UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Katherine Pereira Burock

A Estrutura de Semigrupos Numéricos Esparsos

VITÓRIA
2017

Katherine Pereira Burock

A Estrutura de Semigrupos Numéricos Esparsos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo - PPGMAT, UFES - como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Gilvan de Oliveira.

VITÓRIA

2017

Agradecimentos

A minha família pelo apoio financeiro e moral, ao meu orientador Prof. José Gilvan de Oliveira pelo incentivo, orientação e ajuda na elaboração deste trabalho, ao PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) pela ajuda financeira e por ter me proporcionado o treinamento e a possibilidade de fazer este mestrado.

Resumo

Nesta dissertação serão estudados os semigrupos esparsos, analisando-se as suas classificações e propriedades, como os seus limites superiores para o gênero, a interação entre os pulos simples e duplos, a influência do gênero nos pulos, a influência da paridade do número de Frobenius e também a classificação de semigrupos esparsos limite. No final daremos uma introdução aos semigrupos κ-esparsos, analisando-se sua estrutura e tentando estender algumas noções e propriedades como generalização natural dos semigrupos esparsos. Para isto faremos uma revisão de outros trabalhos publicados sobre o assunto, sendo o artigo [1] "On the structure of numerical sparse semigroups and applications" a principal referência usada.

Palavras-chaves: Semigrupos numéricos. Semigrupos esparsos. Semigrupos esparsos limite. Semigrupos κ-esparsos.

Abstract

Sparse semigroups will be studied in this dissertation by analyzing their classifications and properties, such as their upper limits for the genus, the interaction between the single and double leaps, the influence of the genus on the leaps, the influence of the parity of the Frobenius number and also the classification of limit sparse semigroups. At the end we will give an introduction to κ-sparse semigroups by analyzing their structure and trying to extend some notions and properties as a natural generalization of the sparse semigroups. For this we will review other published works on the subject, where the main reference used was [1] "On the structure of numerical sparse semigroups and applications".

Key-words: Numerical semigroups. Sparse semigroups. Limit sparse semigroups. κ-sparse semigroups.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um semigrupo numérico é um subconjunto do conjunto dos números inteiros não-negativos que é fechado em relação a adição e cujo complementar contém apenas uma quantidade finita de números, chamados as lacunas do semigrupo numérico. A maior lacuna é chamada de número de Frobenius e a quantidade de lacunas é chamada de gênero do semigrupo numérico. A teoria dos semigrupos numéricos tem aplicações em diversas linhas de pesquisa da matemática, como por exemplo no estudo dos semigrupos de Weierstrass de uma curva algébrica não-singular, na determinação de códigos corretores de erros com ótimos parâmetros, no estudo de anéis locais de Gorenstein, na classificação de curvas planas algebróides, na análise da conjectura de Bras-Amorós, sobre o comportamento da sequência do número de semigrupos numéricos com mesma quantidade de lacunas, etc.

Como generalização dos chamados semigrupos de Arf, que estão relacionados com resolução de singularidades de curvas algébricas, os semigrupos esparsos são os semigrupos numéricos cuja diferença entre duas quaisquer lacunas sucessivas é menor ou igual a dois. Com esta propriedade adicional dos semigrupos esparsos conseguimos melhorar a cota superior para o gênero destes semigrupos, levando em consideração a paridade do número de Frobenius. Também encontramos um tipo de semigrupos que possuem gênero igual a essa cota superior, chamados de semigrupos esparsos limites. Generalizando o conceito de semigrupos esparsos, para um número inteiro positivo κ, um semigrupo é chamado de κ-esparso se a diferença entre duas quaisquer lacunas sucessivas é menor ou igual a κ. Estes semigrupos possuem algumas estruturas e propriedades similares aos esparsos, que foram estudadas nesta dissertação.

O objetivo principal desta dissertação é estudar os semigrupos esparsos, destacando suas propriedades, a influência da paridade do número de Frobenius e pesquisar a classificação desses semigrupos. A referência básica é o artigo On the structure of numerical sparse semigroups and applications to Weierstrass points, dos autores André Contiero, Carlos G. T. A. Moreira e Paula M. Veloso, publicado em 2015. Finalmente, serão estudados os semigrupos κ-esparsos, a partir de recentes trabalhos de pesquisa sobre o assunto, inclusive trabalhos em fase de publicação.

No capítulo 2 abordaremos a base do estudo sobre os semigrupos esparsos. Apresentaremos conceitos básicos, definições e alguns exemplos notáveis de semigrupos esparsos, terminando o capítulo com a introdução da contagem de pulos e a influência do gênero nestes semigrupos.

No capítulo 3 será definido e explorado o conceito de semigrupo esparso limite, demonstrando algumas de suas características, fazendo a sua caracterização pela paridade do número de Frobenius encontrando um limite superior para o gênero dos semigrupos esparsos. Terminaremos dando uma ideia de como os semigrupos esparsos são usados no estudo dos semigrupos de Weierstrass de uma curva algébrica não-singular.

O capítulo 4 será dedicado ao estudo dos semigrupos κ-esparsos. Começaremos com uma breve revisão do estudo do conjunto dos pulos de um semigrupo, depois definindo e demonstrando algumas propriedades dos semigrupos κ-esparsos. Terminaremos o capítulo estudando o conjunto dos semigrupos κ-esparsos, demonstrando algumas de suas características. Mostraremos também a abrangência deste conjunto com relação aos conjuntos de outros semigrupos numéricos mais conhecidos, como o conjunto dos semigrupos Arf, dos semigrupos esparsos e o conjunto de todos os semigrupos numéricos.

Capítulo 2

SEMIGRUPOS ESPARSOS

Neste Capítulo formaremos a base do estudo sobre os semigrupos esparsos. Começaremos definindo alguns conceitos básicos, como as definições de semigrupos numéricos e semigrupos esparsos, introduziremos a contagem de pulos e mostraremos alguns exemplos notáveis de semigrupos esparsos, como os semigrupos Arf e os semigrupos γ-hiperelípticos.

Em seguida analisaremos a influência do gênero no tamanho dos pulos e destacaremos a base do conceito de limite para um semigrupo, e por fim faremos a caracterização de vários semigrupos esparsos com base no seu gênero e no número de Frobenius.

2.1 Definições Básicas

Um *semigrupo numérico* $H = \{0 = n_0 < n_1 < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ de *gênero* g é um subconjunto aditivo de $\mathbb{N}$, o conjunto dos inteiros não-negativos, contendo o elemento neutro, fechado em relação a operação de adição, isto é $H + H \subset H$, onde existem exatamente g elementos no conjunto complementar $\mathbb{N} \backslash H = \{1 = l_1 < l_2 < ... < l_g\}$, chamado de *conjunto das lacunas* de H.

A maior lacuna l_g de um semigrupo numérico H é chamada de *número de Frobenius* de H e cada par ordenado de lacunas sucessivas será representado por (l_i, l_{i+1}) e será chamado de *pulo*. Já os elementos de H são chamados de *não-lacunas* e a menor não-lacuna positiva n_1 é chamada de *multiplicidade* de H. Estes semigrupos possuem aplicações além de sua própria área da matemática, como nos pontos de Weierstrass sobre uma curva algébrica, na classificação de curvas planas algebróides e na teoria de códigos corretores de erros.

No exemplo seguinte iremos mostrar todos os semigrupos numéricos de gênero menor que 5:

Exemplo 2.1.1. *Para cada número inteiro positivo g conjunto $H_g = \{0, g+1, g+2, ...\}$ é um semigrupo numérico de gênero g. A seguir listamos os conjuntos de lacunas de todos os semigrupos numéricos de gênero g com g menor do que 5:*

1. $g = 0$: $\emptyset$.

2. $g = 1$: $\{1\}$

3. $g = 2$: $\{1, 2\}$ *ou* $\{1, 3\}$.

4. $g = 3$: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$ *ou* $\{1, 3, 5\}$.

5. $g = 4$: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$, $\{1, 2, 4, 7\}$ *ou* $\{1, 3, 5, 7\}$.

Os *semigrupos esparsos* são casos especiais de semigrupos numéricos onde a diferença entre cada duas lacunas sucessivas é menor ou igual a 2. Equivalentemente um semigrupo numérico é esparso se a diferença entre duas não-lacunas sucessivas é maior ou igual a 2 para todas lacunas menores que o número de Frobenius. Este conceito foi introduzido por Munuera-Torres-Villanueva ([2]), onde os semigrupos esparsos foram introduzidos como uma generalização dos semigrupos Arf que apareciam naturalmente nos semigrupos de valorização de domínios não-ramificados analíticos de uma dimensão. A seguir apresentaremos todos os semigrupos esparsos de gênero menor do que 5, destacando a partir do exemplo anterior.

Exemplo 2.1.2. *Os conjuntos de lacunas de todos os semigrupos esparsos de gênero g com g menor que 5 são os seguintes:*

1. $g = 0$: $\emptyset$.

2. $g = 1$: $\{1\}$.

3. $g = 2$: $\{1, 2\}$ *ou* $\{1, 3\}$.

4. $g = 3$: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ *ou* $\{1, 3, 5\}$.

5. $g = 4$: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$ *ou* $\{1, 3, 5, 7\}$.

Dois particulares semigrupos que aparecerão frequentemente neste trabalho são o *semigrupo esparso ordinário* $H_g = \{0, g+1, g+2, ...\}$ de gênero g visto no exemplo 2.1.1 e *hiperordinário* $H = \{m\mathbb{N} + H_g\}$ de gênero $g - int(g/m)$, aonde $int(x)$ é a parte inteira de x.

Outra classe de semigrupos importantes é aquela dos *semigrupos Arf*, que serão definidos a seguir.

Definição 2.1.3. *Um semigrupo numérico* $H = \{0 = n_0 < n_1 < ...\}$ *é um semigrupo Arf se* $n_i + n_j - n_x \in H$, $\forall\ i \geq j \geq x$.

Uma outra caracterização útil para semigrupos Arf [5, teorema I.3.4] é: H *é um semigrupo Arf se e somente se* $2n_i - n_j \in H$, $\forall\ i \geq j \geq 1$.

Utilizando esta ultima caracterização para semigrupos Arf é fácil ver que todo semigrupo Arf é de fato esparso, como será mostrado na observação a seguir:

Observação 2.1.4. *Se* H *é um semigrupo Arf então* H *é esparso.*

Demonstração. Caso $g = 0$ então claramente H é Arf e esparso. Caso $g > 0$, como H é Arf temos que $2n_i - n_j \in H$, $\forall\ i \geq j \geq 1$. Vamos supor, por contradição, que H não seja esparso. Então existem duas não-lacunas sucessivas n_i e n_{i+1}, menores que o número de Frobenius, cuja diferença é 1. Utilizando a propriedade anteriormente mencionada dos semigrupos Arf para n_i e n_{i+1}, temos que $n_{i+1}+1 \in H$, ou seja $n_{i+2} = n_{i+1}+1$. Por indução temos que $n_{i+1+k} = n_{i+1}+k$, $k \geq 0$. Então não existem lacunas maiores que n_i, contradição, pois $g > 0$. □

É interessante observar que apesar de que todos os semigrupos Arf serem esparsos nem todo semigrupo esparso é Arf. De fato o semigrupo cujo conjunto de lacunas é $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ é esparso mas não é Arf, o que é facilmente provado pois se este semigrupo fosse Arf então $2n_i - n_j \in H, \forall i \geq j \geq 1$, mas $2 * 7 - 5 = 4 \notin H$.

2.2 Contagem dos Pulos

Como em semigrupos esparsos cada par de lacunas sucessivas é espaçado por uma ou duas unidades, é natural contar os pares de lacunas em cada um dos dois casos. A seguir definimos dois conjuntos que ajudarão na análise desta contagem:

Definição 2.2.1. *Se* H *é um semigrupo esparso, então definimos os conjuntos:*

$\mathcal{S} := \{i/l_{i+1} - l_i = 1\}$, *chamado de conjunto dos pulos simples de* H. *Notação:* $S := \#\mathcal{S}$, *e*

$\mathcal{D} := \{i/l_{i+1} - l_i = 2\}$, *chamado de conjunto dos pulos duplos de* H. *Notação:* $D := \#\mathcal{D}$.

Em um semigrupo numérico qualquer de gênero g existem $g-1$ lacunas menores que l_g e logo temos $l_g - g + 1$ não-lacunas menores que l_g, que são $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_{l_g - g}$. Mas sabemos também que os inteiros $l_g - n_0$, $l_g - n_1$, $l_g - n_2$, ..., $l_g - n_{l_g-g}$ também são lacunas, pois se algum destes não é uma lacuna então $l_g = (l_g - n_i) + n_i$ é uma não-lacuna.

Logo o número de lacunas do semigrupo satisfaz $g \geq l_g - g + 1$, ou seja $l_g \leq 2g - 1$. Um semigrupo numérico qualquer de gênero g aonde ocorre a igualdade, ou seja que possui número de Frobenius $l_g = 2g - 1$, é chamado de *simétrico*, e, no caso de semigrupos esparsos, esta igualdade ocorre quando todos os pulos são duplos, como será mostrado na proposição 2.4.1. Neste caso as lacunas acima explicitadas seriam todas as lacunas do semigrupo, logo l é uma lacuna de um semigrupo simétrico se, e somente se, $l_g - l$ não é uma lacuna deste semigrupo. Já no caso aonde $l_g = 2g - 2$ o semigrupo é chamado de *quasi-simétrico* e suas lacunas são as explicitadas anteriormente juntamente com a metade do número de Frobenius $l_g/2$, portanto a mesma propriedade mostrada para os semigrupos simétricos funciona para este semigrupo em toda lacuna l diferente de $g - 1 = l_g/2$.

Observando-se que o número de Frobenius tem uma cota superior e que seu valor tem relação com o número de pulos simples e duplos fica interessante definir um parâmetro que indique o quanto ele difere do valor máximo possível, que seria útil para calcular as quantidades de pulos simples e duplos dos semigrupos, o que será feito a seguir:

Observação 2.2.2. *Se H é um semigrupo esparso então:*

$k := 2g - l_g$, satisfaz $1 \leq k \leq g$.

Utilizando de uma contagem parecida com a realizada para a definição do parâmetro k conseguimos encontrar uma relação entre o número de pulos simples e duplos de um semigrupo esparso, o que é mostrado a seguir:

Observação 2.2.3. *Se H é um semigrupo esparso de gênero g e $k := 2g - l_g > 1$, então:*

1. $D + S = g - 1$.

2. $D = g - k$.

3. $S = k - 1$.

Demonstração. (1): Como H é esparso temos que: $\mathcal{S} \cup \mathcal{D} = \{1,\ 2,\ ...,\ g-1\}$ logo $\#(\mathcal{S} + \mathcal{D}) = S + D = g - 1$.

(2) e (3): Entre 1 e l_g temos S pulos simples e D pulos duplos. Então $l_g = 1 + S + 2D$, como $k = 2g - l_g$ segue do item anterior que $D = g - k$ e $S = k - 1$. $\square$

2.3 A Influência do Gênero

Utilizando a observação 2.2.2 sobre a contagem dos pulos mostraremos uma proposição que dá um pouco mais de informação sobre a estrutura de semigrupos esparsos em relação ao seu gênero, mostrando que se $g \geq 2k-1$ então os últimos pulos do semigrupo são duplos.

Proposição 2.3.1. *Seja H um semigrupo esparso de gênero g. Se $g \geq 2k-1$ então $l_{i+1}-l_i = 2$, $\forall i \in \{2k-2, 2k-1, ..., g-1\}$.*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso de gênero $g \geq 2k-1$ e seja (l_{m+1}, l_m) o pulo simples de H com o maior m possível. Como $S = k-1$ temos $m-(k-1)$ não-lacunas positivas (pulos duplos) menores do que l_m. Se $j \in \{0, 1, ..., m-k+1\}$ então $(l_{m+1}-n_j, l_m-n_j)$ são pulos simples, logo $S = k-1 \geq m-k+2$, isto é, $m \leq 2k-3$. Daí, para cada $i \in \{2k-2, 2k-1, ..., g-1\}$, temos $l_{i+1}-l_i = 2$. □

Esta proposição nos mostra a importância do gênero em relação a estrutura do semigrupo. Ao se estudar semigrupos esparsos fica claro que um semigrupo ter gênero $g = 2k-1$ e, consequentemente, número de Frobenius $l_g = 2g-k = 3k-2$, é algo bem importante. De fato o lema seguinte sugere que eles seriam um "limite"em algum sentido, noção que mostraremos mais claramente no próximo capítulo.

Seja H um semigrupo e $\tilde{H}$ um subconjunto de H. $\tilde{H}$ é um subsemigrupo de H se $\tilde{H}$ for fechado em relação a operação de H.

Lema 2.3.2. *Sejam H um semigrupo esparso de gênero $g = 2k+j$, $j \geq 0$ e $l_g = 2g-k$. Então existe um semigrupo esparso $\tilde{H}$ de gênero $\tilde{g} = 2k-1$ e $l_{\tilde{g}} = 2\tilde{g}-k = 3k-2$ tal que H é um subsemigrupo de $\tilde{H}$.*

Demonstração. Nestas condições, como $g \geq 2k-1$, então utilizando a proposição 2.3.1 temos que $l_{i+1}-l_i = 2$, $\forall\ i \in \{2k-2,\ 2k-1,\ ...,\ g-1\}$. Seja $\tilde{H} = H \cup \{l_{g-j}, ..., l_g\}$ então claramente $\tilde{H}$ é um semigrupo esparso contendo H. Além disto o gênero $\tilde{g}$ de $\tilde{H}$ é $\tilde{g} = g-(j+1) = 2k-1$ e número de Frobenius de $\tilde{H}$ é $l_{\tilde{g}} = l_{g-j-1} = l_{2k-1} = l_{2k-1} = 3k-2$. □

2.4 Caracterização de alguns Semigrupos Esparsos

Nesta seção apresentaremos várias consequências da contagem de pulos, mostrada anteriormente, que ilustram as técnicas utilizadas na teoria de semigrupos esparsos. Ficará claro, através destes resultados, que existem poucos semigrupos esparsos com número de Frobenius alto (ou, equivalentemente, poucos pulos simples).

Pelo resultado da contagem de pulos (observação 2.2.2) é fácil perceber que os semigrupos esparsos simétricos só possuem pulos duplos, e cada semigrupo esparso quasi-simétrico possui apenas um pulo simples, a seguir mostraremos que utilizando estas propriedades estes semigrupos podem ser caracterizados com precisão ainda maior.

Um semigrupo numérico H com multiplicidade $n_1 = 2$ é chamado de *hiperelíptico.*

Sejam $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ números naturais, então consideraremos que $\langle a_1, a_2, ..., a_n\}\rangle$ é o conjunto gerado pelos elementos $\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ usando a operação de soma.

Proposição 2.4.1. *Um semigrupo esparso de gênero g é simétrico se, e somente se, ele é o semigrupo hiperelíptico $\langle 2, 2g+1\rangle$.*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso simétrico de gênero g. Logo ele possui número de Frobenius $l_g = 2g-1$ e portanto $k = 1$. Utilizando a contagem de pulos (observação 2.2.3)temos que $S = k-1 = 0$, portanto H só possui pulos duplos então $H = \langle 2,\ 2g+1\rangle$.

□

Proposição 2.4.2. *Um semigrupo esparso é quasi-simétrico se, e somente se, ele é o semigrupo $\langle 3,\ 4,\ 5\rangle$ ou o semigrupo $\langle 3,\ 5,\ 7\rangle$.*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso quasi-simétrico de gênero g. Então H possui número de Frobenius $l_g = 2g-2$ e portanto $k = 2$. Utilizando a contagem de pulos (observação 2.2.3) $S = k-1 = 1$, logo H só possui um pulo simples. Se 1 ou 2 são não lacunas então H não teria pulos simples, logo $3 \in H$ e $(1,2)$ é o único pulo simples de H. Como todos os pulos seguintes são duplos então 1 é a única lacuna ímpar de H Como $3 \in H$ então 6 não pode ser uma lacuna e portanto somente 4 pode ser uma outra lacuna de H. Se $4 \in H$ então $H = \langle 3,\ 4,\ 5\rangle$, e caso $4 \notin H$ então $H = \langle 3,\ 5,\ 7\rangle$.

□

Nos teoremas a seguir continuaremos a caracterizar os semigrupos esparsos em relação ao seu número de Frobenius e gênero, o que é equivalente a uma caracterização pelo número de pulos simples.

Chamamos um semigrupo numérico de *γ-hiperelíptico* se ele tem exatamente γ lacunas pares. Vale notar que um semigrupo γ-hiperelíptico pode ter lacunas ímpares também e γ só é igual ao gênero se o semigrupo não tiver nenhuma lacuna ímpar.

Teorema 2.4.3. *Seja H um semigrupo esparso de gênero g e $l_g = 2g - 3$. Então $g \geq 3$ e H é um dos seguintes semigrupos:*

1. $3\mathbb{N} + H_5$ *($g = 4$ e é 2-hiperelíptico).*

2. $3\mathbb{N} + H_7$ *($g = 5$ e é 2-hiperelíptico).*

3. $2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup H_{2g-2}$ *($g \geq 3$ e é 1-hiperelíptico).*

Demonstração. Como $l_g = 2g - k$ então $k = 3$ e, pela observação 2.2.3, $S = 2$ e $g \geq 3$. Em particular $2 \notin H$ e $(2, 1)$ é o primeiro pulo simples de H. Vamos analisar os possíveis casos para o inteiro 3:

Caso 1: $3 \in H$: Portanto $6 \in H$. Como H é esparso então $4 \notin H$ e $5 \notin H$ e logo $(5, 4)$ é o segundo (e último) pulo simples de H. Então somente 7 pode ser outra lacuna de H. Caso seja então $H = 3\mathbb{N} + H_7$ que tem gênero 5 e é 2-hiperelíptico, e caso não seja então $H = 3\mathbb{N} + H_5$ que tem gênero 4 e é 2-hiperelíptico.

Caso 2: $3 \notin H$, portanto $(2, 3)$ é o segundo (e último) pulo simples de H. Portanto todas as lacunas de H são: $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ ...,\ l_g$. Como $l_g = 2g - 3$ então $H = 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup H_{2g-2}$ que tem gênero $g \geq 3$ e é 1-hiperelíptico

□

Corolário 2.4.4. *Seja H um semigrupo de gênero $g \geq 6$ e $l_g = 2g - 3$. Então os seguintes itens são equivalentes:*

1. *H é esparso*

2. *H é 1-hiperelíptico*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Utilizando o teorema 2.4.3 temos três alternativas para H, porém somente o semigrupo do item 3 do teorema 2.4.3 pode ter $g \geq 6$. Portanto H é 1-hiperelíptico.

($\Leftarrow$) Se H é 1-hiperelíptico então 2 é a única lacuna par de H e portanto $2(\mathbb{N} \setminus \{1\}) \subset H$. Além disto 1, 2 e $l_g = 2g - 3$ são lacunas de H e todas as outras lacunas de H são os números ímpares menores que $l_g = 2g - 3$. Então $\mathbb{N} \setminus H \subset \{1, 2\} \cup \{3, 5, 7, ..., 2g - 3\}$ e como $\#\{1, 2\} \cup \{3, 5, 7, ..., 2g - 3\} = g$ temos $\mathbb{N} \setminus H = \{1, 2\} \cup \{3, 5, 7, ..., 2g - 3\}$. Portanto H só possui pulos simples ou duplos, ou seja, H é esparso.

□

Teorema 2.4.5. *Seja H um semigrupo esparso de gênero g e $l_g = 2g-4$. Então $g \geq 4$ e H é um dos seguintes semigrupos:*

1. $3\mathbb{N} + H_8$ *($g = 6$ e é 3-hiperelíptico).*

2. $3\mathbb{N} + H_{10}$ *($g = 7$ e é 4-hiperelíptico).*

3. $4\mathbb{N} + H_6$ *($g = 5$ e é 2-hiperelíptico).*

4. H_4 *($g = 4$ e é 2-hiperelíptico).*

5. $5\mathbb{N} + H_6$ *($g = 5$ e é 3-hiperelíptico).*

6. $H_8 \cup \{5, 7\}$ *($g = 6$ e é 4-hiperelíptico).*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso com gênero g e $l_g = 2g - 4$ então $k = 4$ e pela observação 2.2.3 temos que $S = 3$, $g \geq 4$ e $(2, 1)$ é o primeiro pulo simples de H. Vamos considerar os possíveis casos para o inteiro 3.

Caso 1: $3 \in H$: Portanto $6,\ 9,\ 12 \in H$. Como H é esparso então $\{4, 5, 7, 8\} \not\subset H$, logo $(2, 1)$, $(5, 4)$ e $(8, 7)$ são todos os pulo simples de H, Nestas condições ou $10 \notin H$ então $H = 3\mathbb{N} + H_{10}$ que tem gênero 7 e é 4-hiperelíptico, ou $10 \in H$ neste caso $H = 3\mathbb{N} + H_8$ que tem gênero 6 e é 3-hiperelíptico.

Caso 2: $3 \notin H$: Neste caso 4 ou $5 \notin H$, pois H é esparso e $S = 3$.

Caso 2.1: $3 \notin H$ e $4 \notin H$: Portanto $(2, 1)$, $(3, 2)$ e $(4, 3)$ são os pulo simples de H. Logo $5 \in H$ e todas as lacunas de H restantes são pares. Como $10 \in H$ então as outras possíveis lacunas de H, se existirem, são 6 ou 6 e 8. No primeiro caso então $H = H_4$ que tem gênero 4 e é 2-hiperelíptico. No segundo caso $H = 5\mathbb{N} + H_6$ que tem gênero 5 e é 3-hiperelíptico, e no último caso $H = H_8 \cup \{5, 7\}$ que tem gênero 6 e é 4-hiperelíptico.

Caso 2.2: $3 \notin H$ e $5 \notin H$: Portanto $4 \in H$, e daí $6 \notin H$ pois caso contrário teríamos somente dois pulos simples. Portanto $(2, 1)$, $(3, 2)$ e $(6, 5)$ são os pulo simples de H. Como $8 \in H$ então $H = 4\mathbb{N} + H_6$ que tem gênero 5 e é 2-hiperelíptico.

□

Note que o resultados anterior, em particular, implica que se H é um semigrupo esparso de gênero g e $l_g = 2g - 4$, ou seja, que H tenha três pulos simples, então $4 \leq g \leq 7$. Isto nos leva a pensar que, para alguns determinados números de pulos simples, se tenham cotas para os possíveis valores do gênero destes semigrupos. Na próxima seção veremos que é possível generalizar esta observação (e o resultado sobre semigrupos esparsos quasi-simétricos), no sentido que para qualquer $r \in \mathbb{N}$ fixo um semigrupo com gênero g e número de Frobenius $l_g = 2g - 2r$ possui uma cota superior para o seu gênero. Como para cada valor de $g \in \mathbb{N}$ fixo temos um número finito de semigrupos com gênero g isto significa que também temos um número finito de semigrupos com um determinado número de Frobenius par (equivalentemente um número de pulos simples ímpar).

Teorema 2.4.6. *Seja H um semigrupo esparso de gênero g e $l_g = 2g - 5$. Então $g \geq 5$ e H é um dos seguintes semigrupos:*

1. $3\mathbb{N} + H_{11}$ *($g = 8$ e é 4-hiperelíptico).*
2. $3\mathbb{N} + H_{13}$ *($g = 9$ e é 4-hiperelíptico).*
3. $2(\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) \cup H_{2g-4}$ *($g \geq 5$ e é 2-hiperelíptico).*
4. $2(\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}) \cup H_{2g-4}$ *($g \geq 6$ e é 2-hiperelíptico).*
5. $H_7 \cup \{5\}$ *($g = 6$ e é 3-hiperelíptico).*
6. $H_9 \cup \{5, 8\}$ *($g = 7$ e é 3-hiperelíptico).*
7. $H_9 \cup \{5, 7\}$ *($g = 7$ e é 4-hiperelíptico).*
8. $H_{11} \cup \{5, 8, 10\}$ *($g = 8$ e é 4-hiperelíptico).*
9. $H_{11} \cup \{5, 7, 10\}$ *($g = 8$ e é 4-hiperelíptico).*
10. $H_{13} \cup \{5, 7, 10, 12\}$ *($g = 9$ e é 4-hiperelíptico).*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso com gênero g e $l_g = 2g - 5$. Como $l_g = 2g - k$ então $k = 5$ e pela observação 2.2.3 $S = 4$, logo $g \geq 5$, $2 \notin H$ e $(2, 1)$ é o primeiro pulo simples de H. Vamos considerar os possíveis casos para os inteiros 3, 4, 5, 7 e 8.

Caso 1: $3 \in H$: Naturalmente $3\mathbb{N} \subset H$, portanto $\{6, 9, 12\} \subset H$. Como H é esparso então 4, 5, 7, 8, 10, 11 $\notin H$ e $(2, 1)$, $(5, 4)$, $(8, 7)$ e $(11, 10)$ são os pulo simples de H. Então somente 13 pode ser outra lacuna de H, caso seja então $H = 3\mathbb{N} + H_{13}$ que tem gênero 9 e é 4-hiperelíptico. Caso não seja então $H = 3\mathbb{N} + H_{11}$ que tem gênero 8 e é 4-hiperelíptico.

Caso 2: $3 \notin H$ e $4 \in H$: Como $4 \in H$ então $6 \notin H$ (pois se $6 \in H$ então todo par maior que dois estaria em H e não teriam quatro pulos simples), e 4, $8 \in H$, como H é esparso então $\{5, 7\} \notin H$, logo $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(6, 5)$ e $(7, 6)$ são os pulos simples de H, então $H = 2(\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}) \cup H_{2g-4}$ sendo $g > 6$ e é 2-hiperelíptico

Caso 3: $3 \notin H$, $4 \notin H$ e $5 \notin H$: portanto $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ e $(5, 4)$ são os pulo simples de H, logo todas as lacunas de H que sobraram são ímpares, então $H = 2(\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}) \cup H_{2g-4}$ sendo $g > 5$ e é 2-hiperelíptico.

Caso $5 \in H$ então $6 \notin H$ pois H é esparso, logo 7 ou $8 \notin H$

Caso 4: $3 \notin H$, $4 \notin H$, $5 \in H$ e $7 \notin H$: portanto $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ e $(7, 6)$ são os pulo simples de H, logo $8 \in H$ então $5 + 8 = 13 \in H$, como todas as lacunas restantes de H são ímpares então se houver mais lacunas elas só podem ser $\{9\}$ ou $\{9, 11\}$. Caso não haja mais lacunas então $H = H_7 \cup \{5\}$ que tem gênero 6 e é 3-hiperelíptico, caso somente 9 seja a lacuna restante então $H = H_9 \cup \{5, 8\}$ que tem gênero 7 e é 3-hiperelíptico e caso as lacunas restantes sejam $\{9, 11\}$ então $H = H_{11} \cup \{5, 8, 10\}$ que tem gênero 8 e é 4-hiperelíptico

Caso 5: $3 \notin H$, $4 \notin H$, $5 \in H$ e $8 \notin H$: Naturalmente $7 \in H$ pois senão haveria cinco pulos simples, como $5 + 5 = 10 \in H$ e H é esparso então $9 \notin H$ logo $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ e $(9, 8)$ são os pulo simples de H, e todas as lacunas de H maiores que nove são ímpares, como $5+5+5 = 15 \in H$ então se tiver lacunas de H maiores que 9 elas só podem ser $\{11\}$ ou $\{11, 13\}$ Caso não haja mais lacunas então $H = H_9 \cup \{5, 7\}$ que tem gênero 7 e é 4-hiperelíptico, caso somente 11 seja a lacuna restante então $H = H_{11} \cup \{5, 7, 10\}$ que tem gênero 8 e é 4-hiperelíptico e caso as lacunas restantes sejam $\{11, 13\}$ então $H = H_{13} \cup \{5, 7, 10, 12\}$ que tem gênero 9 e é 4-hiperelíptico □

Uma característica importante dos teoremas 2.4.3 e 2.4.6 será generalizada na próxima seção (corolário 3.3.4): se H for um semigrupo esparso de gênero $g > 0$ com número de Frobenius $l_g = 2g - (2r + 1)$, $r \in \mathbb{N}$, ou seja com $2r$ pulos simples, e se $g > 4r + 1$ então todas as não-lacunas de H menores que l_g são pares. Neste caso todos os $(l_g + 1)/2 = g - r$ inteiros positivos ímpares menores que $l_g + 1$ são lacunas, então H tem r lacunas pares (r-hiperelíptico) e o conjunto $\{m \in \mathbb{N}/2m \in H\}$ é um semigrupo de gênero r.

É interessante observar que, teoricamente, a técnica utilizada para provar os teoremas 2.4.3, 2.4.5 e 2.4.6 pode ser usada para caracterizar todos os semigrupos esparsos com $l_g = 2g-r$, para qualquer $r \in \mathbb{N}$ fixo. Porém com o aumento do valor de r o número de casos a ser analisados aumenta rapidamente, fazendo a prova ficar cada vez mais complicada.

Capítulo 3

SEMIGRUPOS ESPARSOS LIMITES

Neste Capítulo iremos definir e explorar o conceito de semigrupos esparsos limite, demonstrando algumas características particulares deste tipo de semigrupos.

Em seguida faremos uma análise dos semigrupos esparsos limite com base na paridade do número de Frobenius, ou seja, com base na a paridade do número de pulos simples, com o intuito de encontrar uma cota para o gênero dos semigrupos esparsos. Encontrando este limite para a maior parte dos casos.

No final do capítulo dissertaremos uma das maiores aplicações dos semigrupos esparsos: o estudo dos semigrupos de Weierstrass de uma curva algébrica não-singular, seguindo o demonstrado por CONTIERO *et.al.* (2015).

3.1 Propriedades dos Semigrupos Esparsos Limites

No capítulo anterior vimos que semigrupos esparsos com gênero $g = 2k - 1$ e número de Frobenius $l_g = 2g - k$ possuem propriedades interessantes que sugerem algum tipo de limite para esses semigrupos. Nesta seção formalizaremos este conceito e obteremos mais algumas características interessantes destes semigrupos.

Observação 3.1.1. *A observação 2.2.3 nos assegura que um semigrupo esparso possui gênero* $g = 2k - 1$ *e número de Frobenius* $l_g = 2g - k$ *se e somente se* $S = D$

Semigrupos esparsos limites são casos especiais de semigrupos esparsos onde o número de pulos simples é igual ao número de pulos duplos (equivalentemente $g = 2k - 1$ e $l_g = 2g - k$). Como o número de pulos simples e duplos de um semigrupo esparso tem relação direta com o gênero dele, os semigrupos esparsos limites possuem um valor de gênero g dependente do número de pulos simples (ou duplos pois são iguais).

Definição 3.1.2. *Um semigrupo esparso com o mesmo número de pulos simples e duplos (equivalentemente $g = 2k - 1$ e $l_g = 2g - k$) é chamado de semigrupo esparso limite.*

Como o número de pulos duplos de um semigrupo esparso tem relação com o número de não-lacunas maiores que zero e menores que o número de Frobenius deste semigrupo, no lema a seguir mostraremos que este número é na verdade igual ao número de pulos duplos.

Como em semigrupos esparsos limite o número de pulos duplos é igual ao de pulos simples então para estes semigrupos o número de não-lacunas menores que l_g é igual também ao número de pulos simples.

Lema 3.1.3. *Seja H um semigrupo esparso. Então $\#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\} = D$. Em particular se o semigrupo for também limite então $\#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\} = D = S$*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso, seja $a \in \#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\}$. Como H é esparso então $a+1$ e $a-1 \notin H$, logo $(a+1, a-1)$ é um pulo duplo de H. Também sabemos que se (l_i, l_{i+1}) é um pulo duplo de H então $l_i + 1 \in H$ e $l_i + 1 < l_g$, ou seja $l_i + 1 \in \#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\}$, logo $\#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\} = \#\mathcal{D} = D$. Caso H seja limite então $S = D$ logo $\#H \cap \{1, 2, 3, ..., l_g\} = S = D$.

□

Tendo em mente os resultados do capítulo anterior, é natural se perguntar sobre a existência de semigrupos esparsos de gênero $g \geq 4r - 1$ e número de Frobenius $l_g = 2g - 2r$ (onde $k = 2r$ e $S = 2r - 1$). Uma análise preliminar dos exemplos sugere que estes semigrupos não existem se $g > 4r - 1$, e isto será provado na próxima seção. Este fato, junto com o lema 2.3.2, reforça a ideia de que semigrupos esparsos de gênero $g = 4r - 1 = 2k - 1$, ou seja, semigrupos esparsos limite com número de Frobenius par $l_g = 2g - 2r$ são bem especiais.

3.2 Semigrupos Esparsos com número de Frobenius par

Com o objetivo final de analisar a estrutura dos semigrupos esparsos independentemente da paridade do número de Frobenius, primeiramente vamos procurar um limite superior para o gênero de semigrupos esparsos limites com número de Frobenius par, consequentemente com número de pulos simples ímpar. Quando tiver necessidade utilizaremos a notação $l_g = 2g - 2r$

($k = 2r$ e $S = 2r-1$) para número de Frobenius pares e $l_g = 2g-2r-1$ ($k = 2r+1$) para número de Frobenius ímpares, com $r \in \mathbb{N}$.

Provaremos inicialmente que para cada $r \in \mathbb{N}$ existe somente um semigrupo limite com número de Frobenius par. Para conseguir provar esta afirmação primeiro precisamos provar outro lema técnico:

Lema 3.2.1. *Seja H um semigrupo esparso limite com genero g número de Frobenius par $l_g = 2g-2r = 6r-2$. Então $3 \in H \Leftrightarrow 6r-5 \notin H$*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso limite com $l_g = 2g-2r = 6r-2$, logo $S = D = 2r-1$.

($\rightarrow$) $3 \in H$ então $\forall n \in \mathbb{N}$ $3n \in H$. Se $3n < l_g$ temos que $3n-1$ e $3n+1 \notin H$. Como $S = D$, pois H é limite, então $H = 3\mathbb{N} + H_{6r-2}$, logo $6r-5 \notin H$.

($\leftarrow$) $6r-5 \notin H$. Neste caso entre $6r-5$ e $6r-2$ tem uma não-lacuna, $6r-3$, de acordo com a proposição 2.3.1. Pelo lema 3.1.3 temos que $\#H \cap \{1,2,3,...,l_g\} = S = D = 2r-1$ logo $\#H \cap \{1,2,3,...,6r-5\} = S-1 = 2r-2$. Como $6r-5$ e $6r-4 \notin H$ se $n \in H \cap \{1,2,3,...,6r-5\}$ então $6r-5-n$ e $6r-4-n \notin H$, e assim temos $2r-2$ pulos simples desta forma. Se contarmos também o pulo $(6r-4, 6r-5)$ completamos todos os $2r-1$ pulos simples de H. Então todos os $2r-1$ pulos simples de H são da forma $(6r-5-x, 6r-4-x)$ com $x \in H \cap \{0,1,2,3,...,6r-5\}$. Vamos supor que $3 \notin H$. Então $(1,2)$ e $(2,3)$ são pulos simples de H, logo são da forma $(6r-5-x, 6r-4-x)$, logo temos que $6r-8$, $6r-7 \in H$, como $l_g = 6r-2 > 6r-7$ isto é uma contradição com o fato de H ser esparso. Consequentemente $3 \in H$.

□

Teorema 3.2.2. *Seja H um semigrupo esparso limite com gênero g número de Frobenius par $l_g = 2g-2r = 6r-2$. Então $H = 3\mathbb{N} + H_{6r-2}$.*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso limite com $l_g = 2g-2r = 6r-2$ e $S = D = k-1 = 2r-1$. Utilizando o lema 3.2.1 só precisamos provar que $6r-5 \notin H$. Suponha que $6r-5 \in H$. Naturalmente $(1,2)$ e $(2,3)$ são pulos simples de H e $6r-5 < l_g = 6r-2$. Então $6r-4$, $6r-6 \notin H$ e $(6r-6, 6r-4)$ é um pulo duplo. Pela da proposição 2.3.1 temos que $6r-3 \in H$. Daí $(6r-4, 6r-2)$ é um pulo duplo de H e assim existe um número natural $x \geq 3$ tal que $(6r-2x-1, 6r-2x)$ é o maior pulo simples de H. Logo no intervalo $[6r-2x, 6r-2]$ todos os números pares são lacunas e todos os ímpares são não-lacunas (pois só existem pulos duplos neste intervalo). Assim temos $x-1$ não-lacunas neste intervalo e portanto (como, pelo lema 3.1.3, o número de não-lacunas em $[1, l_g]$ é igual a $D = 2r - 1$) temos $2r - 1 - (x - 1) + 1 = 2r - x + 1$ não-lacunas no intervalo $[0, 6r - 2x - 2]$. Daí se $n \in H \cap [0, 6r - 2x - 2]$ então $(6r - 2x - 1 - n, 6r - 2x - n)$ é um pulo simples, e como H é esparso essas não-lacunas não podem ser consecutivas. Portanto estes pulos simples são disjuntos entre si e são ao todo $2r - x + 1$. Seja n_1 a multiplicidade de H (menor número não-nulo de H). Se $n_1 \leq 2x$ e n_1 é par então existe um múltiplo de n_1 no intervalo $[6r - 2x, 6r - 2]$ que é uma não-lacuna, o que é uma contradição. Se $n_1 < 2x - 1$ e n_1 é ímpar então $6r - 2 - n_1$ é uma lacuna ímpar no intervalo $[6r - 2x, 6r - 2]$, outra contradição. Então resta analisar apenas as seguintes duas possibilidades para n_1.

1) $n_1 > 2x$. Claramente $1, 2, ..., n_1 - 1, n_1$ são lacunas consecutivas, formando $n_1 - 2 \geq 2x - 1$ pulos simples consecutivos. Como os pulos simples que encontramos anteriormente (da forma $(6r - 2x - 1 - n, 6r - 2x - n)$ com $n \in H \cap [0, 6r - 2x - 2]$) são disjuntos, então temos no mínimo $x - 1$ pulos simples diferentes dos anteriores. Assim, como já tínhamos $2r - x + 1$ pulos simples, ficamos com o total de $(2r - x + 1) + (x - 1) = 2r$ pulos simples, mas, como $S = 2r - 1 < 2r$, isto é uma contradição.

2) $n_1 = 2x - 1$. Portanto no intervalo $[1, 2x - 2]$ existem exatamente $2x - 3$ pulos simples consecutivos, logo existem no mínimo $x - 2$ pulos simples diferentes dos anteriormente definidos. Como já tínhamos $2r - x + 1$ pulos simples ficamos então com $(2r - x + 1) + (x - 2) = 2r - 1 = S$, que são todos os pulos simples de H. Consequentemente temos exatamente $x - 1$ pulos simples, no intervalo $[1, 2x - 2]$, da forma $(6r - 2x - 1 - n, 6r - 2x - n)$, com $n \in H \cap [0, 6r - 2x - 2]$, que são explicitamente $(1, 2), (3, 4), ..., (2x - 3, 2x - 2)$. Portanto $6r - 4x + 2, 6r - 4x + 4, ..., 6r - 2x - 4, 6r - 2x - 2 \in H$.

O intervalo $[2x - 1, 6r - 4x + 1]$ tem $3(2r - 2x + 1) \neq 0$ inteiros e contém $2r - x - (x - 1) = 2r - 2x + 1$ não-lacunas. Para cada tal não-lacuna n temos então $2r - 2x + 1$ pulos simples $(6r - 2x - 1 - n, 6r - 2x - n)$ que também estão no intervalo $[2x - 1, 6r - 4x + 1]$ e são todos nessas condições. Portanto, como o semigrupo é esparso, as não-lacunas em $[2x - 1, 6r - 4x + 1]$são exatamente os inteiros congruentes a $2x - 1 (mod 3)$. Em particular $2x + 2 \in H$ e daí temos $(2x + 2) + (6r - 2x + 4) = 6r - 2 = l_g$. Assim, em qualquer caso, temos uma contradição e portanto $6r - 5$ é uma lacuna de H. Logo, pelo lema 3.2.1 $3 \in H$ e como H é esparso $(S = D)$ então todo número menor ou igual à $l_g = 2g - 2r = 6r - 2$ que não é múltiplo de 3 é uma lacuna de H, portanto $H = 3\mathbb{N} + H_{6r-2}$

□

Já que sabemos exatamente como é um semigrupo limite esparso com número de Frobenius estamos aptos a obter outra particularidade: que tais semigrupos também são semigrupos Arf.

Corolário 3.2.3. *Seja H um semigrupo esparso limite com número de Frobenius par $l_g = 2g - 2r = 6r - 2$. Então H é um semigrupo Arf.*

Demonstração. Pelo teorema 3.2.2 temos que $H = 3\mathbb{N} + H_{6r-2}$. Sejam $n_i, n_j \in H;\ n_i \geq n_j$. Se $n_i > 6r - 2$ então $2n_i - n_j > 6r - 2$ e logo $2n_i - n_j \in H$. Se $n_i < 6r - 2$ então $n_i, n_j \in 3\mathbb{N}$, $2n_i - n_j \in 3\mathbb{N} \in H$, e logo em todas as possibilidades $2n_i - n_j \in H$ portanto H é um semigrupo Arf.

□

Com estas informações podemos calcular uma boa cota para o gênero dos semigrupos esparsos com numero de Frobenius par, o que é uma melhoria significativa à cota demonstrada por Munuera, Torres e Villanueva ($g \leq 6r - n_1$ se $g \geq 4r - 1$ [2, teorema 3.1]). Esta cota também ressalta que, para números de Frobenius pares, os semigrupos esparsos limites são os semigrupos cujo gênero é o maior possível para o seu número de Frobenius.

Corolário 3.2.4. *Seja H um semigrupo esparso com número de Frobenius par $l_g = 2g - 2r$ e gênero g, então $g \leq 4r - 1 = 2k - 1$.*

Demonstração. Vamos supor, por contradição, que $g = 4r + j, j \geq 0$. Pelo lema 2.3.2 existe um semigrupo esparso $\tilde{H}$ de gênero $\tilde{g} = 2k - 1 = 4r - 1$ e $l_{\tilde{g}} = 2\tilde{g} - k = 3k - 2 = 6r - 2$ tal que H é um subsemigrupo de $\tilde{H}$. Como $\tilde{g} = 2k - 1$ então $\tilde{H}$ é um semigrupo limite, portanto utilizando o teorema 3.2.2 concluímos que $\tilde{H} = 3\mathbb{N} + H_{6r-2}$. Como vimos na prova do lema 2.3.2 temos que $\tilde{H} = H \cup \{l_{4r}, l_{4r+1}, ..., l_g\}$, pela proposição 2.3.1, $l_{i+1} - l_i = 2$, $i \geq 4r - 2$. Em particular $3 \in H$ e, daí, $6r \in H$ o que é uma contradição pois $6r = l_{g-j} = l_{4r}$, logo $g \leq 4r - 1$.

□

Este resultado da uma boa cota para o gênero de semigrupos esparsos com número de Frobenius par. Pelo teorema 3.2.2 sabemos que exite um semigrupo esparso com o valor máximo desta cota para cada número de Frobenius par, que é um semigrupo esparso limite, mostrando que este limite não pode ser reduzido mais.

3.3 Semigrupos Esparsos com número de Frobenius ímpar

Agora vamos analisar os semigrupos esparsos limites com número de Frobenius ímpares. Esta análise é mais complicada que aquela feita para os semigrupos esparsos com o número de Frobenius par. Neste caso temos que não existe somente um tipo de tal semigrupo. Mas mesmo assim conseguimos provar que os semigrupos esparsos limite são de fato: são os semigrupos que possuem o maior valor de gênero para o seu número de Frobenius.

Iremos começar mostrando as características dos semigrupos limite para cada $r \in \mathbb{N}$ com número de Frobenius ímpar separando pela paridade da multiplicidade n_1 do semigrupo.

Teorema 3.3.1. *Seja H um semigrupo esparso limite com gênero g e número de Frobenius ímpar $l_g = 2g - (2r+1) = 6r+1$. Se a multiplicidade n_1 de H é par, então cada não-lacuna menor que l_g é par, e H é r-hiperelíptico.*

Demonstração. Nestas condições temos que $k = 2r+1$ e $S = D = k-1 = 2r$. O intervalo $[l_g - n_1 + 1, l_g]$ contém um sistema completo de resíduos módulo n_1. Suponha que existe alguma não-lacuna ímpar menor que l_g e seja $\tilde{n}$ a maior delas. Assim,considerando que n_1 é par e que H é esparso, $l_g - n_1 < \tilde{n} < l_g$ e $\tilde{n}+1$ e $\tilde{n}+2$ são lacunas (um pulo simples). No intervalo $[l_g - n_1 + 1, l_g]$. Portanto o número de não-lacunas neste intervalo é menor do que $n_1/2$. Daí a quantidade de não-lacunas no intervalo $[1, l_g - n_1]$ é, no mínimo, $2r + 1 - (n_1/2)$. Seja $T = \{n \in H/0 \leq n < l_g - n_1\}$. Logo para cada $n \in T$ temos que $(\tilde{n}+1-n, \tilde{n}+2-n)$ é um pulo simples, e assim temos no mínimo $2r + 2 - (n_1/2)$ pulos simples desta forma. Mas no intervalo $[1, n_1 - 1]$ existem pelo menos $(n_1/2) - 1$ pulos simples diferentes dos anteriores. Logo temos no total $[(n_1/2) - 1] + [2r + 2 - (n_1/2)] = 2r + 1$ pulos simples, o que é uma contradição pois $S = 2r$. Portanto toda não-lacuna menor que l_g é par. Então todos os números ímpares menores que l_g são lacunas, totalizando $3r+1$ lacunas ímpares. Consequentemente H possui $g - (3r+1) = 4r + 1 - 3r - 1 = r$ lacunas pares e portanto H é r-hiperelíptico. □

Para valores ímpares da multiplicidade n_1, e número de Frobenius também ímpar, é possível mostrar que os semigrupos limites são de duas possíveis formas, um resultado melhor ainda que o anterior, para multiplicidades pares.

Teorema 3.3.2. *Seja H um semigrupo esparso limite de gênero g com número de Frobenius ímpar $l_g = 2g - (2r+1) = 6r+1$. Se a multiplicidade n_1 de H é ímpar, então H é um dos seguintes:*

1. $H = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$.

2. $H = \langle 2j+1/j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r-1 \rangle \cup H_{6r+1}$, $r > 1$.

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso limite com número de Frobenius ímpar $l_g = 2g-(2r+1) = 6r+1$ e multiplicidade n_1 também ímpar. Logo $k = 2r+1$ e $S = D = k-1 = 2r$. Como $g = 4r+1 = 2k-1$, pela proposição 2.3.1, temos que $l_g - l_{g-1} = 2$ e daí $l_{g-1} = 6r-1$. Vamos considerar dois casos.

1) $6r-2 \notin H$. Pelo lema 3.1.3 existem $S-1 = 2r-1$ não-lacunas no intervalo $[1, 6r-2]$, Seja $T = \{n \in H/0 \leq n < 6r-2\}$. Para cada $n \in T$ o par $(6r-2-n, 6r-1-n)$ é um pulo simples, e assim temos no mínimo $2r$ pulos simples desta forma, o que totaliza todos os pulos simples de H. Além disto eles são disjuntos pois H é esparso. Como $(1,2)$ é um dos pulos simples disjuntos, como mostrado anteriormente, temos que $3 \in H$ e portanto $H = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$.

2) $6r-2 \in H$. neste caso $6r-3 \notin H$ pois H é esparso. Seja $x \geq 2$ tal que o par $6r-2x, 6r-2x+1)$ seja o maior pulo simples de H. Logo no intervalo $[6r-2x+1, 6r+1]$ todos os números ímpares são lacunas e todos os pares são não-lacunas, totalizando x não-lacunas. Se $n_1 < 2x+1$ então $6r+1-n_1$ seria uma lacuna par (pois n_1 é ímpar) e $6r+1-n_1 \in [6r-2x+1, l_g = 6r+1]$, o que é uma contradição pois toda lacuna neste intervalo é ímpar. Consequentemente $n_1 \geq 2x+1$. Todos os números no intervalo $[1, 2, ..., n_1 - 1]$ são lacunas, logo pelo lema 3.1.3 temos $S - x = 2r - x$ não-lacunas no intervalo $[n_1, ..., 6r-2x]$. Seja $V = \{n \in H/0 \leq n < 6r-2x\}$. Para cada $n \in V$ $(6r-2x-n, 6r-2x+1-n)$ é um pulo simples e esses são ao todo $2r-x+1$ pulos simples desta forma. Além disto eles são disjuntos (pois H é esparso), portanto no intervalo $[1, 2, ..., n_1-1]$ existem pelo menos $[(n_1-1)/2]-1$ pulos simples diferentes dos anteriormente mencionados, totalizando $[(n_1-1)/2]-1+(2r-x+1)$ pulos simples, mas $[(n_1-1)/2]-1+(2r-x+1) \leq S = 2r$. Portanto devemos ter $n_1 = 2x+1$ e assim identificamos todos os pulos simples de H. Como temos exatamente $[(n_1-1)/2]-1 = x-1$ pulos simples no intervalo $[1, 2, ..., 2x]$ que não são da forma $(6r-2x-n, 6r-2x+1-n)$ então restam x pulos simples que são: $(1,2), (3,4), ..., (2x-1, 2x)$. Então $6r-2x-1, 6r-2x-3, ..., 6r-4x+1 \in H$ e como H é esparso $6r-2x-2, 6r-2x-4, ..., 6r-4x \notin H$. O intervalo $[2x+1, 6r-4x]$ contém $6(r-x)$ inteiros e $(2r-x)-x = 2r-2x$ não-lacunas. Para cada uma destas não-lacunas $m \in H \cap [2x+1, 6r-4x]$ os pulos simples $(6r-2x-m, 6r-2x+1-m)$ pertencem ao intervalo $[2x+1, 6r-4x]$, o que forma $2r-2x$ pulos simples e mais $6(r-x)+2-2(2r-2x) = 2r-2x$ inteiros diferentes destes. Portanto todos os inteiros que não são da forma $6r-2x-m$ ou $6r-2x+1-m$ no intervalo $[2x+1, 6r-4x]$ são não-lacunas. Como H é esparso, então

os pulos simples da forma $(6r - 2x - m, 6r - 2x + 1 - m)$ são disjuntos, as não-lacunas do intervalo $[2x+1, 6r-4x]$ são $\{2x+1, 2x+4, 2x+7, ...\} \cap [2x+1, 6r-4x]$. Mas se $2x+4 \in H$, então $(6r - 2x - 3) + (2x + 4) = 6r + 1 = l_g \in H$ o que é falso, logo $2x + 4 \notin H$ e daí $2x + 4 \notin [2x+1, 6r-4x]$. Consequentemente $6r - 4x < 2x + 4$, ou seja, $r - x < 2/3$. Como r e x são inteiros e $r \geq x$ então $r = x$. Com isto temos que $6r - 2x - 1 = 4r - 1, 6r - 2x - 3 = 4r - 3, ..., 6r - 4x + 1 = 2r + 1 \in H$ e $6r - 2x - 2 = 4r - 2, 6r - 2x - 4, ..., 6r - 4x = 2r \notin H$. No intervalo $[6r - 2x + 1 = 4r + 1, l_g = 6r + 1]$ todos os números ímpares são lacunas e todos os pares são não-lacunas, então $H = \{0\} \cup \{4r-1, 4r-3, ..., 2r+1\} \cup \{4r+2, 4r+4, ..., 6r\} \cup H_{6r+1}$ que é o seguinte semigrupo: $H = \langle 2j + 1/j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle \cup H_{6r+1}$.

□

Observação 3.3.3. *Os semigrupos de forma $H = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$ são claramente Arf, mas os semigrupos da forma $H = \langle 2j + 1/j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle + H_{6r+1}$ com $r > 1$ não são Arf, pois $4r - 3, 4r - 1 \in H$ mas $2(4r - 1) - (4r - 3) = 4r + 1 \notin H$.*

Agora iremos complementar o corolário 3.2.4, encontrando uma cota para o gênero dos semigrupos esparsos na maior parte dos casos remanescentes, que são os casos aonde o número de Frobenius é impar, sobrando somente um tipo de semigrupo esparso não seguindo esta cota.

Corolário 3.3.4. *Seja H um semigrupo esparso com gênero g e número de Frobenius $l_g = 2g - (2r + 1)$. Então $g \leq 4r + 1 = 2k - 1$ ou todas as não-lacunas menores que l_g de H são pares.*

Demonstração. Vamos supor, por contradição, que H é semigrupo esparso com gênero $g = 4r + i$, $i \geq 2$ e com número de Frobenius $l_g = 2g - (2r + 1) = 6r + 2i - 1$. Pela proposição 2.3.1 temos que $l_{g-1} = 6r - 3 + 2i$, $l_{g-2} = 6r - 5 + 2i$, ..., $l_{g-i=4r} = 6r - 1$. Já pelo lema 2.3.2 existe um semigrupo esparso $\tilde{H} = H \cup \{l_{g-i-2}, l_{g-i-1}, ..., l_g\}$ de gênero $\tilde{g} = 2k - 1 = 4r + 1$ e $l_{\tilde{g}} = 2\tilde{g} - k = 6r + 1$ tal que H é um subsemigrupo de $\tilde{H}$. Vamos supor que a multiplicidade de $\tilde{H}$, $\tilde{n}_1$, é ímpar. Então pelo teorema 3.3.2 temos que $\tilde{H} = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$ ou $\tilde{H} = \langle 2j + 1/j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle \cup H_{6r+1}$, $r > 1$.

Possibilidade 1: $\tilde{H} = \langle 2j + 1/j \in \mathbb{N}, r \leq j \leq 2r - 1 \rangle \cup H_{6r+1}$, $r > 1$, então $2r + 1 \in \tilde{H}$, mas $2r + 1 \notin H$ pois $3(2r + 1) = l_{g-i=4r} \notin H$, logo $2r + 1 > l_{g-i-2=4r-2}$ então $2r + 3 > l_{g-i-1=4r-1}$ e $2r + 5 > l_{g-i-1=4r} = 6r - 1$, ou seja, $4r < 6$ consequentemente $r = 1$, contradição.

Possibilidade 2: $\tilde{H} = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$, então $3 \in \tilde{H}$, mas $3 \notin H$ pois $3(2r+1) = l_{g-i=4r} \notin H$, logo $3 > l_{g-i-2=4r-2}$ então $6 > l_{g-i-1=4r-1}$ e $9 > l_{g-i-1=4r} = 6r - 1$, ou seja, $6r < 10$. Como r é um inteiro positivo maior que 1 então $r = 1$. Logo $3(2r+1) = 9 = l_{g-i=4r=4} \notin H$, consequentemente $l_1 = 1$ e $l_4 = 9 = l_1 + 8$, absurdo pois H é esparso.

Com isto a multiplicidade de $\tilde{H}$, $\tilde{n}_1$ só pode ser par, logo pelo teorema 3.3.1 toda não-lacuna de $\tilde{H}$ (logo de H também, pois H é subsemigrupo de $\tilde{H}$) menor que $l_{\tilde{g}} = 6r + 1$ é par, e todos os números ímpares maiores que $l_{\tilde{g}} = 6r + 1$ e menores que $l_g = 6r - 1 + 2i$ são lacunas de H (demonstrado pela preposição 2.3.1 anteriormente), portanto toda não-lacuna menor que $l_g = 6r - 1 + 2i$ de H é par. □

O teorema a seguir é a junção dos corolários 3.2.4 e 3.3.4, que nos dá o limite para o gênero da maioria dos semigrupos, e mostra a estrutura dos semigrupos que podem passar deste limite.

Teorema 3.3.5. *Seja H um semigrupo esparso com gênero g e número de Frobenius $l_g = 2g-k$. Então $g \leq 2k - 1$ ou l_g é ímpar e todas as não-lacunas de H menores que l_g são pares.*

Demonstração. Seja H um semigrupo esparso com gênero g e número de Frobenius $l_g = 2g-k$. Caso k seja par então $k = 2r, r \in \mathbb{N}$, e usando o corolário 3.2.4 temos que $g \leq 2k - 1$. Caso k seja ímpar então $k = 2r + 1, r \in \mathbb{N}$, e temos $g \leq 2k - 1$ ou então todas as não-lacunas menores que l_g são pares.

□

Tendo classificado e encontrado limites de semigrupos esparsos é natural se perguntar se estes semigrupos seriam também semigrupos de Weierstrass, que são semigrupos formados pelos polos de funções regulares em um ponto de uma curva algébrica não-singular como demonstrado por CONTIERO *et.al.* (2015). De fato vários semigrupos esparsos são semigrupo de Weierstrass, por exemplo todos os semigrupos esparsos limites de número de Frobenius par são ([1], Corolário 4.1), e os semigrupos esparsos da forma $H = 3\mathbb{N} + H_{6r+1}$ (como um dos casos do teorema 3.3.2 onde a multiplicidade é ímpar) também são ([1], Teorema 3.8). Só com estes exemplos podemos perceber como os semigrupos esparsos, inclusive propriedades deles como a sua paridade do número de Frobenius e serem semigrupos esparsos limites, são importantes no estudo de semigrupos de Weierstrass.

Capítulo 4

SEMIGRUPOS κ-ESPARSOS

Neste Capítulo mostraremos o conceito e algumas propriedades dos Semigrupos κ-esparsos, que são semigrupos onde duas lacunas seguidas, ou seja um pulo, é menor ou igual a κ. Começaremos estudando os pulos dos semigrupos hiperelípticos e esparsos para melhor entender os semigrupos κ-esparsos. Na segunda seção começaremos definindo formalmente o que são semigrupos κ-esparsos e κ-esparsos puros, daremos ideia de quão abrangente estes semigrupos podem ser, mostrando que para um valor de κ suficientemente grande qualquer semigrupo é um semigrupo κ-esparso. Mostraremos também algumas equivalências interessantes sobre o fato de um semigrupo ser κ-esparso, e, por último, uma forma de assegurar que um semigrupo κ-esparso é puro. A última seção será dedicada ao conjunto dos semigrupos κ-esparsos, onde demonstraremos algumas de suas características, destacando a abrangência deste conjunto com relação aos conjuntos de outros semigrupos numéricos mais conhecidos, como o conjunto dos semigrupos Arf, dos semigrupos esparsos e de todos os semigrupos numéricos.

4.1 O conjunto das lacunas de um Semigrupo

Antes de definir e trabalhar com semigrupos κ-esparsos, precisamos aprofundar um pouco no estudo do *conjunto dos pulos* de um semigrupo. Na definição a seguir formalizaremos este conceito e definiremos uma classe de conjuntos, contidos no conjunto dos pulos, que divide o conjunto dos pulos com base no tamanho do pulo.

Definição 4.1.1. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 1$, $\mathbb{N}\backslash H = \{1 = l_1 < l_2 < ... < l_g\}$ o conjunto de lacunas de H e $m > 0$. Estabeleceremos as seguintes notações:*

1. $\Gamma = \Gamma(H) = \{(l_{i-1}, l_i)/2 \leq i \leq g\}$.

2. $\Gamma_m = \Gamma_m(H) = \{(l_{i-1}, l_i)/l_i - l_{i-1} = m, 2 \leq i \leq g\}$.

3. $\gamma_m = \gamma_m(H) = \#\Gamma_m(H)$.

Para efeito de simplificação consideraremos $\Gamma_0 = \Gamma_m(\mathbb{N}) = \Gamma(\mathbb{N}) = \Gamma_m(H_1) = \Gamma(H_1) = \emptyset$*, o conjunto vazio.*

Pela definição destes conjuntos logo percebemos que o conjunto $\Gamma(H)$ e formado pela união dos conjuntos $\Gamma_m(H)$, ou seja:

$\Gamma(H) = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \Gamma_m(H)$.

Como temos uma quantidade finita de lacunas em um semigrupo então para cada inteiro m Suficientemente grande temos $\Gamma_m(H) = \emptyset$. Logo o conjunto $\Gamma(H)$ é uma união finita de conjuntos não vazios mutualmente disjuntos, e:

$\sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m = g - 1$.

Como a diferença das lacunas de cada pulo de $\Gamma_m(H)$ é m, e temos γ_m destes pulos, podemos realizar uma contagem de todos estes pulos para encontrarmos o valor do número de Frobenius de H. Utilizando isto podemos expressar o valor do número de Frobenius com base nos valores de γ_m:

$l_g = \sum\limits_{m \in \mathbb{N}} m\gamma_m + 1$.

A seguir provaremos um teorema técnico que é uma caracterização dos *semigrupos hiperelípticos*, com relação a suas lacunas, que será útil para provar resultados mais a frente.

Teorema 4.1.2. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 1$ então:*

1. *H é hiperelíptico* $\Leftrightarrow l_i = 2i - 1,\ 1 \leq i \leq g$.

2. *H é não-hiperelíptico* $\Leftrightarrow l_i \leq 2i - 2,\ 1 < i < g$ *e* $l_g \leq 2g - 1$.

Demonstração. Seja l_j uma lacuna qualquer de H, então $n_0 < n_1 < ... < n_{l_j - j}$ São não-lacunas menores que l_j. Logo os inteiros positivos $l_j - n_0 > l_j - n_1 > ... > l_j - n_{l_j - j}$ são lacunas de H, contidas no intervalo $[1, l_j]$. Como o numero de lacunas do tipo mostrado anteriormente, $l_j - n_0 > l_j - n_1 > ... > l_j - n_{l_j - j}$, é no máximo j, pois todas elas são todas menores ou iguais a l_j e l_j é a j-ésima lacuna de H, então $1 + l_j - j \leq j$, ou seja, $l_j \leq 2j - 1$. Além disto se vale a igualdade então cada par $(l_j - r, r)$, com $0 \leq r \leq l_j$ é formado por uma lacuna e uma não lacuna.

1) $\Rightarrow$ Se H é hiperelíptico, ou seja $n_1 = 2$, então $2\mathbb{N} \subset H$. Seja n a primeira não-lacuna impar de H, como $2\mathbb{N} \subset H$, então todo numero impar maior que n também é uma não lacuna

de H, em particular todo inteiro maior que $n-2$ é uma não-lacuna de H. Logo pela observação acima segue que $l_i = 2i-1$, $1 \leq i \leq g$.

1) $\Leftarrow$ Seja $l_i = 2i-1$ $1 \leq i \leq g$, que representa todas as lacunas de H. Então 2 não é uma lacuna de H, logo H é hiperelíptico.

2) $\Leftarrow$ Seja $l_i \leq 2i-2 \forall i \in \mathbb{N}, 1 < i < g$, e $g > 1$, então $l_2 \leq 4-2 = 2$, logo $l_2 = 2$, pois $l_1 = 1$, então H não é hiperelíptico.

2) $\Rightarrow$ Seja H não-hiperelíptico, pela afirmação inicial só precisamos mostrar que se $l_i = 2i-1$ então $i = g$. Por contradição vamos afirmar que $l_i = 2i-1$, $2 < i < g$. Pela observação inicial sabemos que cada par $(l_i - r, r)$, com $0 \leq r \leq l_i$ é formado por uma lacuna e uma não-lacuna. Também utilizando a observação inicial temos que $l_{i+1} = 2i$ ou $l_{i+1} = 2i+1$. Caso $l_{i+1} = 2i+1$ então, como $l_{i+1} - l_i = 2$, $(l_{i+1} - l_i, l_i)$ teria duas lacunas, contradição. Logo $l_{i+1} = 2i$. Como $(l_i - i, i)$ contem uma não-lacuna e uma lacuna, e $l_{i+1} = 2i$, então $l_i - i = i-1$ é uma não-lacuna e i uma lacuna. Como i uma lacuna pela mesma observação chegamos que $i+1$ é uma não-lacuna, logo $l_{i+1} = 2i = (i-1)+(i+1)$ é uma não-lacuna, contradição. $\square$

Agora, utilizando o teorema acima, iremos analisar as propriedades dos semigrupos hiperelípticos e não-hiperelípticos. Mostraremos o efeito que a propriedade de ser hiperelíptico ou não tem no conjunto de pulos destes semigrupos.

Corolário 4.1.3. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 1$. Então:*

1. *H é hiperelíptico $\Leftrightarrow \gamma_1 = 0$.*
2. *H é hiperelíptico $\Rightarrow \gamma_2 = g-1$ e $\gamma_m = 0$, $m \neq 2$ (em particular, H é esparso).*
3. *H não é hiperelíptico $\Leftrightarrow \gamma_1 \neq 0$.*
4. *H não é hiperelíptico $\Rightarrow \gamma_{g+m} = 0$, $m > 0$, $\gamma_g \leq 1$ e $\gamma_{g-1} \leq 1$.*

Demonstração. (1) $\Leftarrow$ Seja H um semigrupo tal que $\gamma_1 = 0$, então $(1,2)$ não é um pulo de H, e como $1 \notin H$ então $2 \in H$, ou seja, H é hiperelíptico.

(1) $\Rightarrow$ Seja H um semigrupo hiperelíptico, pelo teorema 4.1.2 (1) $l_i = 2i-1$ para cada $1 \leq i \leq g$ então $l_i - l_{i-1} = 2i-1-(2(i-1)-1) = 2$, ou seja todo pulo de H é um pulo duplo logo $\Gamma_2 = \Gamma$ e $\Gamma_m = \emptyset$ para cada $m \neq 2$ ou seja $\gamma_1 = 0$ e $\gamma_2 = g-1$.

(2) Provado no item (1) $\Rightarrow$.

(3) Segue diretamente de (1).

(4) Seja H um semigrupo não-hiperelíptico, ou seja $l_2 = 2$. Então pelo teorema 4.1.2 (2) $l_i \leq 2i-2$, $1 < i < g$, e $l_g \leq 2g-1$. Como $l_i \geq i$ então $l_j - l_{j-1} \leq (2j-2)-(j-1) = j-1 \leq g-2$, $1 < j < g$. Como $l_g \leq 2g-1$ então $l_g - l_{g-1} \leq (2g-1)-(g-1) = g$, logo não temos nenhum pulo maior que g. Então $\gamma_{g+m} = 0$, $m > 0$, $\gamma_g \leq 1$ e $\gamma_{g-1} \leq 1$. □

Agora iremos analisar as propriedades do conjunto dos pulos de um semigrupo esparso.

Teorema 4.1.4. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 0$ então:*

1. *H é esparso $\Leftrightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = g - 1$.*

2. *H é esparso $\Leftrightarrow \gamma_1 = k - 1$, $\gamma_2 = g - k$, $k > 0$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ Seja H um semigrupo esparso, sabemos que $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m = g-1$ e $\Gamma_m(H) = \emptyset$, $m > 2$. Logo $\gamma_1 + \gamma_2 = g - 1$.

(1) $\Leftarrow$ Seja H um semigrupo tal que $\gamma_1 + \gamma_2 = g - 1$. Como $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m = g - 1$, logo $\gamma_m = \emptyset$, $m > 2$. Logo H é esparso.

(2) $\Rightarrow$ está provado na observação 2.2.2.

(2) $\Leftarrow$ Seja H um semigrupo tal que $\gamma_1 = k - 1$, $\gamma_2 = g - k$, $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$ então $\gamma 1 + \gamma 2 = (k-1) + (g-k) = g - 1$ logo pelo item (1) H é esparso.

□

4.2 Semigrupos κ-Esparsos

Um semigrupo *κ-esparso* é um semigrupo numérico onde a diferença entre duas lacunas sucessivas é menor ou igual a κ, o que é uma generalização dos semigrupos esparsos. Em particular os semigrupos esparsos são semigrupos 2-esparsos. A seguir daremos uma definição equivalente aos semigrupos κ-esparsos que será utilizada na demonstração de algumas de suas propriedades.

Definição 4.2.1. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 0$, então H é um semigrupo κ-esparso, $\kappa \in \mathbb{N}$ e $\kappa > 0$, se:*

$$\sum_{m=1}^{\kappa} \gamma_m = g - 1.$$

Para efeito de simplificação consideraremos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \backslash \{1\}$ semigrupos κ-esparsos, para todo $\kappa \geq 0$, sendo que estes serão considerados os únicos semigrupos 0-esparsos.

Note que $\sum_{m>k} \gamma_m = 0$, pois todos os pulos tem tamanho menor que κ. Utilizando desta informação podemos encontrar uma boa expressão para o valor do numero de Frobenius de um semigrupo κ-esparso:

$l_g = \sum_{m=1}^{\kappa} (m\gamma_m) + 1$

No exemplo a seguir, a partir dos semigrupos tratados no exemplo 2.1.1, classificaremos os semigrupos de gênero menor que 5 como semigrupos κ-esparsos.

Exemplo 4.2.2. *A seguir listamos os conjuntos de lacunas de todos os semigrupos numéricos de gênero menor que 5 classificados como κ-esparsos:*

1. $\kappa = 0$: $\emptyset$ *e* $\{1\}$.

2. $\kappa = 1$: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ *e* $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. $\kappa = 2$: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$ *e* $\{1, 3, 5, 7\}$.

4. $\kappa = 3$: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$ *e* $\{1, 2, 4, 7\}$.

5. $\kappa \geq 4$: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 2, 4, 7\}$ *e* $\{1, 2, 3, 7\}$.

É importante notar que o valor de γ_κ não é necessariamente maior que zero, o que é fácil de notar, por exemplo semigrupo κ-esparsos também é κ+1-esparso. Para evidenciar os semigrupos κ-esparsos que possuem $\gamma_\kappa > 0$, definiremos a seguir os semigrupos *κ-esparsos puros.*

Definição 4.2.3. *Seja H um semigrupo κ-esparso. Então H é um semigrupo κ-esparso puro se $\gamma_\kappa > 0$. Para efeito de simplificação consideraremos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ semigrupos 0-esparsos puros.*

Uma interessante propriedade dos semigrupos κ-esparsos puros é que estes semigrupos não são α-esparsos para qualquer $\alpha < \kappa$.

A partir dos semigrupos tratados no exemplo anterior, classificaremos os semigrupos de gênero menor que 5 como semigrupos κ-esparso puros no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2.4. *O semigrupo esparso ordinário $H_g = \{0, g+1, g+2, ...\}$ $g > 1$ é claramente 1-esparso puro. De fato todo semigrupo 1-esparso puro é um semigrupo esparso ordinário.*

A seguir listamos os conjuntos de lacunas de todos os semigrupos numéricos de gênero menor que 5, classificados como κ-esparso puros:

1. $\kappa = 0$: $\emptyset$ e $\{1\}$.

2. $\kappa = 1$: $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$.

3. $\kappa = 2$: $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$ e $\{1, 3, 5, 7\}$.

4. $\kappa = 3$: $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$ e $\{1, 2, 4, 7\}$.

5. $\kappa = 4$: $\{1, 2, 3, 7\}$.

É importante observar que qualquer semigrupo numérico é um semigrupo κ-esparso para um valor de κ suficientemente grande. De fato na observação a seguir iremos mostrar que todo semigrupo de gênero g é no mínimo um semigrupo g-esparso.

Observação 4.2.5. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 1$ então:*

1. *H é hiperelíptico $\Rightarrow$ H é 2-esparso. Em particular H é 2-esparso puro.*

2. *H é não-hiperelíptico $\Rightarrow$ H é g-esparso.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ Seja H hiperelíptico. Logo pelo corolário 4.1.3 (2) $\gamma_2 = g - 1$ e $\gamma_m = 0$, $m \neq 2$. Daí $\sum_{m=1}^{2} \gamma_m = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 = g - 1$ e H é 2-esparso.

(2) $\Rightarrow$ Seja H não-hiperelíptico. Logo pelo corolário 4.1.3 (4) $\gamma_{g+m} = 0$, $m > 0$. Portanto $\sum_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m = \sum_{m=1}^{g} \gamma_m = g - 1$ e H é g-esparso.

$\square$

Esta informação mostra a abrangência dos semigrupos κ-esparsos, pois qualquer semigrupo numérico pode ser definido como um semigrupo κ-esparso, e o valor de κ nem precisa ser tão grande para que isto seja verdade, sendo igual ao gênero já é o bastante.

No teorema a seguir mostraremos algumas propriedades equivalentes a um semigrupo ser κ-esparso.

Teorema 4.2.6. *Seja $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 1$ e H um semigrupo de gênero $g > 1$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *H é um semigrupo κ-esparso.*

2. $l_i - l_{i-1} \leq \kappa$, $2 \leq i \leq g$.

3. $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} \geq \kappa$, $1 \leq i \leq l_g - g - \kappa + 3$.

4. Seja $i \in \mathbb{N}$ tal que n_i, n_i+1, ..., $n_i+\kappa-1 \in H \Rightarrow n_i > l_g$ (e também $i > l_g - g$).

Demonstração. A prova será feita na ordem (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja H um semigrupo κ-esparso, vamos supor que $\exists\ i \in \mathbb{N}\ 2 \leq i \leq g$ tal que $l_i - l_{i-1} = \kappa + x > \kappa$, logo $\gamma_{\kappa+x} > 0$, contradição pois $\sum\limits_{m>k} \gamma_m = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja H um semigrupo tal que $l_j - l_{j-1} \leq \kappa\ \forall\ j \in \mathbb{N}\ 2 \leq j \leq g$. Vamos supor que exista $i \in \mathbb{N}\ 1 \leq i \leq l_g - g - \kappa + 3$ tal que $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} = \kappa - x$ com $x \in \mathbb{N}\ x > 0$. Como existem $(i+\kappa-2)-(i-1)-1 = \kappa-2$ elementos $\in H$ diferentes entre si entre $n_{i+\kappa-2}$ e n_{i-1} então $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} \geq (\kappa-2)+1 = \kappa-1$ logo $x \leq 1$ mas como $x > 0$ então $x = 1$. Como $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} = \kappa - 1$ existem $(kappa-1)-1 = \kappa-2$ elementos diferentes entre si entre $n_{i+\kappa-2}$ e n_{i-1} e $\kappa - 2$, todos os elementos, $\in H$, logo não existe lacuna entre $n_{i+\kappa-2}$ e n_{i-1}.

Caso 1 $[i = 1]$: logo $n_{i-1} = n_0 = 0$ e $n_{i+\kappa-2} = n_{\kappa-1} > 1$ pois $\kappa > 1$ e $g > 1$ logo a lacuna $l_1 = 1$ está entre $n_{i+\kappa-2}$ e n_{i-1}, contradição.

Caso 2 $[i > 1$ e $l_g < n_{i-1}]$: Como todo número $\in \mathbb{N}$ ou pertence H ou não então $n_{i-1} = g+i-1$ logo $l_g < n_{i-1} = g+i-1$, como $i \leq l_g - g - \kappa + 3 < (g+i-1) - g - \kappa + 3 = i - \kappa + 2$ logo $\kappa < 2$ contradição pois $\kappa > 1$.

Caso 3 $[i > 1$ e $l_g > n_{i+\kappa-2}]$: Como $i > 1$ e $l_g > n_{i+\kappa-2}$ então existe lacunas menores e maiores que $n_{i+\kappa-2}$ e n_{i-1} então, como não existe lacunas entre estes números, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $l_m < n_{1-1}$ e $l_{m+1} > n_{i+\kappa-2}$ logo $l_{m+1} - l_m \geq (n_{i+\kappa-2}+1) - (n_{i-1}-1) = n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} + 2 = \kappa = +1$, contradição.

(3) $\Rightarrow$ (4) Seja H um semigrupo tal que $n_{j+\kappa-2} - n_{j-1} \geq \kappa\ \forall\ j \in \mathbb{N}\ 1 \leq j \leq l_g - g - \kappa + 3$, vamos supor que exista $i \in \mathbb{N}$, $n_{i-1} < l_g$ e n_{i-1}, $n_{i-1}+1$, ..., $n_{i-1}+\kappa-1 \in H$, logo $n_{i-1}+\kappa-1 = n_{i+\kappa-2} < l_g$ então $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} = \kappa - 1 < \kappa$, logo $i > l_g - g - \kappa + 3$, senão $n_{i+\kappa-2} - n_{i-1} \geq \kappa$. Como $i > l_g - g - \kappa + 3$ então $i + \kappa - 2 > l_g - g + 1$ então tem no mínimo $l_g - g + 3$ elementos $\in H$ menores que l_g, como existem g elementos $\in \mathbb{N} \backslash H = \{1 = l_1 < l_2 < ... < l_g\}$ menores ou iguais a l_g então existem $(l_g - g + 3) + g = l_g + 3$ elementos $\in \mathbb{N}$ menores ou iguais que l_g, absurdo.

(4) $\Rightarrow$ (1) seja H tal que $\forall\ i \in \mathbb{N}$ tal que n_i, n_i+1, ..., $n_i+\kappa-1 \in H \Rightarrow n_i > l_g$. Vamos supor que H não seja κ-esparso, ou seja $\sum\limits_{m=1}^{\kappa} \gamma_m < g - 1$, então existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $l_j - lj - 1 = \kappa + x$, $x > 0$, então os elementos $l_{j-1}+1$, $l_{j-1}+2$, ..., $l_{j-1}+\kappa+x-1 = l_j - 1$ $\in H$, vamos chamar $l_{j-1}+1 = n_t$, então n_t, n_t+1, ..., $n_t+\kappa+x-2 = n_{t+\kappa+x-2} \in H$, e $n_{t+\kappa+x-2} \geq n_{t+\kappa-1} = n_t + \kappa - 1$, mas $n_{t+\kappa+x-2} < l_g$, contradição.

□

A seguir apresentaremos um teorema que é a generalização da observação 2.2.2 sobre a contagem dos pulos em um semigrupo esparso, que comparava os números de pulos simples e duplos introduzindo um parâmetro k. Esta abordagem será adaptada para que podermos utiliza-la em semigrupos κ-esparsos.

Teorema 4.2.7. *Seja H um semigrupo de gênero $g > 0$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 1$ e $K = 2g - l_g$, então:*

H é um semigrupo κ-esparso $\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) = 2g - K - 1$ e $\sum_{m=2}^{\kappa}((m-1)\gamma_{m-1}) = g - K$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja H um semigrupo κ-esparso, então sabemos que $l_g = \sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) + 1$ e $\sum_{m=1}^{\kappa}\gamma_m = g - 1$. Como $K = 2g - l_g$ então $l_g = 2g - K$ logo $\sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) + 1 = 2g - K$, ou seja $\sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) = 2g - K - 1$. Como $\sum_{m=1}^{\kappa}((m-1)\gamma_m) = \sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) - \sum_{m=1}^{\kappa}\gamma_m$, temos que $\sum_{m=1}^{\kappa}((m-1)\gamma_m) = (2g - K - 1) - (g - 1) = g - K$.

$\Leftarrow$ Seja H um semigrupo numérico tal que $\sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) = 2g - K - 1$ e $\sum_{m=2}^{\kappa}((m-1)\gamma_{m-1}) = g - K$ com $K = 2g - l_g$, sabemos que $l_g = \sum_{m\in\mathbb{N}}(m\gamma_m) + 1 = \sum_{m=1}^{\kappa}(m\gamma_m) + \sum_{m>\kappa}(m\gamma_m) + 1 = 2g - K + \sum_{m>\kappa}(m\gamma_m)$, mas como $l_g = 2g - K$ então $l_g = 2g - K = 2g - K + \sum_{m>\kappa}(m\gamma_m)$, ou seja $\sum_{m>\kappa}(m\gamma_m) = 0$, logo H é κ-esparso. $\square$

Agora que obtivemos várias propriedades sobre semigrupos κ-esparsos, iremos demonstrar uma condição para que os semigrupos sejam κ-esparsos puros.

Teorema 4.2.8. *Seja H um semigrupo numérico de gênero $g > 0$, e $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 2$ então:*

H é um semigrupo κ-esparso puro $\Leftrightarrow$ H é κ-esparso e existe $i \in \mathbb{N}$ tal que n_i, $n_i + 1$, ..., $n_i + \kappa - 2 \in H$ e $n_i < l_g$.

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja H um semigrupo κ-esparso puro então $\gamma_\kappa > 0$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $l_{j+1} - l_j = \kappa$, logo $l_j + 1$, $l_j + 2$, ..., $l_j + \kappa - 1 \in H$, logo para algum $i \in \mathbb{N}$ $l_j + 1 = n_i$, $l_j + 2 = n_i + 1$, ..., $l_j + \kappa - 1 = n_i + \kappa - 2 \in H$ e $n_i < l_j \leq l_g$.

$\Leftarrow$ Seja H um semigrupo κ-esparso e existe $i \in \mathbb{N}$ tal que n_i, $n_i + 1$, ..., $n_i + \kappa - 2 \in H$ e $n_i < l_g$, lembrando que $n_i + 1 = n_{i+1}$, ..., $n_i + \kappa - 2 = n_{i+\kappa-2}$. Caso $i = 0$ então $n_i = 0$ e como $\kappa > 2$ $n_i + 1 = 1 \in H$, então $g = 0$, contradição. Caso $i > 0$ Pelo teorema 4.2.6 (4) então $n_i + \kappa - 1 \notin H$ senão $n_i > l_g$ o que seria uma contradição, e pelo mesmo argumento $n_i - 1 \notin H$, logo para algum $j \in \mathbb{N}$ $n_i + \kappa - 1 = l_j$ e $n_i - 1 = l_{j-1}$ e $l_j - l_{j-1} = \kappa$, ou seja $\gamma_\kappa > 0$, logo H é um semigrupo κ-esparso puro.

$\square$

4.3 O Conjunto dos semigrupos κ-esparsos

Nesta seção estudaremos os conjuntos formados pelos semigrupos κ-esparsos. Começaremos definindo estes conjuntos e mostrando algumas de suas características. Em seguida demonstraremos algumas propriedades das operações de interseção e união entre estes conjuntos e que são variedades de Frobenius. Por fim será mostrado um diagrama que da uma ideia da abrangência destes conjuntos em comparação com conjuntos mais conhecidos, como o conjunto dos semigrupos Arf, esparsos e o conjunto de todos os semigrupos numéricos.

Definição 4.3.1. *Seja $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 0$, então:*

1. $\Psi_\kappa = \{H \ / \ H$ *é um semigrupo κ-esparso*$\}$

2. $\Psi^*_\kappa = \{H \ / \ H$ *é um semigrupo κ-esparso puro*$\}$

3. $\Psi = \{H \ / \ H$ *é um semigrupo numérico*$\}$

A seguir demonstraremos um lema bem simples que mostra a estrutura do conjunto dos semigrupos κ-esparsos para valores de κ bem pequenos.

Lema 4.3.2. *1.* $\Psi_\kappa = \mathbb{N} \cup \{H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\} \Leftrightarrow \kappa = 1$

2. $\Psi_\kappa = \{H \ / \ H$ *é um semigrupo esparso*$\} \Leftrightarrow \kappa = 2$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ Seja $\Psi_\kappa = \mathbb{N} \cup \{H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$ com $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 0$, caso $\kappa > 1$ então o semigrupo $H = \{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ ...\}$, que possui somente um pulo duplo, $(1, 3)$, pertence a Ψ_κ pois é 2-esparso, contradição, logo $\kappa = 1$.

(1) $\Leftarrow$ Seja H um semigrupo numérico, $H \in \Psi_1$, então H somente possui pulos simples, logo $H \in \{\mathbb{N},\ H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$.

(2) $\Rightarrow$ Seja $\Psi_\kappa = \{\mathbb{N},\ H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$ com $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 0$, pelo item anterior sabemos que $\kappa > 1$ caso $\kappa > 2$ então o semigrupo $H = \{0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ ...\}$, que possui somente um pulo de tamanho 3, $(1, 4)$, pertence a Ψ_κ pois é 3-esparso, contradição pois este semigrupo não é esparso, logo $\kappa = 2$.

(2) $\Leftarrow$ Seja H um semigrupo numérico, $H \in \Psi_2$, então H somente possui pulos simples e duplos, logo H é esparso.

□

Com os conjuntos já bem definidos, é interessante se analisar como eles interagem entre si, como se comparam para valores diferentes de κ, o que a união e interseção deles representa, entre outras coisas. No teorema a seguir demonstraremos algumas destas propriedades.

Teorema 4.3.3. *Seja $\kappa \in \mathbb{N}$ então:*

1. *A sequencia $(\Psi_\kappa)_{\kappa>0}$ é uma cadeia estritamente acendente*

2. $\Psi^*_{\kappa_1} \cap \Psi^*_{\kappa_2} = \{\emptyset\}$*, para cada $\kappa > 0$ e $\kappa_1 \neq \kappa_2$*

3. $\Psi = \bigcup\limits_{\kappa>0} \Psi_\kappa = \biguplus\limits_{\kappa\in\mathbb{N}} \Psi^*_\kappa$

4. $\bigcap\limits_{\kappa>0} \Psi_\kappa = \mathbb{N} \cup \{H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$

Demonstração. (1) Como um conjunto κ-esparso também é um conjunto $\kappa+1$-esparso pela definição, então claramente $\Psi_\kappa \subset \Psi_{\kappa+1}$, e $\Psi_\kappa \neq \Psi_{\kappa+1}$ pois, por exemplo, o semigrupo $H = \{0,\ 2,\ 3,\ ...,\ \kappa+1,\ \kappa+3,\ \kappa+4,\ ...\}$ é κ-esparso puro (possui somente um pulo, $(1, \kappa+2)$, de tamanho $\kappa+1$) portanto ele pertence a $\Psi_{\kappa+1}$ mas não a Ψ_κ.

(2) segue diretamente da definição se semigrupos κ-esparsos puros.

(3) pela observação 4.2.5 sabemos que todo semigrupo é κ-esparso para um valor de κ suficientemente grande, logo $\Psi = \bigcup\limits_{\kappa>0} \Psi_\kappa$, como se um semigrupo é κ-esparso então ele é x-esparso puro para um $x \leq \kappa$ e pelo item anterior $\Psi = \bigcup\limits_{\kappa>0} \Psi_\kappa = \biguplus\limits_{\kappa\in\mathbb{N}} \Psi^*_\kappa$.

(4) pelo item 1 do lema 4.3.2 e deste teorema temos que $\bigcap\limits_{\kappa>0} \Psi_\kappa = \mathbb{N} \cup \{H_n \ / \ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$.

□

Agora que analisamos bem as interações dos conjuntos dos semigrupos κ-esparsos, iremos mostrar uma propriedade sobre a interação entre os semigrupos deste conjunto, que será útil para provarmos um teorema mais a frente.

Lema 4.3.4. *Seja $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 0$ então:*

$H_1,\ H_2 \ \in \ \Psi_\kappa \Rightarrow H_1 \cap H_2 \ \in \ \Psi_\kappa$

Demonstração. Seja $H_1,\ H_2 \ \in \ \Psi_\kappa,\ N_1 = \mathbb{N}\backslash H_1,\ N_2 = \mathbb{N}\backslash H_2$ os conjuntos das lacunas destes semigrupos e $H = H_1 \cap H_2$. Claramente H também é um semigrupo, então $\mathbb{N}\backslash H = \mathbb{N}\backslash(H_1 \cup H_2) = (\mathbb{N}\backslash H_1) \cap (\mathbb{N}\backslash H_2) = N_1 \cap N_2$, como um pulo de um semigrupo é um par ordenado de dois elementos do seu conjunto de lacunas e $N_1 \cap N_2 \subset N_i$, com $i \in \{1,\ 2\}$ então o maior pulo de H (se existir) é menor ou igual ao maior pulo de H_1 e H_2, que são κ-esparsos, logo H é κ-esparso. Caso não exista um pulo H é 1-esparso logo κ-esparso.

□

A seguir definiremos o que são *variedades de Frobenius*, conceito introduzido por J. C. Rosales [6]. Logo em seguida provaremos um teorema mostrando que os conjuntos dos semigrupos κ-esparsos são variedades de Frobenius.

Definição 4.3.5. *Seja Θ uma variedade de Frobenius, então:*

1. $H \in \Theta \Rightarrow H$ *é um semigrupo numérico*

2. $H_1,\ H_2 \in \Theta \Rightarrow H_1 \cap H_2 \in \Theta$

3. $H \in \Theta$, H *tem gênero* $g > 0$ *e número de Frobenius* $l_g \Rightarrow H \cup \{l_g\} \in \Theta$

Teorema 4.3.6. *Seja $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa > 0$ então Ψ_κ é uma variedade de Frobenius.*

Demonstração. A primeira propriedade da definição de variedades de Frobenius vem da definição do Ψ_κ. A segunda propriedade foi provada no Lema 6.3. Seja $H \in \Psi_\kappa$, H tem gênero $g > 0$, número de Frobenius l_g e $N = \mathbb{N} \backslash H_2$ o seu conjuntos das lacunas. Seja $H_1 = H \cup \{l_g\}$, é claro que H_1 é um semigrupo e $\mathbb{N} \backslash H_1 = N \backslash \{l_g\}$, como um pulo de um semigrupo é um par ordenado de dois elementos do seu conjunto de lacunas e $N \backslash \{l_g\} \subset N$, então o maior pulo de H_1 (se existir) é menor ou igual ao maior pulo de H, que é κ-esparso, logo H_1 é κ-esparso também e $H_1 \in \Psi_\kappa$. Caso H_1 não tenha pulos ele é 1-esparso logo $H_1 \in \Psi_\kappa$. $\square$

Agora que já vimos várias propriedades sobre o conjunto dos semigrupos κ-esparsos, iremos visualizar a abrangência deste conjunto com o diagrama mostrado a seguir:

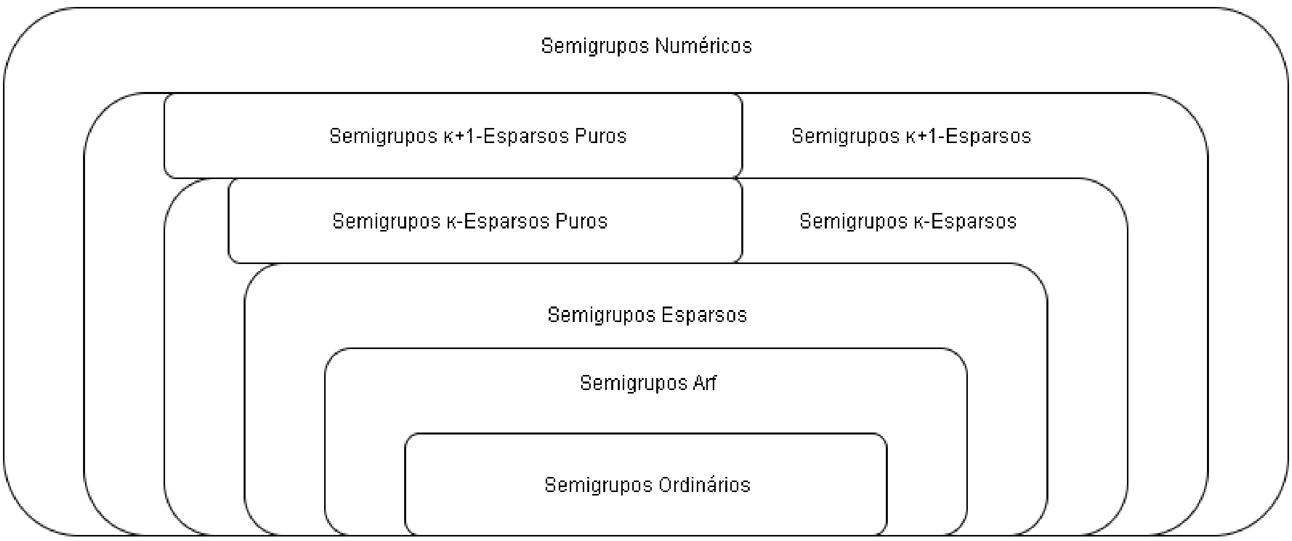

Figura 4.1: Diagrama do conjunto do semigrupos κ-esparsos, $\kappa > 2$.

Referências Bibliográficas

[1] CONTIERO, A; MOREIRA, C; VELOSO, P. **On the structure of numerical sparse semigroups and applications to Weierstrass points**. Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015) 3946–3957.

[2] MUNUERA, C; TORRES, F; VILLANUEVA, J. **Sparse Numerical Semigroups**. Applied algebra, algebraic algorithms and error-correting codes (Tarragona, 2015), Lecture Notes in Comput. Sci. 5527 (Berlin, 2009) 23–31.

[3] OLIVEIRA, G; TORRES, F; VILLANUEVA J. **On the weight of numerical semigroups**. Journal of Pure and Applied Algebra 214 (2010) 1955–1961.

[4] TIZZIOTTI, G; VILLANUEVA J. **On κ-Sparse Numerical Semigroups**. Acesso em 02/07/2017, a ser publicado em Journal of Algebra and its Applications.

[5] BARUCCI, V; DOBBS, D. E; FONTANA, M. **Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains**. Mem. Am. Math. Soc. 125 (1997).

[6] ROSALES, J. C. **Families of numerical semigroups closed under finite intersections and for the Frobenius number**. Houston J. Math. 34 (2008), 339–348.