

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Lucas Oliveira Scardini

**A classificação de Bianchi e a construção de Taub das
métricas cosmológicas anisotrópicas**

Vitória

2024

Lucas Oliveira Scardini

A classificação de Bianchi e a construção de Taub das métricas
cosmológicas anisotrópicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física, na área de concentração Física das Interações Fundamentais.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S285c Scardini, Lucas Oliveira, 2000-
A classificação de Bianchi e a construção de Taub das métricas cosmológicas anisotrópicas / Lucas Oliveira Scardini. - 2024.
73 f.

Orientador: Sergio Vitorino de Borba Gonçalves.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Modelos cosmológicos anisotrópicos. 2. Classificação de Bianchi. 3. Radiação cósmica de fundo. I. Gonçalves, Sergio Vitorino de Borba. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**“Construção da classificação de Bianchi e os modelos
cosmológicos anisotrópicos”**

Lucas Oliveira Scardini

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
gov.br SERGIO VITORINO DE BORBA GONCALVES
Data: 17/07/2024 11:41:59-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Documento assinado digitalmente
gov.br FLAVIO GIMENES ALVARENGA
Data: 16/07/2024 18:58:53-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
(Orientador-PPGFis)

Documento assinado digitalmente
gov.br GERMANO AMARAL MONERAT
Data: 15/07/2024 17:24:28-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
(DFis/CCE/UFES)

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat
(IPRJ/UERJ)

Prof. Dr. Wesley Spalenza
(IFES)

Documento assinado digitalmente
gov.br WESLEY SPALENZA
Data: 16/07/2024 07:05:30-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Vitória-ES, 15 de julho de 2024

*À minha mãe,
com gratidão e amor.*

Agradecimentos

Agradeço a todos meus familiares em especial a minha avó, Ecilda Oliveira, e minha tia Lorena Oliveira, aos meus amigos, principalmente a Valentina Bernardino.

Agradeço ao meu orientador Sergio Vitorino, aos professores da Pós-graduação em Física da UFES, e a comissão examinadora.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Surpresas

O que

Não conheço

De mim

È o que tenho

De mais

Interessante:

A surpresa

De não saber

O que sou

Um passo

Adiante.

Luca Brandão, "Lucão".

Resumo

O estudo do cosmos é de extrema importância para a compreensão da origem do Universo. Uma das bases nesses estudos é a métrica utilizada, na qual comumente é homogênea e isotrópica. No entanto, temos trabalhos que utilizam métricas anisotrópicas ou inhomogêneas. As métricas anisotrópicas foram divididas em diferentes tipos pelo trabalho de Abraham Taub que utilizou como base a classificação das variedades anisotrópicas feita por Luigi Bianchi. Esta dissertação tem dois objetivos, o primeiro de fazer uma construção das métricas anisotrópicas começando por uma simples revisão da relatividade geral. O segundo é de mostrar a importância de estudos em modelos que não seguem o princípio cosmológico.

Palavras-chave

Modelos cosmológicos anisotrópicos, classificação de Bianchi, radiação cósmica de fundo.

Abstract

The study of the cosmos is of utmost importance for understanding the origin of the Universe. One of the foundations in these studies is the metric used, which is commonly homogeneous and isotropic. However, there are works that utilize anisotropic or inhomogeneous metrics. Anisotropic metrics have been divided into different types by the work of Abraham Taub, who based his classification on Luigi Bianchi's classification of anisotropic manifolds. This dissertation has two objectives: the first is to construct anisotropic metrics starting with a simple review of general relativity. The second is to demonstrate the importance of studying models that do not adhere to the cosmological principle.

Keywords

Anisotropic cosmological models, Bianchi classification, Cosmic Microwave Background.

Sumário

1	Introdução	1
2	Relatividade geral	5
2.1	Vetores, campos vetoriais e 1-formas	6
2.2	Derivada covariante e símbolos de Christoffel	8
2.3	Noção de transporte e derivada de Lie	9
2.4	Tensor de Riemann e a equação de campo de Einstein	12
3	Cosmologia homogênea e isotrópica	16
3.1	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	18
3.2	Dinâmica do Universo	21
3.3	Evolução do universo	23
3.3.1	Era de Planck	24
3.3.2	Era da grande unificação até a Inflação	24
3.3.3	Era Hadrônica	26
3.3.4	Era Leptônica	26
3.3.5	Era da Nucleossíntese Primordial	27
3.3.6	Era da recombinação e desacoplamento.	27
4	Radiação cósmica de fundo	29
4.1	Efeito Sachs-Wolfe	31
4.2	Descrição estatística	36
4.3	Anisotropias da radiação cósmica de fundo	39
5	Modelos de Bianchi	41
5.1	Espaços homogêneos	41
5.2	Classificação de Bianchi	43
5.3	Derivação das métricas	47
6	Conclusão	56

Introdução

Na história da humanidade sempre tivemos interesse em compreender o cosmos, desde muito antes da Grécia no século VI a.C, onde a filosofia pré-socrática tinha uma ligação muito íntima com a cosmologia, os filósofos da época tentavam contrapor a mitologia e propor um modelo da origem do Universo de forma lógica e racional. Mesmo em cidades como Machu Picchu, no qual existe um observatório astronômico, pode ser encontrado estudos sobre o nosso céu. Isso pode ser entendido como um fruto da curiosidade humana e a busca para compreender o mundo ao seu redor, ao mesmo tempo mostra o quão importante é este ramo da ciência.

Mesmo com um antigo interesse na astronomia, isso não impediu que ela sempre fosse um tema muito complicado, e com a falta da tecnologia que temos hoje sua evolução pode ser considerada lenta. A teoria heliocêntrica, onde o Sol estaria estacionário no centro do universo, só foi ter sua forma matemática completa com Nicolau Copérnico no século XVI [28], sendo que esta teoria não está correta uma vez que o Sol não é o centro do Universo. Sua importância vem da conclusão que todos os planetas do sistema solar orbitam o Sol. Pouco tempo depois Tycho Brahe fez diversas observações do céu, observando o movimento de Marte [59].

Outro grande filósofo natural foi Galileu Galilei que é considerado o primeiro homem a usar o telescópio para fins astronômicos [7]. Por volta de 1609, ele realizou observações que concordavam com a teoria heliocêntrica, descobrindo 4 satélites naturais de Júpiter. Galilei começou estudos da gravitação desenvolvendo a lei da queda dos corpos, que diz que dois corpos em queda livre da mesma altura chegam ao solo no mesmo intervalo de tempo.

Com as observações de Tycho Brahe, o astrônomo Johannes Kepler, enunciou as três Leis de Kepler, onde a primeira afirma que a órbita dos planetas são elípticas e o sol se encontra em um dos focos. A segunda diz que a linha imaginária entre o Sol e o planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos idênticos. A terceira afirma que o quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do raio médio da órbita [29].

Grandes avanços são realizados por Isaac Newton, em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, com as três leis de Newton que deram origem a lei da

gravitação universal, mudando completamente a forma que enxergamos os corpos celestes, uma vez que agora temos entendimento que todo corpo massivo produz uma atração gravitacional. Avançou, também, no desenvolvimento da mecânica que nos auxilia no cálculo do movimento dos corpos celestes [43].

O físico e matemático James Maxwell unificou, em 1864, quatro equações que descrevem os efeitos magnéticos e elétricos da natureza [39]. Duas equações relacionam o fluxo de campo gerado por uma fonte, uma equação para o campo elétrico e a outra para o magnético. As demais equações descrevem como a variação em um campo elétrico ou magnético vai induzir o outro campo, também é mostrado que uma corrente elétrica produz um campo magnético. Uma importante aplicação para o eletromagnetismo são as partículas fundamentais, que são importantes na cosmologia.

Em 1905 Albert Einstein publica a teoria da relatividade restrita modificando a mecânica da época [17]. Para isso foram proposto dois postulados, o primeiro diz que as leis da física são invariantes em referenciais inerciais, o segundo que a velocidade da luz independe de seu referencial. Esta teoria só é válida em um regime sem gravidade. Para objetos não tão massivos nem muito energéticos podemos utilizar as equações para a mecânica newtoniana.

Em 1915 temos a publicação da teoria da relatividade geral de Albert Einstein [16, 18–20], o espaço-tempo é visto como um tecido que é distorcido quando temos um objeto massivo sobre ele. Esta distorção é o que entendemos como gravidade. Em situações onde podemos desprezar a distorção do espaço-tempo somos capazes de usufruir das equações da relatividade restrita.

Com o avanço da tecnologia observações mais precisas do nosso Universo tem sido realizadas e por consequência as teorias vão sendo refinadas com base nas novas observações. Além disso, muitas vezes a evolução do conhecimento toma caminhos muito distintos daqueles que eram imaginados. Como exemplo, a expansão do Universo que antes de sua descoberta era comum a ideia de um universo estático.

Uma das primeiras teorias que foram formuladas com a ideia de expansão do universo foi o modelo estacionário [6], que dizia que mesmo com a expansão a densidade de matéria do universo era constante. Para isso a matéria era criada, por mais estranha que esta ideia possa parecer atualmente. Quando calculado quanta matéria é necessária ser criada para termos uma densidade constante chegamos no valor de um átomo de hidrogênio

por metro quadrado a cada aproximadamente 2,306 Mega anos, o que tornaria impossível a percepção da matéria sendo criada. Tendo a densidade de matéria constante este modelo não tem um início de universo denso e quente. Como a origem da radiação cósmica de fundo depende de um universo primordial com estas condições a sua descoberta na década de 60 descredibilizou esta teoria.

Um dos principais modelos cosmológicos hoje é o Λ CDM [36] que é uma abreviação de *Lambda-cold dark matter*, sendo um modelo bem formulado que é compatível com os dados atuais. Ao mesmo tempo é um modelo muito jovem que ainda vai passar por muitos testes. Suas principais características são uma constante cosmológica (Λ) que representa cerca de 70% da densidade do universo, aproximadamente 27% do universo é matéria escura fria, onde fria significa que ela se move lentamente comparada a velocidade da luz. Os demais 3% são toda matéria que é principalmente composta de prótons, nêutrons e elétrons, também chamada de matéria bariônica. Além disso ele segue o princípio cosmológico, que diz que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas.

Logo nossos melhores modelos seguem o princípio cosmológico. Este fato por sua vez tem um bom embasamento na radiação cósmica de fundo, que como vai ser mais aprofundado nas próximas seções, é uma radiação que percorreu todas direções do Universo e serve como uma forte evidência de um universo homogêneo e isotrópico. No entanto, temos contrapontos como, todas essas medidas são muito novas, ainda estamos fazendo medidas mais precisas e temos algumas observações que parecem fugir do princípio cosmológico.

O fato que já tivemos mudanças em nosso principal modelo e que nem todas observações seguem perfeitamente o princípio cosmológico não é prova que ele deve ser descartado, é possível que tais observações sejam explicadas com melhores tecnologias ou pequenos ajustes em nossos modelos atuais, apenas que ele não deve ser seguido cegamente e devemos ter interesse em estudar modelos que não seguem este princípio.

Uma das bases do estudo sobre modelos anisotrópicos é a classificação de Bianchi, foi feita pelo matemático Luigi Bianchi em 1898 [5], onde ele classificou todas variedades homogêneas tridimensionais nas quais existem apenas uma transformação isométrica que liga dois pontos quaisquer. Em 1951 Abraham Taub utilizou da classificação de Bianchi para derivar as métricas no espaço quadridimensional [58]. Assim a estratégia abordada nesta dissertação para estudar modelos que não seguem o princípio cosmológico é avaliar modelos anisotrópicos pelos trabalhos de Bianchi e Taub.

Durante um trabalho sobre cosmologia e gravitação é comum se deparar com a velocidade da luz (c) nas equações, para tornar mais conveniente é possível reescalonar o seu valor da forma que for mais favorável. De acordo com a geometria utilizada na relatividade um elemento de linha deve ter uma diferença de sinal entre as componentes espaciais e a temporal, assim surgem duas assinaturas possíveis. Nesta dissertação vamos utilizar $c = 1$ e a assinatura $(-, +, +, +)$. Além disso, os índices, que são de um tensor tridimensional cujas componentes têm relação apenas com a parte espacial de uma grandeza, são representados por letras do alfabeto latino ($A_{ij\dots k}$). No caso de um tensor quadridimensional, cujas componentes dependem do tempo, usamos letras gregas ($A_{\mu\nu\dots\rho}$).

Durante a segunda seção, vamos realizar uma revisão de relatividade geral, focando em temas que serão de extrema importância para o estudo de modelos cosmológicos anisotrópicos, como a derivada de Lie. Na terceira seção, seguimos revisitando diversos estudos de cosmologia homogênea e isotrópica, incluindo trabalhos que estudaram a formação de inhomogeneidades locais do Universo. Além disso, a derivação da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, e a teoria da dinâmica do Universo são temas indispensáveis para esta dissertação.

Na quarta seção, vamos fazer um estudo sobre a radiação cósmica de fundo, fazendo sua descrição teórica, estatística e descrevendo suas principais observações. Sobre as anisotropias na radiação cósmica de fundo teremos uma subseção dedicada a este tema, uma vez que ele é um dos principais incentivos na pesquisa de modelos cosmológicos anisotrópicos. Na quinta seção, concluiremos os objetivos classificando todos espaços homogêneos, como foi feito no trabalho de Luigi Bianchi, e derivando as métricas anisotrópicas, da mesma forma que foi realizada por Abraham Taub.

Relatividade geral

Nesta seção vamos fazer uma revisão sobre importantes conceitos de relatividade geral que vão ser fundamentais para o entendimento desta dissertação. No início do século XX, a eletrodinâmica apresentava incoerências com a mecânica newtoniana e a relatividade de Galileu [49]. Logo, tornou-se claro que uma dessas teorias deveria sofrer uma modificação. Em 1905 Albert Einstein modificando a relatividade de Galileu e a mecânica de Newton desenvolveu a relatividade restrita [17], que teve como fundamentos dois postulados, o primeiro que diz que as leis da física devem ser invariantes em todos referenciais inerciais e o segundo diz que a luz tem a mesma velocidade no vácuo independente da velocidade do observador e da origem da luz. Como o próprio nome sugere a relatividade restrita é um caso especial da relatividade geral, onde na ausência de gravidade uma teoria se reduz a outra. Em 1915 Einstein publica sua teoria em sua forma completa, imaginando a gravidade como uma distorção do espaço-tempo causado por um objeto massivo.

Um dos tensores mais importantes da relatividade é o tensor métrico ($g_{\mu\nu}$), que tem a função de generalizar a noção geométrica de distância. Ele está intimamente relacionado com o elemento de linha de um espaço. O elemento de linha, também chamado de diferencial de distância, é o segmento de linha associado com o deslocamento infinitesimal de um vetor. No espaço euclidiano tridimensional o elemento de linha é $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; as componentes da métrica são obtidos pelos coeficientes que acompanham os diferenciais, da seguinte forma: $dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, onde dx^1 é a coordenada dx , dx^2 é o diferencial dy e dx^3 o elemento dz . Como na relatividade trabalhamos com um espaço quadridimensional para o diferencial de tempo dt usamos a componente dx^0 , assim os índices gregos vão de 0 a 3, e os índices latinos, de 1 a 3. Usando diferencial de distância do espaço euclidiano como exemplo, nele a métrica tridimensional, em sua forma matricial, tem os elementos da diagonal igual a 1 e os demais igual a zero.

2.1 Vetores, campos vetoriais e 1-formas

No espaço euclidiano tridimensional nós representamos vetores de diferentes maneiras, por exemplo

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = V_r \mathbf{r} + V_\theta \boldsymbol{\theta} + V_\phi \boldsymbol{\phi} \quad , \quad (2.1)$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os vetores unitários nas direções x , y e z , respectivamente, das coordenadas retangulares, e \mathbf{r} , $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\phi}$ os vetores unitários das coordenadas esféricas. Escrevendo a equação (2.1) de uma forma mais geral,

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i \quad , \quad (2.2)$$

onde \mathbf{e}_i são os vetores de base e V^i a componente do vetor \mathbf{V} ao longo da direção i . A generalização de um vetor no espaço tridimensional para um campo no espaço quadridimensional é direta, ou seja um campo vetorial obedece a relação

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu \quad . \quad (2.3)$$

Em um ponto p de uma variedade M ¹, o conjunto de todos campos vetoriais deste ponto formam um espaço, este é o espaço tangente no ponto P , também chamado de $T_p M$. Com a noção de campos vetoriais, imagine uma curva parametrizada (λ) , em uma variedade M , e uma função (f) , que associa cada elemento da variedade a um número no intervalo $[a, b]$, como cada ponto da curva pode ser associada a uma coordenada $x^\mu(\lambda)$, $f(x^\mu(\lambda))$ é igual a uma função (g) que atua diretamente na curva, ou seja

$$f(x^\mu(\lambda)) = g(\lambda) \quad , \quad (2.4)$$

e a derivada da função $g(\lambda)$ é dada por

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_{\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad , \quad (2.5)$$

expressando como um operador e utilizando a convenção de soma de Einstein,

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \quad (2.6)$$

¹Uma ótima definição de variedade (*manifold*) está no livro do Sean Carroll [8]

Imagine que o operador $\frac{d}{d\lambda}$ seja um objeto geométrico, ele seria um objeto que está no plano tangente e que varia ao longo da curva λ , muito semelhante a um vetor. Não é coincidência, existe uma forte relação entre os dois [42, 53], e podemos comparar a equação (2.3) com (2.6), relacionando $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ com os vetores de base, $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ com as componentes, associando, assim, vetores como operadores diferenciais de primeira ordem. Com o espaço vetorial bem definido, podemos definir outro espaço de mesma dimensão conhecido como espaço dual, ele é frequentemente referenciado com um asterisco, assim o espaço dual de $T_p M$ é chamado de $T_p^* M$. O espaço dual é por definição o espaço de todos mapas lineares do espaço vetorial para os números reais, onde mapa é uma generalização de função [8], expressando matematicamente se $V \in T_p M$ e $w \in T_p^* M$, então

$$\omega(V) \in \mathbb{R} \quad . \quad (2.7)$$

Podemos introduzir vetores de base neste espaço, também chamados de vetores de base dual (θ^μ), que devem satisfazer a seguinte condição

$$\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad , \quad (2.8)$$

assim, todo vetor dual pode ser expandido em termo de suas bases e suas componentes,

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu \quad , \quad (2.9)$$

onde as componentes w_μ são chamados de 1-forma ou forma-um. De forma similar aos campos vetoriais, o conjunto dos vetores duais em um ponto geram o espaço dual, apesar de diversas semelhanças vetores e vetores duais são objetos distintos que estão em espaços diferentes. Finalmente, tensores de ordem mais alta são construídos pelo produto direto de um conjunto de vetores e vetores duais, ou seja para um tensor com k índices contravariante (superiores) e j índices covariantes (inferiores), temos

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_j} \quad , \quad (2.10)$$

onde $e_{\mu_1} \dots e_{\mu_k}$ são vetores de base, $\theta^{\nu_1} \dots \theta^{\nu_j}$ vetores de base dual, \otimes representa o produto direto e $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j}$ as componentes deste tensor.

2.2 Derivada covariante e símbolos de Christoffel

No livro do Sean Carroll é discutido o que é uma variedade [8], onde é deixado claro que para generalizar equações para um espaço curvo é interessante definir uma derivada que se transforme de forma covariante. Para isso pode-se dizer que esta derivada obedece 2 regras, linearidade $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$ e a regra de Leibniz $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$, sendo T e S tensores.

Se a derivada covariante vai obedecer a regra de Leibniz isto implica que ela pode ser escrita como a derivada parcial mais alguma transformação linear [61]; portanto temos

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda} \quad , \quad (2.11)$$

onde $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ é o símbolo de Christoffel e V^{ν} as componentes de um vetor. Em relação aos vetores com índices covariantes podemos de maneira semelhante definir sua derivada covariante, no entanto até então não temos nada que implique que a matriz que representa a transformação linear esteja relacionada aos elementos de $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$; assim, escrevemos em termos de $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$\nabla_{\mu} \omega_{\nu} = \partial_{\mu} \omega_{\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} \omega_{\lambda} \quad , \quad (2.12)$$

sendo ω_{ν} um vetor dual. Precisamos agora introduzir mais duas propriedades para as derivadas covariantes, a terceira é que a derivada comuta com contrações $\nabla_{\mu}(T^{\lambda}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}^{\lambda}_{\lambda\rho}$, e a quarta nos diz que ela se reduz a uma derivada parcial aplicada em escalares $\nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi$. Não é possível demonstrar essas propriedades, mas através delas podemos avançar e estabelecer a relação entre Γ e $\tilde{\Gamma}$. Assim, considerando os vetores arbitrários V^{λ} e ω_{λ} , temos que

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\lambda} V^{\lambda}) = (\nabla_{\mu} \omega_{\lambda}) V^{\lambda} + \omega_{\lambda} (\nabla_{\mu} V^{\lambda}) = (\partial_{\mu} \omega_{\lambda}) V^{\lambda} + \tilde{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\lambda} \omega_{\sigma} V^{\lambda} + \omega_{\lambda} (\partial_{\mu} V^{\lambda}) + \omega_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} V^{\rho} \quad , \quad (2.13)$$

Como $(\omega_\lambda V^\lambda)$ é um escalar todo esse termo deve ser igual a $\partial_\mu(\omega_\lambda V^\lambda)$, então

$$\nabla_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) = \partial_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) = \omega_\lambda \partial V^\lambda + V^\lambda \partial_\mu \omega_\lambda \quad . \quad (2.14)$$

Comparando o resultado anterior com a equação (2.13), conclui-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\lambda} \omega_\sigma V^\lambda + \omega_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\rho} V^\rho &= 0 \quad , \\ \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\lambda} &= -\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (2.15)$$

implicando que a derivada covariante de um vetor da base dual é dada por

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda \quad . \quad (2.16)$$

Por fim para encontrar os valores de Γ usamos que $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$, expandindo essa equação e permutando os índices temos,

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \quad , \quad (2.17a)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\sigma} = \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} = 0 \quad , \quad (2.17b)$$

$$\nabla_\nu g_{\sigma\mu} = \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} = 0 \quad . \quad (2.17c)$$

Fazendo a equação (2.17a) menos as equações (2.17b) e (2.17c), temos que

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\nu g_{\sigma\mu} + 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} = 0 \quad .$$

Multiplicando por $g^{\rho\sigma}$, obtemos o símbolo de Christoffel escrito em termos do tensor métrico

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad . \quad (2.18)$$

2.3 Noção de transporte e derivada de Lie

No início dos estudos é comum trabalhar com uma variedade plana onde todos os pontos tem o mesmo espaço tangente. Isto não é verdade ao trabalhar com uma variedade curva. Assim, é necessário construir uma noção de transporte, para que dois objetos possam ser comparados em locais onde eles tenham o mesmo espaço tangente.

Podemos nos perguntar em como mover um vetor de uma espaço tangente para outro, este problema não tem solução [8], apenas se deve aprender a lidar com o fato de que não existe uma forma simples de comparar dois vetores que tem espaços tangentes diferentes. Existem muitos métodos de transporte e nesta seção vamos apresentar apenas dois de vários.

Um mecanismo para comparar dois vetores é o transporte paralelo, onde um vetor é transportado paralelamente em relação ao seu espaço tangente. O que é intuitivo em um espaço plano, em um espaço curvo o transporte paralelo depende do caminho. Em um espaço plano, um tensor é dito constante ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$, se, e somente se, suas componentes forem constantes, ou seja,

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Para generalizar esta equação para um espaço curvo simplesmente trocamos a derivada parcial por uma covariante. Para isso definimos a derivada covariante direcional como:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad . \quad (2.20)$$

O transporte paralelo de um tensor ao longo de uma curva exige que a derivada covariante direcional seja igual a zero, isto é

$$\frac{D}{d\lambda} (T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0 \quad . \quad (2.21)$$

Com a definição de transporte paralelo podemos notar que a menor distância entre dois pontos é o caminho no qual o seu vetor tangente é transportado paralelamente entre os dois pontos, ou

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad , \quad (2.22)$$

ou ainda

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad . \quad (2.23)$$

Essa é a equação da geodésica que determina a menor distância entre dois pontos. No espaço euclidiano temos que $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = 0$ logo a equação da geodésica se torna a equação da reta $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0$.

Partindo para outra noção de transporte considere dois pontos, P em x^α e Q em $x'^\alpha \equiv x^\alpha + dx^\alpha$. O vetor tangente $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ pode ser usado para expressar $x^\alpha + dx^\alpha$ como $x^\alpha + u^\alpha d\lambda$. Queremos definir então o valor de um vetor A^α no ponto Q e o mesmo vetor transportado de P para Q. O vetor transportado de P para Q tem como valor

$$A_{(P \rightarrow Q)}^\alpha = \frac{\partial(x')^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta = A_{(P)}^\alpha + \partial_\beta u^\alpha A_{(P)}^\beta d\lambda \quad , \quad (2.24)$$

enquanto em Q podemos expandir o valor de A^α com uma série de Taylor e desprezar os termos de segunda ordem ou maiores

$$A_{(Q)}^\alpha = A_{(x^\beta + dx^\beta)}^\alpha = A_{(x^\beta)}^\alpha + dx^\beta (\partial_\beta A^\alpha)|_P = A_{(P)}^\alpha + u^\beta \partial_\beta A_{(P)}^\alpha d\lambda \quad . \quad (2.25)$$

Por fim definimos a derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_u A^\alpha \equiv \frac{A_{(Q)}^\alpha - A_{(P \rightarrow Q)}^\alpha}{d\lambda} = u^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha \quad , \quad (2.26)$$

onde $u = u^\beta e_\beta$. Repare que o símbolo de Christoffel que falta para transformar a derivada parcial de A^α em covariante é o mesmo que precisamos para transformar a derivada de u^α . Então podemos, na derivada de Lie, mudar a derivada parcial para covariante. Para provar esta afirmação começamos introduzindo os símbolos de Christoffel da seguinte forma

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = u^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta u^\alpha + (A^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma - A^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma) \quad . \quad (2.27)$$

Como nos últimos dois termos os índices α e β estão contraídos e os índices covariantes do símbolo de Christoffel são simétricos podemos reescrever-los, portanto

$$A^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma = u^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\gamma \quad . \quad (2.28)$$

Utilizando a propriedade (2.28), substituindo na equação (2.27) e reagrupando, temos que

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = u^\beta (\partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\gamma) - A^\beta (\partial_\beta u^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma) \quad , \quad (2.29)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_u A^\alpha = u^\beta \nabla_\beta A^\alpha - A^\beta \nabla_\beta u^\alpha \quad . \quad (2.30)$$

Todo este procedimento pode ser repetido para o caso de um 1-forma, e assim encontramos

$$\mathcal{L}_u \omega_\alpha = u^\beta \nabla_\beta \omega_\alpha + \omega_\beta \nabla_\alpha u^\beta \quad , \quad (2.31)$$

para tensores de ordem mais alta, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j} &= u^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j} - T^{\alpha \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_j} \nabla_\alpha u^{\mu_1} - \dots - T^{\mu_1 \dots \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_j} \nabla_\alpha u^{\mu_k} \\ &+ T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\alpha \dots \nu_j} \nabla_{\nu_1} u^\alpha + \dots + T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \alpha} \nabla_{\nu_j} u^\alpha \quad . \quad (2.32) \end{aligned}$$

Assim, em uma curva γ com tangente \mathbf{u} um tensor é transportado segundo as noções envolvidas na derivada de Lie ao longo de \mathbf{u} se $\mathcal{L}_u(\text{Tensor}) = 0$. Imagine que esse tensor seja a métrica e que exista um vetor tal que $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Podemos repetir o procedimento acima para um tensor de ordem mais alta e encontrar a derivada de Lie, expandindo a derivada de Lie da métrica,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\gamma \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\gamma} \nabla_\beta \xi^\gamma + g_{\beta\gamma} \nabla_\alpha \xi^\gamma = 0 \quad , \quad (2.33)$$

como $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$,

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \quad . \quad (2.34)$$

Esta equação é conhecida como equação de Killing e os vetores ξ são chamados de vetores de Killing.

2.4 Tensor de Riemann e a equação de campo de Einstein

Considere um tensor V^ρ , transportado paralelamente e sequencialmente em duas direções infinitesimais A^μ e B^ν , em seguida o tensor é transportado nos sentidos inversos das direções A^μ e B^ν , assim o tensor retorna a sua posição inicial, como mostra a figura (2.1). Mover um tensor em um espaço curvo pode modificá-lo. Como o transporte paralelo é independente das coordenadas, o quanto este tensor muda durante este transporte deve ser uma transformação linear do vetor original e deve depender dos intervalos que definem o ciclo, assim podemos escrever a equação,

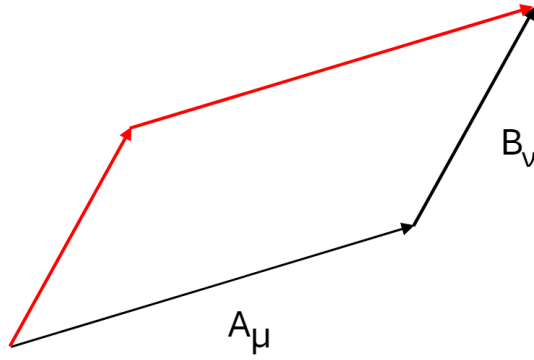


Figura 2.1: Caminho cíclico descrito pelas direções infinitesimais, A^μ e B^ν .

$$\delta V^\rho \propto V^\sigma A^\mu B^\nu \quad , \quad (2.35)$$

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu \quad . \quad (2.36)$$

O tensor $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Riemann ou tensor de curvatura. Como mudar o sentido que o tensor é transportado inverte o sinal da variação δV^ρ , esse tensor é antissimétrico em seus dois últimos índices.

Uma das principais utilidade do tensor de Riemann é mostrar a curvatura de uma métrica, uma vez que em um espaço plano o tensor de curvatura tem todas suas componentes igual a zero. O tensor de Riemann tem diversas propriedades que são expandidas por várias referências de relatividade geral [8, 61]. Uma das principais propriedades vem ao usar o comutador de duas derivadas covariantes no vetor transportado V^ρ . Expandindo com os símbolos de Christoffel e comparando com a equação (2.36) temos

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad . \quad (2.37)$$

Um caso especial do tensor de curvatura é o tensor de Ricci que é o tensor de Riemann contraído da seguinte forma,

$$R^\rho_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu} \quad . \quad (2.38)$$

Além deste tensor podemos obter o traço do tensor de Ricci também conhecido como escalar de Ricci pela seguinte relação,

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R \quad . \quad (2.39)$$

Outra importante propriedade do tensor de Riemann é obtida ao realizar a derivada covariante do tensor com os quatro índices covariantes e somar as permutações cíclicas dos três primeiros índices, incluindo a derivada covariante. Ao expandir as contas usando os símbolos de Christoffel e a métrica chegamos na conclusão,

$$\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu} = \nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.40)$$

Esta equação é conhecida como identidade de Bianchi. Uma forma especialmente útil vem ao contrair duas vezes com a métrica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_{\lambda}R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho}R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma}R_{\lambda\rho\mu\nu}) &= 0 \quad , \\ \nabla^{\mu}R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho}R + \nabla^{\nu}R_{\rho\nu} &= 0 \quad , \\ \nabla^{\mu}R_{\rho\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\rho}R &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Com base na equação acima vamos definir um tensor G tal que $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad . \quad (2.42)$$

Este tensor é conhecido como tensor de Einstein. A importância desta equação vem principalmente da generalização da equação de Poisson para o potencial newtoniano, que é dada por

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad . \quad (2.43)$$

O formato mais geral desta equação deve ter uma forma tensorial. Assim, o lado direito da igualdade deve apresentar o tensor de energia e momento, enquanto o lado esquerdo seria algo que envolvesse a derivada de segunda ordem da métrica. A conservação do tensor de energia e momento tem a relação $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$, logo estamos procurando um tensor simétrico de segunda ordem que dependa da segunda derivada da métrica, e tenha a derivada covariante igual a zero. Como acabamos de mostrar o tensor de Einstein tem todas estas propriedades. Pode-se concluir que o tensor de Einstein é proporcional ao tensor de energia e momento,

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.44)$$

Para calcular qual é o valor desta proporção basta substituir o índice temporal e comparar com a equação (2.43) para chegar no resultado [8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad . \quad (2.45)$$

Esta é a equação de campo de Einstein, que diz como a matéria e geometria se influenciam, uma vez que o lado esquerdo da igualdade é apenas tensores que descrevem a geometria e curvatura do espaço-tempo, e o lado direito é o tensor de energia e momento.

Cosmologia homogênea e isotrópica

Com o avanço da tecnologia, novos dados do nosso Universo e suas características estão sendo capturadas. Entre eles, uma das mais importantes é a radiação cósmica de fundo, descoberta em 1965. A informação mais valiosa que podemos extrair dessa observação é o fato de ela ser quase completamente homogênea e isotrópica. Essa característica é valiosa porque, independentemente da origem da radiação, ela deve ter se propagado livremente até nós. Se houvesse uma região inhomogênea ou anisotrópica em grande escala no universo, teria afetado a radiação, tornando-a anisotrópica. Embora a radiação cósmica de fundo não seja perfeitamente isotrópica e o universo não seja homogêneo em pequenas escalas, quando olhamos em grandes escalas, ela deve ser homogênea e isotrópica.

É difícil explicar por que o Universo é tão homogêneo e isotrópico em grandes escalas mas é possível encontrar inhomogeneidades locais, como no caso de aglomerados de galáxias. Vamos começar esta seção revisando artigos que tentaram resolver esse problema, tendo em mente que muitos destes artigos foram escritos antes dos modelos inflacionários, portanto podem apresentar imprecisões de acordo com nossos modelos mais atuais. Ainda assim, há o interesse de discutir sobre eles para gerar uma revisão histórica sobre o debate de modelos cosmológicos. Vários estudos adotaram o crescimento de pequenas perturbações inhomogêneas no modelo de FLRW para resolvê-lo [48, 54]. No entanto, essas perturbações crescem apenas lentamente, de forma que o surgimento das galáxias é um evento que demandaria mais tempo do que é observado hoje. Porém, como vamos ver, ainda há uma classe de perturbações que pode resolver essa questão, que são as perturbações homogêneas e anisotrópicas.

Outra tentativa de solução foi proposta por Misner em 1968 [41], onde ele afirmava que o universo era extremamente inhomogêneo e anisotrópico em sua origem e que a viscosidade do neutrino causaria um efeito diminuindo a grande anisotropia inicial, e o restante diminuiria ao longo da expansão do universo. Em seguida, Steward [57]; Doroshkevich, Zel'dovich e Novikov [14]; Collins e Steward [11], contra-argumentaram o trabalho de Misner, mostrando que a viscosidade do neutrino só pode diminuir a anisotropia do universo

se ela não for inicialmente muito grande. Esse mesmo argumento também funciona em qualquer outro trabalho que utilize algum método de dissipação da anisotropia.

Por fim, vamos discutir os trabalhos de S.W. Hawking e C.B. Collins [10, 32], no qual eles exploraram a possibilidade de perturbações homogêneas e anisotrópicas gerarem as anisotropias e inomogeneidades locais que observamos. Essas perturbações também se beneficiam da classificação de Bianchi e foram estendidas por Estabrook *et al* [25] e por Ellis e McCallum [23]. Assim, S.W. Hawking e C.B. Collins descobriram que, para um modelo hiperbólico, existem dois tipos de perturbações: uma diminui com o avanço do tempo, enquanto a outra cresce quando a densidade de matéria é muito baixa, de forma que ela não afeta a dinâmica do universo, ou seja, uma das perturbações vai diminuir com o tempo, porém a outra aumenta muito rápido para modelos com uma densidade de matéria baixa. No modelo plano, ambas as perturbações, diminuem e eventualmente se tornam desprezíveis com o avanço do tempo. No modelo esférico, a perturbação cresce até que o universo atinja seu tamanho máximo e comece a recolapsar.

Considerando esses resultados, a melhor explicação para a isotropia do universo é que ele está expandindo com praticamente a velocidade mínima para evitar o recolapso, ou seja, é quase o modelo de Friedmann com $k = 0$. Se estivesse expandindo mais rapidamente, a matéria não seria dinamicamente importante no início do universo e teria crescido uma perturbação anisotrópica em grandes escalas. Se estivesse expandindo mais devagar, teria recolapsado antes de atingir o tamanho atual.

3.1 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Partindo da forma geral: $dS^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ e adotando a assinatura $(-,+,+,+)$ vamos derivar a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Muitas referências usam o postulado de Weyl de 1923 para reduzir dS^2 para a forma $dS^2 = -dt^2 + a^2(t)dl^2$ [64], porém com o avanço das observações e da teoria também é usado o argumento que não podemos ter uma função de r em dt^2 pois observadores em locais diferentes, porém em condições semelhantes, não devem experimentar o tempo de forma diferente. Para preservar a homogeneidade, g^{ab} só pode depender de t por um fator comum, e pela isotropia teremos apenas termos do tipo $(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2$ e $(d\vec{x} \cdot d\vec{x})^2$ [34]. Então vamos partir de

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t) [C(r) (\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + D(r) (d\vec{x} \cdot d\vec{x})^2] = -dt^2 + a^2(t)dl^2 \quad , \quad (3.1)$$

sendo,

$$dl^2 = C(r)r^2 dr^2 + D(r) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad , \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$dl^2 = (C(r)r^2 D(r)) dr^2 + D(r)r^2 d\Omega^2 \quad (3.3)$$

onde,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2 \quad . \quad (3.4)$$

Vamos fazer agora um reescalonamento, com $D(r)r^2 = \bar{r}^2$,

$$dl^2 = B(\bar{r})d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad , \quad (3.5)$$

onde a transformação do termo $(C(r)r^2 D(r))$ chamamos de $B(\bar{r})$, voltando a usar r ao invés de \bar{r} , temos que

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t) [B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad . \quad (3.6)$$

Agora basta determinar a função $B(r)$, e para isso vamos calcular o traço do tensor de Einstein e determinar que pela homogeneidade ele deve ser constante. Começamos pelos símbolos de Christoffel [8],

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad .$$

Usando a fórmula acima vamos listar os símbolos de Christoffel não nulos, lembrando que os dois índices inferiores são simétricos,

$$\begin{aligned} \Gamma^r{}_{rr} &= \frac{1}{2} \frac{B'(r)}{B(r)}, & \Gamma^r{}_{\theta\theta} &= -\frac{r}{B(r)}, & \Gamma^r{}_{\phi\phi} &= -\frac{r}{B(r)} \sin^2(\theta) \quad , \\ \Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad , \\ \Gamma^\phi{}_{r\phi} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} &= \cot(\theta) \quad e \quad \Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj} \quad . \end{aligned}$$

Agora podemos calcular os tensores de Ricci, para então obter o escalar de curvatura de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} \quad . \quad (3.7)$$

Começando com o R_{rr} :

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{rr} - \partial_r \Gamma^\alpha{}_{\alpha r} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda{}_{rr} - \Gamma^\alpha{}_{r\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\alpha r} \quad , \\ R_{rr} &= \partial_r \Gamma^r{}_{rr} - \partial_r \Gamma^r{}_{rr} - 2\partial_r \Gamma^\theta{}_{r\theta} + (\Gamma^r{}_{rr})^2 + 2\Gamma^r{}_{rr} \Gamma^\theta{}_{r\theta} - (\Gamma^r{}_{rr})^2 - 2(\Gamma^\theta{}_{r\theta})^2 \quad , \\ R_{rr} &= 2r^{-2} + \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{B(r)} - 2r^{-2} = \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{B(r)} \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora construindo $R_{\theta\theta}$,

$$R_{\theta\theta} = \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} + \Gamma^r{}_{\theta\theta} \Gamma^r{}_{rr} + 2\Gamma^r{}_{\theta\theta} \Gamma^\theta{}_{r\theta} - 2\Gamma^r{}_{\theta\theta} \Gamma^\theta{}_{r\theta} - (\Gamma^\phi{}_{\theta\phi})^2 \quad ,$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{B(r)} + r \frac{B'(r)}{B^2(r)} + \csc^2(\theta) - \frac{1}{2} r \frac{B'(r)}{B^2(r)} - \cot^2(\theta) \quad ,$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{2} r \frac{B'(r)}{B^2(r)} - \frac{1}{B(r)} + 1 \quad . \quad (3.9)$$

A última componente sai de maneira mais simples ao perceber que ele é uma função de $R_{\theta\theta}$:

$$R_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) R_{\theta\theta} \quad . \quad (3.10)$$

Com as equações (3.8), (3.9) e (3.10) e facilmente percebendo que $R_{tt} = 0$, podemos seguir para achar o escalar de curvatura de Ricci,

$$R = g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} \quad ,$$

$$R = \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{B^2(r)} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{2} r \frac{B'(r)}{B^2(r)} - \frac{1}{B(r)} + 1 \right) \quad ,$$

$$R = 2 \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{B^2(r)} - \frac{2}{B(r)r^2} + \frac{2}{r^2} \quad . \quad (3.11)$$

Com todos esses elementos vamos substituir no tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad , \quad (3.12)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{B(r)} - \frac{1}{2} B(r) \left(\frac{2B'(r)}{B^2(r)} \frac{1}{r} - \frac{2}{B(r)r^2} + \frac{2}{r^2} \right) \quad ,$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (1 - B(r)) \quad ,$$

$$G_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{2} r \frac{B'(r)}{B^2(r)} - \frac{1}{B(r)} + 1 \right) - \left(\frac{B'(r)}{B^2(r)} \frac{1}{r} - \frac{1}{B(r)r^2} + \frac{1}{r^2} \right) r^2 \quad ,$$

$$G_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} r \frac{B'(r)}{B^2(r)} \quad ,$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) G_{\theta\theta} \quad .$$

Finalmente vamos calcular o traço do tensor de Einstein:

$$G = G_{rr} g^{rr} + 2G_{\theta\theta} g^{\theta\theta} \quad ,$$

$$G = \frac{1}{r^2 B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{B'(r)}{r B^2(r)} \quad ,$$

$$G = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{B'(r)r}{B^2(r)} - 1 \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{B(r)} - r \right] \quad . \quad (3.13)$$

O traço do tensor de Einstein deve ser constante devido a homogeneidade:

$$G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{B(r)} - r \right] = cte = \alpha \quad , \quad (3.14)$$

$$\frac{r}{B(r)} - r = \frac{1}{3} \alpha r^3 + A \quad , \quad (3.15)$$

onde A é a constante de integração. Tomando o ponto $r = 0$, concluímos que $A = 0$, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(r)} &= 1 + \frac{1}{3} \alpha r^2 \quad , \\ B(r) &= \frac{1}{1 - Kr^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim basta substituir na equação (3.6) o valor de $B(r)$, que chegamos na métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right] \quad . \quad (3.17)$$

3.2 Dinâmica do Universo

Utilizando a métrica de FLRW (3.17) e substituindo na equação de campo de Einstein (3.12), onde para $T_{\mu\nu}$ vamos usar o tensor de momento-energia para um fluido perfeito [65],

$$T_{\alpha\beta} = 8\pi G [(\rho + P) u_\alpha u_\beta - P g_{\alpha\beta}] \quad , \quad (3.18)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e ρ , P e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ são respectivamente a densidade, pressão e quadrivelocidade deste fluido, os termos espaciais serão iguais. Logo podemos retirar duas equações,

$$3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] = 8\pi G \rho \quad , \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi G P - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \quad . \quad (3.20)$$

Podemos combinar as equações (3.19) e (3.20) para conseguir as equações de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} \quad , \quad (3.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad . \quad (3.22)$$

Por fim, tomando a derivada temporal da equação (3.21) e substituindo em (3.22) temos a equação de conservação de energia,

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \quad . \quad (3.23)$$

Vamos resolver a equação (3.23) usando uma equação de estado, $P = w\rho$ [62], que chegamos na relação,

$$\rho \propto a^{-3-3w} \quad , \quad (3.24)$$

sendo que para diferentes tipos de densidade temos diferentes valores de w , para matéria não relativística (poeira) $w = 0$, para radiação $w = 1/3$ e para energia do vácuo $w = -1$, etc [62].

Concluindo, vamos fazer uma revisão sobre o desvio para o vermelho na cosmologia [52]. Quando um objeto distante emite um comprimento de onda, geralmente, o comprimento observado (λ_0) é diferente do emitido (λ_e), este efeito é chamado de desvio para o vermelho (z), definido pela relação

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad . \quad (3.25)$$

Queremos relacionar o desvio para o vermelho com fator de escala $a(t)$, para isso, imagine uma luz emitida por uma galáxia no tempo t_e e nós a observamos no tempo t_0 . Esta luz se desloca por uma geodésica nula, onde temos a equação

$$dt^2 = a^2(t)dr^2 \quad . \quad (3.26)$$

Reorganizando e integrando ambos os lados temos,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r \quad . \quad (3.27)$$

A ideia é fazer deste sinal um pico de onda e realizar o mesmo procedimento para o próximo pico de onda desta luz, que foi emitida no tempo $t_e + \lambda_e/c$ e que é observada no tempo $t_0 + \lambda_0/c$ e comparar as duas integrais, uma vez que a distância (r) é a mesma.

Lembrando que de maneira geral $\lambda_e \neq \lambda_0$, igualando as duas integrais descritas, temos que

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} . \quad (3.28)$$

Subtraindo de ambos os lados da equação acima a integral

$$\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} , \quad (3.29)$$

chegamos na relação

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} . \quad (3.30)$$

Esta equação pode ficar ainda mais simples percebendo que entre o tempo de emissão ou observação entre dois picos de uma mesma fonte luminosa o universo não teve tempo de expandir uma quantidade considerável, isto é nas integrais da equação (3.30) o fator de escala é constante, assim chegamos na relação

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt ,$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)} . \quad (3.31)$$

Voltando a equação do desvio para o vermelho (3.25), podemos relacionar o desvio da luz com o fator de escala e chegamos no resultado final,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} . \quad (3.32)$$

Um exemplo prático, Markarian 231 é uma galáxia que ao observar a luz que recebemos dela detectamos um desvio de $z \approx 0,041$, assim, utilizando $a(t_0) = 1$, encontramos $a(t_e) = 0,961$, que é o fator de escala no momento de emissão do fóton, com isso podemos estimar o tempo para este fóton chegar até a terra.

3.3 Evolução do universo

Para total compreensão da radiação cósmica de fundo, que é de extrema importância para estudar modelos anisotrópicos, devemos revisar a evolução temporal do modelo cosmológico padrão. A evolução de nosso Universo é um tópico extenso que devido a sua

constante expansão fica em um estado de permanente mudança e assim passa por várias eras. Assim, nesta subseção vamos fazer um resumo de cada uma dessas eras [35]. Vale ressaltar que não existe um consenso sobre como é dividido as eras de nosso Universo e diferentes referências podem usar outras divisões.

3.3.1 Era de Planck

A era de Planck vai da singularidade (*Big Bang*) até o tempo $10^{-43}s$. Neste ponto temos um grande problema pois nossas teorias atuais da mecânica quântica não relativísticas podem ser insuficientes ao trabalhar com comprimentos menores que o comprimento de Planck ou um tempo menor que o tempo de Planck [13]. Além disso, a própria singularidade, uma situação com uma temperatura e densidade infinita em um espaço nulo, é um problema, por isso muitas vezes é abordado um modelo que não tem uma singularidade inicial. No entanto, o que aconteceu durante esta época continua sendo desconhecido, uma vez que a relatividade geral não é uma teoria que pode ser utilizada para descrever este período, assim ficamos sem métodos para, teoricamente, estudar a era de Planck.

Experimentalmente, ainda não temos tecnologia para recriar as condições desta época. Podemos usar as constantes de nossas teorias para encontrar as propriedades básicas como a energia de Planck ($10^{19}GeV$), o tempo de Planck ($10^{-43}s$), comprimento de Planck ($10^{-35}m$) e a massa de Planck ($10^{-5}g$). Uma das principais características é que durante esta época as quatro interações fundamentais eram unificadas. Isso gera interesse em tentar criar uma teoria do campo unificado, onde todas interações fundamentais possam ser descritas em termo de um único campo. Vários grupos de pesquisa já se empenham para tal.

3.3.2 Era da grande unificação até a Inflação

Este período vai de $10^{-43}s$ até $10^{-36}s$, e é marcado pela separação da gravitação das outras interações fundamentais, seguindo unificadas apenas as interações forte, fraca e a eletromagnética. A teoria que une as três interações recebe o nome de teoria da grande unificação. Uma de suas características é que muitas vezes a conservação do número bárions é violada. Hoje, quando matéria é criada através de energia deve surgir

uma partícula e sua anti-partícula para conservar o número de bárions. O mesmo não é verdade nesta Era.

Com a contínua expansão do universo ele vai esfriando, apesar de ainda estar com temperaturas na ordem de 10^{28} K. Com menos energia as interações fundamentais vão se separando: primeiro, a interação forte se separa e depois a eletrofraca se separa, onde temos as quatro interações conhecidas hoje. Este processo acaba no tempo 10^{-12} s.

Antes da interação eletrofraca separar das outras aconteceu a inflação, que surge com a ideia de solucionar problemas do modelo cósmico padrão como o problema da planicidade, problema do horizonte, problema dos monopolos magnéticos entre outros [52]. A inflação é uma expansão acelerada em um período muito curto de tempo. Vamos apresentar os três problemas e mostrar como a inflação resolve eles.

Começando pelo problema da planicidade. Vamos multiplicar ambos os lados da equação (3.21) por $3a^2/8\pi G$,

$$\frac{3a^2}{8\pi G}H^2 = \rho a^2 - \frac{3K}{8\pi G} \quad , \quad (3.33)$$

e usando a densidade crítica como $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ chegamos em,

$$\rho_c a^2 - \rho a^2 = -\frac{3K}{8\pi G} \quad , \quad (3.34)$$

então usando que $\Omega = \rho/\rho_c$, obtemos

$$1 - \Omega(t) = \frac{K}{a^2 H^2} \quad . \quad (3.35)$$

Isso mostra uma instabilidade pois nossas medições hoje mostram um Ω_0 igual a 1 de forma que teríamos $K = 0$ e qualquer valor um pouco diferente deste cresceria em módulo ao longo dos bilhões de anos. O problema da planicidade é justamente o porque deste valor. A inflação resolve com a ideia que uma expansão muito acelerada desta forma iria planificar tudo fazendo o valor de K ir para 0 independente de seu valor antes da inflação.

O problema do horizonte foi principalmente apontado por Charles Misner, com a ideia de que dois pontos distintos em locais diferentes do universo podem nunca ter tido conexão causal e tem as mesmas propriedades, mas como é possível, por exemplo,

que dois pontos que nunca trocaram informação tenham a mesma temperatura e outras propriedades. A inflação faz o fator de escala e conseqüentemente a distância do horizonte aumentar exponencialmente. Esta simples mudança já faz os pontos terem conexão causal em algum momento resolvendo o problema do horizonte.

O problema dos monopolos magnéticos surge devido as nossas teorias que nos dizem que eles deveriam ter sido criados, porém não conseguimos encontrá-los. A inflação resolve este problema pois se eles foram criados antes ou depois da inflação a sua densidade decairia para valores indetectáveis.

3.3.3 Era Hadrônica

Era Hadrônica ou era das partículas pesadas foi um período entre $10^{-5}s$ e $1s$, e com temperaturas na ordem de 10^{12} K, em que os quarks deixaram de existir como partículas isoladas e a interação forte os "prenderam" formando bárions e mésons. Os fótons nessa época eram muito energéticos ao ponto de que suas colisões poderiam gerar prótons e nêutrons que se aniquilavam com suas antipartículas. Nesta época a quantidade de prótons e nêutrons eram as mesmas.

3.3.4 Era Leptônica

Após 1 segundo desde o *Big Bang* tínhamos a era Leptônica ou era das partículas leves, com a temperatura na ordem de 10^{10} K. Com a diminuição da energia não é mais possível criar Hádrons, apenas Léptons como elétrons, múons, taus e seus neutrinos. Os nêutrons e prótons restantes da era Hadrônica se transformam de um para o outro com colisões junto com elétrons e pósitron pelas seguintes reações



Uma diferença entre as duas reações é que a primeira necessita de um pouco de energia, uma vez que a massa do nêutron é maior que a do próton. Mas como o universo ainda está muito quente e cheio de energia ambas reações vão ocorrer continuamente até que a

temperatura abaixe a ponto que a segunda reação ocorra de forma mais abundante e isso vai gerar uma desigualdade na quantidade das duas partículas

3.3.5 Era da Nucleossíntese Primordial

A era da nucleossíntese ocorre a partir do momento que a temperatura cai para 10^9 K e a interação nuclear forte consegue manter prótons e nêutrons unidos. Assim foram criados os primeiros átomos mas eles ainda não eram neutros pois os elétrons não conseguiam se juntar. Os estudos sobre a nucleossíntese foram desenvolvidos por Gamow e seus colaboradores [1, 2, 30]. Assim prótons se juntaram com nêutrons para formar o deutério (D), um isótopo do hidrogênio, pela seguinte reação



As fusões nucleares continuam produzindo elementos mais pesados como o hélio



Essas reações continuam até o lítio. Outro importante dado da pesquisa de Gamow é a fração de massa entre hélio e hidrogênio que podemos comparar com os dados de hoje. Considerando que todos os nêutrons são usados para formar hélio e quando se inicia a Nucleossíntese a proporção entre prótons e nêutrons era de 1 nêutron para cada 7 prótons é possível calcular a proporção entre átomos de hélio e hidrogênio. A previsão teórica e as observações atuais estão de acordo, com grande precisão.

3.3.6 Era da recombinação e desacoplamento.

Os fótons nesse ponto não tem mais energia suficiente para impedir a combinação dos prótons e elétrons então é formado pela primeira vez átomos de hidrogênio neutros e estáveis sem que fótons altamente energéticos colidam com os mesmos e desfaça a ligação entre as partículas. Pouco tempo depois temos o desacoplamento quando, com auxilio da expansão do universo, as partículas se afastam uma das outras aumentando o livre

caminho médio dos fótons e eles passam a se mover livremente pelo universo. Até então estes fótons não conseguiam desacoplar da matéria e então o universo era opaco. Após o desacoplamento ele se torna transparente. Estes fótons que viajam pelo universo desde o desacoplamento são chamados de radiação cósmica de fundo que hoje chega a nós com comprimento na faixa do microondas. Estima-se que estes eventos aconteceram quando o universo tinha aproximadamente 380.000 anos de idade, e eles foram previstos pela teoria da Nucleossíntese desenvolvida por Gamow. Como nem todos os fótons desacoplaram ao mesmo tempo existe uma região do desvio para o vermelho que estes eventos aconteceram. Então, é definido como a última superfície de espalhamento quando o último fóton desacoplou da matéria.

Radiação cósmica de fundo

O Universo em sua época primordial era extremamente denso e quente, e nenhum átomo consegue se formar devido aos fótons muito energéticos que impediam elétrons de se "prenderem" ao núcleo. Com o passar do tempo o universo se expandiu, consequentemente esfriou e os primeiros átomos se formaram. No entanto o universo ainda era muito pequeno e o livre caminho médio dos fótons não era o suficiente para que eles se movessem livremente. Assim após aproximadamente 380 mil anos após o *Big Bang* o universo expandiu até que estes fótons se espalhassem livremente por todo universo. Esta radiação é conhecida como radiação cósmica de fundo (RCF). Como a RCF percorreu o universo em todas as direções ao longo de bilhões de anos ela carrega informações sobre a homogeneidade e isotropia do universo, uma vez que isso irá se refletir na temperatura destes fótons, onde a temperatura é de aproximadamente 2,725K com variações na ordem de 10^{-5} , isso o torna de extrema importância.

Essa radiação de acordo com a teoria deve ter um espectro de corpo negro, onde a densidade numérica de fótons em equilíbrio térmico com matéria a uma temperatura T é dada por [62]

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad , \quad (4.1)$$

no qual a frequência que o fóton se encontra é dado pela faixa de ν até $\nu + d\nu$. A intensidade de uma certa frequência é escrita como

$$I_T(\nu) = \frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad . \quad (4.2)$$

Estes valores são comumente usados para fazer uma conexão da teoria com a observação. Por exemplo, no trabalho de Mather, Fixsen e outros em 1994 [38] é feito uma predição da intensidade da radiação cósmica de fundo e comparada com os dados do COBE (*COsmic Background Explorer*). O resultado é extremamente preciso e com isso é

mostrado que 99,97% da energia radiante de nosso universo tem origem no primeiro ano após o *Big Bang*.

A RCF foi detectada pela primeira vez em 1965 com os astrônomos Arno Penzias e Robert Wilson, que ganharam o prêmio Nobel da física em 1978, quando eles trabalhavam com uma antena de comunicação por rádio. Eles encontraram um ruído que não era possível explicar. Assim obtiveram uma imagem que representa a radiação que estavam recebendo, sendo extremamente uniforme e apenas um pouco mais intensa no centro. Ao mesmo tempo os astrofísicos Robert Dicke, James Peebles e David Wilkinson, estavam estudando a teoria do *Big Bang* e previram, embora eles não fossem os primeiros, a existência dessa radiação como um remanescente do próprio evento. Logo eles entraram em contato com Penzias e Wilson para que eles trabalhassem em conjunto.

Com o passar dos anos, novos equipamentos foram utilizados para as medidas, entre eles, um dos mais importantes foi o COBE (explorador do fundo cósmico) que junto com o instrumento de medida FIRAS (do inglês *far infrared absolute spectrophotometer*) fizeram medidas precisas da RCF [38, 56]. O FIRAS consistia em um interferômetro de Michelson que era calibrado de forma a receber apenas os fótons da RCF, e media dois pontos distintos do céu. Com os dados de diversos pontos era então feito um espectro de potência que é usado para generalizar as medidas por todo espaço observável. Estes dados foram coletados e após 4 anos obtivemos um resultado mais preciso da radiação. Já foi possível perceber pequenas diferenças de energia, além disso no centro da imagem percebe-se uma intensidade maior de radiação mas isso é devido a emissão de micro-ondas de nossa própria galáxia.

Assim o próximo passo era eliminar esta interferência. Isto foi feito pelo WMAP (do inglês *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), que foi uma sonda enviada pela NASA, onde duas técnicas foram usadas para remover o ruído de nossa galáxia: o primeiro usou dados de mapas galácticos existentes em diferentes frequências para montar um modelo de emissão; o segundo criou combinações lineares de frequências de forma que espectros específicos não eram considerados. Juntando os dois métodos foi obtido dados de grande importância da radiação cósmica de fundo.

4.1 Efeito Sachs-Wolfe

Para descrever a radiação cósmica de fundo teoricamente precisamos da equação de Sachs-Wolfe. Para obtermos essa equação, partimos da métrica perturbada [45]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [\delta_{ij} - h_{ij}] dx^i dx^j \quad , \quad (4.3)$$

onde $h_{ij} \ll 1$ e representa uma pequena perturbação na métrica, $a(t)$ o fator de escala e δ_{ij} é a métrica sem perturbação. Tomamos $x^i = \eta^i \eta(t)$, onde η^i é o vetor unitário na direção da geodésica nula e $\eta(t)$ é o tempo próprio. A distância própria entre dois observadores analisando um fóton é dado por

$$\delta l = (-g_{ij} \delta x^i \delta x^j)^{1/2} = a(t) [(\delta_{ij} - h_{ij}) \delta x^i \delta x^j]^{1/2} \quad . \quad (4.4)$$

Fazendo uma expansão binomial e usando $x^i \propto \eta^i$, temos que

$$\delta l \propto a(t) \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} \eta^i \eta^j \right) \quad . \quad (4.5)$$

Com isso, determinamos a velocidade relativa entre os dois observadores da seguinte forma

$$V = \frac{d\delta l}{dt} = \delta l \frac{d[\ln(\delta l)]}{dt} \quad , \quad (4.6)$$

$$V = \delta l \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left[a(t) \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} \eta^i \eta^j \right) \right] \right\} \quad ,$$

$$V = \delta l \left[\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} h_{ij} \eta^i \eta^j \right)^{-1} \dot{h}_{ij} \eta^i \eta^j \right] \quad ,$$

$$V = \delta l \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} \eta^i \eta^j \right) + \delta l [O(h^2)] \quad . \quad (4.7)$$

Como h é uma pequena perturbação podemos desprezar os termos de segunda ordem e como usamos que $c = 1$, $\delta l = \delta t$, de modo que obtemos

$$V = \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} \eta^i \eta^j \right) \delta t \quad . \quad (4.8)$$

Usando a equação do efeito Doppler, temos que

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -V = -\frac{\dot{a}}{a}\delta t + \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\eta^i\eta^j\delta t \quad , \quad (4.9)$$

onde $-\frac{\dot{a}}{a}\delta t$ é o desvio já conhecido da métrica de FLRW, tal que

$$\frac{\delta\nu}{\nu} + \frac{\dot{a}}{a}\delta t = \frac{\delta(\nu a)}{\nu a} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\eta^i\eta^j\delta t \quad .$$

Da lei de deslocamento de Wein sabemos que $\delta T \propto \delta\nu$ [21], e portanto:

$$\frac{\delta(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\eta^i\eta^j\delta t \quad , \quad (4.10)$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{d(Ta)}{Ta} = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij}\eta^i\eta^j dt \quad ,$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{d(Ta)}{Ta} = \ln\left(\frac{T_{ob}a_{ob}}{T_e a_e}\right) = \ln\left(\frac{T_{ob}}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0 + \delta T}{T_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\delta T}{T_0}\right) \approx \frac{\delta T}{T_0} \quad ,$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij}\eta^i\eta^j dt \quad . \quad (4.11)$$

Precisamos agora de equações sobre h . Começamos assumindo o calibre síncrono: $h_{00} = h_{0i} = 0$, e usamos as equações do livro do Weinberg [63]:

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = 8\pi G(\rho - \rho_b) \quad , \quad (4.12)$$

$$h^j{}_{ik,j} + h_{,ik} - h^j{}_{i,jk} - h^j{}_{k,ji} = 0 \quad , \quad (4.13)$$

$$\dot{h}_{,i} = \dot{h}^k{}_{i,k} \quad , \quad (4.14)$$

onde $h = Tr(h^i{}_k)$ e ρ_b ¹ a densidade de matéria de base, ou seja, do universo sem perturbações. Perturbando a conservação de energia temos:

$$\delta\left(\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}\rho_b)\right) = 0 \quad , \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2}h\rho_b + \sqrt{-g}(\rho - \rho_b)\right) = 0 \quad ,$$

¹Não confunda "b" com um índice, serve apenas para diferenciar de ρ que é a densidade total.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[a^3 \left(-\frac{h\rho_b}{2} + \rho - \rho_b \right) \right] = 0 \quad , \\
& -\frac{h}{2} (3\dot{a}a^2\rho_b + \dot{\rho}_b a^3) + 3\dot{a}a^2(\rho - \rho_b) - a^3 \frac{\dot{h}\rho_b}{2} + a^3(\dot{\rho} - \dot{\rho}_b) = 0 \quad , \\
& -\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_b a^3) + 3\dot{a}a^2(\rho - \rho_b) - a^3 \frac{\dot{h}\rho_b}{2} + a^3(\dot{\rho} - \dot{\rho}_b) = 0 \quad . \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Em um universo dominado por matéria não relativística temos que $(\rho_b a^3)$ é uma constante, o que implica em $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_b a^3) = 0$. Além disso, temos que $\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a}$, logo

$$\begin{aligned}
& 3\dot{a}a^2(\rho - \rho_b) - a^3 \frac{\dot{h}\rho_b}{2} + a^3(\dot{\rho} - \dot{\rho}_b) = 0 \quad , \\
& \frac{\dot{h}}{2} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_b} - \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} + 3\frac{\dot{a}}{a} \frac{\rho}{\rho_b} - 3\frac{\dot{a}}{a} \frac{\rho_b}{\rho_b} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_b} - \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} - \frac{\dot{\rho}_b \rho}{\rho_b^2} + \frac{\rho_b \dot{\rho}_b}{\rho_b^2} \quad , \\
& \frac{\dot{h}}{2} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_b} - \frac{\dot{\rho}_b \rho}{\rho_b^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \right) \quad ,
\end{aligned}$$

$$\dot{h} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \right) \quad . \tag{4.17}$$

Definindo o contraste de densidade δ como

$$\delta = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \quad , \tag{4.18}$$

temos que

$$\dot{h} = 2\dot{\delta} \quad , \quad \ddot{h} = 2\ddot{\delta} \quad . \tag{4.19}$$

Substituindo as equações (4.19) em (4.12), chegamos em

$$\begin{aligned}
& 2\ddot{\delta} + 4\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 8\pi G(\rho - \rho_b) = 8\pi G\rho_b\delta \quad , \\
& \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - (4\pi G\rho_b)\delta = 0 \quad . \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Sobre a evolução temporal do contraste de densidade, uma possibilidade é escolher uma potência do fator de escala que vai reduzir a equação acima para um universo dominado por matéria. Desta forma se chega ao resultado $\delta = \delta_0 a$. Vamos seguir simplificando a equação apenas para demonstrar que esta relação está correta. Substituindo a relação na equação (4.20),

$$\ddot{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a} - 4\pi G\rho_b a = 0 \quad ,$$

de forma que chegamos em

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G\rho_b \quad , \quad (4.21)$$

que é o comportamento de um universo dominado por matéria não relativística. Voltando para a equação (4.14), a solução desta equação já é matematicamente conhecida [45], e tem forma,

$$\dot{h}_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \int \frac{\dot{h} d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad . \quad (4.22)$$

Devemos agora concentrar em resolver a integral acima, partindo da equação de Poisson,

$$\nabla^2 (\Phi + \phi) = 4\pi G\rho \quad , \quad (4.23)$$

onde Φ é o potencial newtoniano base e ϕ é o potencial gerado pela perturbação. Assim, com a equação (4.18) a solução da equação de Poisson para o potencial gerado pela perturbação é

$$\phi = -Ga(t)^2 \rho_b(t) \int \frac{\delta(\vec{x}', t) d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad , \quad (4.24)$$

multiplicando ambos os lados pelo fator de escala e derivando no tempo, obtemos

$$\frac{\partial(\phi a)}{\partial t} = -Ga^3 \rho_b \int \frac{\dot{\delta} d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{G}{2} a^3 \rho_b \int \frac{\dot{h} d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad . \quad (4.25)$$

Em um universo dominado por matéria $\rho_b a^3$ é constante, e podemos separar as variáveis de $\delta(\vec{x}', t)$, ou seja, $\delta(\vec{x}', t) = a(t)f(\vec{x}')$, uma vez que, como já foi dito, $\delta(\vec{x}', t)$ é proporcional a $a(t)$, então substituindo na equação (4.24), temos que

$$\phi = -Ga^3 \rho_b \int \frac{f(\vec{x}') d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad ,$$

e assim podemos concluir que ϕ não tem dependência temporal. Portanto temos que:

$$\frac{\partial(\phi a)}{\partial t} = \dot{a}\phi \implies \int \frac{\dot{h} d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\frac{2\dot{a}}{G\rho_b a^3} \phi \quad .$$

Assim voltando na equação (4.22):

$$\dot{h}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\dot{h}_{,ij} d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{\dot{a}}{2\pi G \rho_b a^3} \phi_{,ij} = \frac{\dot{a}}{Q} \phi_{,ij} \quad , \quad (4.26)$$

onde $Q = 2\pi G \rho_b a^3$. Finalmente voltando em (4.11),

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2} \eta^i \eta^j \int_{t_e}^{t_0} \dot{h}_{ij} dt = \frac{1}{2Q} \int_{t_e}^{t_0} \dot{a} \left(\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \right) dt \quad , \quad (4.27)$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2Q} \int_{\eta_e}^{\eta_0} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \right) d\eta \quad , \quad (4.28)$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{2Q} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) \Big|_{\eta_e}^{\eta_0} - \frac{1}{2Q} \int \left(\frac{d^2 a}{d\eta^2} \right) \frac{d\phi}{d\eta} d\eta \quad . \quad (4.29)$$

Basta expandir cada termo de $\frac{\delta T}{T_0}$, usando que [62]:

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta} \frac{da}{dt} = -a\dot{a} \quad , \quad (4.30)$$

e

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} = \frac{dt}{d\eta} \frac{d}{dt} (-a\dot{a}) = a \frac{d}{dt} (a\dot{a}) \quad , \quad (4.31)$$

temos que,

$$\frac{1}{2Q} \left(\frac{d^2 a}{d\eta^2} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) d\eta = \frac{1}{4\pi G \rho_b a^3} \left[a \frac{d}{dt} (a\dot{a}) \right] \dot{\phi} dt \quad . \quad (4.32)$$

Para um universo dominado por matéria não relativística:

$$a(t) = a_0 t^{2/3} \implies \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_b}{3} = \frac{4}{9t^2} \quad ,$$

$$\frac{1}{2Q} \left(\frac{d^2 a}{d\eta^2} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) = \frac{2}{9} \frac{\dot{\phi} dt}{4\pi G \rho_b t^2} = \frac{1}{3} \dot{\phi} dt \quad ,$$

$$\frac{1}{2Q} \left(\frac{da}{d\eta} \right) \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) = -\frac{1}{2Q} a\dot{a} \left(\frac{d\phi}{d\eta} \right) = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{4\pi G \rho_b} \frac{\eta^i}{a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \quad . \quad (4.33)$$

Ressaltando que a velocidade induzida por um potencial é dada por [45]:

$$V^i = -\frac{\delta/\delta}{4\pi G \rho_b} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \quad . \quad (4.34)$$

Utilizando as equações (4.32), (4.33), (4.34) e voltando na expressão (4.29), obtemos

$$\frac{\delta T}{T_0} = \hat{\eta} \cdot (\vec{V}_{ob} - \vec{V}_{em}) - \frac{1}{3} (\phi(0) - \phi(x_{em}^{\vec{}})) \quad . \quad (4.35)$$

O termo $\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{3}\phi(x_{em}^{\vec{}})$ é conhecido como efeito Sachs-Wolfe, a sua importância vai ser esclarecida na próxima subseção.

4.2 Descrição estatística

O efeito Sachs-Wolfe nos diz que uma pequena variação no potencial gravitacional no momento de emissão de um fóton causaria uma variação na energia do mesmo. Sendo assim, se durante a emissão da radiação cósmica de fundo existisse pequenas variações no campo gravitacional, elas explicariam as pequenas flutuações na temperatura detectada. Uma descrição estatística é indispensável para estudar a RCF, uma vez que é impossível fazer a medição em todos os pontos do espaço e se usa o modelo que melhor se adapte a todos os pontos observacionais. Vários modelos podem ser usados para expandir o termo $\frac{\delta T}{T_0} = \frac{1}{3}\phi(x_{em}^{\vec{}})$, mas como as medidas são feitas em diferentes direções é intuitivo usar esféricos harmônicos [15],

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad , \quad (4.36)$$

onde Y_{lm} são os esféricos harmônicos e os coeficiente a_{lm} são obtidos pela expressão

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^* \left[\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) \right] \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad . \quad (4.37)$$

Estes coeficientes devem também obedecer a relação de ortogonalidade,

$$\langle a_{lm} | a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad , \quad (4.38)$$

logo devem então ser ortogonais entre si. Os C_l 's são denominados de espectro de potência angular da RCF. Este espectro nos dá noção da flutuação da temperatura entre dois

pontos da esfera celeste, de forma que se queremos comparar dois pontos separados por um ângulo, α , usamos a relação

$$C(\alpha) = \left\langle \frac{\delta T}{T_0}(\theta_1, \phi_1) \middle| \frac{\delta T}{T_0}(\theta_2, \phi_2) \right\rangle , \quad (4.39)$$

$$C(\alpha) = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle a_{lm} | a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}^*(\theta_2, \phi_2) . \quad (4.40)$$

Usando a equação (4.38), obtemos

$$C(\alpha) = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}^*(\theta_2, \phi_2) , \quad (4.41)$$

fazendo $l = l'$ e $m = m'$ devido as deltas de Levi-Civita, e separando as somatórias, temos

$$C(\alpha) = \sum_{lm} C_l Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2) = \sum_l C_l \sum_m Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2) , \quad (4.42)$$

por fim, utilizando que $\sum_{lm} Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \phi_2) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \alpha)$, onde P_l são os polinômios de Legendre,

$$C(\alpha) = \sum_l C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \alpha) . \quad (4.43)$$

Voltando para o efeito Sachs-Wolfe e usando a equação (4.24), onde faremos $a(t_0) = 1$, chegamos em

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\frac{1}{3} G \rho_b(t_0) \int \frac{\delta(\vec{x}, t_0) d^3 x'}{|\vec{x}_{em} - \vec{x}'|} . \quad (4.44)$$

Para fazer a descrição estatística vamos expandir esta equação com a transformada de Fourier [45], e expressando $G \rho_b$ em termos da constante de Hubble $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_b$, obtemos

$$\frac{\delta T}{T_0} = -\frac{1}{2} H_0^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\delta_k}{k^2} e^{-\vec{k} \cdot \vec{x}_{em}} . \quad (4.45)$$

Então podemos expressar a temperatura em qualquer direção do espaço. Por fim, queremos encontrar uma relação para os coeficientes C_l , pela transformada de Fourier, e assim realizar uma conexão entre a teoria e a observação. Para isso vamos expandir a equação (4.45) em esféricos harmônicos e tomar a média dos valores de a_{lm}

$$C_l = K \frac{H_0^4}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{|\delta_k|^2}{k^2} |j_l(kn)|^2 , \quad (4.46)$$

onde K é uma constante e j_l é a função de Bessel esférica. Assim, basta atribuir um valor teórico para a densidade δ_k , e podemos resolver a integral e criar um modelo teórico para a radiação cósmica de fundo.

4.3 Anisotropias da radiação cósmica de fundo

A radiação cósmica de fundo é uma forte evidência que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas e hoje já temos uma teoria que é capaz de explicar esta característica. Porém temos mais um ponto a ser debatido: quais os problemas dessa teoria. Para isso vamos discutir sobre observações que parecem não seguir o princípio cosmológico. Estas anomalias podem ser encontradas com dados tanto do universo primordial quanto o atual. No universo primordial temos como exemplos de anomalias, alinhamento do quadrupolo e octopolo, assimetria dos hemisférios, variação de parâmetros cosmológicos, entre outros. No universo atual podemos encontrar anisotropias em fluxos de massa, aglomerados de galáxias, *etc* [3, 4]. Antes de prosseguirmos vale ressaltar que nenhum estudo ou dado citado é com a intenção de convencer ou defender a ideia de um universo anisotrópico, o único objetivo aqui é mostrar que há um interesse em estudar estes modelos.

É esperado, como foi dito na seção anterior, que os coeficientes a_{lm} devem ser independentes no modelo Λ CDM plano. Porém ao usar os dados observacionais da radiação cósmica de fundo para encontrar os valores dos coeficientes, alguns se encontraram alinhados. Mas, no geral, essas dependências variavam ao mudar os dados utilizados. Assim a maioria perdeu relevância com o tempo, com exceção do quadrupolo (a_{2m}) e octopolo (a_{3m}), que sempre apresentam um alinhamento. Métodos estatísticos foram utilizados para tentar explicar essa dependência [44, 47, 55].

Ao construir a descrição estatística da RCF temos a impressão que o hemisfério norte tem propriedades diferentes das esperadas. O hemisfério sul segue os valores esperados de um modelo plano Λ CDM. Isso não é verdade para o norte, embora inicialmente esta anisotropia só foi observada em grandes escalas [24]. Hoje temos também dados para escalas muito menores [31]. Um fator interessante é que ao desconsiderar o quadrupolo e octopolo da descrição estatística, essa assimetria desaparece, o que indica uma relação com o alinhamento do octopolo.

Recentemente foram feitas análises com dados do WMAP e *Planck Legacy* com os multipolos $l > 30$ onde foram encontrados 3 partes do céu onde se tem valores diferentes de parâmetros do modelo Λ CDM. Essas direções tem diâmetro angular de

$40^\circ - 60^\circ$, e estão centradas nas direções $(l, b) = (345^\circ, 15^\circ)$, $(l, b) = (240^\circ, -5^\circ)$ e $(l, b) = (150^\circ, -40^\circ)$, onde (l, b) são os dois ângulos do objeto no sistema galáctico de coordenadas. Um dos parâmetros foi a constante de Hubble que teve valores que variavam de $(61, 3 \pm 2, 6)$ até $(76, 6 \pm 5, 4)$ em (km/s)/Mpc [27]. A discrepância dos valores em diferentes medidas da taxa de expansão do universo já é debatido a muito tempo. Já, até, temos o termo tensão de Hubble para descreve-lo [33]. Também existe muita pesquisa mostrando possíveis motivos que podem causar esta diferença [12].

Um dos dados mais atuais é o chamado fluxo de massa (*bulk flows*), que é o movimento conjunto de diversos objetos em nossa vizinhança, com $z \approx 0.1$. Podemos medir com precisão a velocidade destes objetos em relação a nós pelo seu desvio para o vermelho, ou para o azul; além disso, podemos medir com certa precisão a distância dos mesmos em relação a nós. O modelo cosmológico tem uma relação entre esses dois fatores, então ao comparar a teoria com a observação perceberam uma discrepância [46].

Outro estudo usou aglomerados de galáxias de diferentes direções para calcular o valor da constante de Hubble, H_0 . A grande ideia desse e outros estudos é que a temperatura do aglomerado não depende de nenhuma suposição cosmológica, enquanto outros fatores que podem ser extraídos desses grupos como brilho superficial em Raio-x, L_X , parâmetro de Compton integrado, Y_{SZ} , dependem do valor de H_0 . Assim um estudo usou esses dados de 481 aglomerados para encontrar o valor da constante de Hubble usando dados de diferentes direções, e o resultado mais uma vez mostrou dependência direcional [40].

Assim existem varias observações de anisotropias em nosso universo, usando dados de nosso universo primordial ou do nosso universo recente e é possível encontrar problemas no princípio cosmológico. Além disso uma expansão acelerada em um instante muito pequeno de tempo é capaz de tornar uma métrica qualquer em homogênea e isotrópica, assim antes da inflação o universo poderia ser anisotrópico e inomogêneo. A radiação cósmica de fundo ainda é uma evidência enorme de um universo homogêneo e isotrópico. Nesta dissertação não existe a intenção de afirmar que o universo é anisotrópico, apenas que é interessante estudar modelos anisotrópicos pois eles podem conter informações que vão ajudar na compreensão destes problemas.

Modelos de Bianchi

Na seção anterior foram apresentadas várias evidências de anisotropias que mostram a importância de estudar modelos anisotrópicos. Todos espaços homogêneos foram classificados pelo matemático Luigi Bianchi [5]. Assim, nesta seção vamos usar sua classificação para chegar na expressão das métricas.

5.1 Espaços homogêneos

Primeiro, deve-se encontrar o que os modelos homogêneos tem em comum. Para isso observando a derivada de Lie,

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}Y^\alpha = X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha - Y^\beta \nabla_\beta X^\alpha \quad , \quad (5.1)$$

percebe-se que o lado direito da equação é a componente α do comutador dos campos vetoriais, X e Y . Assim, generalizando para uma notação independente de coordenadas, temos que

$$[X, Y] = XY - YX \quad . \quad (5.2)$$

Esta relação é comumente chamada de parênteses de Lie, e tem as seguintes propriedades,¹

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad , \quad (5.3a)$$

$$[aZ + bY, X] = a[Z, X] + b[Y, X] \quad , \quad (5.3b)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad , \quad (5.3c)$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \quad , \quad (5.3d)$$

onde X, Y, Z, fX e gY são campos vetoriais diferenciais, a e b são números reais e $f, g, X(g)$ e $Y(f)$ são funções.

¹ fX é a função f aplicada no campo vetorial X , e $X(g)$ é o campo vetorial X aplicado na função g .

Voltando para a equação de Killing,

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} = 0 \quad , \quad (5.4)$$

podemos extrair as seguintes informações [9, 22, 37]: o conjunto de soluções tem estrutura de um espaço vetorial linear; os campos vetoriais de Killing são geradores de transformações infinitesimais; um campo vetorial de Killing pode gerar um grupo usualmente chamado de grupo de isometrias; os parênteses de Lie de dois campos de Killing resultam em um terceiro, $[K_1, K_2] = K_3$.

Antes de prosseguir é necessário fazer uma serie de definições, começando por um grupo. Seja um conjunto não vazio G e uma operação binária $(*)$, então $(G, *)$ é um grupo se os seguintes axiomas forem satisfeitos [50]:

- **Fechamento:** se a e b pertencem a G e $a * b = c$, c também deve pertencer a G .
- **Associatividade:** $(a * b) * c = a * (b * c)$, $a, b, c \in G$.
- **Existência do elemento neutro:** existe um elemento e no conjunto G tal que $a * e = a$, $a \in G$.
- **Existência do elemento simétrico:** para qualquer elemento a em G existe um elemento a' em G tal que, $a * a' = e$.

Outra importante definição é a órbita de um grupo, onde aplicada ao nosso caso, a órbita de um grupo de isometrias é a parte do grupo que cobre a variedade.

Definir um espaço homogêneo não é uma tarefa tão simples quanto possa parecer, inclusive é possível encontrar diferentes métodos para esta definição. Obviamente, nenhuma definição feita de maneira correta vai discordar com as demais. Duas referências podem definir um espaço homogêneo de forma completamente diversa, mas no fundo ambos estão dizendo a mesma coisa. Um espaço-tempo é definido como homogêneo quando toda sua variedade é órbita de um grupo de isometrias.

5.2 Classificação de Bianchi

Da seção anterior pode-se concluir que toda variedade homogênea tridimensional deve admitir três vetores de Killing linearmente independentes que podem ser expandidos como operadores diferenciais de primeira ordem $K_{(i)} = K_{(i)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Assim a classificação de Bianchi começa com o parênteses de Lie de dois vetores de Killing,

$$[K_i, K_j] = C^m_{ij} K_m \quad , \quad (5.5)$$

onde C^m_{ij} são constantes de estrutura de álgebra e devem ter as seguintes propriedades [26],

$$C^m_{ij} = -C^m_{ji} \quad , \quad (5.6)$$

$$C^m_{ij} C^p_{km} + C^m_{ki} C^p_{jm} + C^m_{jk} C^p_{im} = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Queremos então, com essas duas propriedades, encontrar os possíveis valores das constantes de estrutura, para poder expandir a equação (5.5) e classificar os diferentes tipos de estruturas. Da equação (5.6) vemos que C^m_{ij} tem apenas 9 componentes independentes. Podemos definir um tensor de segunda ordem que contém todas suas informações, da seguinte maneira

$$M^{ij} \equiv \varepsilon^{imk} C^j_{mk} \quad , \quad (5.8)$$

onde ε^{imk} é o tensor de Levi-Civita. Multiplicando a expressão acima por ε_{rsi} , obtemos

$$\varepsilon_{rsi} M^{ij} = C^j_{mk} \frac{1}{2} (\delta^m_r \delta^k_s - \delta^k_r \delta^m_s) = \frac{1}{2} (C^j_{rs} - C^j_{sr}) = C^j_{rs} \quad . \quad (5.9)$$

Podemos reescrever a equação (5.7) com o tensor de Levi-Civita e usar a relação (5.8),

$$\varepsilon^{ijk} C^m_{ij} C^p_{km} = 0 \quad ,$$

$$M^{km} C^p_{km} = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Para prosseguir vamos lembrar que podemos sempre decompor um tensor de segunda ordem em duas partes:

$$M^{ij} = M^{[ij]} + M^{(ij)} \quad . \quad (5.11)$$

Assim $M^{[ij]}$ é antissimétrico com 3 componentes e $M^{(ij)}$ é simétrico com 6 componentes. Mais uma vez podemos reescrever o tensor antissimétrico com um tensor de primeira ordem, da seguinte maneira

$$M^{[ij]} \equiv \varepsilon^{ijk} a_k \quad , \quad (5.12)$$

onde a_k é uma forma-um de primeira ordem. Utilizando as equações (5.11) e (5.12) substituindo em (5.9), obtemos

$$\begin{aligned} C^j_{rs} &= \varepsilon_{rsi} (\varepsilon^{ijk} a_k + M^{(ij)}) \quad , \\ C^j_{rs} &= \varepsilon_{rsi} M^{(ij)} + \frac{1}{2} (\delta^j_r a_s - \delta^j_s a_r) \quad , \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde já reduzimos nosso problema inicial de encontrar os valores de C^j_{rs} para determinar um tensor de primeira ordem e um tensor simétrico de segunda ordem. Multiplicando a equação acima por M^{rs} , vemos que

$$M^{rs} C^j_{rs} = M^{rs} \varepsilon_{rsi} M^{(ij)} + \frac{1}{2} M^{rs} (\delta^j_r a_s - \delta^j_s a_r) = 0 \quad .$$

Desta equação tiramos que $M^{(ij)} a_j = 0$. Podemos, sem perder generalidade, diagonalizar o tensor $M^{(ij)}$, de forma a atribuir os valores de n_1 , n_2 e n_3 aos elementos da diagonal,

$$M^{(ij)} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \quad .$$

A equação $M^{(ij)} a_j = 0$ nos diz que a forma-um a_j está na mesma direção que um dos valores da diagonal da matriz $M^{(ij)}$. Assim, vamos fazer $a_j = (a, 0, 0)$, e a relação se reduz a

$$an_1 = 0. \quad (5.14)$$

Voltando para as equações (5.13) e (5.5), podemos calcular o valor de $[K_1, K_2]$,

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= C^m_{12} K_m = \varepsilon_{12j} M^{(mj)} K_m + \frac{1}{2} (\delta^m_1 a_2 - \delta^m_2 a_1) K_m \quad , \\ [K_1, K_2] &= M^{33} K_3 + \frac{1}{2} (-a_1 K_2) = n_3 K_3 - \frac{1}{2} a K_2 \quad . \end{aligned}$$

Fazendo de forma similar para os três parênteses temos

$$[K_1, K_2] = -\frac{a}{2}K_2 + n_3K_3 \quad , \quad (5.15)$$

$$[K_1, K_3] = \frac{a}{2}K_3 + n_2K_2 \quad , \quad (5.16)$$

$$[K_2, K_3] = n_1K_1 \quad . \quad (5.17)$$

A tabela abaixo nos dá os diferentes tipos de geometrias, tendo em mente a arbitrariedade das transformações de escala, que nos permite, por exemplo, sempre mudar simultaneamente o sinal dos valores de a , n_1 , n_2 e n_3 .

Tipo	a	n_1	n_2	n_3
<i>I</i>	0	0	0	0
<i>II</i>	0	+	0	0
<i>III</i> ($h = -1$)	+	0	+	-
<i>IV</i>	+	0	0	+
<i>V</i>	+	0	0	0
<i>VI</i> ($h \neq -1$)	+	0	+	-
<i>VII</i>	+	0	+	+
<i>VIII</i>	0	+	+	-
<i>IX</i>	0	+	+	+

Tabela 5.1: Classificação de Bianchi, com os valores de a , n_1 , n_2 e n_3 .

Temos ainda que esclarecer a diferença do tipo *III* e *VI*. Para isso é necessário expandir a definição de grupo. Um grupo $(G, *)$ é abeliano se além das propriedades de um grupo ele também possui a relação, $a * b = b * a$, $\forall a, b \in G$. Esses dois grupos aparentemente idênticos tem os parênteses de Lie na forma:

$$[K_1, K_2] = -\frac{a}{2}K_2 + n_3K_3 \quad ,$$

$$[K_1, K_3] = -\frac{a}{2}K_3 - n_2K_2 \quad ,$$

$$[K_2, K_3] = 0 \quad .$$

Para $Y = \alpha_1K_1 + \alpha_2K_2 + \alpha_3K_3$, onde α_1 , α_2 e α_3 são constantes arbitrárias, ser gerador de um subgrupo abeliano G_1 , do grupo G_3 gerado por K_1 , K_2 e K_3 é necessário que,

$$[Y, K_1] = [Y, K_2] = [Y, K_3] = 0 \quad . \quad (5.18)$$

Reescrevendo a equação (5.18) com as expressões dos parenteses de Lie temos,

$$-\frac{a}{2}\alpha_2 + n_2\alpha_3 = 0 \quad ,$$

$$-n_3\alpha_2 + \frac{a}{2}\alpha_3 = 0 \quad ,$$

$$\alpha_1 = 0 \quad ,$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} a/2 & n_2 \\ -n_3 & a/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Logo só teremos um subgrupo abeliano se,

$$\det \begin{pmatrix} a/2 & n_2 \\ -n_3 & a/2 \end{pmatrix} = \frac{a^2}{4} + n_2n_3 = 0 \quad .$$

Definindo $h \equiv \frac{a^2}{4n_2n_3}$, podemos dividir esta álgebra em dois grupos, o grupo *III* com $h = -1$ tendo assim um subgrupo abeliano e o grupo *VI* que tem $h \neq -1$ e não tem um subgrupo abeliano.

5.3 Derivação das métricas

Para derivar as métricas vamos partir da única informação que temos até agora, que diferencia elas uma das outras, os vetores de Killing, onde vamos expandir eles em operadores diferenciais de primeira ordem

$$K_\beta = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \quad , \quad (5.19)$$

onde os parênteses de Lie podem ter diferentes valores. Independente desta diversidade sempre existe uma transformação para uma base invariante dada por vetores " X_β ", ou seja, uma base tal que $\mathcal{L}_{\vec{K}} X_\alpha = 0$. De maneira similar esses forma-um também podem ser representados como operadores diferenciais de primeira ordem

$$X_\beta = \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \quad , \quad (5.20)$$

assim ζ é a matriz transformação para essa base, onde os componentes do tensor métrico são dados por

$$\gamma_{ab} = \zeta^c_a \zeta^d_b g_{cd} \quad , \quad (5.21)$$

onde γ_{ab} é o tensor métrico na base invariante e g_{cd} na base convencional. Uma importante propriedade é que a métrica nesta base só depende do tempo. A demonstração é simples e segue de (5.21),

$$\partial_e \gamma_{ab} = \partial_e (\zeta^c_a \zeta^d_b g_{cd}) = \partial_e \zeta^c_a \zeta^d_b g_{cd} + \zeta^c_a \partial_e \zeta^d_b g_{cd} + \zeta^c_a \zeta^d_b \partial_e g_{cd} \quad , \quad (5.22)$$

onde já vimos na subseção sobre derivada de Lie que,

$$\mathcal{L}_{K_f} g_{ab} = K^i_f \partial_i g_{ab} + g_{ib} \partial_a K^i_f + g_{ai} \partial_b K^i_f = 0 \quad . \quad (5.23)$$

Vamos agora isolar o valor de $\partial_i g_{ab}$, tal que

$$\partial_j g_{ab} = -g_{ib} K^f_j \partial_a K^i_f + g_{ai} K^f_j \partial_b K^i_f \quad . \quad (5.24)$$

Vamos expandir a relação $\mathcal{L}_{\vec{K}} X_\alpha = 0$ e isolar o valor de $\partial_b K^i_f$, onde encontraremos

$$\partial_c \zeta^b_a = \zeta^d_a \partial_d K^b_e K^e_c \quad . \quad (5.25)$$

Usando as equações (5.24) e (5.25) para substituir em (5.22) vamos, enfim, chegar na equação $\partial_e \gamma_{ab} = 0$, lembrando que estas expressões foram feitas usando apenas a parte espacial. Assim, temos que o tensor métrico na base invariante depende apenas da coordenada temporal, $\gamma = \gamma(t)$, e deve ser um tensor simétrico.

Vamos definir o tensor inverso de ζ , B , de forma que $B^a_i \zeta^i_c = \delta^a_c$ e com ele podemos construir as métricas invertendo a equação (5.21),

$$g_{ab} = B^c_a B^d_b \gamma_{cd}(t) \quad ,$$

ou ainda,

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{cd}(t) B^c_a B^d_b dx^a dx^b \quad . \quad (5.26)$$

Assim, reduzimos o problema da determinação das métricas homogêneas a encontrar ζ . Para isso usamos a equação de Killing, assim como foi feito no trabalho de Taub [58],

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial X^k} + \zeta^j \Gamma^i_{jk} = 0 \quad . \quad (5.27)$$

É notável que nesta equação os valores de ζ apresentam apenas um índice, e como temos 3 vetores cada um com 3 componentes inicialmente era esperado um tensor de segunda ordem, assim as equações com dois índices tratam de cada componente de cada vetor individualmente, já esta equação é apenas para os três vetores. Os símbolos de Christoffel podem ser determinados usando, a definição do mesmo,

$$\nabla_\mu K^\nu = \partial_\mu K^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} K^\lambda \quad , \quad (5.28)$$

o tensor ξ (5.19) e definindo o seu tensor inverso, ou seja, um tensor, tal que, $A^a_i \xi^i_c = \delta^a_c$, chegamos na relação,

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial \xi^i_a}{\partial X^j} A^a_k \quad . \quad (5.29)$$

Todas informações necessárias para montar as métricas já estão aqui, para exemplificar o processo será feita a métrica Bianchi tipo *II*. O único comutador não nulo para este tipo é:

$$[K_2, K_3] = K_1 \quad . \quad (5.30)$$

Para começar basta achar qualquer solução com operadores diferenciais de primeira ordem que satisfaça estes comutadores. Uma possível solução é $K_1 = \partial_y$, $K_2 = \partial_z$ e $K_3 = \partial_x + z\partial_y$. Com estas soluções voltamos na equação (5.19) para encontrar ξ e a sua inversa,

$$[\xi^i_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad [A^i_j] = \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Voltando na equação (5.29), vemos que só tem um elemento da matriz ξ cuja derivada pode ser diferente de zero,

$$\Gamma^2_{31} = -\frac{\partial \xi^2_3}{\partial X^3} A^3_1 = -1 . \quad (5.31)$$

Os demais símbolos de Christoffel vão ser iguais a zero. Usando esses valores na equação (5.27), obtemos

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial X^1} = \zeta^3 , \quad \frac{\partial \zeta^i}{\partial X^j} = 0 , \quad i \neq 2 \text{ e } j \neq 1 . \quad (5.32)$$

Como chegamos na base dos vetores invariantes através de uma transformação da base original existe um ponto x_0 tal que $\xi(x_0) = \zeta(x_0)$. Desta maneira concluímos que

$$[\zeta^i_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad [B^i_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Basta voltar com o valor de B na equação (5.26) e escolher um tensor γ que seja simétrico e os elementos dependam apenas do tempo que vamos ter uma métrica de Bianchi tipo *II*. Vamos, listar os resultados dos nove tipos de geometrias a seguir,

Tipo I:

$$\begin{aligned} [\xi_a^i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [A_j^i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ [\zeta_a^i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [B_j^i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tipo II:

$$\begin{aligned} [\xi_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & [A_j^i] &= \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\zeta_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & [B_j^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tipo III:

$$\begin{aligned} [\xi_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & [A_j^i] &= \begin{bmatrix} -y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\zeta_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & [B_j^i] &= \begin{bmatrix} 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tipo IV:

$$\begin{aligned} [\xi_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & y+z \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}, & [A_j^i] &= \begin{bmatrix} -y-z & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\zeta_a^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \end{bmatrix}, & [B_j^i] &= \begin{bmatrix} 0 & e^{-x} & -xe^{-x} \\ 0 & 0 & e^{-x} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tipo V:

$$[\xi_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}, \quad [A_j^i] = \begin{bmatrix} -y & 1 & 0 \\ -z & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\zeta_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_j^i] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tipo VI:

$$[\xi_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & hz \end{bmatrix}, \quad [A_j^i] = \begin{bmatrix} -y & 1 & 0 \\ -hz & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\zeta_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{hx} & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_j^i] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-hx} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tipo VII:

$$[\zeta_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & (y + hz) \end{bmatrix}, \quad [A_j^i] = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 \\ -(y + hz) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\zeta_a^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \zeta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^3 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_j^i] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\zeta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\chi(x) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{h^2 - 4}} ((\alpha_1 + 1) e^{\alpha_1 x} - (\alpha_2 + 1) e^{\alpha_2 x}),$$

$$\chi(x) = -\frac{1}{\sqrt{h^2 - 4}} \left(\left(\frac{1}{\alpha_1} + 1 \right) e^{\alpha_1 x} - \left(\frac{1}{\alpha_2} + 1 \right) e^{\alpha_2 x} \right),$$

$$2\alpha_1 = h + \sqrt{h^2 - 4},$$

$$2\alpha_2 = h - \sqrt{h^2 - 4}.$$

Tipo VIII:

$$[\xi_a^i] = \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & 0 \\ -y^2 e^{-z} & 0 & e^z \\ -2y e^{-z} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [A_j^i] = \begin{bmatrix} e^z & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 1 \\ y^2 e^{-z} & e^{-z} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\zeta_a^i] = \begin{bmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & y & 1 - 2xy \\ 0 & 1 & -2x \end{bmatrix}, \quad [B_j^i] = \begin{bmatrix} 1 & x^2 & x(1 - xy) \\ 0 & 2x & 1 - 2xy \\ 0 & 1 & -y \end{bmatrix}.$$

Tipo *IX*:

$$[\xi^i_a] = \begin{bmatrix} 0 & \cos(y) & -\sin(y) \\ 1 & -\cot(x)\sin(y) & -\cot(x)\cos(y) \\ 0 & \frac{\sin(y)}{\sin(x)} & \frac{\cos(y)}{\sin(x)} \end{bmatrix}, \quad [A^i_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cos(x) \\ \cos(y) & 0 & \sin(x)\sin(y) \\ -\sin(y) & 0 & \sin(x)\cos(y) \end{bmatrix},$$

$$[\zeta^i_a] = \begin{bmatrix} -\sin(z) & \cos(z) & 0 \\ \frac{\cos(z)}{\sin(x)} & \frac{\sin(z)}{\sin(x)} & 0 \\ -\cot(x)\cos(z) & -\sin(z)\cot(x) & 1 \end{bmatrix}, \quad [B^i_j] = \begin{bmatrix} -\sin(z) & \sin(x)\cos(z) & 0 \\ \cos(z) & \sin(x)\sin(z) & 0 \\ 0 & \cos(x) & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim é feita a classificação de Bianchi, basta agora exemplificar a construção de uma métrica. O primeiro passo é escolher um valor de $\gamma(t)$, lembrando que este tensor deve ser simétrico, ou seja, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, e suas componentes dependem apenas do tempo. Logo, o exemplo mais genérico para tal tensor é,

$$[\gamma_{cd}] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t) & \gamma_{12}(t) & \gamma_{13}(t) \\ \gamma_{12}(t) & \gamma_{22}(t) & \gamma_{23}(t) \\ \gamma_{13}(t) & \gamma_{23}(t) & \gamma_{33}(t) \end{bmatrix}.$$

Para construir as métricas do tipo *I*, usamos, além deste tensor, a equação,

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{cd}B^c_a B^d_b dx^a dx^b, \quad (5.33)$$

onde o tensor B do tipo *I* é dado por,

$$[B^c_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o tensor $|B^c_a|$, só tem componentes com valor diferente de zero se, $c = a$, temos que,

$$dS^2 = -dt^2 + \gamma_{ab}dx^a dx^b, \quad (5.34)$$

que expandido fornece a seguinte expressão,

$$dS^2 = -dt^2 + \gamma_{11}(t)dx^2 + \gamma_{22}(t)dy^2 + \gamma_{33}(t)dz^2 + 2\gamma_{12}(t)dxdy + 2\gamma_{13}(t)dxdz + 2\gamma_{23}(t)dydz. \quad (5.35)$$

Este é o resultado mais geral de uma métrica de Bianchi do tipo *I*. No entanto, é comum assumir que $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$, a métrica de Bianchi tipo I simplificada é

$$dS^2 = -dt^2 + \gamma_{11}(t)dx^2 + \gamma_{22}(t)dy^2 + \gamma_{33}(t)dz^2 \quad , \quad (5.36)$$

além disso, se $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = a(t)$, e realizando a transformação para as coordenadas esféricas, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$, temos a métrica de FLRW com $k = 0$,

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2] \quad . \quad (5.37)$$

Diferentemente do tipo *I*, se realizarmos o mesmo processo para as métricas do tipo *V* e *IX* chegamos em resultados que parecem muito distantes da métrica de FLRW, por exemplo para o tipo *V*, temos que

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + e^{-2x}dy^2 + e^{-2x}dz^2] \quad , \quad (5.38)$$

e para Bianchi *IX*,

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\cos(x)dydz] \quad , \quad (5.39)$$

realmente não é fácil derivar as métricas de FLRW destas equações, assim muitas referências usam métodos diferentes para tal tarefa [51, 60]. Finalizando, vamos deixar um exemplo para cada um dos nove tipos das métricas de Bianchi, para isso vamos usar o seguinte tensor,

$$[\gamma_{cd}] = \begin{bmatrix} a(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{bmatrix} \quad ,$$

a seguir, temos a lista com os exemplos com três fatores de escala $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$, e em seguida, vamos listar novamente, porém com os três fatores de escala tendo o mesmo valor.

Tipo *I*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t)dx^2 + b(t)dy^2 + c(t)dz^2 \quad . \quad (5.40)$$

Tipo *II*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)dy^2 + [a(t)x^2 + b(t)] dz^2 - 2a(t)xdydz \quad . \quad (5.41)$$

Tipo *III*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)e^{-2x}dy^2 + b(t)dz^2 \quad . \quad (5.42)$$

Tipo *IV*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)e^{-2x}dy^2 + [a(t)x^2e^{-2x} + b(t)e^{-2x}] dz^2 - 2a(t)xe^{-2x}dydz \quad . \quad (5.43)$$

Tipo *V*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)e^{-2x}dy^2 + b(t)e^{-2x}dz^2 \quad . \quad (5.44)$$

Tipo *VI*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)e^{-2x}dy^2 + b(t)e^{-2hx}dz^2 \quad . \quad (5.45)$$

Tipo *VII*:

$$dS^2 = -dt^2 + c(t)dx^2 + a(t)\zeta^2(x)dy^2 + b(t)\chi^2(x)dz^2 \quad . \quad (5.46)$$

Tipo *VIII*:

$$\begin{aligned} dS^2 = & -dt^2 + a(t)dx^2 + [a(t)x^4 + 4b(t)x^2 + c(t)] dy^2 \\ & + [a(t)x^2(1 - xy)^2 + b(t)(1 - 2xy)^2 + c(t)y^2] dz^2 \\ & + 2a(t)x^2dxdy + 2a(t)x(1 - xy)dxdz \\ & + [2a(t)x^3(1 - xy) + 4b(t)x(1 - 2xy) - 2c(t)y] dydz \quad . \quad (5.47) \end{aligned}$$

Tipo *IX*:

$$\begin{aligned} dS^2 = & -dt^2 + [a(t)\sin^2(z) + b(t)\cos^2(z)] dx^2 \\ & + [a(t)\sin^2(x)\cos^2(z) + b(t)\sin^2(x)\sin^2(z) + c(t)\cos^2(x)] dy^2 + c(t)dz^2 \\ & + [2b(t)\sin(x)\sin(z)\cos(z) - 2a(t)\sin(x)\sin(z)\cos(z)] dxdy + 2c(t)\cos(x)dydz \quad . \quad (5.48) \end{aligned}$$

Ou ainda, se fizermos $a(t)=b(t)=c(t)$,

Tipo *I*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad . \quad (5.49)$$

Tipo *II*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + dy^2 + (1 + x^2)dz^2 - 2xdydz] dz^2 \quad . \quad (5.50)$$

Tipo *III*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + e^{-2x}dy^2 + dz^2] \quad . \quad (5.51)$$

Tipo *IV*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + e^{-2x} dy^2 + e^{-2x} (x^2 + 1) dz^2 - 2xe^{-2x} dydz] \quad . \quad (5.52)$$

Tipo *V*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + e^{-2x} dy^2 + e^{-2x} dz^2] \quad . \quad (5.53)$$

Tipo *VI*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + e^{-2x} dy^2 + e^{-2hx} dz^2] \quad . \quad (5.54)$$

Tipo *VII*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + \zeta^2(x) dy^2 + \chi^2(x) dz^2] \quad . \quad (5.55)$$

Tipo *VIII*:

$$\begin{aligned} dS^2 = -dt^2 + a(t) \{ & dx^2 + [x^4 + 4x^2 + 1] dy^2 + [x^2(1 - xy)^2 + (1 - 2xy)^2 + y^2] dz^2 \\ & + 2x^2 dx dy + 2x(1 - xy) dx dz + [2x^3(1 - xy) + 4x(1 - 2xy) - 2y] dy dz \} \quad . \quad (5.56) \end{aligned}$$

Tipo *IX*:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2 \cos(x) dy dz] \quad . \quad (5.57)$$

Concluimos, então, esta seção com os exemplos apresentados.

Conclusão

Durante a introdução desse trabalho foi feita uma revisão de como passamos por vários modelos cosmológicos ao longo dos anos, como o nosso modelo atual ainda é muito novo e nem todas as observações estão sempre de acordo com ele. Assim é dito que temos incentivo para estudar outros modelos. Uma das possíveis mudanças é deixar de seguir o princípio cosmológico. Assim já é apresentado a classificação dos modelos homogêneos de Bianchi.

Na segunda seção foi feita uma revisão de relatividade geral, desde derivada covariante até temas que são bem usados no estudo da classificação de Bianchi como o transporte e a derivada de Lie. Foi também demonstrado a equação de Killing, e os vetores de Killing. Como eles se transportam entre dois pontos são uma das ideias bases para diferenciar duas geometrias.

Com os estudos da relatividade geral concluídos, seguimos para uma revisão dos modelos homogêneos e isotrópicos, desde a derivação da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, a principal métrica homogênea e isotrópica. Temos também estudos da dinâmica do universo que é bastante usada para debater a radiação cósmica de fundo.

Na seção sobre a radiação cósmica de fundo temos uma explicação de sua origem e sua descoberta. Sua grande importância vem de ser uma evidência de um universo primordial quente e de um universo que em grandes escalas seguem o princípio cosmológico. A seção segue com o estudo do modelo teórico e estatístico, que é obtido através das observações da RCF, uma vez que temos uma riqueza de informações ao comparar os dois modelos. Por fim, é mostrado materiais que falam sobre as anisotropias da radiação cósmica de fundo.

O trabalho até então é feito com o intuito de mostrar a importância do estudo de modelos anisotrópicos e realizar revisões teóricas para realizar a classificação de Bianchi. Assim, é finalizada a dissertação usando os artigos de Luigi Bianchi e Abraham Taub para chegar na classificação das geometrias homogêneas.

Bibliografia

- [1] Alpher, R. A., Bethe, H. e Gamow, G. **The origin of chemical elements.** *Physical Review* 73.7 (1948), p. 803 (citado na página 27).
- [2] Alpher, R. A. e Herman, R. C. **On the relative abundance of the elements.** *Physical Review* 74.12 (1948), p. 1737 (citado na página 27).
- [3] Aluri, P. K., Cea, P., Chingangbam, P. et al. **Is the observable Universe consistent with the cosmological principle?** *Classical and Quantum Gravity* 40.9 (2023), p. 094001 (citado na página 39).
- [4] Anton, T. e Clifton, T. **Modelling the emergence of cosmic anisotropy from non-linear structures.** *Classical and Quantum Gravity* 40.14 (2023), p. 145004 (citado na página 39).
- [5] Bianchi, L. **On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions.** *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze* 11 (1898), pp. 267–352 (citado nas páginas 3, 41).
- [6] Bondi, H. e Gold, T. **The steady-state theory of the expanding universe.** *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 108.3 (1948), pp. 252–270 (citado na página 2).
- [7] Brecht, B. **Life of Galileo.** Bloomsbury Publishing, 2015 (citado na página 1).
- [8] Carroll, S. M. **Spacetime and geometry.** Cambridge University Press, 2019 (citado nas páginas 6–8, 10, 13, 15, 19).
- [9] Cohn, P. **Lie groups.** Cambridge University Press, 1957 (citado na página 42).
- [10] Collins, C. B. e Hawking, S. W. **Why is the universe isotropic?** *Astrophysical Journal, Vol. 180, pp. 317-334 (1973)* 180 (1973), pp. 317–334 (citado na página 17).
- [11] Collins, C. e Stewart, J. **Qualitative cosmology.** *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 153.4 (1971), pp. 419–434 (citado na página 16).
- [12] Cortês, M. e Liddle, A. R. **On data set tensions and signatures of new cosmological physics.** *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 531.1 (2024), pp. L52–L56 (citado na página 40).

- [13] Diósi, L. **Planck length challenges non-relativistic quantum mechanics of large masses**. *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1275. 1. IOP Publishing, 2019, p. 012007 (citado na página 24).
- [14] Doroshkevich, A., Zel'dovich, Y. B. e Novikov, I. **The Origin of Galaxies in an Expanding Universe**. *Soviet Astronomy, Vol. 11, p. 233* 11 (1967), p. 233 (citado na página 16).
- [15] Durrer, R. **The cosmic microwave background**. Cambridge University Press, 2020 (citado na página 36).
- [16] Einstein, A. **Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity**. *Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys* (1915), pp. 189–196 (citado na página 2).
- [17] Einstein, A. **On the electrodynamics of moving bodies** (1905) (citado nas páginas 2, 5).
- [18] Einstein, A. **On the general theory of relativity**. *Prussian Acad. Sci* 6 (1915), p. 98 (citado na página 2).
- [19] Einstein, A. **On the general theory of relativity (addendum)**. *Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys* 799 (1915) (citado na página 2).
- [20] Einstein, A. **The field equations of gravitation**. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), pp. 844–847 (citado na página 2).
- [21] Eisberg, R. e Resnick, R. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas, 21a edição**. Editora Campus (1979) (citado na página 32).
- [22] Eisenhart, L. P. **Continuous groups of transformations**. Courier Corporation, 2003 (citado na página 42).
- [23] Ellis, G. F. e MacCallum, M. A. **A class of homogeneous cosmological models**. *Communications in Mathematical Physics* 12 (1969), pp. 108–141 (citado na página 17).
- [24] Eriksen, H. K., Hansen, F. K., Banday, A. J., Górski, K. M. e Lilje, P. B. **Asymmetries in the Cosmic Microwave Background anisotropy field**. *The Astrophysical Journal* 605.1 (2004), p. 14 (citado na página 39).

- [25] Estabrook, F., Wahlquist, H. e Behr, C. **Dyadic analysis of spatially homogeneous world models.** *Journal of Mathematical Physics* 9.4 (1968), pp. 497–504 (citado na página 17).
- [26] Estabrook, F., Wahlquist, H. e Behr, C. **Dyadic analysis of spatially homogeneous world models.** *Journal of Mathematical Physics* 9.4 (1968), pp. 497–504 (citado na página 43).
- [27] Fosalba, P. e Gaztanaga, E. **Explaining cosmological anisotropy: evidence for causal horizons from CMB data.** *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 504.4 (2021), pp. 5840–5862 (citado na página 40).
- [28] Freitas Mourão, R. R. de. **Copérnico: pioneiro da revolução astronômica.** Odysseus, 2004 (citado na página 1).
- [29] Freitas Mourão, R. R. de e DA CIÊNCIA, C. I. **Kepler: a descoberta das leis do movimento planetário.** Odysseus, 2003 (citado na página 1).
- [30] Gamow, G. **Expanding universe and the origin of elements.** *Physical review* 70.7-8 (1946), p. 572 (citado na página 27).
- [31] Hansen, F., Banday, A., Gorski, K., Eriksen, H. e Lilje, P. **Power asymmetry in cosmic microwave background fluctuations from full sky to sub-degree scales: is the universe isotropic?** *The Astrophysical Journal* 704.2 (2009), p. 1448 (citado na página 39).
- [32] Hawking, S. W. **The anisotropy of the universe at large times.** *Symposium-International Astronomical Union*. Vol. 63. Cambridge University Press. 1974, pp. 283–286 (citado na página 17).
- [33] Hu, J.-P. e Wang, F.-Y. **Hubble tension: the evidence of new physics.** *Universe* 9.2 (2023), p. 94 (citado na página 40).
- [34] Kachelriess, M. **Quantum fields: from the Hubble to the Planck Scale.** Oxford university press, 2018 (citado na página 18).
- [35] Kolb, E. **The early universe.** CRC press, 2018 (citado na página 24).
- [36] Leslie, B. C. **Cosmology Now: Lambda-CDM Standard Model What we know and How we know it.** Independently Published, 2020 (citado na página 3).
- [37] MacCallum, M. A. **Cosmological models from a geometric point of view.** *arXiv preprint arXiv:2001.11387* (2020) (citado na página 42).

- [38] Mather, J. C., Cheng, E., Cottingham, D. A. et al. **Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument.** *The Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 420, no. 2, p. 439-444 420 (1994), pp. 439–444 (citado nas páginas 29, 30).
- [39] Maxwell, J. C. **A dynamical theory of the electromagnetic field.** *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), pp. 459–512 (citado na página 2).
- [40] Migkas, K., Pacaud, F., Schellenberger, G. et al. **Cosmological implications of the anisotropy of ten galaxy cluster scaling relations.** *Astronomy & Astrophysics* 649 (2021), A151 (citado na página 40).
- [41] Misner, C. W. **The isotropy of the universe.** *Astrophysical Journal*, vol. 151, p. 431 151 (1968), p. 431 (citado na página 16).
- [42] Nakahara, M. **Geometry, topology and physics.** CRC press, 2018 (citado na página 7).
- [43] Newton, I. **Philosophiae naturalis principia mathematica.** Vol. 1. G. Brookman, 1833 (citado na página 2).
- [44] Oliveira-Costa, A. de, Tegmark, M., Zaldarriaga, M. e Hamilton, A. **Significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP.** *Physical Review D* 69.6 (2004), p. 063516 (citado na página 39).
- [45] Padmanabhan, T. **Structure formation in the universe.** Cambridge university press, 1993 (citado nas páginas 31, 34, 35, 37).
- [46] Qin, F., Parkinson, D., Howlett, C. e Said, K. **Cosmic Flow Measurement and Mock Sampling Algorithm of Cosmicflows-4 Tully- Fisher Catalog.** *The Astrophysical Journal* 922.1 (2021), p. 59 (citado na página 40).
- [47] Ralston, J. P. e Jain, P. **The Virgo alignment puzzle in propagation of radiation on cosmological scales.** *International Journal of Modern Physics D* 13.09 (2004), pp. 1857–1877 (citado na página 39).
- [48] Rees, M. J. e Sciama, D. W. **Large-scale density inhomogeneities in the universe.** *Nature* 217.5128 (1968), pp. 511–516 (citado na página 16).
- [49] Resnick, R. **Introduction to special relativity.** John Wiley & Sons, 1991 (citado na página 5).

- [50] Rotman, J. J. **An introduction to the theory of groups**. Vol. 148. Springer Science & Business Media, 2012 (citado na página 42).
- [51] Ryan, M. P. e Shepley, L. C. **Homogeneous relativistic cosmologies**. Vol. 59. Princeton University Press, 2015 (citado na página 53).
- [52] Ryden, B. **Introduction to cosmology**. Cambridge University Press, 2017 (citado nas páginas 22, 25).
- [53] Ryder, L. **Introduction to general relativity**. Cambridge University Press, 2009 (citado na página 7).
- [54] Sachs, R. e Wolfe, A. **Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background** (1967) (citado na página 16).
- [55] Schwarz, D. J., Starkman, G. D., Huterer, D. e Copi, C. J. **Is the low- l microwave background cosmic?** *Physical Review Letters* 93.22 (2004), p. 221301 (citado na página 39).
- [56] Stebbins, A. **The cmbr spectrum**. *arXiv preprint astro-ph/9705178* (1997) (citado na página 30).
- [57] Stewart, J. M. **Non-equilibrium processes in the early universe**. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 145.3 (1969), pp. 347–356 (citado na página 16).
- [58] Taub, A. H. **Empty space-times admitting a three parameter group of motions**. *Annals of Mathematics* (1951), pp. 472–490 (citado nas páginas 3, 48).
- [59] Thoren, V. E. e Christianson, J. R. **The lord of Uraniborg: a biography of Tycho Brahe**. Cambridge University Press, 1990 (citado na página 1).
- [60] Vaidya, P. e Patel, L. **Gravitational fields with space-times of Bianchi type IX**. *Pramana* 27 (1986), pp. 63–72 (citado na página 53).
- [61] Wald, R. **General relativity. the university of Chicago**. *Chicago. Sect 6* (1984), p. 3840 (citado nas páginas 8, 13).
- [62] Weinberg, S. **Cosmology**. Oxford university press, 2008 (citado nas páginas 22, 29, 35).
- [63] Weinberg, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. Wiley, 2013 (citado na página 32).
- [64] Weyl, H. **Mathematische analyse des raumproblems: vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid**. J. Springer, 1923 (citado na página 18).

[65] Wheeler, J., Misner, C. e Thorne, K. **Gravitation** (2017) (citado na página [21](#)).