Universidade Federal do Espírito Santo
Centro Tecnológico
Programa de Pós-Graduação em Informática

Riedson Baptista

Métodos multiescala para as equações de Navier-Stokes incompressíveis

Vitória-ES, Brasil

2020

Riedson Baptista

Métodos multiescala para as equações de Navier-Stokes incompressíveis

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação. Orientadora: Profª. Drª. Lucia Catabriga. Coorientador: Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos.

Vitória-ES, Brasil

2020

Métodos multiescala para as equações de Navier-Stokes incompressíveis

Riedson Baptista

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Informática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação.

Prof^{a}. Dr^{a}. Lucia Catabriga(Orientador)

Prof. Dr. Isaac Pinheiro dos Santos (Coorientador)

Prof^{a}. Dr^{a}. Andrea Maria Pedrosa Valli (Examinador Externo)

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria Claudia Silva Boeres (Examinador Interno)

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo (Examinador Externo)

Prof^{a}. Dr^{a}. Regina Célia Cerqueira de Almeida (Examinador Externo)

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória, Dezembro de 2020

A Eliete minha esposa e companheira e aos meus filhos Eloísa e Rian.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela minha vida.

À minha família pelas palavras de apoio e encorajamento.

À minha esposa Eliete pelo companheirismo em todos os momentos.

À minha orientadora, Lucia Catabriga, pela oportunidade, confiança, paciência e incentivo.

Ao meu coorientador Isaac Pinheiro dos Santos, pelas sugestões e discussões que contribuíram para a construção desta tese.

Aos colegas de pós graduação Ramoni Zancanela Sedano, Paulo Wander Barbosa, Sérgio Souza Bento e Leonardo Muniz de Lima por todas as contribuições para a realização desse trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um método de elementos finitos multiescala variacional não linear para resolver as equações incompressíveis de Navier-Stokes. O método é baseado em uma decomposição em dois níveis do espaço de aproximação e o problema local é modificado introduzindo-se uma difusão artificial que atua de forma adaptativa apenas nas escalas não resolvidas da discretização. O método desenvolvido é considerado auto-adaptativo, uma vez que a quantidade de viscosidade submalha é automaticamente introduzida de acordo com o resíduo das escalas resolvidas a nível do elemento. Para reduzir o custo computacional típico dos métodos de duas escalas, o espaço da micro escala é definido através de funções polinomiais que se anulam na fronteira dos elementos, conhecidas como funções bolha, cujos graus de liberdade são eliminados localmente em favor dos graus de liberdade que residem nas escalas resolvidas. Comparamos a performance numérica e computacional do método com os resultados obtidos com a formulação *streamline-upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) combinada com o método *pressure stabilizing/ Petrov-Galerkin* (PSPG) através de um conjunto de quatro problemas bidimensionais de referência.

Palavras-chave: Elementos finitos, Métodos estabilizados multiescala. Equações de Navier-Stokes incompressíveis.

Abstract

In this work, we present a nonlinear variational multiscale finite element method to solve the incompressible Navier-Stokes equations. The method is based on a decomposition in two levels of the approximation space and the local problem is modified by introducing an artificial diffusion that acts in an adaptive way only on the unresolved discretization scales. It can be considered a self-adaptive method, so that the amount of sub-mesh viscosity is automatically introduced according to the residue of the scales resolved at the element level. To reduce the computational cost typical of two-scale methods, the micro-scale space is defined through polynomial functions that cancel each other out at the border of the elements, known as bubble functions, whose degrees of freedom are eliminated locally in favor of the degrees of freedom that reside on the resolved scales. We compared the numerical and computational performance of the method with the results obtained with the formulation *streamline-upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) combined with the method *pressure stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG) through a set of four two-dimensional reference problems.

Keywords: Finite element. Multiscale estabilized methods. Incompressible Navier-Stokes equations.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais não lineares que descrevem o escoamento de fluidos na natureza, como líquido e gases, permitindo determinar os seus campos de velocidade e pressão, sendo compostas pelas equações do momento linear e da continuidade (conservação de massa). Condições de contorno e inicial são incorporadas à essas equações de forma a obter um modelo matemático. Muitos fenômenos físicos de interesse científico e da engenharia são estudados e modelados através dessas equações (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2001; BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004).

Devido a complexidade do modelo matemático envolvendo as equações de Navier-Stokes, soluções analíticas existem somente para casos simples, envolvendo hipóteses simplificadoras sobre seu comportamento. Por outro lado, o desenvolvimento de métodos numéricos para resolver problemas modelados por equações diferenciais é de grande interesse da comunidade científica e em particular para as equações de Navier-Stokes que modelam o escoamento de fluidos newtonianos em regime incompressível (TEMAM, 2001), que é o tema de estudo desse trabalho. Os procedimentos numéricos reproduzem o comportamento do escoamento em um ambiente virtual, utilizando recursos computacionais.

Dentre as metodologias numéricas mais utilizadas para resolver as equações de Navier-Stokes, destacamos os métodos de Elementos Finitos (MEF), Diferenças Finitas (MDF) e Volumes Finitos (MVF). O MEF de Galerkin é considerado a formulação numérica mais adequada para resolver problemas elípticos em domínios complexos, que aparecem por exemplo, na mecânica dos sólidos. No contexto da mecânica dos fluidos, o MEF de Galerkin apresenta problemas de estabilidade na simulação de escoamento de fluidos (GRESHO; SANI, 2020). Um dos problemas deve-se a presença de termos de convecção na equação governante que pode gerar oscilações espúrias nos resultados, principalmente no campo de velocidade. Tais oscilações tornam-se mais expressivas em escoamentos predominantemente advectivos. A outra fonte de instabilidades origina-se do uso de combinações impróprias de funções de interpolação para representar os campos de velocidade e pressão (TEZDUYAR, 1991).

Para contornar problemas de instabilidades em escoamentos predominantemente advectivos, a partir da década de oitenta surgem os métodos de elementos finitos estabilizados que possuem como característica a modificação do MEF de Galerkin adicionando estabilidade ao método, sem comprometer sua consistência. Utilizando elementos bilineares para a velocidade e constante para pressão, Brooks e Hughes (1982) propõem a formulação estabilizada SUPG (*streamline-upwind/Petrov-Galerkin*), que consiste em adicionar difusão artificial somente na direção das linhas de corrente sem introduzir uma excessiva dissipação numérica. Em (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) é proposta a formulação PSPG (*pressure satabilizing/Petrov-Galerkin*) que permite o uso de funções de interpolação de mesma ordem para problemas de escoamentos de Stokes, contornando a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) (BREZZI, 1974). Mais tarde Tezduyar (1991) estende a formulação PSPG (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) juntamente com a formulação SUPG (BROOKS; HUGHES, 1982) para o tratamento de escoamento de Navier-Stokes incompressíveis no método conhecido por SUPG/PSPG.

A formulação SUPG combinada com a PSPG foi precursora dos métodos de estabilização GLS (*Galerkin/Least-Squares*) (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989), ou sua modificação proposta em (FRANCA; FARHAT, 1995). Outra classe de métodos estabilizados, com base na ideia de aprimorar o método de Galerkin com funções virtuais tipo bolha, foi introduzida em (BREZZI et al., 1992). Todas as abordagens tentam reduzir as instabilidades numéricas presentes em problemas com altos números de Reynolds ou Mach, choques ou camadas limite e funções de interpolação de ordem igual para velocidade e pressão. Apesar de grande parte dos métodos de elementos finitos estabilizados mencionados conduzirem às soluções numéricas globalmente estáveis, eles não evitam a possibilidade de ocorrer oscilações localizadas nas vizinhanças de altos gradientes. Para evitar oscilações espúrias em regiões de altos gradientes pode-se recorrer aos métodos de captura de descontinuidades. Em geral, esses métodos são esquemas numéricos não-lineares, mesmo que o problema original seja linear (GALEÃO; CARMO, 1988; TEZDUYAR, 2001; RISPOLI; CORSINI; TEZDUYAR, 2007; JOHN; KNOBLOCH, 2008; ZHAO et al., 2018).

Em meados da década de 90, Hughes (1995) revisitou as origens dos esquemas de estabilização a partir de um ponto de vista variacional em múltiplas escalas do domínio computacional e apresentou o método variacional multiescalas VMS (*Variational MultiScale*) (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998) para a equação escalar de convecção-difusão. Mais tarde estendida para as equações de Navier-Stokes por um conjunto de pesquisadores (BAZILEVS et al., 2007; CODINA; BLASCO, 2001; CODINA et al., 2017; GRAVEMEIER, 2006; MASUD; KHURRAM, 2006). A ideia principal da abordagem multiescala é decompor as variáveis de interesse em duas partes: uma representada pela discretização utilizada (macro escala - escala resolvida) e outra relacionada às escalas menores, submalhas (micro escala - escala não resolvida). Tal decomposição permite dividir a formulação fraca do problema em dois subproblemas: um para a macro escala e outro para a micro escala. Os efeitos não locais da micro escala são incorporados na macro escala resultando em um problema enriquecido para as escalas resolvidas, que é então solucionado numericamente. Neste método, as diferentes técnicas de estabilização se reúnem como casos especiais do conceito da modelagem das escalas submalhas.

Guermond (1999) apresenta o método multiescala SGS (*Subgrid Stabilization*), que consiste na decomposição multiescala do espaço e a introdução de uma viscosidade artificial linear somente na micro escala. Esta viscosidade submalha linear é ajustada por um parâmetro global que precisa ser escolhido de forma adequada a fim de que o método seja preciso. Assim como os métodos estabilizados, o método SGS apresenta oscilações localizadas próximas a altos gradientes, principalmente se o parâmetro de estabilização não for escolhido adequadamente. Para evitar essas oscilações indesejáveis, operadores não lineares submalha de captura de descontinuidades são adicionados de forma ad hoc à formulação SGS em (GUERMOND, 2001) para a equação de difusão-advecção e em (GUERMOND; MARRA; QUARTAPELLE, 2006) para as equações de Navier-Stokes. Seguindo a ideia proposta em (GUERMOND, 2001), Santos e Almeida (2007) apresentam o método multiescala NSGS (*Nonlinear SubGrid Stabilization*) para as equações de transporte não transientes predominantemente convectivas. Esse método é inspirado nos métodos SGS e CAU (*Consistent Approximate Upwind*) (GALEÃO; CARMO, 1988) e consiste em adicionar uma difusão artificial não linear e não parametrizada somente na micro escala.

Nesta tese estendemos o conceito do método NSGS (SANTOS; ALMEIDA, 2007) para a resolução das equações de Navier-Stokes incompressíveis, trazendo uma nova metodologia denominada NSGS-NS. O método NSGS-NS consiste em uma decomposição para os campos de velocidade e pressão em escalas macro/resolvida e micro/não resolvida, juntamente com a adição de um operador não linear, baseado em resíduo, à formulação enriquecida de Galerkin. A escala macro é modelada por funções lineares enquanto a escala micro é modelada por funções tipo bolha. Assim como em Santos e Almeida (2007) o operador de viscosidade artificial não linear é adicionado apenas às escalas não resolvidas para estabilizar o campos de velocidade e pressão em escoamentos com alto número de Reynolds. Resultados preliminares publicados em (BAPTISTA et al., 2018; BAPTISTA et al., 2019) mostraram que o método NSGS-NS apresenta soluções mais acuradas quando comparado com o método SUPG/PSPG (TEZDUYAR, 1991). Em (BAPTISTA et al., 2018) a pressão na micro escala é determinada em função do resíduo da equação de continuidade na macro escala (CODINA, 2002; FRANCA; OLIVEIRA, 2003; CALO, 2005), com base no parâmetro de restrição de incompressibilidade LSIC (*Least Squares Incompressibility Constraint*) (BEHR; FRANCA; TEZDUYAR, 1993). Para a abordagem apresentada em (BAPTISTA et al., 2019) foi considerado apenas a decomposição do campo de velocidade em escalas resolvidas e não resolvidas, como em (MASUD; KHURRAM, 2006) onde as incógnitas de pressão residem somente na escala resolvida. Essa abordagem leva a uma formulação numérica que satisfaz a condição LBB, que pode ser considerada uma extensão do elemento MINI (ARNOLD; BREZZI; FORTIN, 1984) às equações de Navier-Stokes.

A formulação estabilizada clássica (ou multiescalas) de elementos finitos, quando aplicada às equações de Navier-Stokes, resulta em um sistema acoplado de equações não-lineares, sendo necessário o uso de algum método de linearização para sua solução, tais como Newton-Raphson e Picard. Em escoamento com elevado número de Reynolds as não linearidades, tanto natural do problema quanto a inserida pelo termo de viscosidade artificial do método NSGS-NS, tornaram-se mais representativas. Neste caso, os métodos de linearização nem sempre podem garantir a convergência desse sistema altamente não linear e um fator de amortecimento (relaxamento) é introduzido para manter a solução dentro do raio de convergência do método (KELLEY, 2003). O valor do fator de amortecimento tem grande influência na convergência e eficiência computacional. Se o fator de amortecimento for próximo de um, o estouro exponencial pode ocorrer facilmente (portanto, encerrando o processo sem resultado), se for próximo de zero, o método de linearização tende a ser ineficiente. Uma vez que não é trivial definir um fator de amortecimento apropriado, se faz necessário usar uma estratégia para uma escolha automática e dinâmica deste fator. Em (JOHN; KNOBLOCH, 2008) é proposto um processo de amortecimento dinâmico que adotamos em nossos experimentos.

Esta tese está organizada como segue. O Capítulo 2 apresentamos as equações de Navier-Stokes que governam o escoamento de fluidos newtonianos incompressíveis e as formulações de Galerkin e SUPG/PSPG. No Capítulo 3, desenvolvemos a abordagem multiescala proposta neste trabalho. No Capítulo 4, apresentamos as estratégias para o tratamento da não linearidade do problema, o algoritmo do fator de amortecimento dinâmico e o algoritmo preditor-corretor utilizado na resolução dos problemas transientes. O Capítulo 5 avalia o desempenho numérico de quatro problemas bidimensionais de referência e o no Capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e trabalhos futuros.

2 Equações governantes e formulações numéricas clássicas

Neste capítulo apresentamos as equações de Navier-Stokes desenvolvidas para o tratamento de escoamentos incompressíveis. Na sequência apresentamos as formulações numéricas baseadas no método de elementos finitos utilizando Galerkin clássico com adição dos métodos estabilizados SUPG (*Streamlines Upwind Petrov-Galerkin*) (BROOKS; HUGHES, 1982) e PSPG (*Pressure Stabilizing/Petrov-Galerkin*) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986).

2.1 Equações de Navier-Stokes incompressíveis

Considera-se um fluido viscoso, incompressível, ocupando o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de fronteira Γ no intervalo de tempo $I = (0, T]$. A velocidade $\boldsymbol{u}$ e a pressão hidrostática p_{din} são governadas pelos balanços de quantidade de movimento e massa

$$\begin{aligned} \rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\Big) + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{f}, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T], & (2.1)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T], & (2.2) \end{aligned}$$

onde ρ é a massa específica do fluido, $\boldsymbol{f}$ é o vetor forças de corpo ou forças externas e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões internas, denominado de tensor de Cauchy em homenagem a Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Para um fluido newtoniano a tensão é dada pela soma de um estado de tensão puramente hidrostático, representado pela pressão termodinâmica p_{din}, e pelo tensor de tensão viscoso $\boldsymbol{\tau}$ da forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_{din}\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \tag{2.3}$$

onde $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensão desviadora, ou de tensões cisalhantes (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2004). George Gabriel Stokes (1819-1903) assumiu que a tensão viscosa era função do tensor taxa de velocidade, dada pela parte simétrica do gradiente da velocidade $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)/2$, ou seja,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})). \tag{2.4}$$

Se $\mathcal{F}$ for linear, o fluido é denominado de fluido newtoniano. Com a suposição adicional de isotropia para fluidos newtonianos e incompressibilidade do escoamento, a conexão entre o tensor de tensões viscosas e o tensor taxa de velocidade, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$, é dada por,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido com dimensão de tensão multiplicada por tempo. A forma final da relação entre o tensor das tensões e o tensor taxa de velocidade é dada por,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_{din}\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

A combinação das Eqs. (2.1), (2.2) e (2.6) produz o conjunto de equações de Navier-Stokes incompressíveis a serem resolvidas no domínio Ω no intervalo de tempo $I = (0, T]$ sujeito a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - 2\nu\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \nabla p &= \boldsymbol{f}, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T], && (2.7)\\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} &= 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T], && (2.8) \end{aligned}$$

onde $p = p_{din}/\rho$ é a pressão cinemática e $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática constante com dimensão de área dividida por tempo.

Como condição inicial, prescrevemos um campo vetorial para a velocidade $\boldsymbol{u}_0$ no tempo $t = 0$ em todo o domínio Ω da forma,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \text{em } \Omega \times \{0\}, \tag{2.9}$$

que certamente precisa satisfazer a equação de continuidade, ou seja, $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$.

Além disso, um problema de valor inicial e de valor de contorno bem definido depende das condições de contorno impostas na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ do domínio. Geralmente a fronteira Γ é separada em uma fronteira de Dirichlet Γ_g e uma fronteira de Neumann Γ_h com as condições $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ e $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \varnothing$. Uma condição de contorno de Dirichlet na forma de uma velocidade prescrita $\boldsymbol{g}$ é dada na forma,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t), \quad \text{em } \Gamma_g \times (0, T), \tag{2.10}$$

enquanto que uma condição de fronteira de Neumann $\boldsymbol{h}$ geralmente prescreve o componente normal da tensão na fronteira da forma,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - p_{din}\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_h \times (0, T). \tag{2.11}$$

Se $\Gamma = \Gamma_g$, ou seja, não há condição de contorno de Neumann, a solução para a pressão é determinada a menos de uma constante. Para determinar esta constante podemos prescrever um valor médio em todo o domínio da forma,

$$\int_\Omega p \, d\Omega = 0,$$

ou prescrever a pressão em algum ponto do domínio.

2.2 Formulação de Galerkin

As formulações numéricas apresentadas aqui para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis, dadas pelas Equações (2.7) e (2.8), são baseadas no método de elementos finitos no espaço e diferenças finitas no tempo. O método de elementos finitos não é aplicado diretamente na forma clássica do problema. Para isto, uma formulação fraca do modelo deve ser definida. A forma fraca do modelo matemático relaxa a regularidade requerida da solução. Esta é obtida multiplicando as equações diferenciais (2.7) e (2.8) por funções testes, que se anulam nas fronteiras de Dirichlet, e na sequência integramos sobre todo o domínio Ω, para obter uma formulação integral. A formulação fraca para as equações de Navier-Stokes consiste em: dados $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{u}_0$, encontrar $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}$ e $p \in \mathcal{S}_p$ para $t \in (0, T]$ tais que,

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} \right) d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) d\Omega - \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{w}) p \; d\Omega - \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{h} \; d\Gamma = \boldsymbol{0}, \tag{2.12}$$

$$\int_\Omega q(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \; d\Omega = 0, \tag{2.13}$$

para todo $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}$, $q \in \mathcal{S}_q$ e com condição inicial $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0$, onde os espaços de funções são dados por,

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}} = \{\boldsymbol{u}; \boldsymbol{u} \in [H^1(\Omega)]^2, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \text{ em } \Gamma_g\}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{w}} = \{\boldsymbol{w}; \boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^2, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \text{ em } \Gamma_g\}, \tag{2.15}$$

$$\mathcal{S}_p = \{p; p \in H^1(\Omega), \int_\Omega p \; d\Omega = 0\}, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{S}_q = \{q_h; q_h \in H^1(\Omega)\}. \tag{2.17}$$

Para definir o método de elementos finitos, vamos considerar uma partição triangular $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω em nel elementos (ver Figura 2.1) onde,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega^e \quad \text{e} \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \varnothing, \quad \text{com} \quad i, j = 1, 2, \ldots, nel \quad \text{e} \quad i \neq j.$$

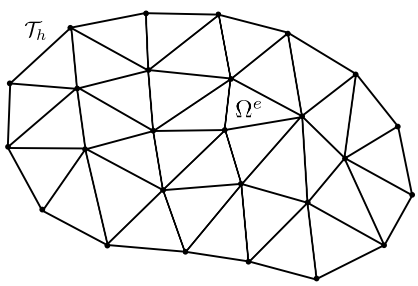


Figura 2.1 – Partição $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω em elementos finitos Ω^e (SEDANO, 2016).

Os espaços de dimensão infinita, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}, \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}, \mathcal{S}_p$ e $\mathcal{S}_q$ são substituídos pelos subespaços de dimensão finita para as funções de interpolação de velocidade e pressão,

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^h = \{\boldsymbol{u}_h; \boldsymbol{u}_h \in [H^1(\Omega)]^2, \boldsymbol{u}_h|_{\Omega^e} \in [\mathbb{P}_1(\Omega^e)]^2, \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{g}_h \text{ em } \Gamma_g\}, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^h = \{\boldsymbol{w}_h; \boldsymbol{w}_h \in [H^1(\Omega)]^2, \boldsymbol{w}_h|_{\Omega^e} \in [\mathbb{P}_1(\Omega^e)]^2, \boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{0} \text{ em } \Gamma_g\}, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{S}_p^h = \{p_h; p_h \in H^1(\Omega), p_h|_{\Omega^e} \in \mathbb{P}_1(\Omega^e), \int_\Omega p_h \, d\Omega = 0\}, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{S}_q^h = \{q_h; q_h \in H^1(\Omega), q_h|_{\Omega^e} \in \mathbb{P}_1(\Omega^e)\}, \tag{2.21}$$

em que $H_h^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev das funções quadrado integráveis com derivadas de primeira ordem também quadrado integráveis e $P^1(\Omega^e)$ é o espaço dos polinômios de grau um, definidos no elemento Ω^e. As condições de fluxo, ou de Neumann, são satisfeitas naturalmente na formulação quando a integração por partes é aplicada ao termo viscoso. Os espaços de dimensão finita (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) são chamados de espaços de elementos finitos.

A formulação fraca discreta para as equações de Navier-Stokes consiste em: dados $\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{h}_h$ e $\boldsymbol{u}_0$, encontrar $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^h$ e $p_h \in \mathcal{S}_p^h$ para $t \in (0, T]$ tais que,

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{f}_h\right) d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) d\Omega$$
$$- \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_h) p_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h \, d\Gamma = \boldsymbol{0}, \tag{2.22}$$

$$\int_\Omega q_h (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h) \, d\Omega = 0, \tag{2.23}$$

para todo $\boldsymbol{w}_h \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^h$, $q_h \in \mathcal{S}_q^h$ e com condição inicial $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0$.

Uma dificuldade numérica inerente à formulação pelo métodos dos elementos finitos do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis é a satisfação da condição de incompressibilidade, Eq. (2.8). Esta restrição ao campo de velocidades conduz normalmente a uma formulação mista de elementos finitos que exige um cuidado especial na escolha dos subespaços de aproximação da velocidade e da pressão. Alguns pares de espaços de elementos finitos para a velocidade e pressão podem gerar oscilações espúrias na solução caso não satisfaçam a condição de compatibilidade, conhecida como inf-sup ou LBB (*Ladyzhenskaya, Babuska e Brezzi*) (BREZZI, 1974). Espaços com funções de interpolação de mesma ordem, como considerados neste trabalho, não satisfazem à condição de inf-sup. Sucessivos esforços no sentido de contornar esta restrição conduziram os avanços das formulações estabilizadas do método dos elementos finitos para qualquer escolha dos subespaços de aproximação (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR, 1991; TEZDUYAR; OSAWA, 2000).

A seguir, apresentamos o método SUPG/PSPG para as equações de Navier-Stokes incompressíveis que faz uso de espaços de funções de igual ordem para a velocidade e pressão.

2.3 Formulação estabilizada SUPG/PSPG

O método estabilizado *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG) introduzido em (BROOKS; HUGHES, 1982) tem como princípio adicionar pertubação na direção das linhas de corrente a fim de evitar oscilações espúrias em problemas fortemente convectivos. Estudos sobre estabilizações das equações estacionárias de Navier-Stokes que contêm o termo SUPG são apresentadas em (HANSBO; SZEPESSY, 1990; TOBISKA; LUBE, 1991; FRANCA; FREY, 1992; TOBISKA; VERFÜRTH, 1996). Quando aplicado às equações de Navier-Stokes, o método SUPG foi frequentemente considerado em conjunto com os métodos *Pressure Stabilizing/Petrov Galerkin* (PSPG) e *Least Squares Incompressibility Constraint* (LSIC). O método PSPG, proposto inicialmente em (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) para escoamentos de Stokes e posteriormente generalizado para escoamentos incompressíveis (TEZDUYAR, 1991), tem como finalidade estabilizar pares de espaços de elementos finitos que violam a condição inf-sup (ou LBB). A estabilização LSIC proposta em (FRANCA; HUGHES, 1988) tem como finalidade introduzir uma penalização da violação da equação de continuidade para velocidades aproximadas pelo método dos elementos finitos. No contexto do método, a velocidade discreta geralmente não atende a restrição de incompressibilidade e consequentemente a discretização deste termo afeta a solução.

A formulação SUPG/PSPG das equações de Navier-Stokes incompressíveis proposta em (BEHR; FRANCA; TEZDUYAR, 1993) consiste em, dados $\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{h}_h$ e $\boldsymbol{u}_0$, encontrar $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{S}^h_{\boldsymbol{u}}$ e $p_h \in \mathcal{S}^h_p$ para $t \in (0, T_f]$ tais que,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{f}_h \right) d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) d\Omega - \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_h) p_h \; d\Omega \\
- \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h \; d\Gamma + \int_\Omega q_h (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h) \; d\Omega \\
+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \Big[\tau_{SUPG} \rho (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla) \boldsymbol{w}_h + \tau_{PSPG} \nabla q_h \Big] \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} + \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{f}_h \right) + \nabla p_h \right] d\Omega \\
+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \tau_{LSIC} \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \; d\Omega = 0,
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

para todo $\boldsymbol{w}_h \in \mathcal{S}^h_{\boldsymbol{w}}$, $q_h \in \mathcal{S}^h_q$ e com condição inicial $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0$. Pelo fato de $\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{S}^h_{\boldsymbol{u}}$, o termo de segunda ordem no resíduo da equação do momentum é nulo.

As cinco primeiras integrais da Eq. (2.24) correspondem aos termos da formulação de Galerkin, enquanto as demais são termos de estabilização introduzidos na formulação por somatórios a nível de cada elemento. O primeiro somatório diz respeito à estabilização SUPG e PSPG, enquanto que o segundo se deve à estabilização LSIC.

Os parâmetros de estabilização τ_{SUPG}, τ_{PSPG} e τ_{LSIC} utilizados neste trabalho foram obtidos seguindo a referência (TEZDUYAR; SATHE, 2003), tal que

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\boldsymbol{u}_h\|}{h} \right)^2 + 9\left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \tag{2.25}$$

e

$$\tau_{LSIC} = \frac{\|\boldsymbol{u}_h\| h}{2}, \tag{2.26}$$

onde o comprimento característico da malha h é definido em função da área do elemento Ω^e, A^e, como sendo o comprimento dos catetos do triângulo retângulo isósceles de mesma área A^e,

$$h = \sqrt{2A^e}. \tag{2.27}$$

Para caso estacionário temos

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left[\left(\frac{2\|\boldsymbol{u}_h\|}{h} \right)^2 + 9\left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right]^{-1/2}. \tag{2.28}$$

Aplicando aproximações de elementos finitos na Eq. (2.24) (ver Apêndice A) chegamos a um sistema local de equações algébricas diferenciais,

$$\begin{cases} \big[\boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_\delta\big]\dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{U}_h) + [\boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta]\boldsymbol{U}_h - \big[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta\big]\boldsymbol{P}_h \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_\delta, \\ \boldsymbol{M}_\varphi \dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{G}_{hh}^T \boldsymbol{U}_h + \boldsymbol{N}_\varphi(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{G}_\varphi \boldsymbol{P}_h = \boldsymbol{F}_\varphi, \end{cases} \tag{2.29}$$

onde $\boldsymbol{U}_h$ é o vetor com valores das incógnitas nodais de $\boldsymbol{u}_h$, $\dot{\boldsymbol{U}}_h$ é a derivada temporal de $\boldsymbol{U}_h$ e $\boldsymbol{P}_h$ é o vetor com valores das incógnitas nodais de p_h. As matrizes e os vetores do sistema (2.29) são definidos a partir das integrais:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{hh} &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot \partial_t \boldsymbol{u}_h \, d\Omega, \\
\boldsymbol{M}_{\delta} &: \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot \partial_t \boldsymbol{u}_h d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h) &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h) \, d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{\delta}(\boldsymbol{U}_h) &: \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega, \\
\boldsymbol{K}_{hh} &: 2\nu \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) \, d\Omega, \\
\boldsymbol{L}_{\theta} &: \tau_{LSIC} \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \, d\Omega, \\
\boldsymbol{G}_{hh} &: \int_{\Omega^e} p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h \, d\Omega, \\
\boldsymbol{G}_{\delta} &: \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot \nabla p_h d\Omega, \\
\boldsymbol{F}_{hh} &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w_h} \cdot \boldsymbol{f}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h \, d\Gamma, \\
\boldsymbol{F}_{\delta} &: \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h d\Omega, \\
\boldsymbol{M}_{\varphi} &: \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot \partial_t \boldsymbol{u}_h d\Omega, \\
\boldsymbol{G}_{hh}^T &: \int_{\Omega^e} q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \, d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{\varphi}(\boldsymbol{U}_h) &: \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega, \\
\boldsymbol{G}_{\varphi} &: \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot \nabla p_h d\Omega, \\
\boldsymbol{F}_{\varphi} &: \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot \boldsymbol{f}_h d\Omega.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

As matrizes e vetores locais definidos na Eq. (2.30) da discretização via elementos finitos triangulares da formulação SUPG/PSPS são apresentados nos Apêndices (A.1) e (A.2).

3 Métodos estabilizados multiescala

Neste capítulo apresentamos a contribuição principal deste trabalho, a classe de métodos denominado NSGS-NS (*Nonlinear Subgrid Scale Method for Navier-Stokes Equations*).

3.1 Método multiescala não linear de estabilização submalha

Neste seção é apresentado o método de estabilização submalha não linear para problemas dados pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis, denotado por NSGS-NS (*Nonlinear Subgrid Scale Method*). Este método faz parte da família de métodos de elementos finitos multiescalas. Os métodos de elementos finitos multiescala consistem no enriquecimento do espaço de solução com informações da fenomenologia das pequenas escalas. Uma vez que a metodologia multiescala foi usada para construir aproximações estáveis, alguns pesquisadores (HUGHES, 1995; FRANCA; FARHAT, 1995; GUERMOND, 1999; MASUD; KHURRAM, 2006; HACHEM et al., 2010) consideraram a possibilidade prática de estabilizar equações predominantemente advectivas por meio de funções bolha. Neste trabalho, usamos funções bolha para construir o espaço de pequena escala.

Para definir os métodos de elementos finitos multiescala introduzimos os espaços de funções $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{hB}$, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{hB}$, $\mathcal{S}_{p}^{hB}$ e $\mathcal{S}_{q}^{hB}$ dados pelas somas direta,

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{hB} = \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{h} \oplus \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B},\ \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{hB} = \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{h} \oplus \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B},\ \mathcal{S}_{p}^{hB} = \mathcal{S}_{p}^{h} \oplus \mathcal{S}_{p}^{B} \text{ e } \mathcal{S}_{q}^{hB} = \mathcal{S}_{q}^{h} \oplus \mathcal{S}_{p}^{B}, \tag{3.1}$$

onde os subespaços da macro escala $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{h}$ e $\mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{h}$ foram definidos nas Eqs. (2.18) e (2.19), respectivamente. Os subespaços da micro escala $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B}$ e $\mathcal{S}_{p}^{B}$ são definidos da forma,

$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B} = \{\boldsymbol{u}_B \in [H_0^1(\Omega)]^2; \boldsymbol{u}_B|_{\Omega^e} \in [span(\psi_B)]^2, \forall \Omega^e \in \mathcal{T}_h\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{S}_{p}^{B} = \{p_B \in H_0^1(\Omega); p_B|_{\Omega^e} \in span(\psi_B), \forall \Omega^e \in \mathcal{T}_h\}, \tag{3.3}$$

sendo $H_0^1(\Omega)$ o espaço das funções em $H^1(\Omega)$ com valores nulos na fronteira de Ω e ψ_B é uma função do tipo bolha. Para um dado elemento Ω^e, as funções bolhas satisfazem,

$$\begin{aligned} \psi_B(\boldsymbol{x}) &> 0, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega^e; \\ \psi_B(\boldsymbol{x}) &= 0, \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^e; \\ \psi_B(\boldsymbol{x}) &= 1, \text{ no baricentro do triângulo } \Omega^e. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Os espaços $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{h}$ e $\mathcal{S}_{p}^{h}$ representam os espaços da escala resolvida (macro escala), enquanto $\mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B}$ e $\mathcal{S}_{p}^{B}$ representam os espaços da escala não resolvida (micro escala) (ver Fig. 3.1).

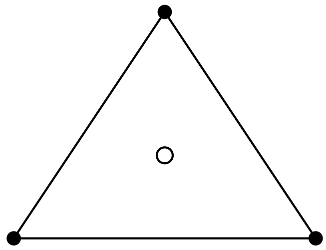


Figura 3.1 – Representação da discretização multiescala: escala resolvida ($\bullet$) e não-resolvida ($\circ$).

Dados os espaços definidos na Eq. (3.1), temos que toda função $\boldsymbol{u}_{hB} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{hB}$, $\boldsymbol{w}_{hB} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{hB}$, $p_{hB} \in \mathcal{S}_{p}^{hB}$ e $q_{hB} \in \mathcal{S}_{q}^{hB}$ tem a seguinte decomposição única

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{hB}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{u}_B(\boldsymbol{x},t), \quad \text{onde } \ \boldsymbol{u}_h \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{h} \times (0,T_f) \text{ e } \boldsymbol{u}_B \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B} \times (0,T_f);\\
\boldsymbol{w}_{hB}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{w}_h(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w}_B(\boldsymbol{x}), \quad \text{onde } \ \boldsymbol{w}_h \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{h} \text{ e } \boldsymbol{u}_B \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{B};\\
p_{hB}(\boldsymbol{x}) &= p_h(\boldsymbol{x}) + p_B(\boldsymbol{x}), \quad \text{onde } \ p_h \in \mathcal{S}_{p}^{h} \text{ e } p_B \in \mathcal{S}_{p}^{B};\\
q_{hB}(\boldsymbol{x}) &= q_B(\boldsymbol{x}) + q_B(\boldsymbol{x}), \quad \text{onde } \ q_h \in \mathcal{S}_{q}^{h} \text{ e } q_B \in \mathcal{S}_{p}^{B}.
\end{aligned}
$$

O método de estabilização multiescala para as equações de Navier-Stokes consiste em: dados $\boldsymbol{f}_h, \boldsymbol{h}_h$ e $\boldsymbol{u}_0$, encontrar $\boldsymbol{u}_{hB} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^{hB}$ e $p_{hB} \in \mathcal{S}_{p}^{hB}$ para $t \in (0,T_f]$ tal que,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \boldsymbol{w}_{hB} \cdot (\partial_t \boldsymbol{u}_{hB} + \boldsymbol{u}_{hB} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{hB} - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{h}}) \, d\Omega + 2\nu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_{hB}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{hB}) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_{hB}) p_{hB} \, d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B) \, d\Omega = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_{hB} \cdot \boldsymbol{h}_h \, d\Gamma,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
\int_{\Omega} q_{hB} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_{hB}) \, d\Omega = 0, \tag{3.6}
$$

para todo $\boldsymbol{w}_{hB} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{w}}^{hB}$, $q_{hB} \in \mathcal{S}_{q}^{hB}$ e com condição inicial $\boldsymbol{u}_{hB}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0$. O termo de estabilização adicional, dado pelo somatório na Eq. (3.5), é introduzido apenas na escala não resolvida, onde δ_B é o parâmetro que controla a quantidade de viscosidade artificial e consequentemente define o método. Em geral, como visto em (SANTOS; ALMEIDA, 2007; SANTOS; ALMEIDA; MALTA, 2012; VALLI et al., 2018) este termo é proporcional ao resíduo do problema associado à macro escala, Eqs. (2.7) e (2.8), para a solução envolvida, a qual significa que a dissipação numérica é mais efetiva em regiões do domínio onde o resíduo é mais expressivo.

A forma fraca das equações de momento é não linear devido ao termo de convecção. No entanto, é linear em relação as funções de ponderação $\boldsymbol{w}_{hB}$ e q_{hB}. Explorando esta linearidade, a formulação multiescala dada pelas Eqs. (3.5) e (3.6) pode ser decomposta em dois sub-problemas como segue.

O sub-problema associado a macro escala:

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot (\partial_t(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) + (\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \cdot \nabla(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B)) \, d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \, d\Omega$$

$$- \int_\Omega (p_h + p_B) \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h \, d\Gamma, \quad (3.7)$$

$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \, d\Omega + \int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B \, d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

O sub-problema associado a micro escala:

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot (\partial_t(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) + (\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \cdot \nabla(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B)) \, d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \, d\Omega$$

$$- \int_\Omega (p_h + p_B) \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B \, d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B) \, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{f}_h \, d\Omega, \quad (3.9)$$

$$\int_\Omega q_B \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \, d\Omega + \int_\Omega q_B \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B \, d\Omega = 0. \quad (3.10)$$

Integrando por partes a nível de elemento os termos viscosos que contém velocidades macro e micro nas Eqs. (3.7) e (3.9), considerando que as funções testes são combinações de funções polinomiais de grau um, $\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{w}_h \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^h$, e que as funções pesos bolhas são nulas no bordo do elemento, $\boldsymbol{w}_B, \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}_{\boldsymbol{u}}^B$, concluímos que estes são nulos, ou seja,

$$2\nu \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) \, d\Omega = 2\nu \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B) \, d\Omega = 0. \quad (3.11)$$

Aqui, algumas suposições devem ser feitas sobre a velocidade na micro escala a fim de lidar com a dependência do tempo e a não linearidade dos termos advectivos das equações (3.7) e (3.9):

i) consideramos a hipótese de quase estacionariedade da escala não resolvida, ou seja, a velocidade não varia com o tempo na micro escala, consequentemente $\partial_t \boldsymbol{u}_B(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$. No entanto, veremos que a equação na micro escala permanece quase dependente do tempo, uma vez que é impulsionada pelo resíduo da macro escala, a qual é transiente.

ii) Para escoamentos turbulentos a velocidade da micro escala $\boldsymbol{u}_B$ nos termos advectivos geram termos de estabilização adicionais, denominados tensores de tensões de Reynolds (BAZILEVS et al., 2007). Em escoamentos não turbulentos as velocidades convectivas dos termos não lineares podem ser aproximadas apenas pelas velocidades da macro escala (MASUD; KHURRAM, 2006), ou seja,

$$\boldsymbol{u}_{hB} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_{hB} = (\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \cdot \nabla(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B) \approx \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla(\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_B).$$

Das hipóteses acima e da Eq.(3.11), as Eqs. (3.7)-(3.9) podem ser reescritas pelos dois sub-problemas:

Sub-problema associado a macro escala:

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot (\partial_t \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h)\; d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)\; d\Omega$$
$$- \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h\; d\Omega - \int_\Omega p_B \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h\; d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h\; d\Omega + \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h\; d\Gamma, \quad (3.12)$$
$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h\; d\Omega + \int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B\; d\Omega = 0. \quad (3.13)$$

Sub-problema associado a micro escala:

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot (\partial_t \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h)\; d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B)\; d\Omega$$
$$- \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B\; d\Omega - \int_\Omega p_B \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B\; d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{f}_h\; d\Omega, \quad (3.14)$$
$$\int_\Omega q_B \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h\; d\Omega + \int_\Omega q_B \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B\; d\Omega = 0. \quad (3.15)$$

Para derivar nossa formulação estabilizada, primeiro encontramos uma solução para a pressão p_B, através do sub-problema associado a micro escala dado pelas Eqs. (3.14) e (3.15). Em seguida, substituímos esta pressão p_B no problema macroscópico, dado pelas Eqs. (3.12) e (3.13), e usando uma abordagem como o complemento de Schur eliminamos a aparência explícita da escala não resolvida enquanto modelamos seus efeitos na escala resolvida.

Reagrupando os termos das Eqs. (3.14) e (3.15) e integrando por partes o termo de pressão macroscópica na equação do momento obtemos,

$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega + 2\nu \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B)\; d\Omega - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} p_B \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B\; d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{r}_m\; d\Omega, \quad (3.16)$$
$$\sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} q_B \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B\; d\Omega = \int_\Omega q_B\; r_c\; d\Omega. \quad (3.17)$$

onde $\boldsymbol{r}_m$ e r_c são os resíduos do momentum e da continuidade, respectivamente dados por,

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{f}_h - \partial_t \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h, \quad (3.18)$$
$$r_c = -\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h. \quad (3.19)$$

A ideia agora é aproximar as soluções $\boldsymbol{u}_B$ e p_B em termos da malha de elementos finitos e dos resíduos (3.18) e (3.19). A partir dos trabalhos (TEZDUYAR; OSAWA, 2000; HUGHES; WELLS, 2005), sabe-se que considerar a pressão na micro escala como uma variável adicional permite incluir a condição de continuidade na escala não resolvida

Eq. (3.17). Ela fornece estabilidade adicional especialmente em problemas com elevado número de Reynolds. No entanto, resolver a equação na micro escala para a velocidade e a pressão não é trivial, devido ao fraco acoplamento entre as equações. Codina (2002) utiliza uma abordagem baseada na análise de Fourier no problema de Oseen na micro escala, a partir das Eqs. (3.16) e (3.17), obtendo uma estimativa dos parâmetros de estabilização, modelando assim, a ação das escalas não resolvidas dentro da escala resolvida (ver Apêndice B para detalhes). Como resultado, a pressão na micro escala pode se representada em função do resíduo da equação da continuidade de massa por,

$$p_B \approx -\tau_c \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h, \tag{3.20}$$

onde o parâmetro τ_c é função da viscosidade cinemática ν, da velocidade na macro escala $\boldsymbol{u}_h$ e do comprimento característico da malha h. Neste trabalho, adotamos o parâmetro τ_c definido pela Eq. (2.26). Uma vez definido esse parâmetro de estabilização, a Eq. (3.20) pode ser inserida na equação macroscópica, Eq. (3.12), carregando os efeitos da pressão na escala não resolvida para dentro do problema na escala resolvida. Assim, observamos que a pressão da micro escala gera no problema macroscópico um termo idêntico ao LSIC, dado na formulação SUPG/PSPG, Eq. 2.24.

Definida a pressão na micro escala, Eq. (3.20), a equação de conservação de massa, Eq. (3.17), pode ser desconsiderada no cálculo da velocidade na micro escala, o que equivale anular a função peso, ou seja $q_B = 0$. Codina (2002) mostrou que a velocidade na micro escala é derivada exclusivamente pelo resíduo da equação do momento na escala resolvida. Dado que a pressão na micro escala é função do resíduo da equação da continuidade na escala resolvida, Eq. (3.20), temos que eliminar os efeitos da pressão p_B na equação do momento na micro escala, para isso impomos $p_B = 0$ na Eq. (3.16). Assim, os sub-problemas na micro e macro escala podem ser reescritos pelo sistema,

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot (\partial_t \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h)\; d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_h) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)\; d\Omega$$
$$+ \int_\Omega \tau_{LSIC} \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h\; d\Omega - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_h\; d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h\; d\Omega + \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{h}_h\; d\Gamma, \tag{3.21}$$

$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h\; d\Omega + \int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B\; d\Omega = 0, \tag{3.22}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot (\partial_t \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h)\; d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\; d\Omega + 2\nu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)\; d\Omega$$
$$+ \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B) d\Omega - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{f}_h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{h}_h d\Gamma. \tag{3.23}$$

Aplicando aproximações de elementos finitos nas Eqs. (3.21)-(3.23) (ver Apêndice A) chegamos a um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias,

$$\boldsymbol{M}_{hh}\dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{N}_{hB}\boldsymbol{U}_B + [\boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta]\boldsymbol{U}_h - \boldsymbol{G}_{hh}\boldsymbol{P}_h = \boldsymbol{F}_h, \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{G}_{hh}^T\boldsymbol{U}_h + \boldsymbol{G}_{hB}\boldsymbol{U}_B = 0, \quad (3.25)$$

$$\boldsymbol{M}_{Bh}\dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{K}_{BB}\boldsymbol{U}_B - \boldsymbol{G}_{Bh}\boldsymbol{P}_h = \boldsymbol{F}_B, \quad (3.26)$$

onde $\boldsymbol{U}_h$ é o vetor com valores das incógnitas nodais de $\boldsymbol{u}_h$, $\dot{\boldsymbol{U}}_h$ é a derivada temporal de $\boldsymbol{U}_h$, $\boldsymbol{P}_h$ é o vetor com valores das incógnitas nodais de p_h e $\boldsymbol{U}_B$ é o vetor com os valores das incógnitas nodais de $\boldsymbol{u}_B$. No sistema diferencial algébrico dado pelas Eqs. (3.24)-(3.26) as matrizes e vetores de Galerkin, denotadas pelo subscrito hh e a matriz de estabilização $\boldsymbol{L}_\theta$ são as mesmas dadas na Eq. (2.30). As demais matrizes e vetores da formulação multiescalas são definidos a partir das integrais:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{hB} &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\, d\Omega,\\
\boldsymbol{G}_{hB} &: \int_{\Omega^e} q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_B\, d\Omega,\\
\boldsymbol{M}_{Bh} &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot \partial_t \boldsymbol{u}_h\, d\Omega,\\
\boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h) &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h)\, d\Omega,\\
\boldsymbol{K}_{BB} &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B)\, d\Omega + 2\nu \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) \colon \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B)\, d\Omega\\
&\qquad + \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \colon (\delta_B \nabla \boldsymbol{u}_B)\, d\Omega,\\
\boldsymbol{G}_{Bh} &: \int_{\Omega^e} p_h \nabla \cdot \boldsymbol{w}_B\, d\Omega,\\
\boldsymbol{F}_B &: \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{f}_h\, d\Omega.
\end{aligned} \quad (3.27)$$

As matrizes e vetores definidos na Eq. (3.27) são apresentadas no Apêndice A.3.

Uma vez que a matriz $\boldsymbol{K}_{BB}$ é inversível (ver Apêndice A.3) podemos aplicar o processo de condensação estática. A partir da Eq. (3.26) podemos explicitar a velocidade na micro escala $\boldsymbol{U}_B$ em termos da velocidade e pressão na macro escala, $\boldsymbol{U}_h$ e $\boldsymbol{P}_h$, da forma,

$$\boldsymbol{U}_B = \boldsymbol{K}_{BB}^{-1}[\boldsymbol{F}_B - \boldsymbol{M}_{Bh}\dot{\boldsymbol{U}}_h - \boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{G}_{Bh}\boldsymbol{P}_h]. \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.28) nas Eqs. (3.24) e (3.25) obtemos o sistema de complemento de Schur, apenas nas incógnitas nodais U_h e P_h,

$$\begin{cases}
\big[\boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_\delta^m\big]\dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{N}_\delta^m(\boldsymbol{U}_h) + \big[\boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta\big]\boldsymbol{U}_h - \big[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta^m\big]\boldsymbol{P}_h \\
\qquad = \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_\delta^m,\\
\boldsymbol{M}_\varphi^m\dot{\boldsymbol{U}}_h + \boldsymbol{G}_{hh}^T\boldsymbol{U}_h + \boldsymbol{N}_\varphi^m(\boldsymbol{U}_h) + \boldsymbol{G}_\varphi^m\boldsymbol{P}_h = \boldsymbol{F}_\varphi^m,
\end{cases} \quad (3.29)$$

onde,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{\delta}^{m} &= -\boldsymbol{N}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{M}_{Bh}, & \boldsymbol{M}_{\varphi}^{m} &= -\boldsymbol{G}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{M}_{Bh}, \\
\boldsymbol{N}_{\delta}^{m}(\boldsymbol{U}_h) &= -\boldsymbol{N}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h), & \boldsymbol{N}_{\varphi}^{m}(\boldsymbol{U}_h) &= -\boldsymbol{G}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h), \\
\boldsymbol{G}_{\delta}^{m} &= -\boldsymbol{N}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{G}_{Bh}, & \boldsymbol{G}_{\varphi}^{m} &= \boldsymbol{G}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{G}_{Bh}, \\
\boldsymbol{F}_{\delta}^{m} &= -\boldsymbol{N}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{F}_{B}, & \boldsymbol{F}_{\varphi}^{m} &= -\boldsymbol{G}_{hB}\boldsymbol{K}_{BB}^{-1}\boldsymbol{F}_{B}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

No sistema (3.29) observamos a influência da velocidade na micro escala sobre a velocidade e pressão na macro escala, através dos novos termos de estabilização dados pelas matrizes com sobrescrito m. Observamos uma similaridade entre os sistemas dados em (3.29) e (2.29), onde as matrizes e vetores $\boldsymbol{M}_{\delta}^{m}, \boldsymbol{N}_{\delta}^{m}(\boldsymbol{U}_h), \boldsymbol{G}_{\delta}^{m}, \boldsymbol{F}_{\delta}^{m}, \boldsymbol{M}_{\varphi}^{m}, \boldsymbol{N}_{\varphi}^{m}(\boldsymbol{U}_h), \boldsymbol{G}_{\varphi}^{m}$ e $\boldsymbol{F}_{\varphi}^{m}$ adicionam estabilização ao sistema (3.29) de forma semelhante que os termos SUPG e PSPG no sistema (2.29). Quando a viscosidade artificial é nula, $\delta_B = 0$, o método multiescala NSGS-NS se reduz a um método de Galerkin, com espaços de elementos finitos clássicos enriquecidos com funções bolhas, para as equações de Navier-Stokes, ao qual denominaremos de VMS-B (*Variational Multiscale Method - Bubble*) (HUGHES, 1995; CODINA, 2002; MASUD; KHURRAM, 2006; HACHEM et al., 2010).

3.2 Viscosidade artificial do método NSGS-NS

No contexto da formulação variacional multiescala para a equação escalar de difusão, advecção e reação, a ideia de adicionar uma viscosidade não linear somente na escala não resolvida foi considerada em (SANTOS; ALMEIDA, 2007; SANTOS; ALMEIDA; MALTA, 2012) definindo o método NSGS. Alguns pesquisadores acreditam que as oscilações espúrias da solução aproximada para problemas de convecção dominante estão associadas às pequenas escalas, refletindo-se num acúmulo de energia cinética (GUERMOND, 1999). A definição do método NSGS tem como princípio introduzir um operador à formulação variacional composto por uma viscosidade artificial submalha mínima de modo que seja capaz de dissipar essa energia contida nas escalas não resolvidas.

O ponto chave da concepção do método NSGS para a equação escalar de difusão, advecção e reação, é a decomposição multiescala em dois níveis do campo de velocidade, ou seja,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_h + \boldsymbol{\beta}',$$

onde $\boldsymbol{\beta}_h$ e $\boldsymbol{\beta}'$ são os campos de velocidades associados às escalas resolvida (macro) e submalha (micro), respectivamente.

Uma vez determinada a velocidade $\boldsymbol{\beta}'$, é possível determinar a energia cinética associada às micro escalas e a quantidade de viscosidade artificial submalha necessária para dissipa-lá, dadas respectivamente por

$$E_c = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\beta}'|^2 \quad \text{e} \quad \delta_c = \frac{1}{2}h|\boldsymbol{\beta}'|^2, \tag{3.31}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma Euclidina e h é o comprimento característico malha.

Para determinar $\boldsymbol{\beta}'$ são agregadas as hipóteses de que dentre todos os possíveis campos de velocidade submalha, $\boldsymbol{\beta}'$ está associado àquele que conduz a energia cinética mínima e que a equação de transporte na escala resolvida seja satisfeita em cada elemento Ω^e. Estas condições conduzem ao seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} minimizar \quad E_c = \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{\beta}'|^2, \\ sujeito \;\; a \;\; -\epsilon\Delta u_h + \boldsymbol{\beta}_h \cdot \nabla u_h + \sigma u_h = f \;\; \text{em} \;\; \Omega^e \in \mathcal{T}_h, \end{cases} \tag{3.32}$$

onde u_h e f são escalares, ϵ é o coeficiente de difusão e σ o coeficiente de reação. A solução $\boldsymbol{\beta}'$ de (3.32) é dada por (SANTOS, 2007),

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{cases} \dfrac{r(u_h)}{|\nabla u_h|} \dfrac{\nabla u_h}{|\nabla u_h|}, & \text{se } |\nabla u_h| > 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3.33}$$

onde $r(u_h) = f - (-\epsilon\Delta u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_h + \sigma u_h)$ é o resíduo da solução u_h em Ω^e.

Substituindo (3.33) em (3.31) se obtém a viscosidade artificial submalha do método NSGS dada por,

$$\delta_c = \begin{cases} \dfrac{h}{2} \dfrac{|r(u_h)|}{|\nabla u_h|}, & \text{se } |\nabla u_h| > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.34}$$

Seguindo a estratégia desenvolvida em (SANTOS, 2007) definimos a quantidade de viscosidade artificial δ_B que define o método multiescala não linear de estabilização submalha para as equações de Navier-Stokes incompressíveis, NSGS-NS. Uma vez que as equações de Navier-Stokes são compostas pelas equações da quantidade de movimento e da conservação de massa, a definição para a viscosidade artificial não é única.

Considerando apenas o resíduo da equação da quantidade de movimento, definimos a viscosidade artificial δ_{B1}, do método denominado NSGS1-NS, da forma,

$$\delta_{B1}(\boldsymbol{u}_h, p_h) = \begin{cases} \dfrac{h}{2} \dfrac{\|\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{u}_h, p_h)\|}{\|\nabla \boldsymbol{u}_h\|}, & \text{se } \|\nabla \boldsymbol{u}_h\| > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.35}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e $\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{u}_h, p_h) = \partial_t \boldsymbol{u}_h + (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h + \nabla p_h - \boldsymbol{f}$ é o resíduo associado a equação da quantidade do movimento na macro escala de Ω^e. Sendo L e T, respectivamente, as escalas de comprimento e tempo associadas à macro escala, lembrando as dimensões da velocidade $[\boldsymbol{u}_h] = LT^{-1}$, do operador diferencial espacial $[\nabla] = L^{-1}$, do comprimento de malha $[h] = L$ e do resíduo da equação da quantidade de movimento $[\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{u}_h, p_h)] = LT^{-2}$, temos que a viscosidade artificial definida na Eq .(3.35) tem dimensão de viscosidade cinemática, ou seja $[\delta_{B1}] = L^2T^{-1}$.

A difusão artificial é adicionada em função do resíduo da solução macro $\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{u}_h, p_h)$, além disso, ela não é constante para todos os elementos da malha e para os elementos em que $\|\nabla \boldsymbol{u}_h\| = 0$ temos $\delta_{B1} = 0$ e consequentemente o método enriquecido VMS-B.

Uma outra proposta para viscosidade artificial submalha consiste em adicionar à δ_{B1} uma parcela em função do resíduo da equação de conservação de massa, $r_c(\boldsymbol{u}_h, p_h) = -\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h$, apenas nos elementos onde $\|\nabla \boldsymbol{u}_h\| > 0$. Uma vez que $[r_c(\boldsymbol{u}_h, p_h)] = T^{-1}$, precisamos inserir um fator de ordem L^2 para termos consistência dimensional para a nova viscosidade. Assim, definimos o parâmetro δ_{B2} da forma,

$$\delta_{B2}(\boldsymbol{u}_h, p_h) = \begin{cases} \dfrac{h}{2}\dfrac{\|\boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{u}_h, p_h)\|}{\|\nabla \boldsymbol{u}_h\|} + \dfrac{h^2}{2}\|r_c(\boldsymbol{u}_h, p_h)\|, & \text{se } \|\nabla \boldsymbol{u}_h\| > 0; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3.36}$$

a qual gera o método denominado NSGS2-NS. Como veremos no Capítulo 5, considerar os efeitos viscosos provenientes da equação de conservação de massa na composição da viscosidade artificial submalha δ_{B2}, tem mostrado maior eficácia no tratamento de escoamentos com elevado número de Reynolds.

O comprimento característico da malha, h, é definido como em (TEZDUYAR; PARK, 1986) da forma

$$h = 2\left(\sum_{a=1}^{3} |\boldsymbol{s} \cdot \nabla N_a|\right)^{-1}, \tag{3.37}$$

onde $\boldsymbol{s}$ é o vetor unitário definido como,

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{u}_h}{\|\boldsymbol{u}_h\|}$$

e N_a é a função interpolação associada com o nó a. É importante notar que, o comprimento característico da malha h é definido automaticamente levando em consideração as direções da velocidade $\boldsymbol{u}_h$ e da discretização espacial do domínio.

4 Técnicas computacionais

Neste capítulo apresentamos técnicas computacionais utilizadas no auxílio da solução das formulações apresentadas. Primeiro apresentamos uma estratégia de relaxação para a viscosidade artificial (VALLI et al., 2018). Na sequência apresentamos o método de Picard, usado para tratar a não linearidade dos problemas estacionários (ELMAN; SILVESTER; WATHEN, 2014), e o algoritmo adaptativo para a escolha do fator de amortecimento, utilizado no processo iterativo não linear (JOHN; KNOBLOCH, 2008). Por fim, apresentamos o algoritmo de integração no tempo preditor corretor utilizado para a solução dos problemas transientes (FRANCA; FREY, 1992).

4.1 Relaxação da viscosidade artificial

Pelas definições apresentadas para as viscosidades artificiais Eqs. (3.35) ou (3.36), estas incrementam a viscosidade natural do fluido, ν, de forma adaptativa e livre de parâmetros previamente definidos. Porém, estas têm uma natureza não linear, uma vez que dependem da solução aproximada para a velocidade $\boldsymbol{u}_h$ e pressão p_h. A fim de linearizar as viscosidades artificiais δ_{B1} e δ_{B2}, tomaremos a velocidade e pressão da iteração não linear anterior dentro de um processo iterativo de linearização, que será apresentado na Seção 4.2, do sistema de equações algébricos dado pela Eq. (3.29). Para acelerar, ou em alguns casos tornar possível, a convergência do processo não linear, utilizamos a seguinte estratégia para calcular δ_B no passo corrente, $i+1$, (SANTOS; ALMEIDA, 2007)

$$\begin{aligned} \delta_B^{i+1} &= \eta \tilde{c}_B^{i+1} + (1-\eta)\delta_B^i, \ \text{com } \eta \in [0,1]; \\ \tilde{c}_B^{i+1} &= \begin{cases} \dfrac{h}{2}\dfrac{\|r_m(\boldsymbol{u}_h^i, p_h^i)\|}{\|\nabla \boldsymbol{u}_h^i\|} + k\dfrac{h^2}{2}\|r_c(\boldsymbol{u}_h^i, p_h^i)\|, & \text{se } \|\nabla \boldsymbol{u}_h^i\| > tol_\delta; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para $k=0$ temos δ_{B1} e $k=1$ temos δ_{B2}. Neste trabalho, utilizamos $\eta = 0,5$, $tol_\delta = 10^{-5}$ e um número máximo de 1000 iterações não lineares, quando considerado o problema estacionário. No entanto, para os experimentos do escoamento com alargamento de canal e escoamento no interior de uma cavidade unitária com elevado número de Reynolds, a convergência do processo iterativo não linear não é alcançada, mesmo se um número máximo maior de iterações for considerado. Na tentativa de contornar as dificuldades de convergência Valli et al. (2018) propõe o congelamento da difusão artificial δ_B em todos os elementos da malha onde houver estagnação do resíduo na sua forma forte. Em outras palavras, o coeficiente η na Eq. (4.1) é considerado nulo quando $\|r_m(\boldsymbol{u}_h^i, p_h^i)\|$ está próximo de $\|r_m(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})\|$. Neste trabalho adotamos o limite de 20% para o erro relativo entre esses resíduos, ou seja, a viscosidade artificial é congelada se $\|r_m(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})\| \geqslant 0,8\|r_m(\boldsymbol{u}_h^i, p_h^i)\|$.

4.2 Processo iterativo não linear

Nesta seção apresentamos o método de iterações sucessivas, ou de Picard, aplicável aos sistemas não lineares Eqs. (2.29) e (3.29) na sua forma estacionária, ou seja, quando o termo transiente é desconsiderado (ELMAN; SILVESTER; WATHEN, 2014). Os sistemas algébricos resultantes das formulações estabilizadas clássica SUPG/PSPG, e multiescalas apresentam termos não lineares próprios da natureza do problema e outros introduzidos pelas formulações estabilizadas. Resolver estes sistemas requer iterações não lineares com um problema linearizado sendo resolvido em cada iteração. Assim, dado um valor inicial para a velocidade e pressão, $(\boldsymbol{u}_h^0, p_h^0)$, uma sequência de iterações $(\boldsymbol{u}_h^1, p_h^1), (\boldsymbol{u}_h^2, p_h^2), (\boldsymbol{u}_h^3, p_h^3), ...$ é calculada, a qual, sob certas hipóteses, converge para a solução do sistema não linear.

As não linearidades dos sistemas (2.29) e (3.29) estão relacionadas com os termos advectivos, $(\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)$, onde a velocidade de advecção é a própria incógnita. Uma forma de linearizarmos os sistemas, consiste em considerar a velocidade de advecção dada pela iteração anterior, dentro do processo iterativo. Assim, dada a iterada $(\boldsymbol{u}_h^i, p_h^i)$ linearizamos os termos de advecção, $(\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)$ nas Equações (2.30) e (3.27) para obter a solução $(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})$ da seguinte forma,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i)\boldsymbol{U}_h^{i+1} \quad &: \quad \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h^{i+1} \; d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{\delta}(\boldsymbol{U}_h^i)\boldsymbol{U}_h^{i+1} \quad &: \quad \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h^{i+1} d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{\varphi}(\boldsymbol{U}_h^i)\boldsymbol{U}_h^{i+1} \quad &: \quad \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h^{i+1} d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{hB}(\boldsymbol{U}_h^i)\boldsymbol{U}_B^{i+1} \quad &: \quad \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_B^{i+1} \; d\Omega, \\
\boldsymbol{N}_{Bh}(\boldsymbol{U}_h^i)\boldsymbol{U}_h^{i+1} \quad &: \quad \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h^i \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h^{i+1} \; d\Omega.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

resultando no sistema linearizado

$$
\begin{cases}
\left[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_{\delta}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_{\theta}\right]\boldsymbol{U}_h^{i+1} - \left[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_{\delta}\right]\boldsymbol{P}_h^{i+1} = \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_{\delta}, \\
\left[\boldsymbol{G}_{hh}^T + \boldsymbol{N}_{\varphi}(\boldsymbol{U}_h^i)\right]\boldsymbol{U}_h^{i+1} + \boldsymbol{G}_{\varphi}\boldsymbol{P}_h^{i+1} = \boldsymbol{F}_{\varphi},
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

para a formulação SUPG/PSPG e

$$
\begin{cases}
\left[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_{\delta}^m(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_{\theta}\right]\boldsymbol{U}_h^{i+1} - \left[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_{\delta}^m\right]\boldsymbol{P}_h^{i+1} = \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_{\delta}^m, \\
\left[\boldsymbol{G}_{hh}^T + \boldsymbol{N}_{\varphi}^m(\boldsymbol{U}_h^i)\right]\boldsymbol{U}_h^{i+1} + \boldsymbol{G}_{\varphi}^m\boldsymbol{P}_h^{i+1} = \boldsymbol{F}_{\varphi}^m,
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

para a formulação multiescala. As formulações (4.3) e (4.4) são denominadas de *sistemas de Oseen* (ELMAN; SILVESTER; WATHEN, 2014). Definindo o vetor de valores nodais da velocidade e pressão na iteração i, $\boldsymbol{d}_h^i = (\boldsymbol{U}_h^i, \boldsymbol{P}_h^i)$, sem perda de generalidade podemos reescrever os sistemas (4.3) e (4.4) da forma

$$
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{d}_h^i)\boldsymbol{d}_h^{i+1} = \boldsymbol{F}.
$$

Subtraindo $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{d}_h^i)\boldsymbol{d}_h^i$ de ambos os membros, definido a correção da forma $\Delta\boldsymbol{d}_h^i = \boldsymbol{d}_h^{i+1} - \boldsymbol{d}_h^i$ e fazendo $\boldsymbol{r}^i = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{d}_h^i)\boldsymbol{d}_h^i$ o resíduo da iteração não linear, obtemos o método de iterações sucessivas, ou método de Picard: a cada iteração, dada uma solução aproximada $\boldsymbol{d}_h^i$, calcula-se a correção $\boldsymbol{\Delta d}_h^i$ satisfazendo

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{d}_h^i)\Delta\boldsymbol{d}_h^i = \boldsymbol{r}_h^i.$$

Atualizando a iteração anterior via

$$\boldsymbol{d}_h^{i+1} = \boldsymbol{d}_h^i + \boldsymbol{\Delta d}_h^i, \tag{4.5}$$

define-se a próxima iteração da sequência. O processo iterativo gera uma sequência decrescente de resíduos e é finalizado quando este se anula, $\boldsymbol{r}_h^i = \boldsymbol{0}$, gerando a solução $\Delta\boldsymbol{d}_h^i = \boldsymbol{0}$ e consequentemente $\boldsymbol{d}_h^{i+1} = \boldsymbol{d}_h^i$. Os Algoritmos 1 e 2 ilustram o processo de iterações sucessivas para os métodos de estabilização SUPG/PSPG e multiescalas VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS.

Algoritmo 1: Iterações sucessivas: SUPG/PSPG

Passo 1. Inicialize $i := 0$, $\boldsymbol{U}_h^i$ e $\boldsymbol{P}_h^i$.

Passo 2. Fase da correção.

Monte as matrizes: $\boldsymbol{M}_{11}$ $\boldsymbol{M}_{12}, \boldsymbol{M}_{21}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ a partir das Eqs. (2.30).

$\boldsymbol{M}_{11} := \boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta$,

$\boldsymbol{M}_{12} := \boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta$,

$\boldsymbol{M}_{21} := \boldsymbol{N}_\varphi(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{G}_{hh}^T$

$\boldsymbol{M}_{22} := \boldsymbol{G}_\varphi$

Monte os resíduos $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ a partir das Eqs. (2.30).

$\boldsymbol{R}^i := \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_\delta - \big[\big[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta\big]\boldsymbol{U}_h^i - \big[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta\big]\boldsymbol{P}_h^i\big]$

$\boldsymbol{S}^i := \boldsymbol{F}_\varphi - \big[\big[\boldsymbol{G}_{hh}^T + \boldsymbol{N}_\varphi(\boldsymbol{U}_h^i)\big]\boldsymbol{U}_h^i + \boldsymbol{G}_\varphi\boldsymbol{P}_h^i\big]$

Resolva o sistema incremental:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1}\\ \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^i\\ \boldsymbol{S}^i\end{bmatrix}$$

Corrija a solução.

$\boldsymbol{U}_h^{i+1} := \boldsymbol{U}_h^i + \Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1}$,

$\boldsymbol{P}_h^{i+1} := \boldsymbol{P}_h^i + \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1}$

Passo 3. Critério de parada.

Se $i < i_{max}$ e $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| > tol_{res}\|(\boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{S}^0)\|$, então

$i = i + 1$ e retorne ao **Passo 2**,

senão **PARE**.

4.3 Amortecimento do processo iterativo não linear

Para melhorar a convergência do método iterativo não linear, utilizamos um processo dinâmico de fator de correção, ou amortecimento (*Damping factor*) sugerido em (JOHN; KNOBLOCH, 2008). Durante o processo iterativo não linear, pode acontecer que alguma

Algoritmo 2: Iterações sucessivas: Multiescalas

Passo 1. Inicialize $i := 0$, $\boldsymbol{U}_h^i$ e $\boldsymbol{P}_h^i$.
Passo 2. Fase da correção.
Calcule a viscosidade artificial $\delta_B(\boldsymbol{U}_h^i, \boldsymbol{P}_h^i)$ a partir das Eqs. (3.35) ou (3.36).
Monte as matrizes: $\boldsymbol{M}_{11}$ $\boldsymbol{M}_{12}, \boldsymbol{M}_{21}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ a partir das Eqs. (3.30).
$\boldsymbol{M}_{11} := \boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_\delta^m(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta,$
$\boldsymbol{M}_{12} := \boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta^m,$
$\boldsymbol{M}_{21} := \boldsymbol{N}_\varphi^m(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{G}_{hh}^T$
$\boldsymbol{M}_{22} := \boldsymbol{G}_\varphi^m$
Monte os resíduos $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ a partir das Eqs. (3.30).
$\boldsymbol{R}^i := \boldsymbol{F}_{hh} + \boldsymbol{F}_\delta^m - \left[\left[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{N}_\delta^m(\boldsymbol{U}_h^i) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta\right]\boldsymbol{U}_h^i - \left[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta^m\right]\boldsymbol{P}_h^i\right]$
$\boldsymbol{S}^i := \boldsymbol{F}_\varphi^m - \left[\left[\boldsymbol{G}_{hh}^T + \boldsymbol{N}_\varphi^m(\boldsymbol{U}_h^i)\right]\boldsymbol{U}_h^i + \boldsymbol{G}_\varphi^m\boldsymbol{P}_h^i\right]$
Resolva o sistema incremental:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1}\\ \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}^i\\ \boldsymbol{S}^i\end{bmatrix}$$

Corrija a solução.
$\boldsymbol{U}_h^{i+1} := \boldsymbol{U}_h^i + \Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1},$
$\boldsymbol{P}_h^{i+1} := \boldsymbol{P}_h^i + \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1}$
Passo 3. Critério de parada.
Se $i < i_{max}$ e $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| > tol_{res}\|(\boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{S}^0)\|$, então
$i = i + 1$ e retorne ao **Passo 2**,
senão **PARE**.

solução $\boldsymbol{d}_h^{i+1} = (\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1})$ tende a gerar um resíduo $\boldsymbol{r}_h^{i+1} = (\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})$ maior que o imediatamente anterior, $\boldsymbol{r}_h^i = (\boldsymbol{R}^i, \boldsymbol{S}^i)$, construindo assim, uma sequência não decrescente. Neste caso, um amortecimento na solução do sistema,

$$(\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1}) = (\boldsymbol{U}_h^i, \boldsymbol{P}_h^i) + \omega(\Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1}), \quad \omega > 0,$$

pode evitar a construção de uma sequência de resíduos divergente no processo iterativo não linear. Assim, uma escolha apropriada do fator de amortecimento ω é frequentemente essencial para a convergência do processo iterativo não linear ou para diminuir o número de iterações necessárias. A escolha dinâmica do fator de amortecimento está ilustrada no Algoritmo 3. Nossa abordagem contém um conjunto de parâmetros, cujos valores adotados para os experimentos do Capítulo 5 são dados nas linhas 1 e 2. Esses valores foram escolhidos de forma que o método multiescala NSGS2-NS, aplicado ao experimento do escoamento estacionário no interior de uma cavidade unitária com $Re = 20000$, atingisse a convergência do processo iterativo não linear. A estratégia para a escolha dinâmica do fator de amortecimento baseia-se nos seguintes princípios:

- Existe um limite inferior ω_{min} para o fator de amortecimento. Esse limite é fixo em $\omega_{min} = 0,1$. Fatores de amortecimento muito pequenos levam, em geral, a um número muito grande de iterações e, portanto, a esquemas ineficientes.

- Existe um limite máximo ω_{max} para o fator de amortecimento. Inicialmente, definimos $\omega_{max} = 1$, ou seja, sem amortecimento da solução do sistema linearizado (ver as linhas 4 a 13). O limite superior é no máximo igual a um porém, tanto o fator de amortecimento ω quanto o limite máximo ω_{max} são ajustados dinamicamente no decorrer do processo iterativo, $\omega_{min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{max} \leqslant 1,0$.

- A iteração $(\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1})$ é aceita se a norma do resíduo do processo de linearização, $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\|$, for menor que a norma do resíduo da iteração anterior, $\|(\boldsymbol{R}^{i}, \boldsymbol{S}^{i})\|$, ou se ω atingir o valor mínimo, conforme indicado nas linhas 15 a 19. Se $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| < \|(\boldsymbol{R}^{i}, \boldsymbol{S}^{i})\|$ e se não houve rejeição de uma iteração $(\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1})$ para um valor maior de ω, ou seja, *first-damping*=1, o fator de amortecimento máximo ω_{max} será aumentado (veja a linha 17) e então o fator de amortecimento ω também será aumentado (veja a linha 18).

- Se o valor proposto para a iteração $(\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1})$ não for aceito, ω será diminuído (veja a linha 21). Além disso, se no passo $i + 1$ o valor proposto para a iteração for rejeitada pela primeira vez, ou seja, *first-damping*=1, então o amortecimento máximo ω_{max} também será diminuído (veja as linhas 22 a 25). Agora, uma nova proposta para $(\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \boldsymbol{P}_h^{i+1})$ é computada com o novo valor do fator de amortecimento. A aceitação ou rejeição desta nova proposta é verificada da mesma maneira que para o antigo fator de amortecimento (veja a linha 26).

As principais características desta abordagem são que o fator de amortecimento em geral diminui se o resíduo aumenta e que este, bem como o parâmetro de amortecimento máximo, aumentam se o resíduo diminuir para melhorar a eficiência do processo não-linear. Assim, um forte amortecimento, que pode ser necessário apenas no início do processo iterativo, influencia levemente o fator de amortecimento no final do processo. Aplicado aos métodos multiescalas VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS, o fator de amortecimento permite tratar problemas com números de Reynolds elevados.

4.4 Integração no tempo

A discretização no espaço das equações descritas no Capítulo anterior resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem em relação ao tempo, sendo este procedimento conhecido como semi-discretização. A discretização das equações diferenciais parciais (EDP) completa-se com a aplicação de um método de integração no tempo para as EDO's resultantes do método dos elementos finitos (DONEA; HUERTA, 2003).

Técnicas de integração no tempo explícitas são geralmente mais rápidas do que suas contrapartes implícitas, pois não envolvem iterações não lineares, nem requerem

Algoritmo 3: Fator de Amortecimento

Passo 1. Inicialize os parâmetros:
  $\omega_{min} := 0,1,\ \omega_{max} := 1,0,\ \omega := \omega_{max},$
  $c_1 := 1,001,\ c_2 := 1,1,\ c_3 := 0,9,$
Passo 2. Inicialize $i := 0$ e a solução $(\boldsymbol{U}_h^i, \boldsymbol{P}_h^i)$.
Passo 3. Calcule $(\Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1}, \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1})$.
  Monte as matrizes: $\boldsymbol{M}_{11}$ $\boldsymbol{M}_{12}, \boldsymbol{M}_{21}$, $\boldsymbol{M}_{22}$ e os resíduos $\boldsymbol{R}^i$ e $\boldsymbol{S}^i$ a partir das Eqs. (2.30) ou (3.30).
  Resolva o sistema incremental:
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1} \\ \Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^i \\ \boldsymbol{S}^i \end{bmatrix}$$
  first-damping $:= 1$,
Passo 4. Amortecimento da solução:
  $\boldsymbol{U}_h^{i+1} := \boldsymbol{U}_h^i + \omega\Delta\boldsymbol{U}_h^{i+1},$
  $\boldsymbol{P}_h^{i+1} := \boldsymbol{P}_h^i + \omega\Delta\boldsymbol{P}_h^{i+1},$
  calcule o resíduo $(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})$.
Passo 5. Atualização do fator de amortecimento ω.
  Se $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| < \|(\boldsymbol{R}^i, \boldsymbol{S}^i)\|$ ou $\omega \leqslant c_1\omega_{min}$, então
    Se $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| < \|(\boldsymbol{R}^i, \boldsymbol{S}^i)\|$ e *first-damping* $= 1$, então
      $\omega_{max} := min\{1, c_1\omega_{max}\},$
      $\omega := min\{\omega_{max}, c_2\omega\},$
    fim se
  senão
    $\omega := max\{\omega_{min}, \omega/2\},$
    Se *first-damping=1*, então
      $\omega_{max} := max\{\omega_{min}, c_3\omega_{max}\},$
      first-damping $:= 0$,
    fim se
    retorne ao **Passo 4** para amortecer a solução,
  fim se
Passo 6. Critério de parada.
  Se $i < i_{max}$ e $\|(\boldsymbol{R}^{i+1}, \boldsymbol{S}^{i+1})\| > tol_{res}\|(\boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{S}^0)\|$, então
    $i = i + 1$ e retorne ao **Passo 3**,
  senão **PARE**.

resolução de sistemas lineares. No entanto, elas são condicionalmente estáveis e são restritos por um tamanho de intervalo de tempo crítico. Levando em consideração a natureza implícita da pressão nos escoamentos incompressíveis, um esquema de integração no tempo totalmente explícito não é recomendável pois, o intervalo de tempo crítico associado seria demasiadamente pequeno. Uma alternativa aos métodos explícitos consiste em discretizar o tempo por diferenças finitas centradas originando no algoritmo preditor corretor a qual é linear, implícito e de passo único (HUGHES; LIU; BROOKS, 1979).

4.4.1 Algoritmo preditor corretor

Para a resolução dos sistemas de equações diferenciais algébricas dadas pelas Eqs. (2.29) e (3.29) gerados a partir das formulações SUPG/PSPG e multiescalas respectivamente, utilizamos o algoritmo preditor corretor com base na família dos métodos implícitos, apresentado em (FRANCA; FREY, 1992). Seja Δt o passo de tempo, n_{max} o número máximo de passos no tempo, tol_{temp} a tolerância temporal, i_{max} o número máximo de iterações de correção, tol_{corr} a tolerância da correção e α o parâmetro do algoritmo de integração no tempo que controla a aproximação da derivada temporal $\dot{\boldsymbol{U}}_h$. Seguindo o procedimento descrito em (FRANCA; FREY, 1992) obtém-se os algoritmos de integração no tempo para a formulação SUPG/PSPG (ver Algoritmo 4) e para as formulações multiescalas (ver Algoritmo 5).

Os algoritmos apresentados tem como principais características a predição explícita (ver **Passo 2.**) e a correção implícita, na qual resulta em um sistema linearizado pelo método de Picard (ver **Passo 3.**). Através do parâmetro α, podemos selecionar a estratégia de predição: tomando $\alpha = 0$ obtemos o método de Euler progressivo, para $\alpha = 0,5$ o método de Crank-Nicolson e, finalmente, para $\alpha = 1$ teremos o método de Euler regressivo. No presente trabalho adota-se $\alpha = 0,5$, o que leva a um método de segunda ordem de precisão, em relação ao tamanho do passo de tempo Δt, denominado de regra trapezoidal (ALIABADI; TEZDUYAR, 1995). A estabilidade dos algoritmos preditor corretor são incondicionalmente estável apenas para o caso deste ser utilizado para a resolução da equação de convecção-difusão linear com coeficientes constantes. No caso das equações de Navier-Stokes, a estabilidade incondicional não é garantida (SHAKIB; HUGHES; JOHAN, 1991).

Para os critérios de parada, tanto do processo de linearização (ver **Passo 4.**) quanto para a marcha temporal (ver **Passo 5.**) foi utilizada a norma Euclidiana dos vetores analisados.

Algoritmo 4: Preditor corretor: SUPG/PSPG

Passo 1. Inicialize: $n := 0$, $i := 0$ e a solução $(\boldsymbol{U}_h^{n,i}, \boldsymbol{P}_h^{n,i}, \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n,i})$
(n é o passo de tempo e i é a iteração de multicorreção)

Passo 2. Fase de predição.

$$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{U}_h^{n,i} + \Delta t(1-\alpha)\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n,i},$$
$$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{P}_h^{n,i},$$

Passo 3. Fase de correção.

Monte as matrizes: $\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{G}^*$ e $(\boldsymbol{G}^T)^*$ conforme Eq. (2.29).

$$\boldsymbol{M}^* := \boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_{\delta} + \alpha\Delta t\bigg(\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{N}_{\delta}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_{\theta}\bigg),$$
$$\boldsymbol{G}^* := \boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_{\delta},$$
$$(\boldsymbol{G}^T)^* := \boldsymbol{M}_{\varphi} + \alpha\Delta t\bigg(\boldsymbol{N}_{\varphi}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{G}_{hh}^T\bigg),$$

Monte os resíduos $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ conforme Eq. (2.29).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{n+1,i} = \boldsymbol{F}_{hh}^{n+1} + \boldsymbol{F}_{\delta}^{n+1} - \big[\big[\boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_{\delta}\big]\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \big[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{N}_{\delta}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i})\big]\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} \\ + \big[\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}_{\theta}\big]\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} - \big[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_{\delta}\big]\boldsymbol{P}_h^{n+1,i}\big],\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{S}^{n+1,i} = \boldsymbol{F}_{\varphi}^{n+1} - \big[\boldsymbol{M}_{\varphi}\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \big[\boldsymbol{G}_{hh}^T + \boldsymbol{N}_{\varphi}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i})\big]\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} + \boldsymbol{G}_{\varphi}\boldsymbol{P}_h^{n+1,i}\big],$$

Resolva o sistema incremental:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^* & -\boldsymbol{G}^* \\ (\boldsymbol{G}^T)^* & \boldsymbol{G}_{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1} \\ \Delta\boldsymbol{P}_h^{n+1,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{n+1,i} \\ \boldsymbol{S}^{n+1,i} \end{bmatrix}$$

Corrija a solução.

$$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i+1} = \boldsymbol{U}_h^{n+1,i} + \alpha\Delta t\Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1},$$
$$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1} = \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1},$$
$$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i+1} = \boldsymbol{P}_h^{n+1,i} + \Delta\boldsymbol{P}_h^{n+1,i+1},$$

Passo 4. Decisão da correção.

Se $i < i_{max}$ e $\|\Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1}\| > tol_{corr}\|\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1}\|$, então
$i = i + 1$ e retorne ao **Passo 3**,
senão
$i_{max} := i$ e $i := 0$,
$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{U}_h^{n+1,i_{max}}$,
$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} := \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i_{max}}$,
$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{P}_h^{n+1,i_{max}}$.
fim se

Passo 5. Decisão do processo temporal.

Se $n < n_{max}$ e $\|\Delta\boldsymbol{U}_h^{n+1}\| > tol_{temp}\|\boldsymbol{U}_h^{n+1}\|$, então
$n = n + 1$ e retorne ao **Passo 2**,
senão **PARE**.

Algoritmo 5: Preditor corretor: NSGS-NS

Passo 1. Inicialize: $n := 0$, $i := 0$ e a solução $(\boldsymbol{U}_h^{n,i}, \boldsymbol{P}_h^{n,i}, \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n,i})$
(n é o passo de tempo e i é a iteração de multicorreção)

Passo 2. Fase de predição.

$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{U}_h^{n,i} + \Delta t(1-\alpha)\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n,i}$,
$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{0}$,
$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{P}_h^{n,i}$,

Passo 3. Fase de correção.

Calcule a viscosidade artificial $\delta_B(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}, \boldsymbol{P}_h^{n+1,i})$ conforme Eqs. (3.35) ou (3.36).
Monte as matrizes: $\boldsymbol{M}^*, \boldsymbol{G}^*$ e $(\boldsymbol{G}^T)^*$ conforme Eq. (3.29).

$$\boldsymbol{M}^* := \boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_\delta^m + \alpha\Delta t\Big(\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{N}_\delta^m(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{K}_{hh} + \boldsymbol{L}_\theta\Big),$$

$$\boldsymbol{G}^* := \boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta^m,$$

$$(\boldsymbol{G}^T)^* := \boldsymbol{M}_\varphi^m + \alpha\Delta t\Big(\boldsymbol{N}_\varphi^m(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{G}_{hh}^T\Big),$$

Monte os resíduos $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ conforme Eq. (3.29).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{n+1,i} = \boldsymbol{F}_{hh}^{n+1} + \boldsymbol{F}_\delta^m - \Big[\big[\boldsymbol{M}_{hh} + \boldsymbol{M}_\delta^m\big]\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \big[\boldsymbol{N}_{hh}(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{N}_\delta^m(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i})\big]\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} \\ + \big[\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}_\theta\big]\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} - \big[\boldsymbol{G}_{hh} + \boldsymbol{G}_\delta^m\big]\boldsymbol{P}_h^{n+1,i}\Big],\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}^{n+1,i} = \boldsymbol{F}_\varphi^m - \big[\boldsymbol{M}_\varphi^m\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \boldsymbol{G}_{hh}^T\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} + \boldsymbol{N}_\varphi^m(\boldsymbol{U}_h^{n+1,i}) + \boldsymbol{G}_\varphi^m\boldsymbol{P}_h^{n+1,i}\big],$$

Resolva o sistema incremental:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}^* & -\boldsymbol{G}^* \\ (\boldsymbol{G}^T)^* & \boldsymbol{G}_\varphi^m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} \\ \Delta\boldsymbol{P}_h^{n+1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{n+1,i} \\ \boldsymbol{S}^{n+1,i} \end{bmatrix}$$

Corrija a solução.

$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i+1} = \boldsymbol{U}_h^{n+1,i} + \alpha\Delta t\Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i}$,
$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1} = \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} + \Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i}$,
$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i+1} = \boldsymbol{P}_h^{n+1,i} + \Delta\boldsymbol{P}_h^{n+1,i}$,

Passo 4. Decisão da correção.

Se $i < i_{max}$ e $\|\Delta\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i}\| > tol_{corr}\|\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i+1}\|$, então
$i = i + 1$ e retorne ao **Passo 3**,
senão
$i_{max} := i$ e $i := 0$,
$\boldsymbol{U}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{U}_h^{n+1,i_{max}}$,
$\dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i} := \dot{\boldsymbol{U}}_h^{n+1,i_{max}}$,
$\boldsymbol{P}_h^{n+1,i} := \boldsymbol{P}_h^{n+1,i_{max}}$.
fim se

Passo 5. Decisão do processo temporal.

Se $n < n_{max}$ e $\|\Delta\boldsymbol{U}_h^{n+1}\| > tol_{temp}\|\boldsymbol{U}_h^{n+1}\|$, então
$n = n + 1$ e retorne ao **Passo 2**,
senão **PARE**.

5 Experimentos numéricos

Este capítulo apresenta quatro experimentos numéricos para avaliar as formulações de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes apresentadas neste trabalho: problema com solução exata suave, escoamento ao redor de um cilindro circular, escoamento com alargamento de canal e escoamento no interior de uma cavidade unitária. Primeiramente apresentamos os escoamentos na condição estacionária e na sequência mostramos a evolução no tempo do escoamento no interior de uma cavidade unitária e o escoamento ao redor de um cilindro circular. Os últimos três exemplos são amplamente estudados ao longo de décadas de pesquisas na área de dinâmica dos fluidos computacional, consistindo desta forma, em excelentes testes de verificação. Os resultados obtidos utilizando os métodos de estabilização multiescala VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS são comparados com as respectivas soluções obtidas pelo método SUPG/PSPG e/ou soluções de referência apresentadas na literatura.

Nestes exemplos, os métodos foram submetidos a diferentes condições definidas através do número de *Reynolds* do escoamento, calculado a partir da seguinte expressão:

$$Re = \frac{\text{forças inerciais}}{\text{forças viscosas}} = \frac{\rho \boldsymbol{u}_\infty L_\infty}{\mu} \tag{5.1}$$

onde $\boldsymbol{u}_\infty$ e L_∞ são a velocidade e comprimento característicos de cada problema.

As formulações numéricas variacionais apresentadas nos capítulos anteriores resultam em um sistema algébrico de equações diferenciais ordinárias não lineares. As matrizes globais provenientes dessas formulações têm uma enorme esparsidade e seus coeficientes não nulos não são dispostos uniformemente. Assim, são utilizadas estratégias de armazenamentos para reduzir o consumo desnecessário de memória e o número de operações de ponto flutuante. Para o método de elementos finitos, destacam-se o armazenamento elemento por elemento (EBE)(HUGHES, 1987), aresta por aresta (EDE)(CATABRIGA, 2000; ELIAS, 2003) e linhas esparsas comprimidas (CSR)(SAAD, 2003). Dentre às várias estratégias de armazenamento, utilizaremos a estrutura CSR. Nos experimentos que apresentam dificuldades no processo de convergência dos sistemas resultantes, ou seja, quando o número de iterações lineares extrapolam o valor máximo pré definido, precondicionamos o sistema com o precondicionador ILUP, onde o nível de preenchimento P é definido de acordo com a necessidade de cada problema.

O código proposto para as equações de Navier-Stokes foi implementado em linguagem C no contexto da biblioteca de elementos finitos em constante desenvolvimento no Laboratório de Otimização e Modelagem Computacional (UFES)[1], denominada FEMcodes.

[1] https://github.com/mod-comp-ufes/FEM_CODES

Os testes foram realizados em uma plataforma computacional com sistema operacional GNU Linux Ubuntu, processador Intel(R) Xeon(R) Silver 4114 CPU @ 2.20GHz 10 núcleos (20 threads) com memória RAM de 160Gb. O domínio computacional é discretizado considerando a malha gerada pelo software Gmsh[2], a visualização dos resultados pelo software Paraview[3] e os gráficos com os perfis e resíduos são plotados no Gnuplot[4].

5.1 Escoamentos em regime estacionário

Nesta seção apresentamos os quatro experimentos no estado estacionário. Para que todos os experimentos sejam analisados sobre a mesma perspectiva, os parâmetros dos processos de linearização e de resolução dos sistemas lineares são definidos de acordo com o experimento do escoamento estacionário na cavidade unitária com número de Reynolds elevado, $Re = 20000$. Para o processo não linear adotamos uma tolerância relativa nas iterações de Picard igual a $tol_{nl} = 5 \times 10^{-4}$ e um número máximo de iterações igual a $itmax_{nl} = 1000$. A princípio todos os experimentos serão considerados com o fator de amortecimento no processo de linearização. Os sistemas lineares resultantes são resolvidos pelo método GMRES com 45 vetores para o reiniciamento, um número máximo de ciclos igual a $itmax_l = 1000$ e uma tolerância igual a $tol_l = 10^{-6}$.

5.1.1 Problema com solução exata suave

Para o primeiro experimento numérico, utilizamos um exemplo com solução analítica conhecida. O experimento foi introduzido em (JOHNSON; PITKÄRANTA, 1982) para o escoamento de Stokes e também estudado em (CAREY; KRISHNAN, 1982; VALLI, 2001). O principal interesse deste experimento é examinar as taxas de convergência, nas normas dos espaços $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, dos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS comparando-os com as estimativas obtidas em (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; MASUD; KHURRAM, 2006; PETERSON; LINDSAY; KONG, 2018).

A solução analítica para o problema é dada por

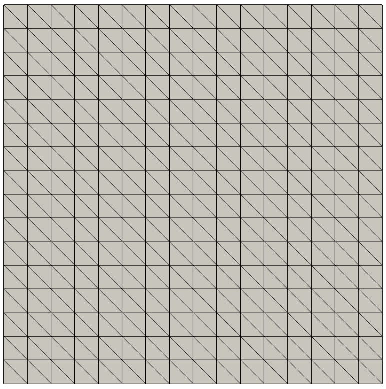
$$u_x(x,y) = ax^2(1-x)^2(2y - 6y^2 + 4y^3), \tag{5.2}$$

$$u_y(x,y) = ay^2(1-y)^2(-2x + 6x^2 - 4x^3), \tag{5.3}$$

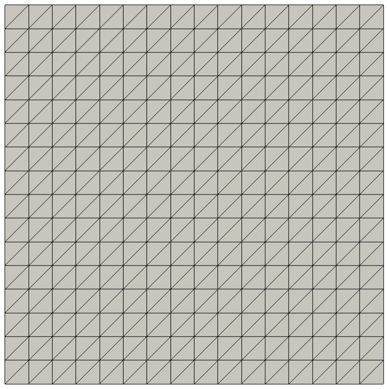
$$p(x,y) = x^2 - y^2, \tag{5.4}$$

definida no quadrado unitário $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ com viscosidade cinemática $\nu = 0,01$. A velocidade máxima é $u_{max} = 1,2 \times a \times 10^{-2}$, a qual corresponde a um escoamento com $Re = 1,2 \times a$. Abordamos os escoamentos com $Re = 12$ e $Re = 120$, correspondentes a

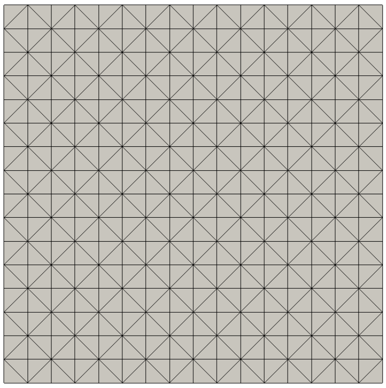
[2] http://www.gmsh.info
[3] https://www.paraview.org
[4] http://www.gnuplot.info



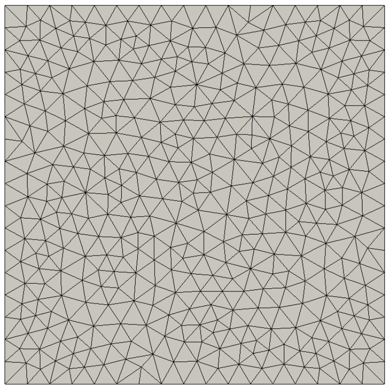
(a) Estruturada à esquerda



(b) Estruturada à direita



(c) Estruturada alternada



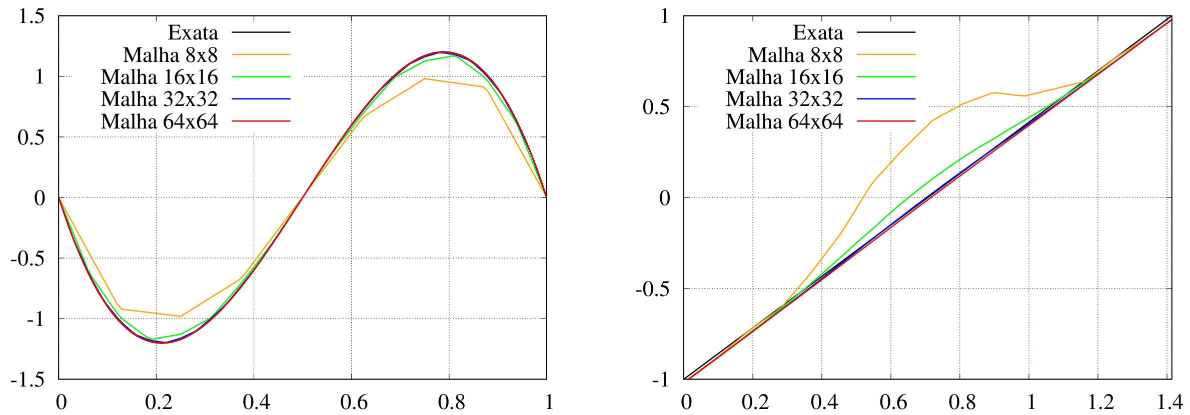
(d) Não estruturada

Figura 5.1 – Tipos de malhas de elementos finitos utilizadas no experimento com solução exata suave.

$a = 10$ e $a = 100$. O campo de velocidade possui divergência nula e satisfaz a condição de não deslizamento, $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, na fronteira do domínio $\partial\Omega$. O campo de pressão é prescrito apenas no ponto inferior esquerdo do domínio. A força de corpo $\boldsymbol{f}$ é construída considerando a solução exata aplicada na Eq. (2.7) para o caso estacionário.

As soluções aproximadas são calculadas para uma sequência de doze malhas estruturadas e quatro não estruturadas. As malhas estruturadas contém $8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32$ e 64×64 células com dois elementos triangulares lineares em cada célula, ou seja, malhas com $128, 512, 2048$ e 8192 elementos, respectivamente. As malhas estruturadas são divididas em três conjuntos segundo a orientação da diagonal das células que compõem os triângulos, com orientações para a esquerda, direita e alternada (ver Figs. 5.1a - 5.1c). As malhas não estruturadas são construídas com $8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32$ e 64×64 subdivisões no contorno, gerando malhas com $228, 782, 2830$ e 11098 elementos, respectivamente (ver Figura 5.1d).

A Fig. 5.2 apresenta os perfis da velocidade na direção vertical, u_y, sobre o eixo horizontal $y = 0,5$ e valores da pressão sobre a reta $y = 1 - x$, com $Re = 120$, obtidos pelo método NSGS2-NS utilizando 4 malhas estruturadas alternadas com refinamentos diferentes. Observamos que à medida que as malhas vão sendo refinadas as soluções aproximadas obtidas se aproximam da solução exata. Ressaltamos que os comportamentos das aproximações para os métodos SUPG/PSPG, VMS-B e NSGS1-NS são similares a aproximação do NSGS2-NS apresentados na Fig. 5.2.



(a) Velocidade vertical sobre a reta horizontal $y = 0,5$

(b) Pressão sobre a reta $y = 1 - x$

Figura 5.2 – Problema com solução exata suave, $Re = 120$ e malha estruturada alternada. Método NSGS2-NS.

O estudo das taxas de convergência está dividido em dois conjuntos de testes. O primeiro conjunto compara as soluções obtidas pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS para os escoamentos com $Re = 12$ e $Re = 120$ sobre as malhas com orientação alternada. O segundo conjunto compara as soluções obtidas pelos métodos SUPG/PSPG e NSGS2-NS para o escoamento com $Re = 12$ sobre as malhas com orientação à esquerda, à direita e não estruturada.

Os erros da velocidade na normas L^2 e H^1 e da pressão nas normas L^2 e seminorma de H^1 associados aos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS na malha estruturada alternada são dados nas Tabs. 5.1-5.8, para $Re = 12$ e $Re = 120$. Podemos observar que os erros obtidos possuem a mesma ordem de grandeza, no mesmo nível de refinamento para todos os métodos estudados considerando o mesmo número de Reynolds.

Tabela 5.1 – Solução exata suave com Re=12. Erro da velocidade na norma L^2.

$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{L^2}$	SUPG/PSPG	VMS-B	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	1,251469E-02	1,331667E-02	1,331667E-02	1,331667E-02
16×16	3,124635E-03	3,336461E-03	3,336461E-03	3,336461E-03
32×32	7,887612E-04	8,166103E-04	8,166103E-04	8,166103E-04
64×64	2,186396E-04	2,170170E-04	2,170170E-04	2,170170E-04

Os gráficos dos erros associados aos métodos SUPG/PSPG e NSGS2-NS são plotados em relação ao tamanho do parâmetro de malha h em uma escala log-log, (ver Figs. 5.3a-

Tabela 5.2 – Solução exata suave com Re=12. Erro da velocidade na norma H^1.

$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	2,043626E-01	2,036071E-01	2,036071E-01	2,036071E-01
16×16	9,681367E-02	9,997376E-02	9,997376E-02	9,997376E-02
32×32	4,777061E-02	4,875378E-02	4,875378E-02	4,875378E-02
64×64	2,380770E-02	2,406984E-02	2,406984E-02	2,406984E-02

Tabela 5.3 – Solução exata suave com Re=12. Erro da pressão na norma L^2.

$\|p-p_h\|_{L^2}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	1,461037E-02	2,593866E-03	2,593866E-03	2,593866E-03
16×16	4,299397E-03	1,026655E-03	1,026655E-03	1,026655E-03
32×32	1,125135E-03	4,076831E-04	4,076831E-04	4,076831E-04
64×64	2,832198E-04	1,546165E-04	1,546165E-04	1,546165E-04

Tabela 5.4 – Solução exata suave com Re=12. Erro da pressão na seminorma de H^1.

$\|p-p_h\|_{H^1}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	1,084610E-01	1,153794E-01	1,153794E-01	1,153794E-01
16×16	5,241237E-02	7,535605E-02	7,535605E-02	7,535605E-02
32×32	2,599995E-02	5,384215E-02	5,384215E-02	5,384215E-02
64×64	1,311851E-02	3,814288E-02	3,814288E-02	3,814288E-02

Tabela 5.5 – Solução exata suave com Re=120. Erro da velocidade na norma L^2.

$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{L^2}$	SUPG/PSPG	VMS-B	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	7,392732E-02	1,571745E-01	1,532116E-01	1,533182E-01
16×16	2,164013E-02	3,593998E-02	3,593272E-02	3,595485E-02
32×32	6,508573E-03	8,435215E-03	8,422680E-03	8,423542E-03
64×64	1,841692E-03	2,169498E-03	2,143612E-03	2,143617E-03

Tabela 5.6 – Solução exata suave com Re=120. Erro da velocidade na norma H^1.

$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{H^1}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	1,900411E+00	2,082651E+00	2,099403E+00	2,102507E+00
16×16	9,603184E-01	1,011415E+00	1,017021E+00	1,017358E+00
32×32	4,786414E-01	4,906536E-01	4,920262E-01	4,920460E-01
64×64	2,382174E-01	2,411229E-01	2,413534E-01	2,413541E-01

Tabela 5.7 – Solução exata suave com Re=120. Erro da pressão na norma L^2.

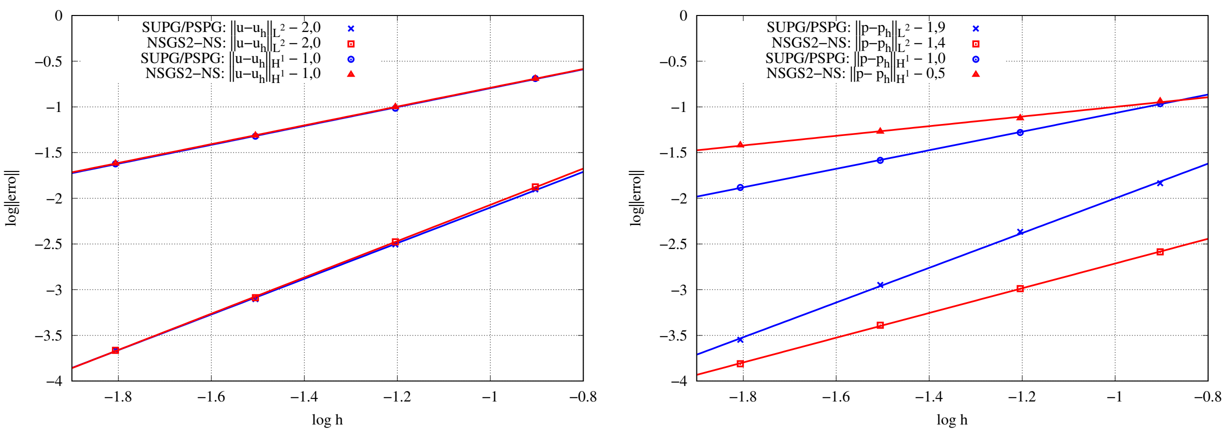
$\|p-p_h\|_{L^2}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	5,086780E-02	1,680263E-01	1,644667E-01	1,645091E-01
16×16	1,863283E-02	4,099906E-02	4,201394E-02	4,206326E-02
32×32	5,948865E-03	1,054669E-02	1,075334E-02	1,075581E-02
64×64	1,648179E-03	3,253932E-03	3,253558E-03	3,253700E-03

5.4b), onde as taxas de convergência são apresentadas na legenda dos gráficos. Estudo de convergência de métodos estabilizados do tipo Petrov-Galerkin para o problema de

Tabela 5.8 – Solução exata suave com Re=120. Erro da pressão na seminorma de H^1.

$\|p - p_h\|_{H^1}$	SUPG/PSPG	VMS	NSGS1-NS	NSGS2-NS
8×8	3,543222E-01	1,047016E+00	1,056180E+00	1,066789E+00
16×16	1,371065E-01	5,879440E-01	6,356594E-01	6,385778E-01
32×32	6,473709E-02	4,753284E-01	5,147286E-01	5,153058E-01
64×64	3,694885E-02	3,595041E-01	3,804546E-01	3,805261E-01

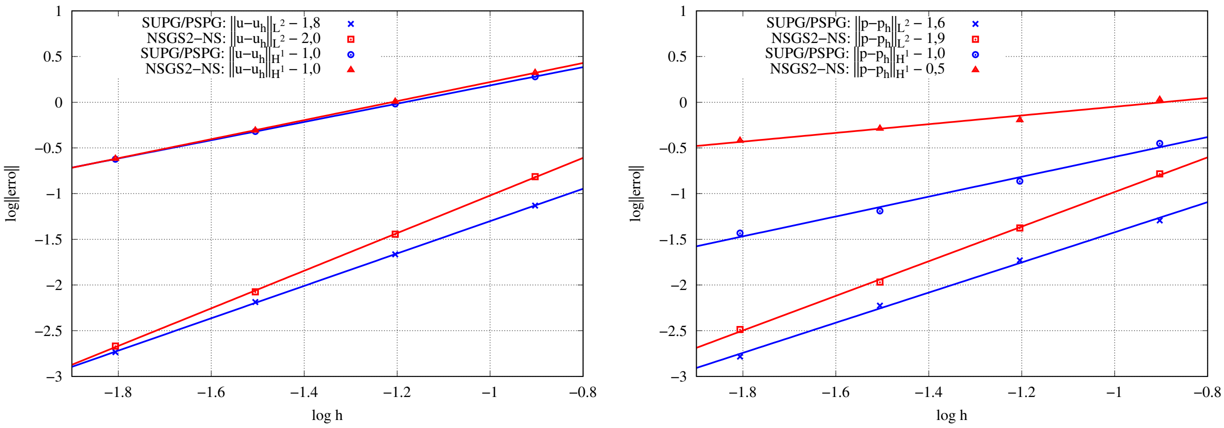
Stokes é apresentado em (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986). Utilizando pares de espaços de funções Q1/Q1 para a velocidade e pressão, Hughes, Franca e Balestra (1986) mostraram que o erro da velocidade converge com taxa $O(h^2)$ na norma L^2 e que o erro da pressão converge com taxas $O(h^{3/2})$ na norma L^2 e $O(h^{1/2})$ na semi norma de H^1. Para as equações de Navier-Stokes e espaços de funções lineares por parte no espaço e tempo para a velocidade e pressão, Hansbo e Szepessy (1990) mostram taxas $O(h^{3/2})$ para o erro da velocidade na norma L^2 e $O(h^{1/2})$ para o erro da pressão na seminorma de H^1. Experimentos numéricos para as equações de Navier-Stokes apresentados em (MASUD; KHURRAM, 2006) para uma formulação variacional multiescalas e em (PETERSON; LINDSAY; KONG, 2018) para a formulação SUPG/PSPG, obtêm taxas $O(h^2)$ e $O(h^1)$ para o erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 e taxas $O(h^1)$ e $O(h^{1/2})$ para o erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1. Observamos que as taxas obtidas pelos métodos NSGS2-NS e SUPG/PSPG estão em concordância (ou superiores) com as referências para os dois casos apresentados, $Re = 12$ e $Re = 120$.



(a) Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 (b) Erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1

Figura 5.3 – Problema com solução exata, $Re = 12$ e malha estruturada alternada.

As Tabs. 5.9 e 5.10 apresentam os desempenhos computacionais para os quatro métodos sobre a malha alternada para $Re = 12$ e $Re = 120$, respectivamente, onde $(\#INL)$ é o número de iterações não lineares e $(\#IL)$ é número de iterações lineares do método GMRES. Para o escoamento com $Re = 12$ observamos que os métodos multiescalas demandam mais iterações lineares, para atingirem a convergência do sistema linear, que o



(a) Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 (b) Erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1

Figura 5.4 – Problema com solução exata, $Re = 120$ e malha estruturada alternada.

método SUPG/PSPG. Por outro lado, para $Re = 120$ os métodos multiescalas apresentam um desempenho computacional levemente melhor que o SUPG/PSPG, principalmente para a malha mais refinada. Para estes experimentos utilizamos o precondicionador ILU0. Sem a utilização do precondicionador, os quatro métodos atingiram o número máximo de iterações lineares na resolução do sistema linear, para a malha mais refinada. Em todos os experimentos não houve amortecimento na solução durante o processo de linearização, ou seja, o fator de amortecimento ω, dentro do processo de linearização, permaneceu em seu valor máximo, $\omega_{max} = 1.0$.

Tabela 5.9 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas alternadas. Desempenho computacional.

$Re = 12$	SUPG/PSPG		VMS		NSGS1-NS		NSGS2-NS	
	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$
8×8	5	65	3	53	3	53	3	53
16×16	2	45	3	82	3	82	3	82
32×32	2	86	2	109	2	109	2	109
64×64	2	353	2	499	2	499	2	499

Tabela 5.10 – Solução exata suave com $Re = 120$ e malhas alternadas. Desempenho computacional.

$Re = 120$	SUPG/PSPG		VMS		NSGS1-NS		NSGS2-NS	
	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$	$\#INL$	$\#IL$
8×8	20	298	11	187	10	184	10	186
16×16	9	223	8	227	7	204	7	204
32×32	7	335	6	483	6	482	6	482
64×64	6	3545	6	3428	6	3379	6	3229

A fim de comparar o desempenho dos métodos SUPG/PSPG e o método multiescala NSGS2-NS sobre malhas com orientações diferentes, estruturada orientada à esquerda, à direita e não estruturada, vamos considerar o escoamento com $Re = 12$. As Tabs. 5.11-5.16 apresentam os erros da velocidade e pressão sobre as malhas orientada à esquerda, à direita e não estruturada. Comparando os valores dos erros, tanto para a velocidade quanto para a pressão sobre as diversas malhas observamos que estes mantém a mesma ordem de grandeza quando comparados entre si. Uma vez que as malhas não estruturadas apresentam uma quantidade de elementos maior que as respectivas malhas estruturadas, estas apresentam valores menores para os erros obtidos pelos métodos, SUPG/PSPG e NSGS2-NS, sendo que os erros relativos a uma mesma malha, possuem a mesma ordem de grandeza nos dois métodos. As Figs. 5.5-5.7 apresentam esses erros na escala log-log. Podemos observar que as taxas de convergência, para as diversas malhas, mantém a concordância com as taxas obtidas para os experimentos na malha alternada e com as apresentadas nas referências. Desta forma, podemos concluir que os métodos multiescalas não apresentam influência quanto a orientação da malha para este experimento.

Tabela 5.11 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas orientadas à esquerda. Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1.

Malha à esquerda	$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{L^2}$		$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	1,359863E-02	1,420790E-02	2,105889E-01	2,035685E-01
16×16	3,778936E-03	3,773066E-03	1,012804E-01	1,007505E-01
32×32	9,850794E-04	9,771555E-04	5,008284E-02	5,010873E-02
64×64	2,673497E-04	2,619479E-04	2,498984E-02	2,501608E-02

Tabela 5.12 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas orientadas à direita. Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1.

Malha à direita	$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{L^2}$		$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	1,322431E-02	1,420728E-02	2,085482E-01	2,035639E-01
16×16	3,546416E-03	3,771578E-03	1,009637E-01	1,007463E-01
32×32	9,266553E-04	9,581817E-04	5,002431E-02	5,008490E-02
64×64	2,532957E-04	2,557145E-04	2,498226E-02	2,501224E-02

Tabela 5.13 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas não estruturadas. Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1.

Malha não estruturada	$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{L^2}$		$\lVert \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \rVert_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	6,441040E-03	5,923834E-03	1,493733E-01	1,290260E-01
16×16	2,452231E-03	1,921595E-03	8,632226E-02	7,363277E-02
32×32	5,792629E-04	5,370679E-04	4,054047E-02	3,798235E-02
64×64	1,709771E-04	1,615095E-04	1,949553E-02	1,922847E-02

Tabela 5.14 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas orientada à esquerda. Erro da pressão nas normas L^2 e seminorma de H^1.

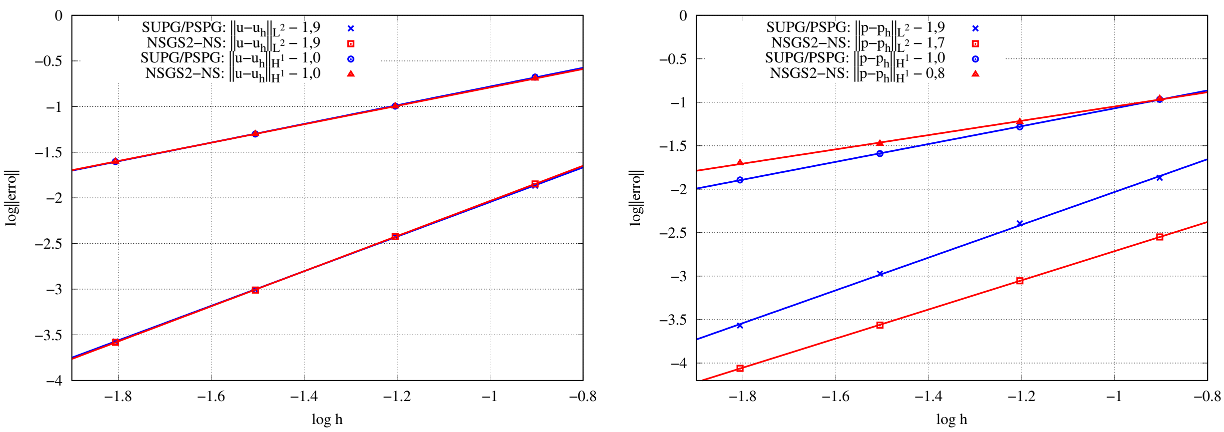
Malha à esquerda	$\|p - p_h\|_{L^2}$		$\|p - p_h\|_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	1,350787E-02	2,821489E-03	1,079944E-01	1,099659E-01
16×16	4,044254E-03	8,845189E-04	5,207198E-02	5,939070E-02
32×32	1,068637E-03	2,730125E-04	2,566080E-02	3,345417E-02
64×64	2,700845E-04	8,693456E-05	1,277861E-02	1,996469E-02

Tabela 5.15 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas orientada à direita. Erro da pressão nas normas L^2 e seminorma de H^1.

Malha à direita	$\|p - p_h\|_{L^2}$		$\|p - p_h\|_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	1,561078E-02	2,454868E-03	1,083367E-01	1,099673E-01
16×16	4,413488E-03	7,899793E-04	5,214992E-02	5,939034E-02
32×32	1,145517E-03	2,520917E-04	2,567094E-02	3,345306E-02
64×64	2,860463E-04	8,483037E-05	1,277993E-02	1,996486E-02

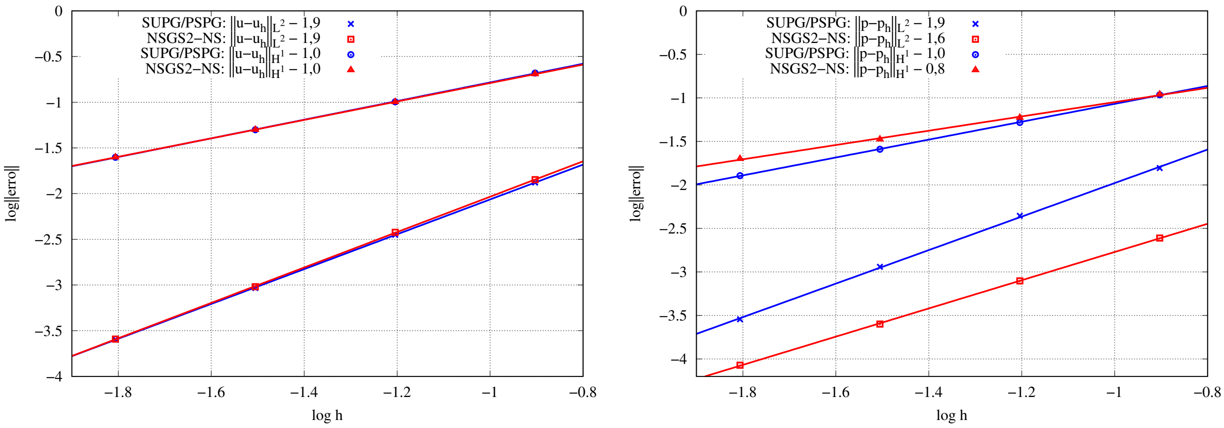
Tabela 5.16 – Solução exata suave com $Re = 12$ e malhas não estruturadas. Erro da pressão nas normas L^2 e seminorma de H^1.

Malha não estruturada	$\|p - p_h\|_{L^2}$		$\|p - p_h\|_{H^1}$	
	SUPG/PSPG	NSGS2-NS	SUPG/PSPG	NSGS2-NS
8×8	8,912326E-03	1,361288E-03	8,928206E-02	9,234441E-02
16×16	3,063875E-03	5,363361E-04	4,930130E-02	5,638121E-02
32×32	8,609827E-04	2,238183E-04	2,571417E-02	3,883727E-02
64×64	2,242943E-04	1,050013E-04	1,360058E-02	3,098259E-02



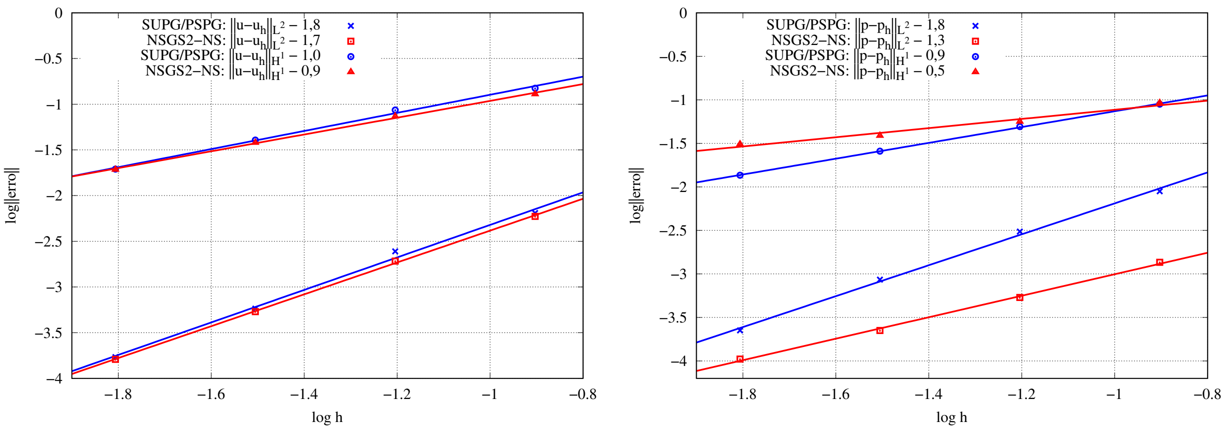
(a) Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 (b) Erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1

Figura 5.5 – Problema com solução exata suave, $Re = 12$ e malha estruturada à esquerda.



(a) Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 (b) Erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1

Figura 5.6 – Problema com solução exata suave, $Re = 12$ e malha estruturada à direita.

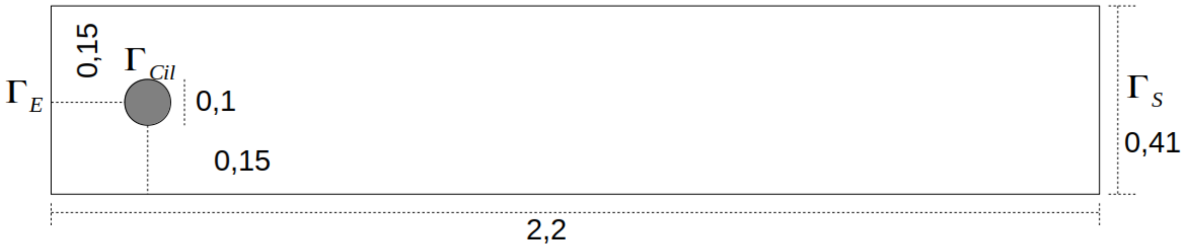


(a) Erro da velocidade nas normas L^2 e H^1 (b) Erro da pressão na norma L^2 e seminorma de H^1

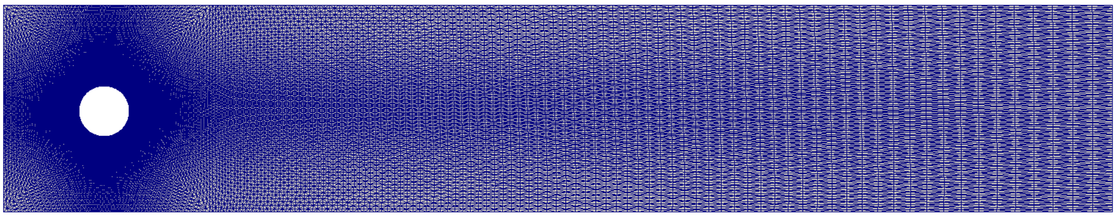
Figura 5.7 – Problema com solução exata suave, $Re = 12$ e malha não estruturada.

5.1.2 Escoamento em torno de um cilindro circular

Neste experimento consideramos o escoamento em um canal bidimensional no domínio $\Omega = [0; 2,2] \times [0; 0,41]$ com um cilindro circular de raio $0,05$ centrado em $(0,2; 0,2)$, também estudado por (SCHÄFER et al., 1996; JOHN, 2016). A Fig. 5.8a apresenta detalhes do domínio computacional e a descrição do problema. Os experimentos foram conduzidos em uma malha conforme a Fig. 5.8b contendo 35656 nós e 70400 elementos sendo mais refinada próxima ao cilindro.



(a)



(b)

Figura 5.8 – Escoamento em torno do cilindro: (a) descrição do problema e (b) malha de elementos finitos.

Na parede superior e inferior do domínio, assim como na fronteira do cilindro Γ_{Cil}, é prescrita a condição de não deslizamento, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. As condições de contorno para a velocidade na entrada, Γ_E, do domínio é especificada como um fluxo paralelo com componente horizontal parabólico dado por

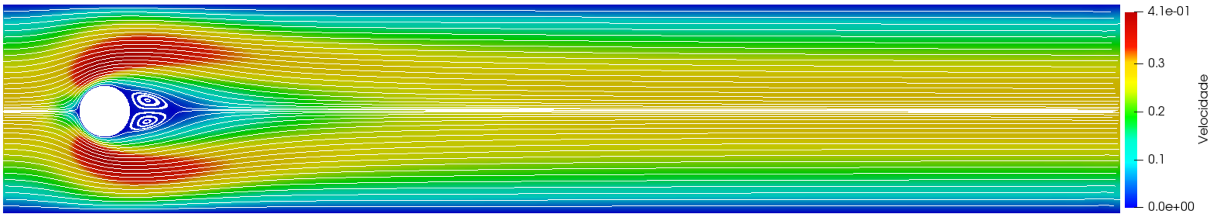
$$\boldsymbol{u}(0; y) = \frac{1}{0,41^2}(1,2y(0,41 - y); 0), \quad 0 \leqslant y \leqslant 0,41.$$

Na saída do domínio, Γ_S, não prescrevemos condição de contorno, deixando o fluxo livre. A velocidade média na entrada do domínio é dada por

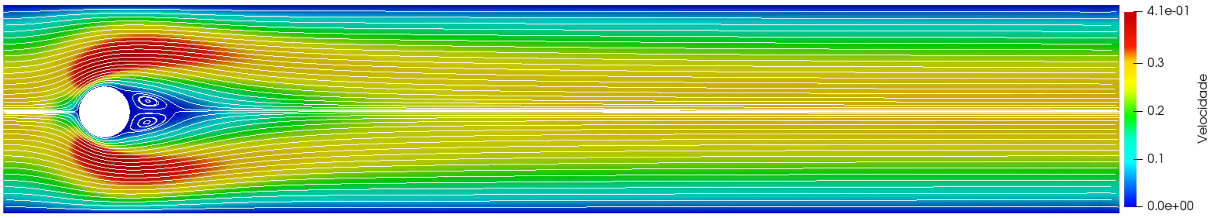
$$U_\infty = \frac{1}{0,41^2} \frac{\int_0^{0,41} 1,2y(0,41 - y)\, dy}{\int_0^{0,41} dy} = \frac{0,41^3}{5(0,41^3)} = 0,2.$$

Lembrando que o número de Reynolds global é representado por (5.1), a viscosidade dinâmica do fluido $\mu = 10^{-3}$, a massa específica $\rho = 1,0$ e o comprimento característico sendo o diâmetro do cilindro $L_\infty = d = 0,1$, o número de Reynolds do escoamento é $Re = 20$. As forças de corpo são nulas, ou seja, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$.

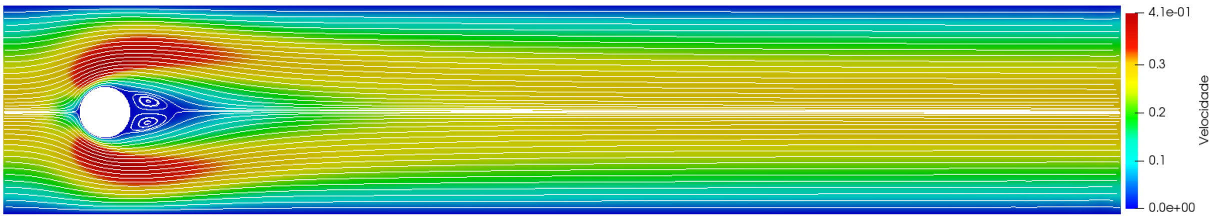
As Figs. 5.9a-5.9d mostram as linhas de corrente para as velocidades obtidos pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS, respectivamente. Os quatro métodos apresentam valores para o campo de velocidade entre 0 e $0,41$, concordando com os valores obtidos em (JOHN; MATTHIES, 2001; JOHN, 2016) que utiliza elementos finitos com funções isoparamétricas de alta ordem satisfazendo a condição de estabilidade inf-sup.



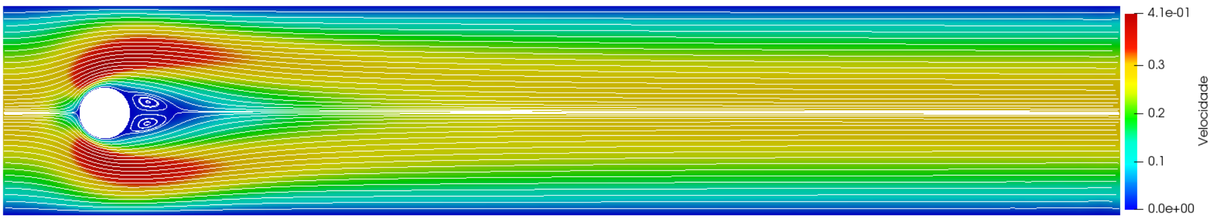
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



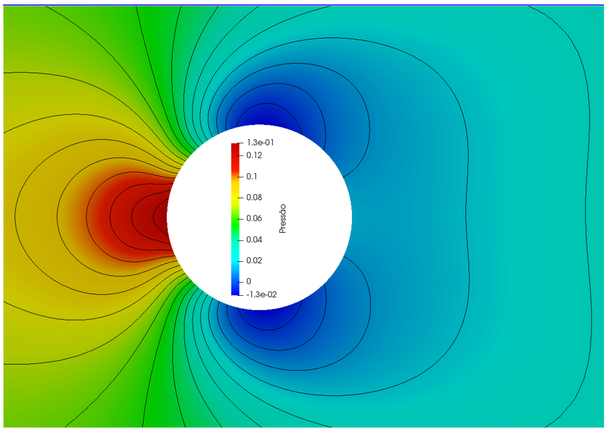
(c) NSGS1-NS



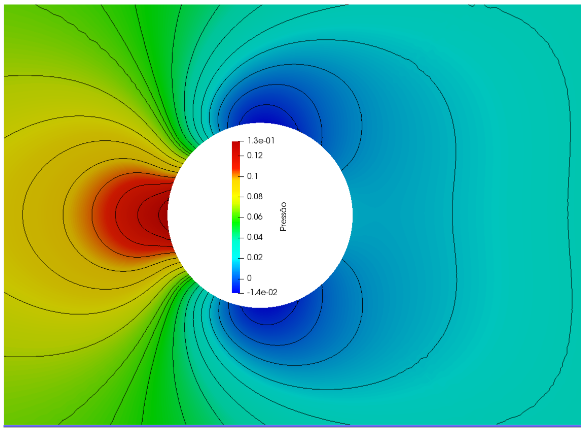
(d) NSGS2-NS

Figura 5.9 – Escoamento em torno do cilindro: linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$.

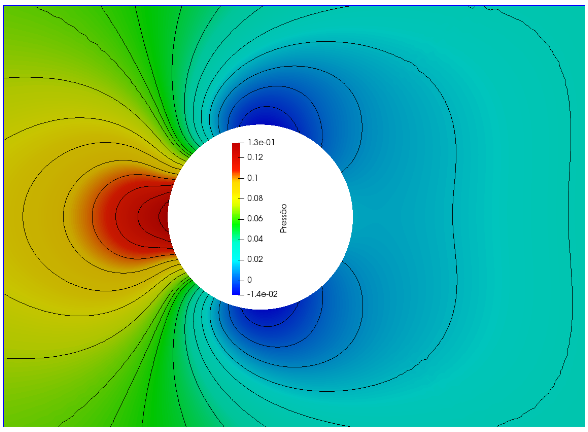
As Figs. 5.10a-5.10d apresentam as isolinhas de pressão obtidas pelos quatro métodos em estudo. Observamos que existe similaridade entre as soluções obtidas, com valores entre $-1,4 \times 10^{-2}$ e $1,3 \times 10^{-1}$ e apresentam boa concordância com as soluções apresentadas em (JOHN; MATTHIES, 2001; JOHN, 2016).



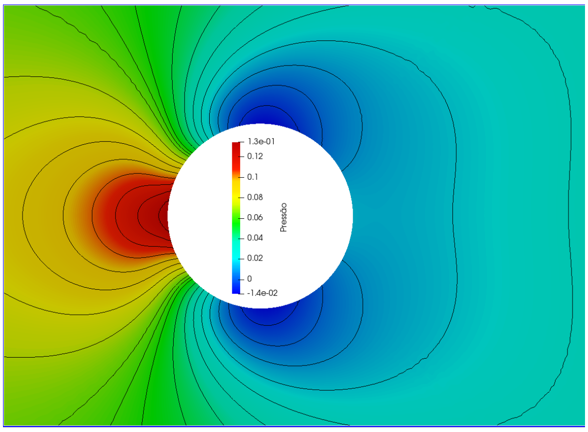
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

Figura 5.10 – Escoamento em torno do cilindro: isolinhas de pressão.

Três medidas de interesse neste experimento para validação da acuidade das aproximações obtidas são a diferença das pressões entre os pontos da frente e de trás do cilindro,

$$\Delta p = p(0,15; 0,2) - p(0,25; 0,2)$$

e os coeficientes de arrasto c_{drag} e de elevação c_{lift} definidos em (JOHN, 2016). Para o escoamento de um fluido incompressível em torno de um cilindro no regime estacionário, sem termo de fonte e com $Re = 20$ estes coeficientes são dados por

$$c_{drag} = -500\left(\int_\Omega \nu\nabla\boldsymbol{u}\colon \nabla\boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega - \int_\Omega p\nabla\cdot\boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega\right),$$

$$c_{lift} = -500\left(\int_\Omega \nu\nabla\boldsymbol{u}\colon \nabla\boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega - \int_\Omega p\nabla\cdot\boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega\right),$$

onde a velocidade $\boldsymbol{u}$ e a pressão p são dadas pela aproximações obtidas. As funções $\boldsymbol{w}_{drag}, \boldsymbol{w}_{lift} \in H^1(\Omega)$ são definidas da forma $\boldsymbol{w}_{drag} = (1;0)^T$ e $\boldsymbol{w}_{lift} = (0;1)^T$ na fronteira do cilindro Γ_{Cil} e $\boldsymbol{w}_{drag} = \boldsymbol{w}_{lift} = \boldsymbol{0}$ nas demais fronteiras $\Gamma\backslash\Gamma_{Cil}$. De maneira análoga ao que foi feito em (JOHN; MATTHIES, 2001) definimos $\boldsymbol{w}_{drag} = (1;0)^T$ e $\boldsymbol{w}_{lift} = (0;1)^T$

para os nós que estão sobre a fronteira do cilindro e $\boldsymbol{w}_{drag} = \boldsymbol{w}_{lift} = \mathbf{0}$ para os demais nós da malha. Na Tab. 5.17 apresentamos os valores de referência e os obtidos pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. Observamos que os métodos multiescalas e o método SUPG/PSPG produzem valores próximos daqueles obtidos pela referência (JOHN, 2016). Análogo ao experimento anterior, podemos concluir que as viscosidades artificiais introduzidas pelos dois métodos NSGS-NS não afetam a acurácia das soluções para o escoamento em torno do cilindro com número de Reynolds $Re = 20$.

A Tab. 5.17 também mostra o desempenho computacional de todos os métodos considerados. Observamos que o método SUPG/PSPG apresenta um desempenho computacional ligeiramente melhor que os métodos multiescala e que os métodos NSGS-NS apresentam um custo computacional um pouco menor que o demandado pelo método VMS-B. Para todos os métodos foi utilizado o precondicionador ILU5 e não houve amortecimento no processo iterativo não linear, ou seja, o coeficiente de amortecimento ω manteve seu valor máximo $\omega_{max} = 1,0$ durante todo o processo.

Tabela 5.17 – Escoamento em torno de um cilindro circular - Acurácia e desempenho computacional.

Método	C_{Drag}	C_{lift}	ΔP	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$
(JOHN, 2016)	5,579535	0,010618	0,117520	–	–	–
SUPG/PSPG	5,589478	0,010586	0,117457	362	7	14,41
VMS-B	5,586922	0,010742	0,119387	472	6	17,39
NSGS1-NS	5,586826	0,010897	0,119390	460	6	16,53
NSGS2-NS	5,586836	0,010895	0,119391	461	6	16,61

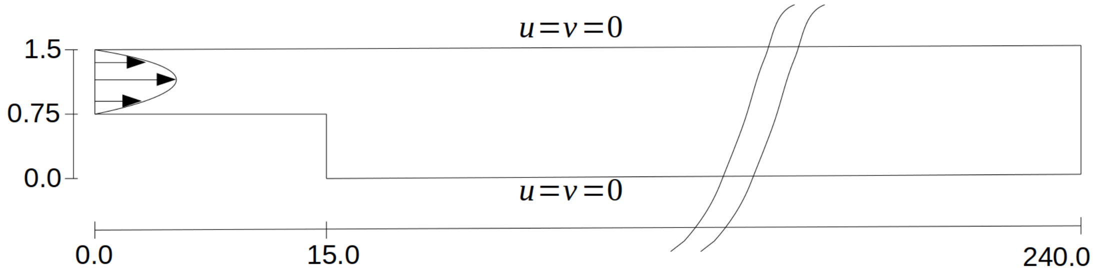
5.1.3 Escoamento com alargamento de canal

O escoamento de um fluido em um canal reto que se abre abruptamente de um lado, conforme ilustrado na Fig. 5.11a, tem sido amplamente estudado no contexto de escoamentos regidos pelas equações de Navier-Stokes (ARMALY et al., 1983; GARTLING, 1990; GRIEBEL; DORNSEIFER; NEUNHOEFFER, 1998; ERTURK, 2008). O fluido entra no domínio com velocidade horizontal e seu comportamento é alterado devido ao alargamento do canal.

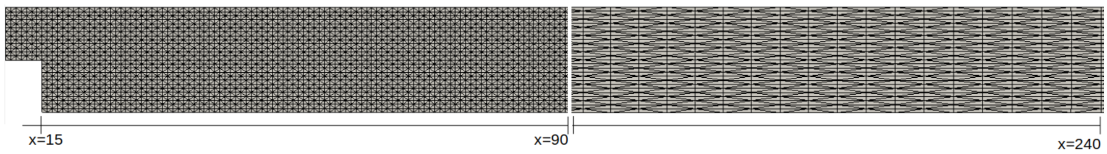
Na entrada do domínio é imposta a condição de contorno do tipo de Dirichlet para o campo de velocidade dado por

$$\boldsymbol{u}(0;y) = \Big(-\frac{32}{3}y^2 + 24y - 12; 0 \Big), \quad 0,75 \leqslant y \leqslant 1,5,$$

que produz uma velocidade máxima de entrada de $u_{max} = 1,5$ e uma velocidade média de entrada de $u_{med} = 1,0$. Na saída do canal é considerada a condição de fluxo livre. Como estamos interessados no comportamento do escoamento próximo ao degrau, para evitar possíveis efeitos do fluxo livre no final do canal, é considerado um domínio de comprimento muito maior do que a largura. A Fig. 5.11b mostra a malha triangular usada em todos os experimentos, com 43286 nós, 83122 elementos e com um refinamento mais acentuado antes de $x = 90$.



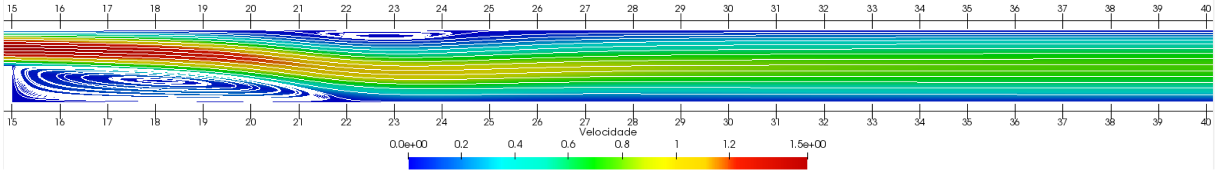
(a)



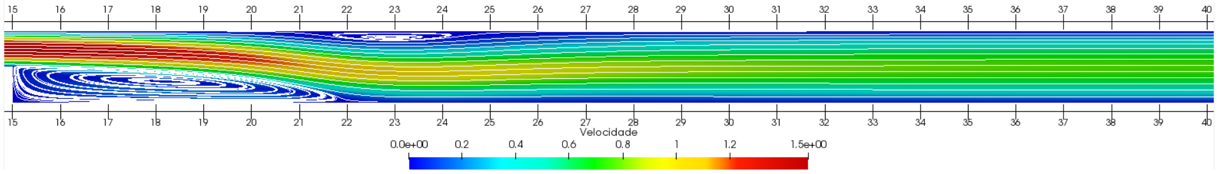
(b)

Figura 5.11 – Descrição do escoamento com alargamento de canal: (a) descrição do problema e (b) detalhes da malha de elementos finitos com 43286 nós e 83122 elementos.

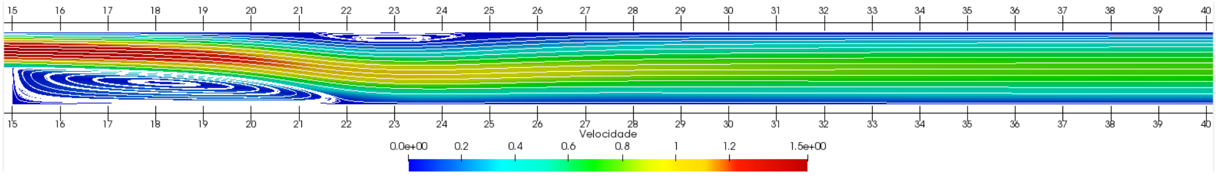
Os contornos das linhas de corrente para a velocidade nas Figs. 5.12-5.14 ilustram as principais características do escoamento para $Re = 500, 800$ e 1200 obtidas pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. As figuras mostram apenas a parte do domínio computacional $15 < x < 40$, pois neste trecho é possível observar as principais características do escoamento. Para $Re = 500$ e 800 não conseguimos notar diferença entre as soluções obtidas pelos quatro métodos em estudo. Porém para o escoamento com $Re = 1200$ (ver Fig. 5.14) podemos observar diferenças nas regiões de recirculação das soluções obtidas pelos métodos SUPG/PSPG e VMS-B quando comparadas com as linhas de corrente resultantes dos métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS.



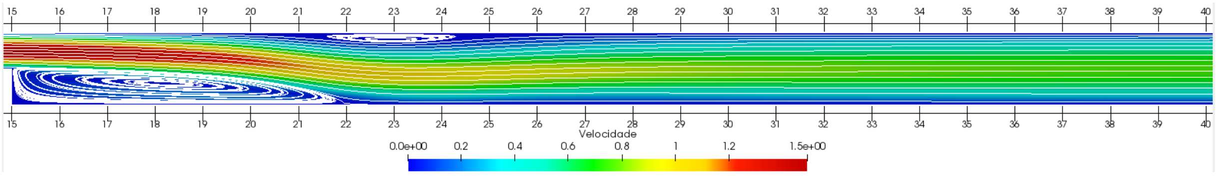
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

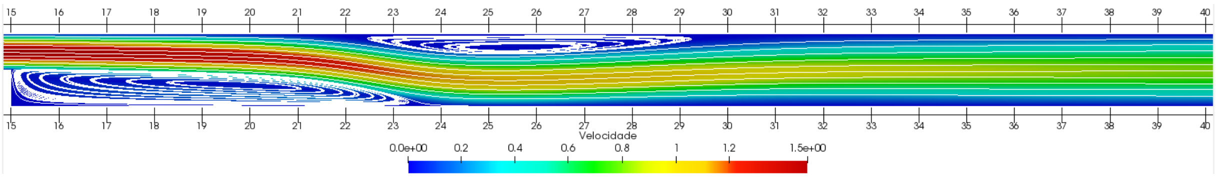


(c) NSGS1-NS

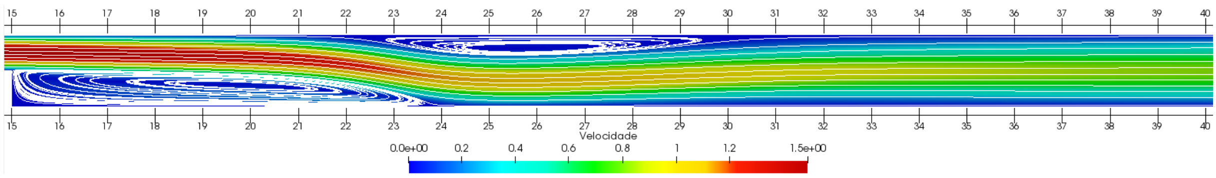


(d) NSGS2-NS

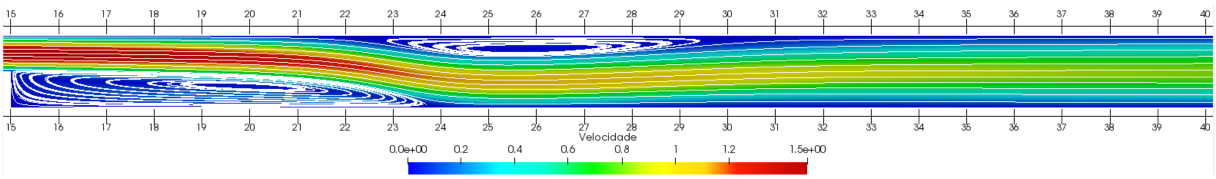
Figura 5.12 – Escoamento com alargamento de canal. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 500$.



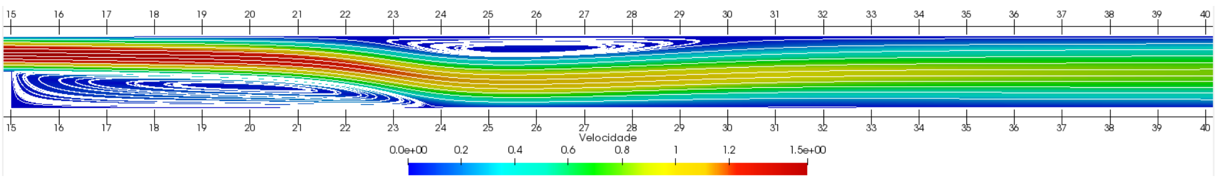
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

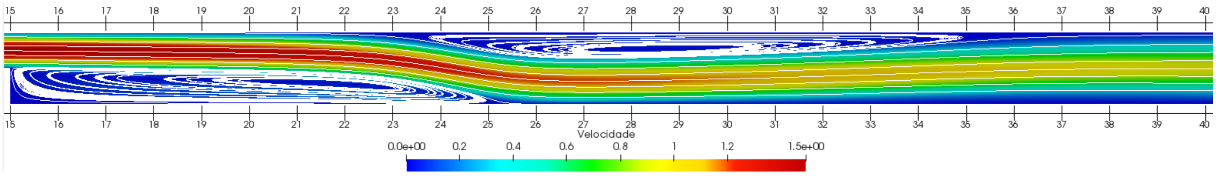


(c) NSGS1-NS

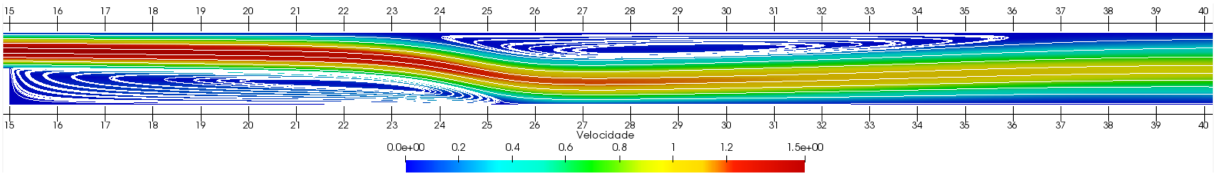


(d) NSGS2-NS

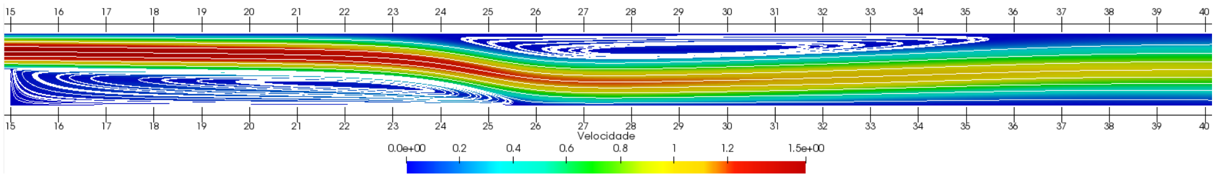
Figura 5.13 – Escoamento com alargamento de canal. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 800$.



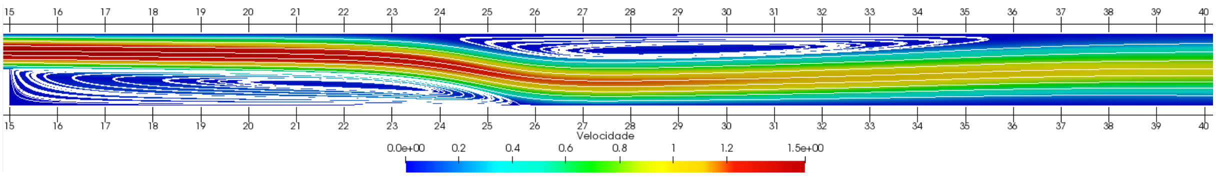
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

Figura 5.14 – Escoamento com alargamento de canal. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 1200$.

A Tab. 5.18 apresenta os comprimentos característicos adimensionais x_1, x_2 e x_3 (ver Fig. 5.15) frequentemente usados para caracterizar os resultados da simulação desse problema. Esses comprimentos são normalizados pela altura do degrau do canal, h. Os valores obtidos pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS são comparados com os resultados apresentados em (ERTURK, 2008). Erturk (2008) resolve as equações de Navier-Stokes incompressíveis estacionárias usando diferenças finitas de quarta ordem sobre uma malha refinada com 403750 nós. Como podemos ver, nossos resultados estão em excelente concordância com os valores da referência. Além disso, os métodos multiescalas, em particular o método NSGS2-NS, apresentam uma melhor acurácia para os comprimentos característicos.

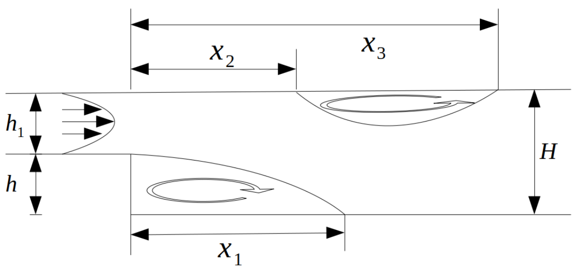
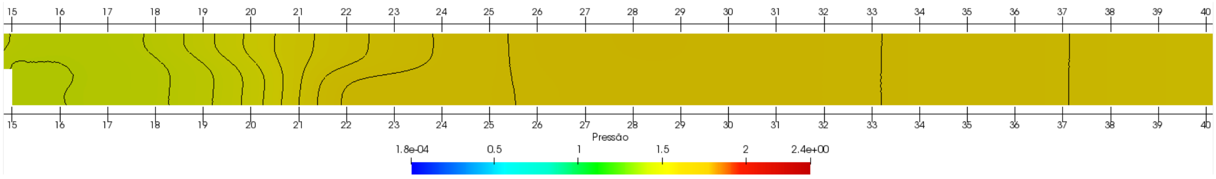


Figura 5.15 – Escoamento com alargamento de canal. Definição dos comprimentos característicos.

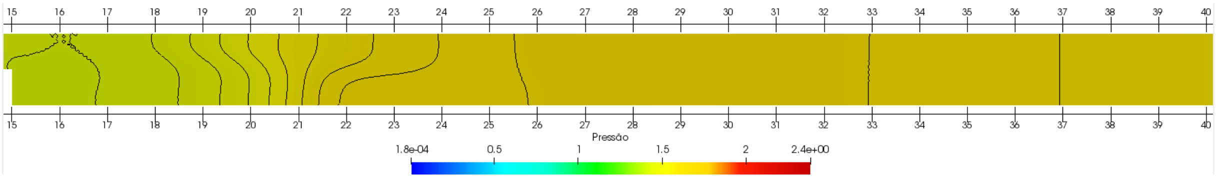
Tabela 5.18 – Escoamento com alargamento de canal: Comprimentos característicos.

	Re = 500			Re = 800			Re = 1200		
	x_1/h	x_2/h	x_3/h	x_1/h	x_2/h	x_3/h	x_1/h	x_2/h	x_3/h
(ERTURK, 2008)	9,42	8,01	13,17	11,83	9,48	20,55	14,30	11,45	28,95
SUPG/PSGP	9,21	8,27	12,93	11,47	9,07	19.87	13,53	11,07	27,73
VMS-B	9,28	8,20	13,01	11,63	9,28	20,33	13,80	11,33	29,05
NSGS1-NS	9,31	8,17	13,07	11,69	9,36	20,39	14,13	11,75	28,53
NSGS2-NS	9,36	8,13	13,12	11,73	9,41	20,47	14,28	11,60	28,57

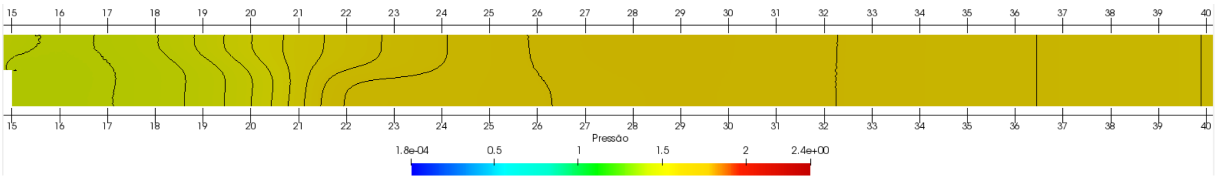
As Figs. 5.16-5.18 apresentam as isolinhas de pressão para os quatro métodos em estudo. Observamos que os campos de pressão obtidos pelos métodos multiescalas apresentam pequenas oscilações próximo ao degrau e se tornam mais expressivos à medida que o número de Reynolds cresce.



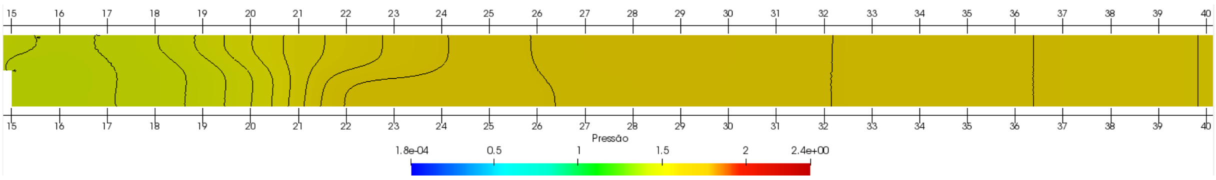
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

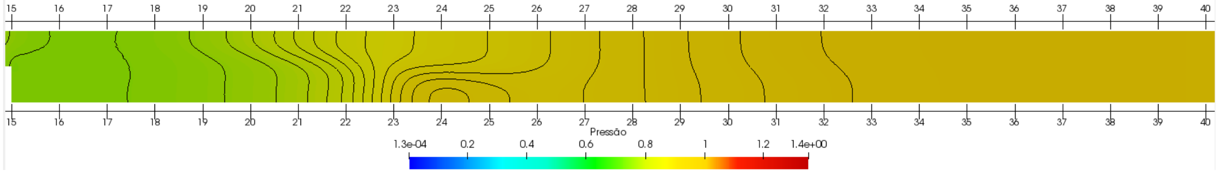


(c) NSGS1-NS

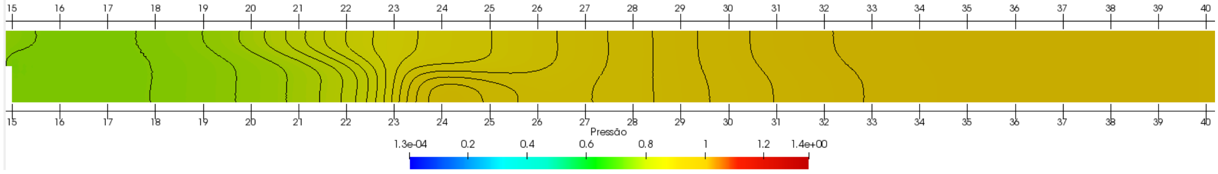


(d) NSGS2-NS

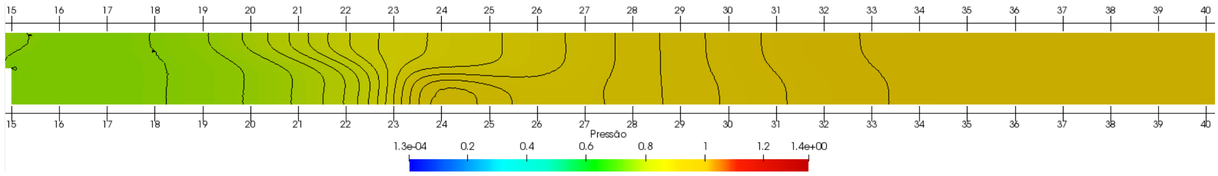
Figura 5.16 – Escoamento com alargamento de canal. Isolinhas de Pressão com Re = 500



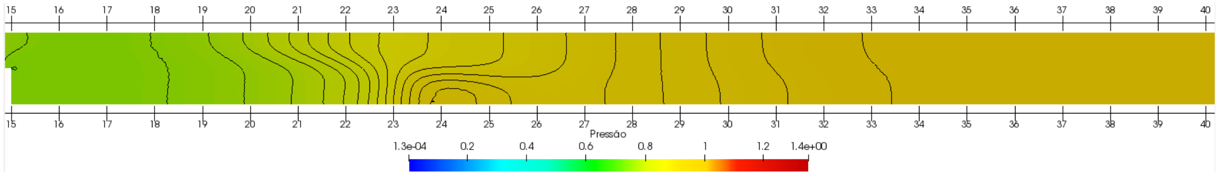
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

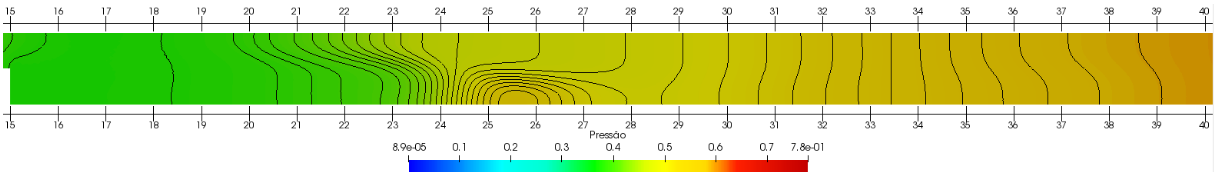


(c) NSGS1-NS

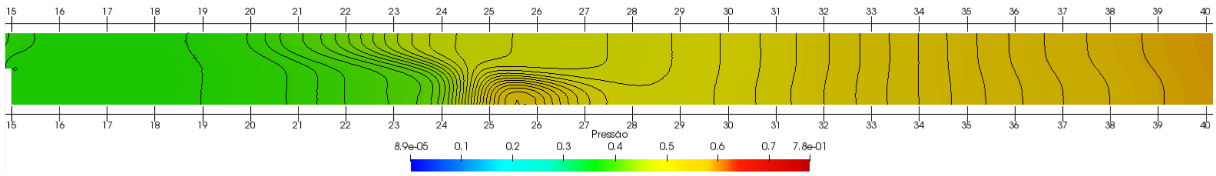


(d) NSGS2-NS

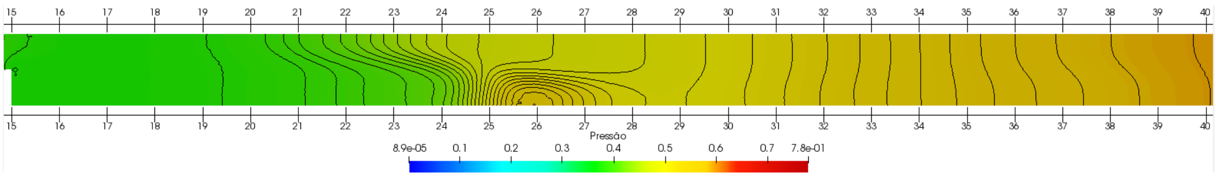
Figura 5.17 – Escoamento com alargamento de canal. Isolinhas de Pressão com Re = 800



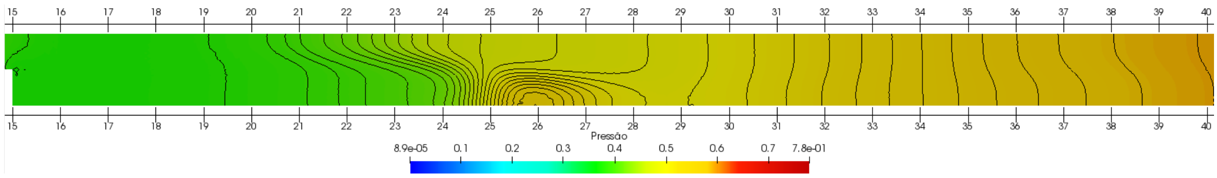
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

Figura 5.18 – Escoamento com alargamento de canal. Isolinhas de Pressão com Re = 1200

A Tab. 5.19 apresenta o desempenho computacional dos quatro métodos em estudo, com amortecimento no processo iterativo não linear e com precondicionador ILU6. A fig. 5.19 apresenta o decaimento do resíduo e o comportamento no fator de amortecimento no processo de linearização para os quatro métodos. Observe que para $Re = 1200$ o método VMS-B não convergiu, atingindo o número máximo de iterações não lineares (ver Fig. 5.19c). Para os demais casos o número de iterações não lineares demandado por cada método multiescala é maior do que o número de iterações necessária para a convergência do método SUPG/PSPG. No entanto, cada iteração não-linear dos métodos multiescalas, em particular os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS, consomem menos iterações lineares e tempo de CPU.

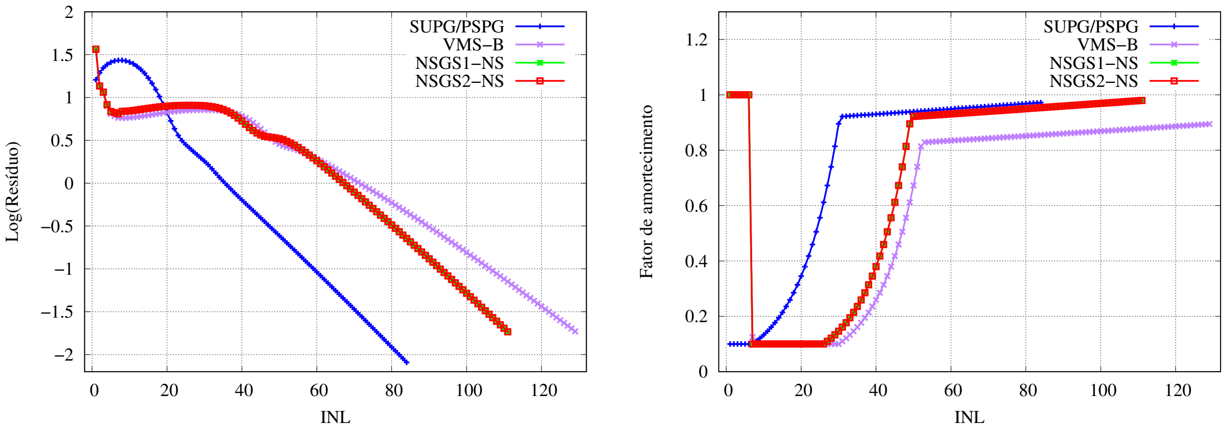
Tabela 5.19 – Escoamento com alargamento de canal - Desempenho computacional com o uso do fator de amortecimento.

Método	Re = 500			Re = 800			Re = 1200		
	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$
SUPG/PSPG	21338	84	851,79	35762	115	1407,81	55323	196	2321,18
VMS-B	8270	129	394,97	32890	384	1515,45	125317	1000	5632,78
NSGS1-NS	5906	111	302,23	17698	214	887,44	39221	429	1933,69
NSGS2-NS	5924	111	299,94	17960	217	893,07	44806	490	2204,36

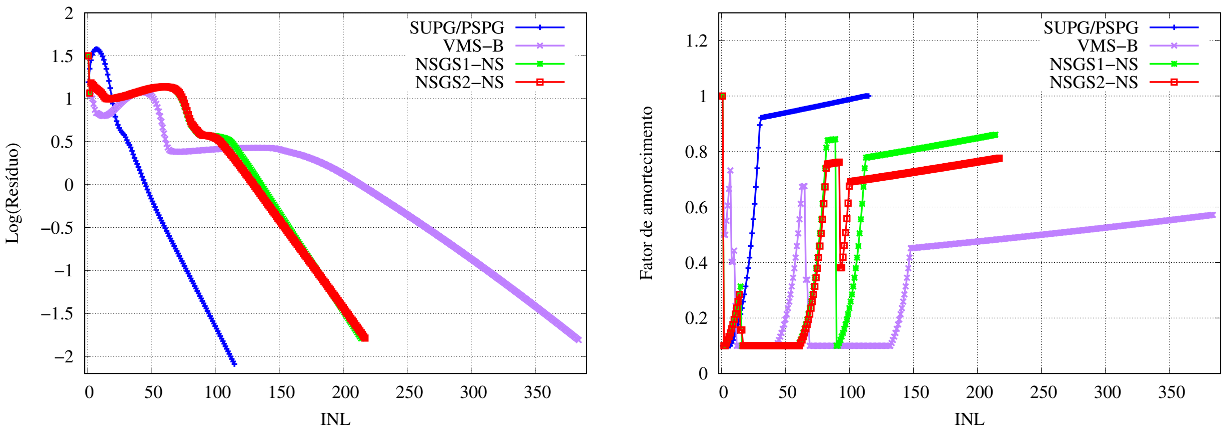
Tabela 5.20 – Escoamento com alargamento de canal - Desempenho computacional sem o uso do fator de amortecimento.

Método	Re = 500			Re = 800			Re = 1200		
	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#INL$	$CPU(s)$
SUPG/PSPG	12170	62	531,21	25549	92	1088,04	30834	113	1217,90
VMS-B	5103	83	263,13	12978	151	627,39	†	†	†
NSGS1-NS	4235	74	226,51	9631	117	467,21	14414	159	696,07
NSGS2-NS	4243	74	223,60	9624	117	468,79	14551	159	703,39

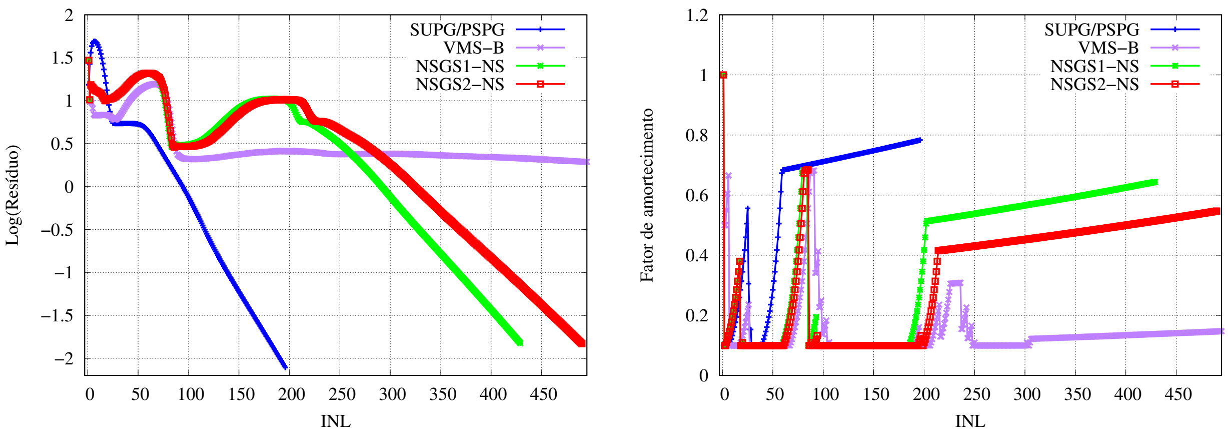
Com o objetivo de estudar a eficácia do fator de amortecimento do processo iterativo não linear, repetimos o experimento desconsiderando o seu uso. A Tab. 5.20 apresenta o desempenho computacional dos quatro métodos em estudo, sem o fator de amortecimento. De modo geral, observamos que o fator de amortecimento prejudica a convergência do processo iterativo não linear para os quatro métodos, como pode ser observado comparando os dados das Tabs. 5.19 e 5.20. A Fig. 5.20 mostra o decaimento do resíduo do processo iterativo não linear sem o uso do fator de amortecimento. No caso em que $Re = 1200$ o método VMS-B gera uma sequência de resíduos divergente durante o processo de linearização (ver Fig. 5.20c). Durante o processo, sem o uso do fator de amortecimento, é gerada uma sequência decrescente, porém não monótona principalmente nas primeiras iterações (ver Fig. 5.20). Quando utilizamos o fator de amortecimento no processo iterativo não linear (ver Fig. 5.19), as soluções que geram resíduos maiores que as imediatamente anterior são amortecidas. Em alguns casos é exigido que o fator de amortecimento atinja o



(a) $Re = 500$



(b) $Re = 800$

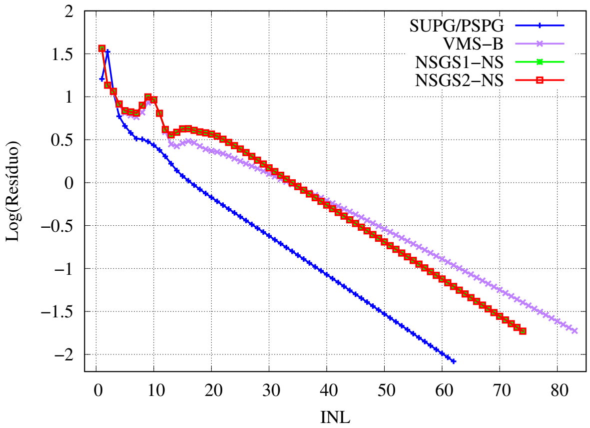


(c) $Re = 1200$

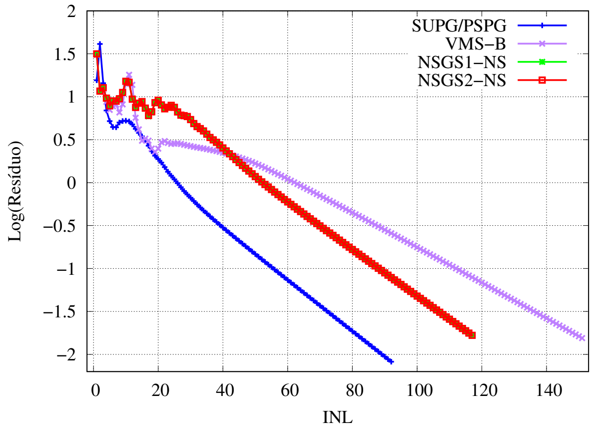
Figura 5.19 – Escoamento com alargamento de canal. Processo não linear com fator de amortecimento. Esquerda: decaimento do resíduo, Direita: fator de amortecimento do processo não linear.

seu valor mínimo, $\omega = 0,1$ e permaneça neste valor por muitas iterações dificultando a convergência do processo.

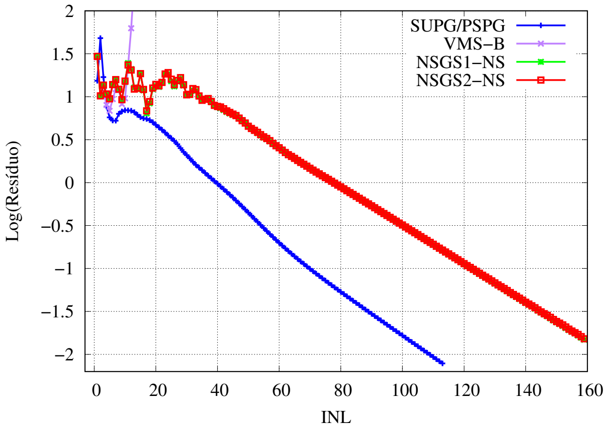
Portanto, para o escoamento no interior de um canal com alargamento, os métodos multiescalas NSGS1-NS e NSGS2-NS apresentam soluções mais acuradas e são computacionalmente mais eficientes que os métodos SUPG/PSPG e VMS-B considerando ou não o fator de amortecimento no processo não linear.



(a) $Re = 500$



(b) $Re = 800$



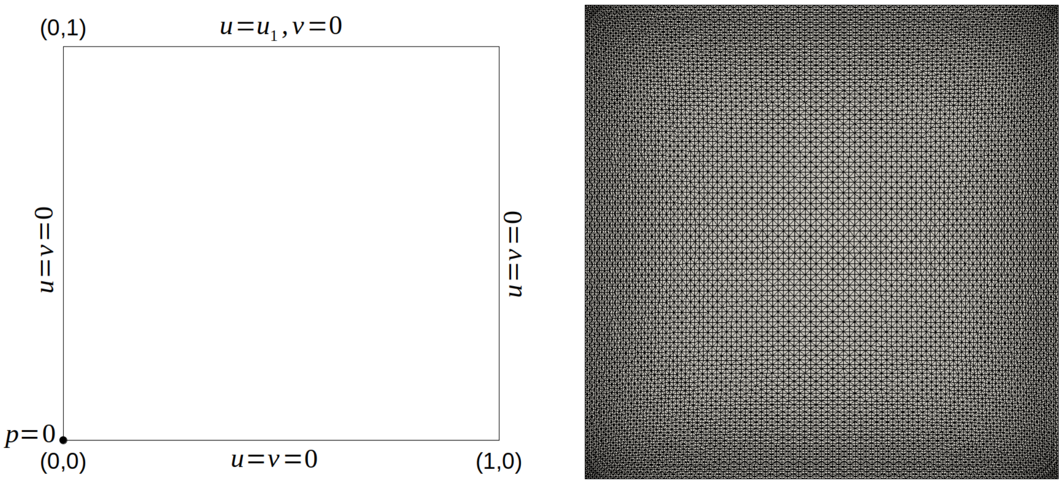
(c) $Re = 1200$

Figura 5.20 – Escoamento com alargamento de canal. Decaimento do resíduo do processo não linear sem fator de amortecimento.

5.1.4 Escoamento no interior de uma cavidade quadrada

O problema de fluxo na cavidade 2D acionado por uma tampa tem sido amplamente utilizado como referência para métodos numéricos e foi analisado por vários autores, dentre eles destacamos os trabalhos de (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005; HACHEM et al., 2010). O caso padrão descreve um fluido contido em um domínio quadrado com condições de contorno de Dirichlet para a velocidade em todos os lados, com três lados estacionários e um lado móvel na parte superior (ver Fig. 5.21a). Não há forças de corpo e a pressão é prescrita nula no canto esquerdo inferior da cavidade. O domínio físico é o quadrado $\Omega = [0;1] \times [0;1]$ e como considerado em (FRUTOS; JOHN; NOVO, 2016), para evitar a irregularidade da solução nos cantos superiores a velocidade horizontal da tampa é dada por

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{4}\Big(1 - \cos\big((0,1 - 1x)10\pi\big)\Big)^2 & \text{para } x \in [0;0,1], \\ 1 & \text{para } x \in (0,1;0,9), \\ 1 - \dfrac{1}{4}\Big(1 - \cos\big((x - 0,9)10\pi\big)\Big)^2 & \text{para } x \in [0,9;1]. \end{cases}$$

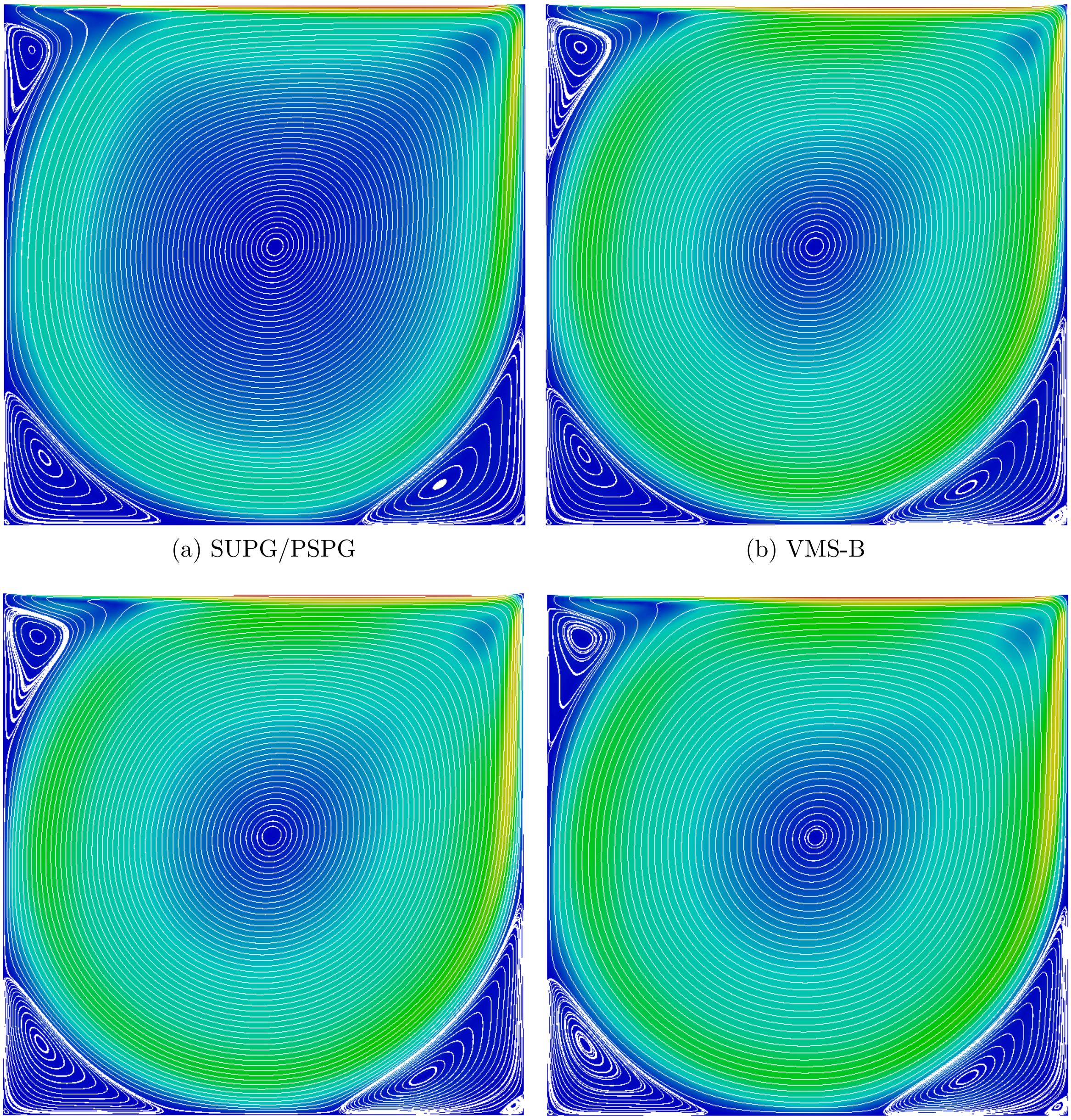


(a) Descrição do Problema. (b) Malha com 14641 nós e 28800 elementos.

Figura 5.21 – Escoamento no interior da cavidade quadrada, descrição e malha.

Como resultado da tampa móvel da cavidade, é desenvolvida uma região de recirculação que possui um vórtice primário no meio da cavidade e vórtices secundários nos cantos da cavidade. Nas Figs. 5.22-5.24 mostramos as linhas de corrente para a velocidade para $Re = 5000, 10000$ e 20000 obtidas pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. Observamos que os três métodos multiescala concordam entre sí e que estes geraram linhas de corrente características de um escoamento menos viscoso que as linhas geradas pelo método SUPG/PSPG, concordando com os resultados apresentados em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005). Os autores em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005) resolvem as equações de Navier-Stokes incompressíveis estacionárias usando diferenças finitas de quarta ordem sobre uma malha refinada com 361201 nós, enquanto que em nossos experimentos usamos uma malha de elementos finitos triangular linear mais grossa com 14641 nós e 28800 elementos, (ver Fig. 5.21b).

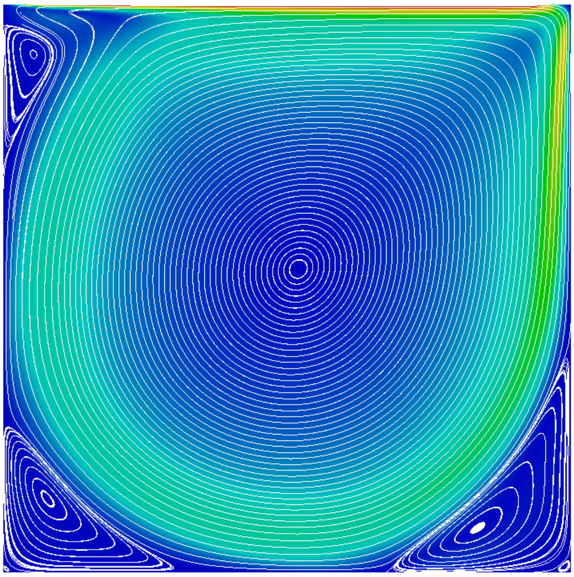
As Figs. 5.25-5.27 apresentam as isolinhas de pressão para $Re = 5000, 10000$ e 20000 obtidas pelos quatro métodos em estudo. Observamos que os três métodos multiescala concordam entre sí, apresentando valores parecidos para as pressões máximas e mínimas (ver Tab. 5.21). Para $Re = 10000$ as soluções obtidas pelos métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS estão de acordo com as soluções encontradas em (GRAVEMEIER; WALL; RAMM,



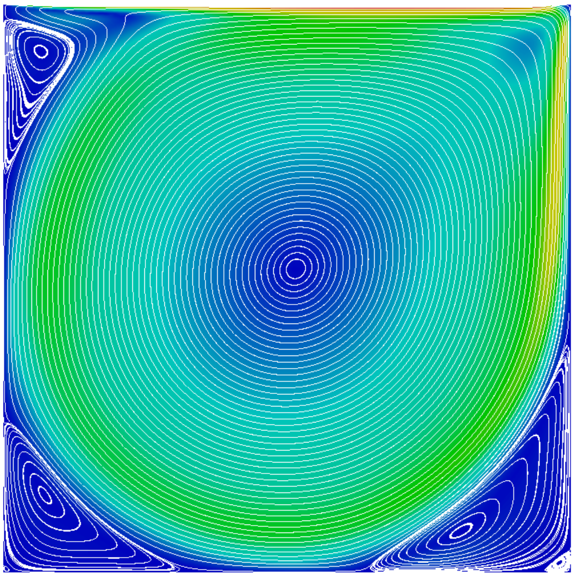
(a) SUPG/PSPG (b) VMS-B

(c) NSGS1-NS (d) NSGS2-NS

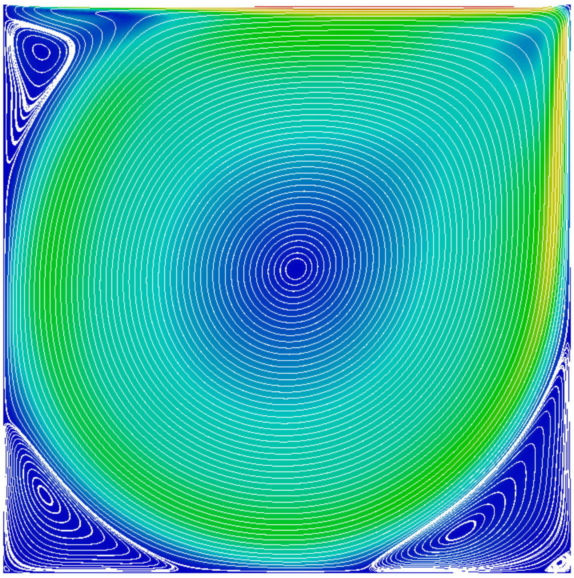
Figura 5.22 – Escoamento no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 5000$.



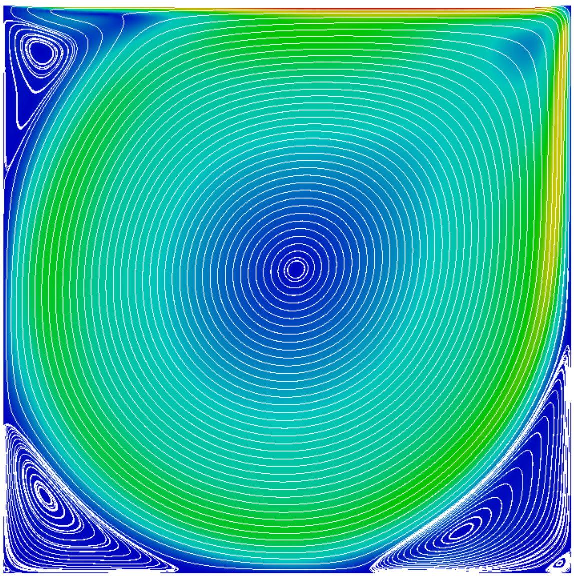
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

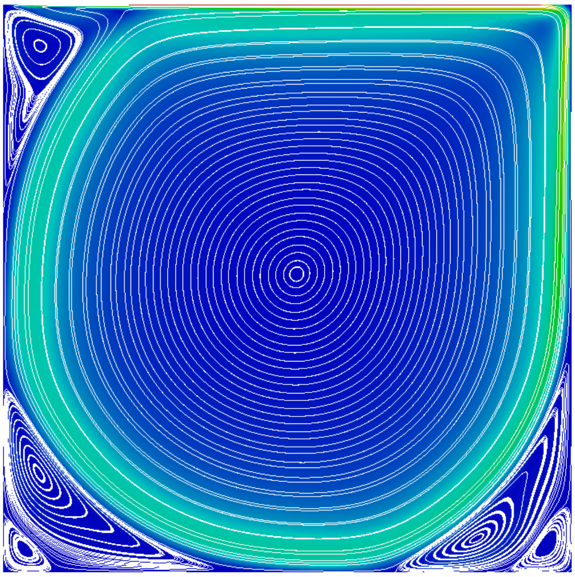


(c) NSGS1-NS

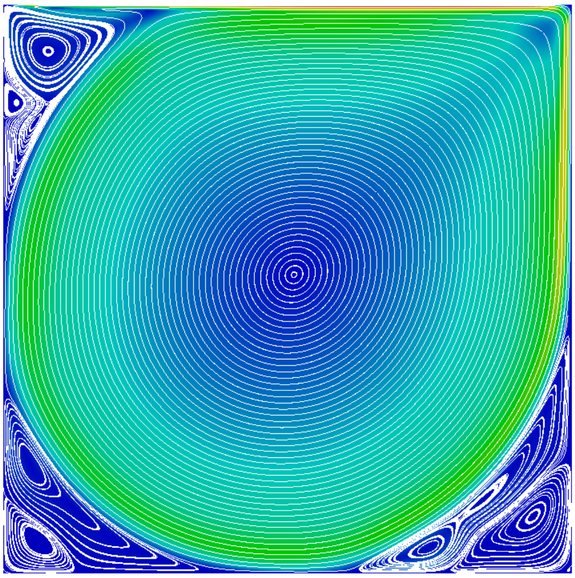


(d) NSGS2-NS

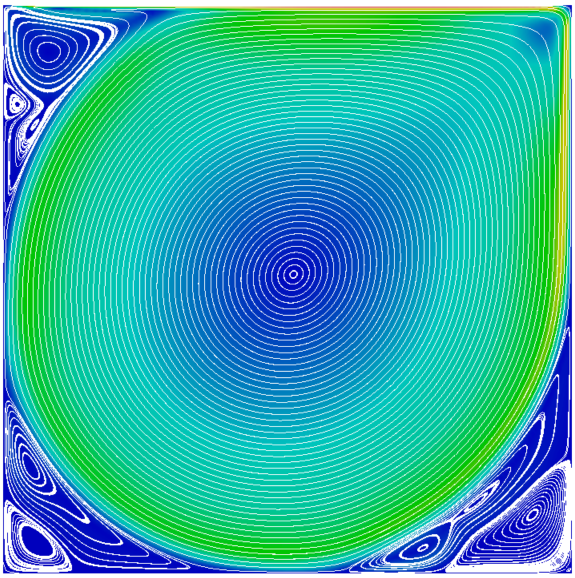
Figura 5.23 – Escoamento no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 10000$.



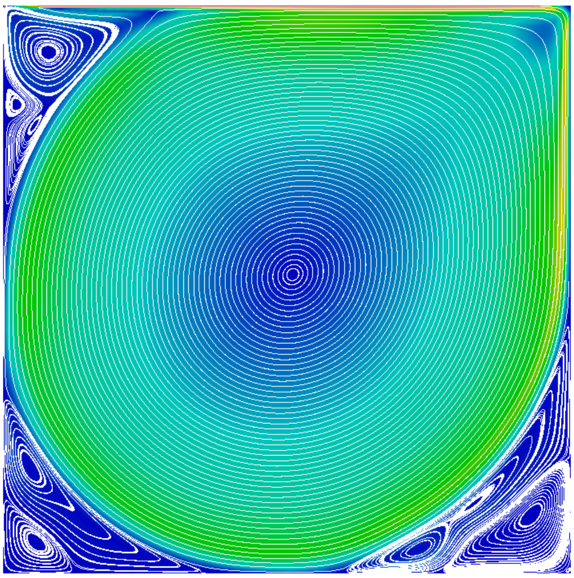
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

Figura 5.24 – Escoamento no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 20000$.

Tabela 5.21 – Escoamento no interior de uma cavidade - Valores da pressão máxima e mínima.

Métodos	Re = 5000		Re = 10000		Re = 20000	
	p_{min}	p_{max}	p_{min}	p_{max}	p_{min}	p_{max}
SUPG/PSPG	-0,037881	0,304227	-0,024615	0,253475	-0,016066	0,211667
VMS-B	-0,112475	0,358885	-0,101486	0,313623	-0,075631	0,276552
NSGS1-NS	-0,113647	0,374445	-0,108319	0,320024	-0,093172	0,278725
NSGS2-NS	-0,113662	0,375036	-0,108377	0,320628	-0,102196	0,280186

2004), onde é usado um método de elementos finitos multiescala de três níveis para as equações de Navier-Stokes incompressíveis.

A Fig. 5.28 mostra a componente horizontal da velocidade ao longo da reta vertical $x = 0,5$ e a componente vertical da velocidade ao longo da reta horizontal $y = 0,5$, para $Re = 5000, 10000$ e 20000, obtidos pelos métodos VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. Podemos observar que para $Re = 5000$ as três soluções coincidem e que para $Re = 10000$ os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS apresentam soluções mais acuradas que as obtidas pelo VMS-B. Para $Re = 20000$ observamos que apenas a solução obtida pelo método NSGS2-NS coincide com os valores de referência fornecidos em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005).

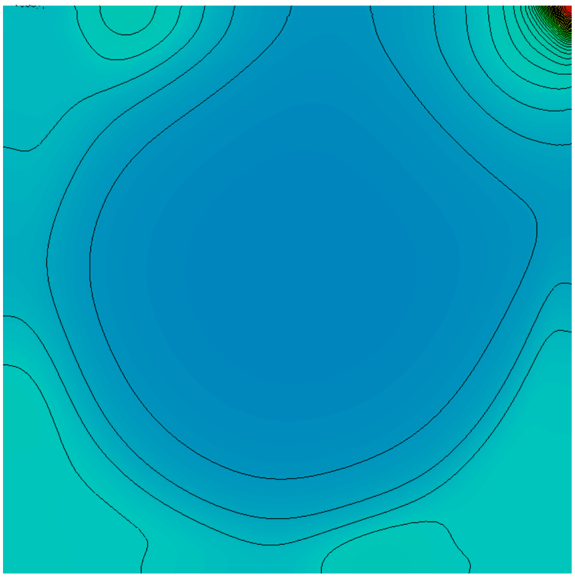
A Tab. 5.22 presenta o desempenho computacional dos três métodos multiescalas, utilizando o fator de amortecimento no processo iterativo não linear e precondicionador ILU10. Observamos que para $Re = 5000$ e 10000 os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS apresentam um custo computacional menor que o VMS-B. Para $Re = 20000$ os métodos VMS-B e NSGS1-NS não atingem a tolerância requerida, 5×10^{-4}, atingindo o número máximo de iterações não lineares, $itmax_{nl} = 1000$, ou seja, a viscosidade artificial advinda do resíduo da equação da conservação de massa foi crucial para a convergência do método NSGS2-NS.

Tabela 5.22 – Escoamento no interior de uma cavidade - Desempenho computacional.

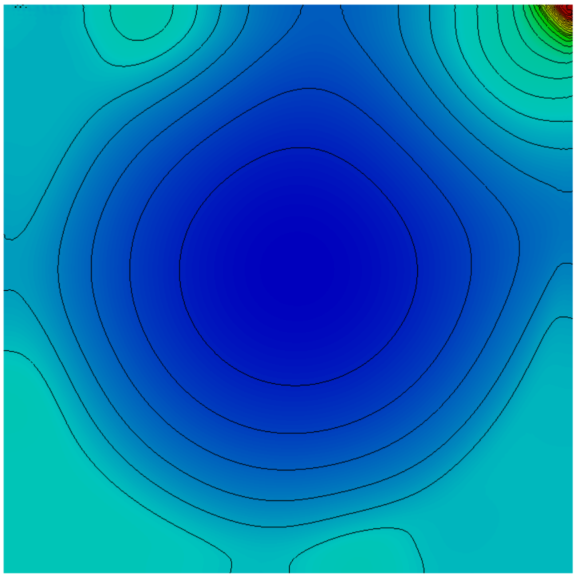
Métodos multiescalas	Re = 5000			Re = 10000			Re = 20000		
	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)
VMS-B	3214	86	98,51	7101	201	211,5	†	†	†
NSGS1-NS	2661	69	84,98	5856	151	184,63	†	†	†
NSGS2-NS	2661	69	76,95	5857	151	167,96	9453	244	271,52

Na Fig. 5.29, apresentamos os perfis de velocidade obtidos pelos métodos NSGS2-NS e SUPG/PSPG. Comparando as soluções NSGS2-NS com as soluções de referência fornecidas em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005), pode-se ver claramente um acordo perfeito entre as soluções. Também podemos observar na Fig. 5.29 que as soluções SUPG/PSPG apresentam um escoamento menos desenvolvido, comportamento característico de um fluido mais viscoso.

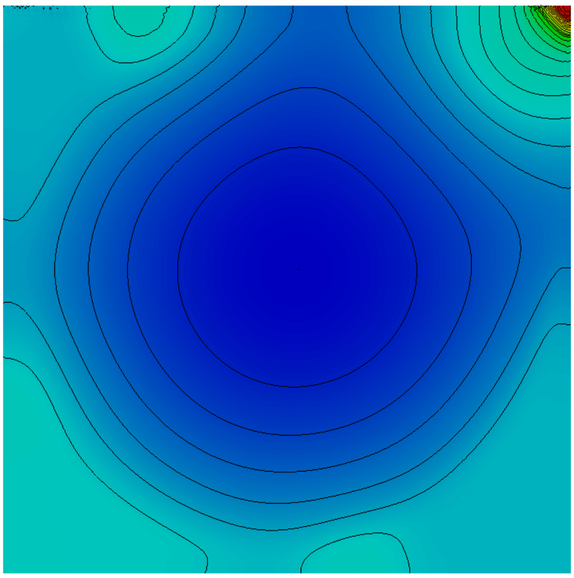
A seguir destacamos a importância do uso do fator de amortecimento na convergência do processo não linear a medida que o número de Reynolds cresce. A Tab. 5.23 mostra



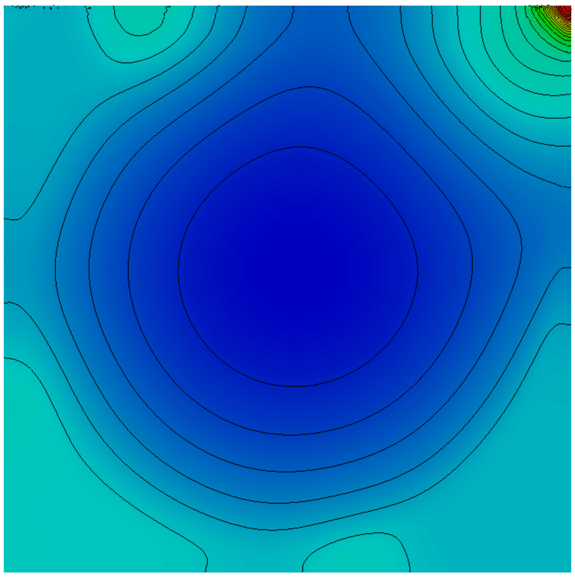
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

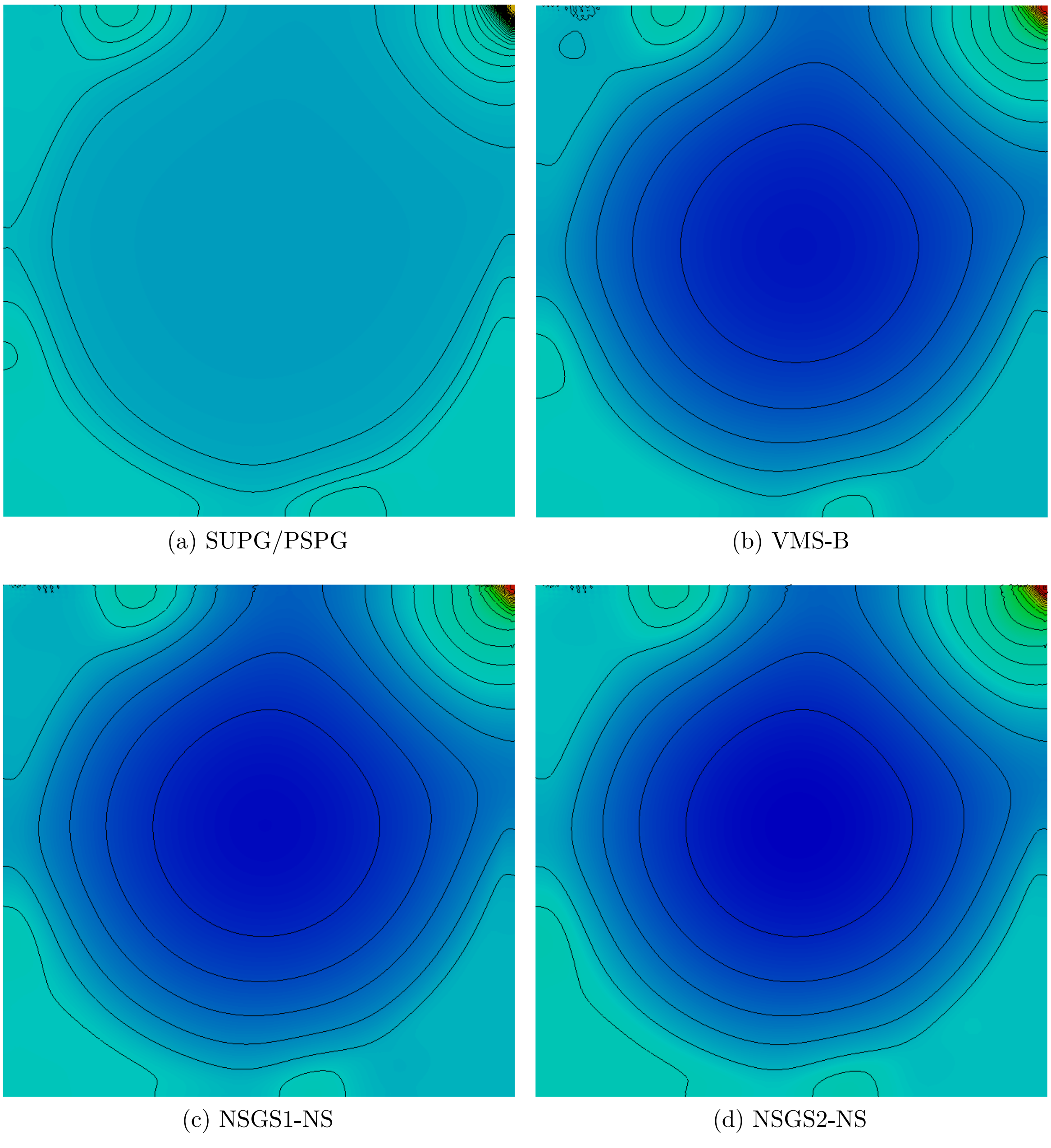


(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

Figura 5.25 – Escoamento no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 5000$.



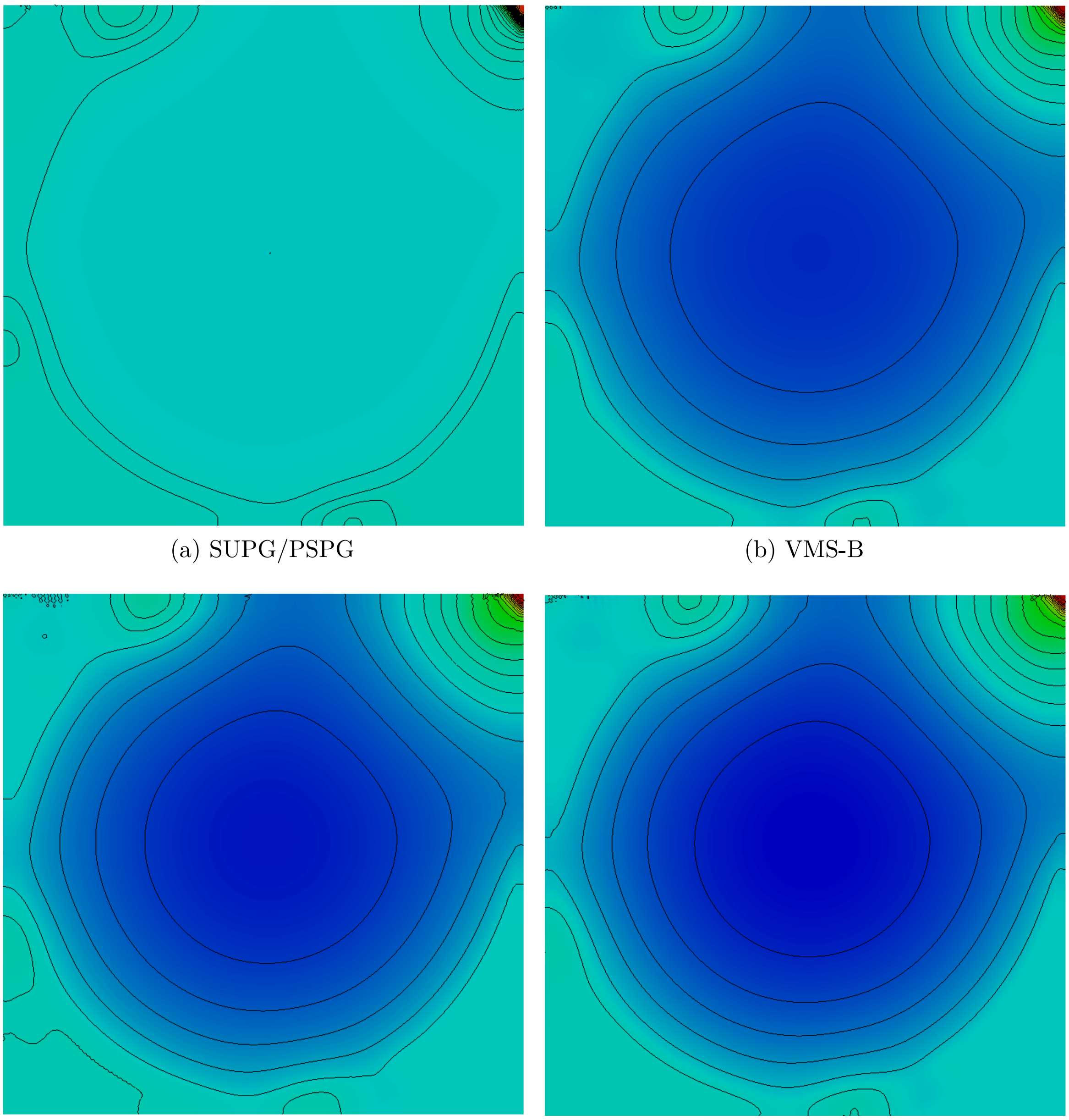
(a) SUPG/PSPG

(b) VMS-B

(c) NSGS1-NS

(d) NSGS2-NS

Figura 5.26 – Escoamento no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 10000$.



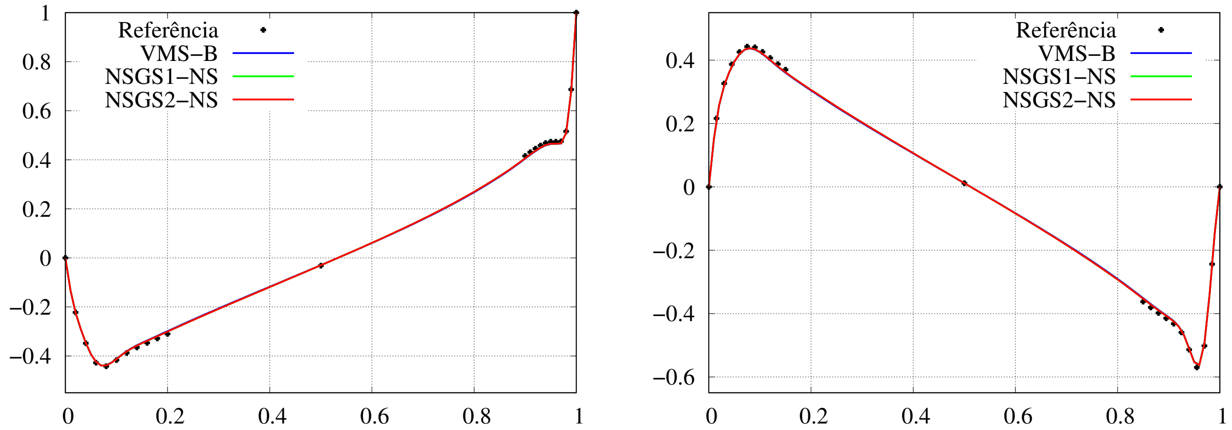
(a) SUPG/PSPG

(b) VMS-B

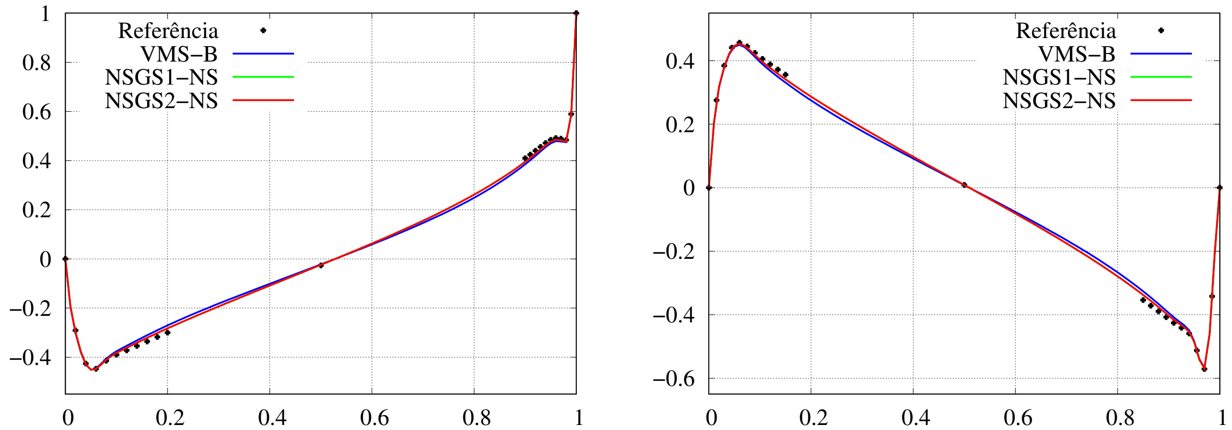
(c) NSGS1-NS

(d) NSGS2-NS

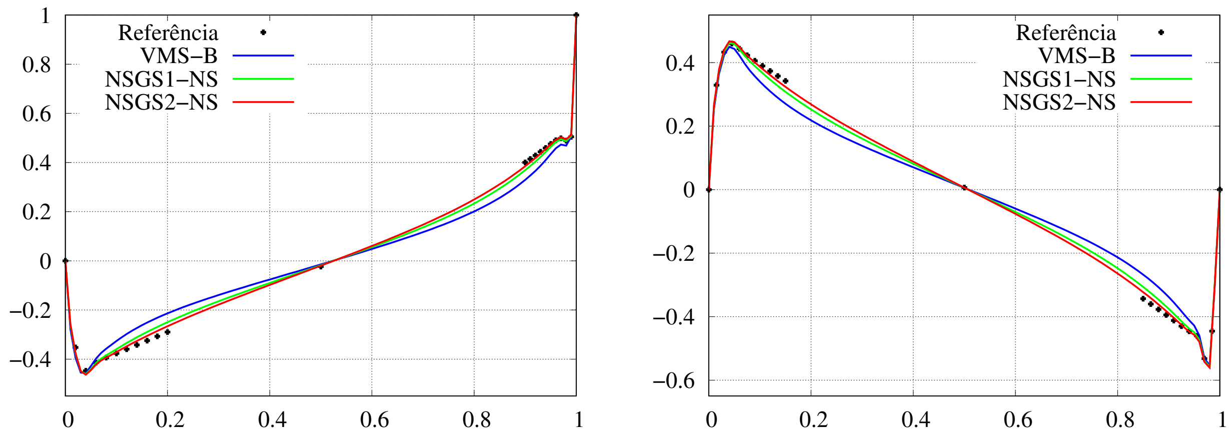
Figura 5.27 – Escoamento no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 20000$.



(a) $Re = 5000$

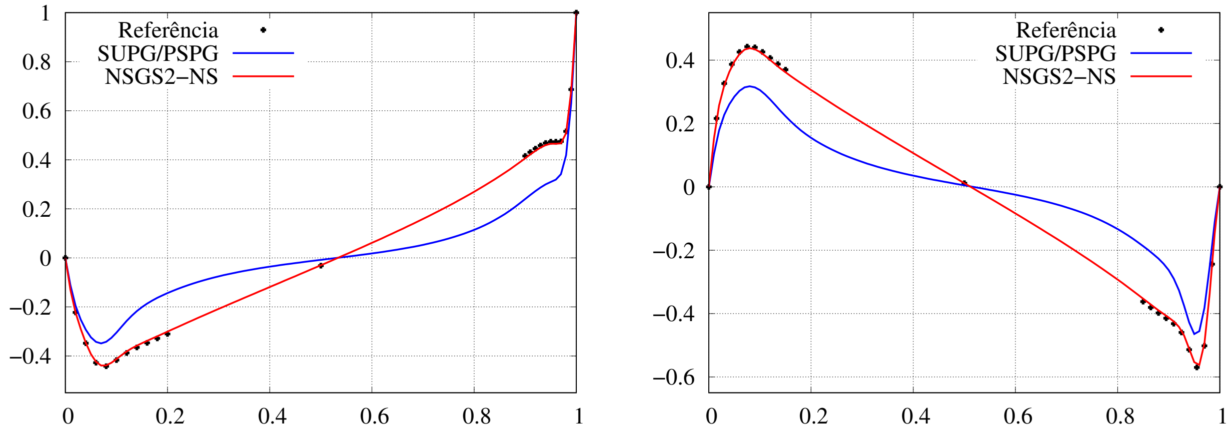


(b) $Re = 10000$

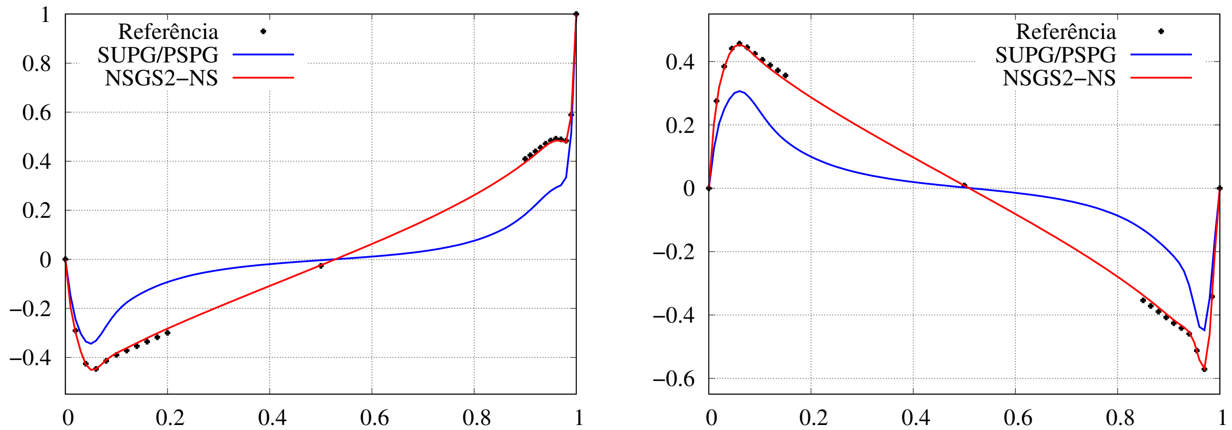


(c) $Re = 20000$

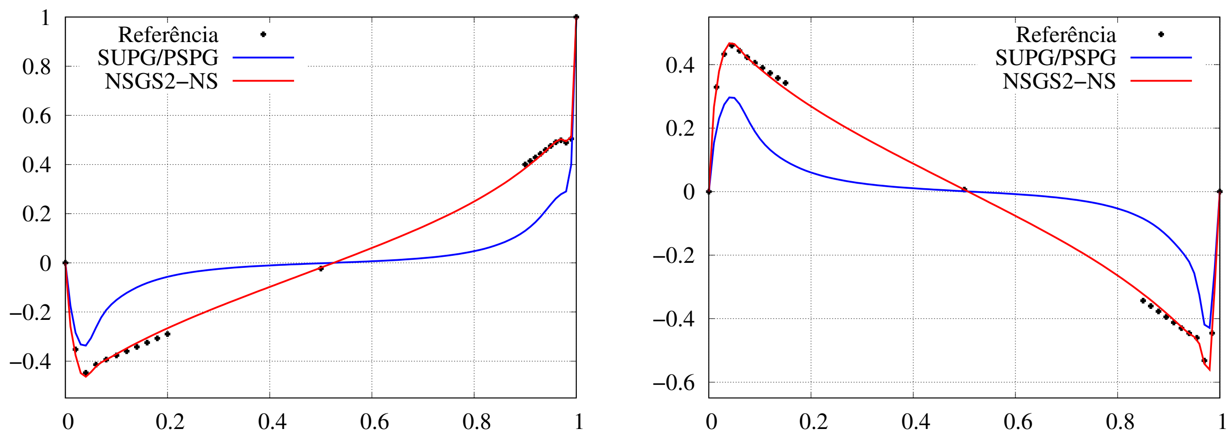
Figura 5.28 – Escoamento no interior de uma cavidade. Esquerda: velocidade horizontal sobre a reta vertical $x = 0,5$, direita: velocidade vertical sobre a reta horizontal $y = 0,5$. Valores de referência fornecidos em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005).



(a) $Re = 5000$



(b) $Re = 10000$



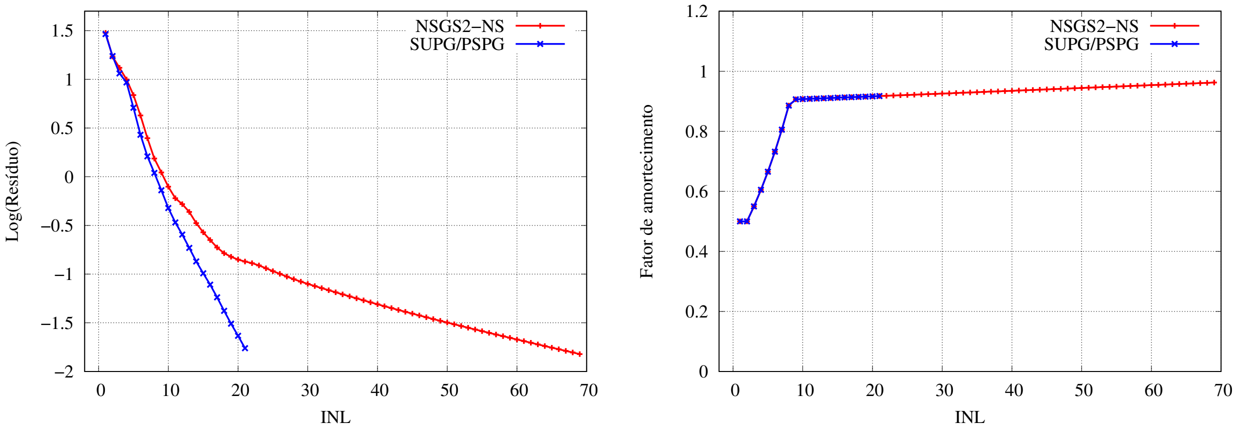
(c) $Re = 20000$

Figura 5.29 – Escoamento no interior de uma cavidade. Esquerda: velocidade horizontal sobre a reta vertical $x = 0,5$, direita: velocidade vertical sobre a reta horizontal $y = 0,5$. Soluções de referência fornecidas em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005) o desempenho computacional dos métodos NSGS2-NS e SUPG/PSPG com e sem o uso do fator de amortecimento no processo iterativo não linear. Observamos que o método NSGS2-NS apresenta um custo computacional maior do que o método SUPG/PSPG para atingir a convergência. Para $Re = 10000$ e 20000 sem o uso do fator de amortecimento no processo iterativo não linear, o método NSGS2-NS não atinge a tolerância requerida, 5×10^{-4}, atingindo o número máximo de iterações não lineares, $itmax_{nl} = 1000$. O uso do fator de amortecimento foi crucial para a convergência do processo iterativo não linear para o método NSGS2-NS assim como melhorou o desempenho do método SUPG/PSPG.

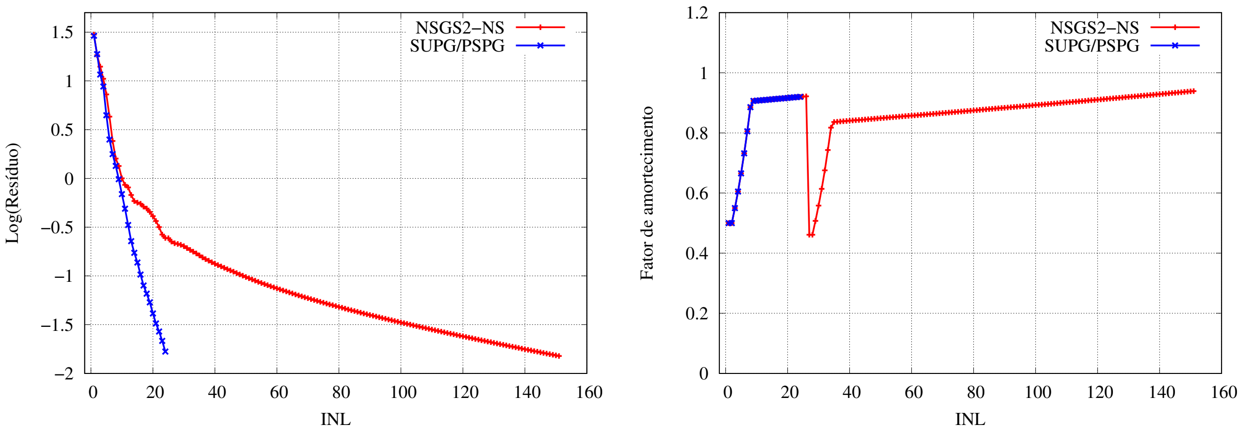
Tabela 5.23 – Escoamento no interior de uma cavidade - Desempenho computacional

Método	Re = 5000			Re = 10000			Re = 20000		
Com Amortecimento	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)
SUPG/PSPG	596	21	20,61	721	24	24,32	857	28	28,05
NSGS2-NS	2661	69	76,95	5857	151	167,96	9453	244	271,52
Sem Amortecimento	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)	$\#IL$	$\#INL$	CPU(s)
SUPG/PSPG	722	25	24,24	1047	35	34,06	1460	47	46,15
NSGS2-NS	2076	52	59,65	†	†	†	†	†	†

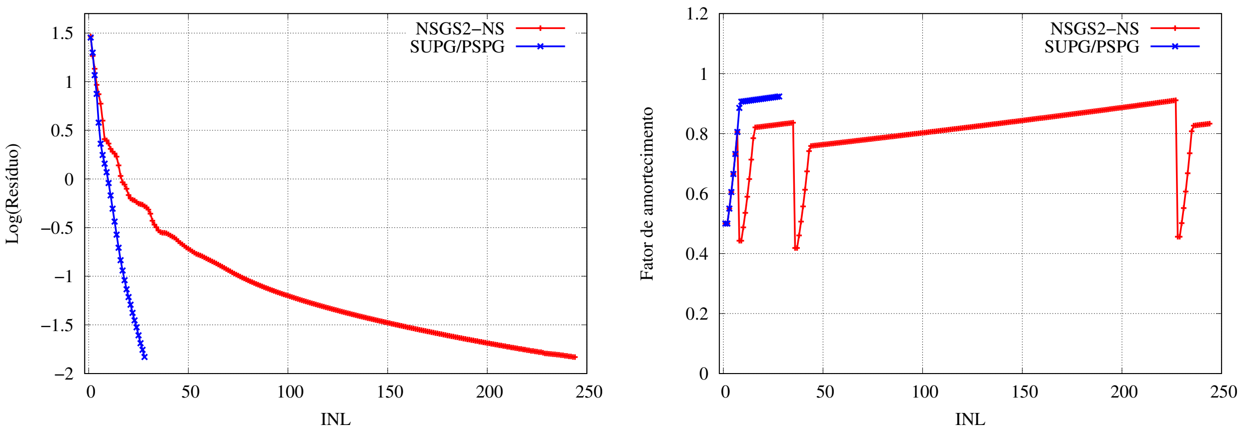
A Fig. 5.30 mostra o decaimento do resíduo e os valores do fator de amortecimento necessários em cada iteração não linear para ambos os métodos SUPG/PSPG e NSGS2-NS, para $Re = 5000, 10000$ e 20000. Como podemos ver a partir da vigésima iteração o método NSGS2-NS tem a taxa de decaimento reduzida, exigindo uma demanda maior de iterações não lineares. No método SUPG/PSPG, o fator de amortecimento aumenta no decorrer do processo iterativo com apenas uma rejeição na primeira iteração. No método NSGS2-NS, existem algumas rejeições, mas o processo dinâmico não reduz o fator de amortecimento ao limite inferior, $\omega_{min} = 0,1$. Observe também que o forte amortecimento necessário no início do processo iterativo influencia levemente o amortecimento no final, exceto para o caso onde $Re = 20000$ a qual uma correção é necessária próximo ao final do processo.



(a) $Re = 5000$.



(b) $Re = 10000$.



(c) $Re = 20000$.

Figura 5.30 – Cavidade unitária. Esquerda: decaimento do resíduo, direita: fator de amortecimento em cada iteração não linear.

5.2 Escoamentos em regime transiente

Nesta seção apresentamos os escoamentos transiente em torno de um cilindro circular e no interior de uma cavidade unitária. Para a integração temporal foi aplicado o método preditor corretor, Alg. 4 e 5 com o passo de tempo de acordo com cada problema e número máximo de correções de $i_{max} = 7$, com tolerância no passo de correção de $tol_{corr} = 10^{-3}$. Os sistemas lineares resultantes são resolvidos pelo método GMRES com 45 vetores para o restart, um número máximo de ciclos igual a $itmax_l = 1000$ e uma tolerância igual a $tol_l = 10^{-6}$.

5.2.1 Escoamento transiente em torno de um cilindro circular

Apresentamos nesta seção o escoamento transiente em torno de um cilindro circular com número de Reynolds variável, $0 \leqslant Re \leqslant 100$, como estudado em (JOHN; RANG, 2010; JOHN, 2016). A descrição do problema e a malha de elementos finitos são as mesmas para o caso estacionário. A condição de contorno para a velocidade na entrada do domínio, Γ_E, é dada por

$$\boldsymbol{u}(t;0;y) = \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\frac{1}{0,41^2}(6y(0,41-y);\ 0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 0,41.$$

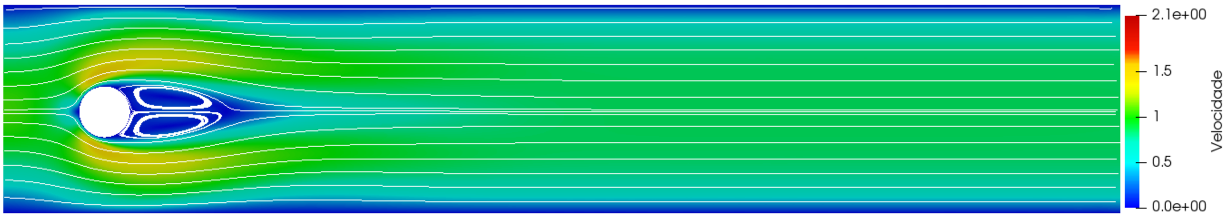
Na saída do domínio, Γ_S, não prescrevemos condição de contorno, deixando o fluxo livre e a condição inicial é considerada como nula, $\boldsymbol{u}(0;x;y) = \mathbf{0}$.

A velocidade média na entrada do domínio é dada por

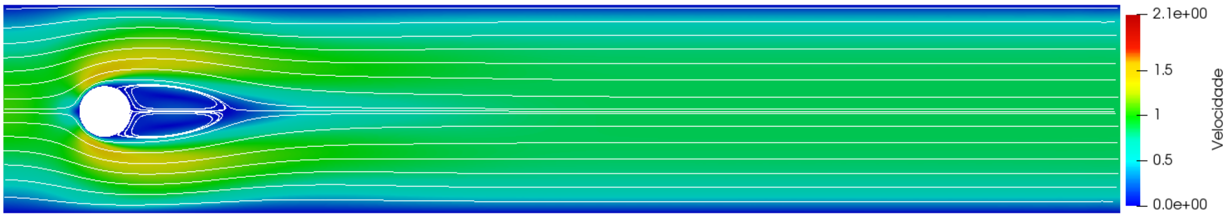
$$U_\infty(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\frac{1}{0,41^2}\frac{\int_0^{0,41} 6y(0,41-y)\ dy}{\int_0^{0,41}\ dy} = \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right).$$

Lembrando que o número de Reynolds global é representado por (5.1), a viscosidade dinâmica do fluido $\mu = 10^{-3}$, a massa específica $\rho = 1,0$ e o comprimento característico sendo o diâmetro do cilindro $L_\infty = d = 0,1$, temos que $0 \leqslant Re \leqslant 100$. Desta forma, no início do processo temos um escoamento nulo, ou seja $Re = 0$. Para $t \in (0;4)$ temos escoamento com número de Reynolds crescente $0 < Re < 100$, em $t = 4$ ocorre o fluxo máximo com $Re = 100$ e para $t \in (4;8)$ a velocidade decai da unidade para zero, de forma que ao final do processo temos $Re = 0$.

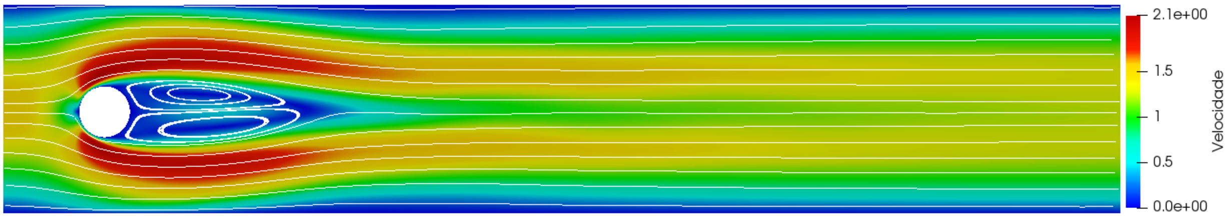
Para a integração temporal utilizamos o passo de tempo fixo $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$ e para os sistemas lineares resultantes utilizamos o precondicionador ILU5. As Figs. 5.31a-5.31h mostram as linhas de corrente para a velocidade obtidas pelos métodos SUPG/PSPG e NSGS2-NS nos tempos $t = 2, 4, 6$ e 8. Os três métodos multiescalas apresentaram resultados idênticos por isso vamos mostrar somente os resultados obtidos pelo método NSGS2-NS. Os valores para o campo de velocidade estão entre 0 e $2,1$, concordando com os valores obtidos em (JOHN; RANG, 2010; JOHN, 2016). Observamos que até o tempo $t = 4$ os perfis de velocidades apresentados estão em concordância. Para $t > 4$, quando o campo de velocidade começa a diminuir, as linhas de corrente geradas pelo método SUPG/PSPG tem comportamento diferente das obtida pelo método NSGS2-NS. Este comportamento de não unicidade nos perfis das linhas de corrente para a velocidade também foi observado por John e Rang (2010) para aproximações obtidas por esquemas de diferenças finitas ponderadas denominados *Weighted essentially non-oscillatory-WENO)* aplicados às equações de Navier-Stokes incompressíveis.



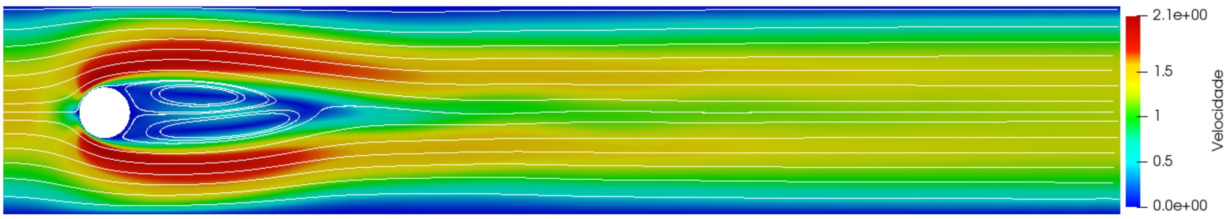
(a) $t = 2$, SUPG/PSPG



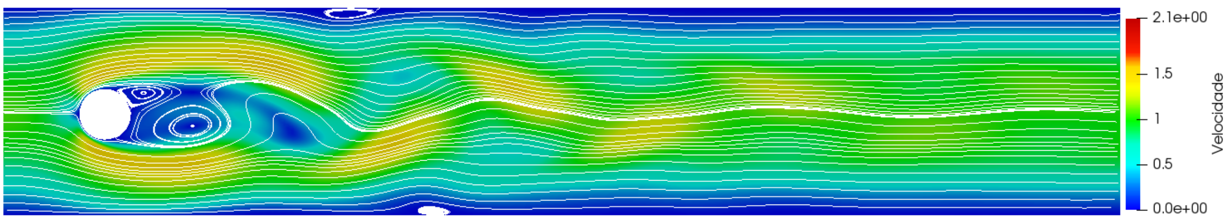
(b) $t = 2$, NSGS2-NS



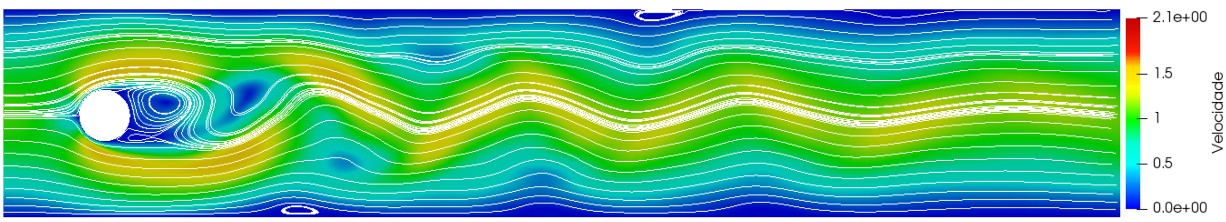
(c) $t = 4$, SUPG/PSPG



(d) $t = 4$, NSGS2-NS

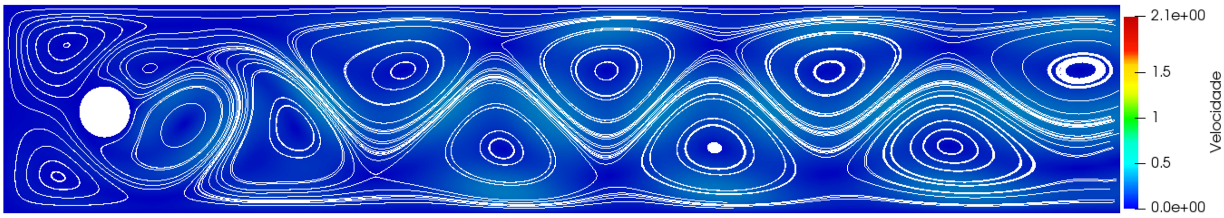


(e) $t = 6$, SUPG/PSPG

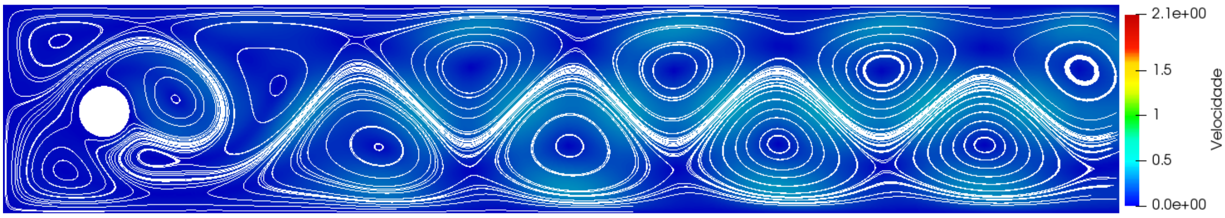


(f) $t = 6$, NSGS2-NS

Figura 5.31 – Escoamento transiente em torno do cilindro circular: linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$.



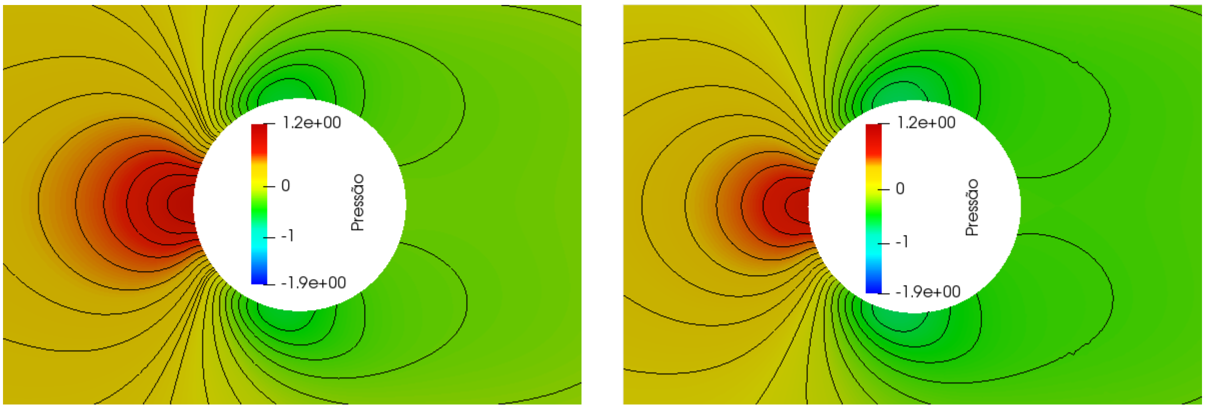
(g) $t = 8$, SUPG/PSPG



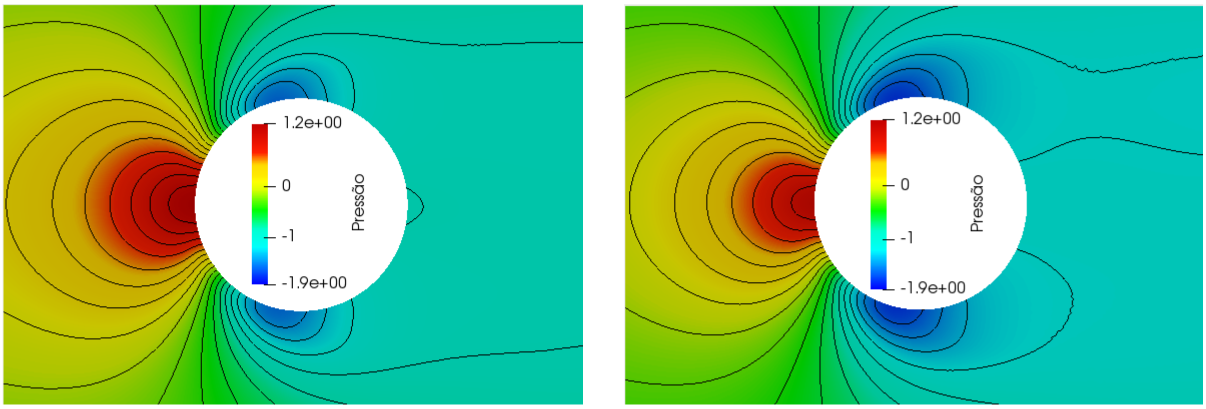
(h) $t = 8$, NSGS2-NS

Figura 5.31 – (Continuação).

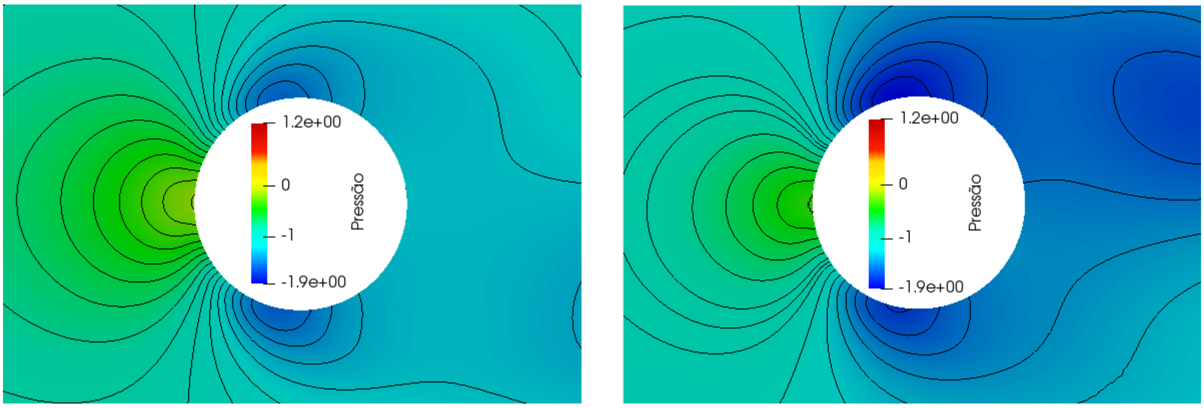
As Figs. 5.32a-5.32d apresentam as isolinhas de pressão obtidas pelos métodos SUPG/PSPG e NSGS2-NS nos tempos $t = 2, 4, 6$ e 8. Embora somente os resultados do método multiescala NSGS2-NS estão sendo mostrados, os demais métodos multiescala apresentam resultados idênticos. Observamos que os métodos apresentam convergência para a pressão isentas de oscilações próximas ao cilindro.



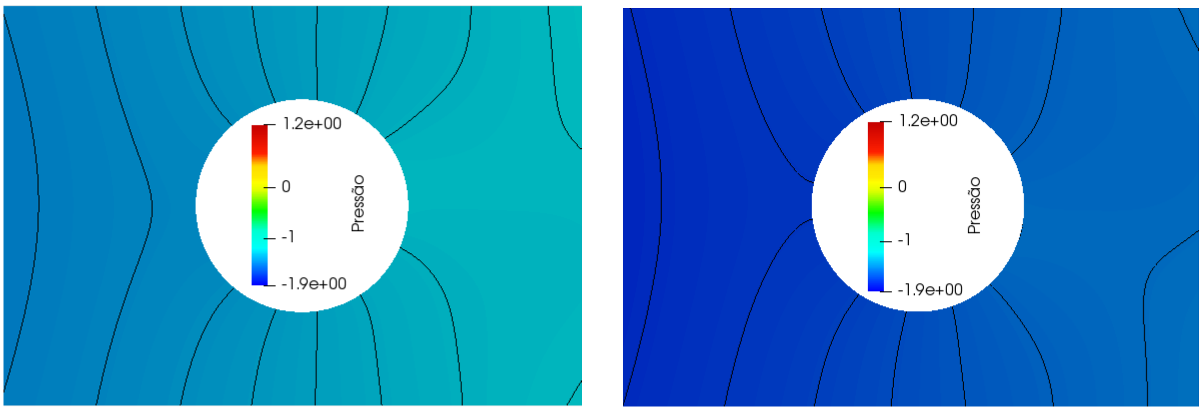
(a) $t = 2$



(b) $t = 4$



(c) $t = 6$



(d) $t = 8$

Figura 5.32 – Escoamento transiente em torno do cilindro circular - isolinhas de pressão. Esquerda: SUPG/PSPG, direita: NSGS2-NS.

Análogo ao caso estacionário três medidas de interesse neste experimento para validação da acuidade das aproximações obtidas são a diferença das pressões entre os pontos da frente e de trás do cilindro,

$$\Delta p = p(t; 0,15; 0,2) - p(t; 0,25; 0,2)$$

e os coeficientes de arrasto c_{drag} e de elevação c_{lift} definidos em (JOHN, 2016). Para escoamento de um fluido incompressível em torno de um cilindro no regime transiente e sem termo de fonte com $0 \leqslant Re \leqslant 100$ estes são dado por

$$c_{drag} = -20\left(\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \nabla \boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega + \int_\Omega \nu \nabla \boldsymbol{u} \colon \nabla \boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega - \int_\Omega p \nabla \cdot \boldsymbol{w}_{drag}\, d\Omega \right), \quad (5.5)$$

$$c_{lift} = -20\left(\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \cdot \nabla \boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega + \int_\Omega \nu \nabla \boldsymbol{u} \colon \nabla \boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega + \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega - \int_\Omega p \nabla \cdot \boldsymbol{w}_{lift}\, d\Omega \right), \quad (5.6)$$

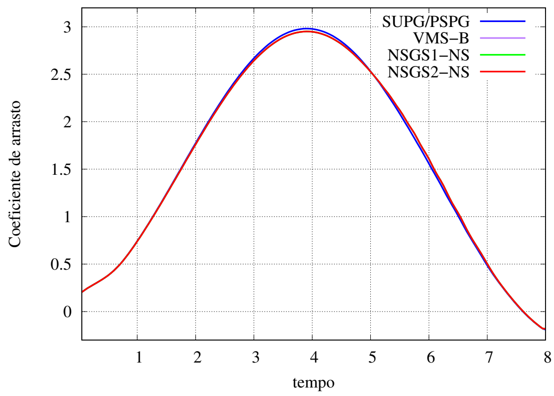
onde as funções $\boldsymbol{w}_{drag}$ e $\boldsymbol{w}_{lift}$ são as mesmas utilizadas no caso estacionário. Assim como definido em (JOHN, 2016), utilizaremos a diferença atrasada para a derivada temporal dos coeficientes (5.5) e (5.6)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t_{n+1}}(\boldsymbol{u}_{n+1} - \boldsymbol{u}_n).$$

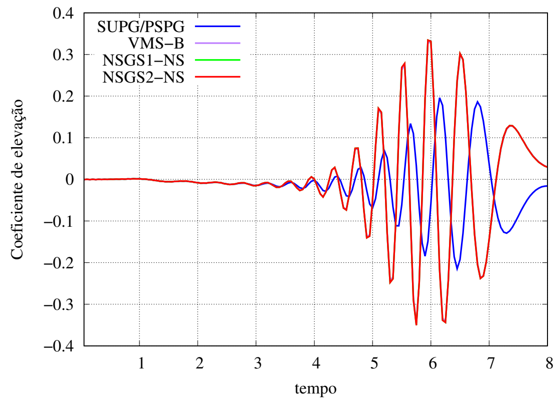
Os coeficientes de arrasto e de elevação são avaliados nos valores máximos para $t \in (0, 8)$ e a diferença de pressão é avaliada em $t = 8$. A Tab. 5.24 apresenta os valores de referência e os obtidos pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. Os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS geraram resultados idênticos. Observamos que os métodos multiescalas produzem valores próximos daqueles obtidos pela referência (JOHN; RANG, 2010; JOHN, 2016) a qual utilizam o par de espaços de elementos finitos Q_2/P_1^{disc}, satisfazendo a condição de estabilidade inf-sup, gerando um sistema com 2347776 graus de liberdade, enquanto que em nossos experimentos utilizamos os espaços P_1/P_1 gerando um sistema com 105318 graus de liberdade. A Fig. 5.33 mostra os gráficos dos coeficientes de arrasto, de elevação e a diferença de pressão para $t \in [0; 8]$. Observamos um comportamento similar entre os quatro métodos para os coeficientes de arrasto e diferença de pressão. Para o coeficiente de elevação, observamos um comportamento similar até $t = 4$ e um descolamento dos resultados obtidos pelo método SUPG/PSPG para $t > 4$. Quando comparado com os resultados apresentados em (JOHN; RANG, 2010; JOHN, 2016) os métodos multiescalas apresentam melhor acurácia para as três medidas de interesse.

Tabela 5.24 – Escoamento transiente em torno de um cilindro circular - Acurácia

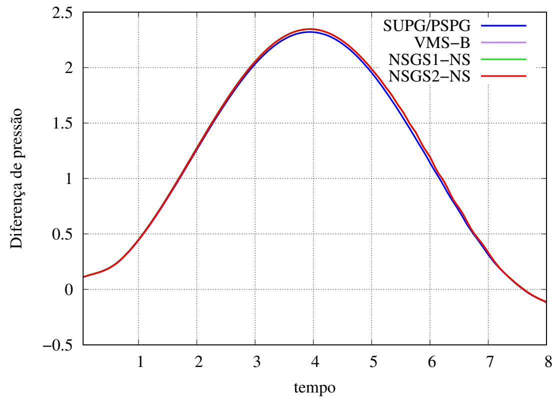
Coeficientes	(JOHN, 2016)		SUPG/PSPG		VMS-B		NSGS-NS (1 e 2)	
	Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo
$C_{drag,max}$	2,950918	3,93	2.98096	3,9	2.95048	3,9	2.95061	3,9
$C_{lift,max}$	0,477875	5,69	0.19604	5,65	0.32896	6.0	0.33432	5.95
$\Delta p(8)$	-0,111615		-0.118992		-0.112263		-0.112631	



(a) c_{drag}



(b) c_{lift}



(c) ΔP

Figura 5.33 – Escoamento transiente em torno do cilindro. Quantidades de interesse.

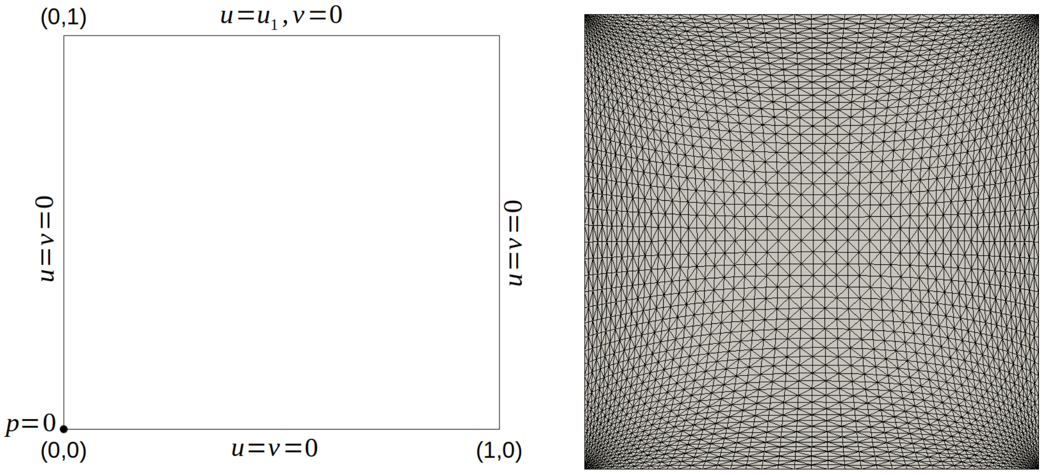
Na Tab. 5.25 são mostrados o número de iterações lineares e o tempo de processamento para os quatro métodos em estudo. Observamos que os métodos NSGS-NS apresentam um desempenho computacional melhor que os métodos VMS-B e SUPG/PSPG e que o método NSGS1-NS teve um desempenho sutilmente melhor que o método NSGS2-NS.

Tabela 5.25 – Escoamento transiente em torno de um cilindro circular - Desempenho computacional.

Método	$\#IL$	$CPU(s)$
SUPG/PSPG	32119	1268,26
VMS-B	32556	1345,85
NSGS1-NS	31603	1117,56
NSGS2-NS	31613	1118,99

5.2.2 Escoamento transiente no interior de uma cavidade quadrada

Apresentamos nesta seção as aproximações do escoamento transiente no interior de uma cavidade quadrada obtidas pelos quatro métodos em estudo com Reynolds 2500, 5000 e 7500. As condições de contorno são as mesmas dadas para o problema estacionário (ver Fig.5.34a), onde a velocidade da tampa, $y = 1,0$ é dada pela equação 5.1.4. Consideramos uma malha de elementos triangulares composta de 3721 nós e 7200 elementos conforme a Fig. 5.34b. Para a integração temporal definimos o passo de tempo $\Delta t = 10^{-2}$ e para os sistemas lineares resultantes utilizamos o precondicionador ILU10. Consideramos que o estado estacionário é atingido quando os desvios de velocidade normalizados em uma etapa são inferiores à tolerância $tol_{temp} = 10^{-5}$, $\|\boldsymbol{U}_h^{n+1} - \boldsymbol{U}_h^{n}\|/\|\boldsymbol{U}_h^{n+1}\| < tol_{temp}$, ou quando um número máximo de iterações temporal n é alcançado (ver **Passo 5** do Alg. 4).

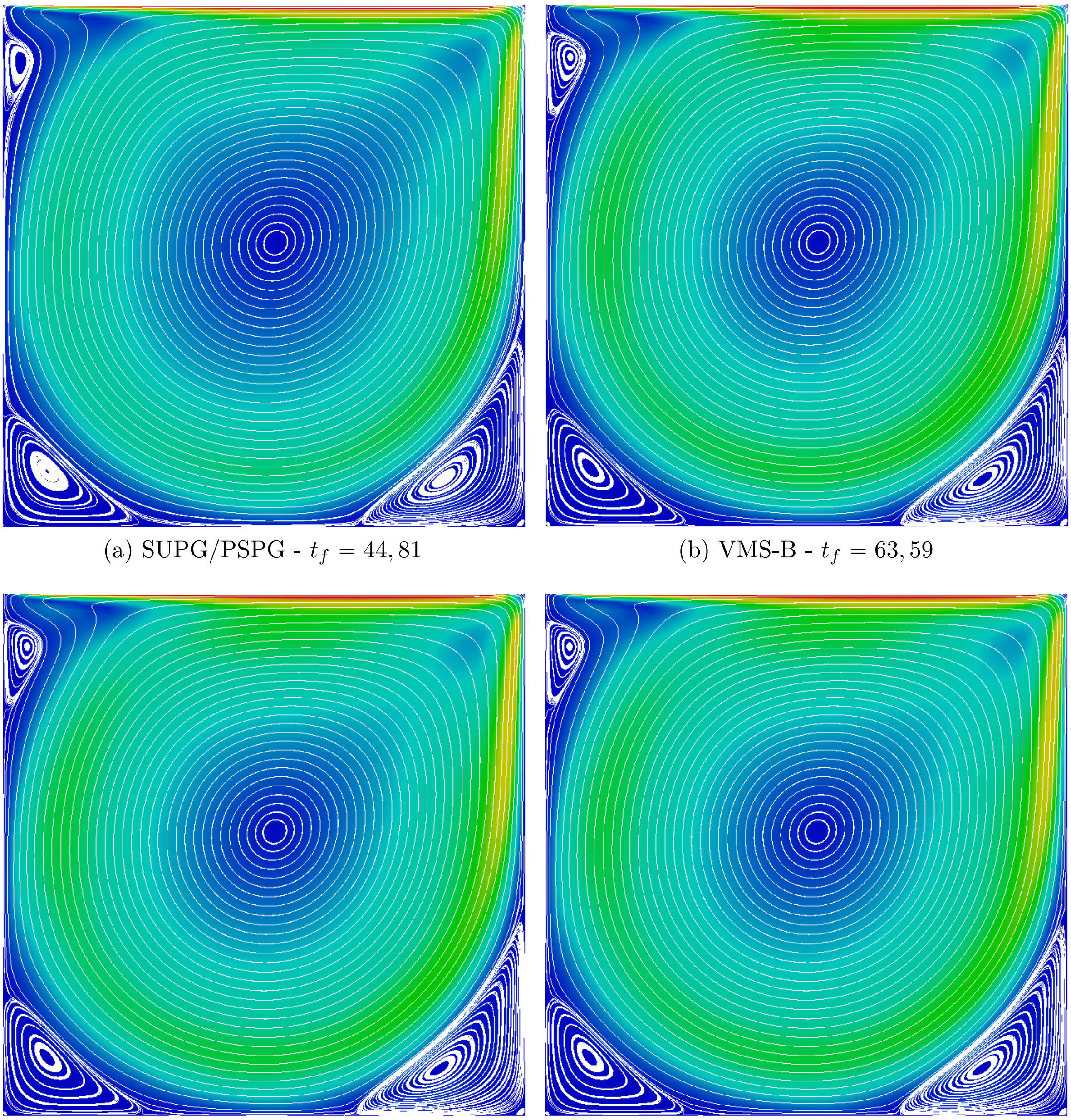


(a) Descrição do Problema.

(b) Malha com 3721 nós e 7200 elementos.

Figura 5.34 – Escoamento transiente no interior da cavidade quadrada.

As Figs. 5.35-5.37 apresentam as linhas de corrente para a velocidade no estado estacionário para os escoamentos com $Re = 2500, 5000$ e 7500 obtidas pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS. Para $Re = 2500$ os três métodos multi-escalas convergiram no tempo físico final $t_f = 63$ enquanto que o método SUPG/PSPG atingiu a tolerância temporal tol_{temp} em um tempo físico final menor, $t_f = 44,81$. Para $Re = 5000$ o método SUPG/PSPG não atingiu a tolerância temporal requerida tol_{temp}, o desvio de velocidade normalizado ficou oscilando em torno de 10^{-3}. Uma vez que o método VMS-B atingiu o estado estacionário em $t_f = 137,29$ e os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS convergiram no tempo $t_f = 126,85$ e $t_f = 126,88$ respectivamente (ver Fig. 5.36) consideramos $t_f = 140$ como tempo final para o método SUPG/PSPG. Para $Re = 7500$ apenas os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS atingiram a tolerância temporal requerida tol_{temp} em $t_f = 174,03$ e $t_f = 179,51$, respectivamente(ver Fig. 5.37). O método SUPG/PSPG teve comportamento análogo ao escoamento com $Re = 5000$ e o método VMS-B atingiu o tempo $t = 300$ sem que o desvio de velocidade normalizado atingisse a



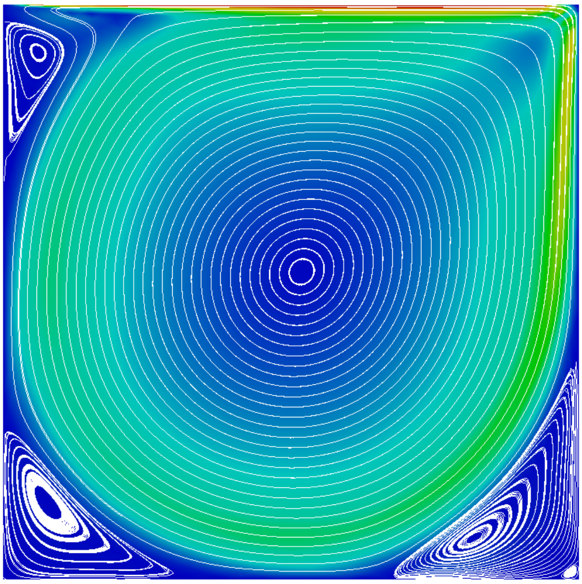
(a) SUPG/PSPG - $t_f = 44,81$ (b) VMS-B - $t_f = 63,59$

(c) NSGS1-NS - $t_f = 63,07$ (d) NSGS2-NS - $t_f = 63,03$

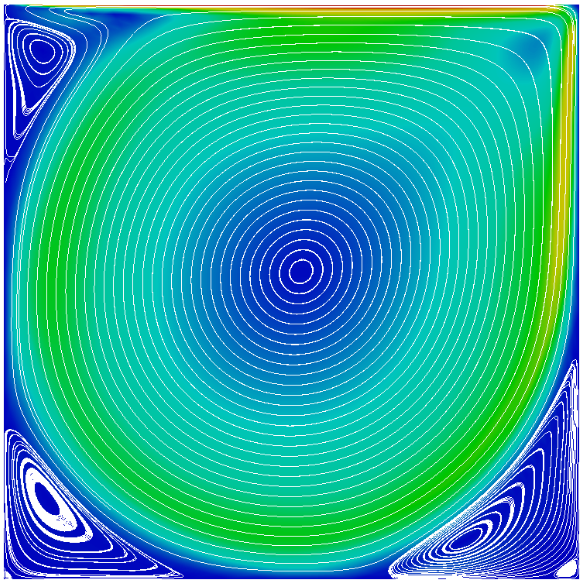
Figura 5.35 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 2500$.

tolerância temporal requerida tol_{temp}. Neste caso, para ambos os métodos SUPG/PSPG e VMS-B adotamos $t_f = 190$.

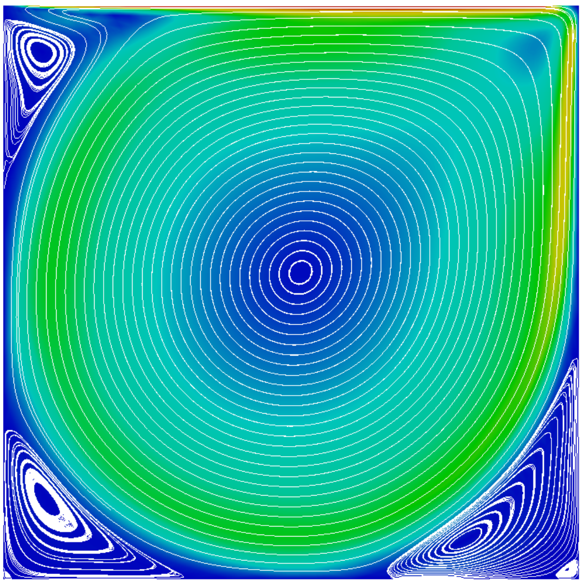
As Figs. 5.38-5.40 apresentam as isolinhas de pressão no estado estacionário para $Re = 2500, 5000$ e 7500 obtidas pelos quatro métodos em estudo. Observamos que para $Re = 5000$ e 7500 o método SUPG/PSPG apresenta oscilações no canto superior direito onde o campo de pressão tem maior valor. Por outro lado, os três métodos multiescala apresentam comportamentos similares nos três escoamentos considerados, com valores parecidos para as pressões máximas e mínimas (ver Tab. 5.26).



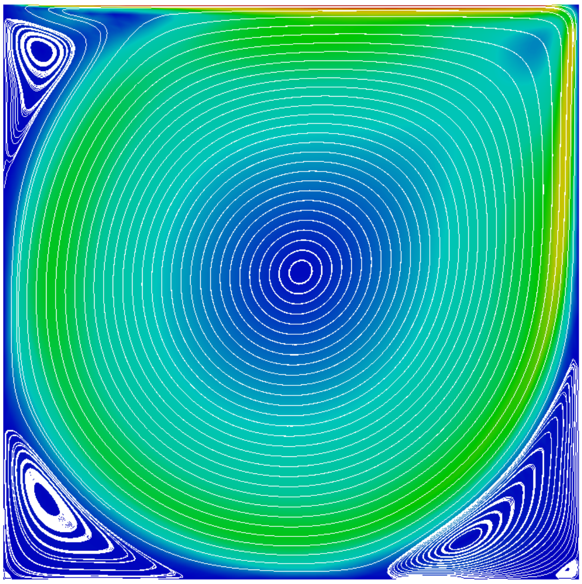
(a) SUPG/PSPG - $t_f = 140$



(b) VMS-B - $t_f = 137,29$

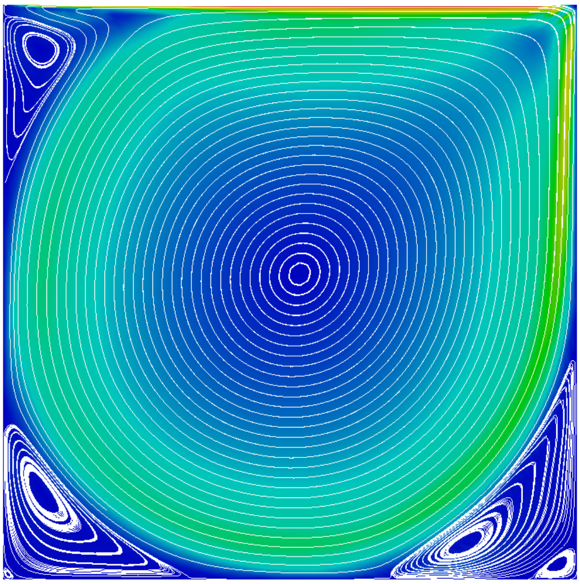


(c) NSGS1-NS - $t_f = 126,85$

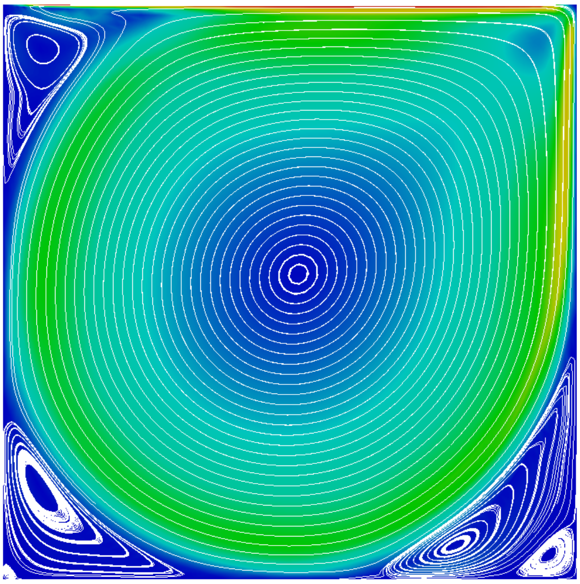


(d) NSGS2-NS - $t_f = 126,88$

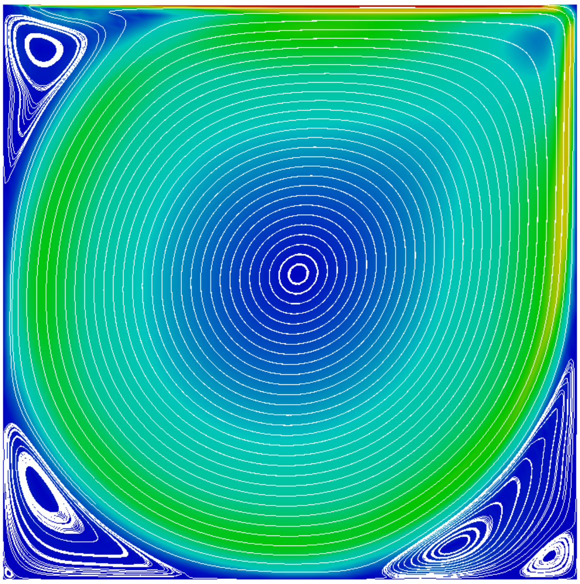
Figura 5.36 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 5000$.



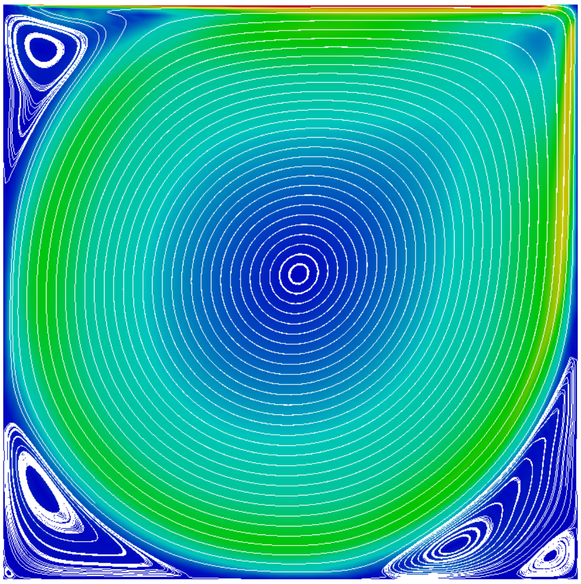
(a) SUPG/PSPG - $t_f = 190$



(b) VMS-B - $t_f = 190$

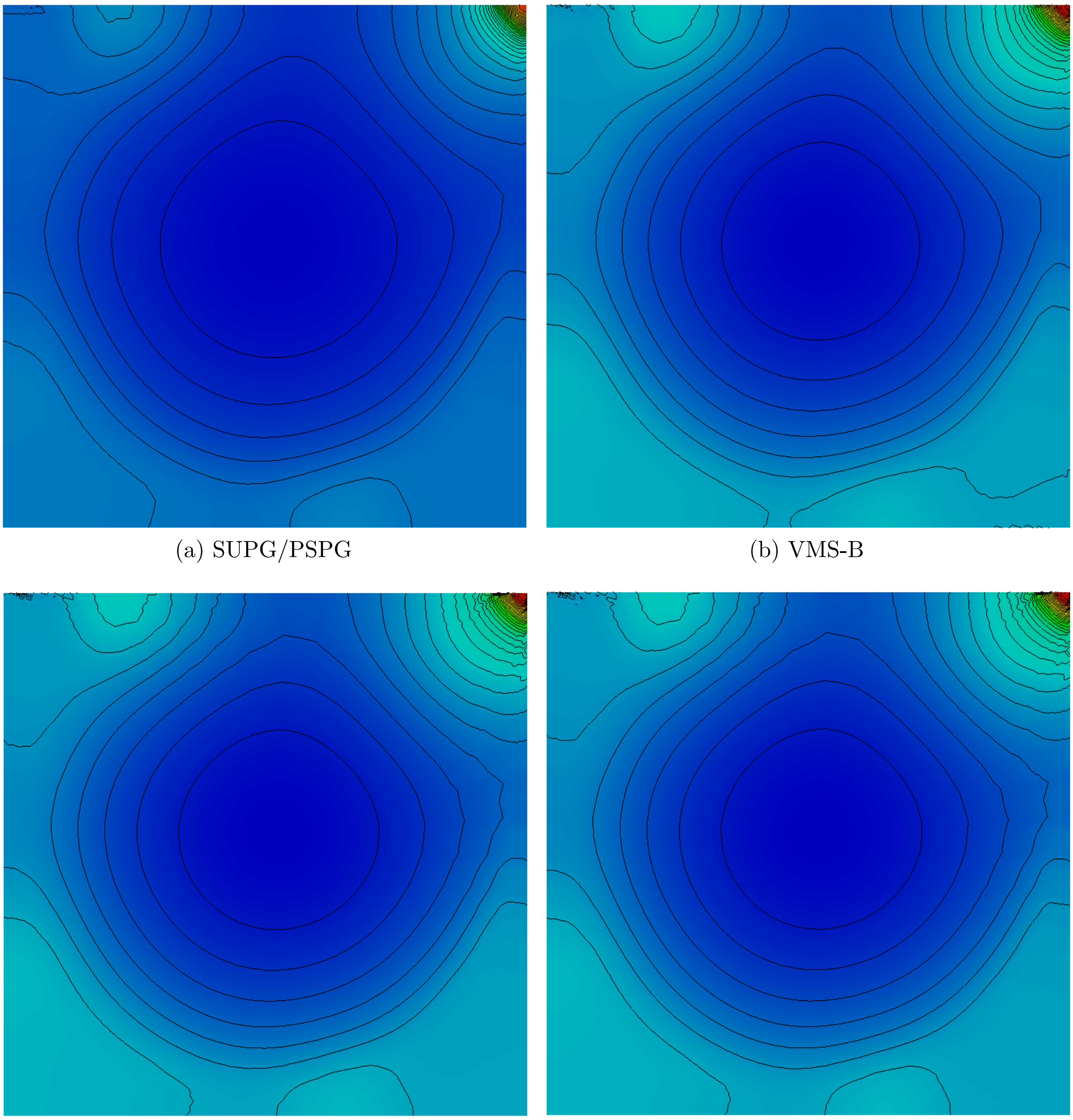


(c) NSGS1-NS - $t_f = 174,03$



(d) NSGS2-NS - $t_f = 179,51$

Figura 5.37 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Linhas de corrente para a velocidade $\boldsymbol{u}$ com $Re = 7500$.



(a) SUPG/PSPG (b) VMS-B

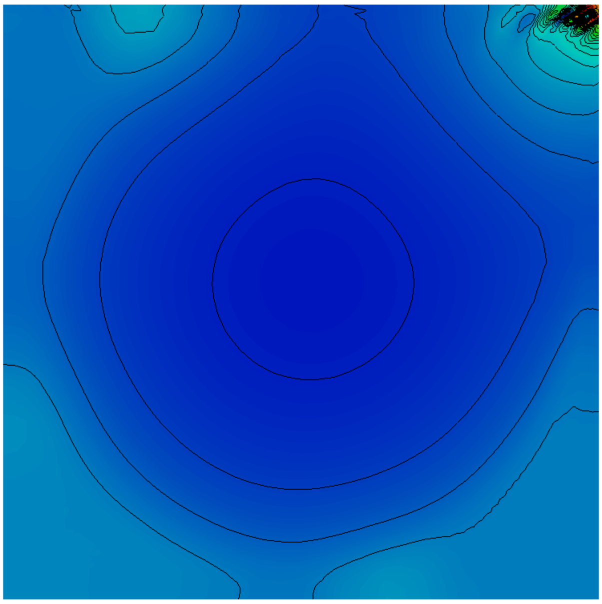
(c) NSGS1-NS (d) NSGS2-NS

Figura 5.38 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 2500$.

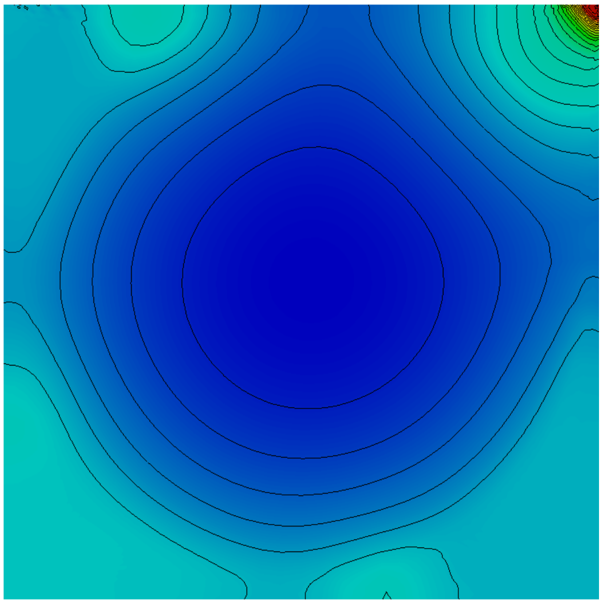
Tabela 5.26 – Escoamento no interior de uma cavidade - Valores da pressão máxima e mínima.

Métodos	$Re = 2500$		$Re = 5000$		$Re = 7500$	
	p_{min}	p_{max}	p_{min}	p_{max}	p_{min}	p_{max}
SUPG/PSPG	-0,000546	0,449865	-0,022890	0,472260	-0,095920	0,454900
VMS-B	-0,000888	0,527882	-0,000419	0,470124	-0,000249	0,438133
NSGS1-NS	-0,000907	0,550058	-0,000418	0,483136	-0,000237	0,442786
NSGS2-NS	-0,000883	0,549411	-0,000416	0,483452	-0,000240	0,444020

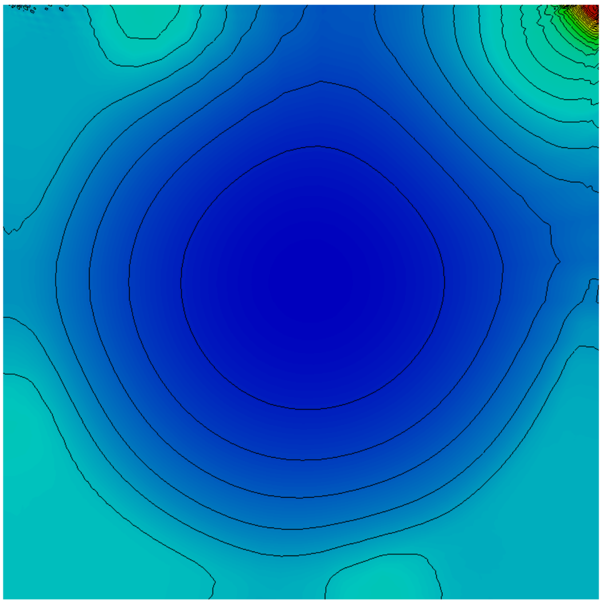
A Fig. 5.41 mostra a componente horizontal da velocidade ao longo da reta vertical



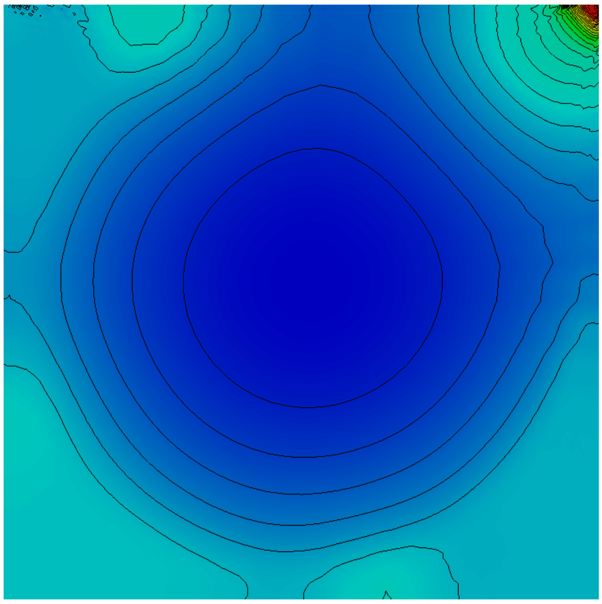
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B

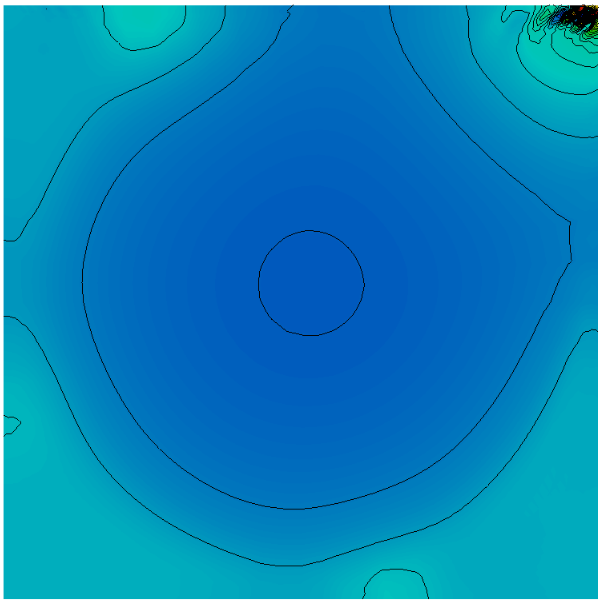


(c) NSGS1-NS

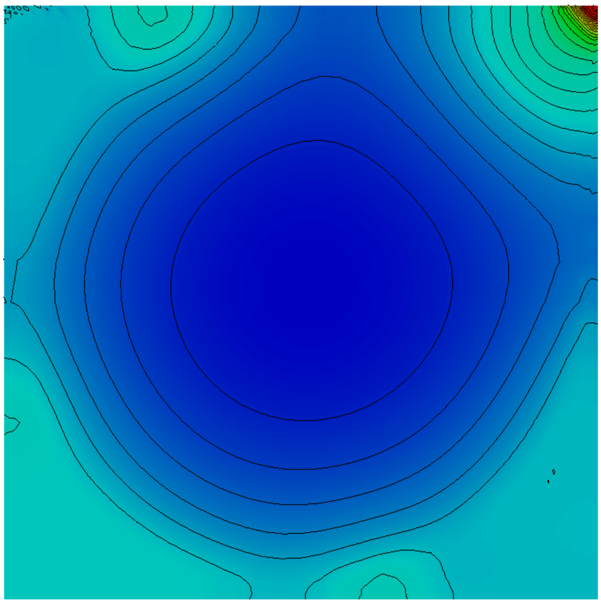


(d) NSGS2-NS

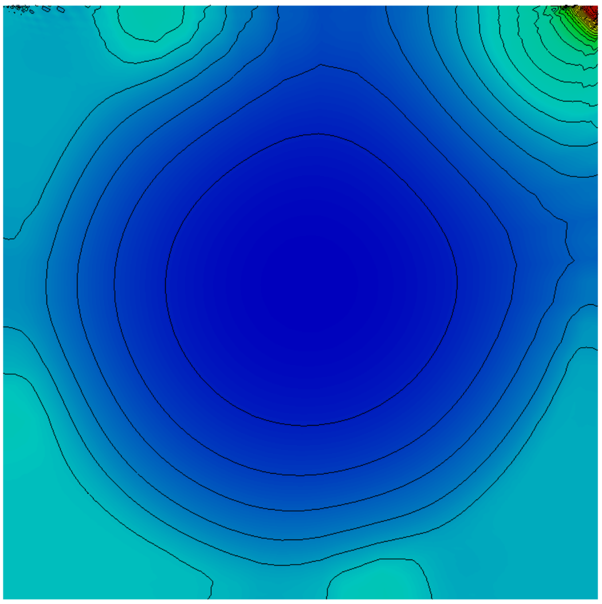
Figura 5.39 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 5000$.



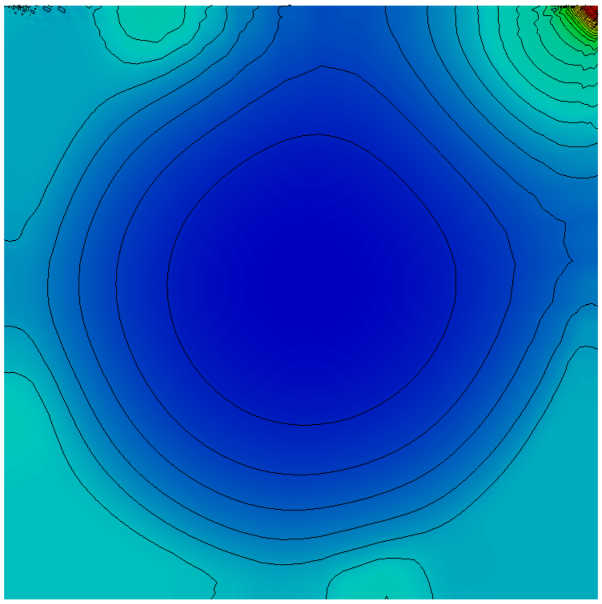
(a) SUPG/PSPG



(b) VMS-B



(c) NSGS1-NS



(d) NSGS2-NS

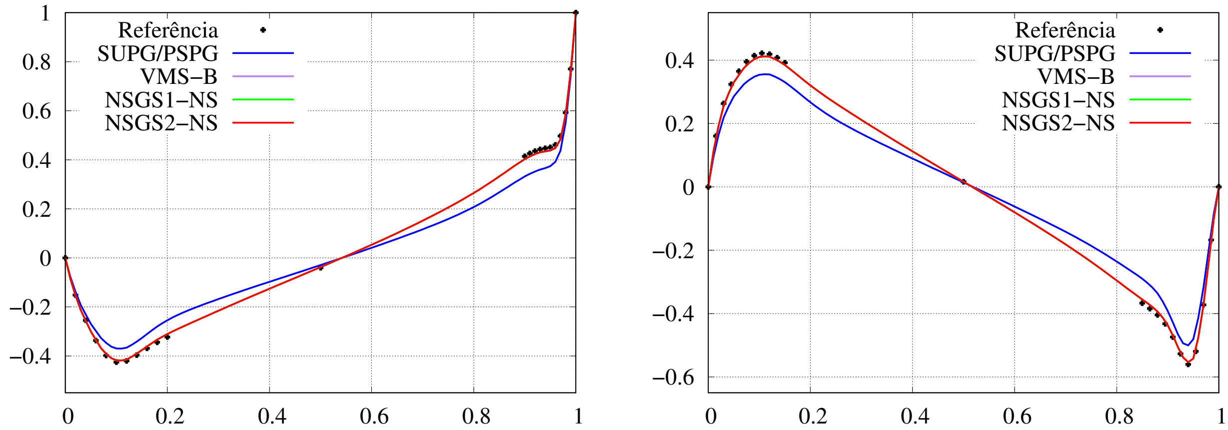
Figura 5.40 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade. Isolinhas de pressão com $Re = 7500$.

$x = 0,5$ e a componente vertical da velocidade ao longo da reta horizontal $y = 0,5$, para $Re = 2500, 5000$ e 7500, obtidas pelos métodos SUPG/PSPG, VMS-B, NSGS1-NS e NSGS2-NS no estado estacionário. Podemos observar que os três métodos multiescalas estão em concordância com os valores de referência fornecidos em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005) e que o método SUPG/PSPG apresenta um perfil de velocidade menos desenvolvido, característico de escoamento mais viscoso.

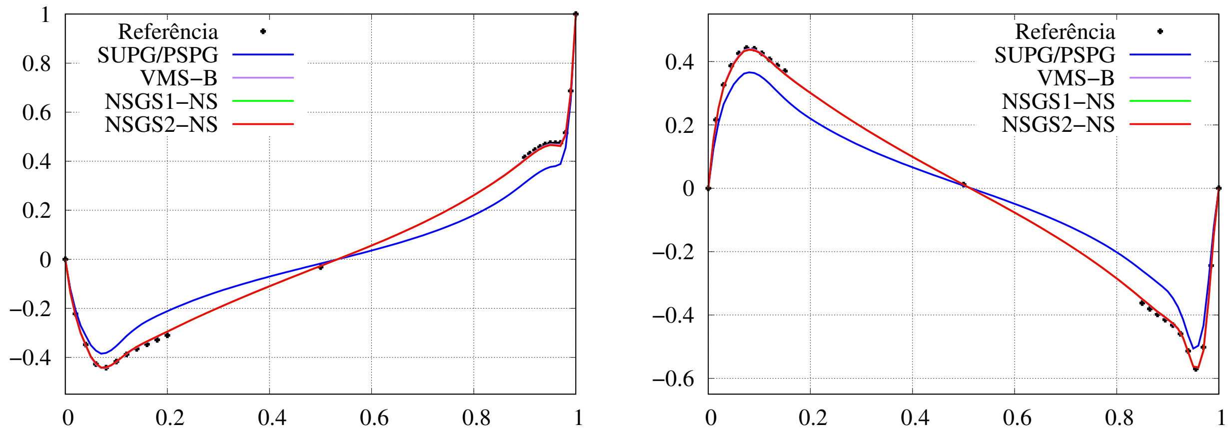
A Tab. 5.27 apresenta o desempenho computacional dos quatro métodos em estudo onde $\#MC$ é a média de correções em cada passo de tempo. Observamos que o a quantidade média de correções é consideravelmente inferior ao número máximo adotado $i_{max} = 7$. Para $Re = 2500$ o método SUPG/PSPG apresenta um custo computacional menor que os métodos multiescalas porém, como vimos na Fig. 5.41a estes possuem uma acurácia melhor. Para escoamentos com valores de Reynolds mais elevados, $Re = 5000$ e 7500, os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS apresentam um desempenho computacional melhor quando comparados com os métodos VMS-B e SUPG/PSPG.

Tabela 5.27 – Escoamento transiente no interior de uma cavidade - Desempenho computacional.

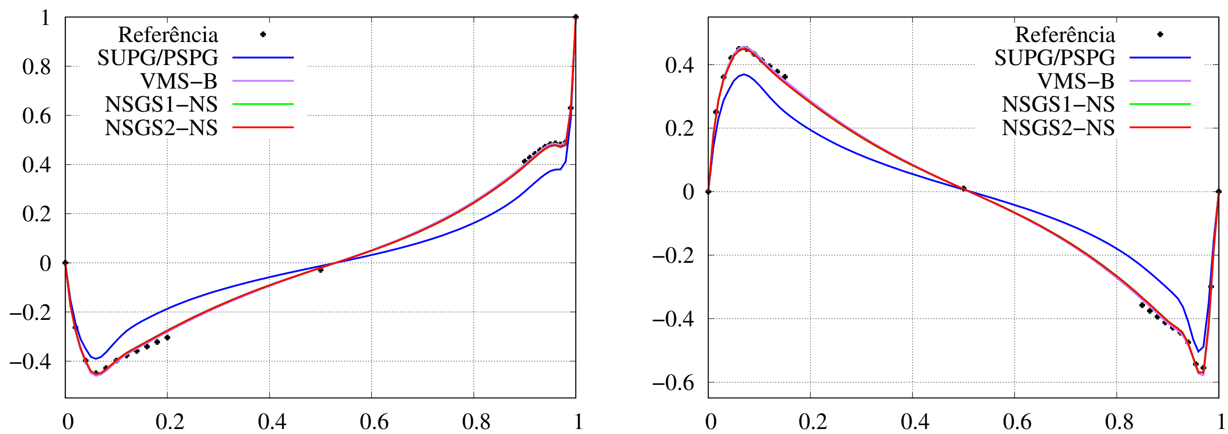
Métodos	$Re = 2500$			$Re = 5000$			$Re = 7500$		
	$\#IL$	$\#MC$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#MC$	$CPU(s)$	$\#IL$	$\#MC$	$CPU(s)$
SUPG/PSPG	174274	3,0	2803,79	515012	5,2	8464,24	751156	5,6	12635,31
VMS-B	252816	3,1	4210,73	582634	3,3	9192,51	979812	4,0	16551,13
NSGS1-NS	255375	3,1	4161,30	502652	3,0	8190,56	722863	3,2	12063,16
NSGS2-NS	255079	3,1	4132,22	502001	3,0	7945,44	730329	3,1	12147,75



(a) $Re = 2500$



(b) $Re = 5000$



(c) $Re = 7500$

Figura 5.41 – Escoamento no interior de uma cavidade. Esquerda: velocidade horizontal sobre a reta vertical $x = 0,5$, direita: velocidade vertical sobre a reta horizontal $y = 0,5$. Valores de referência fornecidos em (ERTURK; CORKE; GÖKÇÖL, 2005).

6 Conclusão

Neste trabalho apresentamos dois métodos não lineares submalha para problemas regidos pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis, denominados métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS. Os métodos são baseados em uma decomposição em duas escalas dos espaços de aproximação dos campos de velocidades e pressão. Uma difusão artificial não linear agindo somente na micro escala é adicionada. A quantidade de viscosidade submalha é automaticamente introduzida de acordo com o resíduo da equação associada à escala resolvida, à nível de elemento, produzindo um método consistente e auto adaptativo. O método NSGS1-NS considera apenas o resíduo da equação da quantidade de movimento na definição da viscosidade artificial. No método NSGS2-NS são incluídos os efeitos viscosos provenientes do resíduo da equação de conservação de massa na composição da viscosidade artificial.

O espaço da escala submalha é definido usando funções bolha para reduzir o custo computacional dos métodos típicos de duas escalas. Ao realizar a condensação estática, a incógnita velocidade na micro escala é condensada nos graus de liberdade da escala resolvida. A metodologia leva a um esquema não linear apenas na macro escala, o qual foi resolvido pelo método de Picard. Na abordagem de problemas com elevados número de Reynolds foi necessário o uso da técnica de amortecimento da solução durante o processo de linearização, dada em (JOHN; KNOBLOCH, 2008).

Soluções obtidas com os métodos multiescalas NSGS1-NS e NSGS2-NS são comparadas com as obtidas pelo método estabilizado SUPG/PSPG apresentado em (TEZDUYAR, 2001). Aa taxas de convergência, para a velocidade e pressão, nas normas $L2$ e $H1$ obtidas para os nossos métodos são semelhantes àquelas obtidas com a técnica de estabilização SUPG/PSPG. Com 4 problemas bidimensionais de referência ilustramos a robustez dos métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS, mostrando seu comportamento usando elementos triangulares lineares por partes enriquecidos por funções tipo bolha com malhas estruturadas e não estruturadas. As experiências numéricas demonstraram que as soluções obtidas com nossos métodos variacionais multiescala não lineares são comparáveis àquelas obtidas com o método SUPG/PSPG nos problemas apresentados: escoamento em torno de um cilindro circular, escoamento com alargamento de canal e escoamento no interior de uma cavidade quadrada. Destacamos que, para o problema da cavidade unitária, o método NSGS2-NS produz soluções mais acuradas enquanto que para o problema do canal com degrau os métodos NSGS1-NS e NSGS2-NS são mais eficientes e apresentaram soluções mais acuradas que as produzidas pelos métodos SUPG/PSPG.

Destacamos que os métodos multiescalas NSGS1-NS e NSGS2-NS apresentados neste trabalho se mostraram robustos e eficientes na simulação de escoamentos em regime estacionário com altos números de Reynolds, por exemplo o escoamento no interior da cavidade unitária com $Re = 20000$. No entanto, nossos experimentos em regime transiente ficaram limitados a escoamentos com Reynolds menores, por exemplo escoamento no interior da cavidade unitária com $Re = 7500$. Uma proposta de trabalho futuro, consiste em explorar a robustez dos métodos NSGS-NS em problemas transientes com elevados números de Reynolds. Para isto, pretendemos aplicar o método de múltiplos passos conhecido por *Backward Differentiation Formulas*(BDF) como apresentado em (HAY et al., 2015). Quando aplicado a métodos variacionais multiescalas para as equações de Euler compressíveis (BENTO, 2018), o método preditor corretor baseado em BDF apresentou melhor acurácia e desempenho computacional quando comparado com método preditor corretor clássico.

Referências

ALIABADI, S. K.; TEZDUYAR, T. E. Parallel fluid dynamics computations in aerospace applications. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 21, n. 10, p. 783–805, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.1650211003>.

ARMALY, B. F.; DURST, F.; PEREIRA, J.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 127, p. 473–496, 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0022112083002839>.

ARNOLD, D. N.; BREZZI, F.; FORTIN, M. A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*, Springer, v. 21, n. 4, p. 337–344, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02576171>.

BAPTISTA, R.; BENTO, S. S.; LIMA, L. M.; SANTOS, I. P.; VALLI, A. M.; CATABRIGA, L. A nonlinear subgrid stabilization parameter-free method to solve incompressible navier-stokes equations at high reynolds numbers. In: SPRINGER, CHAM. Computational Science and Its Applications – ICCSA, 2019. v. 11621, p. 134–148. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-24302-9_11>.

BAPTISTA, R.; BENTO, S. S.; SANTOS, I. P.; LIMA, L. M.; VALLI, A. M.; CATABRIGA, L. A multiscale finite element formulation for the incompressible navier-stokes equations. In: SPRINGER, CHAM. Computational Science and Its Applications – ICCSA, 2018. v. 10961, p. 253–267. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95165-2_18>.

BAZILEVS, Y.; CALO, V.; COTTRELL, J.; HUGHES, T.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, n. 1–4, p. 173–201, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.07.016>.

BEHR, M. A.; FRANCA, L. P.; TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 104, n. 1, p. 31–48, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90205-C>.

BENTO, S. S. *Nonlinear multiscale viscosity methods and time integration schemes for solving compressible Euler equations*. Tese (Tese de Doutorado) — PPGI/UFES, 2018. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/10727>.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Fenômenos de Transporte, 2ª edição*. Rio de janeiro: LTC, 2004. Disponível em: <www.ltceditora.com.br>.

BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, Dunod, v. 8, n. R2, p. 129–151, 1974. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/m2an/197408R201291>.

BREZZI, F.; BRISTEAU, M.; FRANCA, L.; MALLET, M.; ROGE, G. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 96, n. 1, p. 117–129, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90102-P>.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, v. 32, p. 199–259, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8>.

CALO, V. M. *Residual-based multiscale turbulence modeling: Finite volume simulations of bypass transition*. Tese (PhD) — Stanford University, Stanford, CA, 2005. Disponível em: <http://www.ices.utexas.edu/victor/vmc-thesis.pdf>.

CAREY, G.; KRISHNAN, R. Penalty approximation of Stokes flow. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, v. 35, p. 169–206, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90133-5>.

CATABRIGA, L. *Soluções implícitas das equações de Euler empregando estruturas de dados por aresta*. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, 2000. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/144-2000/898-lucia-catabriga>.

CODINA, R. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 191, n. 39-40, p. 4295–4321, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00337-7>.

CODINA, R.; BADIA, S.; BAIGES, J.; PRINCIPE, J. Variational multiscale methods in computational fluid dynamics. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*. Wiley Online Library, 2017. p. 1–28. ISBN 9781119176817. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/9781119176817.ecm2117>.

CODINA, R.; BLASCO, J. A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 2681–2706, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00260-7>.

DONEA, J.; HUERTA, A. *Finite element methods for flow problems*. John Wiley & Sons, 2003. ISBN 9780471496663. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/0470013826>.

ELIAS, R. N. *Métodos Tipo-Newton Inexatos para a Solução de Problemas Não-Lineares Resultantes da Formulação SUPG/PSPG das Equações de Navier-Stokes Incompressíveis em Regime Permanente*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ, 2003. Disponível em: <http://docplayer.com.br/81617203-Renato-nascimento-elias.html>.

ELMAN, H. C.; SILVESTER, D. J.; WATHEN, A. J. *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*. 2ª. ed. Oxford University, USA: Oxford University Press, USA, 2014. ISBN 978-0-19-967880-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199678792.001.0001>.

ERTURK, E. Numerical solutions of 2-d steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High reynolds number solutions. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 37, n. 6, p. 633–655, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.09.003>.

ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *International journal for Numerical Methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 48, n. 7, p. 747–774, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.953>.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos, 5ª edição*. Rio de janeiro: LTC, 2001. Disponível em: <www.ltceditora.com.br>.

FRANCA, L.; FARHAT, C. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 123, n. 1, p. 299–308, 1995. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)00721-X>.

FRANCA, L. P.; FREY, S. L. Stabilized finite element methods: Ii. the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 99, n. 2, p. 209–233, 1992. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90041-H>.

FRANCA, L. P.; HUGHES, T. J. Two classes of mixed finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 69, n. 1, p. 89–129, 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90168-5>.

FRANCA, L. P.; OLIVEIRA, S. P. Pressure bubbles stabilization features in the stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 192, n. 16, p. 1929–1937, 2003. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00628-X>.

FRUTOS, J. de; JOHN, V.; NOVO, J. Projection methods for incompressible flow problems with WENO finite difference schemes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 309, p. 368–386, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.12.041>.

GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. D. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 68, n. 1, p. 83–95, 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782588901089>.

GARTLING, D. K. A test problem for outflow boundary conditions-flow over a backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 11, n. 7, p. 953–967, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.1650110704>.

GRAVEMEIER, V. The variational multiscale method for laminar and turbulent flow. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 13, n. 2, p. 249, Jun 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02980231>.

GRAVEMEIER, V.; WALL, W. A.; RAMM, E. A three-level finite element method for the instationary incompressible navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 193, n. 15-16, p. 1323–1366, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.027>.

GRESHO, P. M.; SANI, R. L. *Incompressible flow and the finite element method. Volume 1: Advection-diffusion and isothermal laminar flow*. John Wiley and Sons, Inc., 2020. v. 1. ISBN 978-0-471-49249-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0022112099237962>.

GRIEBEL, M.; DORNSEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. ISBN 0-89871-398-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9780898719703>.

GUERMOND, J. Subgrid stabilization of Galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 21, n. 1, p. 165–197, 01 2001. ISSN 0272-4979. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/imanum/21.1.165>.

GUERMOND, J.-L. Stabilization of galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 33, n. 6, p. 1293–1316, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/m2an:1999145>.

GUERMOND, J.-L.; MARRA, A.; QUARTAPELLE, L. Subgrid stabilized projection method for 2d unsteady flows at high reynolds numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44, p. 5857 – 5876, 2006. ISSN 0045-7825. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505004524>.

HACHEM, E.; RIVAUX, B.; KLOCZKO, T.; DIGONNET, H.; COUPEZ, T. Stabilized finite element method for incompressible flows with high reynolds number. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 229, n. 23, p. 8643–8665, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.07.030>.

HANSBO, P.; SZEPESSY, A. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 84, n. 2, p. 175–192, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90116-4>.

HAY, A.; ETIENNE, S.; PELLETIER, D.; GARON, A. hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows. *Journal of Computational Physics*, v. 291, p. 151 – 176, 2015. ISSN 0021-9991. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115001692>.

HUGHES, T. J. Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 7, n. 11, p. 1261–1275, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.1650071108>.

HUGHES, T. J.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J.-B. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 166, n. 1-2, p. 3–24, 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00079-6>.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the babuška-brezzi condition: A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85–99, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90025-3>.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2,

p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782589901114>.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; BROOKS, A. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 1–60, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90086-X>.

HUGHES, T. J.; WELLS, G. N. Conservation properties for the galerkin and stabilised forms of the advection–diffusion and incompressible Navier–Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 194, n. 9-11, p. 1141–1159, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.034>.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 127, n. 1-4, p. 387–401, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00844-9>.

JOHN, V. *Finite element methods for incompressible flow problems*. Springer, 2016. ISBN 978-3-319-45749-9. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-45750-5>.

JOHN, V.; KNOBLOCH, P. On spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection–diffusion equations: Part II–Analysis for P1 and Q1 finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 21-24, p. 1997–2014, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.019>.

JOHN, V.; MATTHIES, G. Higher-order finite element discretizations in a benchmark problem for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 37, n. 8, p. 885–903, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.195>.

JOHN, V.; RANG, J. Adaptive time step control for the incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 199, n. 9-12, p. 514–524, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.10.005>.

JOHNSON, C.; PITKÄRANTA, J. Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration. *Mathematics of Computation*, v. 38, n. 158, p. 375–400, 1982. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1982-0645657-2>.

KELLEY, C. T. *Solving nonlinear equations with Newton's method*. SIAM, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718898>.

MASUD, A.; KHURRAM, R. A multiscale finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 195, n. 13-16, p. 1750–1777, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.048>.

PETERSON, J. W.; LINDSAY, A. D.; KONG, F. Overview of the incompressible Navier–Stokes simulation capabilities in the MOOSE framework. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 119, p. 68–92, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.02.004>.

RISPOLI, F.; CORSINI, A.; TEZDUYAR, T. E. Finite element computation of turbulent flows with the discontinuity-capturing directional dissipation (DCDD). *Computers & fluids*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 121–126, 2007. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793005001337>.

SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. 2ª. ed. Siam, 2003. ISBN 978-0-89871-534-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>.

SANTOS, I. *Métodos Submalhas Não Lineares Para o Problema de Convecção-Difusão-Reação*. Tese (Doutorado) — LNCC, 2007. Disponível em: <https://tede.lncc.br/handle/tede/80>.

SANTOS, I. P.; ALMEIDA, R. C. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, p. 4771–4778, 2007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.06.009>.

SANTOS, I. P.; ALMEIDA, R. C.; MALTA, S. M. C. Numerical analysis of the nonlinear subgrid scale method. *Computational & Applied Mathematics*, SciELO Brasil, v. 31, n. 3, p. 473–503, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1807-03022012000300003>.

SCHÄFER, M.; TUREK, S.; DURST, F.; KRAUSE, E.; RANNACHER, R. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. *Flow simulation with high-performance computers II*, Springer, p. 547–566, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-89849-4_39>.

SEDANO, R. Z. *Métodos multiescala para as equações de Euler compressíveis*. Dissertação (Mestrado) — PPGI/UFES, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/4303>.

SHAKIB, F.; HUGHES, T. J.; JOHAN, Z. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. the compressible euler and navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 89, n. 1-3, p. 141–219, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90041-4>.

TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. American Mathematical Soc., 2001. v. 343. ISBN 978-0-8218-2737-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/chel/343>.

TEZDUYAR, T.; PARK, Y. Discontinuity-capturing finite element formulations for nonlinear convection-diffusion-reaction equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 59, n. 3, p. 307–325, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90003-4>.

TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations. *Journal of computational and applied mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003. Disponível em: <https://www.tafsm.org>.

TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: *Advances in applied mechanics*. Elsevier, 1991. v. 28, p. 1–44. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70153-4>.

TEZDUYAR, T. E. Adaptive determination of the finite element stabilization parameters. Proceedings of the ECCOMAS computational fluid dynamics conference, sep 2001. Disponível em: <https://www.tafsm.org>.

TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 411–430, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00211-5>.

TOBISKA, L.; LUBE, G. A modified streamline diffusion method for solving the stationary Navier-Stokes equation. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 59, n. 1, p. 13–29, 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01385768>.

TOBISKA, L.; VERFÜRTH, R. Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 33, n. 1, p. 107–127, 1996. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2158427>.

VALLI, A. M.; ALMEIDA, R. C.; SANTOS, I. P.; CATABRIGA, L.; MALTA, S. M.; COUTINHO, A. L. A parameter-free dynamic diffusion method for advection–diffusion–reaction problems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 307–321, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.09.020>.

VALLI, A. M. P. *Control Strategies for timestep selection in finite element simulation of incompressible flows and coupled heat and mass transferer*. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, 2001. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/pt/teses-de-doutorado/145-2001/912-andrea-maria-pedrosa-valli>.

ZHAO, S.; XIAO, X.; TAN, Z.; FENG, X. Two types of spurious oscillations at layers diminishing methods for convection–diffusion–reaction equations on surface. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Taylor & Francis, v. 74, n. 7, p. 1387–1404, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10407782.2018.1538292>.

Apêndices

APÊNDICE A – Matrizes e vetores elementares

Neste Apêndice são apresentadas as matrizes dos elementos associadas aos sistemas resultante das formulações descritas nos Aapítulos (2) e (3).

As aproximações de elementos finitos para as variáveis $\mathbf{U}_h$, P_h e $\mathbf{U}_B$, são dadas a nível de elemento triangular linear da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_h = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{N}_j \mathbf{U}_{h,j}^e \tag{A.1}$$

$$P_h = \sum_{j=1}^{3} N_j P_{h,j}^e \tag{A.2}$$

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{N}_B \mathbf{U}_{B,j}^e \tag{A.3}$$

onde $\mathbf{N}_j = N_j \mathbf{I}_2$ é uma matriz diagonal de N_j, que é a função de interpolação local do método de Galerkin associado ao ponto nodal j, com $i = 1, 2, 3$, do elemento Ω^e, assim

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1\mathbf{I}_2 & N_2\mathbf{I}_2 & N_3\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{2\times 6} \tag{A.4}$$

é a matriz de interpolação das funções de Galerkin e

$$\mathbf{N}_B = [N_B \mathbf{I}_2]_{2\times 2} \tag{A.5}$$

é a matriz de interpolação da função bolha.

Buscando simplificar as funções de interpolação, realiza-se uma transformação de variáveis globais (x, y) para variáveis locais (ξ, η), conforme representada na Figura A.1. Após esta transformação, as funções de interpolação N_j podem ser definidas como

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi \\ N_2 &= \eta \\ N_3 &= 1 - \xi - \eta \end{aligned} \tag{A.6}$$

e a função bolha N_B definida da forma

$$N_B = 27 N_1 N_2 N_3. \tag{A.7}$$

A matriz Jacobiana que define a transformação das coordenadas globais para as coordenadas locais é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & -x_{32} \\ -y_{31} & y_{23} \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{A.8}$$

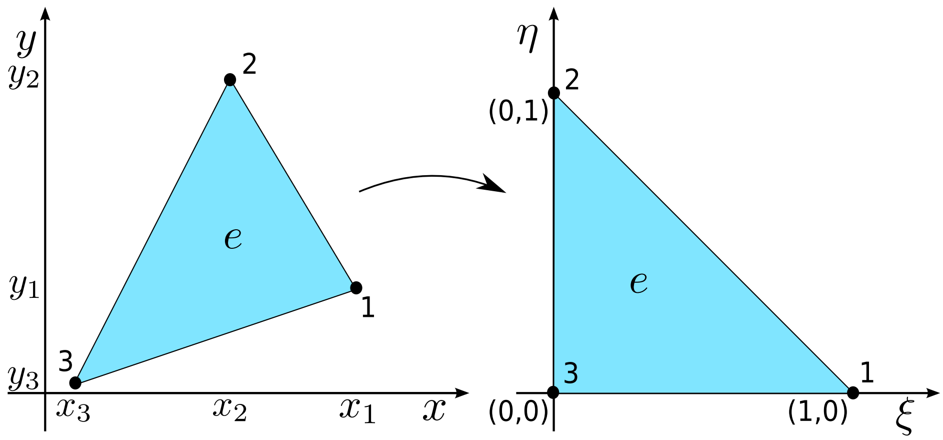


Figura A.1 – Transformação de variáveis globais (x, y) para variáveis locais (ξ, η).

onde $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$, com x_i e y_j as coordenadas dos pontos nodais do elemento Ω^e, $i, j = 1, 2, 3$. A inversa da matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \end{bmatrix}_{2\times 2} \tag{A.9}$$

onde A^e é a área do elemento Ω^e definida como

$$A^e = \frac{x_{21}y_{31} - x_{13}y_{12}}{2}. \tag{A.10}$$

O operador gradiente discreto das funções de interpolação do método de elementos finitos de Galerkin é definido por

$$\nabla\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} y_{23}\mathbf{I}_2 & y_{31}\mathbf{I}_2 & y_{12}\mathbf{I}_2 \\ x_{32}\mathbf{I}_2 & x_{13}\mathbf{I}_2 & x_{21}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{4\times 6}, \tag{A.11}$$

para utilizações futuras, difinimos

O operador gradiente discreto associado às funções bolhas do método de Galerkin é dado por

$$\nabla\mathbf{N}_B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}_B}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}_B}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{27}{2A^e}\begin{bmatrix} (y_{23}N_2N_3 + y_{31}N_1N_3 + y_{12}N_1N_2)\mathbf{I}_2 \\ (x_{32}N_2N_3 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_1N_2)\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{4\times 2}, \tag{A.12}$$

As integrais presentes nas formulações podem ser resolvidas facilmente de forma analítica, usando a fórmula de integração sobre elementos triangulares lineares

$$\int_{\Omega^e} N_1^a N_2^b N_3^c \, d\Omega^e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2A^e, \tag{A.13}$$

onde A^e é a área do elemento Ω^e calculado como na Eq. (A.10) e N_i, $i = 1, 2, 3$, as funções de interpolação do método de Galerkin definida na Eq. (A.7).

Nas próximas seções são apresentadas as matrizes elementares a partir da formulação de Galerkin, do método SUPG e do método multiescala.

A.1 Matrizes e vetores locais da formulação de Galerkin

As matrizes locais da formulação de Galerkin, dadas pelas expressões (2.30), são apresentadas pelas matrizes de massa $\boldsymbol{M}_{hh}$, convecção $\boldsymbol{N}_{hh}$, viscosa $\boldsymbol{K}_{hh}$, pressão $\boldsymbol{G}_{hh}$ e pressão transposta $\boldsymbol{G}_{hh}^T$, e pelo vetor força $\boldsymbol{F}_{hh}$.

Veremos a seguir cada uma dessas estruturas.

A.1.1 Matriz de massa de Galerkin M_{hh}

A matriz de massa local $\boldsymbol{M}_{hh}$ proveniente do método de Galerkin é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a e_i \cdot \dot{U}_b^j N_b e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a N_b d\Omega \, \dot{U}_b^j,
\end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o delta de *Kronecker*, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ e $1 \leqslant a, b \leqslant 3$.

Uma vez que

$$\int_{\Omega^e} N_a^2 \; d\Omega = \frac{A^e}{6} \quad \text{e} \quad \int_{\Omega^e} N_a N_b \; d\Omega = \frac{A^e}{12}$$

e sendo $\mathbf{I}_2$ a matriz identidade de ordem dois, segue que $\boldsymbol{M}_{hh}$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{hh} &= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a N_b d\Omega \\
&= \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & 2\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 & 2\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A.1.2 Matriz de convecção de Galerkin N_{hh}

A matriz de convecção local $\boldsymbol{N}_{hh}$ proveniente do método de Galerkin é associada ao termo,

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega$$

No decorrer deste texto, trataremos a não linearidade do termo de convecção, aproximando a velocidade convectiva $\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h$ calculado a partir da iteração não linear anterior,

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} u_1^x + u_2^x + u_3^x \\ u_1^y + u_2^y + u_3^y \end{bmatrix}. \tag{A.14}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} N_a e_i \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) U_b^j N_b e_j d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_b) d\Omega \; U_b^j. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_{\Omega^e} N_a \; d\Omega = \frac{A^e}{3}$$

segue que $\boldsymbol{N}_{hh}$ é dada por,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{hh} &= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_b) d\Omega \\ &= \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 \mathbf{I}_2 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 \mathbf{I}_2 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 \mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} C_1 \mathbf{I}_2 & C_2 \mathbf{I}_2 & C_3 \mathbf{I}_2 \\ C_1 \mathbf{I}_2 & C_2 \mathbf{I}_2 & C_3 \mathbf{I}_2 \\ C_1 \mathbf{I}_2 & C_2 \mathbf{I}_2 & C_3 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde
$C_1 = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1,\; C_2 = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2$ e $C_3 = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3$.

A.1.3 Matriz viscosa de Galerkin K_{hh}

A matriz viscosa local $\boldsymbol{K}_{hh}$ proveniente do método de Galerkin é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_h : 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \mu \nabla \boldsymbol{w}_h : [\nabla \boldsymbol{u}_h + (\nabla \boldsymbol{u}_h)^T] d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \mu [\nabla \boldsymbol{w}_h : \nabla \boldsymbol{u}_h + \nabla \boldsymbol{w}_h : (\nabla \boldsymbol{u}_h)^T] d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \mu [\nabla \boldsymbol{w}_h : \nabla \boldsymbol{u}_h + \nabla \boldsymbol{w}_h \cdot\cdot \nabla \boldsymbol{u}_h] d\Omega.
\end{aligned}$$

Uma vez que os produtos tensoriais tem a forma,

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{w}_h : \nabla \boldsymbol{u}_h &= \frac{\partial w_n^h}{\partial x_m} \frac{\partial u_n^h}{\partial x_m}, \\
\nabla \boldsymbol{w}_h \cdot\cdot \nabla \boldsymbol{u}_h &= \frac{\partial w_n^h}{\partial x_m} \frac{\partial u_m^h}{\partial x_n},
\end{aligned}$$

e cada função é dada por,

$$\begin{aligned}
w_n^h &= (N_a e_i)_n = N_a e_i \cdot e_n = \delta_{in} N_a, \\
u_n^h &= (N_b e_j)_n = N_b e_j \cdot e_n = \delta_{jn} N_b, \\
u_m^h &= (N_b e_j)_m = N_b e_j \cdot e_m = \delta_{jm} N_b,
\end{aligned}$$

segue que,

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{w}_h : \nabla \boldsymbol{u}_h &= \frac{\partial}{\partial x_m}(\delta_{in} N_a) \frac{\partial}{\partial x_m}(\delta_{jn} N_b) \\
&= \delta_{in}\delta_{jn} \frac{\partial}{\partial x_m} N_a \frac{\partial}{\partial x_m} N_b \\
&= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_m} N_a \frac{\partial}{\partial x_m} N_b \\
&= \delta_{ij} \nabla N_a \cdot \nabla N_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \boldsymbol{w}_h \cdot\cdot \nabla \boldsymbol{u}_h &= \frac{\partial}{\partial x_m}(\delta_{in} N_a) \frac{\partial}{\partial x_n}(\delta_{jm} N_b) \\
&= \delta_{in}\delta_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} N_a \frac{\partial}{\partial x_n} N_b \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} N_a \frac{\partial}{\partial x_i} N_b
\end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_h : 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) d\Omega = \int_{\Omega^e} \mu \Big(\delta_{ij} \nabla N_a \cdot \nabla N_b + \frac{\partial}{\partial x_j} N_a \frac{\partial}{\partial x_i} N_b \Big) d\Omega \ U_b^j.$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{K}_{hh}$ é dada por,

$$\boldsymbol{K}_{hh} = \int_{\Omega^e} \mu \Big(\delta_{ij} \nabla N_a \cdot \nabla N_b + \frac{\partial}{\partial x_j} N_a \frac{\partial}{\partial x_i} N_b \Big) d\Omega$$

ou seja,

$$
\boldsymbol{K}_{hh} = \mu A^e \begin{bmatrix}
2\frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 2\frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} + \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 2\frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\
 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_1}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\
 & & 2\frac{\partial N_2}{\partial x_1}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 2\frac{\partial N_2}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\
 & & & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}\frac{\partial N_2}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\
 & Symmetric & & & 2\frac{\partial N_3}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\partial N_3}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} \\
 & & & & & \frac{\partial N_3}{\partial x_1}\frac{\partial N_3}{\partial x_1} + 2\frac{\partial N_2}{\partial x_2}\frac{\partial N_3}{\partial x_2}
\end{bmatrix}
$$

ou

$$
\boldsymbol{K}_{hh} = \frac{\mu}{4A^e} \begin{bmatrix}
2y_{23}y_{23} + x_{32}x_{32} & x_{32}y_{23} & 2y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13} & x_{32}y_{31} & 2y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21} & x_{32}y_{12} \\
 & y_{23}y_{23} + 2x_{32}x_{32} & y_{23}x_{13} & y_{23}y_{31} + 2x_{32}x_{13} & y_{23}x_{21} & y_{23}y_{12} + 2x_{32}x_{21} \\
 & & 2y_{31}y_{31} + x_{13}x_{13} & x_{13}y_{31} & 2y_{31}y_{12} + x_{13}x_{12} & x_{13}y_{12} \\
 & & & y_{31}y_{31} + 2x_{13}x_{13} & y_{31}x_{21} & y_{31}y_{12} + 2x_{13}x_{21} \\
 & Symmetric & & & 2y_{12}y_{12} + x_{21}x_{21} & x_{21}y_{12} \\
 & & & & & y_{12}y_{12} + 2x_{21}x_{21}
\end{bmatrix}
$$

A.1.4 Matriz de pressão de Galerkin G_{hh}

A matriz de pressão local $\boldsymbol{G}_{hh}$ proveniente do método de Galerkin é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_h) p_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} (\nabla \cdot N_a e_i) P_b N_b d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} (e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot N_a e_i) P_b N_b d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} N_a P_b N_b d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} N_b d\Omega P_b
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{G}_{hh}$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{hh} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} N_b d\Omega \\
&= \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} \nabla N_1 & \nabla N_2 & \nabla N_3 \\ \nabla N_1 & \nabla N_2 & \nabla N_3 \\ \nabla N_1 & \nabla N_2 & \nabla N_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{23} & y_{23} \\ x_{32} & x_{32} & x_{32} \\ y_{31} & y_{31} & y_{31} \\ x_{13} & x_{13} & x_{13} \\ y_{12} & y_{12} & y_{12} \\ x_{21} & x_{21} & x_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A.1.5 Matriz de pressão transposta de Galerkin G_{hh}^T

A matriz de pressão transposta local $\boldsymbol{G}_{hh}^T$ proveniente do método de Galerkin é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} q_h (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a (\nabla \cdot U_b^j N_b e_j) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot N_b e_j U_b^j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} N_b U_b^j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial}{\partial x_j} N_b d\Omega \; U_b^j
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{G}_{hh}^T$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{hh}^T &= \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial}{\partial x_j} N_b d\Omega \\
&= \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} (\nabla N_1)^T & (\nabla N_2)^T & (\nabla N_3)^T \\ (\nabla N_1)^T & (\nabla N_2)^T & (\nabla N_3)^T \\ (\nabla N_1)^T & (\nabla N_2)^T & (\nabla N_3)^T \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} & y_{31} & x_{13} & y_{12} & x_{21} \\ y_{23} & x_{32} & y_{31} & x_{13} & y_{12} & x_{21} \\ y_{23} & x_{32} & y_{31} & x_{13} & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A.1.6 Vetor fonte de Galerkin F_{hh}

Desconsiderando a condição de contorno de Neumann e as contribuições de valores prescritos, o vetor fonte de Galerkin local é dado por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{hh} &= \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h d\Omega = \int_{\Omega^e} N_a e_i \cdot f_b^j N_b e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a N_b d\Omega \; f_b^j
\end{aligned}$$

Análogo a matriz de massa obtemos o vetor fonte de Galerkin,

$$\boldsymbol{F}_{hh} = \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2f_1^x + f_2^x + f_3^x \\ 2f_1^y + f_2^y + f_3^y \\ f_1^x + 2f_2^x + f_3^x \\ f_1^y + 2f_2^y + f_3^y \\ f_1^x + f_2^x + 2f_3^x \\ f_1^y + f_2^y + 2f_3^y \end{bmatrix}$$

onde f_j^i é o valor da componente f^i calculada no nó j.

A.2 Matrizes locais da formulação SUPG/PSPG

As matrizes locais da formulação *streamline-upwind/Petrov-Galerkin*-(SUPG) e *pressure-stabilizing/ Petrov-Galerkin*-(PSPG) são as matrizes e vetores de subíndices δ e φ respectivamente, dadas em (2.30), além das matrizes e vetores de Galerkin. Estas são apresentadas pelas matrizes de massa $\boldsymbol{M}_\delta$ e $\boldsymbol{M}_\varphi$, convecção $\boldsymbol{N}_\delta$ e $\boldsymbol{N}_\varphi$, pressão $\boldsymbol{G}_\delta$ e $\boldsymbol{G}_\varphi$, e pelos vetores de forças $\boldsymbol{F}_\delta$ e $\boldsymbol{F}_\varphi$.

Veremos a seguir cada uma dessas estruturas.

A.2.1 Matriz de massa SUPG M_δ

A matriz de massa local $\boldsymbol{M}_\delta$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}(\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla)\boldsymbol{w}_h\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}_h\;d\Omega\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)N_a e_i\cdot\dot{U}_b^j N_b e_j\;d\Omega\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)N_a\delta_{ij}N_b\;d\Omega\dot{U}_b^j\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_a N_b\delta_{ij}\;d\Omega\dot{U}_b^j
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que $\boldsymbol{M}_\delta$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_\delta &= \tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_a N_b\delta_{ij}\;d\Omega\\
&= \tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_1N_1\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_1N_2\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_1N_3\mathbf{I}_2\\ \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_2N_1\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_2N_2\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_2N_3\mathbf{I}_2\\ \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_3N_1\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_3N_2\mathbf{I}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_3N_3\mathbf{I}_2\end{bmatrix}d\Omega\\
&= \tau_{SUPG}\frac{A^e}{3}\begin{bmatrix}C_1\mathbf{I}_2 & C_1\mathbf{I}_2 & C_1\mathbf{I}_2\\ C_2\mathbf{I}_2 & C_2\mathbf{I}_2 & C_2\mathbf{I}_2\\ C_3\mathbf{I}_2 & C_3\mathbf{I}_2 & C_3\mathbf{I}_2\end{bmatrix}\\
&= \tau_{SUPG}(\boldsymbol{N}_{hh})^T
\end{aligned}
$$

A.2.2 Matriz de convecção SUPG N_δ

A matriz de convecção local $\boldsymbol{N}_\delta$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}(\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla)\boldsymbol{w}_h\cdot(\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_h\;d\Omega\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)N_a e_i\cdot(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)U_b^j N_b e_j\;d\Omega\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_a\delta_{ij}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_b\;d\Omega U_b^j\\
&=\tau_{SUPG}\int_{\Omega^e}\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_a\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_b\delta_{ij}\;d\Omega U_b^j
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que $\boldsymbol{N}_\delta$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_\delta &= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_b \delta_{ij} \, d\Omega \\
&= \tau_{SUPG} A^e \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 I & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 I & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_1 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 I \\ & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 I & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_2 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 I \\ Symmetric & & \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_3 I \end{bmatrix} \\
&= \tau_{SUPG} A^e \begin{bmatrix} (C_1)^2 I & C_1 C_2 I & C_1 C_3 I \\ & (C_2)^2 I & C_2 C_3 I \\ Symmetric & & (C_3)^2 I \end{bmatrix} \\
&= \tau_{SUPG} A^e \begin{bmatrix} (C_1)^2 & 0 & C_1 C_2 & 0 & C_1 C_3 & 0 \\ & (C_1)^2 & 0 & C_1 C_2 & 0 & C_1 C_3 \\ & & (C_2)^2 & 0 & C_2 C_3 & 0 \\ & & & (C_2)^2 & 0 & C_2 C_3 \\ & Symmetric & & & (C_3)^2 & 0 \\ & & & & & (C_3)^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

A.2.3 Matriz de pressão SUPG G_δ

A matriz de pressão local $\boldsymbol{G}_\delta$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla) \boldsymbol{w}_h \cdot \nabla p_h \, d\Omega \\
&= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) N_a e_i \cdot \nabla P_b N_b \, d\Omega \\
&= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a \frac{\partial}{\partial x_i} N_b \, d\Omega P_b
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que $\boldsymbol{G}_\delta$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_\delta &= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a \frac{\partial}{\partial x_i} N_b \, d\Omega \\
&= A^e \tau_{SUPG} \begin{bmatrix} C_1 \nabla N_1 & C_1 \nabla N_2 & C_1 \nabla N_3 \\ C_2 \nabla N_1 & C_2 \nabla N_2 & C_2 \nabla N_3 \\ C_3 \nabla N_1 & C_3 \nabla N_2 & C_3 \nabla N_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\tau_{SUPG}}{2} \begin{bmatrix} C_1 y_{23} & C_1 y_{31} & C_1 y_{12} \\ C_1 x_{32} & C_1 x_{13} & C_1 x_{21} \\ C_2 y_{23} & C_2 y_{31} & C_2 y_{12} \\ C_2 x_{32} & C_2 x_{13} & C_2 x_{21} \\ C_3 y_{23} & C_3 y_{31} & C_3 y_{12} \\ C_3 x_{32} & C_3 x_{13} & C_3 x_{21} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

A.2.4 Vetor fonte SUPG F_δ

O vetor fonte local $\boldsymbol{F}_\delta$ proveniente do método de SUPG/PSPG é dado por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_\delta &= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{f}_h \; d\Omega \\
&= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) N_a e_i \cdot f_b^j N_b e_j \; d\Omega \\
&= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) N_a \delta_{ij} N_b \; d\Omega f_b^j \\
&= \tau_{SUPG} \int_{\Omega^e} \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a N_b \delta_{ij} \; d\Omega f_b^j
\end{aligned}$$

Análogo aos cálculos da matriz de massa SUPG, temos que o vetor $\boldsymbol{F}_\delta$ é dado por,

$$\boldsymbol{F}_\delta = \tau_{SUPG} A^e \begin{bmatrix} C_1 \bar{f}_x \\ C_1 \bar{f}_y \\ C_2 \bar{f}_x \\ C_2 \bar{f}_y \\ C_3 \bar{f}_x \\ C_3 \bar{f}_y \end{bmatrix},$$

onde $\bar{f}_i$ é a componente i do termo de fonte calculada no baricentro do triângulo, ou seja, $\bar{f}_i = (f_1^i + f_2^i + f_3^i)/3$.

A.2.5 Matriz de massa PSPG M_φ

A matriz de massa local $\boldsymbol{M}_\varphi$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla q_h \cdot \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{u}_h \; d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla N_a \cdot \dot{U}_b^j N_b e_j \; d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \nabla N_a \cdot N_b e_j \; d\Omega \dot{U}_b^j \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_a}{\partial x_j} N_b d\Omega \dot{U}_b^j.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que a matriz $\boldsymbol{M}_\varphi$ é dada por,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_\varphi &= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\frac{\partial N_a}{\partial x_j}N_b d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\begin{bmatrix}
\frac{\partial N_1}{\partial x_1}N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}N_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1}N_3 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2}N_3 \\
\frac{\partial N_2}{\partial x_1}N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1}N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2}N_3 \\
\frac{\partial N_3}{\partial x_1}N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}N_1 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1}N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1}N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2}N_3
\end{bmatrix} d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{3\rho}\begin{bmatrix}
(\nabla N_1)^T & (\nabla N_1)^T & (\nabla N_1)^T \\
(\nabla N_2)^T & (\nabla N_2)^T & (\nabla N_2)^T \\
(\nabla N_3)^T & (\nabla N_3)^T & (\nabla N_3)^T
\end{bmatrix} \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{6\rho}\begin{bmatrix}
y_{23} & x_{32} & y_{23} & x_{32} & y_{23} & x_{32} \\
y_{31} & x_{13} & y_{31} & x_{13} & y_{31} & x_{13} \\
y_{12} & x_{21} & y_{12} & x_{21} & y_{12} & x_{21}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

A.2.6 Matriz de convecção PSPG N_φ

A matriz de convecção local $\boldsymbol{N}_\varphi$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla q_h\cdot(\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_h\; d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)U_b^j N_b e_j\; d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_b)e_j\; d\Omega\; U_b^j \\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\int_{\Omega^e}(\nabla N_a\cdot e_j)(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_b)\; d\Omega\; U_b^j.
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos que $\boldsymbol{N}_\varphi$ é dada por,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_\varphi &= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\int_{\Omega^e}(\nabla N_a\cdot e_j)(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla N_b)\; d\Omega \\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}A^e\begin{bmatrix}
C_1(\nabla N_1)^T & C_2(\nabla N_1)^T & C_3(\nabla N_1)^T \\
C_1(\nabla N_2)^T & C_2(\nabla N_2)^T & C_3(\nabla N_2)^T \\
C_1(\nabla N_3)^T & C_2(\nabla N_3)^T & C_3(\nabla N_3)^T
\end{bmatrix} \\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\tau_{SUPG}\rho}\boldsymbol{G}_\delta^T.
\end{aligned}
$$

A.2.7 Matriz de pressão PSPG G_φ

A matriz de pressão local $\boldsymbol{G}_\varphi$ proveniente do método de SUPG/PSPG é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla q_h\cdot\nabla p_h\ d\Omega\\
&=\frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot\nabla P_b N_b\ d\Omega\\
&=\frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot\nabla N_b\ d\Omega\ P_b.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\boldsymbol{G}_\varphi$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_\varphi &= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot\nabla N_b\ d\Omega\\
&= \frac{\tau_{PSPG}A^e}{\rho}\begin{bmatrix}\nabla N_1\cdot\nabla N_1 & \nabla N_1\cdot\nabla N_2 & \nabla N_1\cdot\nabla N_3\\ \nabla N_2\cdot\nabla N_1 & \nabla N_2\cdot\nabla N_2 & \nabla N_2\cdot\nabla N_3\\ \nabla N_3\cdot\nabla N_1 & \nabla N_3\cdot\nabla N_2 & \nabla N_3\cdot\nabla N_3\end{bmatrix}\\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{4A^e\rho}\begin{bmatrix} y_{23}y_{23}+x_{32}x_{32} & y_{23}y_{31}+x_{32}x_{13} & y_{23}y_{12}+x_{32}x_{21}\\ & y_{31}y_{31}+x_{13}x_{13} & y_{31}y_{12}+x_{13}x_{21}\\ Symmetric & & y_{12}y_{12}+x_{21}x_{21}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A.2.8 Vetor fonte PSPG F_φ

O vetor fonte local $\boldsymbol{F}_\varphi$ proveniente do método de SUPG/PSPG é dado por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_\varphi &= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla q_h\cdot\boldsymbol{f}_h\ d\Omega\\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot f_b^j N_b e_j\ d\Omega\\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\nabla N_a\cdot N_b e_j\ d\Omega\ f_b^j\\
&= \frac{\tau_{PSPG}}{\rho}\int_{\Omega^e}\frac{\partial N_a}{\partial x_j}N_b d\Omega\ f_b^j.
\end{aligned}$$

Análogo aos cálculos da matriz de massa SUPG, temos que o vetor $\boldsymbol{F}_\varphi$ é dado por,

$$\boldsymbol{F}_\varphi = \frac{\tau_{PSPG}}{2\rho}\begin{bmatrix} y_{23}\bar{f}_x + x_{32}\bar{f}_y\\ y_{31}\bar{f}_x + x_{13}\bar{f}_y\\ y_{12}\bar{f}_x + x_{21}\bar{f}_y\end{bmatrix},$$

onde $\bar{f}_i$ é a componente i do termo de fonte calculada no baricentro do triângulo, ou seja, $\bar{f}_i = (f_1^i + f_2^i + f_3^i)/3$.

A.3 Matrizes e vetores locais da formulação multiescala

As matrizes locais da formulação NSGS-NS são as matrizes e vetores de subíndices δ e φ com sobrescritos m dadas em (3.30) além das matrizes e vetores de Galerkin. Estas são apresentadas pelas matrizes de massa $\boldsymbol{M}_\delta^m$ e $\boldsymbol{M}_\varphi^m$, convecção $\boldsymbol{N}_\delta^m$ e $\boldsymbol{N}_\varphi^m$, pressão $\boldsymbol{G}_\delta^m$ e $\boldsymbol{G}_\varphi^m$, e pelos vetores de forças $\boldsymbol{F}_\delta^m$ e $\boldsymbol{F}_\varphi^m$ as quais são compostas pelas matrizes $\boldsymbol{M}_{Bh}, \boldsymbol{N}_{hB}, \boldsymbol{N}_{Bh}, \boldsymbol{K}_{BB}, \boldsymbol{G}_{hB}, \boldsymbol{G}_{Bh}$ e $\boldsymbol{F}_B$ apresentadas na sequência.

A.4 Matriz de massa M_{Bh}

A matriz de massa local $\boldsymbol{M}_{Bh}$ proveniente do método de multiescala é associada ao termo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_B e_i \cdot \dot{U}_a^j N_a e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B N_a d\Omega \; \dot{U}_a^j,
\end{aligned}$$

onde δ_{ij} é o delta de *Kronecker*, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$ e $1 \leqslant a, b \leqslant 3$.

Uma vez que

$$\int_{\Omega^e} N_B N_a \; d\Omega = \frac{3}{20} A^e$$

segue que a matriz de massa $\boldsymbol{M}_{Bh}$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_{Bh} &= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B N_a d\Omega \\
&= \frac{3A^e}{20} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{3A^e}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A.5 Matriz de convecção N_{hB}

A matriz de convecção local $\boldsymbol{N}_{hB}$ proveniente do método multiescala é associada ao termo,

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_B d\Omega$$

De maneira análoga ao termo convectivo de Galerkin, trataremos a não linearidade aproximando a velocidade convectiva $\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h$ calculado a partir da iteração anterior dada pela expressão (A.14), assim

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_h \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_B d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a e_i \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U_B^j N_B e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla N_B) d\Omega \; U_B^j.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{N}_{hB}$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}_{hB} &= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla N_B) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_a \left(\bar{u}_x \frac{\partial N_B}{\partial x_1} + \bar{u}_y \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \left(\bar{u}_x \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_a + \bar{u}_y \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_a \right) \mathbf{I}_2 d\Omega \\
&= \left[\left(\bar{u}_x \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_a \; d\Omega + \bar{u}_y \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_a \; d\Omega \right) \mathbf{I}_2 \right]
\end{aligned}$$

variando $1 \leqslant a \leqslant 3$ segue que

$$\boldsymbol{N}_{hB} = \begin{bmatrix}
\left(\bar{u}_x \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_1 \; d\Omega + \bar{u}_y \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_1 \; d\Omega \right) \mathbf{I}_2 \\
\left(\bar{u}_x \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_2 \; d\Omega + \bar{u}_y \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_2 \; d\Omega \right) \mathbf{I}_2 \\
\left(\bar{u}_x \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_3 \; d\Omega + \bar{u}_y \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_3 \; d\Omega \right) \mathbf{I}_2
\end{bmatrix}$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_1 \; d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (y_{23} N_2 N_3 + y_{31} N_1 N_3 + y_{12} N_1 N_2) N_1 \; d\Omega \\
&= \frac{9}{40}(y_{23} + 2y_{31} + 2y_{12}) = -\frac{9}{40} y_{23}, \\
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_2 \; d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (y_{23} N_2 N_3 + y_{31} N_1 N_3 + y_{12} N_1 N_2) N_2 \; d\Omega \\
&= \frac{9}{40}(2y_{23} + y_{31} + 2y_{12}) = -\frac{9}{40} y_{31}, \\
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} N_3 \; d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (y_{23} N_2 N_3 + y_{31} N_1 N_3 + y_{12} N_1 N_2) N_3 \; d\Omega \\
&= \frac{9}{40}(2y_{23} + 2y_{31} + y_{12}) = -\frac{9}{40} y_{12}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

e que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_1 \, d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (x_{32}N_2N_3 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_1N_2)N_1 \, d\Omega \\
&= \frac{9}{40}(x_{32} + 2x_{13} + 2x_{21}) = -\frac{9}{40}x_{32}, \\
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_2 \, d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (x_{32}N_2N_3 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_1N_2)N_2 \, d\Omega \qquad \text{(A.16)} \\
&= \frac{9}{40}(2x_{32} + x_{13} + 2x_{21}) = -\frac{9}{40}x_{13}, \\
\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} N_3 \, d\Omega &= \frac{27}{2A^e} \int_{\Omega^e} (x_{32}N_2N_3 + x_{13}N_1N_3 + x_{21}N_1N_2)N_3 \, d\Omega \\
&= \frac{9}{40}(2x_{32} + 2x_{13} + x_{21}) = -\frac{9}{40}x_{21},
\end{aligned}$$

Concluímos que,

$$\boldsymbol{N}_{hB} = -\frac{9}{40}\begin{bmatrix} (\bar{u}_x y_{23} + \bar{u}_y x_{32})\mathbf{I}_2 \\ (\bar{u}_x y_{31} + \bar{u}_y x_{13})\mathbf{I}_2 \\ (\bar{u}_x y_{12} + \bar{u}_y x_{21})\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.17)}$$

A.6 Matriz de convecção N_{Bh}

A matriz de convecção local $\boldsymbol{N}_{Bh}$ proveniente do método multiescala é associada ao termo,

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega$$

Como vem sendo tratado, a não linearidade da velocidade convectiva será calculada a partir da iteração anterior, dada pela expressão (A.14), assim

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_B e_i \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) U_a^j N_a e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a) d\Omega \; U_a^j.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{N}_{Bh}$ é dada por,

$$\boldsymbol{N}_{Bh} = \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a) \, d\Omega = \delta_{ij} \int_{\Omega^e} N_B \, d\Omega \; (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_a).$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned}
(\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) N_a &= \left[\left(\bar{u}_x \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \bar{u}_y \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \right) \; \left(\bar{u}_x \frac{\partial N_2}{\partial x_1} + \bar{u}_y \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \right) \; \left(\bar{u}_x \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \bar{u}_y \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2A^e}[(\bar{u}_x y_{23} + \bar{u}_y x_{32}) \;\; (\bar{u}_x y_{31} + \bar{u}_y x_{13}) \;\; (\bar{u}_x y_{12} + \bar{u}_y x_{21})]
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega^e} N_B \; d\Omega = 27 \int_{\Omega^e} N_1 N_2 N_3 \; d\Omega = \frac{9A^e}{20}, \tag{A.18}$$

Concluímos que,

$$\boldsymbol{N}_{Bh} \;=\; \frac{9}{40}[(\bar{u}_x y_{23} + \bar{u}_y x_{32})\mathbf{I}_2 \;\; (\bar{u}_x y_{31} + \bar{u}_y x_{13})\mathbf{I}_2 \;\; (\bar{u}_x y_{12} + \bar{u}_y x_{21})\mathbf{I}_2]. \tag{A.19}$$

De (A.19) e (A.17) observamos que

$$\boldsymbol{N}_{Bh} = -(\boldsymbol{N}_{hB})^T.$$

A.7 Matriz de rigidez K_{BB}

A matriz $\boldsymbol{K}_{BB}$ proveniente da micro escala é associada aos termos,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w}_B \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B) \; d\Omega + 2\nu \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B) \; d\Omega + \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : (\delta_B^c \nabla \boldsymbol{u}_B) \; d\Omega \tag{A.20}$$

Denotamos por $\boldsymbol{K}_{BB1}$ a matriz associada à primeira integral acima,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_B d\Omega = \\
&\int_{\Omega^e} N_B e_i \cdot (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) U_{B,j} N_B e_j d\Omega = \\
&\int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_B) d\Omega \; U_{B,j}.
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{K}_{BB1}$ é dada por

$$\boldsymbol{K}_{BB1} = \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B (\bar{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla N_B) d\Omega$$

Lembrando que $\nabla N_B = \left(\dfrac{\partial N_B}{\partial x_1}, \dfrac{\partial N_B}{\partial x_2} \right)$ e $\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{u}_x, \bar{u}_y)$ temos

$$\boldsymbol{K}_{BB1} = \int_{\Omega^e} N_B \left(\bar{u}_x \frac{\partial N_B}{\partial x_1} + \bar{u}_y \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \right) \; d\Omega \mathbf{I}_2.$$

Das expressões em (A.7) e (A.12) temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{BB1} = \left(\frac{27^2}{2A^e} \right) \int_{\Omega} &\bar{u}_y N_1 N_2 N_3 \big(y_{23} N_2 N_3 + y_{31} N_1 N_3 + y_{12} N_1 N_2 \big) + \\
&\bar{u}_x N_1 N_2 N_3 \big(x_{32} N_2 N_3 + x_{13} N_1 N_3 + x_{21} N_1 N_2 \big) \; d\Omega \mathbf{I}_2.
\end{aligned}$$

Usando a integração dada por (A.13) temos

$$\bar{u}_y \int_{\Omega} N_1 N_2 N_3 \big(y_{23} N_2 N_3 + y_{31} N_1 N_3 + y_{12} N_1 N_2 \big) \; d\Omega = \bar{u}_y \frac{A^e}{630} (y_{23} + y_{31} + y_{12}) = 0$$

e

$$\bar{u}_x \int_{\Omega} N_1 N_2 N_3 \big(x_{32} N_2 N_3 + x_{13} N_1 N_3 + x_{21} N_1 N_2 \big) \; d\Omega = \bar{u}_x \frac{A^e}{630} (x_{32} + x_{13} + x_{21}) = 0.$$

Portanto,

$$\boldsymbol{K}_{BB1} = 0\mathbf{I}_2. \tag{A.21}$$

Denotamos por $\boldsymbol{K}_{BB2}$ a matriz associada as duas últimas integrais da expressão A.20,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_B) : 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_B) d\Omega + \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : \delta_B^c \nabla \boldsymbol{u}_B d\Omega = \\
&\nu \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : [\nabla \boldsymbol{u}_B + (\nabla \boldsymbol{u}_B)^T] d\Omega + \delta_B^c \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : \nabla \boldsymbol{u}_B d\Omega = \\
&(\nu + \delta_B^c) \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : \nabla \boldsymbol{u}_B \; d\Omega + \nu \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_h : (\nabla \boldsymbol{u}_h)^T d\Omega = \\
&(\nu + \delta_B^c) \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B : \nabla \boldsymbol{u}_B \; d\Omega + \nu \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{w}_B \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{u}_B d\Omega.
\end{aligned}$$

Analogamente a obtenção da matriz viscosa de Galerkin $\boldsymbol{K}_{hh}$ obtemos,

$$\left[(\nu + \delta_B^c) \int_{\Omega^e} \delta_{ij} \nabla N_B \cdot \nabla N_B \; d\Omega + \nu \int_{\Omega} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} \frac{\partial N_B}{\partial x_i} \; d\Omega \right] U_{B,j}.$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{K}_{BB2}$ é dada por,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{BB2} &= \left[(\nu + \delta_B^c) \int_{\Omega^e} \delta_{ij} \nabla N_B \cdot \nabla N_B \; d\Omega + \nu \int_{\Omega} \frac{\partial N_B}{\partial x_j} \frac{\partial N_B}{\partial x_i} \; d\Omega \right] \\
&= \begin{bmatrix} (2\nu + \delta_B^c) A + (\nu + \delta_B^c) B & \nu C \\ \nu C & (2\nu + \delta_B^c) B + (\nu + \delta_B^c) A \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

sendo

$$A = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} \; d\Omega, \quad B = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \; d\Omega, \quad e \quad C = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \; d\Omega.$$

Pela definição das derivadas da função bolha dada em (A.12) segue que,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} \frac{\partial N_B}{\partial x_1} \; d\Omega = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_B}{\partial x_1} \right)^2 \; d\Omega \\
&= \left(\frac{27}{2A^e} \right)^2 \int_{\Omega^e} \Big(y_{23}^2 N_2^2 N_3^2 + y_{31}^2 N_1^2 N_3^2 + y_{12}^2 N_1^2 N_2^2 + 2 y_{23} y_{31} N_1 N_2 N_3^2 + \\
&\qquad 2 y_{23} y_{12} N_1 N_2^2 N_3 + 2 y_{31} y_{12} N_1^2 N_2 N_3 \Big) \; d\Omega \\
&= \left(\frac{27}{2A^e} \right)^2 2A^e \left[(y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2) \frac{4}{720} + 2 \frac{2}{720} (y_{23} y_{31} + y_{23} y_{12} + y_{31} y_{12}) \right] \\
&= \frac{81}{40A^e} \Big[y_{23}^2 + y_{31}^2 + y_{12}^2 + y_{23} y_{31} + y_{23} y_{12} + y_{31} y_{12} \Big].
\end{aligned}$$

De maneira análoga obtemos,

$$\begin{aligned} B &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_2}\frac{\partial N_B}{\partial x_2}\, d\Omega = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_B}{\partial x_2}\right)^2 d\Omega \\ &= \frac{81}{40A^e}\Big[x_{32}^2 + x_{13}^2 + x_{21}^2 + x_{32}x_{13} + x_{32}x_{21} + x_{13}x_{21}\Big]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} C &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_1}\frac{\partial N_B}{\partial x_2}\, d\Omega \\ &= \left(\frac{27}{2A^e}\right)^2 \int_{\Omega^e} \Big[y_{23}\big(x_{32}N_2^2N_3^2 + x_{13}N_1N_2N_3^2 + x_{21}N_1N_2^2N_3\big) + \\ &\qquad y_{31}\big(x_{32}N_1N_2N_3^2 + x_{13}N_1^2N_3^2 + x_{21}N_1^2N_2N_3\big) + \\ &\qquad y_{12}\big(x_{32}N_1N_2^2N_3 + x_{13}N_1^2N_2N_3 + x_{21}N_1^2N_2^2\big)\Big]\, d\Omega \\ &= \left(\frac{27}{2A^e}\right)^2 \left(\frac{4A^e}{720}\right)\Big[y_{23}\big(2x_{32} + x_{13} + x_{21}\big) + y_{31}\big(x_{32} + 2x_{13} + x_{21}\big) + \\ &\qquad y_{12}\big(x_{32} + x_{13} + 2x_{21}\big)\Big]. \end{aligned}$$

Observando que $x_{ik} + x_{kj} = x_i - x_k + x_k - x_j = x_i - x_j = x_{ij} = -x_{ji}$ concluímos

$$C = \frac{81}{80A^e}\Big[y_{23}x_{32} + y_{31}x_{13} + y_{12}x_{21}\Big].$$

Das matrizes $\boldsymbol{K}_{BB1}$ e $\boldsymbol{K}_{BB2}$ dadas por (A.21) e (A.22), concluímos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_{BB} &= \boldsymbol{K}_{BB1} + \boldsymbol{K}_{BB2} \\ &= \begin{bmatrix} (2\nu + \delta_B^c)A + (\nu + \delta_B^c)B & \nu C \\ \nu C & (2\nu + \delta_B^c)B + (\nu + \delta_B^c)A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consequentemente, sua matriz inversa é dada por

$$\boldsymbol{K}_{BB}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} (2\nu + \delta_B^c)B + (\nu + \delta_B^c)A & -\nu C \\ -\nu C & (2\nu + \delta_B^c)A + (\nu + \delta_B^c)B \end{bmatrix}, \tag{A.23}$$

onde D é o determinante da matriz $\boldsymbol{K}_{BB}$ dado por

$$D = [(2\nu + \delta_B^c)^2 + (\nu + \delta_B^c)^2]AB + (2\nu + \delta_B^c)(\nu + \delta_B^c)[A^2B^2] - \nu^2C^2.$$

A.8 Matriz de pressão G_{hB}

A matriz de pressão local $\boldsymbol{G}_{hB}^T$ proveniente do método multiescala é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} q_h(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_B) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a(\nabla \cdot U_B^j N_B e_j) d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_a\left(e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot N_B e_j\right) d\Omega U_B^j \\
&= \int_{\Omega^e} N_a \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} N_B \; d\Omega U_B^j \\
&= \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial N_B}{\partial x_j} d\Omega \; U_B^j
\end{aligned}
$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{G}_{hB}$ é dada por,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{hB} &= \int_{\Omega^e} N_a \frac{\partial N_B}{\partial x_j} d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \frac{\partial N_B}{\partial x_1} & N_1 \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \\ N_2 \frac{\partial N_B}{\partial x_1} & N_2 \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \\ N_3 \frac{\partial N_B}{\partial x_1} & N_3 \frac{\partial N_B}{\partial x_2} \end{bmatrix} d\Omega.
\end{aligned}
$$

Dos resultados obtidos em (A.16) e (A.17) concluímos que

$$
\boldsymbol{G}_{hB} = -\frac{9}{40} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{bmatrix}. \tag{A.24}
$$

A.9 Matriz de pressão G_{Bh}

A matriz de pressão local $\boldsymbol{G}_{Bh}$ proveniente do método multiescala é associada ao termo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} (\nabla \cdot \boldsymbol{w}_B) p_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} (\nabla \cdot N_B e_i) P_a N_a d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} (e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot N_B e_i) P_a N_a d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k} N_B P_a N_a d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_i} N_a d\Omega P_a
\end{aligned}
$$

Desta forma, segue que $\boldsymbol{G}_{Bh}$ é dada por,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_{Bh} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_B}{\partial x_i} N_a d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_1} & N_2 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_1} & N_3 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_1} \\ N_1 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_2} & N_2 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_2} & N_3 \dfrac{\partial N_B}{\partial x_2} \end{bmatrix} d\Omega
\end{aligned}
$$

Dos resultados obtidos em (A.16) e (A.17) concluímos que

$$
\boldsymbol{G}_{Bh} = -\frac{9}{40} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix}. \tag{A.25}
$$

De (A.24) e (A.25) observamos que

$$
\boldsymbol{G}_{Bh} = (\boldsymbol{G}_{hB})^T.
$$

A.10 Vetor fonte F_B

Desconsiderando a condição de contorno de Neumann e as contribuições de valores prescritos, o vetor fonte $\boldsymbol{F}_B$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_B &= \int_{\Omega^e} \boldsymbol{w}_B \cdot \boldsymbol{f}_h d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} N_B e_i \cdot f_a^j N_a e_j d\Omega \\
&= \int_{\Omega^e} \delta_{ij} N_B N_a d\Omega \; f_a^j
\end{aligned}
$$

Análogo ao cálculo da matriz de massa $\boldsymbol{M}_{Bh}$ concluímos que

$$
\boldsymbol{F}_B = \frac{9A^e}{20} \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix},
$$

onde $\bar{f}_i$ é calculada no baricentro do elemento.

APÊNDICE B – Comportamento dos parâmetros de estabilização sob uma análise de Fourier

Neste apêndice são apresentados os parâmetros de estabilização obtidos pelo método multiescala apresentado em (CODINA, 2002) para a equação do transporte e equação de *Ossen* nos casos estacionários.

Primeiramente vamos considerar a equação de convecção-difusão-reação linear estacionário,

$$-\epsilon\Delta u + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + \sigma u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{B.1}$$

onde u e f são escalares, $\boldsymbol{\beta}$ é a velocidade convectiva, ϵ é o coeficiente de difusão e $\sigma \geqslant 0$ é o coeficiente de reação.

Analogamente a abordagem do Capítulo 3, decompomos a solução u na forma $u = u_h + u_B$, onde u_h é a componente macro, e u_B é a componente micro. Levando $u = u_h + u_B$ na Eq. (B.1), explorando a linearidade da equação e reagrupando os termos obtemos

$$-\epsilon\Delta u_B + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u_B + \sigma u_B = r \quad \text{em} \quad \Omega^e \in \mathcal{T}_h, \tag{B.2}$$

$$r := f - (-\epsilon\Delta u_h + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u_h + \sigma u_h), \tag{B.3}$$

a qual deve ser resolvida aproximadamente para a solução na micro escala u_B, sendo u_h a aproximação por elementos finitos de u. Por simplificação, adotamos a velocidade $\boldsymbol{\beta}$ constante sobre cada elemento Ω^e, consequentemente a solução na micro escala pode ser aproximada por

$$u_B(\boldsymbol{x}) \approx \tau\, r(\boldsymbol{x}), \tag{B.4}$$

onde τ é o parâmetro a ser determinado.

Para isto, vamos considerar a seguinte transformada de Fourier de uma função genérica g definida em Ω^e,

$$\hat{g}(\boldsymbol{k}) := \int_{\Omega^e} e^{-i\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}{h}} g(\boldsymbol{x})\; d\Omega_x, \tag{B.5}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, h é o comprimento característico da malha e $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$ é o número de onda adimensional. Se n_j é a $j-$ésima componente da normal exterior ao elemento Ω^e, então

$$\widehat{\frac{\partial g}{\partial x_j}}(\boldsymbol{k}) = \int_{\partial\Omega^e} n_j e^{-i\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}{h}} g(\boldsymbol{x})\; d\Gamma_x + i\frac{k_j}{h}\hat{g}(\boldsymbol{k}). \tag{B.6}$$

Em nossa abordagem as funções g definidas em Ω^e são funções do tipo bolha, ou seja, são nulas no bordo do elemento. Assim, o primeiro termo do lado direito da Eq. (B.6) é nulo e consequentemente temos

$$\widehat{\frac{\partial g}{\partial x_j}}(\boldsymbol{k}) = i\frac{k_j}{h}\hat{g}(\boldsymbol{k}). \tag{B.7}$$

Tomando a transformada de Fourrier na Eq. (B.2) e reagrupando os termos temos

$$\widehat{u_B}(\boldsymbol{k}) = \mathcal{T}(\boldsymbol{k})\hat{r}(\boldsymbol{k}), \quad \mathcal{T}(\boldsymbol{k}) := \left(\epsilon\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{h^2} + i\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}}{h} + \sigma\right)^{-1}. \tag{B.8}$$

Aplicando a fórmula de Plancherel obtemos,

$$\|u_B\|^2_{\Omega^e} = \frac{1}{(2\pi)^2}\|\widehat{u_B}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\mathcal{T}(\boldsymbol{k})|^2|\hat{r}(\boldsymbol{k})|^2 dk. \tag{B.9}$$

Desde que ambos $|\mathcal{T}(\boldsymbol{k})|^2$ e $|\hat{r}(\boldsymbol{k})|^2$ são não negativos, pelo teorema do valor médio existe um número de onda $\boldsymbol{k}_0$ tal que

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}|\mathcal{T}(\boldsymbol{k})|^2|\hat{r}(\boldsymbol{k})|^2 dk = \frac{1}{(2\pi)^2}|\mathcal{T}(\boldsymbol{k}_0)|^2\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{r}(\boldsymbol{k})|^2 dk. \tag{B.10}$$

De (B.9) e (B.10) temos que

$$\|u_B\|^2_{\Omega^e} = \frac{1}{(2\pi)^2}\|\widehat{u_B}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{(2\pi)^2}|\mathcal{T}(\boldsymbol{k}_0)|^2\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{r}(\boldsymbol{k})|^2 dk. \tag{B.11}$$

Aplicando novamente a fórmula de Plancherel em (B.11) concluímos que

$$\|u_B\|_{\Omega^e} = |\mathcal{T}(\boldsymbol{k}_0)|\|r\|_{\Omega^e}. \tag{B.12}$$

Comparando τ na Eq. (B.5) com $|\mathcal{T}(\boldsymbol{k}_0)|$ na Eq. (B.12), podemos afirmar que se tomarmos

$$\tau = \left[\left(c_1\frac{\epsilon}{h^2} + \sigma\right)^2 + \left(c_2\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{h}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{B.13}$$

então existem valores de c_1 e c_2 independentes de h para os quais a Eq. (B.5) é válida, no sentido de que tanto u_B quanto τr têm a mesma norma L^2 sobre o elemento Ω^e. Além disso, c_1 independe dos coeficientes ϵ, $\boldsymbol{\beta}$ e σ, enquanto c_2 depende somente da direção de $\boldsymbol{\beta}$, mas não de sua magnitude. A constante c_1 pode ser identificada com $|\boldsymbol{k}_0|^2$ e c_2 com $|\boldsymbol{k}_0||\cos\alpha|$, sendo α o ângulo entre $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{k}_0$.

Vamos considerara agora a aplicação destes conceitos no problema de Oseen estacionário. Tomando a velocidade de advecção constante e desconsiderando o termo adicional na micro escala na Eq. (3.16), o sub-problema associado a micro escala pode ser escrito da forma,

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}_B + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_B + \nabla p_B = \boldsymbol{r}_m, \tag{B.14}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_B = r_c \tag{B.15}$$

onde $\boldsymbol{r}_m$ e r_c são os resíduos do momentum e da continuidade, respectivamente, dados por,

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{f}_h - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h, \tag{B.16}$$

$$r_c = -\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h. \tag{B.17}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\boldsymbol{r}_m$ tem divergente nulo (JOHN, 2016) e que sua componente potencial está incluída na subescala de pressão p_B. Aplicando a transformada de Fourier nas Eqs. (B.14) e (B.15) temos

$$\left(\nu\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{h^2} + i\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}}{h}\right)\widehat{\boldsymbol{u}_B}(\boldsymbol{k}) + i\frac{\boldsymbol{k}}{h}\widehat{p_B}(\boldsymbol{k}) = \widehat{\boldsymbol{r}_m}(\boldsymbol{k}), \tag{B.18}$$

$$i\frac{\boldsymbol{k}}{h}\cdot\widehat{\boldsymbol{u}_B}(\boldsymbol{k}) = \widehat{r_c}(\boldsymbol{k}). \tag{B.19}$$

Multiplicando a Eq. (B.18) por $i\boldsymbol{k}/h$, a qual equivale a extrair o divergente de da Eq. (B.14), substituindo $\widehat{\boldsymbol{u}_B}$ dada na Eq. (B.19) e da hipótese que $\boldsymbol{r}_m$ tem divergente nulo, obtemos a transformada de Fourier da equação de Poisson da pressão

$$\left(\nu\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{h^2} + i\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}}{h}\right)\widehat{r_c}(\boldsymbol{k}) - \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{h^2}\widehat{p_B}(\boldsymbol{k}) = 0,, \tag{B.20}$$

a partir da qual podemos aproximar a pressão usando o mesmo raciocínio utilizado para a equação de convecção-difusão-reação, ou seja, por

$$p_B \approx \tau_c r_c, \quad \tau_c = \left[\nu^2 + \left(\frac{c_2}{c_1}\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{h}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{B.21}$$

onde as constantes c_1 e c_2 têm as mesmas interpretações dada em (B.13).

Em nosso trabalho a velocidade na micro escala é obtida via condensação estática dentro da macro escala. Em (CODINA, 2002) o autor obtêm uma expressão analítica para a velocidade a partir da pressão na micro escala, dada na sequência.

Usando os valores de $\widehat{p_B}(\boldsymbol{k})$ obtidos da Eq. (B.20) em (B.18) temos que os coeficientes de Fourier da velocidade são

$$\widehat{\boldsymbol{u}_B}(\boldsymbol{k}) = \left(\nu\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{h^2} + i\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{k}}{h}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{r}_m}(\boldsymbol{k}) - i\frac{h}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}\widehat{r_c}(\boldsymbol{k}). \tag{B.22}$$

Observe que o segundo termo afeta a componente de $\widehat{\boldsymbol{u}_B}(\boldsymbol{k})$ somente na direção de $\boldsymbol{k}$. Desta forma, podemos negligenciar a contribuição de r_c em $\boldsymbol{u}_B$. Além do fato de permitir formular um método mais simples, esta aproximação assume implicitamente que as subescalas são impulsionadas pelo resíduo das equações de momento $\boldsymbol{r}_m$, ao invés do erro em satisfazer a restrição de incompressibilidade pela solução de elemento finito. Portanto, a aproximação para $\boldsymbol{u}_B$ é dada por

$$\boldsymbol{u}_B \approx \tau_m \boldsymbol{r}_m, \quad \tau_m = \left[\left(c_1\frac{\nu}{h^2}\right)^2 + \left(c_2\frac{|\boldsymbol{\beta}|}{h}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{B.23}$$