e l teremos as outras duas raízes, que são

$$x_1 = 2\cos \frac{8\pi}{9} \quad \text{e} \quad x_2 = 2\cos \frac{14\pi}{9}.$$

Logo, as raízes da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ são:

$$x_0 = 2\cos \frac{2\pi}{9}, \quad x_1 = 2\cos \frac{8\pi}{9} \quad \text{e} \quad x_2 = 2\cos \frac{14\pi}{9}$$

5.2.1 Equações quárticas

Resolveremos as equações quárticas usando um método tradicional, que envolve a transformação da equação quártica dada em uma equação que implica uma igualdade de dois quadrados. Para demonstrar esse método, considere a equação quártica

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (a \neq 0) \tag{5.8}$$

A fim de simplificar os cálculos, suponha que $a = 1$. Para os casos em que $a \neq 1$ e não nulo, bastará dividir toda a equação por a . Vamos manter os dois primeiros termos no primeiro membro, transferindo os demais para o segundo membro. Em seguida, vamos completar o quadrado do primeiro membro.

$$\begin{aligned} x^4 + bx^3 &= -cx^2 - dx - e \\ (x^2)^2 + 2\frac{bx}{2}x^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 &= \left(\frac{bx}{2}\right)^2 - cx^2 - e \\ \left(x^2 + \frac{b}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{b^2}{4} - c\right)x^2 - dx - e \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se o segundo membro dessa equação for um quadrado perfeito, sua resolução se reduzirá à resolução de duas equações quadráticas. Nosso objetivo então será, assim, transformar o segundo membro em um quadrado perfeito, de modo que não seja desfeito o quadrado perfeito obtido no primeiro membro. Para isso, vamos adicionar a ambos os membros de (5.9) a expressão $z^2 + 2z\left(x^2 + \frac{b}{2}x\right)$. Segue que

$$\begin{aligned} z^2 + 2z\left(x^2 + \frac{b}{2}x\right) + \left(x^2 + \frac{b}{2}x\right)^2 &= z^2 + 2z\left(x^2 + \frac{b}{2}x\right) + \left(\frac{b^2}{4} - c\right)x^2 - dx - e \\ \left(z^2 + x^2 + \frac{b}{2}x\right)^2 &= \left(2z + \frac{b^2}{4} - c\right)x^2 + (bz - d)x + (z^2 - e) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Precisamos agora descobrir para que valores de z o segundo membro de (5.10) se torne, de fato, em um quadrado perfeito. Mas para que isso aconteça, o discriminante do segundo membro desta última equação (em termos de x) precisa ser nulo. Isto é,

$$\begin{aligned} (bz - d)^2 - 4 \cdot \left(2z + \frac{b^2}{4} - c\right) \cdot (z^2 - e) &= 0 \\ 8z^3 - 4cz^2 + (2bd - 8e)z + (4ce - eb^2 - d^2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Escolhendo z como uma das raízes da equação (5.11), tem-se a partir da equação (5.10)

$$\left(z + x^2 + \frac{b}{2}x\right)^2 = (uz + v)^2 \quad (5.12)$$

com u e v apropriados. A resolução dessa equação pode ser obtida a partir da solução das equações quadráticas seguintes:

$$z + x^2 + \frac{b}{2}x = uz + v \quad \text{e} \quad z + x^2 + \frac{b}{2}x = -(uz + v)$$

Uma vez que a equação (5.8) é equivalente à equação (5.12), concluímos que uma equação do quarto grau pode ser resolvida reduzindo-a a equações de segundo e terceiro graus.

Exemplo 5.2.3. Vamos resolver a equação $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$.

Solução

Inicialmente, precisamos isolar os termos de terceiro e quarto graus no primeiro membro e, em seguida, completar seu quadrado.

$$\begin{aligned}x^4 - 2x^3 &= x^2 + 2x + 2 \\(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 &= 2x^2 + 2x + 2 \\(x^2 - x)^2 &= 2x^2 + 2x + 2\end{aligned}$$

Adicionando $z^2 + 2z(x^2 - x)$ a ambos os lados dessa última equação, segue que

$$\begin{aligned}z^2 + 2z(x^2 - x) + (x^2 - x)^2 &= z^2 + 2z(x^2 - x) + 2x^2 + 2x + 2 \\(z + x^2 - x)^2 &= (2z + 2)x^2 + (2 - 2z)x + (2 + z^2)\end{aligned}\quad (5.13)$$

Para que o trinômio do segundo membro de (5.13) (em termos de x) seja quadrado perfeito, seu discriminante precisa ser nulo. Assim:

$$\begin{aligned}(2 - 2z)^2 - 4 \cdot (2z + 2) \cdot (2 + z^2) &= 0 \\z^3 + \frac{z^2}{2} + 3z + \frac{3}{2} &= 0\end{aligned}$$

Fazendo a substituição

$$z = y - \frac{1}{6}\quad (5.14)$$

obtém-se a equação cúbica reduzida

$$y^3 + \frac{35}{12}y + \frac{109}{108} = 0$$

cuja raiz, a partir da Fórmula de Cardano, é:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt[3]{-\frac{109}{216} + \sqrt{\left(\frac{108}{216}\right)^2 + \left(\frac{35}{36}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{109}{216} - \sqrt{\left(\frac{108}{216}\right)^2 + \left(\frac{35}{36}\right)^3}} \\y &= \sqrt[3]{-\frac{109}{216} + \frac{13}{12}} + \sqrt[3]{-\frac{109}{216} - \frac{13}{12}} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

De (5.14) tem-se

$$z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

Substituindo em (5.13)

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{2} + x^2 - x\right)^2 &= (-1 + 2)x^2 + (2 + 1)x + \left(2 + \frac{1}{4}\right) \\ \left(-\frac{1}{2} + x^2 - x\right)^2 &= x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2\end{aligned}$$

onde

$$-\frac{1}{2} + x^2 - x = x + \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} + x^2 - x = -\left(x + \frac{3}{2}\right)$$
$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 1 = 0$$

Resolvendo essas duas equações quadráticas, finalmente obtemos as raízes

$$1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, i, -i.$$

6 Conclusão

O desenvolvimento apresentado neste trabalho mostrou que o conjunto dos números complexos vai muito além de uma simples extensão dos números reais. Eles surgem da necessidade de resolver problemas algébricos, com encontrar as raízes de equações quadráticas com discriminante Δ negativo, além de se apresentarem como uma ferramenta versátil e poderosa em diversas áreas da ciência.

Por meio da exposição de suas propriedades algébricas, representações geométricas e aplicações trigonométricas, tornou-se evidente como esse tema enriquece o âmbito matemático. A análise prática de circuitos elétricos, assim como a solução de equações cúbicas e quárticas, evidenciou a importância dos números complexos para o avanço tecnológico e científico.

Dessa forma, conclui-se que os números complexos desempenham um papel fundamental no ensino e na pesquisa, integrando rigor teórico e aplicabilidade. Mais do que uma construção abstrata, eles representam a capacidade da Matemática de expandir seus próprios limites e fornecer soluções criativas e eficazes para problemas que, de outra forma, permaneceriam sem resposta.

Referências

- [1] *Coleção Matemática DANTE*. L. R. 1^a Ed. São Paulo.
- [2] *Trigonometria, Números Complexos* DO CARMO, M. P.; MORGADO, A.C.; WAGNER, E. Editora SBM, 3^a edição.
- [3] *Curso de Álgebra* HEFEZ, A.; vol. II, Notas preliminares.
- [4] *Fundamentos da Matemática Elementar*. IEZZI, G. vol. 6. Ed. Atual, 8^a edição.
- [5] *A Matemática do Ensino Médio* LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, A.C. vol. 3. Editora SBM, 6^a edição.
- [6] *História da Matemática* BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C. Ed. Blucher, 3^a edição.
- [7] *Polinômios e Equações Algébricas* HEFEZ, A.; TORRES, M.L. – Coleção PROFMAT. 1^a edição.