UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS, NATURAIS E DA SAÚDE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, EDUCAÇÃO BÁSICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

MYLENA SIMÕES CAMPOS

A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS COM ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

ALEGRE

2023

MYLENA SIMÕES CAMPOS

A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS COM ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores do Centro de Ciências Exatas Naturais e da Saúde da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores, na área de concentração: Ensino de ciências naturais e matemática.

Orientador: Doutor Jorge Henrique Gualandi

ALEGRE
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

C198g

Campos, Mylena Simões, 1998-
A generalização de padrões matemáticos com estudantes do ensino fundamental / Mylena Simões Campos. - 2023.
146 f. : il.

Orientador: Jorge Henrique Gualandi.
Dissertação (Mestrado em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde.

1. Álgebra. 2. Generalização de padrões matemáticos. 3. Pensamento algébrico. 4. Ensino fundamental. I. Gualandi, Jorge Henrique. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde. III. Título.

CDU: 37

MYLENA SIMÕES CAMPOS

A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS COM ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores do Centro de Ciências Exatas Naturais e da Saúde da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores, na área de concentração: Ensino de ciências naturais e matemática.

Orientador: Doutor Jorge Henrique Gualandi

Aprovado em 20 de junho de 2023

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Jorge Henrique Gualandi
Universidade Federal do Espírito Santo

____

Profa. Dra. Alana Nunes Pereira de Oliveira
Universidade Federal do Espírito Santo

____

Profa. Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Instituto Federal do Espírito Santo

Emitido em 30/08/2023

FOLHA DE ROSTO Nº 64/2023 - CAI-CCLM (11.02.18.01.08.02.03)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 30/08/2023 08:31)
JORGE HENRIQUE GUALANDI
PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO
CAI-CCLM (11.02.18.01.08.02.03)
Matrícula: 1811993

(Assinado digitalmente em 31/08/2023 00:21)
MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA
PROFESSOR DO ENSINO BASICO TECNICO E TECNOLOGICO
VIT-CM (11.02.35.01.09.02.03)
Matrícula: 297968

Visualize o documento original em https://sipac.ifes.edu.br/documentos/ informando seu número: **64**, ano: **2023**, tipo: **FOLHA DE ROSTO**, data de emissão: **30/08/2023** e o código de verificação: **f38bbbe708**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
ALANA NUNES PEREIRA DE OLIVEIRA - SIAPE 2026712
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - DMPA/CCENS
Em 31/08/2023 às 13:28

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/784284?tipoArquivo=O

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, por todos os conselhos e apoio nesses dois anos desafiantes e intensos!

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as minhas conquistas.

Aos meus pais, por todo incentivo de sempre. Como vocês são importantes em minha vida!

À minha família e aos meus amigos, pelas palavras positivas e por terem entendido minha ausência nesse período de estudo!

Ao professor e orientador, doutor Jorge Henrique Gualandi, por todos os ensinamentos, conselhos, dedicação e paciência. Obrigada por ter-me convidado a perceber a matemática como a ciência dos padrões!

À colega Gisely, com quem dividi tantos momentos tensos e de angústia. Obrigada pela sua companhia!

Às colegas Andressa, Hellen, Soila e Thamiris, pela amizade (e pelas conversas e risadas no trajeto Cachoeiro–Alegre).

Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores (PPGEEDUC), por todos os momentos de reflexão e aprendizado!

Aos membros da banca, professoras doutoras Maria Auxiliadora Vilela Paiva e Alana Nunes Pereira de Oliveira. Gratidão pelas grandes contribuições nesta pesquisa e pela disponibilidade!

Ao Renan Oliveira Altoé, professor da graduação por quem tenho tanto apreço. Obrigada por todas as reflexões e conselhos!

Ao Weberti Macedo Gomes, por todo incentivo e paciência ao longo desses anos!

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Espírito Santo (FAPES), pela bolsa concedida.

Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar (Paulo Freire)

RESUMO

A generalização de padrões matemáticos constitui-se como uma possibilidade para o desenvolvimento do pensamento matemático, mais especificamente do pensamento algébrico, de estudantes de qualquer nível de ensino, além de poder desenvolver o pensamento matemático avançado. Sob essa perspectiva, propôs-se responder à questão: De que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico? Para responder a essa pergunta, traçou-se o objetivo de investigar de que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico. O quadro teórico abrangeu discussões sobre estas temáticas: a) pensamento matemático, em que abarcaram discussões sobre o pensamento matemático avançado; b) pensamento algébrico; c) padrões matemáticos; d) generalização de padrões matemáticos; e) estratégias de generalizações. Metodologicamente, foi desenvolvida uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo estudo de caso, com um grupo formado por oito estudantes do 7.º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada em Marataízes-ES. Para a produção de dados, utilizaram-se: i) observação participante, em que a pesquisadora observava os estudantes a resolverem tarefas retiradas de seus livros didáticos que contemplaram a generalização de padrões matemáticos; ii) registros dos estudantes, que foram as tarefas resolvidas por eles; iii) roda de conversa, momento em que os participantes puderam comentar e discutir como (ou o que) pensaram para generalizar os padrões propostos. Os resultados evidenciaram que as estratégias de contagem recursiva e o múltiplo da diferença sem e com ajuste foram as escolhidas pelos estudantes para que generalizassem os padrões, sendo a linguagem materna como o principal meio de representação. Ademais, destaca-se a presença dos processos do pensamento matemático avançado nas resoluções dos estudantes, confirmando-se, assim, a ideia de que a generalização de padrões matemáticos também diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Palavra-chave: Álgebra; Generalização de padrões matemáticos; Pensamento algébrico; Ensino fundamental.

ABSTRACT

The generalization of mathematical patterns is a possibility for the development of mathematical thinking, specifically algebraic thinking, in students at any level of education, as well as the potential for developing advanced mathematical thinking. From this perspective, this research aimed to answer the following question: In what way do elementary school students generalize mathematical patterns and develop algebraic thinking? To answer this question, the objective was to investigate how elementary school students generalize mathematical patterns and develop algebraic thinking. The theoretical framework encompassed discussions on the following topics: a) mathematical thinking, including discussions on advanced mathematical thinking; b) algebraic thinking; c) mathematical patterns; d) generalization of mathematical patterns and e) generalization strategies. Regarding the method, a qualitative research study of the case study type was conducted, involving a group of eight students from the 7th grade of a public school located in Marataízes-ES. Data was collected through: i) participant observation, in which the researcher observed the students solving tasks taken from their textbooks that involved the generalization of mathematical patterns; ii) the students' notes, which were the tasks solved by them; iii) a conversation circle, where participants could comment and discuss how (or what) they thought in order to generalize the proposed patterns. The results showed that recursive counting strategies and the multiple of the difference with and without adjustment were chosen by the students to generalize the patterns, with the native language being the main means of representation. Furthermore, the presence of advanced mathematical thinking processes in the students' solutions is highlighted, confirming the idea that the generalization of mathematical patterns also concerns the development of advanced mathematical thinking.

Keywords: Algebra; Generalization of mathematical patterns; Algebraic thinking; Elementary school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No início desta dissertação, apresentamos minha trajetória profissional e acadêmica ao longo da educação básica e do ensino superior, bem como as experiências e reflexões que me ajudaram a pensar na proposta desta pesquisa. No subcapítulo 1.2, problematizamos a temática desta investigação, a fim de caracterizar a generalização de padrões matemáticos no âmbito da educação básica e articulá-la ao desenvolvimento do pensamento matemático e algébrico. No último subcapítulo, apresentamos a questão de pesquisa que orientou nossa investigação e as ações traçadas para respondê-la.

1.1 MINHA TRAJETÓRIA

Nascida[1] na terra do abacaxi, sou filha de pessoas que se dedicaram às lavouras nas terras de Brejo dos Patos, interior de Marataízes-ES. Meu pai, apesar de mais tarde ter-se tornado caminhoneiro, nasceu e cresceu no campo e chegou a concluir a 7.ª série do ensino fundamental, enquanto minha mãe desempenhava atividades do lar e concluiu a 4.ª série do ensino fundamental e, anos mais tarde, o ensino médio, por meio do Exame Nacional de Cursos (conhecido como provão).

Em 2004, iniciei a educação básica na Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) Maria da Costa Machado, na qual realizei esta pesquisa. Era (e ainda é) uma instituição na zona rural que recebe alunos das regiões vizinhas e também rurais. Nela cursei os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

Nesse período, tive o prazer de estudar a 3.ª e 4.ª séries com Marta Helena Furtado, professora que marcou a minha trajetória, pois sempre me incentivou a estudar e dar o melhor de mim. Relembrando o passado, recordo que minha brincadeira favorita era ensinar a minhas bonecas, “imitando” a professora Marta.

Nos anos finais do ensino fundamental, tive também o prazer de aprender matemática com o professor Sérgio Marcos Moté de Souza – docente que aceitou participar desta pesquisa na função de colaborador. Entre tantas características desse professor,

[1] Neste subcapítulo, utilizei a 1.ª pessoa do singular para descrever minha trajetória profissional e acadêmica.

destaco a paciência que ele possui para ensinar. Arrisco a dizer que ele contribui para que meu interesse pela matemática crescesse.

Em 2013, concluí o ensino fundamental e ingressei no ensino médio na Escola Estadual de Ensino Médio (EEEM) Professor José Veiga da Silva, localizada em Jacarandá, bairro vizinho a Brejo dos Patos.

No 2.º ano do ensino médio, comecei a pensar na profissão que gostaria de seguir e em qual universidade ingressar, principalmente porque o foco da escola, naquele momento, era o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Nesse cenário intenso de decisões para o futuro, comecei a pensar no curso de matemática e na docência, principalmente porque a área de exatas era de meu interesse e porque gostava de ensinar, auxiliando um colega aqui e ajudando outro ali nas matérias de matemática, física e química. A partir disso, a ideia de cursar matemática foi amadurecendo, sem saber ainda em qual universidade ingressar.

Foi, então, que meu professor de física, Marcos Paulo Machado, também graduado em matemática e química, mostrou-me uma possibilidade, o Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) *campus* Cachoeiro de Itapemirim, instituição em que ele também cursou licenciatura em Matemática. A partir de nossas conversas, interessei-me pelo Ifes e comecei a estudar para o ENEM visando à conquista de uma vaga. O professor Marcos foi quem me direcionou nesse momento, explicando-me sobre o sistema de seleção unificada (SISU), as notas de corte do ENEM e como tudo isso funcionava.

Com o curso de graduação e a universidade definidos, o meu último ano no ensino médio foi marcado por muita dedicação. Estudava de manhã na escola e à tarde me preparava para a prova do ENEM; escrevia redações, refazia provas antigas, estudava os principais conteúdos, entre outras coisas. Em 2015, fiz o ENEM e, finalmente, consegui uma vaga no curso de licenciatura em Matemática no Ifes *campus* Cachoeiro de Itapemirim, instituição por que tenho enorme apreço.

Durante os anos como aluna do Ifes, tive a oportunidade de estagiar em duas instituições de ensino. Entre 2017 e 2019, realizei o estágio não obrigatório na EMEF Maria da Glória Nunes Nemer, sob a supervisão do professor e doutor Edson Maciel Peixoto. Nela vivenciei a docência de perto, auxiliando os professores de matemática na regência, no planejamento das aulas, entre outras atividades.

Em 2018, cursei o componente curricular de instrumentação para o ensino no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) do Ifes, com o professor e doutor Jorge Henrique Gualandi. Na ocasião, conheci os materiais didáticos manipuláveis e suas potencialidades para o ensino de matemática.

Aliando o meu interesse sobre os materiais manipuláveis com a realidade que deparei no estágio (os professores não utilizavam material didático senão o livro), em 2018 e 2019, desenvolvi meu trabalho de conclusão do curso de graduação com os professores que ensinam matemática na EMEF Maria da Glória, intitulado como "A Formação continuada como contribuição para as possíveis mudanças das concepções dos professores sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática".

De 2019 a 2020, por meio do Programa Bolsa Estágio Formação Docente da Secretaria de Estado da Educação (SEDU), realizei o estágio na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (EEEFM) Domingos José Martins (também conhecida como o Polivalente de Marataízes), sob a supervisão do professor Jorge Henrique Gualandi. Acompanhei o dia a dia das turmas de ensino médio, auxiliando os professores de matemática na regência, nos planejamentos e projetos, nas reuniões pedagógicas e nas demais atividades. Nos momentos em sala, passeava por entre os alunos, ajudando-os e sanando suas dúvidas das tarefas propostas pelo professor.

O estágio não obrigatório foi (e é até o momento) a única atividade profissional desempenhada por mim, pois o fiz por 39 meses (pouco mais de três anos). Foi justamente a oportunidade para eu observar e vivenciar o espaço escolar, bem como suas potencialidades e fragilidades, e principalmente acompanhar de perto os professores de matemática, suas rotinas de aula e planejamento, o que inclui dificuldades e queixas além de celebrações.

Em 2020/2, concluí o curso de licenciatura em Matemática no Ifes *campus* Cachoeiro de Itapemirim. Durante todo esse período de graduação, discussões, palestras e leituras suscitaram em mim o desejo de iniciar uma formação continuada e realizar meu sonho de ser mestre.

Olhar de perto a realidade escolar do ensino fundamental e médio contribuiu para a elaboração do pré-projeto de pesquisa que me ajudou a conquistar uma vaga na 5.ª turma do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de

Professores (PPGEEDUC) na Ufes de Alegre, em 2021. Isso porque, ao longo dos estágios, percebi que o ensino de álgebra se limitava (quase exclusivamente) à resolução de equações, bem como à elaboração de gráficos, e os alunos não eram estimulados a refletir sobre os conteúdos aprendidos.

Além disso, as dificuldades de aprendizagem em álgebra expressas pelos alunos durante as aulas contribuíram para que eu atentasse a essa temática e me provocaram a refletir sobre o desenvolvimento do pensamento matemático avançado e algébrico, perguntando-me entre outros questionamentos: como o pensamento algébrico pode ser trabalhado e desenvolvido no ensino fundamental; quais as contribuições dessa prática para a aprendizagem e ensino de álgebra; como (será que) os alunos do ensino fundamental desenvolvem o pensamento matemático avançado? O pré-projeto que surgiu dessas inquietações recebeu o título "O desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma proposta para aprender e ensinar álgebra".

Tal projeto foi aprimorado à medida que as orientações com o professor Jorge Henrique Gualandi e as discussões no Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática do Espírito Santo – GPEMES[2] foram ocorrendo. Delimitamos o tema e, depois de muito estudo e reflexão, definimos que nosso objeto de pesquisa seria a generalização de padrões matemáticos, o que resultou em um projeto com o título "A generalização de padrões matemáticos: uma investigação com estudantes do 7.º ano do ensino fundamental".

Sendo assim, esta pesquisa foi pensada, inicialmente, por meio das minhas observações, reflexões e inquietações decorrentes do estágio não obrigatório realizado nas turmas dos anos finais do ensino fundamental.

Não poderia encerrar a descrição de minha trajetória sem mencionar meu pai e minha madrasta, pessoas que me ajudaram a consolidar mais uma etapa de minha trajetória pessoal e acadêmica. Eles que, mesmo com "pouco estudo", sem saberem muito bem o que é um curso de mestrado, apoiaram-me na realização deste sonho e garantiram que me dedicasse a esta pesquisa.

[2] O GPEMES foi criado em 2018 e, em 2020, foi certificado pelo Ifes no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O grupo possui duas linhas de pesquisa: Educação Algébrica e Tecnologias e Formação de Professores que Ensinam Matemática.

1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

Há quem diga que aprender álgebra significa resolver equações, desenhar gráficos e manipular letras. Isso porque a álgebra foi (e arriscamo-nos dizer que ainda é) compreendida como um conjunto de procedimentos e de regras para resolver problemas, equações e trabalhar com transformação de expressões – polinômios, frações algébricas e expressões com radicais (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), ou, ainda, ser reconhecida como o “cálculo com letras” (LINS; GIMENEZ, 2001) e ser resumida a uma linguagem concisa e específica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Compreender a álgebra somente por seu caráter instrumental e simbólico significa desconsiderar suas demais funções e características. Nesse sentido, pesquisadores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Mason (1996), Vale et al. (2006) e Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que resumir a álgebra à manipulação simbólica significa reduzir sua riqueza a apenas uma de suas facetas.

Entre tantas concepções sobre álgebra que perpassam a literatura, escolhemos a de Lima e Bianchini (2021), os quais definem a álgebra como parte integrante do pensamento matemático[3] de todo cidadão, além de ser um elemento de sua cultura matemática. Nessa perspectiva, tais autores defendem que desenvolver o pensamento matemático e o pensamento algébrico são os requisitos para aprender essa álgebra.

O pensamento algébrico é aqui compreendido como o desenvolvimento de modos de pensar, cujo processo para representar o que se pensa não requer o uso de simbolismos algébricos, tais como defende Kieran (2004).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[4], o desenvolvimento do pensamento algébrico – também considerado como um tipo especial do pensamento matemático

[3] No subcapítulo 3.1, discutimos mais a fundo sobre essa temática. Adiantamos, porém, que o pensamento matemático é o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visualmente e espacialmente, representar, memorizar e pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica (LIMA; BIANCHINI, 2021).

[4] Nesta pesquisa, não é nossa intenção discutir sobre como a BNCC foi instituída ou em que período histórico e político isso ocorreu. Apresentamos informações desse documento normativo como forma de contextualizar nosso objeto de pesquisa no âmbito da educação básica.

(BRASIL, 2018; LIMA; BIANCHINI, 2021) – aparece como o objetivo da álgebra para o ensino fundamental:

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem **regularidades e padrões** de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas [...] em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de **generalizações** (BRASIL, 2018, p. 270; grifo nosso).

Uma interpretação possível que resulta desse trecho da BNCC é que o reconhecimento de regularidades e padrões matemáticos, bem como o estabelecimento de generalizações, constitui caminhos capazes de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes do ensino fundamental.

Sob essa perspectiva, introduzimos nesta discussão a generalização de padrões matemáticos, nosso objeto de pesquisa, que é considerada como uma possibilidade para desenvolver o pensamento algébrico e matemático (GUALANDI, 2019), pois é a base desse pensamento (CARDOSO, 2010; VALE, 2013), inclusive uma das vias mais privilegiadas para desenvolvê-lo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Partimos da ideia de que generalizar significa continuar o raciocínio para além dos casos particulares, identificar semelhanças e expandir domínios de validade (KAPUT, 2000; DREYFUS, 2002). Em outras palavras, generalizar diz respeito a analisar casos particulares rumo aos casos gerais.

Os padrões matemáticos assumem um papel essencial no processo de generalização. Pesquisadores como Mason (1996), Vale et al. (2006), Ponte, Branco e Matos (2009), Barbosa (2009) e Vale (2013) consideram os padrões matemáticos como uma possibilidade (um convite) para os estudantes chegarem à generalização. Vale e Pimentel (2005) explicam que a tentativa de reconhecer os padrões é um passo indispensável quando se quer generalizá-los.

Entendemos que, no mundo à nossa volta, há diversos tipos de padrões: os sociais, de beleza, de vida, entre outros, incluindo os matemáticos. Nesta pesquisa, focamos os padrões matemáticos e recorremos a Vale et al. (2006) e Barbosa (2009) para caracterizá-los. Aqui, padrões matemáticos são considerados regularidade(s), sequência, motivo, regra, ordem e todo arranjo de números ou formas possíveis de continuar.

Para exemplificarmos o que venha a ser a generalização de padrões matemáticos, apresentamos a sequência dos números naturais pares que pode ser representada por $(0,2,4,6,8,\dots)$. Nesse caso, o padrão matemático é do tipo numérico e crescente (FROBISHER et al., 1999; VALE et al., 2006; VALE; BARBOSA, 2019), pois os termos "crescem" de dois em dois, iniciando do zero, sendo ele um número par. O processo de generalização desse padrão começa com a análise das relações entre os termos da sequência, o que se pode estender a expansão do caso particular ao caso geral, isto é, compreender que, sejam lá quais forem os termos representados pelas reticências, a eles sempre será acrescentado o dois. Vale mencionar que essa sequência também representa a sequência dos múltiplos do número 2, ou seja, uma prática cotidiana que é também um saber sistematizado.

Chamamos a atenção para as possibilidades de representação para generalizar esse padrão. Podemos representá-lo usando a linguagem algébrica, de forma que qualquer termo dessa sequência pode ser encontrado por $a_n = 2n - 2$, tal que a_n é um termo qualquer, $n > 0$ (n é maior que zero) e n é a posição do termo na sequência, sendo esta uma possibilidade. Ou, ainda, podemos representá-lo com a linguagem materna, seja pela fala, seja pela escrita, explicando que os termos da sequência aumentam de dois em dois ou que, em cada termo da sequência, são acrescentadas duas unidades e isso vale para qualquer termo da referida sequência.

Nessa perspectiva, Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Ponte, Branco e Matos (2009), Cardoso (2010) e Vale (2013) defendem que a linguagem algébrica nem sempre é o principal caminho escolhido para a representação de generalizações, tanto que as crianças utilizam a linguagem materna e evoluem para uma representação mais formal, à medida que vão construindo outros conceitos matemáticos.

Diante disso, entendemos que a generalização de padrões matemáticos e o desenvolvimento do pensamento algébrico estão presentes nos espaços da educação básica e, portanto, podem ser trabalhados com as crianças desde cedo.

Nesta pesquisa, também articulamos a generalização de padrões matemáticos ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado, considerando que esse pensamento também pode ser desenvolvido nos espaços da educação básica, tal como defende Dreyfus (2002). Segundo esse autor, a interação entre processos mentais caracteriza o pensamento matemático avançado, sendo a visualização, representação, abstração, sintetização e, principalmente, a generalização, alguns desses processos (DREYFUS, 2002).

À vista disso, defendemos que o sujeito que generaliza padrões matemáticos também faz uso de outros processos mentais, além da generalização, como a visualização e representação, e os põe em interação. Assim, com base em Dreyfus (2002), entendemos que generalizar padrões também diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado.

Desenvolver a generalização de padrões não é uma prática restrita aos conteúdos de álgebra (pelo contrário). De acordo com Vale e Pimentel (2015), o tema padrão é transversal ao currículo matemático e, portanto, permite-nos fazer conexões entre vários tópicos da matemática escolar. Muito próximo a essa ideia, Kaput (2000) nos confirma que a generalização está presente nas salas de aula da educação básica, por meio dos mais diversos conteúdos do currículo matemático.

Aliados a Kaput (2000) e Vale e Pimentel (2015), defendemos que a generalização de padrões matemáticos está presente nos espaços da educação básica e contempla diversos conteúdos que compõem o currículo matemático, como a álgebra, geometria e aritmética.

Entendemos, portanto, que todos os espaços dos anos iniciais e finais do ensino fundamental são propícios para desenvolvermos a generalização. Como forma de delimitar o tema e selecionar os sujeitos da pesquisa, optamos por uma turma do 7.º ano do ensino fundamental como objeto de investigação.

1.3 A QUESTÃO E AS AÇÕES DA PESQUISA

Antes de apresentarmos a questão e as ações desta pesquisa, faremos algumas considerações. Partimos do pressuposto de que a generalização é uma prática cotidiana do sujeito. Mason (1996) explica que os estudantes regularmente fazem generalizações sobre o mundo em que vivem, argumentando, por exemplo, que cães e gatos são animais domésticos, mas os guaxinins não o são.

No caso desta pesquisa, o foco foi dado à generalização de padrões matemáticos. Entendemos (e discutimos no subcapítulo anterior) que é possível desenvolver o processo de generalização na educação básica. Apresentamos, ainda, o exemplo dos múltiplos do número 2, trabalhada com os estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental. Esse é apenas um exemplo diante de tantos outros. Queremos dizer que aqui defendemos a ideia de que os estudantes do 7.º ano do ensino fundamental já fazem generalização de padrões matemáticos, pois esse processo é (ou já foi) trabalhado com eles ao longo de seus estudos.

Considerando a transversalidade dos padrões matemáticos no currículo matemático e que todo padrão é generalizável (BARBOSA, 2009), entendemos que o livro didático do 7.º ano do ensino fundamental, adotado pela unidade de ensino onde realizamos esta pesquisa, poderia contemplar tarefas associadas à generalização de padrões matemáticos.

Nessa perspectiva, formulamos nossa questão de pesquisa: **De que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico?**

Para tanto, delineamos nosso objetivo geral: investigar de que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico.

Com a intenção de respondermos à questão e alcançarmos tal objetivo geral, estabelecemos quatro ações de pesquisa, a saber: i) identificar, no livro didático do 7.º ano do ensino fundamental, tarefas associadas à generalização de padrões; ii) selecionar essas tarefas associadas à generalização de padrões; iii) propor essas tarefas a um grupo de estudante do 7.º ano do ensino fundamental; iv) analisar as estratégias utilizadas por um grupo de estudantes do 7.º ano do ensino fundamental ao generalizar padrões a partir de tarefas presentes no respectivo livro didático.

2 REVISÃO DE LITERATURA

A pesquisa, leitura e análise das produções científicas já realizadas trouxeram grandes contribuições para este trabalho e nos ajudaram a: i) contextualizar nossa temática no âmbito dos trabalhos já realizados por outros pesquisadores; ii) compreender qual a relevância desta pesquisa ante outras já realizadas e publicadas no Brasil e em Portugal; iii) entender, especificamente, como a generalização de padrões matemáticos se estabelece em outras pesquisas científicas; iv) conhecer a natureza e tipo de pesquisa, bem como os instrumentos metodológicos utilizados por outros pesquisadores; v) identificar os tipos de padrões matemáticos presentes nas dissertações; e vi) conhecer os principais resultados encontrados pelos pesquisadores da área.

Para compormos esta revisão bibliográfica, buscamos por trabalhos no catálogo *online* de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no período de 24 a 30 de setembro de 2021. Também buscamos por pesquisas internacionais no repositório da Universidade do Minho e Universidade de Lisboa, ambas em Portugal, no período de 10 a 14 de abril de 2023. Para tanto, utilizamos a palavra-chave “generalização de padrões”.

Para refinarmos nossa busca, utilizamos os seguintes critérios de seleção: i) teses ou dissertações como tipo de trabalho a ser analisado; ii) a generalização de padrões matemáticos como objeto de estudo; iii) os estudantes como sujeitos. Para realizarmos esse refinamento, lemos os títulos, palavras-chaves e resumos das pesquisas buscadas. Destacamos que não utilizamos recorte temporal.

Na base da Capes, inicialmente obtivemos 43 pesquisas em nossa busca, mas, após o refinamento, elegemos 10 dissertações. No repositório da Universidade do Minho, encontramos 4 pesquisas e selecionamos 1 tese, enquanto da Universidade de Lisboa, localizamos 30 e elegemos 3 dissertações. Um panorama geral dessas pesquisas é apresentado no quadro 01.

Quadro 01 – Panorama geral das pesquisas que compõem a revisão de literatura

Autores	Títulos	Anos	Tipos	Bases
ARCHILIA, S.	Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões	2008	Dissertação	CAPES
AQUINO, L. O.	Os alunos de 5ª série/6º ano frente a atividades sobre observação e generalização de padrões	2008	Dissertação	CAPES
FERREIRA, C. R. M.	Os alunos do ensino médio e os padrões: observação, realização e compreensão	2009	Dissertação	CAPES

BARBOSA, A.C.C.	A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico	2009	Tese	Universidade do Minho
TREVISANI, F. M.	Estratégias de generalização de padrões matemáticos	2012	Dissertação	CAPES
VELOSO, D. S.	O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano	2012	Dissertação	CAPES
MORAIS, A. M. L.	A Exploração de Sequências e Regularidades como Suporte Para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico	2012	Dissertação	Universidade de Lisboa
LIMA, L. S.	O ensino de matemática através da resolução de problemas: investigando estratégias dos alunos do ensino fundamental	2014	Dissertação	CAPES
MAGALHÃES, A. G	Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano	2016	Dissertação	CAPES
REGIS, F. C. N.	Introdução ao pensamento algébrico: a generalização de padrões	2017	Dissertação	CAPES
KUCINSKAS, R.	Introdução ao estudo da álgebra para alunos do ensino fundamental	2017	Dissertação	CAPES
SOUSA, R. F.	O pensamento algébrico nos anos iniciais: uma relação com a exploração de sequências	2019	Dissertação	Universidade de Lisboa
CORDEIRO, G. T. S.	Capacidade de generalização em sequências crescentes com estruturas pictóricas em alunos de 4.º ano	2020	Dissertação	Universidade de Lisboa
SILVA, R. M.	Pensamento algébrico em tarefa com padrões: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental	2021	Dissertação	CAPES

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Com base nos trabalhos elencados, percebemos que Kucinskas (2017) e Archilia (2008) elegeram conteúdos matemáticos específicos para desenvolverem suas pesquisas. Kucinskas (2017) realizou sua investigação por meio de três sequências didáticas, duas das quais contemplaram conteúdos algébricos, especificamente as equações de 1.º grau e as expressões algébricas. O objetivo desse pesquisador foi desenvolver um trabalho delineado em sequência didática por meio de problemas instigantes que deixassem o raciocínio independente, imprescindível para a efetivação da aprendizagem significativa.

No que se refere à metodologia, Kucinskas (2017) desenvolveu uma pesquisa de natureza qualitativa na perspectiva da engenharia didática. Desenvolveu sequências didáticas que contemplaram tarefas, cujos registros dos participantes – na engenharia didática são chamados de protocolos – produziram parte dos dados da pesquisa. Tais tarefas foram retiradas das avaliações externas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do estado de São Paulo (SARESP).

Também identificamos os tipos de padrões presentes nas tarefas utilizadas nas investigações desses pesquisadores, com base nas definições e discussões sobre os padrões matemáticos no subcapítulo 3.4 do referencial teórico. Sendo assim, entendemos que, no trabalho de Kucinskas (2017), as tarefas contemplaram padrões do tipo numérico, crescimento, figurativo ou visual, geométrico e repetição (FROBISHER et al., 1999; VALE; PIMENTEL, 2005; VALE et al.; 2006); VALE; BARBOSA, 2019).

Kucinskas (2017) chegou à conclusão de que os alunos do 7.º ano têm noções conceituais intuitivas sobre a álgebra e, por isso, apresentam dificuldades para lidar com ela. Além disso, o autor constatou que a resolução de problema é uma metodologia eficaz para que os estudantes se apropriem da álgebra como conhecimento significativo.

Entre os trabalhos apresentados, destacamos que dois foram desenvolvidos no ensino médio. Isso os diferencia de nossa pesquisa, uma vez que investigamos em uma turma do 7.º ano do ensino fundamental. Archilia (2008), além de escolher um conteúdo específico para realizar sua pesquisa, optou pelo 2.º ano do ensino médio para estudar o desempenho dos alunos. O objetivo do autor foi investigar se alunos da 2.ª série do ensino médio, expostos a situações de observação e generalização de padrões de sequências, constroem uma fórmula para o termo genérico de uma progressão aritmética.

Já Ferreira (2009) investigou como o aluno que terminou, em 2008, a 1.ª série observa, realiza e compreende as atividades de observação de regularidades e de generalização de padrões.

Em relação à metodologia, Archilia (2008) e Ferreira (2009) desenvolveram uma pesquisa qualitativa na perspectiva da engenharia didática, assim como Kucinskas (2017). Os pesquisadores utilizaram sequências didáticas com tarefas, e a resolução dos estudantes (protocolo) foi utilizada para que produzissem parte dos dados da pesquisa. Além dos protocolos, Archilia (2008) e Ferreira (2009) utilizaram transcrições de gravações e relatos de suas observações durante o desenvolvimento da pesquisa.

Destacamos que as tarefas de Archilia (2008) e Ferreira (2009) foram elaboradas pelos próprios pesquisadores, as quais podem conter, em Archilia (2008), padrões do tipo numérico e crescimento, e, em Ferreira (2009), numérico, crescimento, figurativo ou visual, geométrico e repetição, tal como definem Frobisher et al. (1999), Vale e Pimentel (2005), Vale et al. (2006) e Vale e Barbosa (2019).

Os resultados encontrados por Archilia (2008) e Ferreira (2009) aproximaram-se à medida em que esses autores constataram a dificuldade dos estudantes do ensino médio em utilizar a linguagem algébrica. Archilia (2008) destacou que, embora os alunos da 2.ª série do ensino médio tenham utilizado a linguagem materna para expressar a fórmula do termo geral da PA, eles não conseguiram converter tal fórmula utilizando a linguagem algébrica. Assim também Ferreira (2009) enfatizou que os estudantes da 1.ª série investigados se encontram em fase de desenvolvimento, pois necessitam, ainda, de outras experiências para aperfeiçoar a fluência algébrica e manifestar seu pensamento algébrico de maneira mais eficaz.

Barbosa (2009) teve por objetivo compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais. Para tanto, a autora realizou uma pesquisa de natureza quali-quanti, do tipo estudo de caso, cujos sujeitos foram oito alunos de duas diferentes turmas de 6.º ano de uma escola de ensino básico em Viana do Castelo, Portugal.

Assim como em Archilia (2008), Ferreira (2009) e Kucinskas (2017), as tarefas também se constituíram como instrumentos de produção de dados na pesquisa de Barbosa (2009) e foram retiradas e adaptadas de outras pesquisas já realizadas. Segundo a autora, as tarefas contemplaram padrões visuais, porém, com base em Frobisher et al. (1999), Vale e Pimentel (2005), Vale et al. (2006), Vale e Barbosa

(2019), entendemos que elas também contemplaram padrões do tipo sequência, numérico, crescimento e geométrico.

Em relação aos demais instrumentos de produção de dados, Barbosa (2009) utilizou a observação, entrevista, transcrições de vídeo e áudio e documentos cedidos pela escola.

Tal como já mencionamos, Barbosa (2009) optou por pesquisar exclusivamente os padrões do tipo visual. Para tanto, a autora discutiu sobre a visualização e como esta é um contributo importante para a aprendizagem matemática. Apesar de a visualização ser considerada como um dos processos do pensamento matemático avançado, a autora não trouxe discussões sobre esse pensamento, tampouco o relacionou com a visualização, tal como procedemos no referencial teórico desta pesquisa. Por essa razão, entendemos que esse fato distancia a pesquisa de Barbosa (2009) de nossa investigação.

A análise dos dados permitiu a Barbosa (2009) verificar que as tarefas com padrões visuais conduziram os alunos à utilização de uma grande diversidade de estratégias de generalização: contagem, termo unidade, diferença, explícita e tentativa e erro.

Em relação às estratégias utilizadas em questões de generalização próxima e distante[5], Barbosa (2009) conclui que, no primeiro caso, os alunos deram preferência à contagem, já na descoberta de valores distantes, a estratégia explícita destacou-se. Nas palavras da autora:

> A contagem conduziu, quase sempre, os alunos à obtenção de respostas correctas. No entanto, houve situações em que esta estratégia não foi aplicada de forma adequada. A resolução de questões de generalização distante através da contagem constitui, normalmente, um processo moroso que pode resultar na construção de representações desadequadas ou em contagens erradas (BARBOSA, 2009, p. 387).

Inclusive, a autora destaca que a falta de organização dos registros pode comprometer a estratégia da contagem. Essa situação também percebemos nas resoluções das tarefas que propomos aos estudantes, tal como discutiremos mais adiante. Barbosa (2009) aponta também que, apesar de a literatura trazer a

[5] No subcapítulo 3.6.1 definimos os tipos de generalização. Adiantamos, porém, que quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização caracteriza-se como próxima. Já quando há a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização configura-se distante (STACEY, 1989).

recursividade como predominância das estratégias utilizadas pelos estudantes, sua pesquisa provou o contrário, dando destaque à contagem como a estratégia maioritariamente utilizada.

Muito próximos à proposta desta pesquisa e da Barbosa (2009), Magalhães (2016), Lima (2014) e Veloso (2012) também investigaram os processos de generalização de padrões e as estratégias de estudantes do ensino fundamental, no entanto atribuíram diferentes enfoques.

A pesquisa de Magalhães (2016) teve por objetivo analisar as dificuldades para a construção de conceitos algébricos por alunos do 7.º ano de uma escola de ensino fundamental, localizada no município de Santana, no Amapá. Para alcançar esse objetivo, o autor desenvolveu uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo estudo de caso, cujos instrumentos de produção de dados foram o questionário investigativo, entrevista, gravações e aulas práticas, por meio das quais as tarefas foram contempladas. As tarefas utilizadas nas aulas práticas foram adaptadas de um livro didático de 2005, as quais, a nosso ver, têm padrões do tipo numérico, crescimento, repetição, figurativo ou visual e simétrico, tal como definem Frobisher et al. (1999), Vale et al. (2006), Frobisher et al (2007) e Vale e Barbosa (2019).

Os resultados dessa pesquisa apontaram que a maioria dos estudantes conseguiu identificar e desenhar os elementos que completam uma sequência, empenhando-se nas atividades propostas. No entanto, Magalhães (2016) constatou lacunas em relação à aritmética, a saber: dificuldades para resolver tarefas com padrões geométricos e identificar uma generalização para determinada sequência; problemas na leitura e na interpretação das tarefas; dificuldades no uso da linguagem algébrica, sendo este resultado similar às pesquisas de Archilia (2008) e Ferreira (2009).

Lima (2014) pesquisou as estratégias dos alunos do 9.º ano, mas atribuiu o foco à metodologia de resolução de problemas. Buscou responder à seguinte questão: Que tipos de estratégias orais e escritas transparecem em uma sequência didática em que foi utilizada a metodologia de ensino – aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas, para o estudo de generalização de padrões?

Para produzir os dados da pesquisa, a autora utilizou gravações dos participantes e questionário constituído por tarefas, as quais contemplaram padrões do tipo numérico, crescimento, figurativo ou visual e geométrico, segundo Frobisher et al. (1999), Vale e Pimentel (2005), Vale et al. (2006) e Vale e Barbosa (2019).

Não encontramos exatamente o tipo e natureza de pesquisa utilizados pela autora, apenas a metodologia para o desenvolvimento das tarefas com os participantes, que, nesse caso, foi a metodologia de ensino – aprendizagem de matemática mediante a resolução de problemas.

No intuito de responder à questão-problema e organizar os dados produzidos na pesquisa, Lima (2014) lançou três[6] perguntas norteadoras, entre as quais destacamos: Que estratégias, para resolver um problema, os alunos usam para generalizar? Para responder a essa pergunta, a autora agrupou as estratégias dos estudantes, categorizando-as em utilização de desenhos, justificativa por palavras, exemplos como justificativa, uso de fórmulas, reconhecimento da fórmula, utilização de tabelas, entre outros.

Outra pergunta norteadora diz respeito à maneira como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos. A resposta é pertinente, principalmente para esta pesquisa que tem a generalização de padrões matemáticos por objeto de estudo:

> A partir da análise das atividades, considerando tanto os registros orais como escritos, vemos que a capacidade de generalização do aluno não está limitada a determinar uma expressão que seja válida para '*n*', mas passa por estágios que vão desde identificar a existência de uma regularidade, expressar esta em linguagem natural, até chegar a uma fórmula para o caso geral e, por vezes, testar a fórmula encontrada para alguns casos (LIMA, 2014, p. 116).

Esse resultado sugere-nos que os estudantes podem tanto generalizar um padrão matemático de forma gradual, não chegando, necessariamente, a uma representação algébrica quanto generalizar utilizando a linguagem natural e/ou linguagem algébrica e revelando estratégias diversas.

Além disso, Lima (2014) constatou que os alunos, em sua maioria, entenderam os enunciados das atividades, mas tiveram dificuldades para representar algebricamente a fórmula matemática. A autora verificou também que, em geral, o registro oral foi mais rico em detalhes do que o escrito.

[6] As perguntas são as seguintes: que estratégias, para resolver um problema, os alunos usam para generalizar; como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos; que dificuldades apresentam nesse processo? (LIMA, 2014).

Veloso (2012) desenvolveu uma pesquisa do tipo de campo e de natureza qualitativa com estudantes do 6.º ano, em busca por respostas para seguinte questão-problema: Que contribuições uma proposta de ensino baseada na percepção e generalização de padrões e sequências pode trazer para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica em alunos que se iniciam no estudo da álgebra?

Dois dos objetivos específicos traçados por Veloso (2012) dizem respeito a: i) identificar conhecimentos prévios dos alunos relacionados à percepção de padrões, sequências, generalização e registro de situações relacionadas a padrões e sequências; ii) investigar as diferentes estratégias adotados pelos alunos nas primeiras tentativas de utilizar a linguagem simbólica específica para a expressão de sentenças envolvendo termos com ideias de variáveis. Considerando, pois, a questão-problema e os objetivos apresentados, verificamos que a pesquisa de Veloso (2012) se distancia da nossa: primeiro porque não identificamos o conhecimento prévio dos estudantes a respeito da generalização de padrões; segundo porque focamos, especificamente, as estratégias utilizadas pelos estudantes, ao generalizarem padrões matemáticos.

Os instrumentos de produção de dados foram as tarefas elaboradas pela pesquisadora e resolvidas pelos sujeitos da pesquisa, o caderno de campo e as gravações. Os dados foram analisados à luz da Teoria da Objetivação, de Luís Radford.

Embora a autora tenha analisado tarefas de estudantes, o foco dessa análise foi o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Entendemos que tais tarefas contemplaram padrões dos tipos numérico, crescimento, figurativo ou visual (FROBISHER et al., 1999; VALE et al., 2006; VALE; BARBOSA, 2019).

Os resultados da pesquisa de Veloso (2012) mostraram que os estudantes utilizaram diversos meios para representar as sequências, entre os quais a fala, gestos e registros escritos. Inclusive, muitos participantes iniciaram a resolução das tarefas utilizando apenas a fala e os gestos e, posteriormente, a representação simbólica.

Destacamos, assim, que as pesquisas de Magalhães (2016), Lima (2014), Veloso (2012) e Barbosa (2009) se aproximam devido ao interesse dos autores em pesquisar as estratégias dos estudantes, apesar de eles atribuírem diferentes enfoques, conforme já discutimos.

Em Portugal, Morais (2012) desenvolveu sua pesquisa com estudantes do 2.º ano de escolaridade, do 1.º ciclo (no Brasil, refere-se às turmas dos anos iniciais do ensino fundamental), cujo objetivo foi promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir das capacidades de representação e de generalização.

Para tanto, a autora desenvolveu sete tarefas que contemplaram padrões do tipo sequência, pictóricas (os quais nesta pesquisa chamamos de visuais), de repetição e crescentes, tarefas estas de cunho essencialmente exploratório, segundo Morais (2012). Na pesquisa, não consta, de forma explícita, de onde essas tarefas foram retiradas, apenas evidencia que a pesquisadora se baseou nas orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico.

Em relação à metodologia, Morais (2012) desenvolveu uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo interpretativo. Os instrumentos de produção de dados incluíram a observação participante na sala de aula, diário de bordo, transcrição dos registros áudio, vídeo e documentos produzidos pelos alunos (resoluções das tarefas).

Comparando as tarefas cujos padrões são de repetição e crescente, a pesquisa de Morais (2012) evidenciou que, no primeiro caso, os estudantes tiveram mais facilidade para continuar a sequência, enquanto na última eles chegaram à generalização mais facilmente.

A pesquisadora também verificou que normalmente os estudantes recorreram à linguagem materna ou às representações informais por eles criadas para externalizar o que pensaram. Morais (2012) ainda concluiu que, apesar de algumas dificuldades que, por vezes, se manifestaram, a pesquisa contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Apresentamos, agora, as pesquisas de Aquino (2008), Regis (2017) e Silva (2021) que obtiveram resultados semelhantes entre si e a pesquisa de Veloso (2012). Começamos com Aquino (2008), que investigou se e como alunos de uma 5.ª série/6.º ano do ensino fundamental são sensibilizados e criam estratégias para resolver situações que envolvem a percepção e generalização de padrões em sequências.

No que se refere à metodologia da pesquisa, Aquino (2008) desenvolveu uma investigação de natureza qualitativa e utilizou tarefas por meio de sequências didáticas inspiradas na metodologia da engenharia didática, assim como Archilia (2008), Ferreira (2009) e Kucinskas (2017), conforme já apresentamos. As tarefas foram retiradas e adaptadas de pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). Entendemos que elas contemplam padrões do tipo numérico, crescimento e repetição, tal como definem Frobisher et al. (1999), Vale et al. (2006) e Vale e Barbosa (2019).

A autora destacou a variedade de recursos semióticos utilizados pelos alunos, ao generalizarem padrões, para além de aspectos cognitivos, incluindo o discurso, gestos, ações, sinais, que eles demonstraram, ao observarem e generalizarem padrões em sequências. Nesse sentido, ela enfatizou que “[...] a expressão da generalidade não se dá apenas pelo uso da linguagem simbólica algébrica, como também pelas várias maneiras que temos para perceber e expressar o geral [...]” (AQUINO, 2008, p. 129).

Os resultados da pesquisa de Aquino (2008) também revelaram as dificuldades dos participantes acerca dos conteúdos estudados em séries anteriores (como o conceito de números ordinais) e de interpretação dos enunciados das tarefas, assim como também evidenciou Magalhães (2016).

Com o objetivo de introduzir o pensamento algébrico em uma turma do 8.º ano da rede estadual de ensino de Minas Gerais, Regis (2017) realizou uma pesquisa de natureza qualitativa e de campo por meio de intervenções que contemplaram tarefas que foram elaboradas por ele.

Os instrumentos de produção de dados foram as tarefas, gravações e o diário de campo. Destacamos que umas das tarefas diz respeito ao reconhecimento de padrões nas obras (pinturas) de Mauritus C. Escher, as quais, a nosso ver, contemplam padrões de simetria, com base em Frobisher et al. (2007). Esse reconhecimento de padrões também se estendeu aos mosaicos, momento em que os participantes puderam visualizar e manipulá-los. Sendo assim, os materiais manipuláveis foram uma ferramenta utilizada nessa pesquisa. As demais tarefas foram propostas por meio de uma lista e contemplaram padrões do tipo figurativo ou visual, repetição e de crescimento, tal como definem Frobisher et al. (1999) e Vale e Barbosa (2019). Os dados produzidos foram analisados à luz da Teoria da Objetivação, de Luis Radford.

Regis (2017, p. 145) constatou que as tarefas envolvendo “sequências de crescimento, que geram fórmulas, passaram a ter menos importância”, enquanto as tarefas de padrões de repetição e visual permitiram aos participantes o “fazer matemática", dando-lhes condições de utilizar outros tipos de registros, como a fala, gesto e escrita.

As tarefas também foram utilizadas por Silva (2021), que teve por objetivo identificar as formas de pensamento algébrico mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental, ao responderem a uma tarefa de generalização de padrões.

Com essa intenção, a autora desenvolveu uma pesquisa de natureza qualitativa e desenvolveu sete tarefas que contemplaram a generalização de padrões em uma turma mista, formada por alunos do 6.º ao 9.º ano, no Núcleo de Estudos Avançados e Científicos (NEAC)[7], sendo esse momento gravado. Com base em Frobisher et al. (1999) e Vale e Barbosa (2019), entendemos que tais tarefas contemplam padrões do tipo figurativo ou visual. Não identificamos o tipo de pesquisa definido pela pesquisadora.

Inspirada pela Teoria da Objetivação, de Luis Radford, a pesquisadora elaborou as tarefas utilizadas na pesquisa. Destacamos que essa teoria também foi utilizada na análise de dados da referida pesquisa e também na de Veloso (2012) e Regis (2017), conforme já discutimos.

Aqui vale destacar que, na Teoria da Objetivação, o pensamento algébrico possui uma natureza multimodal, apresentando sua parte material (gestos, percepção, fala, escrita, entre outros) e ideacional (imaginação e a fala interior). Nesse mesmo sentido, os resultados da pesquisa de Silva (2021) mostraram que os estudantes mobilizaram o pensamento algébrico de diferentes maneiras, por meio da fala, gestos e linguagem algébrica. Nas palavras da autora, "eles estavam resolvendo uma mesma tarefa de generalização de padrões, mas utilizaram distintas estratégias, [...] materializaram o mesmo saber algébrico, porém de diferentes maneiras" (SILVA, 2021, p. 120).

Sob a perspectiva da Teoria da Objetivação, os resultados das pesquisas de Veloso (2012), Regis (2017) e Silva (2021) – que tiveram essa teoria como base – e também a de Aquino (2008) aproximam-se à medida que esses autores destacam a variedade de estratégias utilizadas pelos estudantes, ao mobilizarem e expressarem o

[7] De acordo com Silva (2021), o NEAC é um projeto que reúne professores e estudantes e tem por objetivo aprofundar os conhecimentos dos estudantes e impulsionar sua aprendizagem e humanização por meio de práticas científicas. Essas práticas são realizadas em laboratórios de ciências, matemática e robótica e consistem em observar, pesquisar, experienciar, registrar e difundir.

pensamento algébrico. Mais precisamente, esses sujeitos utilizaram tanto a linguagem algébrica e materna quanto gestos, ações e falas.

Sousa (2019) teve por objetivo promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 5.º ano de escolaridade, dando especial atenção as suas estratégias, representações e dificuldades de compreender padrões e regularidades, bem como representar sequências. Apesar de tratar-se de uma pesquisa da Universidade de Lisboa em Portugal, o espaço de investigação abarcou uma turma dos anos iniciais do ensino fundamental, de uma unidade escolar na Bahia, no Brasil.

No que se refere à metodologia da pesquisa, Sousa (2019) desenvolveu uma investigação de natureza qualitativa, do tipo exploratório, com oito tarefas que contemplaram padrões do tipo numérico, crescente, repetição e pictórica (aqui chamamos de visuais), características próximas às da pesquisa de Morais (2012). Tais tarefas foram retiradas/adaptadas de outras pesquisas científicas.

Para produzir os dados, Sousa (2019) utilizou a observação participante na sala de aula, justamente para desenvolver com os participantes as tarefas propostas, sendo esses momentos gravados e, posteriormente, transcritos, tanto o áudio quanto o vídeo. Além desses instrumentos, Sousa (2019) utilizou as resoluções dos estudantes.

A pesquisa de Sousa (2019) diferencia-se da nossa em vários aspectos, a começar pela metodologia, visto que não desenvolvemos uma investigação em carácter exploratório, tampouco retiramos as tarefas de pesquisa científicas, tal como o pesquisador procedeu. Além disso, as tarefas da pesquisa de Sousa (2019) contemplaram tipos de padrões específicos – numérico, crescente, repetição e pictórica – diferentemente de nossa proposta.

Entre os resultados da pesquisa de Sousa (2019), chamamos a atenção para o fato de que os estudantes optaram, maioritariamente, pela estratégia de contagem e recorreram à linguagem materna (falada e escrita) e à linguagem simbólica para apresentarem suas ideias.

O objetivo da pesquisa de Cordeiro (2020) foi compreender o contributo de uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de 4.º ano, que segue uma abordagem de ensino exploratório e envolve a exploração de tarefas com sequências pictóricas crescentes. Assim como Morais (2012) e Sousa

(2019), Cordeiro (2020) também desenvolveu uma pesquisa de natureza qualitativa na perspectiva exploratória.

Os instrumentos metodológicos utilizados para a produção de dados na pesquisa de Cordeiro (2020) são semelhantes às de Morais (2012) e Sousa (2019), sendo eles a observação participante, notas de campo e as resoluções das tarefas dos participantes. Além destes, o pesquisador utilizou as transcrições de áudio e vídeo.

Vale destacar que as tarefas foram elaboradas pelo pesquisador e propostas para seis alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade de uma escola pública em concelho do Cartaxo, Portugal. O pesquisador definiu os tipos de padrões que as tarefas contemplaram, os quais consideramos como visuais e crescentes, segundo Frobisher et al. (1999) e Vale e Barbosa (2019).

Destacamos também que a pesquisa de Cordeiro (2020) se diferencia da nossa em vários aspectos, mas principalmente porque as tarefas foram elaboradas pelo próprio pesquisador, e não retiradas do livro didático, tal como procedemos. Além dessa diferença, apontamos o tipo de pesquisa (exploratório), a turma escolhida (4.º ano de escolaridade) e os tipos de padrões definidos (pictórico e crescente).

Entre os resultados da pesquisa de Cordeiro (2020), destacamos que os momentos de discussão entre os alunos se configuraram como um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, os participantes optaram por representar as generalizações por meio da linguagem materna e algébrica, maioritariamente.

Trevisani (2012) teve a intenção de investigar as estratégias utilizadas por alunos do 7.º ano do ensino fundamental para generalizar padrões visuais, usando o *software* MiGen[8]*.* Para produzir os dados, o autor optou por uma pesquisa de natureza qualitativa e desenvolveu seis tarefas com oito alunos do 7.º ano do ensino fundamental. Embora o autor defenda ter utilizado tarefas com padrões visuais, entendemos que, além desse tipo, tais tarefas contemplaram padrões de crescimento, geométrico e simétrico, segundo as definições de Frobisher et al. (1999), Pimentel (2005), Frobisher et al. (2007), Vale e Barbosa (2019).

[8] Segundo Trevisani (2012), esse software é um ambiente computacional disponibilizado gratuitamente via internet, o qual visa contribuir para a aprendizagem de generalização matemática de alunos entre 11 e 12 anos. Por meio do software, eles podem analisar e generalizar padrões.

Trevisani (2012) também utilizou gravações dos alunos e do *software,* os relatos do caderno de campo criado por meio de suas observações e os registros dos participantes da pesquisa. Para a análise, foi utilizado a triangulação de dados. Não identificamos o tipo de pesquisa utilizado na pesquisa.

Ao final da pesquisa, o autor agrupou as estratégias utilizadas pelos participantes, que ele as chamou de contagem, termo unidade com ajuste contextual e explícita. Para ele, o *software* influenciou os estudantes a escolher essas estratégias para resolverem as tarefas de generalização de padrões figurais que foram propostas.

Entre os trabalhos apresentados nesta revisão de literatura, destacamos que o de Trevisani (2012) foi o que mais se aproximou desta pesquisa, uma vez que o autor teve o interesse de investigar as estratégias dos alunos do 7.º ano, assim como nós procedemos. Mas, para isso, ele escolheu um tipo de padrão matemático específico, o visual, e utilizou o *software* MiGen. Isso distanciou a pesquisa dele da nossa, pois não focamos em um tipo específico de padrão matemático nem utilizamos algum *software.*

De forma geral, todas as pesquisas desta revisão de literatura foram caracterizadas como qualitativas, exceto a de Barbosa (2009), que foi caracterizada como quali-quanti, e as de Archilia (2008) e Lima (2014), que não apresentaram, de forma explícita, a natureza de pesquisa. Porém, após a leitura e análise, entendemos que ambas as pesquisas podem ser consideradas como de natureza qualitativa.

Considerando os instrumentos de produção de dados utilizados pelos pesquisadores acima, percebemos que alguns são iguais aos que utilizamos neste trabalho. A observação participante foi utilizada por Barbosa (2009), Morais (2012), Trevisani (2012) e Veloso (2012), Sousa (2019), Cordeiro (2020) e as gravações também produziram parte dos dados das pesquisas desses autores e de Lima (2014), Magalhães (2016), Regis (2017), Kucinskas (2017) e Silva (2021). No entanto, nenhum pesquisador utilizou a roda de conversa para produzir os dados e a análise de conteúdo para analisá-los, assim como procedemos nesta pesquisa.

Chamamos a atenção para a tarefa, a qual assumiu outras nomenclaturas, como problemas, protocolos e atividades, que foi um instrumento metodológico de produção de dados utilizado em todas as pesquisas. Destacamos, porém, que apenas Magalhães (2016) retirou e adaptou tarefas de um livro didático, mas não especificou se tal recurso é utilizado na turma investigada. Além disso, o foco de Magalhães (2016) foi dado às dificuldades para a construção de conceitos algébricos por alunos do 7.º ano de uma escola de ensino fundamental.

No que se refere aos tipos de padrões matemáticos presentes nas tarefas utilizadas nas pesquisas, verificamos que o do tipo crescimento foi o que mais apareceu nos trabalhos e está presente em 11 das 14 pesquisas desta revisão, enquanto 9 delas contemplaram os padrões figurativos ou visuais, 8 do tipo numérico, 6 do tipo repetição, 4 do geométrico e 2 do simétrico.

Destacamos que a maioria das pesquisas foram desenvolvidas no espaço do ensino fundamental, exceto Archilia (2008) e Ferreira (2009). Ademais, ressaltamos a diversidade de estratégias utilizadas pelos participantes para generalizar padrões matemáticos. Isso nos fez compreender, ainda mais, que os alunos podem solucionar a mesma tarefa, mas de maneira diferente, utilizando as mais diversas estratégias: fala, gestos, escrita, além da linguagem algébrica.

Nesta pesquisa, articulamos nosso objetivo de estudo – generalização de padrões – ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Apesar de as dissertações apresentadas nesta revisão trazerem alguns dos processos do pensamento matemático avançado, como representação, generalização e visualização, e serem realizadas na educação básica, observamos que, em nenhuma pesquisa, o conceito de pensamento matemático avançado foi abordado, discutido e aprofundado.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico que subsidiou esta pesquisa foi dividido em cinco subcapítulos: no primeiro, abordamos o pensamento matemático, que é considerado o ponto de partida para as temáticas discutidas nos próximos subcapítulos, e também versamos sobre o pensamento matemático avançado, este que é definido com base na interação entre processos mentais, sendo a generalização um deles; no segundo, discutimos sobre o pensamento algébrico, um tipo especial do pensamento matemático, que pode ser desenvolvido por meio da generalização de padrões matemáticos; no terceiro, apresentamos os diferentes tipos de padrões matemáticos para, posteriormente, discutirmos sobre a generalização de padrões matemáticos; por fim, apresentamos as principais estratégias de generalização de padrões elencadas em outras pesquisas. Em todos os subcapítulos elaborados, articulamos nosso objeto de estudo (generalização de padrões) às temáticas discutidas, com a intenção de aproximá-las.

3.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO

Antes mesmo de discutirem sobre a álgebra como parte integrante da cultura matemática de todo cidadão, Lima e Bianchini (2021) versam sobre os conceitos de pensamento, cultura e cultura matemática. Nesta pesquisa, tais conceitos nos ajudaram a definir e a compreender o pensamento matemático.

Para esses pesquisadores, o pensamento é mobilizado pelo cidadão em qualquer circunstância da vida que lhe exige compreender situações ou assuntos, fazer julgamentos e resolver problemas. É o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação.

A cultura é compreendida como um elemento essencial para o exercício das atividades cotidianas, sociais e profissionais de qualquer cidadão. É um conjunto de conhecimentos, costumes, normas de comportamento, práticas, representações e símbolos (LIMA; BIANCHINI, 2021). Sendo assim, a cultura matemática é tida por Lima e Bianchini (2021) como um conjunto de conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas que possibilitam a um indivíduo pensar matematicamente e utilizar a linguagem matemática para comunicar-se em diferentes contextos.

Antes de definirem o pensamento matemático, Lima e Bianchini (2021) apresentaram os conceitos de pensamento, cultura e cultura matemática, justamente porque entendem o pensamento matemático como um tipo especial de pensamento e o consideram como um ingrediente da cultura matemática de um cidadão. Além disso, os autores relacionam o pensamento matemático ao conceito de cultura, defendendo que ele é necessário para muitas atividades cotidianas, sociais e profissionais exercidas por um cidadão.

Nas palavras de Lima e Bianchini (2021, p. 14), o pensamento matemático é

> [...] o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas, por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber

> visualmente e espacialmente, representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica.

Há diversos tipos de pensamento matemático: o pensamento computacional, numérico, geométrico e algébrico (BRASIL, 2018), entre os quais discutiremos mais a fundo sobre o pensamento algébrico no subcapítulo 3.2, pois é o que se aproxima e relaciona à temática e ao objeto de estudo desta pesquisa.

Segundo Tall (2002), o pensamento matemático pode ser desenvolvido nos sujeitos desde pequenos, porém de maneira elementar, o que o autor nomeia pensamento matemático elementar. Esse pensamento pode evoluir para o que ele chama de pensamento matemático avançado. Isso se evidencia em Tall (1995, p. 03, tradução nossa), quando ele afirma que "o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado no indivíduo pode, em hipótese, começar a partir da 'percepção' e 'ação' sobre objetos no mundo externo"[9].

De acordo com Dreyfus (2002), o pensamento matemático avançado está presente desde a infância. O autor explica que muitos dos processos mentais do pensamento matemático avançado se evidenciam no pensamento das crianças sobre conceitos de matemática, como o número e valor de posição. Machado e Bianchini (2013, p. 591) explicam que para a criança o conceito matemático de número ou do valor posicional do algarismo envolve complexidade, pois a "complexidade depende do sujeito que a enfrenta".

Ora, isso nos leva a considerar que o pensamento matemático avançado pode ser desenvolvido com estudantes da educação básica, por exemplo, nas salas de aula dos anos iniciais e finais do ensino fundamental e da educação de jovens e adultos. Nessa perspectiva, assumimos as ideias de Dreyfus (2002) neste trabalho e concordamos com elas no que dizem respeito ao desenvolvimento de esse pensamento ser possível em níveis elementares de ensino.

Gualandi (2019) compartilha dessas ideias e defende ser possível desenvolver o pensamento matemático avançado em estudantes de qualquer nível do pensamento matemático, de forma que eles venham a representar e abstrair uma situação

[9] "*The cognitive growth from elementary to advanced mathematical thinking in the individual may therefore be hypothesised to start from "perception of" and "action on" objects in the external world".*

matemática (foco de nossa discussão adiante), seja por meio da resolução de problemas, seja da interpretação de uma sequência, entre outras possibilidades.

A pesquisadora Lauren Resnick traz algumas considerações sobre o pensamento avançado, o que ela chama de pensamento de ordem superior. Ela caracteriza esse pensamento como complexo, que exige esforço, pois há um trabalho mental considerável envolvido nas elaborações e nos julgamentos exigidos (RESNICK, 1987).

Dreyfus (2002) ajuda-nos a entender e a definir o pensamento matemático avançado. De acordo com esse autor, a interação entre processos mentais promove o desenvolvimento desse pensamento. Entre esses processos, destacamos: sintetização, abstração, classificação, visualização, representação e, sobretudo, a generalização. No rol dos processos mentais, a abstração e representação ganham destaque, pois são consideradas os principais do pensamento matemático avançado (DREYFUS, 2002).

Começamos definindo a abstração, que é um processo que se refere à

> [...] construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e de relações entre objetos matemáticos. Este processo depende do isolamento de propriedades e relacionamentos apropriados. Requer a capacidade de desviar a atenção dos objetos à estrutura de suas propriedades e relacionamentos (DREYFUS, 2002, p. 37, tradução nossa)[10].

Isso significa que, para chegar à abstração, é necessário que o sujeito analise conceitos e situações matemáticas para além do que se vê. Por exemplo, ao trabalharmos com os números, devemos nos concentrar nas relações que há entre eles, para compreender o que é conjunto numérico, quais operações se podem realizar com eles, entre outras possibilidades, ou seja, lançar o olhar sobre situações e relações matemáticas que estão além.

Nesse sentido, Dreyfus (2002) revela que, se o sujeito desenvolve a capacidade de fazer abstrações conscientemente, ele então alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Ademais, o autor defende que alcançar essa capacidade de

---

[10] *"[...] the building of mental structures from mathematical structures, i.e., from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships."*

abstração pode ser o objetivo mais importante da educação matemática, quando o assunto é o pensamento matemático avançado.

Segundo ele, para o sujeito abstrair, é necessário generalizar e sintetizar. Por isso, esses dois processos estão associados à abstração, além de serem indissociáveis. “Generalizar é derivar ou induzir de particulares, identificar semelhanças, expandir domínios de validade [...] sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade” (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa)[11].

Agora, nosso foco dirige-se para outro processo mental, denominado representação. Segundo Dreyfus (2002), representar um conceito significa gerar um exemplo, uma imagem ou um modelo dele, e ocorre em registros como escrita, desenho, fala, gestos, entre outros. Por isso, o processo de representação ocorre mediante três principais vias: simbólica, mental e visual.

A representação simbólica envolve relações entre signos e significado e melhora a comunicação daquilo que se pensa, por meio tanto da escrita quanto da fala. A função dessa representação geralmente é a de facilitar a comunicação do conceito (DREYFUS, 2002).

De acordo com o autor, a representação mental refere-se aos esquemas internos ou imagens de referência que o sujeito usa para interagir com o mundo externo. Por exemplo, quando se fala sobre quaisquer objetos matemáticos – os números, uma função, entre outros –, cada sujeito os relaciona com algo que tem em mente. Dreyfus (2002) retoma aquela ideia de que o pensamento matemático avançado pode ser desenvolvido com crianças, quando afirma que mesmo elas criam representações mentais de qualquer coisa que pensam, o que inclui os objetos matemáticos, como números ou triângulos.

Já a visualização é o processo pelo qual as representações mentais podem ser construídas por meio de sistemas de representação, isto é, artefatos/objetos externos concretos. Por exemplo, no caso das funções, os gráficos, diagramas de setas, as fórmulas algébricas e tabelas de valores são considerados artefatos. O autor explica que as representações mentais são criadas com base nessas representações

[11] *“To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity [...] to synthesize means to combine or compose parts in such a way that they form a whole, an entity. This whole then often amounts to more than the sum of its parts.”*

concretas (visuais). O sujeito pode, assim, criar uma única ou várias representações mentais concorrentes para o mesmo conceito matemático (DREYFUS, 2002).

Pesquisadores têm-se empenhado para investigar o papel da visualização no trabalho com os padrões matemáticos e com a generalização (MASON, 1996; VALE; PIMENTEL, 2005; LANNIN; BARKER; TOWNSEND, 2006; BARBOSA, 2009; VALE, 2013; BARBOSA; VALE, 2015; VALE; BARBOSA, 2019). Os desdobramentos dessas investigações ganharam destaque no subcapítulo 3.4 adiante, que trata especialmente dos padrões matemáticos.

Adiantamos, porém, as contribuições de Mason (1996), Vale (2013) e Barbosa e Vale (2015) nesse sentido. Especificamente no caso dos padrões figurativos, a visualização é considerada um suporte para o sujeito "ver" e entender as relações que existem entre a sequência das figuras e o número que lhes corresponde (VALE, 2013). Esse "ver" é considerado também como o primeiro passo na exploração do padrão (MASON, 1996; BARBOSA; VALE, 2015).

Machado e Bianchini (2013) atribuem grande relevância ao pensamento matemático avançado, quando afirmam que, para obter bom desempenho em matemática, é necessário que o sujeito possua uma rica representação dos conceitos matemáticos. Dreyfus (2002) classifica uma representação como rica se ela tem vários aspectos do conceito articulados e pobre se possui poucos elementos que permitem a flexibilidade e articulação na resolução de problemas.

Para além de obter várias representações de um mesmo objeto matemático, é importante alternar essas representações para que o sujeito as articule corretamente. Isso porque, segundo Dreyfus (2002), o sujeito precisa possuir condições de mudar (transitar) de uma representação para outra, sempre que a outra seja mais eficiente para o próximo passo que ele queira dar. O autor apresenta, mais uma vez, o exemplo das funções que, segundo ele, partem de um conceito abstrato com o qual geralmente lidamos com uma ou várias representações a um só tempo, principalmente a representação gráfica e algébrica (DREYFUS, 2002).

Outro processo, a modelação, é entendido por Dreyfus (2002) como uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático e permite ao sujeito construir uma estrutura capaz de incorporar características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito. Um modelo matemático tem, portanto, o *status* de representação de uma situação física.

Dreyfus (2002) realça a importância de dispor de representações de um objeto matemático. Elas permitem maior flexibilização na resolução de problemas, gerando representações particulares e individuais e proporcionando comunicação matemática. Assim, esse processo mental está relacionado a outros, nomeadamente alternar e modelar.

Embora a abstração e representação sejam considerados os principais processos do pensamento matemático avançado, existem outros, entre os quais se destacam a descoberta, intuição, validação, prova e definição. Para Dreyfus (2002), descobrir ou redescobrir relações, por exemplo, é muitas vezes considerado entre as formas mais eficazes para as crianças aprenderem matemática.

No quadro 02, sintetizamos os principais processos que constituem o pensamento matemático avançado, os quais estão envolvidos nos processos de abstração e representação.

Quadro 02 – Síntese dos processos mentais envolvidos na abstração e representação

	Processos envolvidos na abstração
Abstração	Construir estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades de e relações entre objetos matemáticos; Pensar no objeto matemático para além do que se vê; pensar em suas estruturas, relações o seu todo.
Generalização	Derivar ou induzir a parte de indícios, para identificar pontos em comum, expandindo domínio de validade; Sair da zona dos casos particulares rumo aos casos gerais.
Sintetização	Conhecer ou compor partes para formar um todo.
	Processos envolvidos na representação
Representação	Representar significa gerar um exemplo, uma imagem ou um modelo do conceito; Ocorre por meio de três principais vias: simbólica, mental e visual.
Alternar (transitar)	Mudar de representação, sempre que for conveniente.
Modelação	Representação de uma situação física (um objeto ou processo não matemático).

Fonte: A autora, com base em Dreyfus (2002)

Inspirados por Dreyfus (2002), entendemos que o sujeito que generaliza padrões também faz uso da visualização e de representações, sejam mentais, visuais e simbólicas, principalmente para externalizar/registrar aquilo em que se pensa. Queremos dizer que, para generalizar, o sujeito mobiliza outros processos mentais e os põe em interação. Sendo assim, pela definição de Dreyfus (2002), entendemos que, se o sujeito generaliza padrões, então ele possivelmente desenvolve o pensamento matemático avançado.

Destacarmos que o pensamento avançado não é exclusivo da matemática, conforme defendem Resnick (1987) e Dreyfus (2002). Além disso, Dreyfus (2002) detalha os processos desse pensamento que estão presentes em outros campos, como a abstração em física, a representação em psicologia, a visualização em arte, entre outras possibilidades.

3.2 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Definir o pensamento algébrico não é uma tarefa fácil. Tanto que não há um consenso sobre isso (LINS; GIMENEZ, 2001). Na tentativa de definirmos e caracterizarmos esse pensamento, recorremos à literatura. De antemão já destacamos quão relacionado esse pensamento está ao processo de generalização – e isso discorremos nas próximas linhas.

Antes de tudo, destacamos que o pensamento algébrico é considerado um tipo especial do pensamento matemático (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LIMA; BIANCHINI, 2021), o qual discutimos no primeiro subcapítulo deste referencial teórico.

Começamos com Kriegler (2008), segundo o qual, o pensamento algébrico é organizado em dois componentes: desenvolvimento de ferramentas de pensamento matemático e estudo de ideias algébricas. Ferramentas de pensamento matemático são hábitos analíticos da mente que são organizados em torno de três tópicos: habilidades de resolução de problemas, de representação e de raciocínio quantitativo.

Já as ideias algébricas representam o domínio de conteúdo no qual as ferramentas de pensamento matemático se desenvolvem. Elas são exploradas por meio de três perspectivas: álgebra como aritmética generalizada (ou seja, o uso da álgebra para generalizar fatos aritméticos), como linguagem e ferramenta para funções e modelagem matemática (KRIEGLER, 2008). Entendemos que essas ideias algébricas (ou saberes algébricos) podem ser, por exemplo, ideias do conceito de função, expressões algébricas, reconhecimento de padrões.

Blanton e Kaput (2005) consideram o pensamento algébrico como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas. Para eles, esse pensamento pode assumir quatro formas, incluindo[12] a aritmética generalizada e generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais. Destacamos aqui essas duas formas do pensamento algébrico, pois entendemos serem as mais próximas à temática desta pesquisa e as mais presentes no contexto da educação básica, segundo Blanton e Kaput (2005).

Sobre a aritmética generalizada, os autores referem-se a raciocinar sobre operações e propriedades associadas a números, como generalizar a propriedade comutativa da multiplicação ou propriedades do zero. Nessa mesma perspectiva, Vlassis e Demonty (2022) exemplificam isso, destacando que os alunos podem transformar a expressão $(85 + 69) + 15$ em $(85 + 15) + 69$, mantendo o resultado. Nesse caso, a generalização ocorre quando entendemos que não importa se houver a alteração na posição dos números, pois o resultado será o mesmo.

Já a segunda forma, generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, significa explorar e expressar regularidades, como descrever padrões de crescimento ou generalizações sobre somas de números consecutivos (BLANTON; KAPUT, 2005).

Kieran (2004, p. 149, tradução nossa) define o pensamento algébrico como

> [...] o desenvolvimento de modos de pensar por meio de atividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser usado como ferramenta, mas que não são exclusivas da álgebra e podem ser abordadas sem nenhum uso de simbolismo algébrico, tais como analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer[13].

---

[12] Em caráter de informação para o leitor, destacamos que as outras duas formas são a modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações e a generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações.

[13] *"[...] involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting."*

Essas atividades que aparecem na definição configuram-se como uma “estrutura” para o pensamento algébrico ser desenvolvido em crianças e ser aprimorado à medida que elas crescem, segundo Kieran (2004).

Com base nas definições e características do pensamento algébrico elencadas até aqui, cabem os seguintes questionamentos: Como expressar esse pensamento algébrico e como saber se o que expressamos é, de fato, considerado pensamento algébrico?

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85, grifo nosso) ajudaram-nos a responder a essas perguntas. Eles consideram a linguagem como a expressão (podemos dizer representação) de um pensamento:

> A tendência da educação algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico **só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da álgebra.** Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto pedagógico, **a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento.**

À vista disso, entendemos que pensar algebricamente e representar esse pensamento não implica necessariamente o uso e a manipulação de símbolos e signos (pelo contrário). Inclusive, resumir a álgebra à manipulação simbólica significa reduzir sua riqueza a uma das suas facetas apenas (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; MASON, 1996; VALE et al., 2006; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Sob essa perspectiva, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem o uso de mais de uma linguagem para representar o pensamento algébrico por meio da linguagem aritmética, geométrica, materna ou da algébrica.

Já que podemos representar o pensamento algébrico utilizando mais de uma linguagem, não só a algébrica, então não há razão para não desenvolvermos esse pensamento nas crianças. O desenvolvimento do pensamento algébrico, portanto, pode ser iniciado nos alunos desde cedo (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; KIERAN, 2004; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), o que nos leva a imaginar a possibilidade de desenvolvimento dele nas turmas dos anos iniciais do ensino fundamental, por exemplo.

Fiorentini, Miorim, Miguel (1993) caracterizam o pensamento algébrico assim: i) percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; ii) tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema; iii) presença do processo de generalização.

Uma interpretação possível que surge daí é que, se o sujeito generaliza, então ele desenvolve o pensamento algébrico. Especificamente a generalização de padrões, nosso objeto de pesquisa, é considerada a base do pensamento algébrico (VALE, 2013) ou a base da estrutura do pensamento algébrico (CARDOSO, 2010) e uma das vias mais privilegiadas para desenvolver esse pensamento (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

As definições de pensamento algébrico apresentadas neste subcapítulo já nos sugeriram isso antes, devido à presença do processo de generalização nelas. Relembremos alguns pontos: i) Kriegler (2008): a álgebra como aritmética generalizada considerada um viés das ideias algébricas. ii) Blanton e Kaput (2005): o pensamento algébrico como um processo em que os sujeitos podem generalizar ideias matemáticas, processo que pode variar entre aritmética generalizada e generalização de padrões numéricos; iii) Kieran (2004): a generalização é considerada um meio pelo qual o sujeito pode desenvolver modos de pensar algebricamente.

Inclusive, a generalização é considerada como um elemento central do pensamento algébrico: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

O psicólogo Lev Vygotsky trouxe uma contribuição importante sobre a álgebra que, de certa forma, se relaciona com a generalização. Para ele, a álgebra "liberta" o pensamento da criança da prisão das dependências numéricas concretas e eleva a um nível de pensamento mais generalizado, o que lhe permite entender qualquer operação matemática e ter uma visão mais livre, abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica (VYGOTSKY, 2001).

Nesta pesquisa, assumimos o pensamento algébrico como o desenvolvimento de modos de pensar por meio de tarefas algébricas que contemplem a generalização de padrões, cujo processo para representar o que é pensado não requer o uso de simbolismos algébricos obrigatoriamente. Entendemos, portanto, que a definição de Kieran (2004) é a que mais se aproxima do que entendemos ser o pensamento algébrico.

3.3 OS PADRÕES MATEMÁTICOS

Ao longo desta pesquisa, destacamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento matemático avançado se relaciona diretamente com o processo de generalização de padrões. Mas, afinal, o que são padrões matemáticos?

Responder a essa pergunta requer lançar o olhar sobre a relação e importância dos padrões com/para a matemática. Isso porque a matemática é considerada a ciência dos padrões, segundo Devlin (2002). Ou seja, se pensarmos o sentido desses termos ao contrário, chegaremos à ideia de que os padrões são a essência da matemática, tal como defende Vale (2013).

O que o matemático faz é exatamente observar e descobrir esses padrões que podem ser numéricos, de forma, regularidade, posição, movimento, comportamento, contagem, simetria, raciocínio e comunicação, além de poderem ser tanto reais quanto imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos (DEVLIN, 2002).

Noutro trabalho, esse mesmo pesquisador também realça a importância dos padrões quando considera a matemática como compreensão de diversos tipos de padrões, ao mesmo tempo que tece uma crítica em relação ao papel assumido por essa ciência:

> [...] ao longo dos anos, à **medida que a matemática se tornou cada vez mais complicada**, as pessoas se concentraram cada vez mais nos números, nas fórmulas, nas equações e nos métodos e perderam de vista aquilo a que esses números, fórmulas e equações diziam respeito, bem como a razão pela qual esses métodos foram desenvolvidos. Perderam de vista o fato de que **a matemática não é apenas manipulação de símbolos** de acordo com regras misteriosas, **mas sim compreensão de padrões – padrões da natureza, padrões da vida, padrões de beleza** (DEVLIN, 1998, p. 206, grifo nosso, tradução nossa)[14].

O conceito de padrão é extenso! É um termo “com uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando restringimos apenas ao campo da matemática” (VALE et al., 2006, p. 14). Para esboçarmos nossa compreensão sobre o que venha a ser padrão, recorremos a Barbosa (2009) e Vale et al. (2006): para a primeira autora, padrão é todo o arranjo de números ou formas em que são detectadas regularidades passíveis

---

[14] “[…] *over the years, as mathematics became more and more complicated, people concentrated more and more on the numbers, the formulas, the equations, and the methods, and, lost sight of what those numbers, formulas, and equations were really about and why those methods were developed. They lost sight of the fact that mathematics is not about manipulating symbols according to arcane rules but is about understanding patterns – patterns of nature, patterns of life, patterns of beauty.”*

de continuar; já Vale et al. (2006) o entendem como regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem.

Entendemos e defendemos, nesta pesquisa, que um padrão matemático é todo arranjo de números ou formas, regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem, possíveis de continuar.

Há diversos tipos de padrões matemáticos, alguns, inclusive, já foram sugeridos por Devlin (2002) no início deste subcapítulo. Aqui trazemos e definimos os padrões do tipo sequência, numérico, crescimento, figurativo ou visual, geométrico, friso, repetição e de simetria, com base em Frobisher et al. (1999), Frobisher et al. (2007), Vale et al. (2006), Vale e Pimentel (2005), Vale e Barbosa (2019), cujo resultado apresentamos no quadro 03.

Quadro 03 – Tipos de padrões matemáticos

Tipos de padrão	**Definições**	**Referências**
Sequência	Conjunto de elementos matemáticos ordenados de acordo com uma regra.	Frobisher et al. (1999)
Numérico	Ligado à ideia de algum tipo de regularidade (repetição, recursiva) na qual se possa identificar uma lei que permita continuar a sequência numérica. Sequência na qual os elementos matemáticos são números.	Vale et al. (2006); Frobisher et al. (1999)
Crescimento	Cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior.	Vale e Barbosa (2019)
Figurativo ou visual	Os termos são representados sob a forma de figuras, símbolos ou objetos.	Vale e Barbosa (2019); Frobisher et al. (1999)
Geométrico	Envolve desenhos que ficam invariantes quando sujeitos à transformação geométricas, incluindo ideias relacionadas com o reconhecimento de formas, congruência e semelhança.	Vale e Pimentel (2005)
Friso	Diz respeito às formas que podem ser colocadas indefinidamente em uma superfície.	Frobisher et al. (2007)
Repetição	Sequência de números ou formas na qual se reconhece uma unidade (conjunto de elementos da sequência) que se repete ciclicamente.	Frobisher et al. (1999)
Simetria	É constituído por partes equivalentes que podem ser trocadas sem alterar a aparência global.	Frobisher et al. (2007)

Fonte: A autora, com base em Frobisher et al. (1999), Frobisher et al. (2007), Vale e Pimentel (2005), Vale et al. (2006), Vale e Barbosa (2019)

Chamamos a atenção para os padrões de crescimento e figurativos. Vale e Pimentel (2005) caracterizam esses dois tipos de padrões, o que nos fez relembrar os processos do pensamento matemático avançado, nesse caso visualizar, representar e alterar.

Na sequência numérica $(1,4,7,10,13,\dots)$, visualizar envolve reconhecer que há um padrão de crescimento entre os termos da sequência, de forma que qualquer termo subsequente seja calculado adicionando três unidades no anterior (VALE; PIMENTEL, 2005). Por outro lado, as autoras apresentam o exemplo dos números triangulares, que pode ser representado tanto por uma figura quanto por uma sequência numérica dada por $(1,3,6,10,15,\dots)$. Nesse caso, visualizar significa "ver" uma mesma situação sob perspectivas diferentes. Elas destacam a importância de os alunos estarem cientes de que há mais de uma representação para a mesma situação matemática, de forma que seja possível alterná-las.

Segundo Vale (2013), as investigações têm mostrado que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos e, em particular, para os dos níveis mais elementares e/ou com fragilidades no conhecimento matemático.

Além disso, os padrões em contextos figurativos têm um contributo importante na generalização (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; BARBOSA, 2009; VALE, 2013; BARBOSA; VALE, 2015; VALE; BARBOSA, 2019), pois possibilitam que os estudantes encontrem uma representação algébrica para os padrões, além de reforçarem as conexões entre as relações aritméticas e espaciais (BARBOSA; VALE, 2015; VALE; BARBOSA, 2019). Esse mesmo tipo de padrão também potencializa o desenvolvimento do raciocínio mais flexível, pois dele emergem múltiplas estratégias de generalização, segundo Lannin, Barker e Townsend (2006) e Barbosa (2009).

Considerando que as representações algébricas para os padrões podem assumir uma relação funcional[15], os padrões visuais podem ser um contexto facilitador para isso, uma vez que promovem diferentes formas de ver e generalizar esse tipo de padrão (BECKER; RIVERA, 2005; LANNIN; BARKER; TOWNSEND, 2006).

[15] Por exemplo, a sequência *(1,4,7,10,13,...),* de Vale e Pimentel (2005), pode ser representada por meio da representação algébrica *an=3n-2,* tal que *an* é o termo na sequência, *n* é a posição desse mesmo termo na sequência e *n>0 (n é maior que zero)*. Essa representação, de certa forma, contempla a ideia de variável independente e dependente e, logo, a relação funcional.

Em vários temas e aspectos da matemática, podemos encontrar, descobrir, criar e inventar inúmeros padrões, recorrendo à matemática mais elementar ou complexa, com estudantes de todas as idades. Isso, além de nos mostrar a diversidade de trabalhos que podemos desenvolver com os padrões, nos indica que pode ser feito com os estudantes desde cedo (VALE; PIMENTEL, 2005; KIERAN, 2004; VALE, 2013).

A presença dos padrões nas aulas de matemática traz alguns benefícios, um dos quais visa evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo (VALE; PIMENTEL, 2005), o que nos sugere a transversalidade dos padrões na própria matemática e em outras áreas do currículo. Tal transversalidade ocorre devido à profundidade e variedade de conexões que os padrões possibilitam com todos os tópicos da matemática (VALE; 2013; CARDOSO, 2010; VALE; PIMENTEL, 2015) e, ainda, potenciam capacidades transversais nos estudantes, como a comunicação, as representações, conexões e o raciocínio (VALE, 2013).

Explorar padrões permite construir, ampliar e significar conceitos matemáticos, estes muitas vezes aprendidos sem significado e sem relação entre eles (VALE; PIMENTEL, 2005; VALE, 2013; LIMA; BIANCHINI, 2021), sendo considerados um tema unificador (VALE et al., 2006).

Segundo Gualandi (2019), o trabalho com os padrões é decisivo para o desenvolvimento do pensamento algébrico em qualquer nível de ensino. Também defendemos essa ideia nesta pesquisa e, com base nela e nas discussões tecidas até aqui, entendemos que os padrões matemáticos se configuram como uma via (uma possibilidade, um convite) para os alunos chegarem à generalização.

3.4 A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS

Conforme apresentamos no subcapítulo 3.2, a generalização é considerada um dos processos mentais que, em interação, constituem o pensamento matemático avançado. Generalizar é “[...] derivar ou induzir de particulares, identificar semelhanças, expandir domínios de validade [...] (DREYFUS, 2002, p. 34). Agora vamos discutir mais a fundo sobre a generalização, ao mesmo tempo que faremos algumas articulações desta com as temáticas já apresentadas neste referencial teórico.

Trazemos à discussão Kaput (2000, p. 07, tradução nossa, grifo nosso), segundo o qual, a generalização significa

> [...] continuar o raciocínio para além do caso ou casos **considerados**, explicitamente **identificando e expondo semelhanças entre os casos,** ou elevando o raciocínio ou a comunicação a um nível em que o foco não está mais nos casos ou situações em si, mas nos padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre elas[16].

Comparando essas duas definições, uma interpretação possível que surge em relação ao processo de generalização é que ele parte da análise de casos particulares para a de casos gerais.

Kaput (2000) ilustra isso trazendo o exemplo da comutatividade na multiplicação de números naturais, trabalhada com crianças. A igualdade $9x4 = 4x9$ vale para esses determinados números, assim como vale para $2x7 = 7x2$, entre outras possibilidades. O questionamento que o autor lança ante esses casos particulares introduz o processo de generalização e faz-nos percebê-lo na matemática dita elementar, a saber: isso vale para todos os números?

Responder a essa pergunta com o “sim” requer desenvolver o processo de generalização, saindo dos casos particulares rumo aos casos gerais, ou seja, entender que $axb = bxa$ é verdadeiro para qualquer número natural (KAPUT, 2000).

Esse exemplo fez-nos lembrar as ideias algébricas, por meio das quais o pensamento algébrico se desenvolve (KRIEGLER, 2008), especialmente aquela parte que versa sobre a álgebra como aritmética generalizada (MASON, 1996; KAPUT, 2000; TALL, 2002; BLANTON; KAPUT, 2005; KRIEGLER, 2008; BARBOSA, 2009), isto é, o uso da álgebra para generalizar fatos aritméticos, o que foi ilustrado no exemplo de Kaput (2000). Além do mais, tarefas semelhantes a esse exemplo (ditas tarefas aritméticas) são caminhos capazes de levar o sujeito à generalização de padrões, segundo Blanton e Kaput (2005).

---

16 *“[...] involves deliberately extending the range of reasoning or communicationbeyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality acrosscases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is nolonger on thecases or situations themselves, but rather on the patterns, procedures, structures,and the relationsacross and among them.”*

Perceber essa relação de expansão dos casos particulares para os gerais fez-nos lançar o olhar sobre os padrões matemáticos e entender essa relação neles. Como exemplo, trouxemos a sequência dos números naturais pares $(0,2,4,6,8,\dots)$. Nesse caso, o processo de generalização começa quando se percebe as relações que há entre os termos dessa sequência e o padrão matemático presente ali, ou seja, os termos crescem de dois em dois, iniciando do zero, sendo ele um número par. A partir disso, inicia-se o processo de análise dessas relações, o que pode estender a expansão do caso particular ao caso geral, ou seja, compreender que sejam lá quais forem os termos representados pelas reticências, a eles sempre será acrescentado o dois, o que podemos algebrizar da seguinte forma $a_n = 2n - 2$, tal que a_n é um termo qualquer, $n > 0$ (n é maior que zero) e n é a posição do termo na sequência, sendo esta uma possibilidade.

Trouxemos esse exemplo dos números pares naturais na tentativa de ilustrar e realçar que a generalização pode surgir com o reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações, segundo Vale et al. (2006).

Mason (1996), Vale et al. (2006), Ponte, Branco e Matos (2009), Barbosa (2009) e Vale (2013) defendem que os padrões são uma possibilidade para os estudantes desenvolverem a capacidade de generalização, tanto que a busca por eles é indispensável nesse processo (VALE; PIMENTEL, 2005) e qualquer tipo de padrão é generalizável e passível de expansão (BARBOSA, 2009).

Ademais, a generalização de padrões pode desenvolver a abstração, conforme discutimos no subcapítulo 3.2, a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), além de desenvolver vários conceitos matemáticos (LIMA; BIANCHINI, 2021) e o pensamento matemático (GUALANDI, 2019).

No caso dos padrões numéricos, Lannin, Barker e Townsend (2006) defendem que a generalização desse tipo de padrão é vista como uma possibilidade para os estudantes transitarem do pensamento numérico para o algébrico, pois esse processo lhes permite estabelecer significados para símbolos algébricos, relacionando-os a um referente quantitativo.

Segundo Kaput (2000), o processo de generalização está presente nas salas de aula da educação básica, nos mais diversos conteúdos do currículo matemático. O autor confirma isso ao destacar que a generalização pode aparecer nas séries elementares. Ele ainda explica que a generalização começa na aritmética, nas situações de modelagem, na geometria e em praticamente toda a matemática (KAPUT, 2000). Em um sentido mais amplo, a generalização é considerada um elemento central em toda a matemática (MASON, 1996), fundamental na álgebra (BARBOSA, 2009) e inerente ao pensamento matemático (BARBOSA; VALE, 2015).

Os pesquisadores Irwin e Britt, citados por Vlassis e Demonty (2022), apresentam uma relação que, de certa forma, se aproxima das ideias de Kaput (2000). Para eles, as operações aritméticas que levam os alunos a produzir expressões equivalentes (por exemplo, para realizar $10 - 10 - 5 + 13$, é relevante entender que $+a - a$ sempre será 0, qualquer que seja o valor de a, segundo Vlassis e Demonty (2022)) envolvem um processo de generalização em que os próprios números atuam como variáveis, sem a utilização de simbolismo algébricos para isso, o que os autores chamam de quase variáveis, ou seja, uma sentença numérica que indica uma relação matemática implícita, que permanece verdadeira quaisquer que sejam os números usados.

A partir disso, entendemos que é possível desenvolver o processo de generalização em conceitos da aritmética, sem necessariamente utilizarmos o simbolismo algébrico. Aliás, a generalização começa na aritmética, tal como defende Kaput (2000). Isso nos fez, ainda, retomar a ideia da álgebra como aritmética generalizada (o uso da álgebra para generalizar fatos aritméticos).

Inspirados por Kaput (2000) e Irwin e Britt, citados por Vlassis e Demonty (2022), entendemos que a representação da generalização não requer necessariamente o uso da linguagem estritamente simbólica.

Sob essa perspectiva, defendemos que a linguagem algébrica nem sempre é o principal caminho escolhido para a representação de generalizações, como $axb = bxa$. Tanto que geralmente as crianças utilizam a argumentação por meio da linguagem materna – seja a fala, seja a escrita – ou dos gestos (KAPUT, 2000) e evoluem para uma representação mais formal, à medida que vão construindo outros conceitos matemáticos, para representarem ou expressarem a generalização (KAPUT, 2000; KAPUT; BLANTON, 2005; VALE, 2013). Ponte, Branco e Matos (2009) também compartilham dessa ideia e especificam que os estudantes dos anos iniciais utilizam normalmente a linguagem materna e os dos anos finais a algébrica.

Nessa mesma perspectiva, Cardoso (2010) confirma que a generalização de padrões pode ser representada de diversas maneiras, seja intuitivamente, por meio da linguagem materna, seja mais formalmente, em que os alunos recorrem à linguagem simbólica da matemática, às variáveis e fórmulas e se apoiam em outras representações, como desenhos, esquemas, tabelas e gráficos.

Podemos entender esse processo de representação de outro jeito, resgatando elementos que já discutimos. Se considerarmos a generalização de padrões como uma via para o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo este representado por meio da linguagem (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), então poderemos concluir que a generalização pode ser representada também por meio da linguagem, seja a algébrica, materna, aritmética, seja a geométrica.

Depois de termos discutido sobre como se representa a generalização de padrões, cabe agora entendermos o que geralmente se representa. Com essa intenção, discutiremos, no próximo subcapítulo, algumas das estratégias de generalização de padrões que perpassam a literatura.

3.4.1 Estratégias de generalização

Assim como Barbosa e Vale (2015), entendemos que a generalização de um padrão envolve o uso de uma estratégia e existem diversas abordagens que permitem aos alunos generalizar. Por essa razão, entendemos ser pertinente discutir sobre as estratégias de generalização que perpassam a literatura.

Iniciamos a discussão neste subcapítulo apresentando dois tipos de generalização: próxima e distante. De acordo com Stacey (1989), quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização caracteriza-se como próxima. Agora, quando há a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização configura-se distante.

Para discutirmos sobre as estratégias de generalização, recorremos a Stacey (1989), pesquisador que define essas estratégias como contagem, diferença e explícita. Becker e Rivera (2005) também contribuíram com uma estratégia que é muito utilizada não só para generalizar os padrões, senão para resolver diversas outras tarefas matemáticas: tentativa e erro.

Segundo Stacey (1989), a estratégia de contagem diz respeito a contar o número de elementos de um padrão, obtendo, assim, o termo da sequência solicitado. No caso dos padrões figurativos, podemos desenhá-los e contar seus elementos, por exemplo. Em tarefas que contemplam a generalização próxima, geralmente os estudantes optam pela estratégia da contagem (BARBOSA, 2009; BARBOSA; VALE, 2015). Essa escolha é feita com base na rápida obtenção da resposta solicitada pela tarefa, e, na maioria das vezes, essa escolha é certeira.

Se, com tarefas que contemplam a generalização próxima, a estratégia de contagem é a mais utilizada, no caso da generalização distante a situação é bem diferente. Isso porque, neste último caso, o uso da contagem pode ser um processo exaustivo e resultar em representações desorganizadas e complexas, segundo Barbosa e Vale (2015).

A estratégia da diferença refere-se à utilização de múltiplos da diferença entre o número de elementos de termos consecutivos. Essa estratégia subdivide-se em outras três: múltiplo da diferença sem e com ajuste, e recursiva (STACEY, 1989).

A estratégia do múltiplo da diferença sem e com ajuste visa a usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando, ou não, o resultado. Por exemplo, na sequência dos números naturais pares $(0,2,4,6,8,\dots)$, a diferença entre termos consecutivos é 2. Nesse caso, todos os termos dessa sequência são justamente múltiplos de 2, pois $2.0 = 0$, $2.2 = 4$, $2.3 = 6$ e assim por diante, sem a necessidade de fazer ajuste.

Para exemplificarmos a estratégia do múltiplo da diferença com ajuste, recorremos à sequência $(3,5,8,12,17,23,30,\dots)$. Nesse caso, para encontrarmos os termos, uma opção seria calcular a diferença entre os termos consecutivos e fazer um ajuste no final, a partir do termo da 2.ª posição, nesse caso o 5. Por exemplo, o 3.º termo pode ser dado por $8 = 5 + (5 - 3) + 1$, em que $5 - 1$ diz respeito à diferença entre termos consecutivos, enquanto o $+1$ seria o ajuste final. Da mesma forma, o 4.º termo pode ser calculado por $12 = 8 + (8 - 5) + 1$. Já o 7.º termo seria $30 = 23 + (23 - 17) + 1$. Podemos representar essa ideia por meio da linguagem algébrica, tal que $a_n = a_{n-1} + (\ a_{n-1} -\ a_{n-2}) + 1 = 2\,a_{n-1} -\ a_{n-2} + 1$. Isso significa afirmar que $a_n = 2\,a_{n-1} -\ a_{n-2} + 1$, em que a_n é um termo qualquer, n é a posição desse termo na sequência e $n > 0$ (n é maior que zero). Vale esclarece que a_{n-1} é o termo anterior a a_n, da mesma forma que a_{n-2} é o termo anterior a a_{n-1}.

Por exemplo, se queremos encontrar o 7.º termo dessa sequência, nesse caso temos que $n = 7$, $a_{n-1} = 23$, $a_{n-2} = 17$. Inserindo esses valores em $a_n = 2.a_{n-1} - a_{n-2} + 1$, temos: $a_7 = 2.23 - 17 + 1 = 30$. Logo, o 7.º termo da sequência é 30.

A diferença recursiva diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos (STACEY, 1989). Ainda com o exemplo dos números pares $(0,2,4,6,8,\ldots)$, destacamos que, para continuarmos essa sequência, devemos somar o 2 aos termos dela; logo, 10 é o próximo termo.

Segundo Lannin, Barker e Townsend (2006), a estratégia da diferença pode ser utilizada para realizar generalizações tanto próximas quanto distantes. Geralmente os fatores que determinam a utilização dessa estratégia são a visualização que os alunos têm do padrão e a estrutura matemática identificada por eles em relação a esse padrão.

Especificamente sobre a estratégia recursiva, Lannin, Barker e Townsend (2006) explicam que os estudantes podem determinar uma regra recursiva com base na compreensão do contexto da tarefa ou por meio de propriedades estritamente numéricas sem muita conexão com o contexto da tarefa. Segundo os resultados da pesquisa desses autores, as características dos termos da sequência influenciaram os participantes a optar por esse tipo de estratégia. Além disso, a visualização dos alunos impactou o uso dessa estratégia, uma vez que eles recorreram à recursão quando aparentemente tinham uma representação visual da situação ou quando se concentravam nas relações numéricas descontextualizadas (LANNIN; BARKER; TOWNSEND, 2006).

Ressaltamos que a estratégia recursiva tende a ser a mais utilizada pelos estudantes, justamente por ela não requerer nenhum tipo de ajuste, segundo Stacey (1989) e Barbosa e Vale (2015).

Na estratégia explícita, buscamos construir uma regra que permita encontrar, de imediato, qualquer termo da sequência. Com base nessa definição, entendemos ser possível relacionar essa estratégia com uma das maneiras de representação do processo de generalização de padrões, visto que, por meio da linguagem algébrica, podemos expressar o que pensamos e generalizamos.

Lannin, Barker e Townsend (2006) explicam que, para um padrão que possui termos iniciais consecutivos com valores relativamente distantes, a tendência é a utilização de uma estratégia explícita. Ademais, eles afirmam que raramente essa estratégia é a primeira escolhida pelos alunos, pois, para usá-la, eles precisam compreender todas as características de formação e crescimento do padrão. Os autores ainda defendem que os alunos preferem optar pela estratégia recursiva em detrimento da formulação de uma regra explícita.

Embora a estratégia de contagem seja mais utilizada em generalizações próximas (BARBOSA, 2009), Lannin, Barker e Townsend (2006) defendem que essa estratégia pode ser o ponto de partida rumo à estratégia explícita. Para eles, as representações visuais que levam a regras explícitas geralmente estão ligadas à estratégia de contagem que um aluno emprega e pode ajudá-los a desenvolver regras explícitas para uma situação particular.

Segundo Becker e Rivera (2005), a estratégia de tentativa e erro pode ser entendida de duas maneiras: o aluno pode adivinhar (aleatoriamente) a regra geral do padrão utilizando expressões algébricas ou estabelecer uma possibilidade de regra geral do padrão e, em seguida, experimentar valores para verificar se sua tentativa obteve sucesso.

Na estratégia de tentativa e erro, os alunos geralmente não atribuem sentido às relações descobertas nos padrões, justamente pelo caráter aleatório dessa estratégia, levando-os à formulação de regras de generalização sem êxito (BACKER; RIVERA, 2005; TREVISANI, 2012). Lannin, Barker e Townsend (2006) também concordam com essa ideia, mas utilizam outros termos para descrevê-la. Segundo os autores, os estudantes com uma representação visual pobre recorrem, muitas vezes, a “adivinhar e checar” generalizações, ou seja, a tentativa e erro. Vale e Barbosa (2019) consideram essa estratégia como a mais utilizada em situações que contemplam a generalização distante.

Ainda segundo Vale e Barbosa (2019), geralmente os estudantes se desempenham melhor em tarefas que contemplam a generalização próxima, não nos casos de generalização distante. Os autores explicam que, nesse último caso, os estudantes possuem dificuldades na aplicação da estratégia errada ou na apresentação da resposta.

No quadro 04, sintetizamos as estratégias de generalização de padrões apresentadas anteriormente, as quais têm base em Becker e Rivera (2005) e Stacey (1989).

Quadro 04 – Síntese das estratégias de generalização de padrões

Estratégias de generalização	**Subdivisões das estratégias**	**Descrições**	**Autores**
Contagem	-	Para obter o termo solicitado, contam-se os termos da sequência ou desenha-se o padrão e conta os seus elementos.	Stacey (1989)
Diferença	Recursiva	Visa a calcular a diferença entre dois termos, completar os termos da sequência para, assim, encontrar o termo solicitado.	Stacey (1989)
	Múltiplo da diferença sem ajuste	Significa calcular e usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado final.	
	Múltiplo da diferença com ajuste	Significa calcular e usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e ajustar o resultado final.	
Tentativa e erro	-	Adivinhar a regra geral do padrão ou estabelecer uma possibilidade de regra geral e testar valores para verificar se está correto ou não.	Becker e Rivera (2005)

Fonte: A autora, com base em Stacey (1989) e Becker e Rivera (2005)

Neste subcapítulo, apresentamos algumas possibilidades de generalização que perpassam a literatura. Com base em nossos estudos, entendemos que essas estratégias utilizadas pelos sujeitos são também representações, por escrito, daquilo que eles generalizam, ou seja, é uma forma de externalizar o que pensam.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Para a escrita da metodologia desta pesquisa, dividimos este capítulo em seis subcapítulos: no primeiro, apresentamos e descrevemos o contexto e os sujeitos da pesquisa; no segundo, discorremos acerca da natureza e do tipo de pesquisa; no terceiro, tratamos dos instrumentos de produção de dados utilizados nesta investigação; no quarto, discutimos a metodologia da análise de dados; no quinto, apresentamos as tarefas do livro didático, as análises que realizamos delas e sugestões de adaptações; no sexto e último, detalhamos a maneira como procedemos à pesquisa em campo e descrevemos o desenvolvimento das tarefas com os sujeitos da investigação.

4.1 CONTEXTO ESCOLAR E SUJEITOS DA PESQUISA

Esta pesquisa[17] foi realizada em uma escola municipal de ensino fundamental localizada em Marataízes, sul do estado do Espírito Santo. Segundo o Instituto Capixaba de Pesquisa, Assistência Técnica e Extensão Rural (ESPÍRITO SANTO, 2020), o bairro em que a escola está inserida faz parte da zona rural, uma das quatro principais regiões de Marataízes, além da Cidade Nova, Barra do Itapemirim e Centro.

Destacamos que Marataízes não possui sistema de ensino próprio, por isso baseia-se no currículo do Espírito Santo para orientar e organizar os trabalhos e o ensino nas respectivas unidades escolares.

Considerando que o projeto político-pedagógico da escola está em fase de elaboração, realizamos uma entrevista com a gestora. De acordo com ela, a referida escola foi construída em 2004 e é a única instituição de ensino do bairro. Recebe estudantes de comunidades vizinhas e atualmente conta cinco turmas do 1.º ao 5.º ano no período matutino e sete do 6.º ao 9.º ano no período vespertino, totalizando 210 alunos.

Especificamente a turma do 7.º ano do ensino fundamental da escola, espaço em que realizamos esta pesquisa, conta 16 alunos regularmente matriculados. Segundo a gestora, as idades dos estudantes variam de 12 a 13 anos e, em alguns casos, 14. A

[17] Esta pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa com Seres Humanos da Ufes *campus* de Alegre-ES, em 9 de junho de 2022, por meio do Parecer n.º 5.458.344.

maioria são moradores de comunidades vizinhas e também da zona rural. Salientamos que dos 16 estudantes matriculados nessa turma, 8 aceitaram ser sujeitos desta pesquisa.

O corpo docente da escola é formado por 8 professores dos anos iniciais e 11 dos anos finais do ensino fundamental, destes 2 professores são de matemática, 8 são efetivos e 11 trabalham sob a designação temporária. Além desses profissionais, a escola conta 6 funcionários de serviços gerais e também 6 dedicados à secretaria, à gestão e ao pedagógico, totalizando 31 funcionários.

Questionamos a gestora sobre o índice de evasão anual dos alunos. Ela nos respondeu que esse índice é muito baixo, sendo 1%, o que significa que, em média, dois alunos deixam a escola por ano.

No que se refere à infraestrutura da escola, observamos que é um espaço pequeno que comporta sete salas de aula, dois banheiros, um refeitório, cozinha, sala de professores e secretaria. A escola possui um pátio grande, o mesmo em que os profissionais estacionam suas motocicletas. Para realizarem as aulas práticas de educação física, os estudantes precisam descer o morro rumo à quadra de esportes da comunidade, pois a escola não possui uma própria.

Questionamos a gestora também sobre o impacto dessa instituição de ensino na vida dos estudantes. Para ela, a escola em questão atua como um norteador para a vida dos alunos e impulsiona-os a conquistar sonhos. Ela explicou que todos os estudantes do 9.º ano foram matriculados no ensino médio, progredindo, assim, nos seus estudos. Nessa perspectiva, a gestora também destacou que muitos dos ex-alunos da escola alcançaram o ensino superior ou concurso público e assumiram vagas de emprego, tais como as de professor, dentista, engenheiro, entre outras.

Dois critérios foram utilizados para a escolha dessa instituição de ensino: o primeiro diz respeito ao vínculo que há entre a pesquisadora e essa escola, pois nela a pesquisadora cursou a etapa do ensino fundamental (2004-2012); o segundo refere-se à localização da escola, porque a pesquisadora reside perto da escola, também na zona rural.

4.2 NATUREZA E TIPO DA PESQUISA

Com a intenção de respondermos à questão de investigação - de que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico? – desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa na conceituação de Bogdan e Biklen (1994), e do tipo estudo de caso, na acepção de Ponte (2006) e André (2005; 2013).

Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a investigação qualitativa com base em cinco aspectos, os quais podem, ou não, estar presentes em sua totalidade em um estudo. Apresentamos aqui aqueles que direcionam esta investigação, a saber: i) a coleta de dados é realizada em seu ambiente natural, em contato direto e pessoal com os sujeitos – o pesquisador é instrumento-chave nesse processo; ii) a investigação qualitativa é descritiva e os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos pessoais e outros registos oficiais; iii) o foco é dado ao processo, não só aos resultados; iv) os dados são analisados de forma indutiva, ou seja, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares se agrupam.

Uma investigação é considerada qualitativa quando há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. Por isso, a questão a ser investigada não se estabelece mediante a operacionalização de variáveis, mas, sim, formulada com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em contexto natural (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Em pesquisas dessa natureza, o ambiente natural é a fonte direta para a produção de dados, e o pesquisador é instrumento-chave nesse processo. Os dados produzidos são considerados qualitativos, isto é, ricos em detalhes particulares e descritivos, relativos a pessoas, locais, conversas, entre outras possibilidades, segundo Bogdan e Biklen (1994).

Sendo assim, consideramos esta pesquisa como qualitativa, pois ela atende às características definidas por Bogdan e Biklen (1994) para pesquisas dessa natureza, principalmente por ela ser descritiva e ter o ambiente natural como fonte para a produção de dados que são analisados de forma indutiva.

Recorremos a Ponte (2006) e André (2005; 2013) para discutirmos sobre o tipo desta pesquisa. De acordo com André (2005), optar por estudo de caso depende naturalmente daquilo que o pesquisador se propôs a investigar, ou seja, de seu objeto de pesquisa, de seus objetivos e da questão-problema.

Para Ponte (2006), o estudo de caso é de cunho descritivo e tem por objetivo conhecer, em profundidade, o “como” e os “porquês” da realidade investigada. Aqui, o pesquisador não busca modificar essa realidade, mas compreendê-la tal qual ela é. O autor define o estudo de caso como aquele que

> [...] se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (PONTE, 2006, p. 02).

As ideias de André (2005) e Ponte (2006) aproximam-se à medida que caracterizam o estudo de caso como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir que há nela de mais essencial e característico. Sob essa perspectiva, André (2005) defende que o estudo de caso possibilita uma visão profunda e ao mesmo tempo ampla e integrada do objeto investigado.

Responder à pergunta “qual é o caso?” dispara as pesquisas desse tipo, segundo André (2013). A autora explica que, depois que identificar e delimitar o caso, o pesquisador poderá, então, iniciar a fase da produção de dados da pesquisa, utilizando diferentes instrumentos, cuja discussão se estende no subcapítulo 4.3.

Com base em Ponte (2006) e André (2005; 2013), caracterizamos esta pesquisa como do tipo de estudo de caso, cujo caso é a generalização de padrões realizada por um grupo de estudantes do 7.º ano do ensino fundamental. Além disso, entendemos que com esta pesquisa buscamos investigar o “como” (ou “de que forma”, fazendo referência à nossa questão de pesquisa) da realidade investigada, na tentativa de compreendê-la e não mudá-la. Ainda, esta pesquisa foi desenvolvida com alunos do 7.º ano do ensino fundamental, todos de uma mesma turma e unidade escolar, cujas tarefas foram retiradas de seus livros didáticos, isto é, uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, tal como designam André (2005) e Ponte (2006).

Portanto, entendemos que a abordagem qualitativa e o estudo de caso se constituíram como natureza e tipo de pesquisa, ambos essenciais para investigarmos a generalização de padrões no contexto dos anos finais do ensino fundamental, alcançarmos as ações traçadas e respondermos à questão de investigação.

4.3 INSTRUMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS

Neste subcapítulo, destacamos as ações traçadas e apresentamos os instrumentos de produção de dados escolhidos para esta pesquisa.

A primeira ação diz respeito a identificar, no livro didático do 7.º ano do ensino fundamental, tarefas associadas à generalização de padrões. Para tanto, analisamos o livro didático “A conquista da matemática”, de Giovanni Júnior e Castrucci (2018), que é utilizado como recurso para ensinar matemática na turma investigada. Após a identificação dessas tarefas no livro didático, buscamos realizar a segunda ação: selecionar essas tarefas associadas à generalização de padrões.

Em colaboração com o professor da turma, desempenhamos a terceira ação: propor essas tarefas a um grupo de estudantes do 7.º ano do ensino fundamental. Isso foi realizado por meio de quatro etapas, tais como apresentadas no quadro 05. No total, seis tarefas foram propostas aos participantes da pesquisa.

Quadro 05 – Etapas para o desenvolvimento da terceira ação da pesquisa

Etapas	Descrições
1	Apresentamos a pesquisa para os estudantes da turma do 7.º ano selecionada; Convidamos os estudantes para participarem da pesquisa e enviamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) a seus pais/responsáveis e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) aos estudantes (anexos C e D, respectivamente).
2	Recolhemos o TCLE e TALE.
3	Os participantes foram convidados para resolverem duas tarefas do livro didático, que chamamos de tarefa 1 e tarefa 2, constituídas por 4 e 8 itens, respectivamente; Após a resolução das tarefas, desenvolvemos uma roda de conversa, em que os participantes puderam socializar conosco e com os demais participantes seus achados, além de comentarem como (ou o que) pensaram para generalizar os padrões presentes nas tarefas propostas; Ao final do encontro, recolhemos os registros dos participantes.

4	Convidamos os participantes para resolverem duas tarefas do livro didático, que chamamos de tarefa 3 e tarefa 4, formadas por 4 e 5 itens, respectivamente; Em seguida, desenvolvemos uma roda de conversa, em que os participantes puderam socializar conosco e com os demais participantes o que pensaram para resolver as tarefas; Recolhemos os registros dos participantes no final.
5	Convidamos os participantes para resolverem duas tarefas do livro didático, isto é, as tarefas 5 e 6, constituídas por 5 e 8 itens, respectivamente; Desenvolvemos uma roda de conversa; Recolhemos os registros dos participantes.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

No momento em que os estudantes resolviam as tarefas, a pesquisadora utilizou a observação participante. Esse instrumento de produção de dados é um dos mais utilizados em pesquisas do tipo estudo de caso (ANDRÉ, 2005; 2013) e um dos mais representativos da abordagem qualitativa e permite ao pesquisador observar o campo de estudo e participar dele simultaneamente (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Segundo Ludke e André (2013), a observação, de modo geral, é ou utilizada como o principal instrumento de investigação, ou associada a outros, além de possibilitar um contato pessoal e estreito entre o contexto investigado e o pesquisador.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), todas as informações pertinentes, sejam ideias, estratégias, reflexões e palpites, devem ser registradas em notas de campo, que são relatos, por escrito, de tudo aquilo que o pesquisador ouve, vê e experiencia no campo de estudo. Nesse sentido, André (2013) alerta-nos sobre a necessidade de fazer um registro detalhado e claro do que foi observado, justamente para depois servir de dados para a realização e descrição de futuras análises.

Sendo assim, propomos as tarefas aos estudantes, observamos e participamos com eles nesse momento, além de registrarmos informações pertinentes às notas de campo.

Nas etapas 03, 04 e 05 utilizamos dois instrumentos de pesquisa, sendo estes os registros dos estudantes (as tarefas que eles resolveram) e as discussões tecidas nas rodas de conversa (que foram filmadas e posteriormente transcritas).

As rodas de conversa foram uma oportunidade para os estudantes socializarem conosco e com os demais participantes os seus achados, além de comentarem como (ou o que) pensaram para generalizar os padrões. Segundo Méllo et al. (2007), a roda de conversa é um instrumento metodológico que prioriza discussões em torno de uma temática e oportuniza maior intercâmbio de informações, possibilitando fluidez de discursos entre pesquisadores e participantes.

A roda de conversa inicia com a exposição de um tema pelo pesquisador a um grupo (selecionado de acordo com as ações da pesquisa). Depois disso, os participantes apresentam suas colaborações sobre esse tema e cada um instiga o outro a falar, argumentando e contra-argumentando entre si, posicionando-se e ouvindo o posicionamento do outro (MÉLLO et al., 2007).

No caso desta pesquisa, o tema que disparou as discussões nas rodas de conversa com os estudantes foram as estratégias que eles usaram para generalizar os padrões presentes nas tarefas, permitindo-lhes ouvir seus colegas ao mesmo tempo que podiam contribuir para as discussões.

Entendemos que esse momento da roda de conversa proporcionou discussões importantes para a produção de dados, pois ali pudemos ouvir o que os participantes pensaram para generalizar os padrões, dando-nos, assim, mais elementos para analisar os dados rumo à resposta da questão de pesquisa, além dos registros por escrito dos estudantes.

De acordo com André (2013), entre tantos instrumentos de produção de dados que podem ser utilizados em pesquisas do tipo estudo de caso, a autora destaca os grupos de discussão, o que consideramos ser também a roda de conversa.

Para realizarmos a quarta ação – analisar as estratégias utilizadas por um grupo de estudantes do 7.º ano do ensino fundamental, ao generalizarem padrões a partir de tarefas presentes no respectivo livro didático –, utilizamos como instrumentos as transcrições das rodas de conversa e os registros dos participantes.

Portanto, os instrumentos de produção de dados utilizados nesta pesquisa foram a observação participante, as notas de campo, os registros dos estudantes e transcrições das rodas de conversa.

4.4 METODOLOGIA DE ANÁLISE DE DADOS

Para analisarmos os dados produzidos nesta pesquisa, optamos pela metodologia de análise de conteúdo e recorremos a Bardin (1977) para discutirmos sobre isso. Segundo essa autora, a análise de conteúdo é “um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens”. O interesse não está na descrição do conteúdo, mas, sim, no que esse poderá nos informar. Nas palavras da autora, “a análise de conteúdo pode ser uma análise dos significados” (BARDIN, 1977, p. 34).

A análise de conteúdo é organizada em torno de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Considerada como a fase de organização inicial, a pré-análise tem três principais missões: a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a elaboração dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação final (BARDIN, 1977). Antes de executar as missões anteriores, é necessário realizar a leitura flutuante do documento submetido à análise, que consiste em uma leitura breve desse documento.

Segundo a autora, há dois tipos de documentos que podem ser submetidos à análise, que são os documentos naturais (produzidos espontaneamente na realidade e inclui tudo o que é comunicação) e documentos suscitados pela necessidade do estudo (por exemplo, respostas de questionários, testes, entre outras possibilidades). Com base nesses aspectos, entendemos que os dados produzidos nesta pesquisa se configuram como documentos capazes de ser submetidos à análise de conteúdo.

A segunda fase, exploração do material, consiste na operacionalização da codificação, em função dos objetivos traçados na fase anterior. Em outras palavras, essa fase é o momento em que analisamos o material com vista aos objetivos traçados para ele. Nessa perspectiva, a autora alertou sobre a importância de delinearmos bem os objetivos na fase anterior para esse momento da análise, uma vez que devemos “[...] saber a razão porque é que se analisa, e explicitá-lo de modo a que se possa saber como analisar (BARDIN, 1977, p. 103).

A codificação corresponde à transformação dos dados brutos do texto e “permite atingir uma representação do conteúdo, ou da sua expressão, susceptível de esclarecer ao analista acerca das características do texto” (BARDIN, 1977, p. 103). A codificação pode ser organizada mediante o recorte, a enumeração e a categorização.

O recorte é realizado com apoio na unidade de registro e contexto e serve de base para orientar a análise do documento. A unidade de registro pode ser um tema, uma palavra, um personagem, por exemplo (BARDIN, 1977).

A enumeração é uma forma de contabilizar os dados codificados. Conforme destaca Bardin (1977, p. 108), "é necessário fazer a distinção entre a unidade de registo – o que se conta – e a regra de enumeração – o modo de contagem". A enumeração pode ser realizada pela frequência (simples ou ponderada) dos dados, pela presença deles (ou ausência), pela intensidade, entre outras.

De acordo com Bardin (1977, p. 117), a categorização "[...] é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação", ou seja, aqui classificamos os dados codificados de um conjunto com base nos critérios de categorização. A autora esclarece que esses critérios podem ser formulados previamente ou não, o que ela denomina procedimentos com e sem categorização prévia.

Bardin (1977) explica os tipos de critérios, dando-nos alguns exemplos: i) critério léxico, que se relaciona com a classificação das palavras, segundo o seu sentido; ii) critério expressivo, por exemplo, as categorias que classificam as diversas perturbações da linguagem; iii) critério sintático: análise dos dados com base nos verbos, palavras, etc.; iv) critério semântico, categorias temáticas, por exemplo, todos os temas que significam a ansiedade ficam agrupados na categoria ansiedade.

Ainda sobre a categorização, Bardin (1977) entende-a como um processo do tipo estruturalista que comporta duas etapas: o inventário, que diz respeito a isolar os elementos; e a classificação, que se visa repartir os elementos e procurar certa organização dos dados.

A terceira e última fase corresponde ao tratamento dos resultados e interpretação. Na fase anterior, os dados brutos do documento são tratados de maneira a serem significativos. Daí em diante, o pesquisador pode criar quadros de resultados, figuras e diagramas, que põem em relevo os dados, e propor inferências que dizem respeito aos objetivos traçados na fase inicial. Esses resultados podem ser interpretados ante o quadro teórico definido na primeira fase ou apontar a necessidade de uma nova análise (BARDIN, 1977).

Com base na metodologia de Bardin (1977) aqui apresentada, considerando o objetivo desta pesquisa e os instrumentos de produção de dados descritos no subcapítulo anterior, entendemos que, na fase da pré-análise, as notas de campo, os registros dos alunos e as transcrições das rodas de conversa foram os documentos submetidos à análise. Para esses documentos, traçamos como objetivo investigar de que forma um grupo de estudantes do 7.º ano do ensino fundamental generaliza padrões matemáticos. Como indicadores que fundamentam a interpretação final dos dados, recorremos às discussões teóricas tecidas no referencial teórico desta pesquisa, no capítulo 3.

Na segunda fase, o recorte foi realizado por meio da unidade de registro denominada tema, que, nesse caso, foram as estratégias dos estudantes, quando eles generalizaram padrões. A categorização dos dados foi feita por meio do critério semântico, ou seja, criamos categorias de estratégias de generalização de padrões matemáticos.

Já na última fase, retornamos aos indicadores eleitos na primeira fase, pré-análise, com a intenção de interpretarmos os dados. Na figura 01, sintetizamos essas informações sobre a maneira como analisamos os dados na pesquisa com base na análise de conteúdo de Bardin (1977).

Figura 01 – Síntese da análise dos dados

Fonte: A autora, com base em Bardin (1977)

Nos próximos subcapítulos, discutiremos sobre as tarefas encontradas no livro didático, além de apresentarmos algumas análises e sugestões de reescrita. Em seguida, descreveremos e detalharemos como essas tarefas foram desenvolvidas com os estudantes.

4.5 AS TAREFAS DO LIVRO DIDÁTICO: ANÁLISE E SUGESTÕES DE ADAPTAÇÕES

Neste subcapítulo, apresentamos as tarefas do livro didático associadas à generalização de padrões, as análises que realizamos delas e as sugestões de adaptações de escrita.

O livro didático "A conquista da matemática", de Giovanni Júnior e Castrucci (2018), possui o total de 288 páginas e é constituído por nove unidades que se subdividem em 47 capítulos. No quadro 06, apresentamos essas unidades e os capítulos que elas abordam.

Quadro 06 – Organização das unidades e capítulos do livro didático

Unidades	Capítulos
1- Números naturais e operações	Os números naturais; operações com números naturais; divisores e múltiplos de um número natural.
2- O conjunto dos números inteiros	A ideia de número inteiro; os conjuntos dos números inteiros; módulo de um número inteiro; comparação de números inteiros; adição de números inteiros; subtração de números inteiros; adição algébrica; multiplicação de números inteiros; divisão exata de números inteiros; potenciação dos números inteiros; raiz quadrada exata dos números inteiros; expressões numéricas.
3- Transformações geométricas e simetria	Transformações no plano; simetria.
4- O conjunto dos números racionais	Os números racionais; adição algébrica de números racionais; multiplicação com números racionais; divisão com números racionais; potenciação de números racionais; raiz quadrada exata de números racionais; média aritmética e ponderada.
5- Linguagem algébrica e equações	Sequências; expressões algébricas; igualdade; equações; conjunto universo e solução de uma equação; equações equivalentes; equações do 1.º grau com uma incógnita; equações na resolução de problemas.
6- Figuras geométricas e planas	Ângulos; retas; triângulos; polígonos regulares; circunferências e construções geométricas.
7- Grandezas proporcionais	Razão; proporção; regra de três.

8- Porcentagem, probabilidade e estatística	Porcentagem; probabilidade; medidas em estatística; pesquisa estatística.
9- Área e volume	Área de figuras geométricas planas; volume.

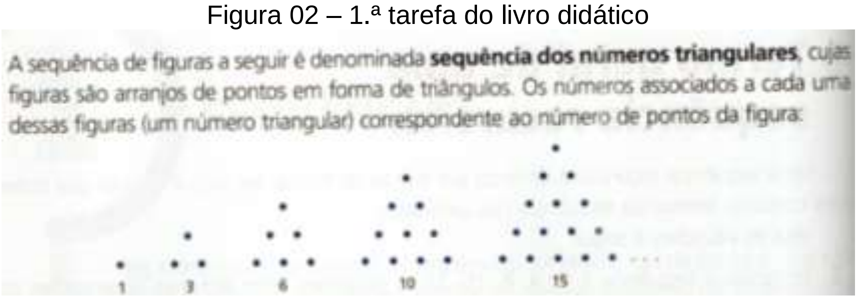
Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

As adaptações das tarefas foram realizadas visando possibilitar aos participantes o desenvolvimento do pensamento matemático, especificamente do pensamento algébrico, por meio da generalização de padrões matemáticos. Inicialmente selecionamos 14 tarefas, mas, depois de analisá-las, optamos por utilizar oito nesta pesquisa. Aqui discutiremos sobre elas.

Inspiramo-nos em Vale e Pimentel (2005) nesse processo de adaptação das tarefas, pois essas autoras defendem que é importante os alunos terem a oportunidade de transitar padrões concretos, pictóricos e simbólicos de uma representação para outra, descobrir o padrão numa sequência e descrevê-lo oralmente e por escrito. Essas características estão presentes nas tarefas que apresentamos adiante.

Na figura 02, apresentamos o que, na verdade, é um exemplo do livro didático, que se refere aos números triangulares e está presente na unidade de linguagem algébrica e equações e no capítulo de sequências. Nomeamos esse exemplo como 1.ª tarefa do livro didático.

Figura 02 – 1.ª tarefa do livro didático


A sequência de figuras a seguir é denominada **sequência dos números triangulares**, cujas figuras são arranjos de pontos em forma de triângulos. Os números associados a cada uma dessas figuras (um número triangular) correspondente ao número de pontos da figura:

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Para a adaptação da 1.ª tarefa, mantivemos a explicação acerca do que sejam os números triangulares e acrescentamos algumas perguntas, de forma a permitir ao participante o processo de generalização de padrões. No quadro 07, apresentamos a 1.ª tarefa adaptada e utilizada nesta pesquisa.

Quadro 07 – 1.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

A sequência de figuras a seguir é denominada sequência dos números triangulares, cujas figuras são arranjos de pontos em forma de triângulos. Os números associados a cada uma dessas figuras (um número triangular) correspondem ao número de pontos da figura:

Observe a sequência de triângulos:

a) Represente o próximo triângulo.

b) Escreva a sequência de números que representa a quantidade de pontos de cada figura.

c) Seguindo a lógica dessa sequência, quantos pontos o 7.º triângulo terá?

d) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica a seu colega?

Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Na alternativa a), nossa intenção foi permitir que o participante compreendesse que a sequência dos números triangulares continua nas próximas figuras e isso pode ser representado por meio de uma figura.

Assim como Vale e Barbosa (2019), entendemos que os padrões figurativos, cujos termos podem ser representados sob a forma de figura, facilitam a generalização e o estabelecimento de conexões entre vários modos de representação. Exatamente por isso, elaboramos a alternativa b) no intuito de possibilitar ao participante relacionar o padrão figural ali presente (triângulos formados pelas bolinhas azuis) a uma sequência numérica e representá-lo também por meio dessa sequência, isto é, fazer uso de mais de uma representação.

Com a alternativa d), tivemos a intenção de oportunizar ao participante analisar os casos particulares e poder encontrar os casos gerais – aqui fazemos referência a Kaput (2000) e Dreyfus (2002) –, ou seja, compreender o padrão nos termos representados pela 5.ª e 7.ª figuras e outras maiores. Tal alternativa também abriu margem para o participante utilizar qualquer tipo de representação, seja algébrica, aritmética, geométrica, seja na língua materna (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; KAPUT, 2000; CARDOSO, 2010).

Na figura 03, apresentamos outra tarefa, que nomeamos como 2.ª tarefa do livro didático, presente na unidade de linguagem algébrica e equações e no capítulo sobre sequências.

Figura 03 – 2.ª tarefa do livro didático

Identifique os termos destacados em cada sequência:

a) 3º e 6º termos em: 0, 0, 2, 0, 0, 0, 4

b) 1º termo em: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

c) 10º termo em: –1, 1, –1, 1, –1, 1, ...

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Na 2.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa, optamos por inserir as alternativas a) e c). Não utilizamos o item b), cuja sequência $(0,1,2,3,4,5,\dots)$ é formada por termos que aumentam de um em um, pois esse tipo de sequência e padrão são explorados em outra tarefa, que apresentamos mais adiante.

O padrão do tipo numérico é caracterizado como a sequência na qual os elementos são números (FROBISHER et al., 1999) e está ligado à ideia de algum tipo de regularidade, de forma que se identifique uma lei que permita continuar a sequência numérica (VALE et al., 2006). Mediante essas definições, entendemos que a alternativa a) contempla o padrão do tipo numérico.

O padrão do tipo repetição é entendido como a sequência de números ou formas na qual se reconhece uma unidade, ou seja, conjunto de elementos da sequência que se repete ciclicamente (FROBISHER et al., 1999). Sendo assim, deduzimos que o padrão da alternativa c) é de repetição, pois os termos -1 e 1 se repetem ciclicamente.

Decidimos inserir outra tarefa, que nomeamos 3.ª tarefa do livro didático, cuja unidade é a de linguagem algébrica e equações no capítulo sobre sequências. Apresentamos essa tarefa na figura 04.

Figura 04 – 3.ª tarefa do livro didático

Forneça lei de formação para cada sequência a seguir. Depois, determine os dois próximos termos dela.

a) 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, ...

b) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

c) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ...

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Utilizamos as sequências das alternativas b) e c). Não selecionamos a a) devido à quantidade de alternativas escolhidas até aqui e ao tempo de resolução que os participantes teriam.

Para Frobisher et al. (1999), o padrão do tipo sequência é considerado como um conjunto de elementos matemáticos ordenados de acordo com uma regra. Sendo assim, entendemos que a alternativa b) contempla o padrão desse tipo, pois envolve o conjunto dos múltiplos de 3, contando a partir do 3. Também caracterizamos o padrão dessa tarefa como numérico.

Na c) o padrão de crescimento é variado, já que ao termo 3 são acrescentadas duas unidades, resultando em 5. Ao termo 5 é acrescentado 3 e assim por diante. Isso significa dizer que sempre é acrescentado uma unidade ao padrão de crescimento daquela sequência numérica. Desse modo, entendemos que o padrão das alternativas b) e c) são do tipo sequência, numérico e de crescimento, Frobisher et al. (1999).

No quadro 08, apresentamos a 2.ª tarefa utilizada na pesquisa, que foi adaptada com base na 2.ª e 3.ª tarefas do livro didático, de acordo com as figuras 03 e 04.

Quadro 08 – 2.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Analise as questões abaixo e responda: **a)** (0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6) Complete a sequência até o 18.º termo. Explique o que você pensou. **b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27…). O que você observa nessa sequência? Qual será o 12.º termo? **c)** (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1,…) Qual será o 10.º termo? Qual será o 20.º termo? Qual será o 100.º termo? Qual será o 55.º termo? Explique o que você pensou. **d)** (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30,...) Complete a sequência até o 10.º termo. O que você observa nessa sequência?

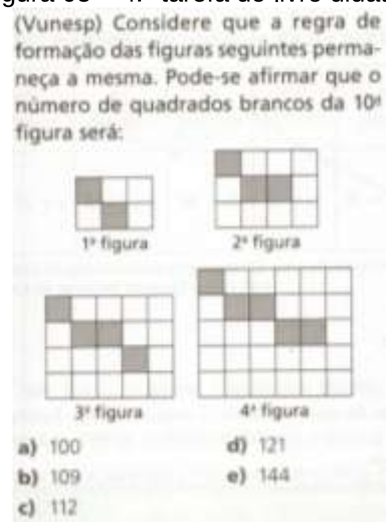
Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Na alternativa a), acrescentamos mais termos na sequência, o que resultou em $(0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6)$. Já na c), questionamos os termos 10.º, 20.º, 100.º e 55.º com o interesse em provocar o participante a perceber que os termos em posições pares se referem ao 1 e em posições ímpares, -1. Fizemos isso porque partimos da ideia de que é possível desenvolver o pensamento matemático avançado em estudantes de qualquer nível de ensino, por meio tanto da resolução de problemas quanto da interpretação de uma sequência, entre outras possibilidades (GUALANDI, 2019).

Em todas essas alternativas, disponibilizamos um espaço para o participante nos explicar o que (ou como) pensou para resolver a tarefa, possibilitando-lhe, mais uma vez, utilizar qualquer tipo de representação que desejasse e lhe fosse conveniente, tal como nos sugerem Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kaput (2000) e Cardoso (2010).

Na figura 05, apresentamos outra tarefa, que nomeamos de 4.ª tarefa do livro didático, presente na unidade de linguagem algébrica e equações, precisamente na parte de revisão dessa unidade.

Figura 05 – 4.ª tarefa do livro didático



(Vunesp) Considere que a regra de formação das figuras seguintes permaneça a mesma. Pode-se afirmar que o número de quadrados brancos da 10ª figura será:

1ª figura

2ª figura

3ª figura

4ª figura

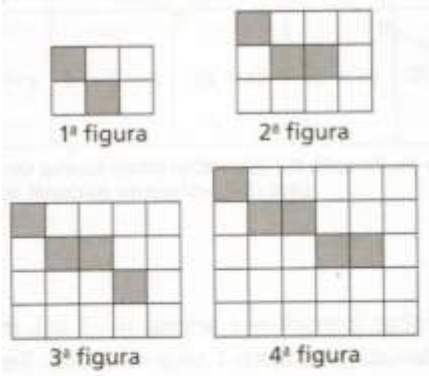
a) 100
b) 109
c) 112
d) 121
e) 144

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Para a adaptação dessa tarefa, retiramos o termo “regra de formação” e complementamos com outras questões. Apresentamos o resultado no quadro 09 a seguir.

Quadro 09 – 3.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Observe a sequência de figuras e responda às questões.



a) Represente a 5.ª figura.

b) Escreva a sequência de números que representa os quadrados brancos.

c) Escreva a sequência de números que representa os quadrados cinza.

d) Quantos quadrados brancos terá a 10.ª figura? Explique o que você pensou.

e) Quantos quadrados cinza terá a 10.ª figura? Explique o que você pensou.

Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Na alternativa a), tivemos a ideia de oportunizar ao participante lidar com a representação de padrões figurativos, principalmente para ele poder compreender o padrão que há ali e representá-lo de outra maneira; nesse caso, por meio de uma sequência numérica, conforme foi pedido nas alternativas b) e c).

Aqui lembramos um dos processos do pensamento matemático avançado – alternar – que possibilita ao sujeito transitar de uma representação para outra, sempre que a outra seja mais eficaz para o próximo passo que ele queira dar, segundo Dreyfus (2002).

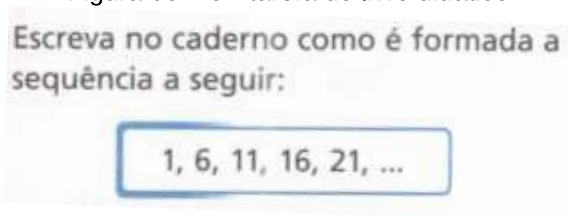
Já nas alternativas d) e e), intencionamos proporcionar aos participantes a generalização de padrões presentes nos quadrados cinza e brancos, mais uma vez deixando-os livres para a escolha do tipo de representação.

Conforme já discutimos, na adaptação da 2.ª tarefa, quadro 09, não utilizamos a sequência $(0,1,2,3,4,5,\ldots)$, porque o padrão presente ali é, de certa forma, semelhante ao da sequência formada pelos quadrados cinza nessa tarefa, que, nesse caso, é representada por $(2,3,4,5,\ldots)$. Sendo assim, decidimos trabalhar com essa sequência apenas na 3.ª tarefa adaptada que apresentamos no quadro 10.

Sobre tarefas que valorizam a descoberta de padrões em contextos visuais, Cardoso (2010) destaca que é importante começar pelas de contagens, com suporte visual, privilegiando a intuição visual acerca dos números e de suas relações, conforme abordamos na alternativa a), como requisito para o trabalho posterior com sequências, de repetição e de crescimento, como adaptamos as alternativas b) e c), para finalizar com problemas em que a sequência não é apresentada de modo explícito, assim como as alternativas d) e e).

Agora apresentamos, na figura 06, outra tarefa, que intitulamos como 5.ª tarefa do livro didático, presente na unidade de números naturais e operações, principalmente no capítulo sobre números naturais.

Figura 06 – 5.ª tarefa do livro didático



Escreva no caderno como é formada a sequência a seguir:

1, 6, 11, 16, 21, ...

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Essa tarefa solicita que o estudante entenda e escreva o padrão ali presente, isto é, que a cada termo da sequência são acrescentadas cinco unidades, sendo $6 = 5 + 1$, tal como $11 = 6 + 5$ e assim por diante. Em outras palavras, os termos “crescem” de cinco em cinco, começando do número 1. Nessa tarefa, destacamos uma das formas do pensamento algébrico, assumida por Blanton e Kaput (2005), que se refere à generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, o que significa explorar e expressar regularidades, como descrever padrões de crescimento. Entendemos, assim, que essa tarefa contempla padrões do tipo numérico e de crescimento.

Ainda, percebemos outro padrão que, desta vez, não se refere aos termos da sequência, mas, sim, aos algarismos das unidades dos termos da sequência, que são sempre 1 e 6.

O resultado da adaptação da 4.ª tarefa do livro didático é apresentado no quadro 10, que nomeamos 4.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa.

Quadro 10 – 4.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Observe a sequência abaixo e responda às questões.
(1, 6, 11, 16, 21, …)
a) Continue a escrita dessa sequência até o 10.º termo.
b) O que você observa em relação aos termos dessa sequência?
c) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica a seu colega?

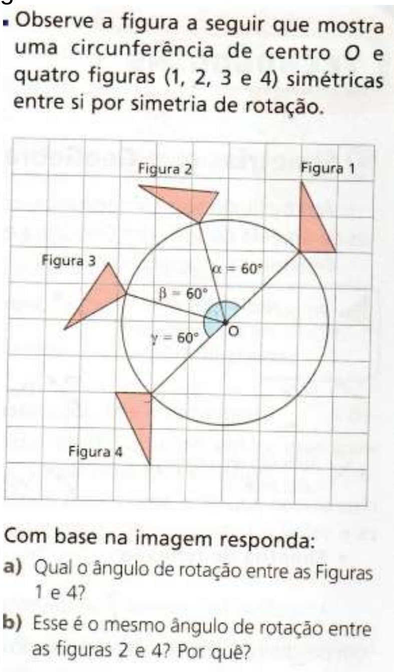
Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Destacamos as alternativas a) e b), nas quais questionamos a respeito do 10.º termo e das relações que há entre os outros termos da sequência, justamente para o participante perceber o padrão ali presente, dando-lhe possibilidades para chegar à generalização na letra c).

Destacamos também a troca de informações do enunciado da tarefa, pois antes era “escreva no caderno como é formada a sequência a seguir” e passou a ser “observe a sequência abaixo e responda às questões”.

Agora, mostramos outra tarefa do livro didático, especificamente na unidade de transformações geométricas e simetria, no capítulo que trata sobre simetria.

Figura 07 – 6.ª tarefa do livro didático


- Observe a figura a seguir que mostra uma circunferência de centro *O* e quatro figuras (1, 2, 3 e 4) simétricas entre si por simetria de rotação.

Com base na imagem responda:

a) Qual o ângulo de rotação entre as Figuras 1 e 4?

b) Esse é o mesmo ângulo de rotação entre as figuras 2 e 4? Por quê?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

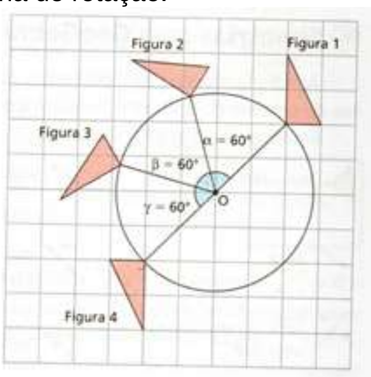
Frobisher et al. (2007) entendem o padrão de simetria como aquele que é constituído por partes equivalentes que podem ser trocadas sem alterar a aparência global. Considerando que a tarefa aborda figuras simétricas entre si e tem o plano cartesiano como uma base, cremos que ela contempla padrão do tipo simétrico.

Ademais, julgamos que essa tarefa contempla padrões geométricos, pois envolve desenhos que ficam invariantes quando sujeitos à transformação geométricas (VALE; PIMENTEL, 2005), além dos padrões figurativos e visuais.

Acrescentamos outras questões a essa tarefa, reescrevemos a alternativa b) e mantivemos integralmente a alternativa a), cujo resultado é a 5.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa que apresentamos no quadro 11.

Quadro 11 – 5.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Observe a figura a seguir que mostra uma circunferência de centro O e quatro figuras (1,2,3 e 4) simétricas entre si por simetria de rotação.



a) Qual o ângulo de rotação entre as figuras 1 e 4?
b) Esse ângulo que você encontrou na letra “a” é o mesmo entre as figuras 2 e 4? Por quê?
c) Escreva a sequência formada pelos ângulos indicados entre as figuras 1 e 2, figuras 1 e 3, figuras 1, 4 e assim sucessivamente.
d) Qual seria o ângulo formado pelas figuras 1 e 5? Explique o que você pensou.
e) Explique o que você observou nessa sequência.

Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Entendemos que a alternativa a) foi uma oportunidade para o participante identificar o grau entre as figuras 1 e 4 e, assim, poder descobrir que, entre as figuras, tem-se um ângulo de 60º a mais.

Já a alternativa b) é um complemento para o participante pensar o padrão matemático da tarefa, no intuito de comparar os ângulos formados e descobrir as relações que há entre as figuras.

Embora os processos de representação e abstração sejam considerados os principais do pensamento matemático avançado, há outros, como a descoberta. Dreyfus (2002) defende que descobrir ou redescobrir relações, por exemplo, é muitas vezes considerado entre as formas mais eficazes para as crianças aprenderem matemática.

Com a alternativa c), tivemos a intenção de permitir ao participante relacionar o padrão figural ao numérico, além de utilizar formas de representação. Sendo assim, entendemos que, se o participante não percebeu o padrão por meio das alternativas a) e b), a c) é uma oportunidade para isso.

Elaboramos a alternativa d) na expectativa de provocar o participante a notar os outros termos dessa sequência. Nesse caso, a figura 1 forma 0º, a figura 2 forma 60º, a figura 3, 120º e assim por diante, o que pode ser representado por $(0°, 60°, 120°, 180°, 270°, \ldots)$. Isso significa dizer que, em cada termo dessa sequência formada pelos ângulos de 60º, serão acrescentadas 60 unidades (ou 60º, no caso do padrão figural).

Assim como já enfatizamos em outras tarefas anteriores, disponibilizamos um espaço para o participante destacar como (ou o que) pensou para responder às alternativas anteriores. No caso dessa tarefa, o item e) foi esse espaço aberto em que o participante pôde utilizar qualquer tipo de representação que desejasse.

Na figura 08, apresentamos outra tarefa, que chamamos de 7.ª tarefa do livro didático, presente na unidade de linguagem algébrica e equações, cujo capítulo é de sequências.

Figura 08 – 7.ª tarefa do livro didático

Descubra a lei de formação de cada sequência e determine os elementos que faltam:

a) 1, 4, 8, 13, ?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

A continuação dessa tarefa é apresentada na figura 09 adiante.

Figura 09 – Parte da 7.ª tarefa do livro didático

b) 2, 4, 6, ?, 10, ?, 14

c) ?, 4, 9, ?, 25, 36, ?

d) 8, 1, 12, 10, 14, 11, ?, 3, 7, 5, 16, 9

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Para a adaptação da 6.ª tarefa utilizada nesta pesquisa, mantivemos as alternativas a) e b). Não optamos pelas alternativas c) e d) devido à quantidade de alternativas escolhidas até aqui e ao tempo de resolução que os participantes teriam. Entendemos que essa tarefa contempla padrões do tipo numérico, segundo a definição de Frobisher et al. (1999) e Vale et al. (2006).

Agora, apresentamos outra tarefa, que nomeamos de 8.ª tarefa do livro didático, presente na unidade de números naturais e operações, especificamente na parte de revisão dessa unidade.

Figura 10 – 8.ª tarefa do livro didático

c) Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Com base na definição de Frobisher et al. (1999), destacamos que essa tarefa contempla padrões do tipo sequência, uma vez que se refere ao conjunto formado pelos 11 primeiros múltiplos de 19, começando pelo 19.

Sendo assim, adaptamos a 7.ª e 8.ª tarefas do livro didático, o que resultou na 6.ª (e última) tarefa adaptada e utilizada na pesquisa, apresentada no quadro 12.

Quadro 12 – 6.ª tarefa adaptada e utilizada na pesquisa

Analise as sequências abaixo, complete os termos que faltam e responda às perguntas.

a) (2, 4, 6, ____, 10, ____, 14, …)

- Se continuássemos essa sequência até o 10.º termo, qual seria?
- E o 30.º termo? Explique como pensou.
- Explique como encontrar um termo qualquer dessa sequência.

b) (1, 4, 8, 13,___,…)

- Qual seria o 10.º termo? Explique como pensou.
- Como você explicaria a um colega o padrão dessa sequência?

c) Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19?

- Quais são o 12.º e o 16.º termos dessa sequência? Explique o que você pensou.
- Como você explicaria essa sequência?

Fonte: A autora, com base em Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

Na alternativa a), questionamos a respeito do 10.º e 30.º termos para o participante continuar a escrita da sequência numérica e perceber o padrão presente. No último item dessa alternativa, questionamos como encontrar um termo qualquer dessa sequência, na tentativa de o participante sair dos casos particulares, ou seja, lidar com termos conhecidos, como 10.º e 30.º, e expandir para casos gerais, a fim de poder encontrar qualquer termo da referida sequência, tal como definem Kaput (2000) e Dreyfus (2002). No item b), também seguimos essa ideia.

Já na alternativa c), perguntamos sobre o 12.º e 16.º termos para o participante escrever uma sequência numérica, formada pelos 11 múltiplos de 19, possibilitando-lhe, assim, perceber o padrão e generalizá-lo na alternativa seguinte.

No decorrer deste subcapítulo, apresentamos as tarefas do livro didático que foram adaptadas e posteriormente utilizadas nesta pesquisa, além das unidades e capítulos em que elas estão presentes e os tipos de padrões que elas contemplam. No quadro 13, sintetizamos essas informações.

Quadro 13 – Síntese das características das tarefas do livro didático

Tarefas	**Figuras correspondentes**	**Unidades**	**Capítulos**	**Tipos de padrão**[18]
Tarefa 01	Figura 02	Linguagem algébrica e equações	Sequência	Figurativo ou visual
Tarefa 02	Figuras 03 e 04	Linguagem algébrica e equações	Sequência	Sequência; numérico; crescimento; repetição
Tarefa 03	Figura 05	Linguagem algébrica e equações	Revisão da unidade	Figurativo ou visual
Tarefa 04	Figura 06	Números naturais e operações	Números naturais	Numérico; crescimento
Tarefa 05	Figura 07	Transformações geométricas e simetria	Simetria	Geométrico; figurativo ou visual; simétrico
Tarefa 06	Figura 08 e 09	Linguagem algébrica e equações	Sequência	Sequência; Numérico; crescimento
	Figura 10	Números naturais e operações	Revisão da unidade	

Fonte: Síntese da pesquisa (2022)

[18] Caracterizamos os tipos de padrões com base em Frobisher et al. (1999), Vale e Pimentel (2005), Frobisher et al. (2007), Vale et al. (2006) e Vale e Barbosa (2019).

Entre as tarefas associadas à generalização de padrões que foram analisadas, destacamos que três delas, a maioria, contemplaram padrões do tipo crescimento e numérica.

Depois que apresentarmos as tarefas que foram adaptadas e utilizadas na pesquisa, discutiremos, no próximo subcapítulo, de que forma elas foram propostas aos estudantes do 7.º ano do ensino fundamental da turma selecionada.

4.6 O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA EM CAMPO

Conforme já apresentamos neste capítulo, esta pesquisa foi desenvolvida com um grupo de oito estudantes do 7.º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal localizada em Marataízes, no sul do estado do Espírito Santo.

O professor de matemática dessa turma, Sérgio Marcos Moté de Souza, com a anuência da diretora da escola Arlyandréia Vargas de Jesus (anexos A e B), permitiu que desenvolvêssemos nossa pesquisa em sua turma do 7.º ano, na função de colaborador, no período regular de aula, turno vespertino, por meio de cinco etapas descritas adiante.

Na etapa 01, em 30/8/22, fomos à escola, convidamos todos os 16 estudantes de uma turma do 7.º ano para participarem da pesquisa e entregamos o TALE e o TCLE. Além da entrega desses termos, explicamos o desenvolvimento e as ações da pesquisa e esclarecemos as dúvidas dos estudantes sobre os processos e etapas da investigação.

Em 31/8/2022, retornamos à escola para recolhermos o TCLE e TALE entregues na etapa anterior, cumprindo, assim, a etapa 02. Dos 16 estudantes regularmente matriculados nessa turma, 8 entregaram os termos mencionados e, portanto, aceitaram ser sujeitos da pesquisa.

Na etapa 03, em 15/9/2022, desenvolvemos duas tarefas com os participantes, em duas aulas de 50 minutos. Na ocasião, o professor Sérgio levou os oito alunos que não aceitaram participar desta pesquisa para o pátio e lá eles fizeram uma atividade de matemática, justamente para os participantes resolverem as tarefas em silêncio e à vontade. Na sala de aula, explicamos que os participantes seriam filmados e gravados, posicionando a câmera e o gravador em lugares estratégicos da sala, para bem captarmos os diálogos e as imagens do momento em que eles resolviam a tarefa e participavam da roda de conversa.

Inicialmente, entregamos a 1.ª tarefa adaptada, conforme apresentada no subcapítulo anterior, e pedimos que eles resolvessem a sua maneira. Explicamos que deveriam ser sinceros para resolver a tarefa e podiam utilizar palavras, desenhos, exemplos, enfim, escrever tudo aquilo que pensavam. Assim que todos os participantes acabaram de resolver, entregamos a 2.ª tarefa adaptada.

Ao final da 2.ª tarefa, iniciamos a roda de conversa. Conforme discutimos no subcapítulo 4.3, esse recurso metodológico ganha disparada por meio da exposição de um tema pelo pesquisador a um grupo – selecionado de acordo com os objetivos da pesquisa (MÉLLO et al., 2007). Sendo assim, lançamos as seguintes perguntas para os participantes: o que vocês acharam dessas tarefas; tiveram dificuldade para resolver alguma delas; qual vocês mais gostaram e por quê; como vocês resolveram essa tarefa?

Essas perguntas nortearam as discussões, mas, à medida que os participantes e nós conversávamos, outras foram surgindo e sendo lançadas ao grupo de alunos, aproximando das ideias de Méllo et al. (2007), os quais defendem que os participantes apresentam suas colaborações sobre o tema, pois cada um instiga o outro a falar, argumentando e contra-argumentando entre si, posicionando-se e ouvindo o posicionamento do outro. Ao final dessa etapa, recolhemos as tarefas resolvidas pelos participantes para análise.

Em 20/9/2022, iniciamos a etapa 04 e, para tanto, desenvolvemos com os participantes a 3.ª e 4.ª tarefas adaptadas, também apresentadas no subcapítulo anterior. Entendemos que duas tarefas foram suficientes, considerando o período de cem minutos (duas aulas de 50 minutos). Por isso, decidimos padronizar e desenvolver duas tarefas em cada etapa.

Seguimos a mesma dinâmica da etapa anterior e entregamos a 3.ª tarefa aos participantes. Depois que todos acabaram de resolver, entregamos a 4.ª tarefa e, em seguida, desenvolvemos a roda de conversa com as mesmas perguntas norteadoras. Isso se repetiu na etapa 05 também, a última. Nesse dia, sete estudantes participaram dessa etapa.

No total, desenvolvemos seis tarefas em três etapas de cem minutos cada uma, nos dias 15, 20 e 22 de setembro de 2022. Já as duas primeiras etapas, a 01 e 02, totalizaram 70 minutos. Sendo assim, a duração das cinco etapas chegou a 370 minutos (aproximadamente 6 horas e 16 minutos). Sintetizamos essas informações no quadro 14.

Quadro 14 – Etapas do desenvolvimento da pesquisa em campo

Etapas	**Descrições**	**Datas**	**Duração (em minutos)**
01	Apresentação da pesquisa para a turma do 7.º ano selecionada; Convite feito aos estudantes para participarem da pesquisa: envio do TCLE e TALE;	30/08/2022	50
02	Seleção dos sujeitos da pesquisa: recolha do TCLE E TALE;	31/08/2022	20
03	Desenvolvimento da 1.ª e 2.ª tarefas; Roda de conversa; Recolha dos registros dos estudantes;	15/09/2022	100
04	Desenvolvimento da 3.ª e 4.ª tarefas; Roda de conversa; Recolha dos registros dos estudantes;	20/09/2022	100
05	Desenvolvimento da 5.ª e 6.ª tarefas; Roda de conversa; Recolha dos registros dos estudantes;	22/09/2022	100

Fonte: Dados da pesquisa

Ao final das etapas 03, 04 e 05, recolhemos as tarefas resolvidas pelos participantes e salvamos os vídeos e áudios gravados, que foram sujeitos à análise de conteúdo de Bardin (1977), tal como discutimos no subcapítulo 4.4. Adiante, apresentamos as análises dos dados produzidos nesta pesquisa.

5 ANÁLISE DE DADOS

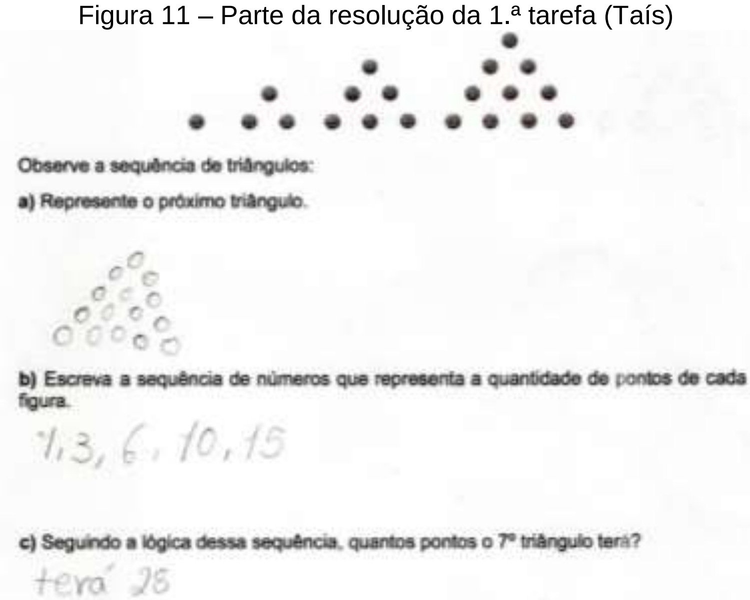
Para organizarmos nossas análises, dividimos este capítulo em três partes: no subcapítulo 5.1, apresentamos nossas análises dos dados produzidos no 1.º encontro, o que inclui nossas anotações no diário de campo, as resoluções dos participantes e as transcrições da roda de conversa. Da mesma forma, nos subcapítulos 1.2 e 1.3, apresentamos as análises do 2.º e 3.º encontros, respectivamente.

Em relação à metodologia de análise de dados, relembramos que a segunda fase diz respeito ao recorte, que, nesse caso, foi feito com base em um tema: as estratégias dos estudantes, ao generalizarem padrões. Sendo assim, nossas análises buscaram identificar e compreender essas estratégias de resolução. Relembramos também a categorização dos dados, ou seja, as categorias criadas com as estratégias de generalização dos participantes. Bardin (1977) destaca que esse é um processo do tipo estruturalista que comporta duas etapas: o inventário, que visa isolar os dados, e a classificação, que busca repartir os dados e procurar certa organização. Sendo assim, identificamos e compreendemos as resoluções dos participantes e as classificamos em categorias.

5.1 ANÁLISES DO 1.º ENCONTRO

Começamos este subcapítulo apresentando nossas análises referentes aos itens a), b) e c) da 1.ª tarefa. Dos oito participantes[19], quatro solucionaram essas questões, a saber: Bia, Ludmila, Samara e Taís. Na figura 11, mostramos o registo da participante Taís, cuja resolução é semelhante às das demais participantes.

Figura 11 – Parte da resolução da 1.ª tarefa (Taís)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

[19] Visando garantir o anonimato, atribuímos nomes aleatórios aos sujeitos desta pesquisa, a saber: Ana, Bia, Fredi, Helen, João, Ludmila, Samara e Taís.

Considerando a resolução dos itens a) e b), percebemos que a participante compreendeu o padrão figurativo da sequência dos números triangulares, pois representou o próximo triângulo com uma figura, escreveu a sequência formada e encontrou o 7.º triângulo, que, nesse caso, é o 7.º termo da sequência.

Antes de tudo, é válido lembrarmos a definição de generalização estabelecida neste trabalho, que visa continuar o raciocínio para além dos casos considerados, identificar semelhanças e expandir domínios de validade, segundo Kaput (2000) e Dreyfus (2002). Em outras palavras, generalizar significa analisar casos particulares rumo aos casos gerais.

Relembramos a proposta do item d) da 1.ª tarefa: como você explicaria a formação dessa sequência numérica a seu colega? Nossa intenção com tal questionamento foi possibilitar ao participante analisar os casos particulares e encontrar os casos gerais, isto é, a generalização.

Dos oito participantes, dois chegaram ao processo de generalização, nomeadamente Samara e Taís. Antes de apresentarmos essas generalizações, mostraremos, no quadro 15, as resoluções de Ana, Bia e Fredi, justamente para discutirmos porque entendemos que tais participantes não generalizaram os padrões do item d) da 1.ª tarefa.

Quadro 15 – Resolução do item d), 1.ª tarefa (Ana, Bia e Fredi)

Estudantes	**Resolução**
Ana	Que de contasse em ordem, tipo 1,2,3,4...
Bia	falando que cada triangulo vai aumentando 1 número na primeira parte que ele vai começar a fazer o triangulo.
Fredi	Para ir somando 1+2+3+4 que vai dar o resultado

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As resoluções de Ana, Bia e Fredi sugerem-nos que eles compreenderam o padrão figural presente na tarefa, que cresce 1 unidade em relação ao anterior, ou seja, a sequência dos números triangulares é dada por $(1,3,6,10,15,\dots)$ que também pode ser reescrita como $(1, 1+2, 3+3, 4+5, 5+6, \dots)$. Tais aspectos se tornaram evidentes nos trechos de Ana em “contasse em ordem, tipo $1,2,3,4, \dots$”, de Bia em “vai aumentando 1 número” e de Fredi em “ir somando $1+2+3+4$”.

No entanto, isso não indica que os participantes compreenderam as relações que há entre os termos da sequência, bem como consideraram os casos gerais, pois eles descreveram apenas as características do padrão. Nessa perspectiva, as resoluções de Ana, Bia e Fredi sugerem-nos dois caminhos possíveis: os participantes não generalizaram ou generalizaram, mas não representaram.

No quadro 16, apresentamos como as estudantes Samara e Taís generalizaram o padrão no item d) da 1.ª tarefa.

Quadro 16 – A generalização do padrão do item d), 1.ª tarefa (Samara e Taís)

Estudantes	A generalização do padrão
Samara	esta simpre almentando mai [illegible] Por exemplo: do 1 almenta mais 2, 2 almenta 3, e assim vai
Taís	d) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica para o seu colega? $P_1 = 1$ $P_3 = P_2 + 3$ ou seja a quantidade de números vai aumentando da forma crescente a partir do número 1. Ex: ... $P_2 = P_1 + 2$ Pontinhos.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

A resolução de Samara aponta-nos que ela possivelmente chegou ao processo de generalização de padrões. Isso se tornou explícito no trecho “do 1 aumenta mais 2, 2 aumenta 3, e assim vai”. Sendo assim, entendemos que Samara descreveu o comportamento do padrão, tal como Ana, Bia e Fredi, e considerou os casos particulares, mas, mais do que isso, ela trouxe a ideia de continuação da sequência nos trechos “está sempre aumentando” e “e assim vai”.

Também percebemos indícios do processo de generalização de padrões na resolução da participante Taís, que trouxe a ideia de continuidade da sequência no trecho “a quantidade de números (pontinhos) vai aumentando de forma crescente” e também no desenho dos números triangulares que começa com um ponto, depois três e seis pontos. No final, ela utilizou o sinal gráfico de reticências para indicar a continuação. Isso nos revela que a estudante compreendeu que a sequência existe para além dos casos particulares.

Durante a roda de conversa, questionamos os participantes sobre como a sequência em questão foi constituída. Na ocasião, Taís respondeu:

> Taís: Tipo assim, ela vai acrescentando. A 2.ª figura, é a mesma figura só que mais dois. Vai só aumentando… A 3.ª figura, a 2.ª figura mais 3.

Esse relato reforça (podemos dizer que confirma) a ideia de que Taís chegou ao processo de generalização, principalmente porque a participante nos esclareceu que a sequência "vai crescendo [...] vai só aumentando", o que tudo indica que ela compreendeu a sequência para além dos casos particulares.

Chamamos a atenção para a representação utilizada por Taís, especificamente $p_1 = 1;\ p_2 = p_1 + 2;\ p_3 = p_2 + 3$. Embora ela tenha usado a linguagem algébrica para representar os três primeiros termos da sequência, não consideramos que isso diz respeito ao processo de síntese, visto que seria necessário chegar a uma equação genérica semelhante a $p_n = \frac{n^2+n}{2}$, sendo p_n um termo qualquer, n a posição desse termo na sequência e $n > 0$ (n maior que zero).

Com a intenção de caracterizarmos as representações utilizadas por essas participantes, recorremos à teoria nesse sentido. Especificamente sobre a generalização de padrões, Cardoso (2010) defende que esse processo pode ser representado de várias maneiras, por meio da linguagem materna ou simbólica da matemática, e isso também pode apoiar-se em outras representações, como desenhos, esquemas, tabelas e gráficos.

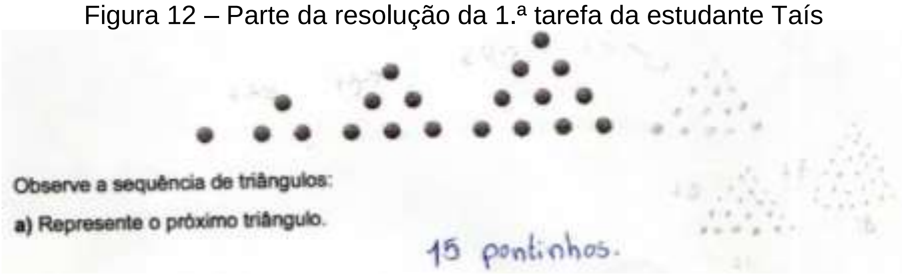
Agora, se considerarmos a generalização de padrões como uma forma de desenvolver o pensamento algébrico, este que pode ser representado por meio da linguagem, o que inclui a materna, aritmética e algébrica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), então entenderemos que representar a generalização de padrões também diz respeito a utilizar tais representações.

Podemos pensar os tipos de representação também sob a perspectiva do pensamento matemático avançado, o que inclui representações visuais, mentais e simbólicas, porém estas últimas envolvem relações entre signos e significado e melhoram a comunicação daquilo que se pensa por meio da escrita ou fala (DREYFUS, 2002).

Analisando as resoluções dessas duas estudantes, notamos que Taís utilizou a linguagem algébrica, materna (fala e escrita), além de desenhos, enquanto Samara utilizou também a língua materna, pois ambas utilizaram a representação simbólica.

Para discutirmos acerca das estratégias de generalização da 1.ª tarefa, apresentamos parte da resolução da estudante Taís na figura 12.

Figura 12 – Parte da resolução da 1.ª tarefa da estudante Taís



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Stacey (1989) caracteriza os tipos de generalização como próxima e distante. Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo, a generalização se diz próxima. Agora, quando há a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização é caracterizada como distante.

Os desenhos feitos por Taís indicam-nos que a participante utilizou a generalização próxima, pois ela desenhou os triângulos e contou quantos pontos cada um deles tem. Também por essa razão, entendemos que a participante escolheu a estratégia de contagem para generalizar o padrão, estratégia que diz respeito a contar o número de elementos de um padrão, obtendo, assim, o termo da sequência solicitado. Barbosa (2009) e Barbosa e Vale (2015) explicam que, nos casos em que há padrões figurativos, tais como os números triangulares, é costume desenhá-los e contar seus elementos.

Assim como no caso da participante Taís, a resolução de Samara também nos sugere que ela utilizou a estratégia de contagem e a generalização próxima. Esses dados aproximam-se às ideias de Barbosa (2009) e Barbosa e Vale (2015), os quais defendem tarefas que contemplam a generalização próxima, e geralmente os estudantes optam pela estratégia de contagem.

Conforme discutimos ao longo desta dissertação, entendemos que a generalização de padrão também diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Nessa perspectiva, analisamos as estratégias de generalização de Samara e Taís, e identificamos indícios dos processos do pensamento matemático avançado.

As resoluções de Samara e Taís sugerem-nos que as estudantes utilizaram a representação, visualização e generalização, na concepção de Dreyfus (2002). Além destas, Taís alternou as representações, pois utilizou o desenho nos números triangulares, depois as linguagens algébrica e materna.

No que se refere precisamente à visualização, destacamos que tal processo é considerado um suporte para o sujeito "ver" e entender as relações que existem entre a sequência das figuras e o número que lhes corresponde (VALE, 2013). Esse "ver" é considerado como o primeiro passo na exploração do padrão (MASON, 1996; BARBOSA; VALE, 2015).

De agora em diante, apresentamos nossas análises referentes à 2.ª tarefa. Iniciamos com o item a), destacando que, dos oito participantes, Taís, Samara e Fredi solucionaram e apresentaram indícios de que generalizaram o padrão. No quadro 17, apresentamos as resoluções desses participantes referentes ao item a) da 2.ª tarefa.

Quadro 17 – A generalização do padrão do item a), 2.ª tarefa (Taís, Samara e Fredi)

Estudantes	A generalização do padrão
Taís	(0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6,0,0,0,0,0,8) 1º- Os numeros acima de zero estava almentando de dois em dois. 2º as 0, estava almentando de um por um, por Ex: 00,2, 000,4, 0000,6. Então eu sabia que o próximo número par era 8, e como em antes do 6 foi 4 zeros, tinha que ser 5 zeros e no final o número 8.
Samara	0,0,0,0,0,8, o 0 representa a sequência 2,3,4,5 e sempre o número era par então o próximo número par seria o 8.
Fredi	**a)** (0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6)0,0,0,0,0,8 Complete a sequência até o 18º termo. Explique o que você pensou. sera 8 os zeros pulando em um em um e os numeros em dois em dois.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Com base na resolução da estudante Taís, percebemos que ela compreendeu as relações que há entre os termos da sequência. Isso se evidenciou principalmente na parte em que ela explica que os números acima de zero aumentam de dois em dois, ou seja, os números 2,4,6 e 8, ao passo que os zeros aumentam de um em um, formando assim: $(0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6,0,0,0,0,0,8)$.

Apesar de a aluna Samara não ter organizado os termos em forma de sequência, entendemos que seu relato "$0,0,0,0,0,8$" é a parte que completa a sequência dada pela tarefa, nesse caso $(0,0,2,0,0,0,4,0,0,0,0,6)$, justamente aquela que contém o 18.º termo solicitado (o número 6).

A resolução de Samara também evidencia que ela compreendeu as relações que há entre os termos da referida sequência, o que se confirma no trecho "o 0 [zero] representa a sequência 2,3,4,5 e sempre o número era par; então o próximo número par seria o 8". Entendemos que Samara quis dizer que os dois primeiros termos da sequência são zeros, depois aumentam para três zeros, em seguida para quatro e, por fim, para cinco zeros, chegando ao 17.º termo. Na parte do trecho "sempre o número era par", compreendemos que a estudante se referiu aos termos da sequência que não fossem os zeros, ou seja, o 2,4,6 e 8, sendo este último o 18.º termo solicitado.

Por uma questão de gramática, à primeira vista a resolução de Fredi apresentou como resposta "8 zeros", o que não é coerente com a tarefa. No entanto, depois de termos lido e relido tal resolução, entendemos que o aluno quis dizer que o 18.º termo é o 8 e os zeros estão "pulando de um em um", ou seja, 0,0,2 e, depois, 0,0,0,4 e assim por diante.

Com base nessas resoluções, compreendemos que os estudantes utilizaram a estratégia de contagem para generalizar os padrões, sendo essa generalização próxima (STACEY, 1989).

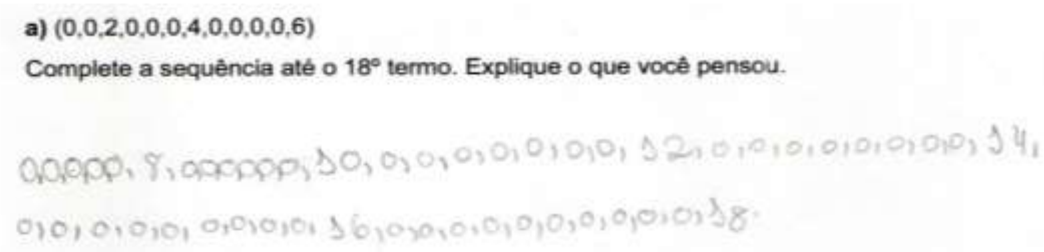
Da mesma forma, entendemos que Taís e Fredi representaram por meio da linguagem materna (registro escrito) e aritmética, pois igualmente utilizaram a sequência numérica. Assim como Taís e Fredi, Samara também utilizou a linguagem materna.

Com base nas resoluções de Taís, Samara, e Fredi, identificamos que os estudantes utilizaram os processos de generalização, representação e visualização. Apesar de Taís e Fredi utilizarem a linguagem materna e aritmética, cremos que isso não significa que eles transitaram de uma representação para outra, ou seja, não utilizaram o processo de alternação de representação.

Para exemplificar o processo de alternar representações, Dreyfus (2002) refere-se às funções que, segundo ele, partem de um conceito abstrato com o qual, geralmente, lidamos com uma ou várias representações ao mesmo tempo, principalmente a representação gráfica e algébrica (DREYFUS, 2002).

Os registros das estudantes Bia e Ana não nos indicam que elas generalizaram os padrões. No entanto, suas resoluções trazem elementos e caraterísticas em comum, cujo resultado apresentamos nas figuras 13 e 14.

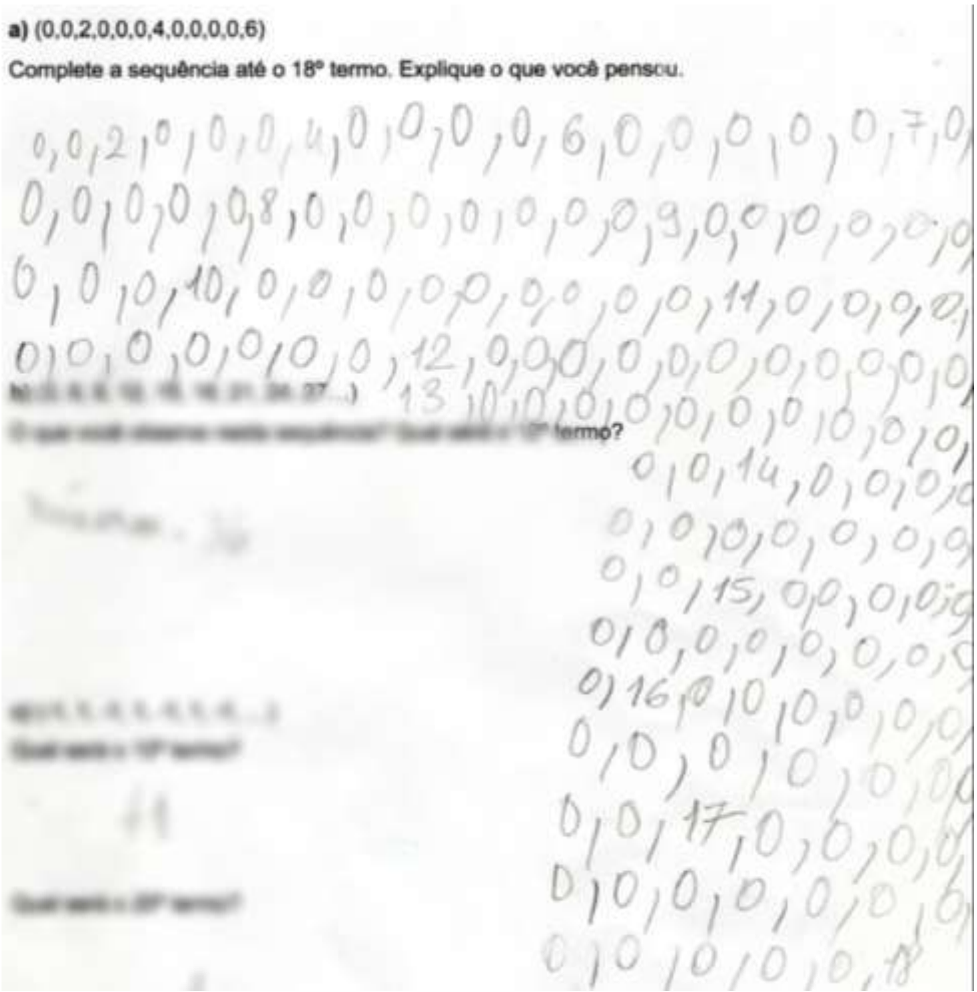
Figura 13 – Resolução do item a), 2.ª tarefa (Bia)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Chamamos a atenção para os seis primeiros termos da sequência de Bia, nesse caso $(0,0,0,0,8,\ldots)$. Pelo registro, entendemos que a estudante confundiu a posição do termo na sequência (nesse caso o 18.º) com o número 18, pois ela encerrou a escrita da sequência justamente no número 18. Isso nos sugere que a estudante compreendeu o padrão da referida sequência, mas não entendeu as relações entre os elementos e a diferença entre o termo e a posição desse termo na sequência.

Figura 14 – Resolução do item a), 2.ª tarefa (Ana)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Assim como Bia, a resolução de Ana indica-nos que a estudante também confundiu o conceito de termo e posição do termo, pois terminou a escrita da sequência com o número 18. Tal resolução mostrou-nos que Ana não compreendeu o padrão da tarefa proposta, pois os outros termos da sequência, diferentes de zero, não eram apenas pares, tais como na resolução de Bia.

Assim como nos revelou a resolução acima, a estudante enfrentou dificuldades para resolver o item a) da 2.ª tarefa, e isso se confirmou durante a roda de conversa. Na ocasião, questionamos os participantes sobre as tarefas do 1.º encontro que eles acharam complicadas para resolver. Apresentamos a resposta de Ana:

> Ana: Tive dificuldade na a) da tarefa 2, porque eu pensei que era fazer até o 18, entendeu?

Após alguns minutos, questionamos novamente sobre as tarefas que eles encontraram dificuldades. A resposta de Ana manteve-se:

Ana: Tarefa 2, letra a) porque tem muito número.
Pesquisadora: Você se confundiu com esse monte de zero aí?
Ana: Sim.

Considerando o relato de Ana e sua resolução, entendemos que a dificuldade que ela encontrou diz respeito à escrita de tantos termos da sequência, assim como apresentamos na figura 14, o que nos pareceu uma prática exaustiva.

Agora apresentamos os dados que se referem ao item b) da 2.ª tarefa. Dos oito participantes, seis apresentaram indícios de que generalizaram o padrão: Ana, Bia, Helen, João, Samara e Taís. Entretanto, apresentamos, no quadro 18, as generalizações de Ana, Helen e Samara, pois julgamos que são uma síntese das demais.

Quadro 18 – A generalização do padrão do item b), 2.ª tarefa (Ana, Helen e Samara)

Estudantes	A generalização do padrão
Ana	**b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...) **O que você observa nesta sequência? Qual será o 12º termo?** números. 36
Helen	**b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...) 30, 33, 36 **O que você observa nesta sequência? Qual será o 12º termo?** está pulando de 3 em 3. Será 36
Samara	**b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...) **O que você observa nesta sequência? Qual será o 12º termo?** Está aumentando de 3 em 3, o segundo termo será 36.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Inicialmente, destacamos que essa sequência refere-se aos múltiplos de 3, tal que $1.3 = 3;\ 2.3 = 6;\ 3.3 = 9$ e assim por diante, o que pode ser reescrito como $(3,6,9,12,15,18,21,24,27,\dots)$.

Durante a roda de conversa, questionamos sobre como os participantes resolveram essa tarefa. Apresentamos as respostas a seguir:

Taís: Vai aumentando de três em três.
Pesquisadora: Vai aumentando de três em três? Me expliquem mais sobre isso.
Helen: É, tipo, três mais três, seis. Seis mais três, nove.

> Pesquisadora: Vocês conhecem alguma sequência parecida com isso? [silêncio]
> Tais: A tabuada de 3?
> Pesquisadora: Isso! Mais alguém percebeu a tabuada do três?
> [Helen e Ana levantaram a mão].
> Helen: Eu fiz a tabuada do lado. Para responder à questão, eu fiz 3 vezes 12, que dá 36.

Esse relato revela-nos duas situações sobre as estratégias utilizadas pelos participantes. Embora a resolução de Ana não esteja explícita e com muitos detalhes, entendemos que a estudante percebeu as relações entre os termos da sequência e o padrão matemático, pois, na roda de conversa, ela concordou em que a sequência em questão se referia à tabuada do 6 (ou seja, sequência dos múltiplos de 6).

Tanto a resolução quanto o relato de Helen nos confirmam que ela também identificou o padrão matemático e compreendeu a sequência numérica, principalmente quando ela nos explicou o comportamento do padrão em "É, tipo, três mais três, seis. Seis mais três, nove". O relato da estudante também demonstrou que ela usou a ideia de multiplicação: "Para responder à questão [ou seja, encontrar o 12.º termo], eu fiz 3 vezes 12, que dá 36". Uma interpretação possível é que Helen multiplicou o 3 (padrão de crescimento) por 12.º (posição do termo da sequência).

Tal raciocínio da estudante poderia ser usado para encontrar qualquer outro termo da sequência. Por exemplo, para identificarmos o termo que está na 60.ª posição, calcula-se $3.60 = 180$. Da mesma forma, o 199.º termo seria dado por $3.199 = 597$. Isso nos provoca a pensar que todo termo dessa sequência pode ser encontrado por $a_n = 3n$, tal que a_n é o termo, n é a posição do termo na sequência e $n > 0$ (ou seja, n é maior que zero).

Com base nas resoluções apresentadas, cremos que os estudantes generalizam o padrão utilizando a estratégia da diferença, especificamente a recursiva, esta que diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos (STACEY, 1989). Nessa perspectiva, compreendemos que os estudantes continuaram a sequência somando o termo anterior com o 3. Por exemplo, para encontrarmos o 4.º termo da sequência, calculamos $9 + 3 = 12$, e o 3 nada mais é do que $9 - 6 = 3$, ou seja, a diferença entre termos consecutivos.

Conforme as resoluções nos indicaram, a estratégia recursiva foi a escolhida para generalizar o padrão nessa tarefa. Esse resultado relaciona-se com as ideias de

Stacey (1989) e Barbosa e Vale (2015), pesquisadores que defendem que a estratégia recursiva tende a ser a mais utilizada pelos estudantes, justamente por ela não requerer nenhum tipo de ajuste.

O registro de Ana, Helen e Samara ainda nos sugerem que os estudantes representaram a generalização de padrão por meio da linguagem materna e aritmética (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; CARDOSO, 2010).

No que se refere aos processos do pensamento matemático avançado envolvidos nessas resoluções, identificamos a visualização, generalização e representação, segundo a concepção de Dreyfus (2002), pois entendemos que os participantes visualizaram o padrão, generalizaram e representaram suas ideias.

Fredi e Ludmila foram os dois participantes que não solucionaram a tarefa proposta. Porém, suas resoluções aproximam-se entre si e revelaram dados importantes sobre as dificuldades encontradas pelos alunos para generalizar padrões. No quadro 19, apresentamos o resultado.

Quadro 19 – Resolução do item b), 2.ª tarefa (Fredi e Ludmila)

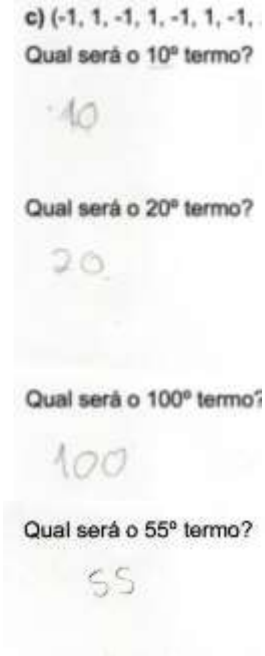
Estudantes	**Resoluções**
Fredi	**b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...) O que você observa nesta sequência? Qual será o 12º termo? será 30 que ela esta sendo somada com o 3+3 e seus e seis mais tres e nonte.
Ludmila	**b)** (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...) O que você observa nesta sequência? Qual será o 12º termo? (3,6, 9, 12,15, 18,21,24,27,30,33, 36,39,42, 45, 48, 51,54,57 60, 63) eu OBServei que era a tabuada de três

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As resoluções desses estudantes revelam que eles compreenderam o padrão matemático e as relações entre os termos da sequência, incluindo que ela se refere aos múltiplos do número 3. A resolução de Fredi indica-nos que ele provavelmente não atentou para o fato de que era o 12.º termo da sequência que foi solicitado, e não o 10.º termo, o 30, tal como ele relatou, enquanto Ludmila respondeu que o 12.º termo é o 63, o que não é verdade.

Em relação ao item c) da 2.ª tarefa, destacamos que todos os estudantes solucionaram as quatro primeiras questões, exceto Helen, cuja resolução apresentamos na figura 15.

Figura 15 – Parte da resolução do item c), 2.ª tarefa (Helen)


c) (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1,

Qual será o 10º termo?

10

Qual será o 20º termo?

20

Qual será o 100º termo?

100

Qual será o 55º termo?

55

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Ao que tudo indica, a estudante Helen confundiu o termo com a posição do termo na sequência, pois a tarefa propõe que o participante encontre o 55.º termo, ou seja, o termo que está na 55.ª posição na sequência.

Após essas quatro perguntas, disponibilizamos um espaço na tarefa para os participantes explicarem o que pensaram para responder a elas. Dos oito participantes, Ana, Bia, Helen e Ludmila não generalizaram o padrão. No quadro 20, apresentamos as resoluções de Helen e Ludmila, pois entendemos que são uma síntese das demais e contribuem para as discussões aqui tecidas.

Quadro 20 – Resolução do item c), 2.ª tarefa (Helen e Ludmila)

Estudantes	Resoluções
Helen	Explique o que você pensou. eu pensei em, multiplicar o 1 por 10 que seria 10, igual a questão B eu multipliquei 3X12 = 36

Ludmila	Explique o que você pensou. Pensei que poderia contimuar igual as outras Sequencias.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Com base nesses registros, compreendemos que essas participantes tentaram recorrer à estratégia de contagem ou recursiva para encontrar o 10.º, 20.º, 100.º e 55.º termos, por isso Ludmila relatou que “poderia continuar igual as outras sequências”. Considerando que utilizar essas estratégias pode ser uma prática exaustiva para encontrar termos que estão em posições distantes, como 10.º, 20.º, 100.º e 55.º, pensamos que por isso tais estudantes não generalizaram os padrões. Nessa mesma perspectiva, Barbosa e Vale (2015) apontam que utilizar a estratégia de contagem nesses casos pode resultar em representações desorganizadas e complexas.

Já os estudantes Fredi, João, Samara e Taís generalizaram o padrão proposto, cuja resolução apresentamos no quadro 21.

Quadro 21 – A generalização do padrão do item c), 2.ª tarefa (Fredi, João, Samara e Taís)

Estudantes	**A generalização do padrão**
Fredi	Explique o que você pensou. que todos termo que termina em zero seria positivo e em cinco negativo
João	O número par é positivo e número ímpar é negativo
Samara	todo número par é 1 e o impar -1
Taís	a 1ª questão eu continuei a té chegar a 10. A mesma coisa na 2ª. Porém percebi que se na décima a próxima número eu fizesse em baixo daria o mesmo resultado, eu usei essa estratégia para axar a 3ª pergunta. Na quarta eu usei a mesmo raciocínio, porém só acrescentei 5 da sequencia, e achei a resposta.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

João e Samara encontraram o 10.º, 20.º, 100.º e 55.º termos utilizando a ideia de par e ímpar, o que significa que os termos que estão em posições pares são 1 e, em posições ímpares, -1. Para eles generalizarem esse padrão, entendemos que os estudantes utilizaram a estratégia de contagem nos dez primeiros termos da sequência, trabalhando, assim, com os casos particulares. Depois de terem compreendido as relações entre os termos, os estudantes generalizaram o padrão, chegando à conclusão de que "todo número par é 1 e o ímpar -1", tal como relatou Samara, e "o número par é positivo e número ímpar negativo", nas palavras de João, sendo essa generalização caracterizada como próxima (STACEY, 1989).

Assim, observamos, nas resoluções acima, que os participantes enfatizaram os números pares e ímpares, mas, na verdade, trata-se de posições pares e ímpares dos termos. Por exemplo, o termo da 15.ª posição é -1, pois 15 é um número ímpar.

Apesar de não tão explícita, a resolução de Fredi também nos sugere que o estudante percebeu essa ideia de par e ímpar, principalmente na parte "todos termos que terminam em zero seria positivo e em cinco negativo", e isso se mostrou durante a roda de conversa, quando questionamos os estudantes sobre como solucionaram a tarefa:

> Samara: Eu fiz com ímpar e par.
> Pesquisadora: ímpar e par? Como assim? Me explica!
> Samara: O -1 é ímpar e o 1 é par.
> Fredi: Eu fiz mais ou menos isso, só que eu fiz assim, negativo, positivo, negativo, positivo, até chegar no valor que eu queria.
> Pesquisadora: E como você chegou ao 10.º termo usando esse raciocínio?
> Fredi: Negativo, positivo, negativo, positivo…
> Samara: Você contou até 100? [Fredi não respondeu].
> Pesquisadora: Então os negativos eram sempre números o que…?
> Fredi: 3, 5, 7…

Sendo assim, esse relato sugere-nos que Fredi compreendeu que os termos em posições ímpares, tais como 3,5,7, são negativos, ou seja, -1. Já segundo sua resolução, "os termos que terminam em zero são positivos" nos indicam que Fredi quis afirmar que os termos que estão na 10.ª posição, por exemplo, ou seja, posições pares, são positivos (isto é, 1).

Com base na resolução e no relato de Fredi, entendemos que o estudante utilizou a estratégia de contagem para generalizar o padrão, assim como João e Samara, sendo essa generalização caracterizada também como próxima (STACEY, 1989).

À primeira vista, não entendemos a resolução da estudante Taís e o que ela pensou para generalizar o padrão. Isso só foi esclarecido durante a roda de conversa, quando questionamos se mais algum estudante pensou diferente de Samara e Fredi:

> Pesquisadora: Alguém pensou diferente? [Taís levantou a mão].
> Taís: Até o 10, começou com -1 e terminou em 1. Então, para continuar, tipo assim, o 20 teria essa mesma ideia, o 11 seria -1 e o 20 seria 1.

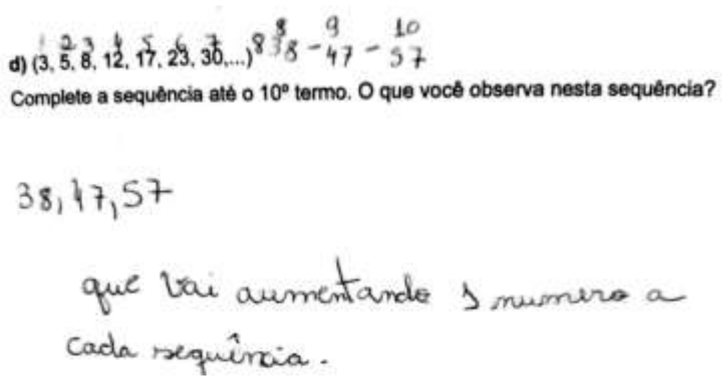
Em outras palavras, Taís percebeu que o termo na 1.ª posição é -1 e na 10.ª posição, é 1, e isso se repetiria para termos que estão em posições maiores, como 20.ª. Entendemos que a estudante também utilizou inicialmente a estratégia de contagem para generalizar o padrão, tal como consta em sua resolução: “na 1.ª questão [qual será o 10.º termo?] eu continuei até chegar a 10”, generalização próxima.

As resoluções desses estudantes também nos indicaram que a linguagem materna foi a escolhida para eles representarem as generalizações de padrões (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; CARDOSO, 2010).

Assim como no caso anterior, identificamos que Fredi, João, Samara e Taís utilizaram a visualização, generalização e representação, segundo a concepção de Dreyfus (2002).

Agora apresentamos dados referentes ao item d) da 2.ª tarefa, última do 1.º encontro. Dos oito participantes, cinco solucionaram essa questão. No quadro 22, apresentamos as generalizações de Bia, Fredi, Samara e Taís, pois entendemos que elas se configuram como uma síntese das demais.

Quadro 22 – A generalização do padrão do item d), 2.ª tarefa (Bia, Fredi, Samara e Taís)

Estudantes	Resoluções
Bia	 d) (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30,...) 38 - 47 - 57 Complete a sequência até o 10º termo. O que você observa nesta sequência? 38, 47, 57 que vai aumentando 1 numero a cada sequência.

Fredi	2 3 4 5 6 7 **d)** (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30,...) 38, 47, 57 Complete a sequência até o 10º termo. O que você observa nesta sequência? será 57 que para cada resultado teve uma ordem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 para chegar ao resultado
Samara	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 **d)** (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30,...) 38 47 57 Complete a sequência até o 10º termo. O que você observa nesta sequência? 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, 57, vai almentando cada número de acordo com a sequência de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Taís	2 3 4 5 6 7 8 9 **d)** (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30,...) 38 47 57 Complete a sequência até o 10º termo. O que você observa nesta sequência? (3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, 57) 10º termo que uma quantidade de um número para o outro vai aumentando de 1 em 1. Ex. +2 +3 3, 5, 8 → isso que eu pensei

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Percebemos que os estudantes identificaram o padrão presente na tarefa, bem como as relações que há entre os termos, tanto que eles continuaram a escrita da sequência até o 10.º termo. Notamos que, para isso, eles calcularam a diferença entre os termos consecutivos e, ao final, fizeram um ajuste. Por exemplo, para encontrarem o 4.º termo da sequência, os estudantes somaram $(8+4)$. No entanto, destacamos que esse 4 é, na verdade, a diferença entre os termos anteriores e consecutivos $(8-3)$ com o ajuste $+1$. Compreendemos, assim, que os trechos “vai aumentando 1 número em cada sequência” na resolução de Bia e “de 1 em 1” na resolução de Taís dizem respeito a esse ajuste. Portanto, as resoluções dos estudantes sugerem-nos que eles utilizaram a estratégia do múltiplo da diferença com ajuste para generalizar o padrão, sendo esta generalização próxima.

Quanto à representação, percebemos que os participantes utilizaram a linguagem materna e aritmética (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; CARDOSO, 2010), e Taís também fez uso de esquema, visando explicar-nos o que pensou. Nesse sentido, Cardoso (2010) explica que outros tipos de registros, como esquemas e tabelas, podem ser utilizados para representar a generalização de padrões.

Em relação aos processos do pensamento matemático avançado presentes nas resoluções de Bia, Fredi, Samara e Taís, identificamos a visualização, generalização e representação, segundo a concepção de Dreyfus (2002).

Ao final do 1.º encontro e por meio da roda de conversa, lançamos um questionamento para os estudantes. O resultado foi o seguinte:

> Pesquisadora: Qual tarefa vocês acharam difícil e por quê?
> Bia: A mais difícil foi a tarefa 2.
> Pesquisadora: Quem achou a tarefa 2 mais difícil?
> [Ana, Bia, João, Ludmila e Helen levantaram a mão].
> Bia: Porque tem mais números envolvidos.
> Taís: Porque tem mais número e com imagem fica mais fácil [tarefa dos números triangulares].
> Helen: Porque a gente está vendo, né?

Esse diálogo sugere-nos que a tarefa dos números triangulares, que contou com a figura dos pontos, foi mais fácil de resolver se comparada com outras tarefas constituídas somente com números. Esses dados vão ao encontro das ideias de Vale (2013), pesquisadora que defende que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos e, em particular, para os dos níveis mais elementares e/ou com fragilidades no conhecimento matemático.

Ao longo deste subcapítulo, apresentamos as resoluções dos estudantes referentes às tarefas retiradas e adaptadas de seus livros didáticos, além de as articularmos com as discussões teóricas tecidas no capítulo 3, principalmente sobre as estratégias de generalização, tipo de generalização, os processos do pensamento matemático avançado presentes nessas resoluções e os tipos de representações utilizadas pelos estudantes. No quadro 23, sintetizamos essas informações.

Quadro 23 – Síntese das estratégias de generalização de padrões (1.º encontro)

Tarefas	Itens	Estratégias de generalização	Tipos de generalização	Processos do pensamento matemático avançado	Tipos de representação e registro

1	a) b) c) d)	Contagem	Próxima	Visualização; generalização; representação; alternação.	Linguagem materna e algébrica; desenhos.
2	a)	Contagem	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna.
	b)	Recursiva	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna e aritmética.
	c)	Contagem	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna.
	d)	Múltiplo da diferença com ajuste.	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna e aritmética; esquemas.

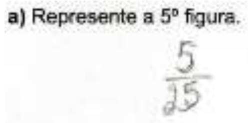
Fonte: Dados da pesquisa (2002)

Conforme nos propõe a análise de conteúdo, categorizamos as formas (maneiras) como os estudantes generalizaram o padrão por meio de estratégias de generalização, entre as quais destacamos a contagem e recursiva como as predominantes. Além disso, o tipo de generalização próxima sobressaiu em relação ao distante. No que se refere aos processos de generalização, destacamos a visualização, generalização e representação como os principais processos envolvidos nas resoluções dos estudantes, sendo a linguagem materna, algébrica e aritmética (tipos de representações) os mais utilizados pelos participantes.

5.2 ANÁLISES DO 2.º ENCONTRO

Neste subcapítulo, apresentamos nossas análises referentes às 3.ª e 4.ª tarefas desenvolvidas no 2.º encontro. Em relação ao item a) da 3.ª tarefa, destacamos que, dos oito participantes, quatro representaram a 5.ª figura, nomeadamente Ana, Ludmila, Samara e Taís. No quadro 24, apresentamos as resoluções das estudantes Ana, Ludmila e Samara.

Quadro 24 – Resolução do item a), 3.ª tarefa (Ana, Ludmila e Samara)

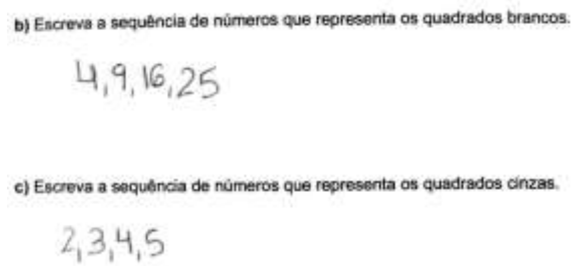
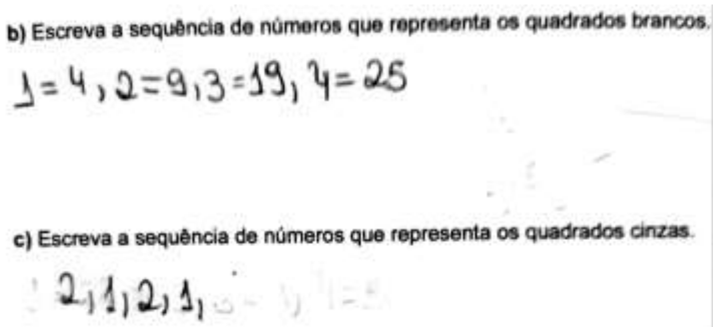
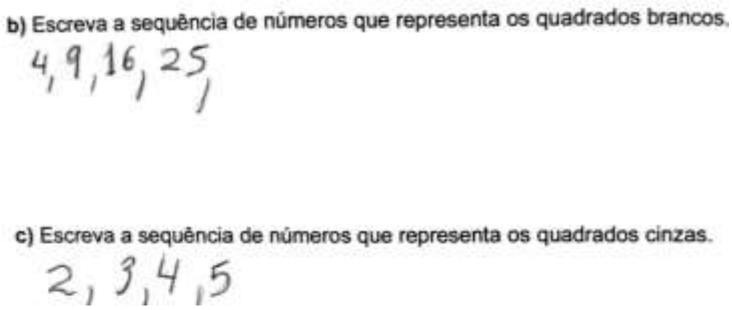
Estudantes	**Resoluções**
Ana	
Ludmila	
Samara	

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Chamamos a atenção para as diferentes representações utilizadas pelas participantes. As resoluções de Ana e Ludmila são semelhantes, pois, ao que parece, elas fizeram uma comparativo entre o número de quadrados cinza e o dos brancos. Ana representou corretamente a 5.ª figura, já que, nesse caso, são seis quadrados cinza e 36 brancos, ou seja, $\frac{6}{36}$. Ludmila, porém, representou $\frac{5}{25}$, o que diz respeito aos quadrados da 4.ª figura. Já Samara identificou o aumento de quadrados cinza e brancos e desenhou essa situação, representando, assim, a 5.ª figura solicitada por meio de um desenho.

Agora apresentamos a resolução dos itens b) e c) da 3.ª tarefa, esta que diz à escrita da sequência formada pelos quadrados cinza e brancos. Dos oito participantes, seis responderam a esse item, a saber: Ana, Bia, Fredi, Helen, Samara e Taís. Como as resoluções foram semelhantes, no quadro 25 apresentamos as dos estudantes Ana, Bia e Fredi.

Quadro 25 – Resolução do item b) e c), 3.ª tarefa (Ana, Bia e Fredi)

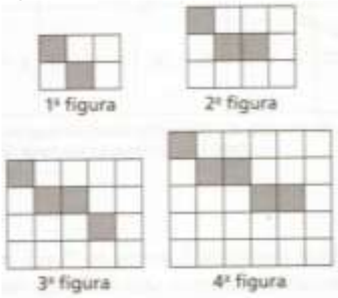
Estudantes	**Resoluções**
Ana	 b) Escreva a sequência de números que representa os quadrados brancos. 4,9,16,25 c) Escreva a sequência de números que representa os quadrados cinzas. 2,3,4,5
Bia	 b) Escreva a sequência de números que representa os quadrados brancos. 1=4, 2=9, 3=19, 4=25 c) Escreva a sequência de números que representa os quadrados cinzas. 2,1,2,1,
Fredi	 b) Escreva a sequência de números que representa os quadrados brancos. 4,9,16,25 c) Escreva a sequência de números que representa os quadrados cinzas. 2,3,4,5

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Apesar de os estudantes não terem representado corretamente a 5.ª figura no item a), Bia e Fredi compreenderam os padrões matemáticos propostos na tarefa e, assim, escreveram a sequência formada pelos quadrados brancos e cinza.

Chamamos a atenção para a resolução de Bia, no item c), em que ela respondeu que a sequência formada pelos quadrados cinza é dada por $2{,}1{,}2{,}1$. Para explicarmos nossa compreensão sobre tal resolução, trazemos a figura da 3.ª tarefa.

Figura 16 – Parte da 3.ª tarefa

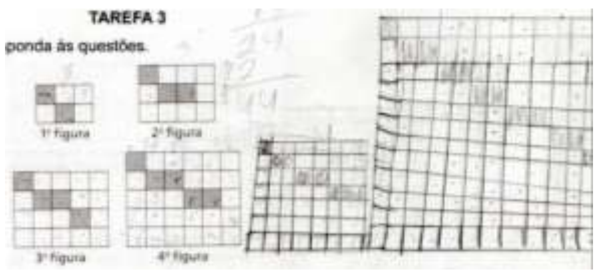


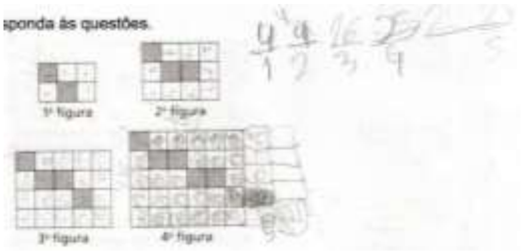
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018)

A resolução de Bia sugere-nos que a estudante se referiu ao crescimento e à disposição dos quadrados cinza de forma horizontal (ou podemos utilizar também a ideia de linha e coluna). Queremos dizer que, na 1.ª figura, a última linha formada por quadrados cinza (ou na horizontal) é constituída exatamente por 1 quadrado cinza; na 2.ª figura, a última linha formada por quadrados cinza é construída exatamente por 2 quadrados cinza; já na 3.ª figura, a última linha com quadrados cinza é construída por 1 quadrado cinza e assim por diante. Por isso, entendemos que a estudante relatou que a sequência formada pelos quadrados cinza é dada por $2, 1, 2, 1$.

Antes de apresentarmos as resoluções do item d), cujo espaço foi destinado para o sujeito representar a generalização de padrões, chamamos a atenção para os casos específicos dos estudantes Helen e Fredi, os quais não chegaram ao processo de generalização e, ao que parece, encontraram dificuldades para compreender o padrão figurativo proposto na tarefa. Para justificarmos essa ideia, apresentamos partes das tarefas dos estudantes e trechos da roda de conversa.

Quadro 26 – Parte da resolução da 3.ª tarefa (Helen e Fredi)

Estudantes	Resoluções
Fredi	

Helen	

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

No lado direito da resolução de Helen, percebemos rascunhos que nos indicam que a estudante completou o desenho para encontrar a quantidade de quadrados brancos, tal que $\frac{4}{1},\frac{9}{2},\frac{16}{3},\frac{25}{4},\ldots$. À primeira vista, parece fração, mas o rascunho da estudante nos sugere que o 4 se refere à quantidade de quadrados brancos na 1.ª figura, assim como 9 quadrados brancos na 2.ª figura e assim por diante, formando a sequência $(4,9,16,25,\ldots)$, que é a resolução do item c).

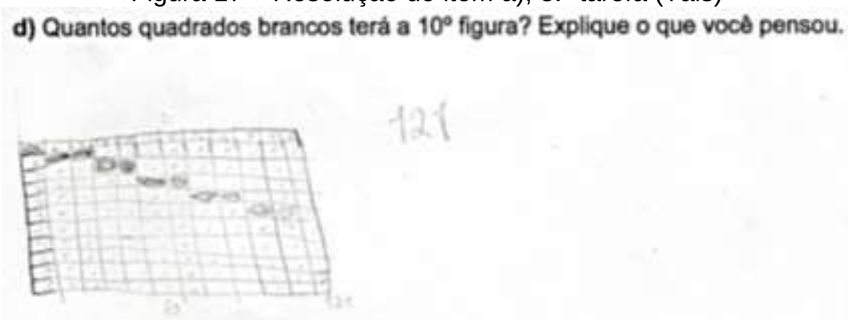
No entanto, a estudante não chegou ao processo de generalização e, durante a roda de conversa, demonstrou dificuldades em relação à tarefa.

> Pesquisadora: Qual tarefa vocês acharam mais difícil?
> Ana, Fredi, Ludmila, Samara, Sâmela e Tais responderam: A “b” da 3 e “d” da 3 [ou seja, o item b) e d) da 3.ª tarefa].
> Pesquisadora: Por quê?
> Ana: Porque eu não sabia nem o que era pra fazer.
> Pesquisadora: O que você não entendeu aí?
> Ana: Tipo, eu não entendi qual era a sequência.
> Helen: Não dava pra contar os quadrados.

Com base no relato de Helen, torna-se claro que a estudante enfrentou dificuldades para a realização da tarefa. Por meio da resolução de Fredi e Helen, entendemos que os estudantes começaram a utilizar a estratégia de contagem na tentativa de chegar à generalização de padrões, estratégia que diz respeito a contar o número de elementos de um padrão, obtendo, assim, o termo da sequência solicitado. No caso dos padrões figurativos, uma possibilidade é desenhá-los e contar seus elementos, por exemplo (STACEY, 1989), tal como Helen e Fredi procederam. Ao que tudo indica, os estudantes perderam-se nos desenhos e não obtiveram êxito na tarefa.

Após essas análises, apresentamos dados referentes ao item d) da 3.ª tarefa. Destacamos que dos oito participantes, somente a Taís solucionou a tarefa, cujo resultado apresentamos na figura 17.

Figura 17 – Resolução do item a), 3.ª tarefa (Tais)



Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Também durante a roda de conversa, a estudante relatou como e o que pensou para solucionar essa tarefa:

> Taís: [figura 1] Ela tem 2 quadrados [brancos] na lateral [largura], aí vai aumentando de 1 em 1, até chegar à 10.ª figura, tinham 11 quadrados de lado. E aqui [comprimento], contando esse junto, tem 12 até chegar à 10.ª.
> [...]
> Taís: Na verdade, eu desenhei os quadradinhos [11x12] e fui pintando.

Sendo assim, entendemos que Taís desenhou um retângulo com a base e altura medindo 12 e 11 unidades, respectivamente. Em seguida, pintou os quadrados cinza seguindo o padrão presente na 1.ª figura em diante, cuja representação pode ser dada por $(2{,}3{,}4{,}5{,}\ldots)$.

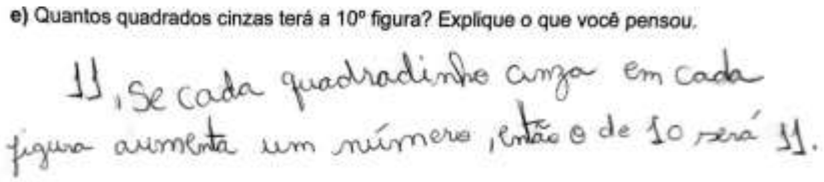
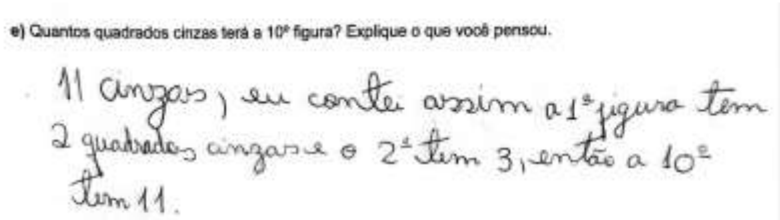
Com base nesses dados, não há como supor ou considerar que Taís generalizou o padrão, pois ela somente representou o 10.º termo por meio de um desenho e encontrou o valor correspondente a ele. Queremos dizer que precisaríamos de mais detalhes sobre como a estudante pensou e se isso diz respeito ao processo de generalização.

Conforme já discutimos, a estudante Taís foi a única participante que solucionou o item d) da 3.ª tarefa. Especificamente nesse item, os demais participantes encontraram dificuldades e isso se revelou principalmente durante a roda de conversa:

> Pesquisadora: Qual tarefa vocês acharam mais difícil?
> Fredi, Tais, Sâmela e Ludmila, Samara: A "b" da 3.ª e "d" da 3.ª.
> [...]
> Pesquisadora: Qual mais? A "d" da 3.ª [Quantos quadrados brancos terá a 10.ª figura? Explique o que você pensou], o que vocês não entenderam ou tiveram dificuldade?
> Helen: Os quadradinhos cinza são mais fáceis de contar, os brancos são mais difíceis.

O relato de Helen – "Os quadradinhos cinza são mais fáceis de contar, os brancos são mais difíceis" –sugere-nos que o item d) foi mais difícil de solucionar, enquanto o item e) não. Isso se confirmou nas resoluções dos participantes, pois, no item e), dos oito estudantes, cinco chegaram à generalização, nomeadamente Bia, Helen, Ludmila, Samara e Taís. As resoluções são semelhantes, por isso apresentamos somente as de Bia e Helen no quadro 27.

Quadro 27 – A generalização do padrão do item e), 3.ª tarefa (Bia e Helen)

Estudantes	A generalização do padrão
Bia	 e) Quantos quadrados cinzas terá a 10º figura? Explique o que você pensou. 11, Se cada quadradinho cinza em cada figura aumenta um número, então o de 10 será 11.
Helen	 e) Quantos quadrados cinzas terá a 10º figura? Explique o que você pensou. 11 cinzas, eu contei assim a 1ª figura tem 2 quadrados cinzas e a 2ª tem 3, então a 10ª tem 11.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Entendemos que tais estudantes compreenderam as relações entre os termos da sequência formada pelos quadrados cinza e generalizaram o padrão presente. Isso porque as resoluções sugerem que o termo qualquer da sequência é dado pelo seu anterior mais um, ideia presente nos relatos de Bia e Helen, respectivamente: "Se cada quadradinho cinza em cada figura aumenta um número, então o de 10 [10.º termo] será 11" e "a 1.ª figura tem 2 quadrados cinza e a 2.ª tem 3, então a 10.ª tem 11".

Sendo assim, uma possibilidade para algebrizar essa ideia pode ser dada por $a_n = n + 1$, tal que n é a posição do termo na sequência e $n > 0$ (n é maior que zero). Por exemplo, se queremos encontrar o número de quadrados cinza na 4.ª figura, calculamos $a_4 = 4 + 1 = 5$.

Entendemos que a estratégia diferença recursiva foi a escolhida para os estudantes generalizarem o padrão nesse item, pois os termos foram encontrados com base na diferença entre termos consecutivos, tal como caracteriza Stacey (1989) em relação a essa estratégia. Por exemplo, o número de quadrados cinza da 4.ª figura é 5, pois

$4 + 1 = 5$, tal que 4 é o termo anterior (3.ª figura) e o 1 é a diferença entre o número de quadrados cinza da 3.ª figura com a 2.ª ($4 - 3 = 1$).

De acordo com Lannin, Barker e Townsend (2006), os estudantes recorrem à recursão quando aparentemente têm uma representação visual da situação. Assim, considerando que a 3.ª tarefa contempla padrões matemáticos figurativos, compreendemos que nossos dados se aproximam das ideias de Lannin, Barker e Townsend (2006).

Considerando a estratégia de generalização empregada e as resoluções acima apresentadas, cremos que a generalização é próxima, pois os termos da referida sequência foram determinados com base no método recursivo, tal como caracteriza Stacey (1989).

No que se refere ao tipo de representação utilizado pelos participantes, identificamos a argumentação por meio da linguagem materna. Nesse sentido, Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Cardoso (2010) e Vale (2015) explicam que geralmente as crianças utilizam a argumentação por meio da linguagem materna, seja a fala, seja a escrita.

Sobre os processos do pensamento matemático avançados presentes nas resoluções dos estudantes, tudo indica a visualização, que é considerada o primeiro passo rumo à generalização (MASON, 1996; VALE, 2013; BARBOSA; VALE, 2015), à representação, por meio do uso da linguagem materna escrita, e à generalização, ambas na concepção de Dreyfus (2002).

Em seguida, apresentamos os dados referentes à 4.ª tarefa. Inicialmente destacamos que dos oito participantes, seis chegaram ao processo de generalização e solucionaram os itens dessa tarefa.

Considerando que as resoluções dos itens a) e b) são semelhantes, no quadro 28 apresentamos as das estudantes Bia, Helen e Taís, pois entendemos que são uma síntese das demais.

Quadro 28 – Resolução dos itens a) e b), 4.ª tarefa (Bia, Helen e Taís)

Estudantes	Resoluções
Bia	**a)** Continue a escrita dessa sequência até o 10º termo. 26, 31, 36, 41, 46 **b)** O que você observa em relação aos termos dessa sequência. Que a sequência é de 5 em 5.
Helen	a) Continue a escrita dessa sequência até o 10º termo. 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46 b) O que você observa em relação aos termos dessa sequência. está pulando em 5 em 5.
Taís	(1, 6, 11, 16, 21, ...) 31 36 41 46 a) Continue a escrita dessa sequência até o 10º termo. 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46 b) O que você observa em relação aos termos dessa sequência. Eles vão aumentando de 5 em 5.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Com base nessas tarefas, entendemos que os estudantes compreenderam o padrão presentes na tarefa, pois identificaram que os termos aumentam de 5 em 5, conforme mostram as resoluções acima. Além disso, eles continuaram com a escrita dos termos da sequência, o que também nos sugere que entenderam as relações que há entre os termos.

Isso se confirmou durante as discussões na roda de conversa. Chamamos a atenção para o relato de Bia.

> Pesquisadora: O que vocês perceberam em relação a esses termos?
> Fredi: Vão aumentando de 5 em 5.
> [...]
> Fredi: Só somar de 5 em 5.
> Tais: Cada número quando somado com 5 vai obter o resultado.
> Bia: A mesma coisa, eu também coloquei, tipo, o número vai terminar com 1 ou com 6.

Considerando esse trecho da roda de conversa, percebemos que Bia descobriu outro padrão para além dos termos da sequência e se referiu aos algarismos dos números. Em outras palavras, os termos terminam sempre em 1 ou 6, tal como Bia relatou, da seguinte forma: $(1,6,11,16,21,26,31,\ldots)$.

Essas resoluções também nos sugeriram que os estudantes se aproximaram do processo de generalização de padrões, o que só se confirmou nos dados do item c), conforme apresentamos no quadro 29.

Quadro 29 – A generalização do padrão do item c), 4.ª tarefa (Bia, Helen e Taís)

Estudantes	A generalização do padrão
Bia	c) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica para o seu colega? que iria aumentando de 5 em 5 ou que ° primeiro número terminada com 1 e o próximo numero terminada em6.
Helen	c) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica para o seu colega? eu explicaria tipo, você vai ter que fazer isso, $1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{+5} 11 \xrightarrow{+5} 16$, 21, 26, 31, 36, 41, 46 você vai ter que somar $1+5 = 6^{+5} = 11^{+5} = 16$ Neo sempre vai somar mais 5.
Taís	c) Como você explicaria a formação dessa sequência numérica para o seu colega? A sequência está aumentando de 5 em 5. Ex: $1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{+5} 11$...

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Neste trabalho, entendemos que a generalização diz respeito à análise de casos particulares rumo aos gerais, segundo Kaput (2000) e Dreyfus (2002). Sendo assim, considerando que os estudantes identificaram o padrão presente na tarefa e compreenderam que a todo termo da sequência será acrescentado o 5, então concordamos com a ideia de que tais participantes generalizaram o padrão. Isso nos foi sugerido, principalmente, no trecho da resolução de Helen: “[...] sempre vai somar mais 5”.

Conforme já discutimos ao longo desta análise de dados, a estratégia diferença recursiva diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, conforme define Stacey (1989). Com base nisso, entendemos que essa estratégia foi utilizada pelos estudantes porque, para encontrar o 3.º termo, o 11, podemos calcular $6 + 5$, tal que 6 é o termo anterior a 11 e 5 é resultado da diferença entre $6 - 1$, ou seja, 2.º termo menos o 3.º. Considerando que a estratégia utilizada é a diferença recursiva, cremos que a generalização é próxima.

Ainda sobre essa estratégia, Lannin, Barker e Townsend (2006) explicam que os fatores que determinam a utilização dessa estratégia são a visualização que os alunos têm do padrão e a estrutura matemática identificada por eles em relação a esse padrão.

Quanto aos tipos de representações utilizadas, destacamos a linguagem materna (fala e escrita, considerando o relato na roda de conversa), aritmética (porque há o uso de sequências numéricas) e os esquemas, tais como na resolução da participante Taís, em que ela usa setas e números para representar o que pensou.

Considerando os processos mentais que em interação desenvolvem o pensamento matemático avançado, identificamos a presença de três nas resoluções dos estudantes, a saber: visualização, representação e generalização – processos predominantes nas generalizações anteriores.

No quadro 30, sintetizamos os dados referentes às estratégias e tipos de generalização escolhidos pelos participantes, bem como os processos do pensamento matemático avançado e os tipos de representações presentes nas resoluções.

Quadro 30 – Síntese das estratégias de generalização de padrões (2.º encontro)

Tarefas	**Itens**	**Estratégias de generalização**	**Tipos de generalização**	**Processos do pensamento matemático avançado**	**Tipos de representação e registro**
3	e)	Recursiva	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna.
4	c)	Recursiva	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna e aritmética; esquemas.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Assim como no caso anterior, a estratégia recursiva se destacou ante as demais, assim como o tipo de generalização próxima. Além disso, a visualização, generalização e representação foram os processos mentais percebidos nas resoluções dos estudantes, sendo o uso da língua materna como a representação predominante.

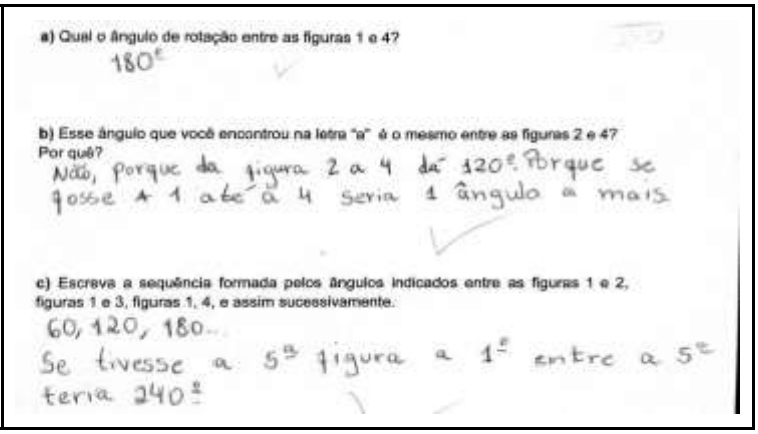
5.3 ANÁLISES DO 3.º ENCONTRO

Neste subcapítulo, apresentamos nossas análises referentes à 5.ª e 6.ª tarefas desenvolvidas no 3.º e último encontro. Nesse dia, a estudante Samara faltou, resultando em sete dos oito participantes desta pesquisa.

Antes de apresentarmos as análises da 5.ª tarefa, destacamos que o conteúdo que tal tarefa contemplou não foi estudado pelos participantes até aquele momento. Apesar de não terem estudado o referido conteúdo, dos sete participantes, cinco resolveram a tarefa proposta, nomeadamente Ana, Bia, Helen, Ludmila e Taís. No quadro 31, apresentamos as resoluções dos itens a), b) e c) das estudantes Helen e Taís, pois entendemos que são uma síntese das resoluções dos demais participantes.

Quadro 31 – Resolução dos itens a), b) e c), 5.ª tarefa (Helen e Taís)

Estudantes	Resoluções
Helen	a) Qual o ângulo de rotação entre as figuras 1 e 4? 180. 60 60 60 240 b) Esse ângulo que você encontrou na letra "a" é o mesmo entre as figuras 2 e 4? Por quê? Não, porque tem 60 3X na figura 1 e 4 e a 2 e 4 só é apenas 2X 60. c) Escreva a sequência formada pelos ângulos indicados entre as figuras 1 e 2, figuras 1 e 3, figuras 1, 4, e assim sucessivamente. 60°, 120°, 180°.
Taís	

	 a) Qual o ângulo de rotação entre as figuras 1 e 4? 180º b) Esse ângulo que você encontrou na letra "a" é o mesmo entre as figuras 2 e 4? Por quê? Não, porque da figura 2 a 4 dá 120º. Porque se fosse a 1 até a 4 seria 1 ângulo a mais c) Escreva a sequência formada pelos ângulos indicados entre as figuras 1 e 2, figuras 1 e 3, figuras 1, 4, e assim sucessivamente. 60, 120, 180... Se tivesse a 5ª figura a 1ª entre a 5ª teria 240º

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

As resoluções acima sugerem-nos que as estudantes compreenderam o padrão matemático presente na referida tarefa, principalmente porque compararam o ângulo formado pelas figuras 1 e 4 e perceberam que é diferente do formado pelas figuras 2 e 4.

Na resolução de Helen, percebemos que a estudante utilizou a ideia de multiplicação para escrever a sequência numérica formada pelos ângulos e isso se evidenciou em "60 3x na figura 1 e 4", ou seja, entre as figuras 1 e 4, há 3 ângulos de 60º; portanto, o ângulo total formado por eles é 180º, isto é, $3.60°$ ou, ainda, $60° + 60° + 60°$. Nesse mesmo trecho, destacamos "[...] e a 2 e 4 só é apenas 2x60°", o que quer dizer que, entre as figuras 2 e 4, há 2 ângulos de 60º, sendo a soma deles 120º, ou seja, $2.60°$ ou $60° + 60°$.

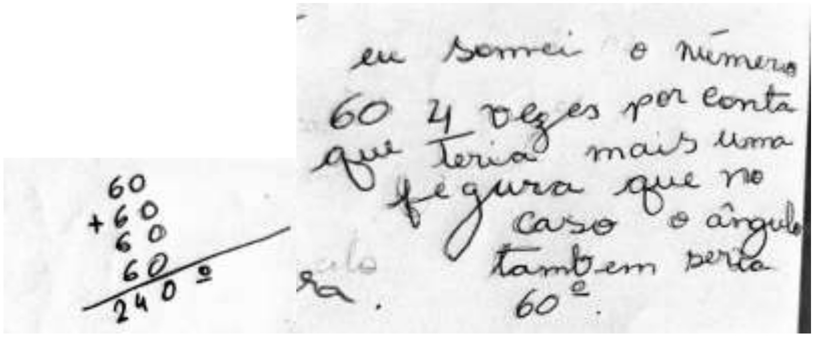
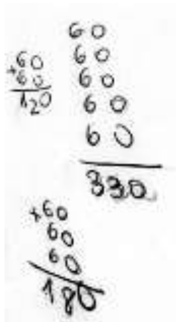
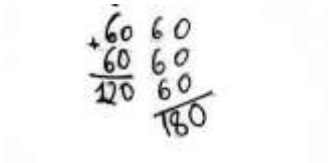
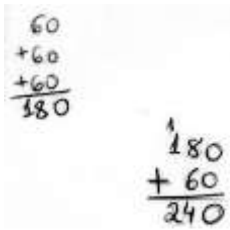
Embora não esteja explícita em sua resolução, Taís também utilizou a ideia de multiplicação, o que se evidenciou durante a roda de conversa.

> Pesquisadora: Qual o ângulo de rotação entre as figuras 1 e 4? O que vocês pensaram nessa aí?
> Bia: Eu pensei 60°+60°+60° [Ana, Helen, Ludmila e Taís consentiram].
> Taís: Eu fiz 3x60°.
> Helen: É! Eu botei 3x60°.

No quadro 32, reunimos alguns registros dos participantes que ilustram essa ideia de multiplicação, presentes nas resoluções.

Quadro 32 – Parte das resoluções, 5.ª tarefa (Helen e Taís)

Estudantes	**Resoluções**

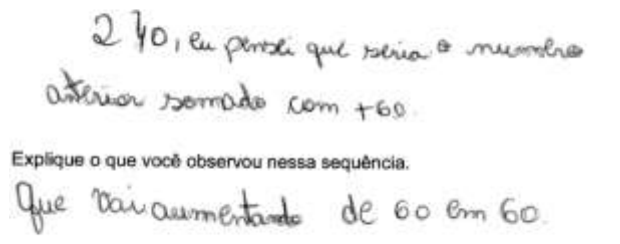
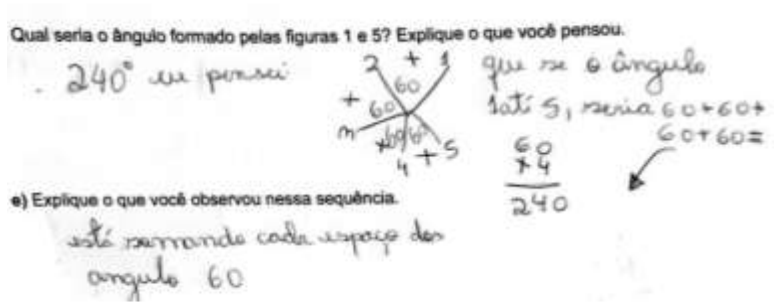
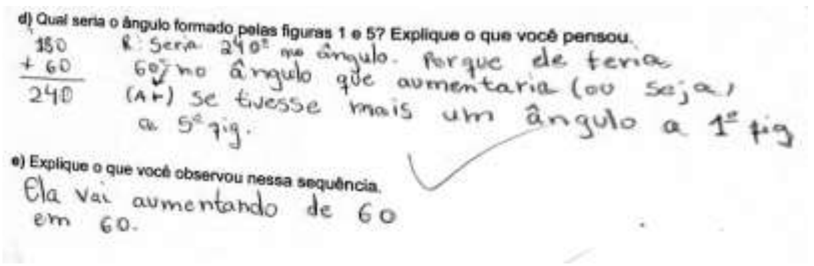
Ana	
Helen	
Ludmila	
Taís	

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Esses registros, tais como as resoluções dos itens a), b) e c), sugerem-nos que os estudantes compreenderam as relações que há entre os termos da sequência, construindo, assim, a ideia da generalização. Tanto que no item d), conforme podemos observar no quadro 33, os estudantes utilizaram essa ideia de multiplicação para a expansão da sequência, o que os ajudou a encontrar termos maiores, como o ângulo formado pelas figuras 1 e 5. No item e), os participantes explicaram o que pensaram nos itens anteriores.

Nessa perspectiva, relembramos Vlassis e Demonty (2022), pesquisadores que defendem ser possível desenvolvermos o processo de generalização em conceitos da aritmética, sem necessariamente utilizarmos o simbolismo algébrico. Entendemos, assim, que o uso de conceitos da aritmética foi um meio pelo qual os estudantes chegaram à generalização de padrões.

Quadro 33 – Resolução do item d) e a generalização do padrão do item e), 5.ª tarefa (Bia, Helen e Taís)

<table>
<tr><th>Estudantes</th><th>Resoluções</th></tr>
<tr><td>Bia</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Helen</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Taís</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Chamamos a atenção para os tipos de registros utilizados pelos participantes para generalizarem o padrão, especificamente para a resolução da estudante Helen que desenhou os ângulos e usou setas e esquemas para explicar o padrão matemático naquela situação. Aqui, relembramos Cardoso (2010), pesquisador que explica que os estudantes podem utilizar vários tipos de representações, incluindo o uso de esquemas e desenhos, conforme procedeu a referida participante.

Considerando as resoluções apresentadas no quadro 33, entendemos que as participantes utilizaram as estratégias de múltiplo da diferença e recursiva para generalizarem o padrão, sendo a generalização próxima em todos os casos.

O trecho da resolução de Bia evidenciou-nos a escolha da estratégia recursiva: “eu pensei que seria o número anterior somado com mais 60”. O registro dessa estudante ilustra justamente a definição de recursividade segundo Stacey (1989), que diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, ou seja, $180° + (180° - 120°) = 180° + 60° = 240°$.

Da mesma forma, entendemos que essa estratégia também foi eleita pelas participantes Helen e Taís, o que nos foi sugerido no relato "vai aumentando de 60 em 60", ou seja, da diferença entre termos consecutivos, por exemplo, $120° - 30° = 180° - 120° = 240° - 180° = 60°$, e assim por diante.

Também entendemos que as participantes utilizaram a estratégia do múltiplo da diferença sem ajuste para generalizarem o padrão, a qual diz respeito à diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo sem a necessidade de ajustar o resultado final. Nesse caso, a sequência formada pelos ângulos pode ser representada por $(60°, 120°, 180°, 240°, \ldots)$, sendo 60° a diferença entre termos consecutivos, já que $180° - 120° = 60°;\ 240° - 180° = 60°$ e assim por diante. Todos os termos dessa sequência são justamente múltiplos de 60° (o múltiplo da diferença), pois $120° = 2.60°;\ 180° = 3.60°;\ 240° = 4.60°$, entre outros.

Em relação aos tipos de registros, as resoluções indicaram-nos que os participantes utilizaram a linguagem materna (fala e escrita), a linguagem aritmética (destacamos o uso de números e operações) e esquemas e desenhos (como na resolução de Helen). Tais dados vão ao encontro das ideias de Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Cardoso (2010) e Vale (2013).

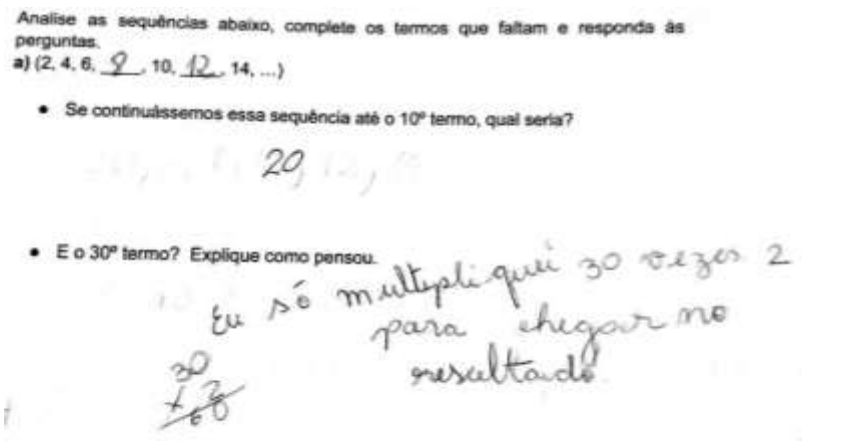
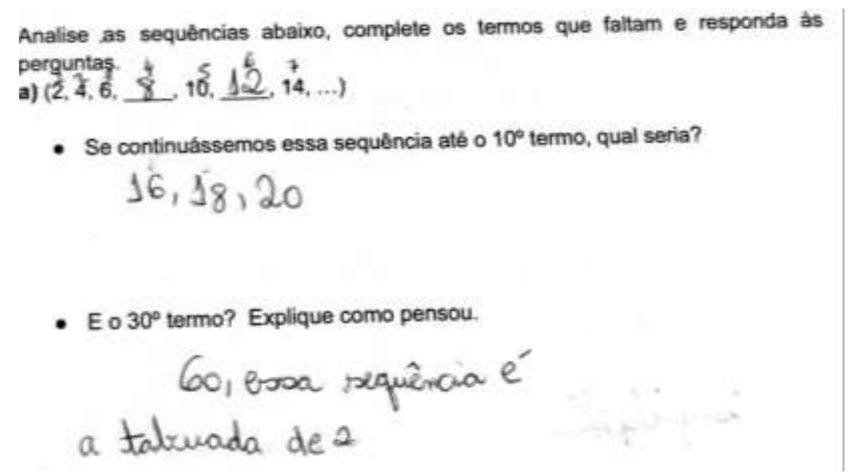
Inspirados por Dreyfus (2002), entendemos que a abstração diz respeito à análise de conceitos e situações matemáticas para além do que se vê. Por exemplo, ao trabalharmos com os números, devemos nos concentrar nas relações que há entre eles, para compreender o que é conjunto numérico, quais operações podem realizar com eles, entre outras possibilidades, ou seja, lançar o olhar sobre situações e relações matemáticas que estão além.

Considerando as resoluções acima, entendemos que as estudantes chegaram à abstração parcialmente, pois consideraram outros conceitos matemáticos para pensar na generalização, tal como os registros nos sugerem. Parcialmente porque sintetizaram, mas, para isso, não utilizaram a linguagem algébrica.

Além da abstração, as resoluções apontam-nos que os processos do pensamento matemático avançado presentes foram a visualização, generalização e representação. Vale destacar que os pesquisadores Mason (1996), Vale (2013) e Barbosa e Vale (2015) concordam em que a visualização é o primeiro passo rumo à generalização de padrões.

Agora, apresentamos nossas análises referentes à 6.ª tarefa, especificamente do item a). Dos sete participantes, seis solucionaram a tarefa proposta. No quadro 34, apresentamos as resoluções das estudantes Ana, Bia e Helen.

Quadro 34 – Resolução do item a), 6.ª tarefa (Ana, Bia, Helen)

Estudantes	**Resoluções**
Ana	 Analise as sequências abaixo, complete os termos que faltam e responda às perguntas. a) (2, 4, 6, 9, 10, 12, 14, ...) • Se continuássemos essa sequência até o 10º termo, qual seria? 20 • E o 30º termo? Explique como pensou. Eu só multipliquei 30 vezes 2 para chegar no resultado 30 x 2 = 60
Bia	 Analise as sequências abaixo, complete os termos que faltam e responda às perguntas. a) (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...) • Se continuássemos essa sequência até o 10º termo, qual seria? 16, 18, 20 • E o 30º termo? Explique como pensou. 60, essa sequência é a tabuada de 2

Helen	 perguntas a) (2, 4, 6, _8_, 10, _12_, 14, ...) • Se continuássemos essa sequência até o 10º termo, qual seria? 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 2 10 × 2 = 20 • E o 30º termo? Explique como pensou. 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30 32,34,36,38,40,42,44,46,48,50,52,54,56 58,60. é só multiplicar 30 x3=60 • Explique como encontrar um termo qualquer dessa sequência. só multiplicar a quanto está pulando por o número que está pedindo exemplo: está pulando de 2 em 2 e está pedindo pro achar até o 30, é só fazer 2x30.

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Assim como na 5.ª tarefa, os estudantes utilizaram a ideia de multiplicação para encontrar os termos "maiores" da sequência, tanto que a participante Bia reconheceu que tal sequência se refere aos múltiplos do número 2. As resoluções sugerem-nos que o 30º termo foi descoberto por meio de $2.30 = 60$. Além desse caminho, Helen escreveu todos os termos da sequência até o 30.º termo. Durante a roda de conversa, Ana e Helen confirmaram-nos que pensaram na multiplicação para solucionar tal tarefa.

> Pesquisadora: Como vocês fizeram?
> Helen: Eu fui somando de 2 em 2.
> Pesquisadora: Como você encontrou o 30.º termo?
> Helen: Eu fiz… assim mesmo, 2 vezes, não, 2… eu esqueci que tinha feito, mas em dois e dois.
> Eu: Todo mundo fez somando de dois em dois?
> Ana: Eu fiz 2x30.

Entendemos que os dois itens anteriores auxiliaram os participantes a perceber o padrão matemático e entender as relações que há entre os termos da sequência $(2,4,6,8,\ldots)$, provocando-os a chegar ao processo de generalização.

Disponibilizamos um espaço para os estudantes nos explicarem como encontrar qualquer termo da referida sequência, ou seja, explicar-nos sobre como generalizaram o padrão. No quadro 35, apresentamos os relatos de Ana, Bia e Helen.

Quadro 35 – A generalização do padrão do item a), 6.ª tarefa (Ana, Bia, Helen)

Estudantes	**Generalizações**

Ana	Explique como encontrar um termo qualquer dessa sequência. só observar o quanto o número está sendo somado) para descobrir a tabuada e saber o resultado
Bia	Explique como encontrar um termo qualquer dessa sequência. Multiplicando o número por 2
Helen	só multiplicar a quanto está pulando por o numero que está pedindo exemplo: está pulando de 2 em 2 e está pedindo pro achar até o 30, é só fazer 2x30.

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

No trecho “só observar o quanto no número está sendo somado”, entendemos que Bia se referiu à posição do termo desconhecido, para, assim, “descobrir a tabuada e saber o resultado”, nas palavras da participante. Ou seja, inicialmente é necessário saber qual a posição do termo desconhecido e, por meio dele, realizar a multiplicação e encontrá-lo. Por exemplo, o termo da 30.ª posição pode ser calculado por meio de $2.30 = 60$.

Essa ideia também está presente na resolução de Helen, fato que se evidenciou no trecho “está pulando de 2 em 2 e está pedindo para achar até o 30, é só fazer 2.30".

A resolução de Bia sugere-nos (e provocou-nos a pensar) que a estudante quase chegou a usar a linguagem algébrica para representar sua ideia. No trecho "multiplicando o número por dois”, entendemos que a estudante quis dizer “posição do termo qualquer” em vez de “número”, o que pode ser representado por $a_n = 2.n$, tal que n é a posição do termo que a participante chamou de “número”, tal que $n > 0$ (maior que zero, pertencente ao conjunto dos números naturais).

Para compreendermos as estratégias de generalização das estudantes, analisamos as resoluções apresentadas nos quadros 33 e 34, bem como nos relatos da roda de conversa. Considerando que Ana utilizou a ideia de multiplicação para encontrar os termos da sequência e compreender que, para encontrar termos em posição “maiores”, se deve “descobrir a tabuada e saber o resultado”, tal como nas palavras da estudante. Isso nos sugere que a estratégia eleita por ela é o múltiplo da diferença sem ajuste (STACEY, 1989), ou seja, a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. Nesse caso, o fator multiplicativo é o 2, resultado da diferença entre termos consecutivos $4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 2$.

Pela resolução de Bia, no quadro 33, percebemos que a estudante utilizou a estratégia recursiva (STACEY, 1989), principalmente porque ela continuou a escrita da sequência $(16,18,20)$ somando $16 + 2;\ 18 + 2;\ 20 + 2.$ Além dessa estratégia, entendemos também que a participante utilizou a do múltiplo da diferença sem ajuste (STACEY, 1989), uma vez que Bia utilizou a ideia da multiplicação, assim como a participante Ana.

Com base nas considerações de Stacey (1989), na resolução da participante Helen e nos relatos da roda de conversa, entendemos que a estudante não só utilizou a estratégia do múltiplo da diferença sem ajuste, assim como Ana e Bia, como também a contagem, fato que se evidenciou na resolução apresentada no quadro 33, em que a estudante escreveu todos os termos da sequência até a 30.ª posição e verificou que este se refere ao termo 60.

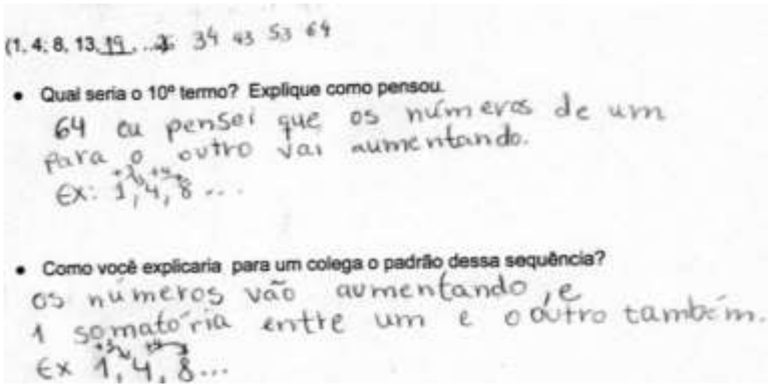
De acordo com Stacey (1989), a escolha da estratégia de contagem é feita com a intenção de ter a rápida obtenção da resposta solicitada pela tarefa, sendo essa escolha certeira, na maioria das vezes.

No que se refere aos tipos de registos utilizados para representar a generalização de padrões, as resoluções sugeriram-nos que as linguagens materna e aritmética foram as escolhidas pelos participantes. Nesse caso, houve a utilização de números, sequência e operações, além dos relatos por meio da escrita (resoluções) e fala (roda de conversa).

Com base em Dreyfus (2002), identificamos alguns dos processos do pensamento matemático avançado nas resoluções dos estudantes. Destacamos a representação simbólica (escrita e fala), visualização e generalização. Segundo esse autor, a representação simbólica melhora a comunicação daquilo que se pensa, por meio tanto da escrita quanto da fala. As resoluções demonstram-nos que os estudantes utilizaram uma variedade de representações simbólicas, sendo a fala e escrita – por meio da linguagem materna e aritmética – justamente com a intenção de comunicar o que pensaram (isto é, a generalização do padrão).

Agora apresentamos nossas análises referentes ao item b) da 6.ª tarefa. Dos sete participantes, uma solucionou a tarefa, tal como mostramos no quadro 36.

Quadro 36 – Resolução do item b), 6.ª tarefa (Taís)

Estudante	**Resolução**
Taís	 (1, 4; 8, 13, 19, ... 34 43 53 64 • Qual seria o 10º termo? Explique como pensou. 64 eu pensei que os números de um para o outro vai aumentando. Ex: 1, 4, 8 ... • Como você explicaria para um colega o padrão dessa sequência? os números vão aumentando, e a somatória entre um e o outro também. Ex 1, 4, 8...

Fonte: Dados da Pesquisa (2022)

A nosso ver, nas duas questões, a estudante explicou-nos como generalizou o padrão. Isso se evidenciou no trecho “eu pensei que os números de um para o outro vai aumentando”, ou seja, o padrão aumenta 1 unidade. Por exemplo, o 4 é resultado de $1 + 3 = 4$, da mesma forma que 8 é igual a $4 + 4 = 8$ e, ainda, $8 + 4 = 13$ e assim por diante.

Segundo Stacey (1989), a estratégia do múltiplo com ajuste diz respeito calcular a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado final. A resolução de Taís sugere-nos que a estudante utilizou tal estratégia para a generalização. Uma maneira de encontrar os termos da sequência $(1,4,8,13,19,\dots)$ seria justamente calcular $8 = 4 + (4 - 1) + 1$, assim como $13 = 8 + (8 - 4) + 1$ e $19 = 13 + (13 - 8) + 1$, sendo o +1 o ajuste do resultado final.

Com base na resolução, entendemos que, para representar o que se generalizou, a estudante utilizou a linguagem aritmética e materna, além do uso de esquemas; nesse caso, setas para explicar o comportamento do padrão matemático.

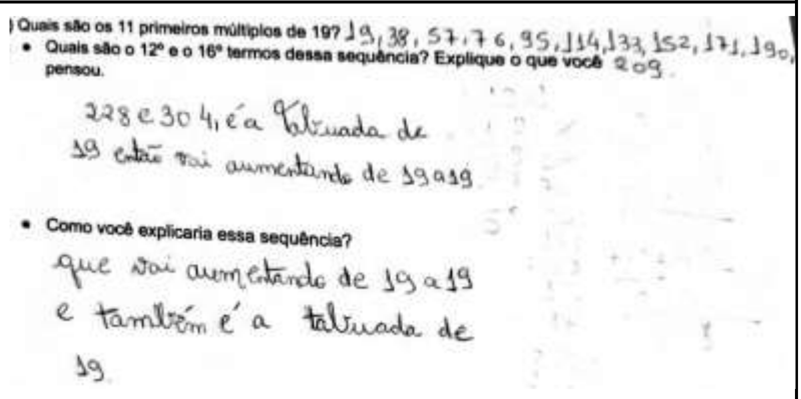
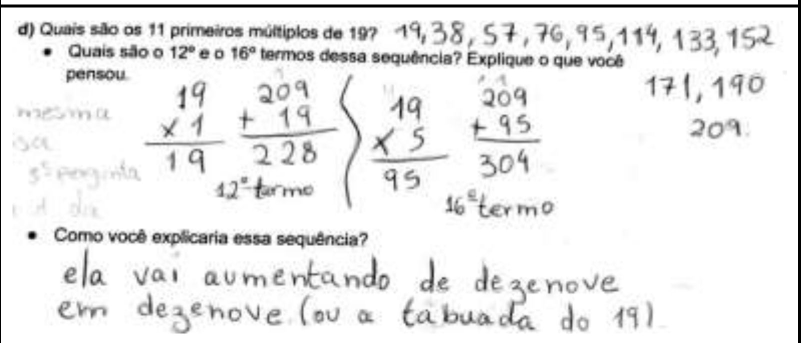
Em relação aos processos do pensamento matemático avançado, a nosso ver a estudante utilizou a visualização, a generalização e a representação simbólica (DREYFUS, 2002).

Agora apresentamos os dados referentes ao item c) da 6.ª tarefa. Dos sete participantes, dois solucionaram essa questão. Isso pode ser explicado pela dificuldade encontrada por eles ao resolverem tal questão, o que se evidenciou na roda de conversa.

> Pesquisadora: Qual tarefa vocês acharam mais difícil e por quê?
> Participantes: Tarefa 6 [Em uníssono]
> Helen: A “c”
> Sâmela: Eu achei difícil a “c” também.
> Helen: Eu não fiz essa.
> Pesquisadora: Por que é a mais difícil?
> Tais: Tem múltiplo.
> Helen: É!
> Pesquisadora: Vocês sabem o que é múltiplo?
> Tais: 19,38…

Pelo relato dos estudantes, o item c) foi o que mais suscitou dificuldades entre eles, justamente por contemplar o conteúdo de múltiplos. No quadro 37, apresentamos as resoluções de Bia e Taís, estudantes que solucionaram tal tarefa.

Quadro 37 – Resolução do item c), 6.ª tarefa (Bia e Taís)

Estudantes	Resoluções
Bia	) Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19? 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, 190, 209 • Quais são o 12º e o 16º termos dessa sequência? Explique o que você pensou. 228 e 304, é a tabuada de 19 então vai aumentando de 19 a 19 • Como você explicaria essa sequência? que vai aumentando de 19 a 19 e também é a tabuada de 19
Taís	 d) Quais são os 11 primeiros múltiplos de 19? 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, 190, 209 • Quais são o 12º e o 16º termos dessa sequência? Explique o que você pensou. 19 × 1 = 19 209 + 19 = 228 12º termo 19 × 5 = 95 209 + 95 = 304 16º termo • Como você explicaria essa sequência? ela vai aumentando de dezenove em dezenove (ou a tabuada do 19)

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Conforme tais resoluções nos evidenciam, Bia e Taís perceberam a ideia dos múltiplos (o que elas chamaram de tabuada) nessa tarefa e compreenderam que os termos aumentam de 19 em 19. Inclusive a resolução de Bia nos sugere que a participante escreveu a tabuada, porém a apagou.

Chamamos a atenção para a resolução de Taís, que pensou diferente de Bia. Para indicar o 12.º termo, a estudante encontrou o 11.º termo, nesse caso $19.11 = 209$, e, em seguida, somou com 19, que seria o 1.º termo, resultando em 228, ou seja, ela somou os resultados referentes aos termos na 1.ª e 11.ª posições. Da mesma forma, para encontrar o 16.º termo, ela calculou o 5.º termo (95) e o somou com o 11.º termo (209), resultando em 304.

Com base nessas resoluções, entendemos que Bia utilizou a estratégia do múltiplo da diferença sem ajuste, enquanto Taís utilizou o múltiplo da diferença com ajuste. De acordo com Stacey (1989), a estratégia do múltiplo da diferença sem e com ajuste visa a usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando, ou não, o resultado.

Em relação aos tipos de representação, percebemos a linguagem aritmética nomeadamente na escrita da sequência e nos cálculos de adição e multiplicação. Ademais, notamos a presença da linguagem materna nos registros escritos e orais. Já no tocante aos processos do pensamento matemático avançado, percebemos a presença da visualização, representação e generalização.

No quadro 38, sintetizamos os dados referentes às estratégias e tipos de generalização escolhidos pelos participantes, bem como os processos do pensamento matemático avançado e os tipos de representações presentes nas resoluções.

Quadro 38 – Síntese das estratégias de generalização de padrões (3.º encontro)

Tarefas	Itens	Estratégias de generalização	Tipos de generalização	Processos do pensamento matemático avançado	Tipos de representação e registro
5	d), e)	Recursiva; múltiplo da diferença sem ajuste	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna; aritmética; esquemas
6	a)	Recursiva; Contagem; Múltiplo da diferença sem ajuste	Próxima	Visualização; generalização; representação.	Linguagem materna e aritmética;
	b)	Múltiplo da diferença sem ajuste	Próxima	Visualização; generalização; representação	Linguagem materna e aritmética;

	c)	Múltiplo da diferença sem e com ajuste	Próxima	Visualização; generalização; representação	esquemas Linguagem materna e aritmética

Fonte: Dados da pesquisa (2022)

Conforme os dados do 1.º e 2.º encontros nos revelaram, a linguagem materna e aritmética foram as escolhidas pelos participantes para a representação da generalização. Se comparadas com as dos encontros anteriores, a visualização, representação e generalização continuaram a ser os processos do pensamento matemático avançado presentes e predominantes nas resoluções dos estudantes. Em relação às estratégias de generalização escolhidas pelos participantes, destacamos a recursiva e o múltiplo da diferença sem ajuste.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DA PESQUISA

Relembramos da questão que orientou esta pesquisa: De que forma estudantes do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos e desenvolvem o pensamento algébrico?

Com a intenção de respondermos à essa questão, utilizamos a técnica da análise de conteúdo a fim de categorizarmos as formas (maneiras) como os estudantes generalizaram os padrões nas tarefas propostas. Com base nos dados produzidos, identificamos que os participantes utilizaram as estratégias de contagem, recursiva e o múltiplo da diferença sem e com ajuste.

Segundo Stacey (1989), Barbosa (2009) e Barbosa e Vale (2015), a estratégia recursiva tende a ser a mais utilizada pelos estudantes, justamente por ela não requerer nenhum tipo de ajuste, enquanto a contagem tende a ser muito utilizada em generalizações próximas.

Esses dados se aproximam dos resultados das investigações realizadas por Barbosa (2009) e Sousa (2019), apresentadas na revisão de literatura, pesquisadores que evidenciaram a contagem como a principal estratégia eleita pelos estudantes no processo de generalização de padrões.

Tratando especificamente sobre os tipos de generalização, destacamos que a do tipo próxima se sobressaiu em relação à distante, mesmo nas tarefas em que era conveniente utilizar a estratégia distante devido ao contexto.

Sob essa perspectiva, Vale e Barbosa (2019) enfatizam que os estudantes se desenvolvem melhor em tarefas que contemplam a generalização próxima, não nos casos de generalização distante. Nossa pesquisa traz contribuições no intuito de confirmar as ideias dessas autoras, pois não encontramos indícios de generalização distante nas resoluções dos participantes, pelo contrário, em todos os casos analisados, a generalização próxima esteve presente.

Com base em nossos estudos e em Dreyfus (2002), consideramos que a generalização de padrões também diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado, uma vez que generalizar também contempla o uso de outros processos mentais, tais como representação, visualização, sintetização, abstração, entre outros.

A análise dos dados desta pesquisa sugeriu-nos essa ideia, pois os estudantes que generalizaram padrões também utilizaram a representação, visualização, alternação de representações e abstração parcial. Isso nos provocou a pensar que especificamente os processos de visualização, generalização e representação aconteceram em cadeia, visto que os participantes visualizaram o padrão matemático proposto, generalizaram e, por último, representaram (isto é, externalizaram) o que pensaram. Entendemos, assim, que a visualização é anterior à generalização, já que é considerada o primeiro passo na exploração do padrão, de acordo com Mason (1996) e Barbosa e Vale (2015).

Nossas análises indicaram-nos que os participantes chegaram à abstração parcial. Entendemos que essa abstração foi parcial porque eles não chegaram à generalização distante, isto é, a uma expressão algébrica que represente a generalização. Relembramos que a abstração é considerada o nível mais avançado do pensamento matemático.

Com base em nossas análises, identificamos que a generalização de padrões foi representada por meio de diferentes tipos de registros que categorizamos em linguagem aritmética, algébrica e materna (fala e escrita) e uso de esquemas e desenhos. Esses resultados aproximam-se das ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel

(1993), Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Ponte, Branco e Matos (2009), Cardoso (2010) e Vale (2013). Destacamos que em todos os casos a linguagem materna foi utilizada como meio de representação.

Pesquisadores como Kaput (2000), Blanton e Kaput (2005), Ponte, Branco e Matos (2009) e Vale (2013) defendem que, geralmente, os estudantes utilizam a argumentação por meio da linguagem materna – seja a fala, seja a escrita – ou dos gestos e evoluem para uma representação mais formal, à medida que vão construindo outros conceitos matemáticos, para representar ou expressar a generalização. Inclusive Ponte, Branco e Matos (2009) especificam que os estudantes dos anos iniciais normalmente utilizam a linguagem materna e os dos anos finais a algébrica.

Na contramão das ideias desses autores, esta pesquisa mostrou que os estudantes do 7.º ano do ensino fundamental utilizaram, predominantemente, a linguagem materna como registro de generalização e, em apenas um caso, a linguagem algébrica.

Apesar de as pesquisas da revisão de literatura – Lima (2014), Sousa (2019) e Cordeiro (2020) – apontarem a linguagem algébrica e materna como principais meios de representação da generalização de padrões, nossa pesquisa evidenciou apenas a materna, resultado semelhante ao da pesquisa de Morais (2012), que também compõe a revisão de literatura.

Aqui cabe mencionar que as pesquisas de Archilia (2008), Ferreira (2009) e Magalhães (2016), que compõem a revisão de literatura, evidenciaram as dificuldades dos estudantes no uso da linguagem algébrica para a representação da generalização de padrões.

Ao tratarmos ainda do uso da linguagem materna para a representação da generalização de padrões, destacamos que a roda de conversa foi um instrumento metodológico essencial para identificarmos esse tipo de representação, porque, por meio das discussões, em coletivo, percebemos indícios da generalização de padrões presentes nas falas dos participantes. Isso porque, segundo Méllo et al. (2007), a roda de conversa permite ao estudante apresentar suas colaborações sobre um tema e cada um instiga o outro a falar, argumentando e contra-argumentando entre si, posicionando-se e ouvindo o posicionamento do outro. Sendo assim, destacamos a argumentação e a participação coletiva dos estudantes como meio de representação do pensamento algébrico.

Esses dados aproximam-se aos da pesquisa de Cordeiro (2020), um dos trabalhos que constituem nossa revisão de literatura. Do mesmo modo como procedemos, o pesquisador concluiu que as discussões entre os estudantes se configuraram como uma via fundamental e importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Chamamos a atenção também para a linguagem aritmética que foi muito utilizada pelos participantes para que eles representassem suas generalizações. Percebemos os números, as sequências, entre outros elementos da aritmética, utilizados por eles para nos explicarem o que ou como pensaram na solução da tarefa proposta.

Além do mais, entendemos que as tarefas adaptadas e utilizadas nesta pesquisa contemplaram conceitos da aritmética, como múltiplos nas 2.ª, 5.ª e 6.ª tarefas, e constituíram uma oportunidade para os participantes generalizarem o padrão. A representação de tais generalizações ocorreu principalmente por meio da linguagem materna e aritmética, tal como os dados nos sugerem. Isso confirma as ideias de Vlassis e Demonty (2022), pesquisadores que defendem ser possível desenvolver o processo de generalização em conceitos da aritmética, sem necessariamente o uso de símbolos da álgebra.

Sendo assim, os dados desta pesquisa sugerem-nos que os estudantes do 7.º ano do ensino fundamental generalizaram padrões matemáticos a partir de tarefas presentes nos respectivos livros didáticos por meio da estratégia de contagem, recursiva e o múltiplo da diferença sem e com ajuste, sendo a linguagem aritmética, algébrica e, principalmente, materna, além do uso de esquemas e desenhos, como meios de representação, considerando que em todos os casos a generalização do tipo próxima esteve presente nas resoluções. As generalizações realizadas oportunizaram aos estudantes o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, uma vez que os processos de visualização, generalização, representação, alternação e abstração parcial também estiveram presentes em seus registros.

Algumas das resoluções analisadas indicaram-nos que os participantes tiveram dificuldades em relação ao conceito do termo e a posição desse termo na sequência, as quais se repercutiram principalmente no 1.º encontro. Por exemplo, o 18.º termo da sequência foi confundido com o termo 18. Outra dificuldade percebida diz respeito a representar (externalizar) o que pensaram, ou seja, explicar e argumentar, com clareza, o que pensaram, situação percebida também no 1.º e 2.º encontros.

Em relação aos tipos de padrões, os dados da 1º tarefa revelaram-nos que os do tipo figurativos foram mais compreensíveis pelos participantes, o que, a nosso ver, contribuiu para os estudantes chegarem à generalização mais facilmente. Isto nos confirma as ideias de Vale (2013) nesse sentido, pesquisadora que defende que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos e, em particular, para os dos níveis mais elementares e/ou com fragilidades no conhecimento matemático.

Esse resultado distancia-se da pesquisa de Morais (2012), que comparou o desempenho dos alunos em tarefas, cujos padrões são especificamente de repetição e crescentes. A pesquisadora concluiu que, no primeiro caso, os estudantes tiveram mais facilidade para compreender a sequência, enquanto, no último, eles chegaram à generalização mais facilmente.

À vista das discussões teóricas tecidas nesta pesquisa, compreendemos que a generalização de padrões é uma via capaz de desenvolver o pensamento algébrico, sendo este um tipo especial do pensamento matemático. Os padrões matemáticos, nesse caso, são considerados um convite e uma possibilidade para o sujeito analisar casos particulares rumo aos casos gerais, isto é, chegar à generalização.

Em relação à natureza, tipo e instrumentos de pesquisa, entendemos que estes ajudaram-nos a realizar as ações e a responder à questão de pesquisa formulada inicialmente, principalmente porque a produção de dados se deu por meio do contato entre nós e o campo de investigação, sendo que esses dados incluíram registos, vídeos e relatos e o foco foi dado no processo e não apenas nos resultados (BOGDAN; BIKLEN, 1994), visando compreende o "como" e os "porquês" da realidade investigada, na tentativa de compreendê-la, não mudá-la (PONTE, 2006).

A análise do livro didático contribuiu para compreendê-lo como um recurso pedagógico interessante para desenvolver o pensamento algébrico na sala de aula, pois as tarefas lá presentes contemplaram diferentes tipos de padrões, situações e desafios – características que podem potencializar a generalização de padrões matemáticos.

No entanto, entendemos que tais tarefas foram formuladas de maneira muito “fechadas”, o que, a nosso ver, pode dificultar ao estudante a identificação e compreensão dos padrões matemáticos. Tanto é que adaptamos as tarefas no intuito de provocar os participantes a perceber o padrão e generalizá-lo – isso de forma gradativa –, dando-lhes espaço para explicarem o que pensaram. Queremos dizer que, antes de os participantes generalizarem o padrão, tentamos provocá-los a compreender os casos particulares (por exemplo, encontrar o 5.º e 14.º termos de uma sequência) para que, assim, eles pudessem entender as relações que há entre os termos e considerar os casos gerais, dispondo, ainda, de um espaço para explicar o seu raciocínio.

Desse modo, esta pesquisa nos provocou a pensar que seria interessante se os livros didáticos utilizados para ensinar matemática nas turmas de 7.º ano contemplassem tarefas “abertas” (em outras palavras, que fossem menos “diretas”), incentivassem os estudantes a pensar nos casos particulares e, a partir daí, chegar aos casos gerais, isto é, à generalização de padrões. Mais do que isso, dispusesse um espaço para o estudante argumentar o que (ou como) pensou.

Ainda a tratar sobre o livro didático, a revisão bibliográfica desta pesquisa mostrou-nos um aspecto a ser aqui considerado. As tarefas constituíram-se como um recurso metodológico utilizado em todas as pesquisas científicas apresentadas na revisão e foram criadas pelos próprios pesquisadores, extraídas de avaliações externas e, apenas em uma pesquisa, adaptadas de um livro didático. Sob essa perspectiva, a revisão de literatura sugere-nos que o livro didático é um recurso interessante (e pouco explorado) para retirar tarefas e, posteriormente, desenvolver pesquisas futuras no âmbito da generalização de padrões matemáticos.

A revisão de literatura ainda evidenciou que nenhuma pesquisa foi desenvolvida com o foco na articulação entre a generalização de padrões e pensamento matemático avançado. Sendo assim, entendemos que seria interessante investigar, em pesquisas posteriores, como essa articulação entre a generalização de padrões e o pensamento matemático avançado acontece em outros espaços da educação básica, incluindo etapas e modalidades de ensino; como os estudante ali inseridos desenvolvem e representam essa generalização; e quais linguagens e registros eles utilizam, entre outras possibilidades.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? **Revista da FAEEBA - Educação e contemporaneidade,** v. 22, n. 40, 95-103, 2013. Disponível em: https://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/view/7441. Acesso em: 04 abr. 2023.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional.** Brasília: Liberlivros, 2005. p. 7-70.

AQUINO, L. O. **Os alunos de 5ª série/6º ano frente a atividades sobre observação e generalização de padrões.** 2008. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões**. 2008. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BECKER, J.; RIVERA, F. Generalization strategies of beginning high school algebra students. In: CHICK, H.; VINCENT, J. (Eds.) **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 04, p. 121-128, 2005. Disponível em: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496917.pdf. Acesso em: 08 set. 2022.

BARBOSA, A. C. C. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico.** 2009. 484 f. Tese (Doutorado em Estudo da criança) - Programa de Pós-Graduação em Estudos da criança, Universidade do Minho, Portugal, 2009.

BARBOSA, A.; VALE, I. Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. **Journal of the European Teacher Education Network**, v, 10, p. 57-70, 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 05, p. 412-446, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 14 out. 2021.

CARDOSO, M. T. P. **O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico:** que relações com um programa de formação contínua? 2010. 587 f. Tese

(Doutorado em Estudos da Criança) - Programa de Pós-graduação em Estudos da Criança, Universidade do Minho, Portugal, 2010.

CORDEIRO, G. T. S. **Capacidade de generalização em sequências crescentes com estruturas pictóricas em alunos de 4.º ano.** 2020. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Didática da matemática, Universidade de Lisboa, Portugal, 2020.

DEVLIN, K. **Life by the numbers**. New York: John Wiley e Sons, 1998.

DEVLIN, K. **Matemática:** a ciência dos padrões. Porto: Porto, 2002.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

ESPÍRITO SANTO. Instituto capixaba de pesquisa, assistência técnica e extensão rural. **Programa de assistência técnica e extensão rural**: Marataízes. Vitória, 2020. Disponível em: https://incaper.es.gov.br/media/incaper/proater/municipios/Marataizes.pdf. Acesso em 24 out. 2022.

FERREIRA, C. R. M. **Os alunos do 1º ano do Ensino Médio e os padrões:** observação, realização e compreensão. 2009. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-posições**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FROBISHER, L. et al. **Learning to Teach Number.** Cheltenham: Stanley Thornes, 1999.

FROBISHER, L. et al. **Learning to Teach Shape and Space**. Cheltenham: Nelson Thornes, 2007.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD Educação, 2018.

GUALANDI, J. H. **Os reflexos de uma formação continuada na prática profissional de professores que ensinam matemática**. 2019. 169 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2019.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. **National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science**, Massachusetts, p. 1-34. 2000. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED441662. Acesso em 27 set. 2022.

KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? **Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KRIEGLER, S. Just what is algebraic thinking. **Retrieved September**, v. 10, p. 1-11, 2008.

KUCINSKAS, R. **Introdução ao estudo da Álgebra para alunos do ensino fundamental**. 2017. 161 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) - Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

LANNIN, J.; BARKER, D.; TOWNSEND, B. Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. **Mathematics Education Research Journal**, v. 18, n. 18, p. 1-26, 2006. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ768242.pdf. Acesso em 20 set. 2022.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. Álgebra como integrante da cultura matemática do cidadão. In: GUALANDI, J. H. **Ensino de matemática:** desafios e possibilidades. Curitiba: Bagai, 2021. p. 10-28.

LIMA, L. S. **O ensino de matemática através da resolução de problemas:** investigando estratégias dos alunos do ensino fundamental. 2014. 126 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

LINS; R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 4 ed. Campinas: Papirus, 2001.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. D. E. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. 2º ed. São Paulo: EPU, 2013. p. 25-33.

MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L. Aportes dos processos do Pensamento Matemático Avançado para a reflexão do professor sobre sua “forma” de pensar a Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 590-605, 2013.

MAGALHÃES, A. G. **Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano.** 2016. 143 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências Exatas) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Fundação Vale do Taquari de Educação e Desenvolvimento Social, Lajeado, 2016.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.;KIERAN, C.; LEE, L (Orgs.). **Approaches to algebra**. Dordrecht: Kluwer, 1996. p. 65 – 86.

MÉLLO, R. P. et al. Construcionismo, práticas discursivas e possibilidades de pesquisa. **Psicologia e Sociedade**, São Paulo, v.19, n. 3, p. 26-32, 2007. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0102-71822007000300005. Acesso em 10 out. 2022.

MORAIS, A. M. L. **A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico.** 2012. 235 f. Dissertação

(Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Didática da matemática, Universidade de Lisboa, Portugal, 2012.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, v. 19, n. 25, p. 1-23, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880. Acesso em 20 jun. 2022.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

REGIS, F. C. N. **Introdução ao pensamento algébrico**: a generalização de padrões. 2017. 165 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Docência) – Programa de Pós-graduação em Educação e Docência, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

RESNICK, L. B. **Education and learning a thinking.** Washington, DC: National Academies,1987.

SILVA. R. M. **Pensamento algébrico em tarefas com padrões:** uma investigação nos anos finais do ensino fundamental. 2021. 147 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal do Pernambuco, Pernambuco, 2021.

SOUSA, R. F. **O pensamento algébrico nos anos iniciais:** uma relação com a exploração de sequências. 2019. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Didática da matemática, Universidade de Lisboa, Portugal, 2019.

TALL, D. **Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking**. Trabalho apresentado na Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics, Recife, Brazil, 1995. Disponível em: https://digilander.libero.it/leo723/materiali/algebra/dot1995b-pme-plenary.pdf. Acesso em 02 out. 2022.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: _______. **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-20.

TREVISANI, F. M. **Estratégias de generalização de padrões matemáticos.** 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal do currículo. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 85, p. 14-20, 2005. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1430. Acesso em 29 jul. 2022.

VALE, I. et al. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, T.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L. CANAVARRO, P. **Números e Álgebra.** Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 193-211.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 08, n. 2, p. 64-81, 2013. Disponível em:https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2013v8n2p64/26020/106402. Acesso em 29 jul. 2022.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões Visuais, Generalização e Raciocínio. In: MACHADO, S. D. A.; BIANCHINI, B. L.; MARANHÃO, M. C. S. A. **Teoria elementar dos números:** da educação básica à formação dos professores que ensinam matemática. São Paulo: Iglu, 2015. p. 167-198.

VALE; I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação matemática pesquisa**, São Paulo, v. 21 n. 03, p. 398-418, 2019. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418. Acesso em 28 out. 2022.

VELOSO, D. S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental:** análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. 2012. 244 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

VLASSIS, J.; DEMONTY, I. The role of algebraic thinking in dealing with negative numbers. **Springer Link,** Switzerland, v. 01, n. 03, p. 1-13, 2022. Disponível em https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01402-1. Acesso em 14 out. 2020.

VYGOTSKY, L. S. A construção do pensamento e da linguagem. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ANEXOS

Anexo A

Secretaria Municipal de Educação

EMEF

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, Sérgio Marcos Moté de Souza, professor de matemática na Escola Municipal de Ensino Fundamental declaro que concordo em participar da pesquisa intitulada "A generalização de padrões matemáticos: uma investigação com estudantes do 7º ano do ensino fundamental", na função de colaborador. Fui informado sobre os objetivos da pesquisa e de sua duração na referida turma. Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro e com a finalidade de colaborar com o desenvolvimento da referida pesquisa. Fui ainda informado que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento.

Código do INEP da referida escola: 32059604.

Por ser verdade, firmo a presente e dou fé.

13 de MAIO de 2022

Sérgio Marcos Moté de Souza

Sérgio Marcos Moté de Souza
Professor de matemática

Rua *Marataízes – ES / CEP: 29345-000*

Anexo B

PREFEITURA MUNICIPAL DE MARATAÍZES

Secretaria Municipal de Educação

EMEF

CARTA DE ANUÊNCIA

Eu, Arlyandréia Vargas de Jesus, diretora da Escola Municipal de Ensino Fundamental , Aut. nº 075/07, venho por meio desta autorizar a Mylena Simões Campos a realizar a pesquisa "A generalização de padrões matemáticos: uma investigação com estudantes do 7º ano do ensino fundamental" na referida escola, sob a orientação do Professor/Doutor Jorge Henrique Gualandi.

Declaro que fui informada dos objetivos da pesquisa e da previsão de sua duração da escola. Afirmo que não recebi qualquer incentivo financeiro ou qualquer ônus por esta carta de anuência.

Código do INEP da referida escola: 32059604.

Por ser verdade, firmo a presente e dou fé.

13 de MAIO de 2022

Arlyandréia Vargas de Jesus

Arlyandréia Vargas de Jesus
DIRETORA
Autorização 075/07

Arlyandréia Vargas de Jesus
Diretora
Aut. Nº 075/07

Rua Marataízes – ES / CEP: 29345-000

Anexo C

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CAMPUS ALEGRE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) responsável, o(a) seu filho(a)_________________________ está sendo convidado(a) a participar da pesquisa intitulada: **A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**, do curso de Pós-Graduação em Ensino, Educação Básica e Formação de Professores da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) – *campus* Alegre, sob a responsabilidade da pesquisadora MYLENA SIMÕES CAMPOS, a qual é orientada pelo Professor/Doutor JORGE HENRIQUE GUALANDI. Juntos conduzirão as atividades destinadas aos participantes.

Justificativa: esta pesquisa justifica-se pela inquietação da mestranda em investigar como os estudantes do 7º ano do ensino fundamental generalizam padrões matemáticos a partir de tarefas presentes em seus livros didáticos, visto que a Base Nacional Comum Curricular [BNCC] (BRASIL, 2018) e o Currículo do Espírito Santo (ESPÍRITO SANTO, 2020) orientam o trabalho com a generalização de padrões. Entende-se que investigar sobre as estratégias de resolução dos participantes pode suscitar reflexões sobre como - de que forma - estudantes do 7º ano generalizam padrões matemáticos e desenvolvem, portanto, o pensamento algébrico. Além disso, a pesquisa pode trazer reflexões importantes acerca da aprendizagem de álgebra no ensino fundamental.

Objetivos da pesquisa: Geral: Investigar de que forma um grupo de estudantes do 7º ano do ensino fundamental generaliza padrões matemáticos a partir de tarefas presentes em seu respectivo livro didático. Específicos: i) identificar, no livro didático do 7º ano do ensino fundamental, tarefas associadas à generalização de padrões; ii) selecionar essas tarefas associadas à generalização de padrões; iii) propor essas tarefas a um grupo de estudante do 7º ano do ensino fundamental; iv) analisar as estratégias utilizadas por um grupo de estudantes do 7º ano do ensino fundamental ao generalizar padrões a partir de tarefas presentes em seu respectivo livro didático.

Procedimentos: os procedimentos de produção de dados serão: a observação participante, os registros dos estudantes e a roda de conversa. Os estudantes serão convidados a resolverem tarefas, retiradas de seu livro didático, que envolvam a generalização de padrões matemáticos. Nesse momento, será utilizada a observação participante, a partir da qual a pesquisadora observará os alunos e registrará, em notas de campo, informações pertinentes à pesquisa. Os estudantes também serão convidados a participarem de uma roda de conversa, um momento em que eles poderão dialogar e discutir sobre como (ou o que) pensaram para generalizar os padrões matemáticos propostos nas tarefas, sendo esse momento gravado. Destaca-se que os registros dos alunos (as tarefas resolvidas), as informações registradas nas notas de campo e as gravações da roda de conversa serão dados de pesquisa e, portanto, serão analisados pela pesquisadora e pelo orientador. **A identidade dos estudantes não será divulgada.**

Duração e local dos procedimentos: os encontros para coleta de dados da pesquisa acontecerão na sala de aula do 7º ano, da escola Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Maria da Costa Machado, no turno regular (vespertino), em horários e datas a serem definidos, sendo cinco encontros presenciais, com duração de 55 minutos cada. Os alunos participarão de forma gratuita e voluntária.

Riscos e desconfortos: como riscos da pesquisa, os sujeitos poderão sentir constrangimento ou vergonha de resolverem as tarefas propostas e de participarem da roda de conversa, e sentir
desconforto ao serem observados e filmados pela pesquisadora. Para que esses riscos e desconfortos sejam evitados/reduzidos, os pesquisadores explicarão a dinâmica da pesquisa, bem como os objetivos, para tentar deixar o estudante mais à vontade nos momentos de resolução das tarefas e da roda de conversa, além dos momentos de observação e filmagem.

Além disso, caso seja o desejo do estudante, ele poderá desistir de participar da pesquisa a qualquer momento, sem que haja penalidades ou prejuízos.

Benefícios: acredita-se que o livro didático utilizado pelos estudantes é constituído por tarefas que envolvem os padrões matemáticos (por exemplo, sequências numéricas, padrões geométricos, entre outros), sendo que essas tarefas podem contemplar qualquer conteúdo do currículo (geometria, álgebra, etc.). Sendo assim, entende-se que a participação do estudante nesta pesquisa possibilitará que ele identifique esses padrões matemáticos e os generalize, podendo desenvolver o pensamento algébrico. Em outras palavras, o estudante poderá: i) melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos; ii) visualizar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo; iii) promover o desenvolvimento do raciocínio matemático e o pensamento abstrato. Além disso, os resultados da pesquisa poderão trazer reflexões sobre a aprendizagem de matemática, sobretudo o de álgebra, na turma investigada.

Acompanhamento e assistência:os participantes receberão todo o acompanhamento e a assistência necessários durante a aplicação dos instrumentos de coleta de dados ou após o seu encerramento, sendo presencial ou por meios de comunicação, e de forma gratuita.

Garantia de recusa em participar da pesquisa e/ou retirada de consentimento: a participação do seu filho se dará de forma voluntária. Por isso, eles não são obrigados a participar da pesquisa e poderão se retirar em qualquer momento, sem que haja penalidades ou prejuízos decorrentes de sua recusa. Caso o(a) Sr(a) ou seu(ua) filho(a) decida retirar o consentimento, ele(a) deixará de ser sujeito da pesquisa.

Garantia de manutenção do sigilo e privacidade: a pesquisadora e o orientador se comprometem a resguardar a identidade dos participantes durante todas as fases da pesquisa, inclusive após a sua publicação. Todos os dados produzidos na pesquisa (filmagens, registros dos estudantes e notas de campo) ficarão em posse da pesquisadora e seu orientador por cinco anos e serão destruídos após esse período. As filmagens, especificamente, ficarão armazenadas no computador de uso pessoal e exclusivo da pesquisadora. Para aumentar a segurança dos dados da pesquisa, seguiremos as recomendações da Superintendência de Tecnologia da Informação (STI) da UFES, mantendo atualizados os sistemas operacionais de computadores e antivírus, os navegadores (browsers) e os aplicativos/softwares utilizando senhas seguras e mantendo os dados em um único computador, de uso pessoal exclusivo da pesquisadora, sem compartilhamento. Todas essas medidas serão tomadas visando o sigilo das informações e privacidade dos estudantes. Vale ressaltar que a pesquisa não incluirá gastos financeiros por parte dos participantes. Os possíveis gastos serão por conta da pesquisadora.

Garantia de indenização: o participante tem garantia de indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa, como previsto no item IV.4, c) da Resolução N° 466/2012.

Esclarecimento de dúvidas: em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o(a) Sr(a), em seu nome ou em nome de seu(ua) filho(a), poderá contatar: i) MYLENA SIMÕES CAMPOS, mestranda, telefone (28) 99925-7741, e-mail: mylena.campos@edu.ufes.br; ii) Prof. Doutor JORGE HENRIQUE GUALANDI, no telefone (28) 3526-9042, email: jhgualandi@ifes.edu.br ou endereço Rodovia ES-482 (Cachoeiro x Alegre) - Morro Grande - Caixa Postal 727, Cachoeiro de Itapemirim – ES, CEP: 29311-970 - Brasil. Caso queira contatar o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Espírito Santo (CEP/Ufes), utilize o e-mail: cep.alegre.ufes@gmail.com, telefone (28) 3552-8771 ou correio: Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Campus de Alegre, Alto Universitário, s/n - Bairro Guararema, CEP 29.500-000, Alegre - ES, Brasil. O horário de funcionamento é de Segunda a Sexta-feira, de 08h às 11h.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CAMPUS ALEGRE

Declaro que fui informado(a) e esclarecido(a) sobre o presente documento, entendendo todos os termos acima expostos, e que voluntariamente aceito a participação do(a) meu(minha) filho(a) na pesquisa. Também declaro ter recebido uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, de igual teor, assinada pela pesquisadora responsável e rubricada em todas as páginas.

Marataízes/ES, _____ de ____________________ de 2022.

Como os sujeitos são menores de idade, a assinatura deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido é direcionada aos pais ou responsáveis.

____
Responsável pelo Participante da pesquisa

Na qualidade de pesquisadora responsável pela pesquisa **A generalização de padrões matemáticos: uma investigação com estudantes do 7º ano do ensino fundamental**, eu, Mylena Simões Campos, declaro ter cumprido as exigências dos itens IV.3 e IV.4 (se pertinente) da Resolução N° 466/12, a qual estabelece Diretrizes e Normas Regulamentares de Pesquisas envolvendo Seres Humanos.

____________________________	____________________________
Pesquisadora responsável	Orientador
Mylena Simões Campos	Doutor Jorge Henrique Gualandi

Anexo D

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO
CAMPUS ALEGRE

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) aluno (a), você, ____, está sendo convidado(a) a participar da pesquisa **"A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL"**, sob a responsabilidade da pesquisadora Mylena Simões Campos e seu orientador Professor/Doutor Jorge Henrique Gualandi. O objetivo da pesquisa é investigar de que forma um grupo de estudantes do 7º ano do ensino fundamental generaliza padrões matemáticos a partir de tarefas presentes em seu respectivo livro didático. Como benefícios de sua participação nessa pesquisa, você poderá: i) melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos; ii) visualizar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo; iii) promover o desenvolvimento do raciocínio matemático e o pensamento abstrato. Os seus pais ou responsáveis autorizaram que você participe, mas é importante que você se sinta confortável em colaborar com o trabalho. Então, com a sua permissão, ocorrerão cinco encontros presenciais, nas aulas de matemática e juntamente com o seu professor. Nesses encontros, você e os outros participantes resolverão tarefas presentes em seus respectivos livros didáticos. Além disso, vocês participarão de um momento de conversa, em que vocês poderão nos dizer e a seus colegas como (ou o que) pensaram para resolver as tarefas. A data e o horário ainda não foram definidos. Nos encontros você poderá ser gravado, filmado e/ou fotografado, porém o seu nome, voz e imagem **não serão divulgados** e somente a pesquisadora e seu orientador verão os seus arquivos, seja durante a pesquisa ou após o seu término. A sua participação será gratuita! Se você sentir cansaço ou desconforto em qualquer etapa do estudo, não quiser ser filmado e/ou ficar com vergonha de responder às tarefas, poderá comunicar a pesquisadora e ela respeitará sua vontade, mesmo que seja retirar a sua participação no estudo. Você não será prejudicado de forma alguma, se você desistir de participar. Se te ocorrer algum dano por colaborar com a pesquisa, o seu direito a indenização é garantido, pois existe um documento que garante isso (item IV.4, c) da Resolução Nº 466/2012). Também terá acompanhamento e assistência em todos os momentos. Por isso, qualquer consideração a ser realizada, você poderá conversar com a pesquisadora em: (28) 99925-7741, e-mail: mylenadecampos@gmail.com; ou o orientador da pesquisa: (28) 3526-9042, e-mail: jhgualandi@ifes.edu.br, endereço Rodovia ES-482 (Cachoeiro x Alegre) - Morro Grande - Caixa Postal 727, Cachoeiro de Itapemirim – ES, CEP: 29311-970 - Brasil. Peça ajuda de um adulto, se necessário. Caso queira contatar o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Espírito Santo (CEP/Ufes), utilize o e-mail: cep.alegre.ufes@gmail.com, telefone (28) 3552-8771 ou correio: Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Campus de Alegre, Alto Universitário, s/n – Bairro Guararema, CEP 29.500-000, Alegre - ES, Brasil.

Diante do que foi explicado, se você concordar em participar desta pesquisa, escreva seu nome no espaço destinado ao participante da pesquisa. Ao fazer isso, você confirma que foi informado(a) e esclarecido(a) sobre a finalidade deste documento, entendendo o que foi escrito acima, e que por sua própria vontade aceita participar da pesquisa. **Também declara que recebeu uma cópia deste Termo de Assentimento Livre e Esclarecido assinada pela pesquisadora** e rubricada em todas as páginas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO
CAMPUS ALEGRE

Marataízes, _____ de ____________________ de 2022.

____

Participante da pesquisa

Na qualidade de pesquisadora responsável pela pesquisa "A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ESTUDANTES DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL", eu, Mylena Simões Campos, declaro ter cumprido as exigências dos itens IV.3 e IV.4 (se pertinente) da Resolução N° 466/12, a qual estabelece Diretrizes e Normas Regulamentares de Pesquisas envolvendo Seres Humanos.

____

Pesquisadora responsável
Mylena Simões Campos

____

Orientador
Doutor Jorge Henrique Gualandi