

Ademir Sartim

# MATEMÁTICA

## BÁSICA VOLUME 2

Ademir Sartim

# **MATEMÁTICA BÁSICA**

## VOLUME 2



**EDUFES**

Vitória, 2021



**Editora Universitária – Edufes**

Filiada à Associação Brasileira  
das Editoras Universitárias (Abeu)

Av. Fernando Ferrari, 514  
Campus de Goiabeiras  
Vitória – ES · Brasil  
CEP 29075-910

+55 (27) 4009-7852  
edufes@ufes.br  
www.edufes.ufes.br

**Reitor**

Paulo Sergio de Paula Vargas

**Vice-reitor**

Roney Pignaton da Silva

**Chefe de Gabinete**

Cláudia Patrocínio Pedroza Canal

**Diretor da Edufes**

Wilberth Salgueiro

**Conselho Editorial**

Carlos Roberto Vallim, Eneida Maria Souza  
Mendonça, Fátima Maria Silva, Graziela Baptista  
Vidaurre, Isabella Vilhena Freire Martins, José  
André Lourenço, Marcos Vogel, Margarete Sacht  
Góes, Rogério Borges de Oliveira, Sandra Soares  
Della Fonte, Sérgio da Fonseca Amaral

**Secretaria do Conselho Editorial**

Douglas Salomão

**Administrativo**

Josias Bravim  
Washington Romão dos Santos

**Seção de Edição e Revisão de Textos**

Fernanda Scopel, George Vianna,  
Jussara Rodrigues, Roberta  
Estefânia Soares

**Seção de Design**

Ana Elisa Poubel, Juliana Braga,  
Samira Bolonha Gomes, Willi Piske Jr.

**Seção de Livraria e Comercialização**

Adriani Raimondi, Dominique Piazzarollo,  
Marcos de Alarcão, Maria Augusta  
Postinghel, Maria de Lourdes Zampier



Este trabalho atende às determinações do Repositório Institucional do Sistema Integrado de Bibliotecas da Ufes e está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional.

Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

#### **Preparação e revisão de texto**

Roberta Soares

#### **Projeto gráfico e capa**

Laboratório de Design Instrucional - SEAD/UFES

#### **Diagramação**

Ana Elisa Poubel

#### **Revisão final**

O autor, George Vianna, Jussara Rodrigues

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S249m Sartim, Ademir.  
Matemática básica [recurso eletrônico] : volume 2 / Ademir  
Sartim. - Dados eletrônicos. - Vitória, ES : EDUFES, 2021.  
228 p. : il. - (Didáticos ; 4)

Inclui bibliografia.

ISBN: 978-65-88077-44-3

Também publicado em formato impresso.

Modo de acesso: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/774>

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Título. II. Série.

CDU: 51

Elaborado por Maria Giovana Soares – CRB-6 ES-000605/O

Esta obra foi composta com as famílias  
tipográficas Times New Roman e Roboto.



*Para Helena, Lucca e Vicente.*



# APRESENTAÇÃO

Este livro originou-se da disciplina Matemática Básica, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), a partir de 1994. Ele contém uma fundamentação geométrica informal dos principais conceitos da matemática básica: números e funções.

Não é intenção apresentar a axiomatização dos números, muito menos abstrações do conceito de função, mas, sim, expor um modo didático de ver a matemática com um rigor maior que o da forma como ela é apresentada nos textos do ensino médio.

Acredito que, com essa fundamentação, podemos fazer uma ponte entre a matemática do ensino médio e a do superior, tornando mais suave o impacto que os estudantes sentem ao iniciarem a graduação.

Portanto, estas notas têm como um dos objetivos fazer o elo entre o ensino médio e o ensino superior, por meio da fundamentação dos conceitos e propriedades básicas dos números e das principais funções elementares, necessários para a compreensão do cálculo diferencial e integral. Além disso, a matemática básica estudada através da conceituação será útil também em toda atividade intelectual que tem a matemática como modelo.

Em resumo, este livro apresenta o essencial de matemática para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável.



# AO ESTUDANTE

O conteúdo de *Matemática básica* foi escrito para um curso de noventa horas-aula, sendo distribuídas trinta horas para cada volume. Para a compreensão dos assuntos abordados, não é necessário que o estudante tenha conhecimento da matemática do ensino médio, pois esta obra é autossuficiente. No entanto, pela quantidade de temas abordados, é um curso mais rápido do que normalmente é feito na educação básica.

Os temas aqui expostos são apenas as partes da matemática do ensino médio extremamente necessárias para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Porém este livro não é uma simples revisão rápida de assuntos do ensino médio, mas, sim, uma exposição mais criteriosa dos temas tratados, acrescentada das justificativas necessárias para a verdadeira compreensão da matemática.

O volume 1 trata dos conjuntos numéricos, com o objetivo de apresentar o conjunto dos números reais de um ponto de vista geométrico. Na sequência, temos o estudo das funções reais, suas propriedades, gráficos e suas inversas.

O volume 2 tem como objeto as funções trigonométricas. Iniciamos com a trigonometria no triângulo e na circunferência. Apresentamos as equações trigonométricas principais e, finalmente, as funções trigonométricas e suas inversas.

O volume 3 apresenta os números complexos, operações, propriedades e alguns exemplos de funções complexas, sempre com foco nas suas representações geométricas. Continua com uma introdução ao estudo dos polinômios definidos no conjunto dos números complexos e encerra com as equações algébricas.

Os exercícios propostos ao fim das seções são suficientes para a fixação do conteúdo. Para manter o texto enxuto, não há muitos exercícios de repetição de técnicas de resolução. O estudante que necessitar de mais exercícios repetitivos deve consultar as Referências no final de cada volume.

Ainda para aumentar o elenco de exercícios e problemas de dificuldade mediana, foram acrescentadas, no final de cada volume, as questões das provas da disciplina Matemática Básica I, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em anos anteriores. Também estão, ao fim, as respostas e sugestões dos exercícios propostos.

Recomendamos ao estudante que se esforce ao máximo para resolver as questões escolhidas antes de consultar a resposta/sugestão, porque um exercício ou problema resolvido por conta própria tem um valor extraordinário para o desenvolvimento do raciocínio individual. Vale mais resolver sozinho um único exercício/problema que olhar centenas deles prontos.

# SUMÁRIO

## PARTE I - Trigonometria no Triângulo Retângulo

|     |                                                     |    |
|-----|-----------------------------------------------------|----|
| 1   | Histórico .....                                     | 17 |
| 2   | Ângulo .....                                        | 21 |
| 2.1 | Adição de ângulos .....                             | 24 |
| 2.2 | Medida de um ângulo .....                           | 26 |
| 3   | Triângulo .....                                     | 29 |
| 4   | Razões trigonométricas no triângulo retângulo ..... | 33 |
| 4.1 | Exercícios .....                                    | 36 |
| 4.2 | Ângulos notáveis .....                              | 36 |
| 4.3 | Exercícios .....                                    | 40 |

## PARTE II - Trigonometria na Circunferência

|     |                                                    |    |
|-----|----------------------------------------------------|----|
| 5   | Arcos na circunferência .....                      | 45 |
| 5.1 | Exercícios .....                                   | 51 |
| 6   | A circunferência trigonométrica .....              | 53 |
| 7   | Extensão da medida de arco de circunferência ..... | 55 |

|      |                                                                   |     |
|------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 8    | Extensões das razões trigonométricas para a circunferência .....  | 61  |
| 8.1  | Seno e Cosseno .....                                              | 61  |
| 8.2  | Redução ao 1º quadrante .....                                     | 66  |
| 8.3  | Tangente e Cotangente .....                                       | 69  |
| 8.4  | Secante e Cossecante .....                                        | 75  |
| 8.5  | Relações trigonométricas fundamentais .....                       | 80  |
| 8.6  | Exercícios .....                                                  | 81  |
| 9    | Razões trigonométricas de arcos de medidas simétricas .....       | 83  |
| 10   | Razões trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos ..... | 87  |
| 11   | Razões trigonométricas do arco duplo e do arco metade .....       | 95  |
| 12   | Exercícios .....                                                  | 101 |
| 13   | Transformações .....                                              | 103 |
| 13.1 | Transformação em produto .....                                    | 103 |
| 13.2 | Transformação em soma .....                                       | 105 |
| 14   | Equações trigonométricas .....                                    | 107 |
| 15   | Triângulos quaisquer .....                                        | 111 |
| 15.1 | Teorema (Lei dos Cossenos) .....                                  | 111 |
| 15.2 | Área do triângulo .....                                           | 113 |
| 15.3 | Teorema (Lei dos Senos) .....                                     | 116 |

### **PARTE III - Funções Trigonométricas**

|      |                                                                     |     |
|------|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 16   | Representação dos números reais na circunferência trigonométrica .. | 127 |
| 17   | A função seno .....                                                 | 131 |
| 17.1 | Propriedades e gráfico .....                                        | 132 |
| 18   | A função cosseno .....                                              | 135 |
| 18.1 | Propriedades e gráfico .....                                        | 136 |



|      |                                        |     |
|------|----------------------------------------|-----|
| 19   | Exercícios .....                       | 145 |
| 20   | A função tangente .....                | 147 |
| 20.1 | Propriedades e gráfico .....           | 148 |
| 21   | A função cotangente .....              | 153 |
| 21.1 | Propriedades e gráfico .....           | 154 |
| 22   | A função secante .....                 | 157 |
| 22.1 | Propriedades e gráfico .....           | 158 |
| 23   | A função cossecante .....              | 159 |
| 23.1 | Propriedades e gráfico .....           | 160 |
| 24   | Exercícios .....                       | 161 |
| 25   | Funções trigonométricas inversas ..... | 163 |
| 25.1 | A função arco seno .....               | 164 |
| 25.2 | A função arco cosseno .....            | 166 |
| 25.3 | A função arco tangente .....           | 168 |
| 26   | Exercícios .....                       | 173 |
| 27   | Exercícios complementares .....        | 177 |

## **RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS ..... 183**

### **COLEÇÃO DAS SEGUNDAS PROVAS DO PROCESSO SELETIVO ESTENDIDO PARA O CURSO DE MATEMÁTICA DA UFES DE 1998 A 2012 .... 191**

|    |                                                  |     |
|----|--------------------------------------------------|-----|
| 1. | Segundas Provas de Matemática Básica I .....     | 191 |
| 2. | Respostas das questões das segundas provas ..... | 211 |

## **REFERÊNCIAS ..... 227**





# TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



# 1

---

## HISTÓRICO

A trigonometria advinda da geometria teve seu desenvolvimento com o estudo dos movimentos dos corpos celestes e seus intervalos regulares de repetições, auxiliando, por exemplo, a navegação e a geografia. Essa “trigonometria”, se assim podemos dizer, era baseada em “triângulos” sobre uma esfera, chamada hoje de trigonometria esférica.

Euclides (300 a.C.) estudou a geometria esférica. Outro grego, Aristarco de Samos (310-230 a.C.), no livro *Sobre o tamanho e as distâncias do Sol e da Lua*, baseado em observações e cálculos, concluiu que:

- a) a distância da Terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua (em linguagem e notação moderna, hoje se conclui que  $\frac{1}{20} < \sin 3^\circ < \frac{1}{18}$ ).
- b) os diâmetros do Sol e da Lua têm a mesma razão que suas distâncias à Terra.
- c) a razão do diâmetro do Sol pelo diâmetro da Terra é maior do que  $\frac{19}{3}$  e menor do que  $\frac{43}{6}$ .

Os métodos usados por Aristarco são corretos, apenas prejudicados pelos instrumentos de observações e medições de ângulos.

Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), contemporâneo mais jovem de Arquimedes de Siracusa e de Aristarco de Samos, escreveu *Sobre a medida da Terra* e calculou a circunferência da Terra, que, convertendo ao sistema métrico atual, resulta em 39.700 km, muito semelhante ao valor que sabemos hoje ser 40.008 km. A diferença entre o valor de hoje e o de Eratóstenes é menor que 1%.

Hiparco de Nicéia (120 a.C.) construiu, para usar nos seus estudos de astronomia, presumivelmente a primeira tabela de cordas correspondentes aos seus ângulos centrais na

circunferência, onde dividiu a circunferência em  $360^\circ$ . Talvez essa divisão tenha sido inspirada na astronomia babilônica. Essa tabela de cordas de Hiparco é considerada o marco da criação da trigonometria que hoje usa a semicorda (meia corda) com o nome de seno.

Menelau de Alexandria (100 a.C.), na obra *Cordas num círculo*, usou relações entre arcos e cordas em seus triângulos esféricos.

No entanto, a mais importante obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis Mathematica* (Coleção Matemática), escrita em torno do ano 150 d.C. por Claudio Ptolomeu, também conhecido como Ptolomeu de Alexandria. O objetivo da obra era descrever matematicamente o mecanismo do sistema solar.

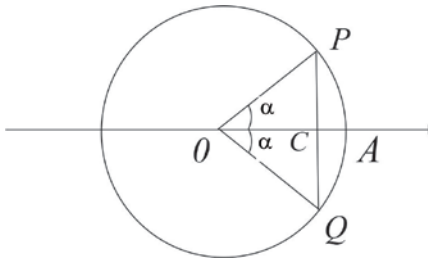
Nesta obra, Ptolomeu continua os trabalhos, iniciados por Hiparco e Menelau, sobre as medidas dos triângulos (trigonon-métro) e astronomia.

No volume 1 da *Syntaxis Mathematica*, entre os capítulos que tratavam de “Trigonometria”, um consistia de uma preciosa tabela de cordas associadas aos seus respectivos ângulos centrais e dos métodos de cálculo usados para encontrar essas medidas. Esses métodos tinham como base uma proposição geométrica, hoje conhecida como o “Teorema de Ptolomeu”.<sup>1</sup>

Essa tabela completa aquela rudimentar iniciada por Hiparco e fornece então uma de  $\frac{1}{2}$  em  $\frac{1}{2}$  grau, que vai de  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$  até  $180^\circ$ .

O livro *Syntaxis Mathematica* foi chamado de Magiste, “o maior” em árabe, depois de Al-Magest e, finalmente, ficou conhecido por “o Almagesto”.

O Almagesto percorreu muitas nações e sobreviveu em uso até o século XVI.



Hiparco, Menelau, Ptolomeu e outros gregos usaram a corda  $\overline{PQ}$  do arco duplo mostrado na figura ao lado numa circunferência de raio 60.

<sup>1</sup> Ver referência [2].

Os hindus também usaram por muito tempo a tabela de cordas e a “trigonometria” do Almagesto para o estudo de astronomia e o traduziram para o sânscrito. Por volta do século V d.C., passaram a usar a semicorda (meia corda) do arco  $PQ$  e refizeram a tabela para a semicorda  $\overline{PC}$ . Os árabes herdaram a trigonometria dos gregos e dos hindus, e a palavra semicorda, que em sânscrito é *ardhajya* e abreviada por *jya* ou *jiva*, não foi traduzida para o árabe, continuou sendo usada *jya(jiva)*. No ano 1.150 o tradutor Gerardo de Cremona traduziu do árabe para o latim e entendeu que aquilo era palavra árabe próxima de *Jayb*, que significava “Bolso”, “Golfo”, “Baía”, “Seio”, traduziu como *sinus* em latim, que se tornou *seno* em português.

Portanto, a meia corda do arco duplo  $PQ$  é o seno do arco  $AP$ , como na circunferência unitária da figura anterior.

Embora se atribua o início da trigonometria a Hiparco (120 a.C.), o nome “trigonometria” somente aparece por volta do ano 1.600 d.C. com Bartolomeu Pitiscus.

A trigonometria começou com medidas de figuras planas (triângulos) e teve uma evolução fenomenal. Foi desenvolvida na geografia, na cartografia, na topografia. Passou a ser interpretada com o conceito de funções e foi explorada no cálculo diferencial e integral de variáveis reais e complexas nos séculos XVII, XVIII e XIX. As funções trigonométricas têm uma posição fundamental nas séries de Fourier e consequentemente na transformada de Fourier, que mostrou ser de grande utilidade em muitas aplicações da matemática, da física, da química, da engenharia etc. No século XX a transformada de Fourier foi a ferramenta fundamental para o desenvolvimento da ressonância magnética de alta resolução, que hoje é uma sofisticada aliada da medicina para diagnósticos por imagens.



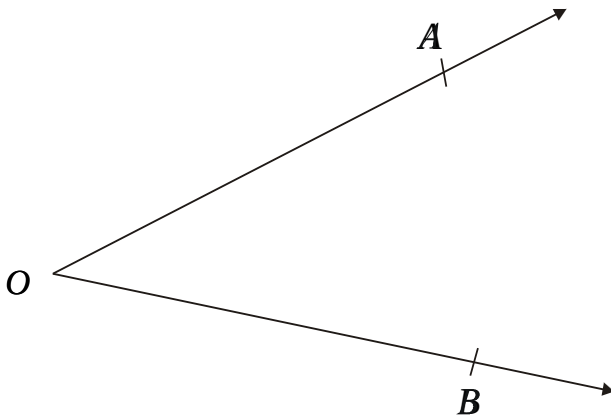


# 2

---

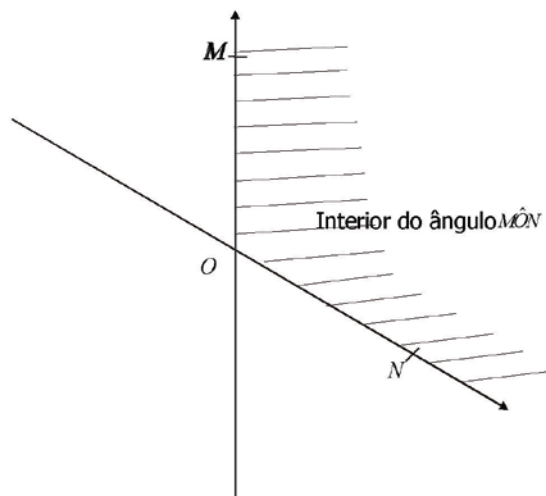
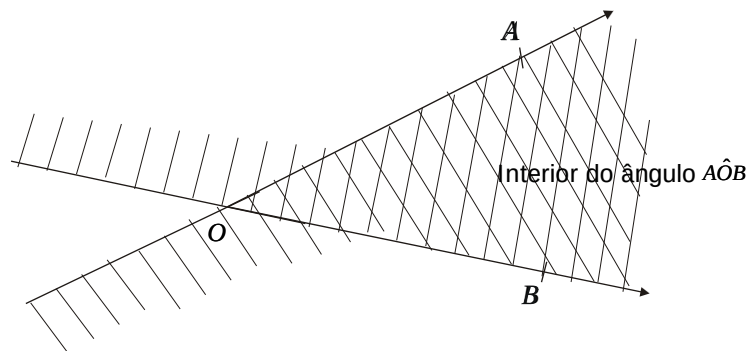
## ÂNGULO

Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Essas semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem de vértice do ângulo.



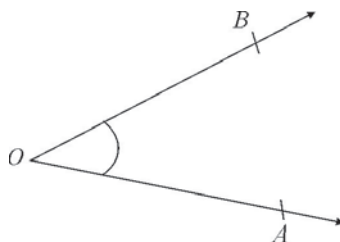
Notação: O ângulo da figura acima é denotado por  $\widehat{AOB}$  ou  $\widehat{BOA}$  ou ainda  $\widehat{O}$ .

Definimos o interior de um ângulo  $\widehat{AOB}$  como sendo os pontos da interseção de dois semiplanos abertos. Um deles é originado pela reta  $OA$  e contém o ponto  $B$ ; o outro, pela reta  $OB$  e contém o ponto  $A$ .

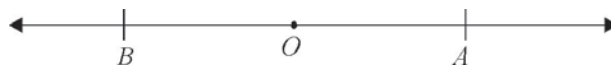


O exterior de um ângulo é formado por todos os pontos do plano que não estão no ângulo nem no seu interior.

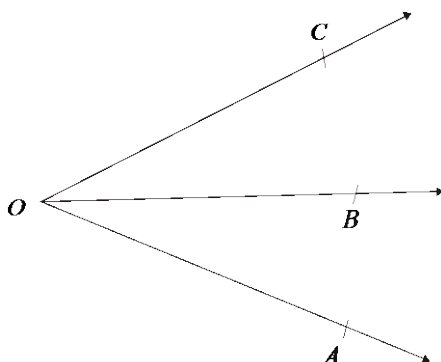
Notação: Para indicar o interior do ângulo vamos usar o símbolo da figura



Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso*.



Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles é também lado do outro.



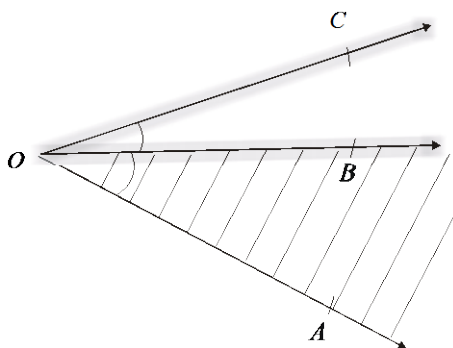
São consecutivos os pares de ângulos:

$\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$ , pois  $\overrightarrow{OB}$  é o lado comum.

$\widehat{BOC}$  e  $\widehat{AOC}$ , pois  $\overrightarrow{OC}$  é o lado comum.

$\widehat{AOB}$  e  $\widehat{AOC}$ , pois  $\overrightarrow{OA}$  é o lado comum.

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se não têm pontos interiores comuns.



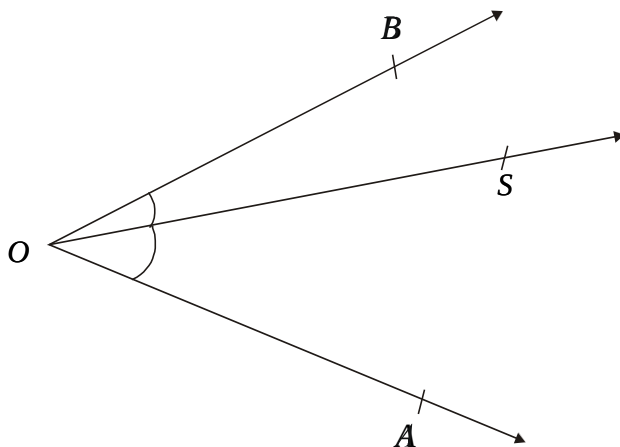
Dizemos que ângulos estão justapostos quando são consecutivos adjacentes dois a dois.

Um ângulo  $\widehat{AOB}$  é menor que um ângulo  $\widehat{AOC}$  se o interior de  $\widehat{AOB}$  está contido no interior de  $\widehat{AOC}$ .

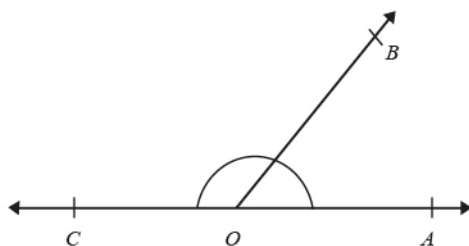
Dois ângulos são congruentes quando, ao serem sobrepostos, têm vértices e lados coincidentes (consequentemente seus interiores são coincidentes).

## 2.1 Adição de ângulos

Sejam  $\hat{A}OB$  um ângulo e  $S$  um ponto do seu interior. Dizemos que o ângulo  $\hat{A}OB$  é o ângulo soma do ângulo  $\hat{A}OS$  com o ângulo  $\hat{SOB}$ .

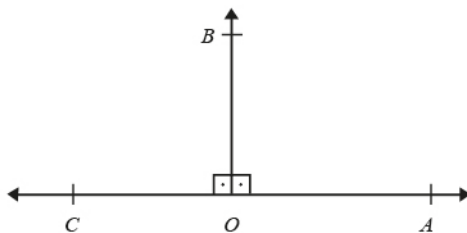


Sejam  $\hat{A}OB$  um ângulo e  $\overrightarrow{OC}$  a semirreta oposta à semirreta  $\overrightarrow{OA}$ . As semirretas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$  determinam um ângulo  $\hat{BOC}$ , chamado ângulo suplementar adjacente de  $\hat{A}OB$ .



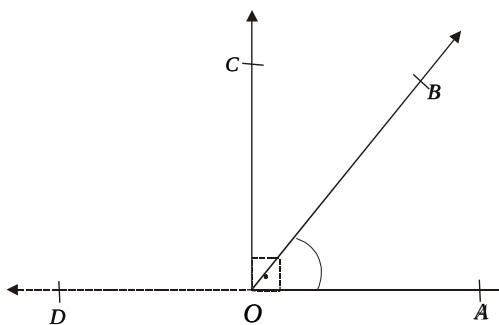
*Ângulo Reto* é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

$\hat{A}OB$  é um ângulo reto.



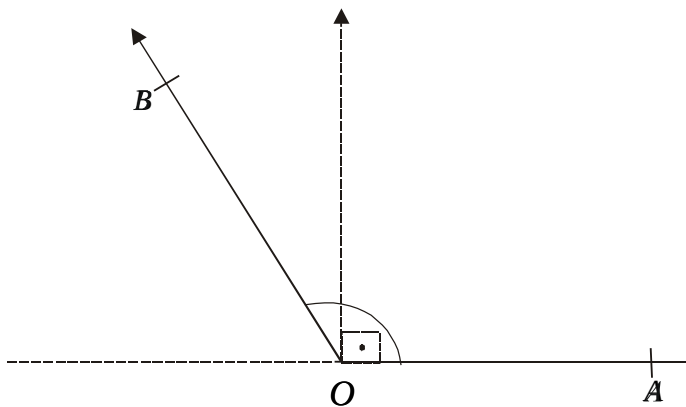
*Ângulo Agudo* é um ângulo menor que um ângulo reto.

$\hat{A}OB$  é um ângulo agudo.



*Ângulo Obtuso* é um ângulo maior que um ângulo reto.

$\hat{A}OB$  é um ângulo obtuso.



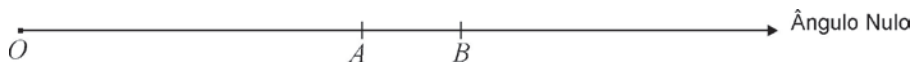
## 2.2 Medida de um ângulo

Intuitivamente, medir um ângulo  $\widehat{AOB}$  é compará-lo com outro ângulo de mesmo vértice, considerado como *unidade de medida*, e expressar com um número real quanto a unidade de medida “cabe” no ângulo  $\widehat{AOB}$ .

A palavra “cabe”, aqui, é usada no sentido de quantificar as justaposições do ângulo unidade de medida em  $\widehat{AOB}$ .

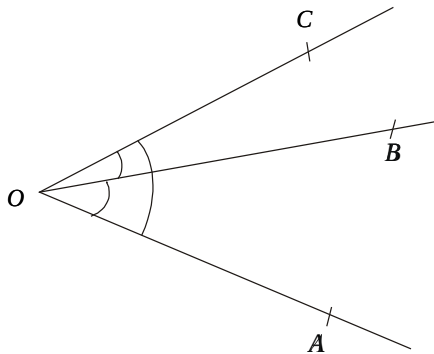
Os ângulos são tradicionalmente medidos em *graus*. No entanto, outras unidades de medidas são fortemente utilizadas, como o *radiano*, que será tratado logo mais.

Um ângulo formado por duas semirretas coincidentes é chamado de *ângulo nulo* e terá medida igual a zero, qualquer que seja a unidade de medida adotada.



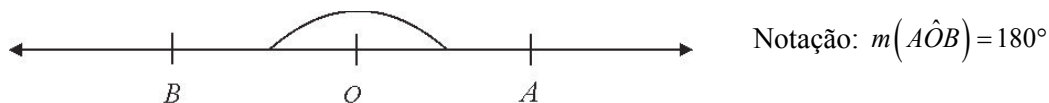
A medida de um ângulo é um número real associado ao ângulo, tal que:

- 1) dois ângulos são congruentes se e somente se têm a mesma medida.
- 2) um ângulo  $\hat{A}$  é maior do que um ângulo  $\hat{B}$  se e somente se a medida do ângulo  $\hat{A}$  é maior do que a medida do ângulo  $\hat{B}$ .
- 3) a medida do ângulo soma  $\widehat{AOC}$  é igual à soma das medidas dos ângulos parcelas  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$ .

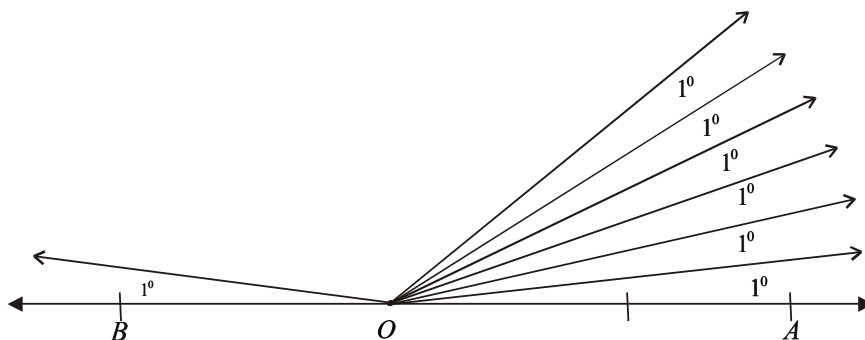


$$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}).$$

Definimos a medida do ângulo raso em graus como sendo o número real 180. Chamamos, então, o ângulo raso de ângulo de  $180^\circ$ .



Assim, temos que o ângulo de  $1^\circ$  (um grau) é aquele ângulo que “cabe”, justapondo-se, 180 vezes no ângulo raso. Também dizemos que um ângulo mede  $1^\circ$  se sua medida é igual a  $\frac{1}{180}$  da medida do ângulo raso.



Obs.: O ângulo reto mede  $90^\circ$ .

Decorre então que dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas em graus é igual a 180.

Dizemos que dois ângulos justapostos são complementares se a soma de suas medidas em graus é igual a 90.



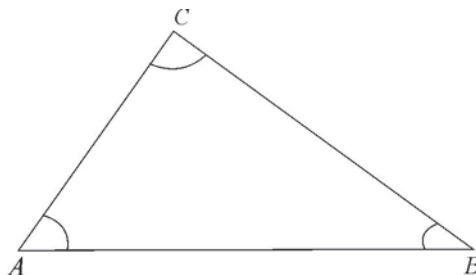


# 3

---

## Triângulo

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares. A reunião dos segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  chama-se triângulo  $ABC$ . Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo e os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  são os seus lados. Cada triângulo  $ABC$  determina três ângulos,  $\hat{CAB}$ ,  $\hat{ABC}$  e  $\hat{BCA}$ , chamados ângulos internos do triângulo ou simplesmente ângulos do triângulo  $ABC$ .



Um fato fundamental na geometria *Euclidiana Plana* é que “por um ponto não pertencente a uma reta dada passa uma única reta paralela a ela”.

Esse fato é conhecido como postulado das paralelas ou quinto postulado de Euclides.

Com base nesse postulado chega-se a outro fato equivalente que vamos chamar de teorema.

### **Teorema 1**

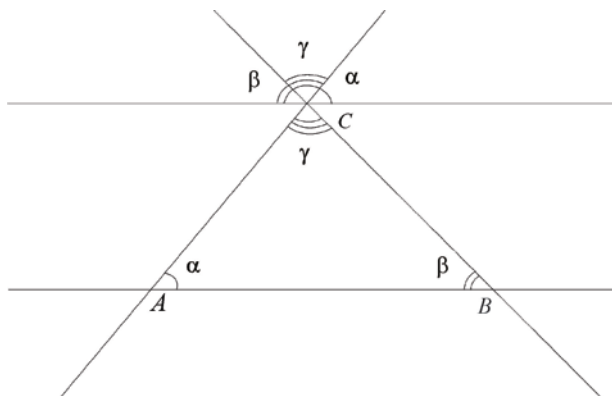
*A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida do ângulo raso.*

Veja a seguir uma demonstração visual do teorema.

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $\alpha, \beta, \gamma$  as medidas dos ângulos internos. Considere a reta  $s$ , que passa por um vértice do triângulo e seja paralela ao lado que não contém esse vértice.

Na ilustração, a reta  $s$  é paralela à reta suporte do lado  $AB$  e passa pelo vértice  $C$ .

Traçando as retas suportes dos lados do triângulo, temos duas retas paralelas e duas retas transversais a elas. Logo, os ângulos correspondentes na figura são congruentes.



Assim, temos na figura que  $\alpha + \beta + \gamma$  é a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, que é também a medida do ângulo raso de vértice  $C$  formado pela reta  $s$ .

## Classificação de triângulos<sup>2</sup>

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

*Equilátero*, quando tem os três lados congruentes.

*Isósceles*, quando tem dois lados congruentes.

*Escaleno*, quando não possui dois lados congruentes.

Quanto aos ângulos os triângulos se classificam em:

*Retângulo*, se tem um ângulo reto.

*Acutângulo*, se tem os três ângulos agudos.

*Obtusângulo*, se tem um ângulo obtuso.

---

<sup>2</sup> Equilátero vem do latim *aequus* (igual) e *latus* (lados), *aequilaterum* (que tem lados iguais). Isósceles vem do grego *iso* (igual) e *skelos* (pernas), *isoskelés* (que tem pernas iguais). Escaleno vem do grego *skalenós* (desigual).

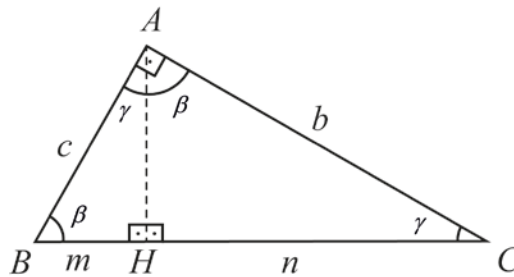
## Teorema 2 (Teorema de Pitágoras)

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Uma demonstração desse teorema usando o teorema 1 e semelhança de triângulos pode ser assim:

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ , com catetos  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e hipotenusa  $\overline{BC} = a$ . Se  $\hat{A} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta$  e  $\hat{C} = \gamma$ , então pelo Teorema 1, temos  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . E como  $\alpha = 90^\circ$ , então  $\beta + \gamma = 90^\circ$ .

Sejam  $\overline{AH}$  a altura relativa à hipotenusa,  $\overline{BH} = m$  e  $\overline{CH} = n$ .

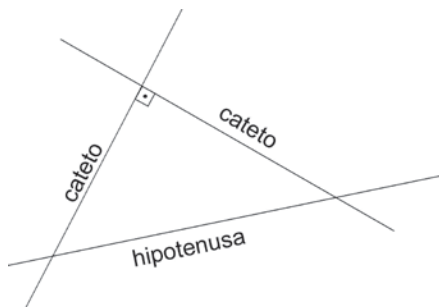


Usando novamente o Teorema 1 nos triângulos  $HAB$  e  $HAC$ , vemos que eles são semelhantes ao triângulo  $ABC$ . Portanto, nos triângulos  $ABC$  e  $HAB$  temos as igualdades das razões

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow am = c^2 \quad \text{e nos triângulos } ABC \text{ e } HAC \text{ temos } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Leftrightarrow an = b^2.$$

Assim,  $an + am = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a(n + m) = b^2 + c^2$ . E como  $n + m = a$ , então temos  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Observação: As denominações catetos e hipotenusa, dadas aos lados de um triângulo retângulo, têm origem nos termos da língua grega “káthetos”, que significa linhas verticais ou perpendiculares, e “hypoteínousa”, que significa linha estendida por baixo.

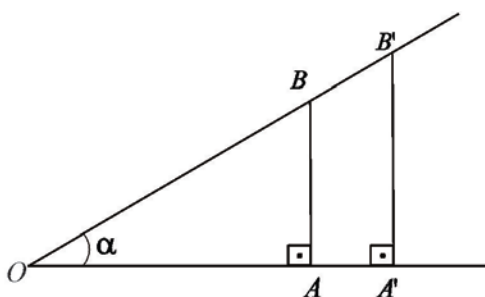




# 4

## Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Tomemos um ângulo agudo de medida  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) e tracemos duas perpendiculares a um dos lados, como na figura.



Dessa forma, obtemos dois triângulos retângulos semelhantes,  $AOB$  e  $A'OB'$ .

Devido à semelhança desses triângulos temos proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

que são equivalentes às três razões seguintes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$$

Portanto, essas razões não dependem do triângulo retângulo escolhido, só dependem do ângulo agudo  $\alpha$ . Isto é: apenas com um ângulo dado podemos definir as razões acima, basta que construamos um triângulo retângulo qualquer de modo que um de seus ângulos tenha medida  $\alpha$ . Nominamos essas razões por:

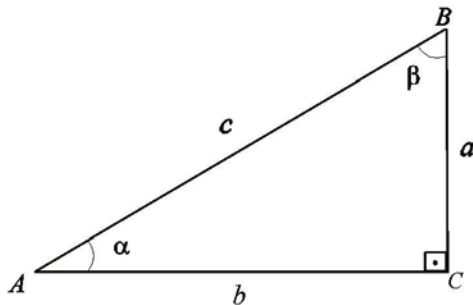
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

### Em Resumo:

Num triângulo retângulo  $ABC$ , temos as seguintes razões trigonométricas:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Obs. 1: Para simplificar a notação, usaremos a mesma letra  $\alpha$  tanto para designar o ângulo quanto para a sua medida.

Obs. 2: Usando o teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$  temos  $c^2 = a^2 + b^2$ , e como  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$  e

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$  temos  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$ . Portanto,  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , em que  $\alpha$  é um ângulo agudo.

Obs. 3: No triângulo  $ABC$ , temos  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ;  $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \operatorname{sen} \beta$  e  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$ . Portanto,

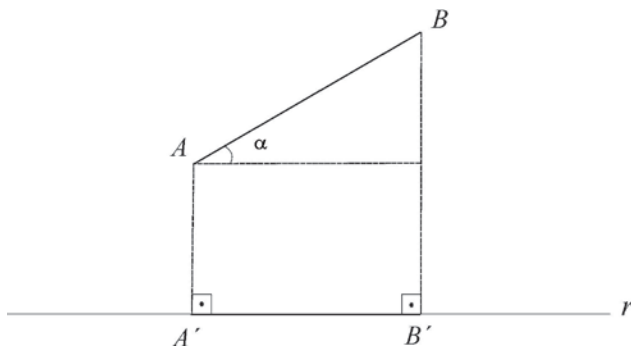
conclui-se que  $\operatorname{sen} \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$  e  $\cos \alpha = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$ .

Isto é: o cosseno de um ângulo é igual ao seno do ângulo complementar e vice-versa. Disso originou o nome “cosseno”.

Obs. 4:  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ , isto é,  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1$  e observe também que  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

e, portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ , em que  $\alpha$  é um ângulo agudo.

Obs. 5: Seja  $AB$  um segmento de reta no plano. A projeção ortogonal  $A'B'$  de  $AB$  sobre uma reta  $r$  é dada por:  $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$ , em que  $\alpha$  é o ângulo formado pelas retas  $r$  e  $AB$ .



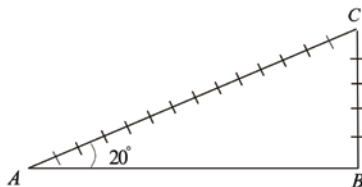
## 4.1 Exercícios

- 1) Dado um triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 6 cm, determine a medida da projeção ortogonal do lado menor sobre o lado maior.
- 2) Justifique: Se  $\alpha$  é um ângulo agudo, então  $0 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$  e  $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ .
- 3) Sendo  $\alpha$  um ângulo agudo e  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ , determine  $\operatorname{sen} \alpha$  e  $\cos \alpha$ .
- 4) Dado um ângulo agudo  $\alpha$ , construa o triângulo retângulo  $ABC$  de hipotenusa unitária com o ângulo interno  $\hat{A} = \alpha$ . Prove que  $\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$ .
- 5) Faça uma outra prova de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual à medida do ângulo raso.
- 6) Dê uma demonstração do Teorema de Ptolomeu (faça uma própria ou veja nas referências).

"Se  $ABCD$  é um quadrilátero inscritível de diagonais  $AC$  e  $BD$ , então  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ "

## 4.2 Ângulos notáveis

Se nos for solicitado calcular o valor do seno do ângulo de 20 graus, imediatamente, podemos construir, com o auxílio de um transferidor, o ângulo numa folha de papel e em seguida baixar uma perpendicular a um dos lados do ângulo formando assim um triângulo retângulo, como na figura.



Em seguida, medimos o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa e fazemos o quociente.

Assim:  $\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cong 0,35$

Observe que, por mais cuidado que tivermos, cometeremos muitas imprecisões, tanto ao construir a figura quanto ao medi-la.

Existem ângulos cujas razões trigonométricas podem ser obtidas sem necessidade de efetuarmos medições diretas de ângulos e segmentos de retas. Assim, eliminamos os efeitos das imprecisões do



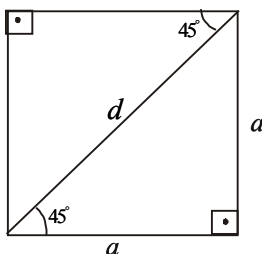
desenho e das medidas, obtendo com exatidão os valores das razões trigonométricas. Esses ângulos são chamados de *ângulos notáveis*.

Veremos as razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis.

### Razões Trigonométricas do ângulo de $45^\circ$

Tomemos um quadrado de lado  $a$  e consideremos uma diagonal.

Observe que obtemos dois triângulos retângulos isósceles com ângulo agudo de  $45^\circ$ .



Pelo Teorema de Pitágoras temos diagonal  $d = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Portanto, } \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

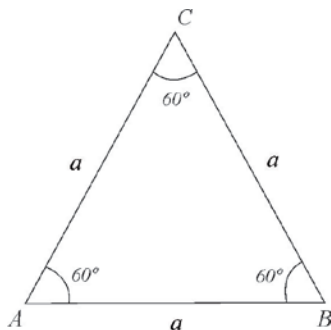
$$\cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

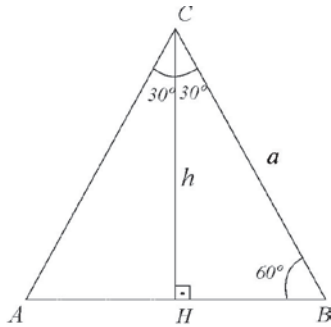
Obtivemos com exatidão as razões trigonométricas do ângulo de  $45^\circ$  sem recorrer à medição direta.

### Razões Trigonométricas do ângulo de $30^\circ$ e de $60^\circ$

Tome um triângulo equilátero de lado  $a$ . Cada ângulo interno desse triângulo mede  $60^\circ$ .



Tome a altura  $h$  desse triângulo e observe que ela divide o ângulo  $\hat{C}$  em duas partes iguais e também a base. Usando o Teorema de Pitágoras, temos



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ que acarreta } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, no triângulo retângulo  $BHC$  temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{a/2}{h} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

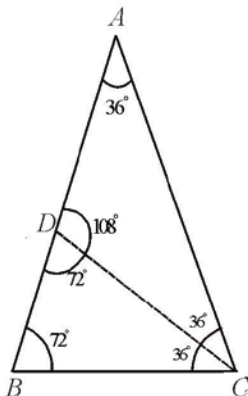
E ainda  $\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{a/2} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}$$

### Razões Trigonômicas do ângulo de $18^\circ$ e de $72^\circ$

Considere um triângulo  $ABC$  com  $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$  e  $\hat{A} = 36^\circ$ .



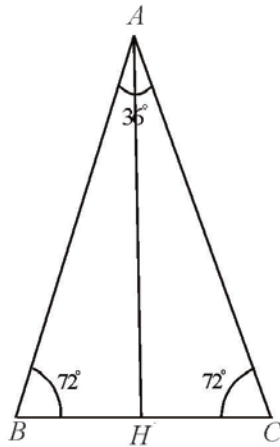
Esse triângulo é isósceles, logo  $\hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$ .

Considere a bissetriz  $CD$  do ângulo  $\hat{C}$  e observe que os triângulos  $ACD$  e  $BCD$  são isósceles, logo  $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC}$  e chame de  $x$  a medida desses segmentos de retas.

Observe também que os triângulos  $ABC$  e  $BCD$  são semelhantes e, portanto, os lados correspondentes são proporcionais. Isto é:

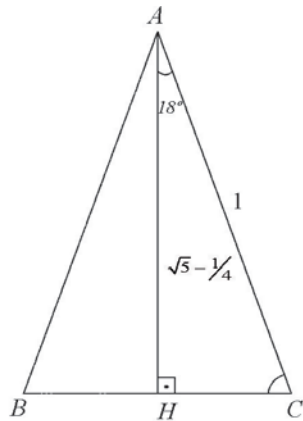
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \text{ o que implica } \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \text{ e, portanto, } x^2 + x - 1 = 0. \text{ Logo, } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Assim, do triângulo  $ABC$  inicial, obtivemos as medidas de todos os ângulos internos e de todos os lados.



$$\overline{AB} = \overline{AC} = 1 \text{ e } \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Considerando a altura  $AH$ , vemos que ela é a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$  e é a mediana do lado  $BC$ .



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $AHC$  temos

$$\overline{AC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AH}^2 \Leftrightarrow 1 = \left( \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 + \overline{AH}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AH} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

As razões trigonométricas ficam:

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 18^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \overline{AH} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{tg } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

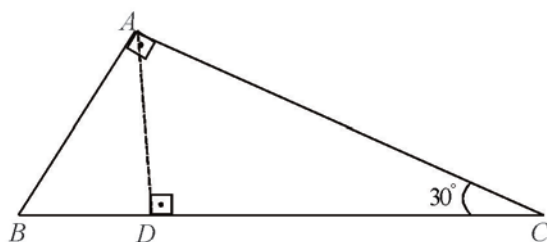
Analogamente,  $\operatorname{sen} 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ;  $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ;  $\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ .

Resumo das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

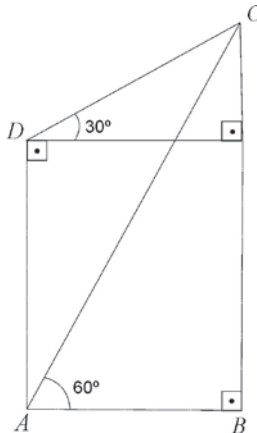
| $\alpha$                    | $18^\circ$                               | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $72^\circ$                               |
|-----------------------------|------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------------------------|
| $\operatorname{sen} \alpha$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                   | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$          |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                   |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ |

### 4.3 Exercícios

- 1) No triângulo  $ABC$  da figura, sendo  $\overline{AD} = \sqrt{3}$ , calcule  $\overline{BC}$ .



- 2) Determine a medida  $\overline{BC}$  da figura sabendo que  $\overline{AD} = 20$  cm.

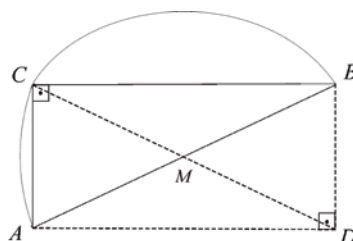


- 3) Num triângulo retângulo, se um dos ângulos agudos mede o dobro do outro, então mostre que a medida da hipotenusa é o dobro da medida do menor cateto.
- 4) Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede  $a$  cm e um dos ângulos agudos mede o dobro do outro. Determine as medidas dos lados desse triângulo em função de  $a$ .

**Lembrete:** Todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência.

Justificativa dessa afirmação:

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo qualquer. Construa o retângulo  $ABCD$  como na figura a seguir. Como as diagonais do retângulo se cortam ao meio, temos  $M$ , ponto médio de  $AB$  e de  $CD$ . Portanto, a circunferência com centro em  $M$  e raio  $r = AM$  passa pelos pontos  $A, B, C$  e  $D$ .





# II

**TRIGONOMETRIA NA  
CIRCUNFERÊNCIA**





# 5

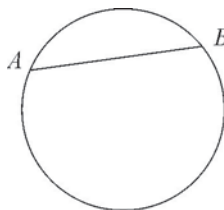
---

## Arcos na circunferência

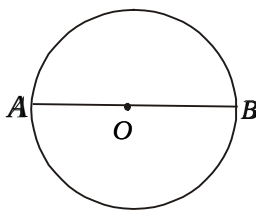
### Arcos de Circunferência

Dois pontos,  $A$  e  $B$ , sobre uma circunferência dividem-na em duas partes denominadas *arcos de circunferência*.

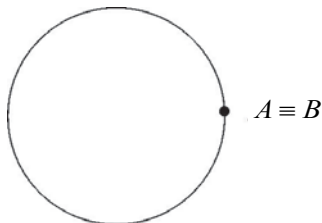
O segmento de reta  $AB$  é chamado de *corda*.



Quando os pontos  $A$  e  $B$  são simétricos em relação ao centro  $O$  da circunferência, o arco  $AB$  é denominado *semicircunferência* e a corda  $AB$  é o *diâmetro* da circunferência.



Se os pontos  $A$  e  $B$  são coincidentes, eles determinam dois arcos: um deles reduz-se a um ponto da circunferência e é denominado *arco nulo*; o outro é toda a circunferência e é denominado *arco de uma volta*.



### Comprimento do arco de circunferência

A medida do comprimento de um segmento de reta foi estudada na seção 3.4 do primeiro volume de *Matemática Básica*.

Intuitivamente, medir o comprimento de um arco seria “estendê-lo” sobre uma reta e medir o comprimento do segmento de reta correspondente a esse arco. No entanto, isso não é uma definição matemática.

Historicamente, o cálculo do comprimento da circunferência (arco de uma volta) foi estudado desde os babilônios (2.500 a.C.). Porém, quem primeiro chegou a uma excelente aproximação do seu real valor foi Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), quando calculou o perímetro de um polígono regular de 96 lados, inscrito na circunferência.

O algoritmo usado por Arquimedes de inscrever e circunscrever polígonos regulares numa circunferência, duplicando cada vez o número de lados indefinidamente e obtendo seus perímetros até exaurir a circunferência, é conhecido como Método de Exaustão de Eudoxo de Cnido (408 a.C. – 355 a.C.).

Com base em resultados obtidos por Eudoxo, Arquimedes provou que se  $c$  for a medida do comprimento de uma circunferência e  $d$  for a medida do seu diâmetro, então  $\frac{c}{d}$  é uma constante.

Isso significa que se  $c_1$  e  $c_2$  são comprimentos de duas circunferências quaisquer, de diâmetros  $d_1$  e  $d_2$  respectivamente, então  $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = k$  (constante).

Assim, ao construir o polígono de 96 lados mencionado, ele concluiu que  $3 + \frac{10}{71} < k < 3 + \frac{10}{70}$ .

Hoje em dia essa constante  $k$  é denotada pela letra  $\pi$ .

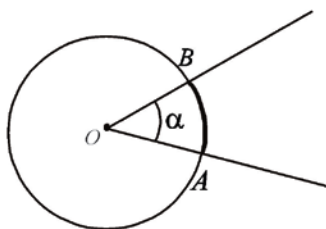
Alguns matemáticos do século XVII usaram a letra  $\pi$  para denominar essa constante, mas não foi bem aceita. Euler usou  $p$  ou  $c$  e a partir de 1737 passou a usar a letra  $\pi$ , e então o mundo o seguiu.

Portanto, se  $c$  é o comprimento de uma circunferência e  $d$  é o diâmetro desta, então  $\frac{c}{d} = \pi$ .

Ou seja:  $c = \pi d$  e escrevemos  $c = 2\pi r$ .

## Ângulo central

Chamamos de *ângulo central* um ângulo que possui o vértice no centro da circunferência.

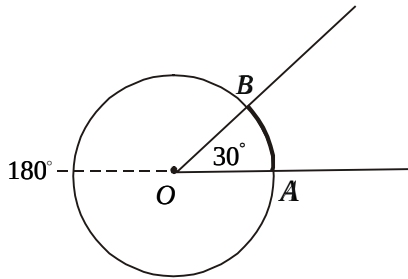


O ângulo central  $A\hat{O}B$  determina na circunferência o arco  $AB$ .

## Medida de arco

Chamamos de *medida de um arco de circunferência* a medida do ângulo central que subtende esse arco.

Usamos dizer “arco de  $30^\circ$ ” para expressar o arco que subtende um ângulo central de  $30^\circ$ .



IMPORTANTE: A medida de arco e a medida do comprimento de arco são conceitos diferentes.

Unidade de medida: grau e radiano

O arco de uma semicircunferência mede  $180^\circ$ , pois esse arco subtende um ângulo raso.

O arco de uma volta mede  $360^\circ$ , pois subtende a justaposição de dois ângulos rasos.

Portanto, o arco de  $1^\circ$  corresponde a  $\frac{1}{360}$  do arco de uma volta.

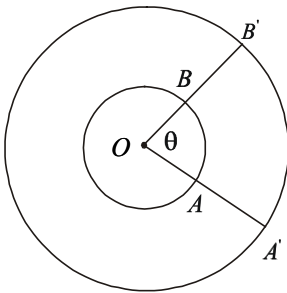
Historiadores, entre eles Boyer, afirmam que a divisão da circunferência em  $360^\circ$  aparece com Hiparco de Nicéia (120 a.C.), talvez inspirado na astronomia babilônia.

O radiano

Da geometria conhecemos o seguinte fato:

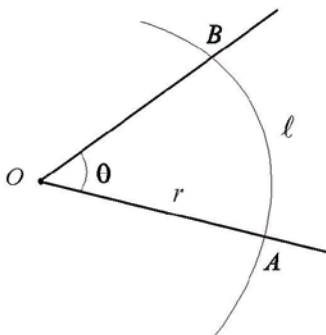
“Dois arcos de circunferência são semelhantes se, e somente se, subtendem o mesmo ângulo central”.

Logo, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são duas circunferências concêntricas de raios  $r_1$  e  $r_2$  e se  $AB$  e  $A'B'$  são os arcos determinados pelo mesmo ângulo central  $A\hat{O}B$ , com comprimentos  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , respectivamente, então  $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2}$ .



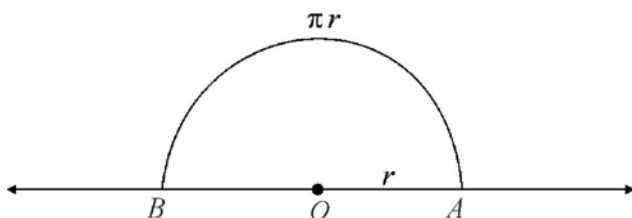
Em resumo, podemos dizer que: dado um ângulo central, a razão entre o comprimento do arco determinado em qualquer circunferência e o seu raio é uma constante, ou seja, a razão não depende da escolha da circunferência, mas apenas do ângulo dado.

DEFINIÇÃO: A medida de um ângulo em radianos é a razão entre a medida do comprimento do arco e a medida do raio, obtidos de uma circunferência com centro no vértice desse ângulo.



$\theta = m(A\hat{O}B) = \frac{\ell}{r}$  radianos, em que  $\ell$  é a medida do comprimento do arco  $AB$  e  $r$  é a medida do raio  $OA$ . Isto significa medir o comprimento do arco  $AB$  com o raio  $OA$ .

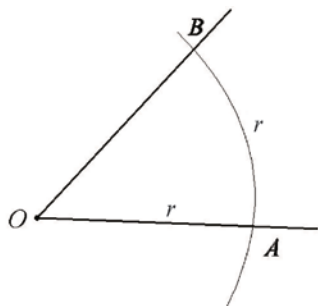
Assim, a medida em radianos de um ângulo raso é  $\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi$ .



O comprimento do arco  $AB$  é  $\pi r$  e o raio é  $\overline{OA} = r$ .

Portanto, o número  $\pi$  é a medida em radianos do ângulo de  $180^\circ$ . Assim,  $2\pi$  é a medida em radianos do ângulo de  $360^\circ$  (ângulo de uma volta).

O ângulo de 1 radiano é aquele que determina, na circunferência centrada no seu vértice, um arco de comprimento igual ao comprimento do raio da circunferência.

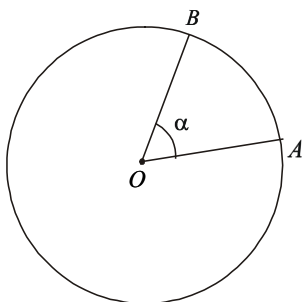


Nesse caso, o comprimento do arco  $AB$  é igual ao comprimento do segmento  $OA$ .

Intuitivamente, funciona como se curvássemos o segmento  $OA$  sobre a circunferência, sem esticá-lo.

Desse modo, quando medimos um ângulo em radianos, estamos comparando-o com o ângulo de 1 radiano. Isto é, estamos quantificando-o com o radiano.

Concluimos então que numa circunferência de raio 1, a medida em radianos de um ângulo central é a medida do comprimento do arco determinado por esse ângulo.



$\alpha =$  comprimento do arco  $AB$  quando  $\overline{OA} = 1$ .

Em outras palavras: Na circunferência de raio unitário, a medida de um arco em radianos é igual ao comprimento desse arco.

Observemos que para transformar em graus uma medida dada em radianos, ou vice-versa, fazemos apenas uma regra de três:

| Medida do arco<br>(em radianos) | Medida do arco<br>(em graus) |
|---------------------------------|------------------------------|
| $2\pi$                          | 360                          |
| $x$                             | $\alpha$                     |

Isso significa que é válida a proporção:

$$\frac{2\pi}{x} = \frac{360}{\alpha}$$

EXEMPLO: A medida  $\alpha$  em graus de um arco de 1 radiano é obtida de

$$\frac{2\pi}{1} = \frac{360}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{360}{2\pi} \cong \frac{360}{6,283} \cong (57,2)^\circ$$

O radiano, como medida de arco, surgiu no século XVIII com o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

## 5.1 Exercícios

1) Converta em graus as medidas dos arcos de:

- a)  $\frac{\pi}{10}$  rad      b)  $\frac{5\pi}{12}$  rad      c)  $\frac{3\pi}{4}$  rad      d)  $\frac{11\pi}{6}$  rad

2) Dê em radianos as medidas dos arcos de:

- a)  $3^\circ$       b)  $(22,5)^\circ$       c)  $45^\circ$       d)  $90^\circ$       e)  $270^\circ$

3) Qual é a medida aproximada, em graus, de um arco de:

- a) 1 rad    b) 3 rad    c) 5 rad

- 4) Calcule o comprimento de um arco de  $90^\circ$  numa circunferência de raio 4 cm.
- 5) Dê a medida em radianos de um arco de comprimento  $\frac{\pi}{2}$  cm, numa circunferência de raio 5 cm.
- 6) O ponteiro das horas de um relógio de parede tem 12cm de comprimento. No período das 8 às 12 horas, quantos centímetros percorrerá a sua extremidade?
- 7) Calcule o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 7h30min.
- 8) Calcule o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às  
a) 10h25min                      b) 1h12min
- 9) Entre 9h e 10h da manhã, os ponteiros do relógio se sobrepõem. Qual é esse horário?
- 10) Às 2h e  $x$  min os ponteiros do relógio formam um ângulo de  $180^\circ$ . Determine  $x$ , aproximadamente.

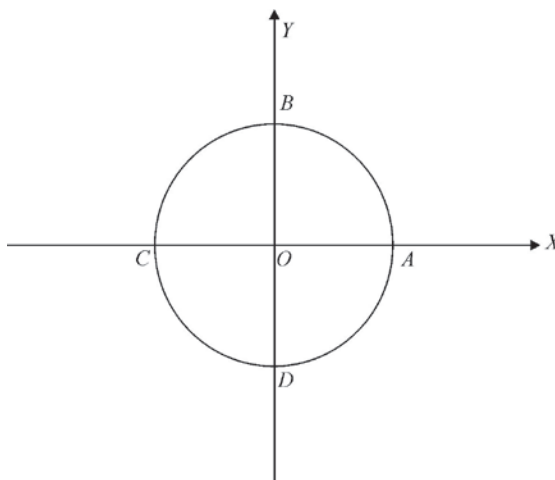


# 6

---

## A circunferência trigonométrica

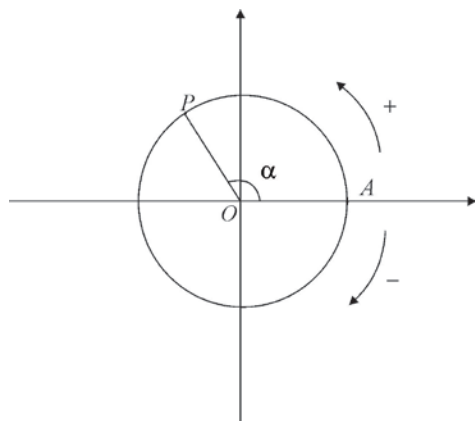
No sistema de coordenadas cartesianas  $XOY$  tome uma circunferência de raio unitário com centro na origem. Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  de interseção com os eixos têm coordenadas:  $A(1,0)$ ;  $B(0,1)$ ;  $C(-1,0)$  e  $D(0,-1)$ .



Escolhendo o ponto  $A$  como origem dos arcos da circunferência, podemos percorrê-la em dois sentidos; no sentido horário (movimento dos ponteiros de um relógio) e no anti-horário (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio). Vamos adotar o sinal positivo para as medidas dos arcos com origem em  $A$  e percorridos no sentido anti-horário.

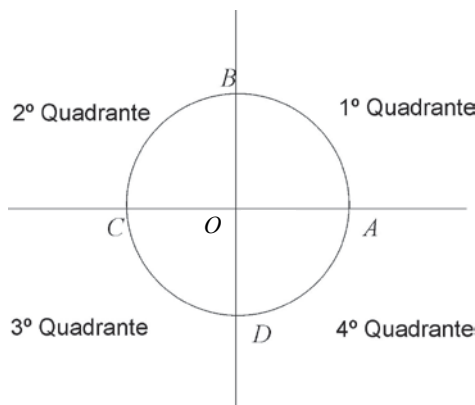
A circunferência unitária assim orientada é denominada *circunferência trigonométrica* ou *círculo trigonométrico* ou ainda *ciclo trigonométrico*.

Definimos a *medida algébrica* de um arco  $AP$  dessa circunferência como sendo a medida do ângulo  $A\hat{O}P$ , associado a um sinal positivo se o sentido de  $A$  para  $P$  for anti-horário e negativo se for no sentido horário. Essa medida será representada por  $\widehat{AP}$ .



Na figura, temos que  $\alpha = \widehat{AP}$  é a medida do arco no sentido positivo.

Os eixos coordenadas dividem o plano em quatro partes chamadas quadrantes:



Ao ponto  $A$  associamos o arco de medida igual a  $0^\circ$  ou  $0$  rad, ao  $B$  associamos o arco de medida igual a  $90^\circ$  ou  $\frac{\pi}{2}$  rad, ao  $C$  e  $D$  associamos os arcos de medida  $180^\circ$  ou  $\pi$  rad e  $270^\circ$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  rad, respectivamente, todos com origem em  $A$  percorridos no sentido positivo.

Percorrendo em sentido contrário, teremos associados aos pontos  $A$ ,  $D$ ,  $C$  e  $B$  os arcos de medidas  $0^\circ$  ou  $0$  rad,  $-90^\circ$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  rad,  $-180^\circ$  ou  $-\pi$  rad, e  $-270^\circ$  ou  $-\frac{3\pi}{2}$  rad, respectivamente.

Obs.: Na próxima seção estudaremos os arcos com origem em  $A$  que percorrem mais de uma volta na circunferência trigonométrica.

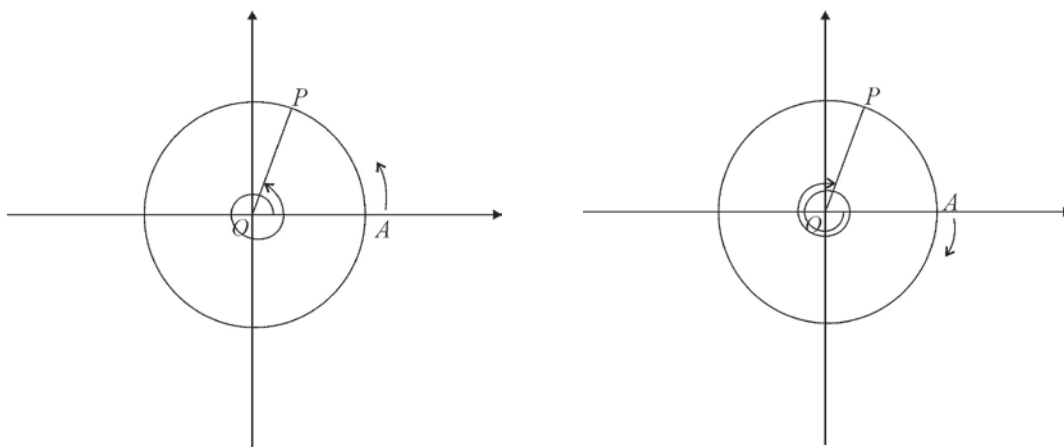
# 7

---

## Extensão da medida de arco de circunferência

Na circunferência trigonométrica, se partimos da origem  $A$  e percorremos sobre essa circunferência até chegar novamente em  $A$ , dizemos que o arco obtido é um arco de uma volta completa. Assim, concluímos que sua medida é  $360^\circ$  ou  $2\pi$  radianos, se o percurso foi realizado no sentido positivo (anti-horário). No sentido contrário, sua medida será  $-360^\circ$  ou  $-2\pi$  radianos.

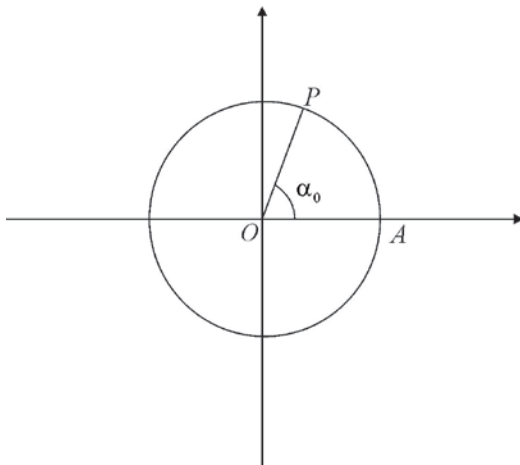
No entanto, se partimos do ponto  $A$  e fazemos um percurso maior que uma volta e menor que duas voltas na circunferência, então o arco  $AP$  terá uma medida maior que  $360^\circ$  ou  $2\pi$  radianos. Nesse caso, a medida do arco  $AP$  será a medida do ângulo central  $A\hat{O}P$  mais a medida do arco de uma volta com o sinal “+” ou sinal “-”, dependendo do sentido do percurso (veja figura).



Analogamente, se partirmos de  $A$ , dermos  $k$  voltas sobre a circunferência trigonométrica e pararmos em um ponto  $P$  sobre ela, determinaremos um arco de medida  $\alpha = (360k + \alpha_0)^\circ$  ou  $\alpha = (2\pi k + \alpha_0)$  radianos, em que  $\alpha_0$  é a medida do ângulo central  $A\hat{O}P$ .

CONCLUSÃO: As medidas de todos os arcos com origem  $A$  e extremidade  $P$  podem ser expressas na forma  $\alpha = (\alpha_0 + k \cdot 2\pi)$  rad ou  $\alpha = (\alpha_0 + k \cdot 360)^\circ$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

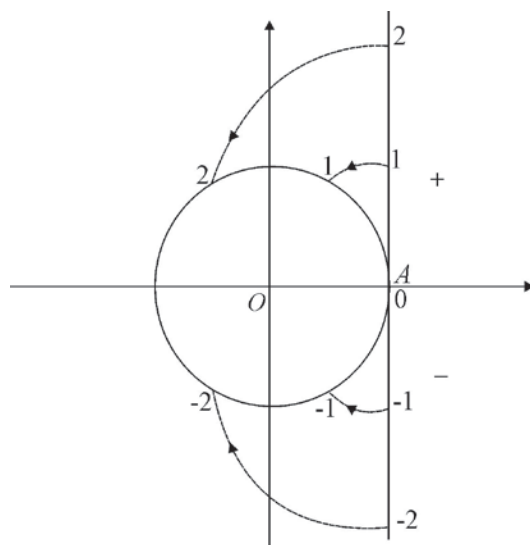
Os arcos  $AP$  de medida  $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  são denominados *arcos côngruos*. Isso significa que a diferença entre dois deles é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ .



$$\widehat{AP} = (\alpha_0 + k \cdot 2\pi) \text{ rad com } k \in \mathbb{Z}.$$

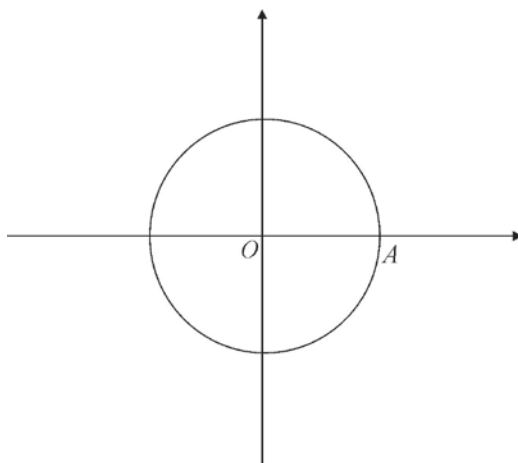
Reciprocamente, dado qualquer número real  $\alpha$ , podemos encontrar um único ponto  $P$  sobre a circunferência trigonométrica de forma que a medida algébrica, em radianos, do arco com origem em  $A$  e extremidade em  $P$ , seja igual a  $\alpha$ .

Intuitivamente funciona como se enrolássemos a reta real sobre a circunferência trigonométrica, fazendo coincidir a origem da reta real (orientada) com o ponto  $A(1,0)$ . A parte positiva da reta enrola-se no sentido positivo dos arcos (anti-horário) e a parte negativa da reta enrola-se no sentido contrário.



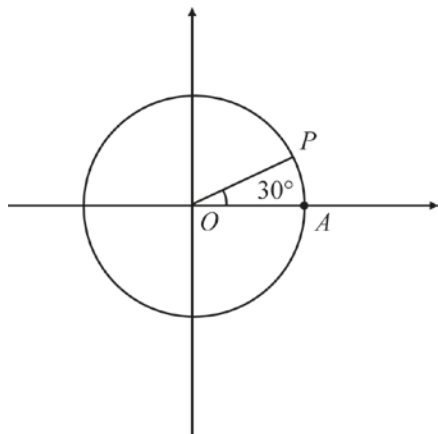
EXEMPLOS:

- 1) Ao ponto  $A$  estão associados os arcos de medidas:



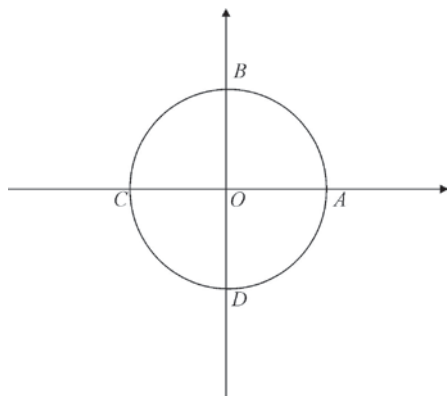
$0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}, 4\pi \text{ rad}, \dots$  e também  $-2\pi \text{ rad}, -4\pi \text{ rad}, \dots$  em geral  $\alpha = 2\pi \cdot k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 2) O ponto  $P$  é extremidade de todos os arcos que podem ser escritos na forma



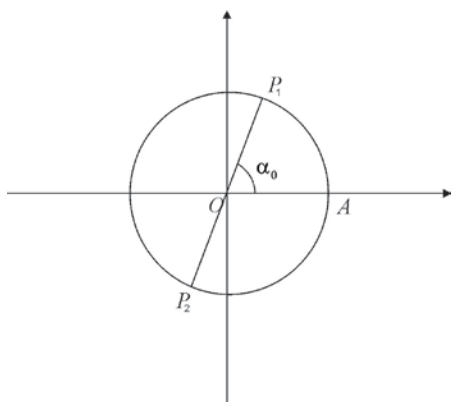
$$\alpha = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- 3) Todos os arcos com extremidades em  $A$  ou  $C$  na circunferência trigonométrica da figura a seguir podem ser escritos na forma



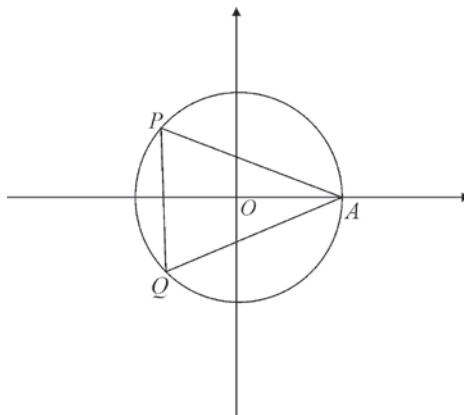
$$\alpha = k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- 4) Os arcos com extremidades em dois pontos  $P_1$  ou  $P_2$ , simétricos em relação ao centro  $O$  da circunferência trigonométrica podem ser expressos na forma

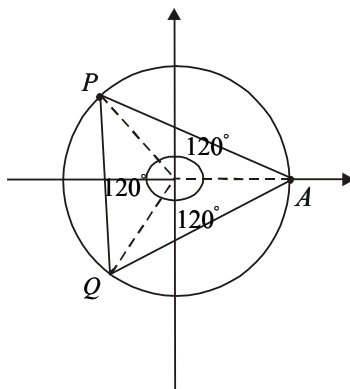


$$\alpha = (\alpha_0 + k\pi) \text{ radianos com } k \in \mathbb{Z}.$$

5) O triângulo  $APQ$  da figura a seguir é equilátero.



Sendo  $APQ$  equilátero, obtemos os ângulos centrais, como na figura a seguir.



Podemos dizer que:

- a expressão de todos os arcos associados ao vértice  $P$  é  $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .
- a expressão de todos os arcos associados ao vértice  $A$  ou  $P$  ou  $Q$  é  $\beta = \frac{2\pi}{3} \cdot k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Obs.: Para simplificar a linguagem, usamos a letra grega  $\alpha$  para denotar o arco, mas, de fato,  $\alpha$  é a *medida do arco*.





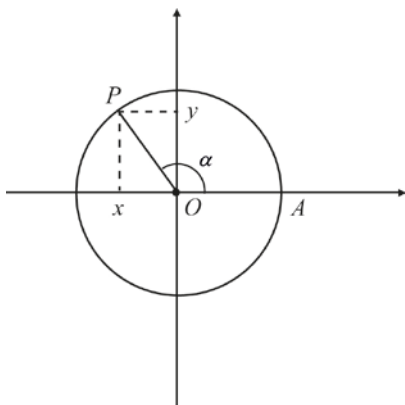
# 8

---

## Extensões das razões trigonométricas para a circunferência

### 8.1 Seno e Cosseno

Seja  $P(x, y)$  um ponto sobre a circunferência trigonométrica e seja  $\alpha$  a medida do arco  $AP$ .



Definimos o *seno* de  $\alpha$  como sendo a ordenada do ponto  $P$  e o *cosseno* de  $\alpha$  como sendo a abscissa de  $P$ .

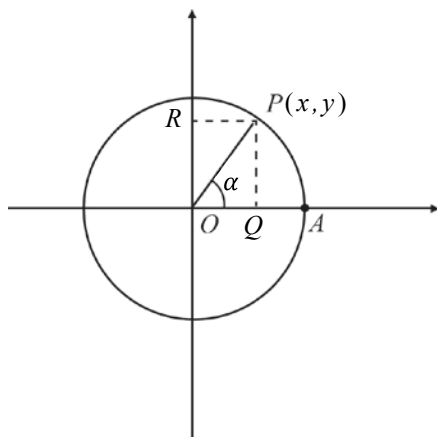
Em símbolos:  $\text{sen } \alpha = y$  e  $\cos \alpha = x$

Como  $P(x, y)$  é um ponto da circunferência trigonométrica, temos que suas coordenadas satisfazem a condição  $x^2 + y^2 = r^2 = 1$  (equação da circunferência de raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano).

Consequentemente temos que  $(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$  para todo ponto  $P$  da circunferência.

Portanto,  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  para todo arco de medida  $\alpha$ . Logo,  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Observe que as definições de seno e cosseno apresentadas nesta seção são uma generalização das definições de seno e cosseno dadas no triângulo retângulo, pois, quando  $P$  estiver no 1º quadrante, elas coincidem com as definições dadas no triângulo retângulo.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{OR} = y$$

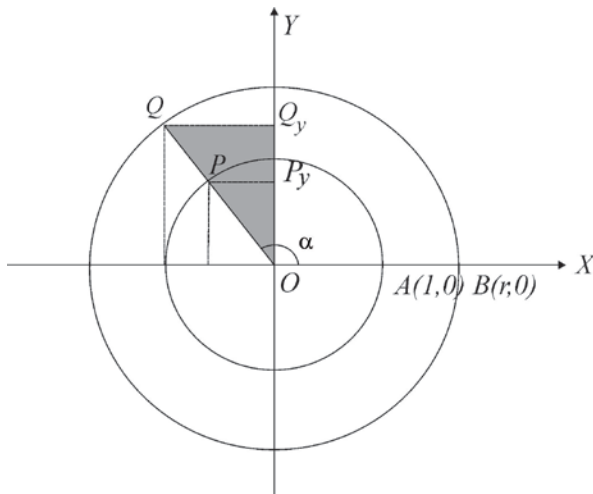
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} = x$$

De agora em diante, denotaremos por  $\alpha$  tanto a medida do ângulo central determinado pelo arco quanto o próprio ângulo central.

### Exercício

Mostre que se  $Q(x_q, y_q)$  é qualquer ponto de uma circunferência de raio  $r$  e centro na origem, então  $x_q = r \cos \alpha$  e  $y_q = r \operatorname{sen} \alpha$ , em que  $\alpha$  é o ângulo central determinado pelo arco  $BQ$ , sendo  $B(r, 0)$  e  $Q(x_q, y_q)$ .

Solução:



Os triângulos  $OPP_y$  e  $OQ_yQ$  são semelhantes. Logo,  $\frac{\overline{OQ_y}}{\overline{OP_y}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ . Como, por definição,  $\text{sen } \alpha = m(OP_y) = \frac{\overline{OP_y}}{\overline{OP}}$  e  $\overline{OP} = 1$ , temos  $\overline{OQ_y} = \overline{OP_y} \cdot \overline{OQ} \Rightarrow y_q = \overline{OQ_y} = r \text{ sen } \alpha$ . Analogamente,  $x_q = r \cos \alpha$ .

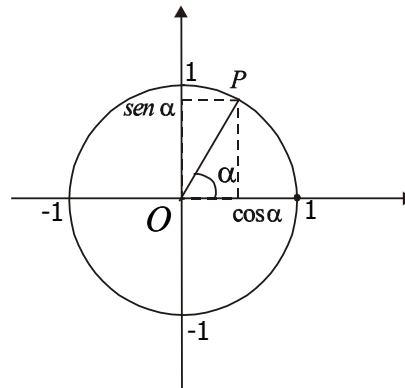
Como consequência desse exercício, podemos dizer que, se  $Q$  é um ponto qualquer do plano cartesiano  $XOY$ , então  $Q$  tem coordenada  $(r \cos \alpha, r \text{ sen } \alpha)$ , em que  $r = d(O, Q)$  e  $\alpha$  é a medida do ângulo formado pelas semirretas  $\overrightarrow{OX}$  e  $\overrightarrow{OQ}$ .

## Variação do seno e do cosseno

Se  $P$  é um ponto da circunferência trigonométrica e  $\alpha$  a medida do arco  $AP$ , concluímos que as coordenadas do ponto  $P$  são  $P(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$ . Por conseguinte, temos  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  e  $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$ , para todo  $\alpha$ .

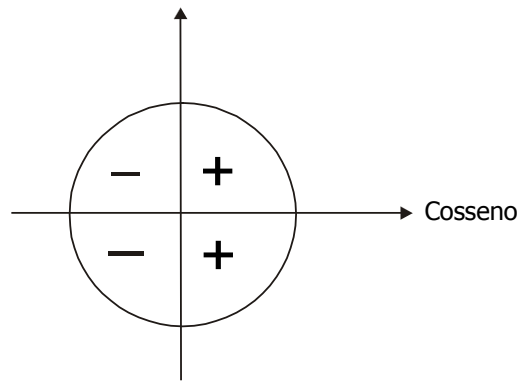
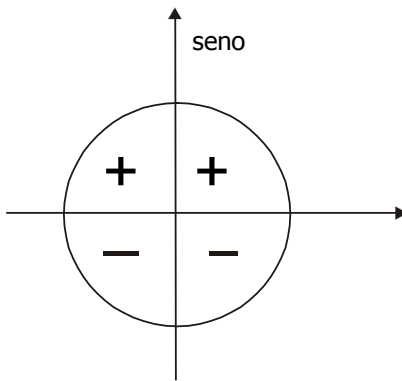
Assim, enquanto o ponto  $P$  percorre toda a circunferência trigonométrica, suas coordenadas percorrem o intervalo  $[-1, 1]$ .

Em resumo,  $\text{sen } \alpha \in [-1, 1]$  e  $\cos \alpha \in [-1, 1]$ , para todo  $\alpha$ .



Obs. 1: Decorre de sua definição que o seno é um número real positivo para arcos do 1º e 2º quadrantes e negativo para arcos do 3º e 4º quadrantes.

De modo análogo, vemos que o cosseno é positivo para arcos do 1º e 4º quadrantes e negativo para arcos do 2º e 3º quadrantes.

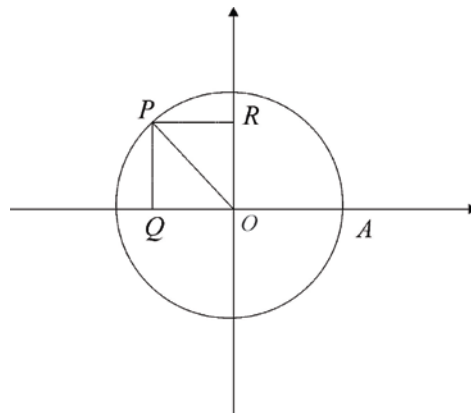


Obs. 2: Como, por definição, o seno do arco  $AP$  é a ordenada do ponto  $P$  e o cosseno é a abscissa, temos que o eixo  $y$  das ordenadas é conhecido como eixo dos senos e o eixo  $x$  das abscissas como eixo dos cossenos, ambos no intervalo  $[-1, 1]$ .

Obs. 3: Podemos interpretar geometricamente o seno e o cosseno de um arco  $\widehat{AP}$  como sendo a medida algébrica de um segmento de reta (medida com sinal + ou -).

Na figura, temos  $\widehat{AP} = + \overline{OR}$  e  $\cos \widehat{AP} = - \overline{OQ}$

Obs. 4: A notação  $\overline{AB}$  significa a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Isto é,  $\overline{AB}$  é o comprimento do segmento de reta  $AB$ .



## Exercícios

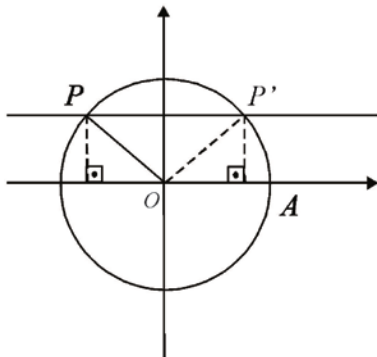
- 1) Se  $0 \text{ rad} \leq \alpha < 2\pi \text{ rad}$ , determine  $\alpha$  para que  $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \geq 0$ .
- 2) Calcule o valor de:
  - a)  $y = \cos 180^\circ + \text{sen } 270^\circ \cdot \cos 0^\circ - \text{sen } 90^\circ$
  - b)  $y = \frac{\cos \pi \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{3\pi}{2}}{\text{sen}^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5}}$
- 3) Calcule  $\cos \alpha$ , sabendo que  $\alpha$  corresponde a um arco do 2º quadrante e que  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ .
- 4) Determine os valores reais de  $r$  tais que:
  - a)  $\text{sen } \alpha = 2r + 1$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$
  - b)  $\cos \alpha = r - 5$  com  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
- 5) Determine todos os valores reais de  $\alpha$  tais que  $\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}$ .

## 8.2 Redução ao 1º quadrante

Na Obs. 1 da seção anterior vimos que o seno e o cosseno são coordenadas de um ponto; logo, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram. No entanto, conhecendo-se os seus valores para arcos no 1º quadrante, é possível determinar seus valores para arcos com extremidades em qualquer quadrante da circunferência trigonométrica.

### a) Arco do 2º quadrante

Seja um arco  $AP$  com  $P$  no 2º quadrante. Traçando por  $P$  uma reta paralela ao eixo  $x$  determinamos o ponto  $P'$  no 1º quadrante da circunferência, que é simétrico a  $P$  em relação ao eixo  $y$ .



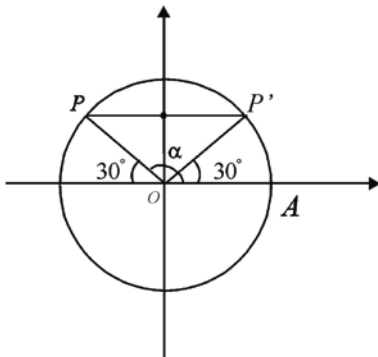
Logo,  $P$  e  $P'$  têm ordenadas iguais e abscissas iguais em valor absoluto, mas diferindo pelo sinal.

Portanto,  $\widehat{\text{sen}AP} = \widehat{\text{sen}AP'}$  e  $\widehat{\text{cos}AP} = -\widehat{\text{cos}AP'}$ .

Denominando a medida do arco  $AP$  por  $\alpha$ , temos que a medida do arco  $AP'$  é  $\pi - \alpha$ .

Assim,  $\text{sen } \alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$  e  $\text{cos } \alpha = -\text{cos}(\pi - \alpha)$ .

EXEMPLO: Calculemos  $\text{sen } 150^\circ$ .



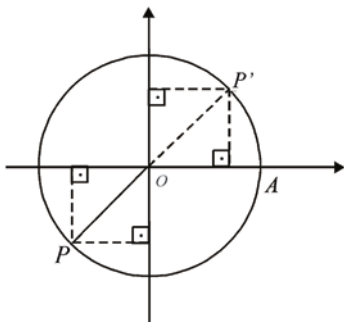
$$\alpha = 150^\circ$$

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ$$

$$\text{Portanto, } \text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

b) Arco do 3º quadrante

Seja  $AP$  um arco com a extremidade  $P$  no 3º quadrante.



A reta  $OP$  determina o ponto  $P'$  no 1º quadrante. Pela congruência dos triângulos obtidos na figura, temos

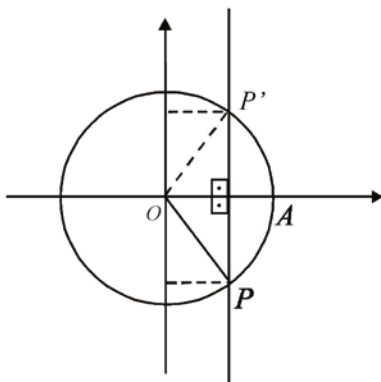
$$\widehat{sen AP} = -\widehat{sen AP'} \text{ e } \widehat{\cos AP} = -\widehat{\cos AP'}.$$

Sendo  $\alpha = \widehat{AP}$  (medida em radianos do arco  $AP$ ), temos que  $\alpha - \pi = \widehat{AP'}$  (medida em radianos do arco  $AP'$ ).

Assim,  $\widehat{sen \alpha} = -\widehat{sen (\alpha - \pi)}$  e  $\widehat{\cos \alpha} = -\widehat{\cos (\alpha - \pi)}$ .

c) Arco do 4º quadrante

Seja  $P$  no 4º quadrante a extremidade do arco  $AP$ .



Traçando por  $P$  uma reta paralela ao eixo das ordenadas, determinamos um ponto  $P'$  no 1º quadrante da circunferência. Pela congruência dos triângulos obtidos, temos

$$\widehat{sen AP} = -\widehat{sen AP'} \text{ e } \widehat{\cos AP} = \widehat{\cos AP'}$$

Sendo  $\alpha = \widehat{AP}$ , temos  $\widehat{AP'} = 2\pi - \alpha$ . Logo,

$$\widehat{sen \alpha} = -\widehat{sen (2\pi - \alpha)} \text{ e } \widehat{\cos \alpha} = \widehat{\cos (2\pi - \alpha)},$$

com medida dos arcos em radianos.

**CONCLUSÃO:** De acordo com os itens a, b e c estudados nesta seção, podemos concluir que os valores absolutos do seno e do cosseno de todos os arcos estão determinados pelos seus valores obtidos com os arcos do 1º quadrante.

**RECOMENDAÇÃO:** Toda vez que for necessário fazer a redução ao 1º quadrante é mais prático reconstruir uma das figuras dos itens a, b ou c desta seção do que memorizar as fórmulas delas obtidas.

## Exercícios

1) Calcule:

a)  $\operatorname{sen} 240^\circ$

b)  $\cos \frac{5\pi}{4}$

c)  $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$

d)  $\cos \frac{2\pi}{3}$

2) Calcule o valor de:

a)  $y = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} \frac{13\pi}{6}$

b)  $y = \operatorname{sen} 120^\circ + \cos 210^\circ + \operatorname{sen} 540^\circ$

3) Determine os valores de  $\alpha$ ,  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , que verificam as igualdades

a)  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

4) Determine os valores reais de  $\alpha$  tais que:

a)  $2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$

b)  $2 \cos \alpha = -1$

c)  $2|\operatorname{sen} \alpha| = 1$

d)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$  simultaneamente

5) Dê as soluções das inequações no intervalo  $[0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}]$ :

a)  $\operatorname{sen} \alpha \geq +\frac{1}{2}$

b)  $\cos \alpha < -\frac{1}{2}$

c)  $\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

6) Resolva as inequações em  $\mathbb{R}$ .

a)  $|\cos \alpha| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $|\operatorname{sen} (2\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



### 8.3 Tangente e Cotangente

#### Tangente

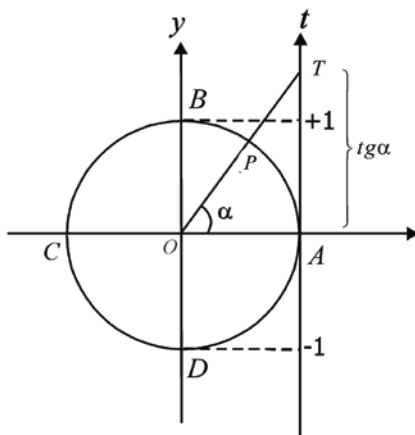
A tangente de um arco é definida como o quociente do seno pelo cosseno desse arco. Portanto, não está definida a tangente de arcos para os quais o cosseno é zero. Observe que quando falamos do seno, do cosseno e da tangente de um arco estamos nos referindo ao seno, ao cosseno e à tangente da medida algébrica desse arco.

Seja  $P$  um ponto da circunferência trigonométrica, distinto de  $B(0,1)$  e de  $D(0,-1)$ , e  $\alpha$  a medida do arco  $AP$ . Definimos a *tangente* de  $\alpha$  como sendo o quociente  $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ .

Notação:  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ , em que  $\alpha = \widehat{AP}$  (medida do arco  $AP$ ).

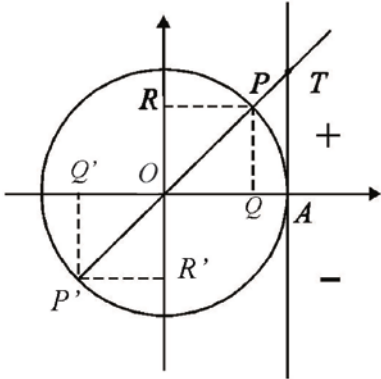
A  $\text{tg } \alpha$  pode ser vista como a medida algébrica de um segmento de reta.

Considere a reta orientada  $t$  tangente à circunferência trigonométrica no ponto  $A(1,0)$ . A reta  $OP$  intersecta essa reta  $t$  no ponto  $T$ . Mostremos que  $\text{tg } \alpha = m(\overline{AT})$  (medida algébrica do segmento  $AT$ ).



Temos dois casos a considerar:

a)  $P$  está no 1º ou 3º quadrante



Os triângulos  $OPQ$ ,  $ORP$ ,  $OP'Q'$ ,  $OR'P'$  são congruentes e são semelhantes ao triângulo  $OAT$ .

Portanto, se  $\alpha = \widehat{AP}$  e sendo  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ ,

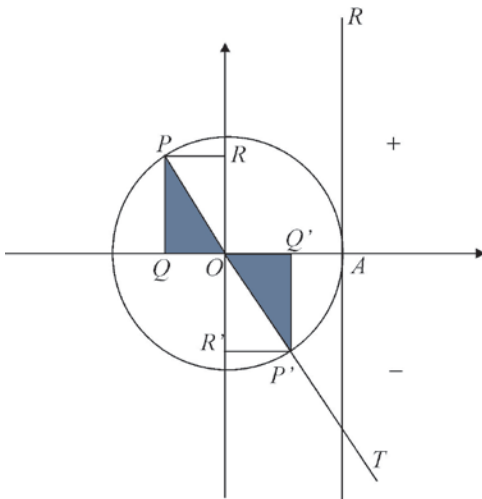
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m(\overline{OR})}{m(\overline{OQ})}. \text{ Se } \alpha = \widehat{AP'}, \text{ então } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m(\overline{OR'})}{m(\overline{OQ'})}.$$

$$\text{Mas, } \frac{m(\overline{OR})}{m(\overline{OQ})} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT} > 0$$

$$\text{e } \frac{m(\overline{OR'})}{m(\overline{OQ'})} = \frac{-\overline{OR'}}{-\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OR'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT} > 0.$$

Portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = \overline{AT} = m(\overline{AT})$ , pois  $\overline{AT} > 0$ .

b)  $P$  está no 2º ou 4º quadrantes



$$\text{Se } \alpha = \widehat{AP}, \text{ então } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m(\overline{OR})}{m(\overline{OQ})} =$$

$$\frac{\overline{OR}}{-\overline{OQ}} = \frac{\overline{PQ}}{-\overline{OQ}} = -\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = -\overline{AT} < 0.$$

$$\text{Se } \alpha = \widehat{AP'}, \text{ temos } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m(\overline{OR'})}{m(\overline{OQ'})} =$$

$$\frac{-\overline{OR'}}{\overline{OQ}} = -\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ'}} = -\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = -\overline{AT} < 0.$$

Portanto,  $\operatorname{tg} \alpha = -\overline{AT} = m(\overline{AT})$ , medida algébrica do segmento  $AT$ .

Obs. 1: A tangente é positiva para arcos do 1º e 3º quadrante e negativa para arcos do 2º e 4º quadrantes.

Obs. 2: A medida algébrica de um segmento de reta  $AB$  é a medida do segmento  $AB$  mais um sinal, + ou –, dependendo do sentido a ser seguido, de  $A$  para  $B$  ou de  $B$  para  $A$ .

Notação:  $m(\overline{AB}) = +\overline{AB}$  ou  $-\overline{AB}$ , em que  $\overline{AB}$  denota o comprimento do segmento  $AB$ .

Obs. 3: A reta tangente  $t$  é uma cópia da reta real com origem em  $A$ , orientada para cima, como o eixo  $y$ , e recebe o nome de *eixo das tangentes*.

## Cotangente

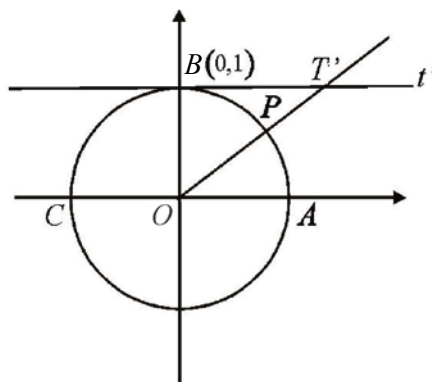
Na circunferência trigonométrica tome o ponto  $P$ , extremidade de um arco  $AP$  com origem em  $A$ .

Para  $P$  na circunferência, distinto de  $A(1,0)$  e  $C(-1,0)$ , definimos a *cotangente* do arco  $AP$ , de medida  $\alpha$ , como sendo o quociente do cosseno pelo seno desse arco.

$$\text{Notação: } \cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Geometricamente, podemos ver a cotangente como a medida algébrica de um segmento de reta.

Seja a reta  $t'$ , tangente à circunferência no ponto  $B(0,1)$ . O ponto  $T'$  pertence à interseção da reta  $OP$  com a reta  $t'$ , veja a figura.

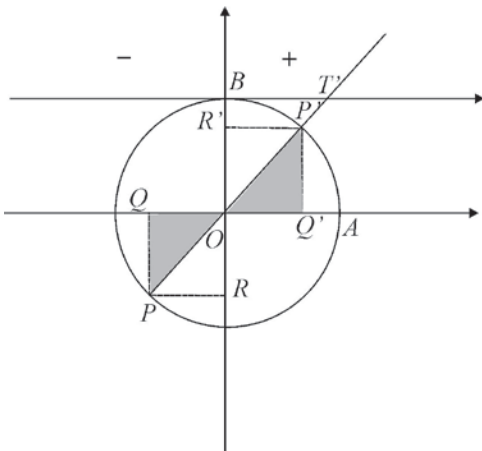


Consideramos a reta  $t'$  como uma cópia da reta real orientada com sua origem no ponto de tangência  $B(0,1)$ . Assim,  $t'$  tem a mesma orientação do eixo  $x$  e é denominada *eixo das cotangentes*.

Mostremos que  $\cot g \alpha = m(\overline{BT'})$  (medida algébrica do segmento  $BT'$ ).

Da mesma forma, como vimos no caso da tangente, aqui também há dois casos a considerar:

a) A extremidade do arco está no 1º ou no 3º quadrante.



Na figura, os triângulos retângulos  $OPQ$ ,  $OPR$ ,  $OP'Q'$  e  $OP'R'$  são congruentes e semelhantes ao triângulo retângulo  $OBT'$ .

Sendo  $\cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , temos que:

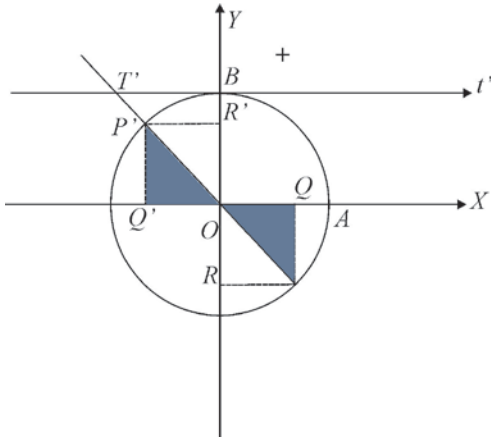
Se  $\alpha = \widehat{AP'}$ , então

$$\cot g \alpha = \frac{m(\overline{OQ'})}{m(\overline{OR'})} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OR'}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{BT'}}{\overline{OB}} = \overline{BT'} > 0$$

Se  $\alpha = \widehat{AP}$ , então  $\cot g \alpha = \frac{m(\overline{OQ})}{m(\overline{OR})} = \frac{-\overline{OQ}}{-\overline{OR}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BT'}}{\overline{OB}} = \overline{BT'} > 0$ .

Portanto,  $\cot g \alpha = \overline{BT'} = m(\overline{BT'})$ .

b) A extremidade do arco está no 2º ou no 4º quadrante.



Analogamente ao item a:

Sendo  $\cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , temos que:

Se  $\alpha = \widehat{AP'}$ , então

$$\cot g \alpha = \frac{m(\overline{OQ'})}{m(\overline{OR'})} = \frac{-\overline{OQ'}}{-\overline{OR'}} = \frac{-\overline{OQ'}}{\overline{P'Q'}} = -\frac{\overline{BT'}}{\overline{OB}} = -\overline{BT'} < 0$$

$$\text{Se } \alpha = \widehat{AP'}, \text{ então } \cot g \alpha = \frac{m(\overline{OQ'})}{m(\overline{OR'})} = \frac{\overline{OQ'}}{-\overline{OR'}} = -\frac{\overline{OQ'}}{\overline{PQ}} = -\frac{\overline{BT'}}{\overline{OB}} = -\overline{BT'} < 0.$$

$$\text{Portanto, } \cot g \alpha = -\overline{BT'} = m(\overline{BT'}).$$

Observamos novamente que a notação  $m(\overline{AB}) = +\overline{AB}$  ou  $-\overline{AB}$  (dependendo do sentido,  $A$  para  $B$  ou  $B$  para  $A$ ) representa a medida algébrica do segmento  $AB$ , em que  $\overline{AB}$  é o comprimento (sempre positivo para  $A \neq B$ ) do segmento  $AB$ .

Concluimos, assim, que na reta orientada  $t'$  podemos obter geometricamente a cotangente dos arcos da circunferência trigonométrica, justificando, dessa forma, a denominação de eixo das cotangentes.

A cotangente não é definida para os arcos com extremidade em  $A$  ou  $C$ , pois, nesses casos, as retas  $OA$  e  $OC$  são paralelas à reta  $t'$ . Equivalentemente, a medida, em radianos, dos arcos  $AA$  e  $AC$  são da forma  $k\pi$  radianos e  $\sin(k\pi) = 0$ . Como não existe divisão por zero, a cotangente de  $\alpha = k\pi$  rad não existe.

Pela representação geométrica, vê-se que a cotangente é positiva para arcos com extremidade no 1º e no 3º quadrante e negativa no 2º e no 4º quadrante. Da mesma maneira, vê-se que, conforme o ponto  $P$  percorre toda a circunferência trigonométrica (exceto nos pontos  $A$  e  $C$ ), a cotangente do

arco  $\widehat{AP}$  assume todos os números reais. Isso significa que para todo  $r \in (-\infty, +\infty)$ , existe um arco  $AP$ , tal que  $\cotg \widehat{AP} = r$ .

Obs.: A denominação “co” vem de complementar. Assim, a cotangente de um arco é a tangente do arco complementar.

Se  $\alpha$  é a medida de um arco em radianos, então  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  é a medida do arco complementar, logo

$$\cotg \alpha = \tg \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right), \text{ pois } \tg \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\sen(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha} = \cotg \alpha, \text{ para } \alpha \neq k\pi$$

## Exercícios

1) Calcule o valor de:

a)  $y = \tg 30^\circ \cdot \tg 60^\circ - \tg 45^\circ$

b)  $y = \tg \frac{\pi}{6} \cdot \tg \frac{\pi}{4} \cdot \tg \frac{\pi}{3}$

2) Calcule:

a)  $\tg \frac{5\pi}{6}$       b)  $\tg \frac{7\pi}{6}$       c)  $\cotg \frac{7\pi}{6}$

3) Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\tg \alpha = 1$ .

4) Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\cotg \alpha = -1$ .

5) Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\cotg \alpha \leq -1$ .

6) Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\tg \alpha \geq \sqrt{3}$ .

7) Determine  $\alpha \in [0, 2\pi]$  tal que  $-1 \leq \tg \alpha \leq 1$ .

8) Determine  $\alpha$ , em radianos, que satisfaça simultaneamente as desigualdades

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ e } \tg \alpha > 1.$$

9) Mostre que o perímetro de um polígono regular de  $n$  lados circunscrito à circunferência de raio

$$r \text{ é igual a } 2rn \cdot \tg \left( \frac{\pi}{n} \right).$$

10) Mostre que o perímetro  $p$  de um polígono regular inscrito na circunferência de raio  $r$  é igual a

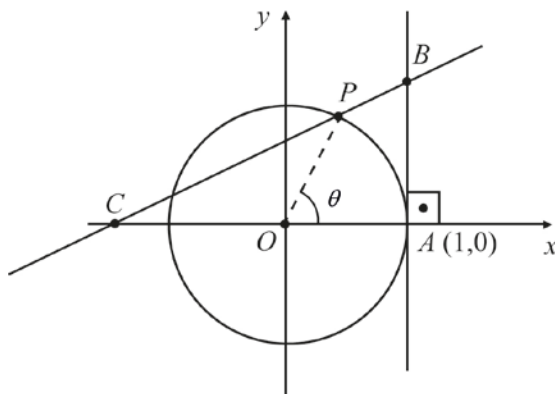
$$p = 2rn \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \text{ Mostre que } p \text{ pode ser expresso por } p = 2\pi r \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}.$$

Quando  $n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), for muito grande, a medida do ângulo  $\theta = \frac{\pi}{n}$  se aproxima de que

número? Então, para que número se aproxima o valor do quociente  $\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}$  ?

11) Na circunferência da figura  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{AB} = \theta$  e  $\widehat{AP} = \theta$ . A reta PB intersecta o eixo x em C.

Expresse a distância  $\overline{AC}$  em função do ângulo  $\theta$ .



## 8.4 Secante e Cossecante

### Secante

Na circunferência trigonométrica tome o ponto  $P$ , extremidade de um arco  $AP$  com origem em  $A(1,0)$  e seja  $\widehat{AP}$  a medida algébrica desse arco.

Para  $P$  distinto dos pontos  $B(0,1)$  e  $D(0,-1)$  definimos a *secante* do arco  $AP$  como sendo o número  $\frac{1}{\cos \widehat{AP}}$ .

Notação:  $\sec \widehat{AP} = \frac{1}{\cos \widehat{AP}}$ .

Seja  $\alpha = \widehat{AP}$ , logo  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ .

### Variação da secante

Relembrando que no Volume 1 foi provado que

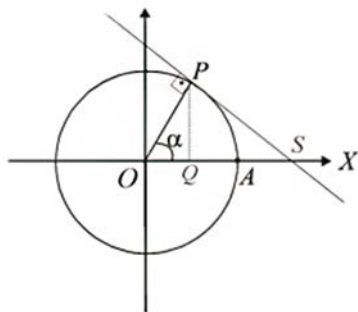
$0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  e  $a \leq b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ , então temos: Como  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , então para

$\cos \alpha \neq 0$ , temos  $0 < \cos \alpha \leq 1$  ou  $-1 \leq \cos \alpha < 0$ . Logo,  $\frac{1}{\cos \alpha} \geq 1$  ou  $\frac{1}{\cos \alpha} \leq -1$ , para  $\alpha \neq \widehat{AB}$  e  $\alpha \neq \widehat{AD}$ .

Assim,  $\sec \alpha \geq 1$  ou  $\sec \alpha \leq -1$ ,  $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Da mesma forma que a tangente e a cotangente, a secante pode ser interpretada como a medida algébrica de um segmento de reta.

Traçando a reta  $s$ , tangente à circunferência no ponto  $P$ , obtemos o ponto  $S$  de interseção com o eixo  $X$ .



Os triângulos retângulos  $OPQ$  e  $OPS$  são semelhantes.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{m(\overline{OQ})} = \frac{m(\overline{OP})}{m(\overline{OQ})} = \frac{m(\overline{OS})}{m(\overline{OP})} = m(\overline{OS}),$$

pois  $m(\overline{OP}) = 1$  (Raio da circunferência).

Se  $P$  está no 1º ou no 4º quadrante, temos

$$m(\overline{OQ}) = \overline{OQ} > 0 \text{ e } m(\overline{OS}) = \overline{OS} > 0.$$

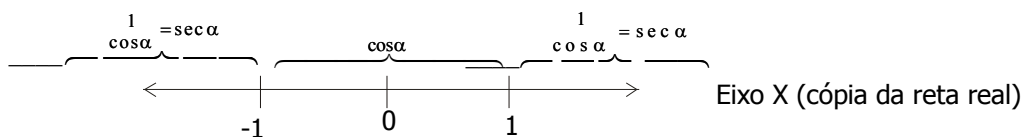
Se  $P$  está no 2º ou no 3º quadrante, temos  $m(\overline{OQ}) = -\overline{OQ} < 0$  e  $m(\overline{OS}) = -\overline{OS} < 0$ .

De qualquer forma,  $m(\overline{OS}) = \frac{1}{m(\overline{OQ})} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$ .



Observe que, conforme  $P$  percorre a circunferência, o ponto  $S$  percorre o eixo  $X$  na região externa à circunferência e, portanto,  $m(\overline{OS})$  percorre o conjunto  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

Dessa maneira, conclui-se novamente que  $\sec \alpha \geq 1$  ou  $\sec \alpha \leq -1$ .



## Cossecante

Na circunferência trigonométrica tome o ponto  $P$ , extremidade de um arco com origem em  $A(1,0)$ , e seja  $\widehat{AP}$  a medida algébrica desse arco.

Para  $P$  distinto de  $A(1,0)$  e de  $C(-1,0)$ , definimos a cossecante do arco  $\widehat{AP}$  como sendo o número

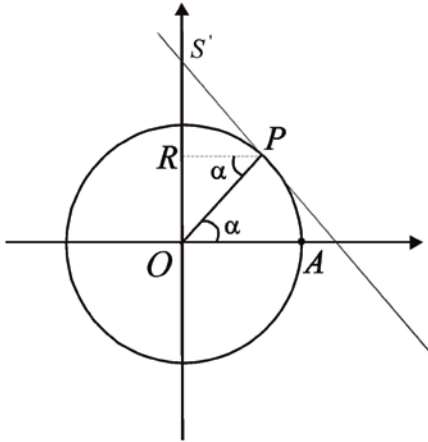
$$\frac{1}{\widehat{\sin AP}}. \text{ Notação: } \operatorname{cosec} \widehat{AP} = \frac{1}{\widehat{\sin AP}}.$$

Observe que para  $P$  coincidindo com  $A$  ou com  $C$  teremos  $\widehat{\sin AP} = 0$ . Consequentemente, não seria possível a divisão por zero, razão pela qual, na definição anterior, são excluídos os arcos com origem em  $A$  e a outra extremidade sobre  $A$  ou  $C$ .

Da mesma forma, como vimos na variação da secante, se  $\alpha = \widehat{AP}$ , então  $-1 \leq \widehat{\sin \alpha} \leq 1$  e, por conseguinte,  $\operatorname{cosec} \alpha \geq 1$  ou  $\operatorname{cosec} \alpha \leq -1$ ,  $\forall \alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Uma interpretação geométrica para os valores da cossecante

Seja  $P$  um ponto da circunferência trigonométrica e  $s'$  a reta tangente à circunferência no ponto  $P$ . Denotamos por  $S'$  o ponto de interseção da reta  $s'$  com o eixo  $Y$ .

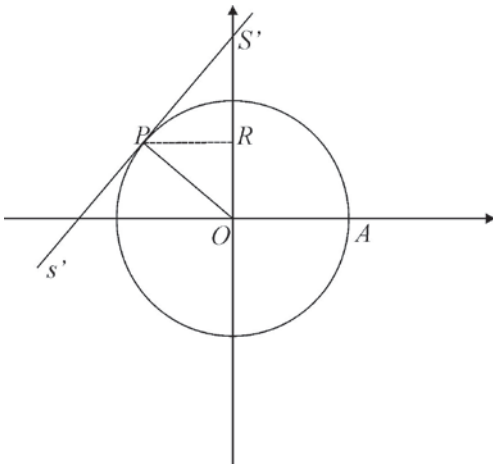


Em qualquer quadrante que esteja o ponto  $P$ , os triângulos  $POR$  e  $OPS'$  são semelhantes.

Logo,  $\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OS'}}{\overline{OP}}$ . E como  $\overline{OP} = 1$  (raio da circunferência), temos  $\overline{OS'} = \frac{1}{\overline{OR}}$ .

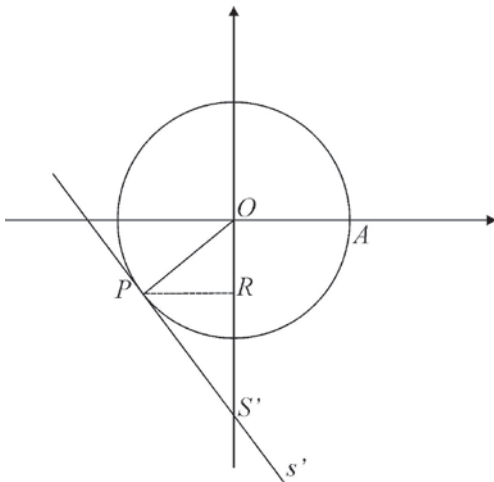
$$\cos \sec \widehat{AP} = \frac{1}{\widehat{\sin AP}} = \frac{1}{m(\overline{OR})}$$

Se  $P$  está no 1º ou no 2º quadrante,  $m(\overline{OR}) = \overline{OR} > 0$  e  $m(\overline{OS'}) = \overline{OS'} > 0$ .



$$\text{Logo, } \cos \sec \widehat{AP} = \frac{1}{\overline{OR}} = \overline{OS'} = m(\overline{OS'}).$$

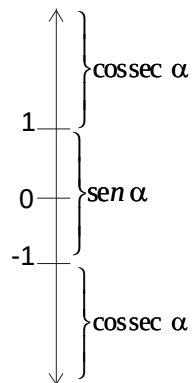
Se  $P$  está no 3º ou no 4º quadrante,  $m(\overline{OR}) = -\overline{OR} < 0$  e  $m(\overline{OS'}) = -\overline{OS'} < 0$ .



$$\text{Logo, } \cos \sec \widehat{AP} = \frac{1}{-\overline{OR}} = -\frac{1}{\overline{OR}} = -\overline{OS'} = m(\overline{OS'}).$$

Consequentemente,  $\cos \sec \widehat{AP} = m(\overline{OS'})$  (medida algébrica do segmento  $OS'$ ).

Eixo Y (cópia da reta real)



## Exercícios

1) Calcule:

a)  $\sec 225^\circ$     b)  $\operatorname{cosec} 330^\circ$     c)  $\sec \frac{2\pi}{3}$     d)  $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6}$

2) Determine  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tal que:

a)  $\sec \alpha = +\sqrt{2}$

b)  $\operatorname{cosec} \alpha + 2 = 0$

c)  $\sec^2 \alpha = 2$

d)  $\operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{4}{3}$

3) Determine as soluções  $\alpha$  das inequações, sabendo que  $0 \text{ rad} \leq \alpha \leq 2\pi \text{ rad}$ :

a)  $\sec \alpha > 2$

b)  $\sec \alpha \leq 2$

c)  $\operatorname{cosec} \alpha \leq \sqrt{2}$

## 8.5 Relações trigonométricas fundamentais

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  a medida em radiano do arco  $AP$ .

Em resumo, temos as relações

①  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

②  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{para } \alpha \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

③  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \text{para } \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

④  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \text{para } \alpha \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$

⑤  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \text{para } \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Da relação ① podemos deduzir outras, também muito úteis para o cálculo diferencial e integral.

Para  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , podemos dividir por  $\cos^2 \alpha$  os dois membros da relação fundamental

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  e obter

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha.$$

Para  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dividimos a relação fundamental  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  por  $\sin^2 \alpha$  e obtemos

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cot^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \text{ Assim, completamos nossa lista de relações}$$

trigonométricas com

$$\textcircled{6} \quad \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \quad \text{para } \alpha \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{7} \quad \cot^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad \text{para } \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{8} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad \text{para } \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 8.6 Exercícios

1) Sabendo que  $\sin \alpha = \frac{-2}{3}$  e que  $\alpha$  é a medida de um arco do 3º quadrante, calcule  $\cot \alpha$ .

2) Se  $\tan \alpha = \sqrt{15}$  e  $0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ , calcule  $\sin \alpha$ .

3) Sabendo que  $4\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 3$  e  $\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$ , calcule  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$ .

4) Sabendo que  $\tan \alpha + \sec \alpha = \frac{3}{2}$ , calcule  $\tan \alpha$ .

5) Calcule  $\tan \alpha$ , admitindo que  $\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha = 2$ .

6) Determine  $a \in \mathbb{R}$  tal que exista  $\alpha$  real satisfazendo simultaneamente

$$\cos \alpha = \frac{2}{a-1} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{a-2}.$$

7) Resolva as equações e dê as respostas em graus:

a)  $\cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0$       b)  $\cos^2 \alpha = 1$

8) Resolva as equações e inequações seguintes, dando as respostas em radianos:

a)  $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$

b)  $\operatorname{tg}^3 \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

c)  $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha < 1 + \operatorname{sen} \alpha$

d)  $\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha = 2$

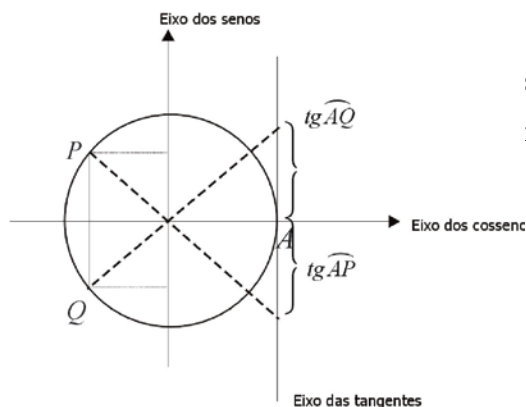
9) Mostre que  $\operatorname{tg}^8 \alpha - 4\operatorname{tg}^6 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + 6\operatorname{tg}^4 \alpha \sec^4 \alpha - 4\operatorname{tg}^2 \alpha \sec^6 \alpha + \sec^8 \alpha = 1$ , para todo

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 9

## Razões trigonométricas de arcos de medidas simétricas

Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos sobre a circunferência trigonométrica, simétricos em relação ao eixo  $X$ .



Pela congruência dos triângulos da figura, vê-se que, qualquer que seja o sentido tomado para a medida dos arcos, tem-se:

$$\cos \widehat{AQ} = \cos \widehat{AP}$$

$$\sin \widehat{AQ} = -\sin \widehat{AP}$$

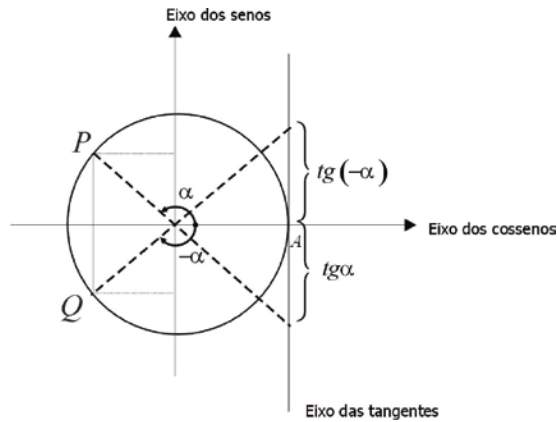
$$\operatorname{tg} \widehat{AQ} = -\operatorname{tg} \widehat{AP}$$

Em particular, se  $\alpha$  é a medida do arco  $AP$  e  $-\alpha$  é a medida do arco  $AQ$ , isto é,  $AP$  medido no sentido anti-horário e  $AQ$  no sentido horário, tem-se

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

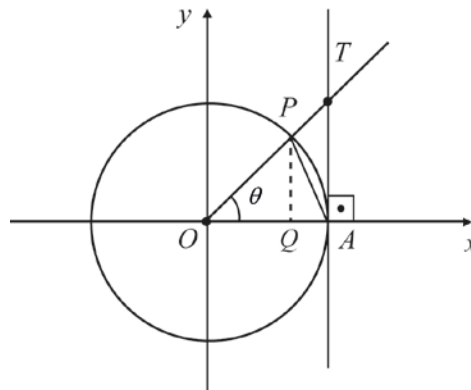


### Exemplo de aplicação de arcos simétricos

Seja  $\theta$  a medida de um arco em radianos.

Se  $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  e  $\theta \neq 0$ , então vamos mostrar que  $\cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$ .

Para  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  vemos na circunferência trigonométrica que, se  $\widehat{AP} = \theta$ , então a área do triângulo  $AOP$  é menor do que a área do setor  $AOP$ , que é menor do que a área do triângulo  $AOT$ .





$$\text{Área } \triangle AOP < \text{área setor } AOP < \text{área } \triangle AOT$$

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{PQ}}{2} < \text{área setor } AOP < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\text{tg } \theta}{2} \text{ e dividindo a desigualdade por } \frac{\text{sen } \theta}{2}, \text{ temos } 1 < \frac{\theta}{\text{sen } \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \Leftrightarrow \cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1.$$

$$\text{Portanto, se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ então } \cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1.$$

$$\text{Se } \frac{-\pi}{2} < \theta < 0, \text{ então } 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}, \text{ logo vale } \cos(-\theta) < \frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1, \text{ mas como } \text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$$

$$\text{e } \cos(-\theta) = \cos \theta \text{ então } \cos \theta < \frac{-\text{sen } \theta}{-\theta} < 1 \Leftrightarrow \cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1.$$

$$\text{Assim concluímos que } \cos \theta < \frac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1 \text{ se } 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Obs.: convidamos o leitor a imaginar o que ocorre com o valor do quociente  $\frac{\text{sen } \theta}{\theta}$  quando  $\theta$  se aproxima de zero.

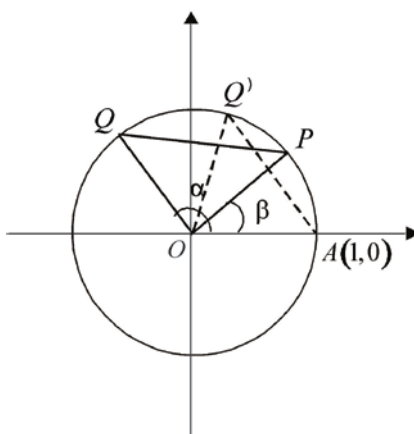


# 10

---

## Razões trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos

Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos sobre a circunferência trigonométrica. Sejam  $\alpha$  a medida do arco  $AQ$  e  $\beta$  a medida do arco  $AP$ . Temos, portanto, as coordenadas dos pontos  $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$  e  $P(\cos \beta, \sin \beta)$ . A medida do ângulo central  $\widehat{POQ}$  é  $(\alpha - \beta)$ . Mantendo o ponto  $O$  fixo e fazendo uma rotação do triângulo  $POQ$  até  $P$  coincidir com o ponto  $A$  temos o triângulo  $AOQ'$ , congruente ao triângulo  $POQ$ , em que  $Q'$  tem coordenadas  $Q'(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ .



Logo,  $\overline{AQ} = \overline{PQ}$ , isto é,  $d(A, Q) = d(P, Q)$  e, usando as coordenadas desses pontos, temos:

$$\sqrt{[1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \sin(\alpha - \beta)]^2} = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} \Leftrightarrow$$

$$[1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [\sin(\alpha - \beta)]^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta$$

$$+ \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \Leftrightarrow 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = 1 - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta + 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

Observando o capítulo anterior, sobre arcos de medidas simétricas, e a expressão do cosseno da diferença, podemos facilmente escrever uma expressão para o cosseno da soma:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{Portanto, } \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Lembrando que o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complementar, isto é,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$  e  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \sin \alpha$ , podemos escrever expressões para o seno da soma e da diferença de dois arcos da seguinte forma:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin \beta =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}$$

Um outro modo de mostrar a expressão do seno da diferença de dois arcos é ver que os triângulos  $POQ$  e  $AOQ$  são congruentes, logo possuem áreas iguais.

$$A_{POQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \beta & \operatorname{sen} \beta & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)$$

$$A_{AOQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\alpha - \beta) & \operatorname{sen}(\alpha - \beta) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

Sendo  $A_{POQ} = A_{AOQ}$ , temos  $\frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ .

Portanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}$$

Veja uma demonstração geométrica para o seno da soma de dois arcos em Revista do Professor de Matemática, nº 27, páginas 13 e 14.

## Tangente da soma e da diferença

Para  $\alpha, \beta$  e  $\alpha + \beta$  diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , podemos expressar  $tg(\alpha + \beta)$  em função da  $tg \alpha$

e  $tg \beta$ , assim: 
$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Como consideramos  $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , temos  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ . Dividindo o numerador e o denominador por  $\cos \alpha \cos \beta$ , obtemos

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}.$$

Assim, 
$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}$$
 para  $\alpha, \beta$  e  $(\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

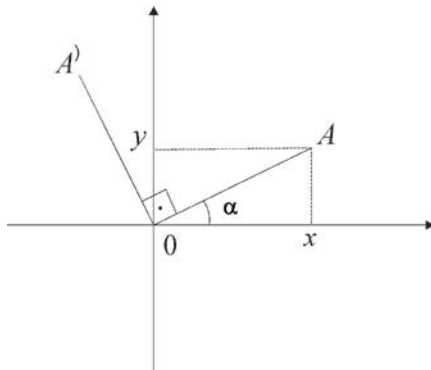
$$tg(\alpha - \beta) = tg[\alpha + (-\beta)] = \frac{tg \alpha + tg(-\beta)}{1 - tg \alpha \cdot tg(-\beta)} = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta} \quad \text{Logo } tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta} \quad \text{para}$$

$$\alpha, \beta \text{ e } (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplos:

- 1) Rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário de um ponto  $A(x, y)$  do plano cartesiano.

Seja  $A(x, y)$  um ponto qualquer dado. Denotamos por  $A'(a, b)$  o ponto obtido pela rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário do ponto  $A(x, y)$ .



Sendo  $r = d(0, A)$ , temos  $x = r \cos \alpha$  e  $y = r \sin \alpha$ .

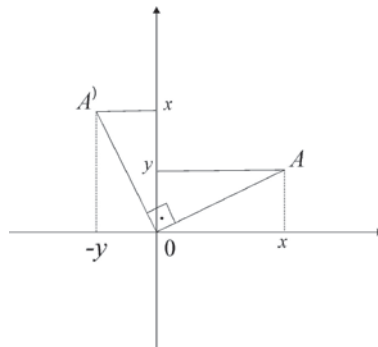
Como  $d(0, A') = d(0, A) = r$  temos  $a = r \cos(\alpha + 90^\circ)$  e

$$b = r \sin(\alpha + 90^\circ).$$

$$\text{Logo, } a = r [\cos \alpha \cos 90^\circ - \sin \alpha \sin 90^\circ] = r(-\sin \alpha) \\ = -r \sin \alpha = -y \text{ e}$$

$$b = r \sin(\alpha + 90^\circ) = r [\sin \alpha \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos \alpha] = r \cos \alpha = x$$

Conclusão: Sendo  $A$  um ponto de coordenadas  $(x, y)$ , o ponto  $A'$  obtido pela rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário possui coordenadas  $(-y, x)$ .



2) Como obter os valores de:

a)  $\text{sen } 15^\circ$

b)  $\text{sen } 12^\circ$

c)  $\text{sen } 3^\circ$

d)  $\text{sen } 255^\circ$

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{sen } 12^\circ = \text{sen}(30^\circ - 18^\circ) = \text{sen } 30^\circ \cos 18^\circ - \text{sen } 18^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}}{8}$$

$$\text{sen } 3^\circ = \text{sen}(15^\circ - 12^\circ) = \text{sen } 15^\circ \cos 12^\circ - \text{sen } 12^\circ \cos 15^\circ = \dots$$

Esse exemplo tem como objetivo mostrar que, mesmo para muitos ângulos não notáveis, é possível calcular seno e cosseno com exatidão e sem usar artifícios de “medições” manuais de lados de triângulos retângulos.

3) Resolver a equação

$$\sqrt{3} \text{sen } \alpha - \cos \alpha = 1$$

Resolução: observe que  $\sqrt{3}$  é a tangente de um ângulo notável. Isto é:  $\sqrt{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$ .

Assim, temos a seguinte equivalência:

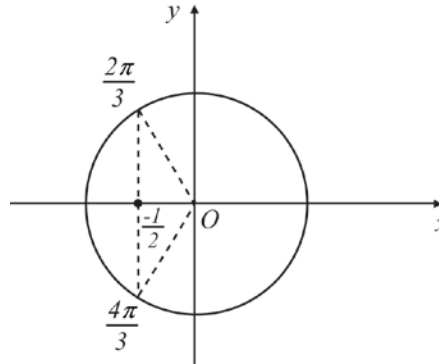
$$\sqrt{3} \text{sen } \alpha - \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\text{sen } \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \text{sen } \alpha - \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \text{sen } \frac{\pi}{3} \text{sen } \alpha = -\cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}.$$



Logo  $\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ .

Portanto  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .



4) Sendo  $ABC$  um triângulo não retângulo, provemos que  $\operatorname{tg}\hat{A} + \operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C} = \operatorname{tg}\hat{A} \cdot \operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{C}$ .

De fato:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \text{ logo } \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} \text{ e } \operatorname{tg}(\hat{A} + \hat{B}) = \operatorname{tg}(180^\circ - \hat{C}) = -\operatorname{tg} \hat{C}$$

$$-\operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg}(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B}}{1 - \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B}} \Leftrightarrow -\operatorname{tg} \hat{C} (1 - \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B}) = \operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B}$$

Assim:

$$-\operatorname{tg} \hat{C} + \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B}$$

$$\text{Isso acarreta que } \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}$$



# 11

---

## Razões trigonométricas do arco duplo e do arco metade

### Arco duplo

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \text{ Portanto, } \boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha. \text{ Portanto, } \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\text{Sejam } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ e } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ tem-se } \operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\text{Portanto, } \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \text{ para } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### Observação

Sabemos agora que  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  e  $1 = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Nessas duas igualdades, se somamos membro a membro obtemos  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  e se

subtraímos obtemos  $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

## Arco metade

$$\cos \alpha = \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Assim, podemos escrever  $\boxed{\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \textcircled{1}$

Sabemos também que  $\boxed{1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \textcircled{2}$

Somando membro a membro as igualdades  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$ , temos:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$ , temos:

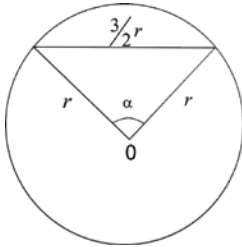
$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\left| \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\text{Para } \alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ temos } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

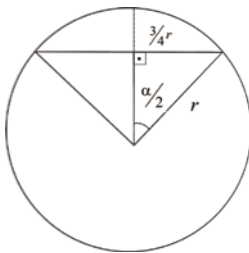
Observe que os sinais “+” ou “–”, que devem ser utilizados quando não se estiver usando o valor absoluto nas fórmulas anteriores, dependem do quadrante em que estiver o arco de medida  $\frac{\alpha}{2}$ .

Exemplos:

- 1) Dada a figura abaixo, calculemos  $\sin \alpha$ .



Como o triângulo é isósceles de base  $\frac{3}{2}r$  e, portanto, maior que o lado de medida  $r$ , logo  $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Portanto,  $30^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ , isto é,  $\frac{\alpha}{2}$  é a medida de um arco do 1º quadrante.



Como  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ ,

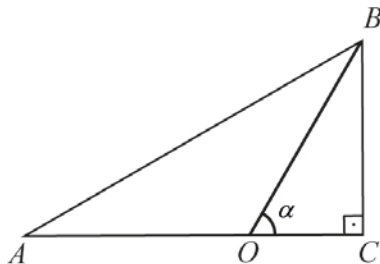
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{4}r}{r} = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1, \text{ temos: } \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

e sendo  $\frac{\alpha}{2}$  do 1º quadrante, temos  $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

Assim,  $\sin \alpha = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ . Isto é:  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ .

- 2) Calculemos  $\tan \frac{\alpha}{2}$  com base nos dados da figura.



$$\overline{AO} = \overline{BO} = 1 \text{ e } \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soluções:

1º modo: Sendo  $\alpha$  ângulo agudo e  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , temos  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Sabendo que

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \quad (\alpha \in 1^\circ \text{ quadrante}), \text{ temos } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \text{ isto é,}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

2º modo: Como o triângulo  $AOB$  é isósceles, temos  $\hat{A} = \hat{B}$  e  $\overline{AO} = \overline{OB} = 1$ . Como  $A\hat{O}B = 180^\circ - \alpha$  e  $\hat{A} + \hat{B} + A\hat{O}B = 180^\circ$ , concluímos que  $2\hat{A} + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$  e, portanto,  $\hat{A} = \frac{\alpha}{2}$ . No triângulo

retângulo  $BOC$ , sendo  $\overline{OB} = 1$ , temos  $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ . Portanto, no triângulo

retângulo  $ABC$  temos  $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ .

- 3) Podemos expressar o seno, o cosseno e a tangente de um arco de medida  $\alpha$  em função de uma mesma variável relacionada com o arco metade.

Sabendo que  $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2}\cos \frac{\alpha}{2}$  e que  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ , temos  $\sin \alpha = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2}\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

Dividindo o numerador e o denominador por  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ , para  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + 1} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \text{ em que } t = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \text{ e } \alpha \neq \pi + 2k\pi,$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

4) Resolver em  $\mathbb{R}$  a equação  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ .

Solução:

Podemos elevar ao quadrado os dois membros da equação, mas sabemos, neste caso, que não obteremos uma equação equivalente à equação dada inicialmente e que portanto, das soluções que encontraremos, algumas poderão não ser soluções da equação dada. Isto é,  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ , mas a recíproca pode não valer para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ .

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \Rightarrow$$

$$1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \Rightarrow 1 + \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

No entanto, se  $k$  for um número inteiro ímpar, temos que  $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , com  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ , não são soluções da equação  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ , pois  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ . Agora, se  $k$  for par, teremos  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

Portanto, o conjunto solução é

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi; \text{ para } k \text{ um numero par} \right\} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Obs.: Uma outra maneira de resolver a equação dada no exemplo 4, sem necessidade de analisar quais soluções encontradas são de fato todas as soluções da equação, é usar as expressões chamadas “transformação em produto”, que apresentaremos no capítulo 13.





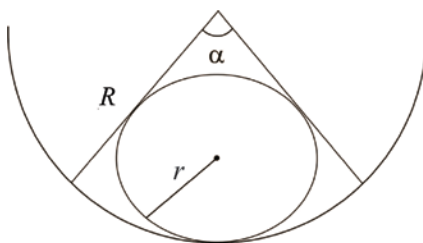
# 12

---

## Exercícios

- 1) Seja  $\alpha$  um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Se  $\sin^2 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$ , então calcule o seno do outro ângulo agudo deste triângulo.
- 2) No plano cartesiano, girando  $45^\circ$  o segmento  $AO$  no sentido anti-horário, o ponto  $A$  percorre uma trajetória curvilínea  $AA'$ . Se o ponto  $A$  tem coordenadas  $(4, 3)$ , determine as coordenadas do ponto  $A'$  e o comprimento da trajetória percorrida pelo  $A$  após esse giro.
- 3) No setor circular de raio  $R$  e ângulo  $\alpha$ , mostre que o raio da circunferência inscrita é

$$r = R \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$



- 4) Determine a medida do menor ângulo de um triângulo retângulo que tem hipotenusa medindo 1 e perímetro  $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

- 5) Prove que  $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$  e  $\sin(3\alpha) = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$ .
- 6) (OCM) Um pedestre, situado a 25m de um edifício, o visualiza sob um certo ângulo. Em seguida, ele se afasta mais 50m do edifício e nota que, ao assim fazer, o novo ângulo de visualização é exatamente a metade do anterior. Calcule a altura do edifício.

# 13

---

## Transformações

### 13.1 Transformação em produto

Somas ou diferenças de senos, cossenos e tangentes podem ser transformadas em produtos. Essas transformações, também chamadas de fatorações, são muito úteis nas resoluções de equações trigonométricas.

No Capítulo 10, mostramos as seguintes igualdades:

$$1) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$2) \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Somando membro a membro as igualdades 1) e 2) obtemos a igualdade

A)  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \beta$ . Chamando  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$ , temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}, \text{ que implica } \alpha = \frac{p+q}{2} \text{ e } \beta = \frac{p-q}{2}.$$

Assim, A) pode ser escrita  $\boxed{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}.$

Subtraindo membro a membro as igualdades 1) e 2) obtemos  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$ , e usando a troca de variáveis  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$  chega-se

$$\boxed{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{p-q}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{p+q}{2} \right)}.$$

Analogamente, somando ou subtraindo membro a membro as equações 3) e 4) temos as igualdades

$$\text{B) } \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\text{C) } \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

e usando a mesma troca de variáveis  $\alpha + \beta = p$  e  $\alpha - \beta = q$  chega-se às equações

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)} \text{ e } \boxed{\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \left( \frac{p+q}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{p-q}{2} \right)}.$$

No caso da tangente, para  $p$  e  $q$  diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q} \therefore$$

$$\boxed{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}}.$$

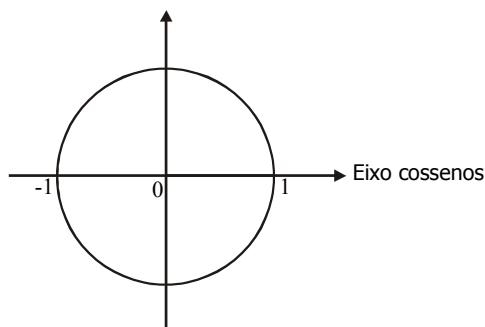
$$\text{Analogamente, } \boxed{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}}.$$

Vamos resolver novamente a equação  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ , agora utilizando a transformação em produto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} \left[ \frac{\alpha + \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} \right] \cdot \cos \left[ \frac{\alpha - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{2} \right] = \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$

Assim, a equação  $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$  é equivalente à equação  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ . Portanto, elas têm as mesmas soluções.

Resolvendo a equação  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ , que é mais simples, temos:



$$\alpha - \frac{\pi}{4} = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + 2n\pi; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$

## 13.2 Transformação em soma

Assim como as transformações de somas em produtos de funções trigonométricas são úteis na resolução de equações, as transformações de produtos em somas ou diferenças são também úteis em diversas situações, por exemplo, no cálculo de integrais de funções trigonométricas.

Das igualdades A), B) e C) em 13.1, obtemos as equações transformadoras de produtos em somas ou diferenças, a saber:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Observação: tomando  $\alpha = \beta$  nas duas equações anteriores encontramos novamente as fórmulas já conhecidas:  $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$  e  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

## Exercícios

1) Resolva as equações:

- a)  $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 5\alpha = 2\operatorname{sen} 3\alpha$
- b)  $\operatorname{sen} 7\alpha + \operatorname{sen} \alpha = \cos 5\alpha - \cos 3\alpha$
- c)  $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} 4\alpha = 0$

2) Mostre que  $\operatorname{sen} 20^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ = \operatorname{sen} 80^\circ$ .

3) Mostre que  $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$ .

4) Calcule o valor de  $\cos \left( \frac{7\pi}{24} \right) \cos \left( \frac{\pi}{24} \right)$ .

5) Seja  $ABC$  um triângulo:

a) Se  $\operatorname{sen} 4\hat{A} + \operatorname{sen} 4\hat{B} + \operatorname{sen} 4\hat{C} = 0$ , então prove que o triângulo  $ABC$  é retângulo.

b) Se  $\operatorname{sen} 3\hat{A} + \operatorname{sen} 3\hat{B} + \operatorname{sen} 3\hat{C} = 0$ , então prove que o triângulo  $ABC$  tem um ângulo interno de  $60^\circ$ .

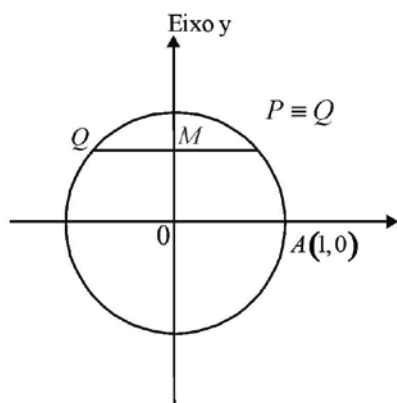
c) Se  $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}}{\cos \hat{B} + \cos \hat{C}}$ , então prove que o triângulo  $ABC$  é retângulo.

# 14

## Equações trigonométricas

Sejam  $AP$  e  $AQ$  dois arcos da circunferência trigonométrica.

- I)  $\widehat{AP} = \widehat{AQ}$  se e somente se  $P$  e  $Q$  coincidem ou  $P$  e  $Q$  são simétricos em relação ao eixo  $y$  (eixo dos senos).

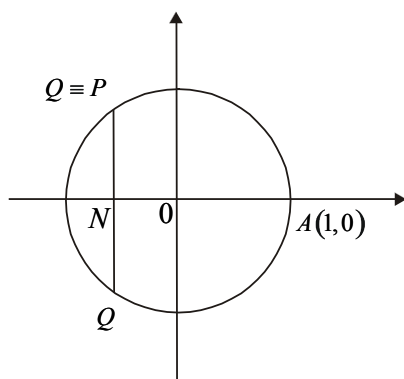


Se  $\widehat{AP} = \alpha$  e  $\widehat{AQ} = \beta$  são medidas em radianos e  $\widehat{AP} = \widehat{AQ}$ , em que  $m(\overline{OM})$  é a medida algébrica do segmento  $OM$ , temos duas possibilidades:

1ª)  $P \equiv Q$ , logo  $\alpha = \beta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2ª)  $P$  e  $Q$  simétricos em relação ao eixo  $y$ . Logo,  
$$\alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

II)  $\cos \widehat{AP} = \cos \widehat{AQ}$  se e somente se  $P$  e  $Q$  coincidem ou  $P$  e  $Q$  são simétricos em relação ao eixo  $x$  (eixo dos cossenos).

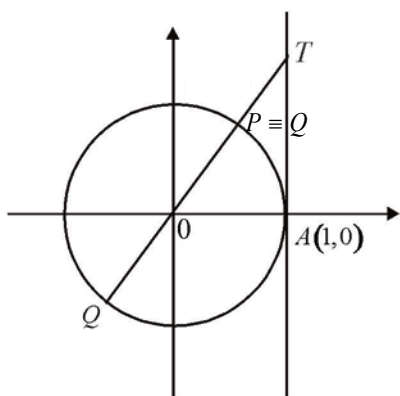


Se  $\widehat{AP} = \alpha$  e  $\widehat{AQ} = \beta$  são medidas dadas em radianos e  $\cos \alpha = \cos \beta = m(\overline{ON})$ , temos duas possibilidades:

1ª)  $P \equiv Q$ , logo  $\alpha = \beta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2ª)  $P$  e  $Q$  simétricos em relação ao eixo  $x$ . Logo,  
 $\alpha = -\beta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

III) Para  $P \neq B(0,1)$  e  $P \neq D(0,-1)$  temos  $\operatorname{tg} \widehat{AP} = \operatorname{tg} \widehat{AQ}$  se e somente se  $P$  e  $Q$  coincidem ou  $P$  e  $Q$  são simétricos em relação à origem  $O$  do sistema cartesiano



Se  $\widehat{AP} = \alpha$  e  $\widehat{AQ} = \beta$  em radianos e  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = m(\overline{AT})$

com  $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , temos duas possibilidades:

1ª)  $P \equiv Q$ , logo  $\alpha = \beta + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

2ª)  $P$  e  $Q$  simétricos em relação à origem  $O$ . Logo,  
 $\alpha = \beta + \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Observemos que

$\alpha = \beta + 2k\pi$  ou  $\alpha = \beta + \pi + 2k\pi$  podem ser expressas numa única forma  $\alpha = \beta + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \left( \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right).$$



### Exemplo 1

Resolvendo a equação  $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$ .

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 3x = x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - x + 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

### Exemplo 2

Resolvendo a equação  $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$ :

$$\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow 5x = 3x + k\pi, \text{ com } 5x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ e } 3x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Assim, } x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ com}$$

as condições citadas, nos dá como soluções  $x = k\frac{\pi}{2}$  com  $k$  sendo um número inteiro par. Portanto,

$$S = \{ x \in \mathbb{R} ; x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \}.$$

Obs.: As equações dos exemplos 1 e 2 podem ser resolvidas também usando a transformação em produto (estudada no capítulo 13).

### Exemplo 3

Resolvendo novamente a equação  $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 1$ .

Dividindo a equação por 2, temos a equivalência:

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

#### Exemplo 4

Uma equação da forma  $a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha = c$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais, pode ser resolvida assim:

$$a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha = c \Leftrightarrow \frac{a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Chamando  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x$  e  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = y$ , vemos que  $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ . Isso

mostra que o ponto  $Q$ , de coordenadas  $(x, y)$ , pertence à circunferência trigonométrica e que, portanto,  $x = \cos \widehat{AQ}$  e  $y = \operatorname{sen} \widehat{AQ}$ . Chamando a medida do arco  $AQ$  por  $\beta$ , temos  $x = \cos \beta$  e  $y = \operatorname{sen} \beta$ . Assim, a equação  $a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha = c$  é equivalente à equação

$$\cos \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ que é equivalente a } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Conclusão: A equação  $a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha = c$  é equivalente a uma equação da forma  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = d$  ou  $\cos(\alpha - \beta) = d$ , que é de fácil resolução.

#### Exercícios

Resolver as equações em  $\mathbb{R}$ :

1)  $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

2)  $2|\operatorname{sen} x|^2 + 3|\operatorname{sen} x| = 2$

3)  $\cos 3x - \cos x = 0$

4)  $\cot g x - \operatorname{sen} 2x = 0$

5)  $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt{\cos^2 x} = 0$

6)  $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x$

7)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$

8)  $\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$

# 15

---

## Triângulos quaisquer

### 15.1 Teorema (Lei dos Cossenos)

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , então valem as igualdades:

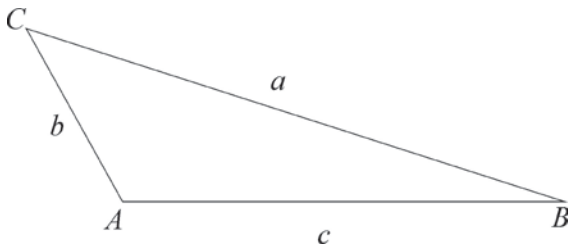
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

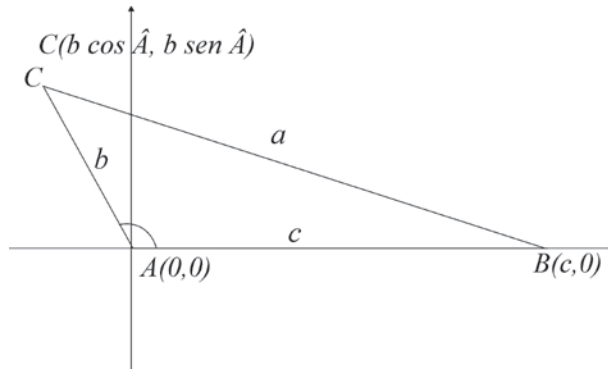
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Demonstração:

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer.



Coloquemos o triângulo no sistema cartesiano com um vértice qualquer sobre a origem e um lado sobre o eixo  $x$ .



$$C(b \cos \hat{A}, b \sin \hat{A}), B(c, 0) \text{ e } A(0, 0)$$

$$a^2 = \overline{BC}^2 = [d(B, C)]^2 = (b \cos \hat{A} - c)^2 + (b \sin \hat{A} - 0)^2$$

$$a^2 = b^2 \cos^2 \hat{A} - 2bc \cos \hat{A} + c^2 + b^2 \sin^2 \hat{A}$$

$$a^2 = b^2 (\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$

Analogamente, colocando a origem nos vértices  $B$  e  $C$  obtemos  $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}}$  e

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$ , respectivamente.

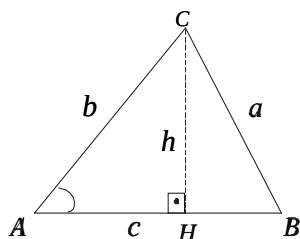
## 15.2 Área do triângulo

1) Cálculo da área do triângulo em função de dois lados e do ângulo por eles formado.

Seja  $ABC$  um triângulo de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Denotamos por  $S$  a sua área. Logo,

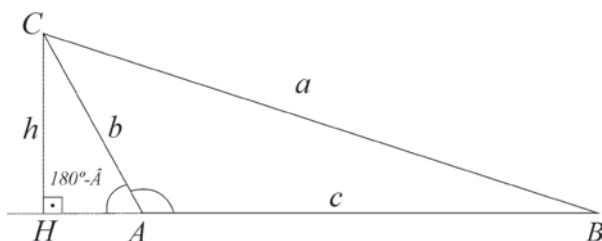
$$S = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}.$$

a) Se o ângulo  $\hat{A}$  é agudo, tracemos a altura  $CH$  relativa à base  $AB$ . Logo,  $CH$  é perpendicular a  $AB$  e  $\sin \hat{A} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin \hat{A}$ .



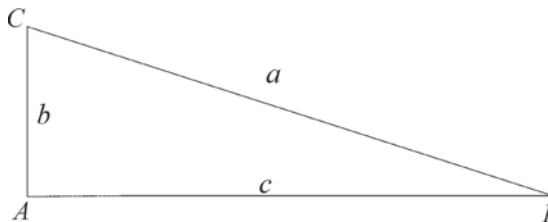
$$\text{Assim, } S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$$

b) Se o ângulo  $\hat{A}$  é obtuso, tracemos a altura  $CH$  relativa à base  $AB$ . Logo o triângulo  $AHC$  é retângulo e  $\sin(180^\circ - \hat{A}) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin(180^\circ - \hat{A}) = b \sin \hat{A}$ , pois  $\sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin \hat{A}$  (redução ao 1º quadrante).



$$\text{Assim, } S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}.$$

c) Se o ângulo  $\hat{A}$  é reto, temos que  $AC$  é a altura.



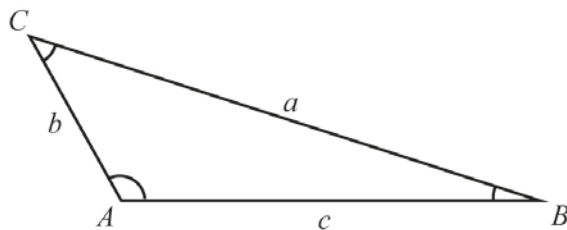
$$\text{Logo, } S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{bc}{2} \cdot 1 = \frac{bc \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}.$$

Pois,  $\text{sen } \hat{A} = 1$ .

Concluimos que  $S = \frac{bc \text{ sen } \hat{A}}{2}$ , em que  $b$  e  $c$  são medidas dos dois lados do ângulo  $\hat{A}$  do triângulo  $ABC$ . Com raciocínio análogo, temos também que a área  $S$  do triângulo  $ABC$  pode ser expressa por  $S = \frac{ab \text{ sen } \hat{C}}{2}$  e  $S = \frac{ac \text{ sen } \hat{B}}{2}$ .

2) Cálculo da área do triângulo em função dos lados.

Seja  $ABC$  um triângulo de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



Sua área  $S$  pode ser dada por  $S = \frac{ab \text{ sen } \hat{C}}{2}$ .

Vamos agora determinar o valor de  $\text{sen } \hat{C}$  em função das medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Pelo teorema dos cossenos,  $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$ .

Assim,  $\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  e como  $\text{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$ , temos que  $\text{sen}^2 \hat{C} = 1 - \cos^2 \hat{C}$ , e

substituindo o  $\cos^2 \hat{C}$  temos  $\text{sen}^2 \hat{C} = 1 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2$ .

Escrevendo em produto o segundo membro dessa igualdade, temos

$$\begin{aligned}\sin^2 \hat{C} &= \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \\ &= \frac{[(a+b)+c][(a+b)-c]}{2ab} \cdot \frac{[c-(a-b)][c+(a-b)]}{2ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{4a^2b^2}\end{aligned}$$

Denotando por  $2p$  o perímetro do triângulo  $ABC$ , escrevemos  $2p = a + b + c$ . Assim temos:

$$2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a$$

$$2p - 2b = a + b + c - 2b = a + c - b$$

$$2p - 2c = a + b + c - 2c = a + b - c$$

Voltando na expressão encontrada para o  $\sin^2 \hat{C}$ , temos

$$\sin^2 \hat{C} = \frac{2p \cdot (2p - 2c) \cdot (2p - 2a) \cdot (2p - 2b)}{4a^2b^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}$$

$$\text{Portanto, } \sin \hat{C} = 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}.$$

$$\text{Sendo } S = \frac{ab \sin \hat{C}}{2}, \text{ temos } S = \frac{ab}{2} \cdot 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}, \text{ concluindo que}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ em que } p \text{ é o semiperímetro do triângulo de lados medindo } a, b \text{ e } c.$$

Obs.: Essa expressão da área em função dos lados também é conhecida como “Fórmula de Heron”.

A demonstração mais antiga dessa fórmula, de que se tem notícia, foi dada por Heron de Alexandria (75 d.C.). Heron deu uma prova essencialmente geométrica e evidentemente diferente da apresentada acima.

Contam os árabes que Arquimedes (287 a 212 a.C.) já conhecia uma fórmula para encontrar a área do triângulo em função dos lados, no entanto a prova mais antiga de que se tem registro é atribuída a Heron.

### 15.3 Teorema (Lei dos Senos)

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Sendo as medidas dos lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  denotadas respectivamente por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , então vale a relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Demonstração:

Relembrando que a área  $S$  do triângulo  $ABC$  é dada por  $S = \frac{ab \operatorname{sen} \hat{C}}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \hat{B}}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \hat{A}}{2}$ .

Então, temos  $\frac{2S}{abc} = \frac{\operatorname{sen} \hat{C}}{c} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{a}$  e concluímos que  $\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{abc}{2S}}$ .

Obs.: Relembramos nossa convenção de que os lados de medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  são opostos respectivamente aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo  $ABC$ .

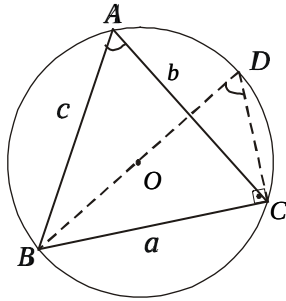
#### Exemplo 1

Vamos provar que, em um triângulo qualquer  $ABC$ , o diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo é igual à razão da medida de qualquer lado pelo seno do ângulo oposto a esse lado,

isto é,  $d = 2r = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$ .

Seja  $ABC$  um triângulo e  $\lambda$  a circunferência de raio  $r$  a ele circunscrita. Sendo  $BD$  uma diagonal, tem-se que o triângulo  $BCD$  é retângulo em  $C$  e  $\hat{D} = \hat{A}$ , pois a corda  $BC$  é vista sob os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{D}$ .





Portanto, no triângulo  $BCD$ , temos:

$$\widehat{sen D} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

$$\text{E como } \hat{A} = \hat{D}, \text{ temos: } \overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{\widehat{sen A}} \Leftrightarrow 2r = \frac{a}{\widehat{sen A}}$$

Pela Lei dos Senos, concluímos que

$$2r = \frac{a}{\widehat{sen A}} = \frac{b}{\widehat{sen B}} = \frac{c}{\widehat{sen C}}.$$

## Exemplo 2

Num triângulo  $ABC$  de lados opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , medindo respectivamente  $a$ ,  $b$  e  $c$ ,

$$\text{mostre que } \frac{a+b}{c} = \frac{\widehat{sen A} + \widehat{sen B}}{\widehat{sen C}}, \frac{a+c}{b} = \frac{\widehat{sen A} + \widehat{sen C}}{\widehat{sen B}} \text{ e } \frac{b+c}{a} = \frac{\widehat{sen B} + \widehat{sen C}}{\widehat{sen A}}$$

De fato: Pela lei dos senos, temos que  $\frac{a}{\widehat{sen A}} = \frac{b}{\widehat{sen B}} = \frac{c}{\widehat{sen C}}$ . Isto é:  $\frac{a}{\widehat{sen A}} = \frac{c}{\widehat{sen C}}$  e

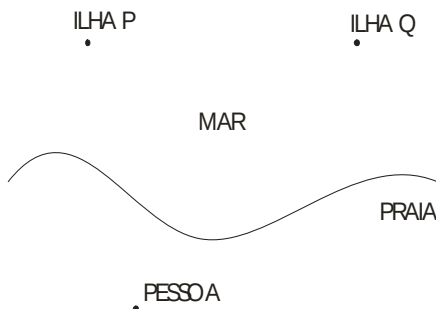
$$\frac{b}{\widehat{sen B}} = \frac{c}{\widehat{sen C}}, \text{ de onde vem: } a = \frac{c \widehat{sen A}}{\widehat{sen C}} \text{ e } b = \frac{c \widehat{sen B}}{\widehat{sen C}}.$$

$$\text{Logo, } a+b = \frac{c \widehat{sen A}}{\widehat{sen C}} + \frac{c \widehat{sen B}}{\widehat{sen C}} = c \cdot \left( \frac{\widehat{sen A} + \widehat{sen B}}{\widehat{sen C}} \right) \text{ e, portanto, } \boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{\widehat{sen A} + \widehat{sen B}}{\widehat{sen C}}}$$

De modo análogo se concluem as outras duas igualdades.

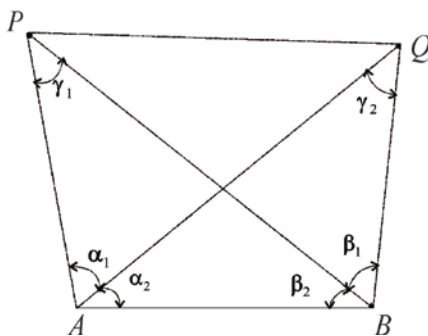
### Exemplo 3 – Cálculo da distância entre dois pontos inacessíveis

Uma pessoa na praia de Setiba, em Guarapari-ES, avista duas ilhas a uma longa distância, a Ilha Descalvada P e a Ilha Rasa Q. Como calcular a distância entre essas ilhas sem fazer a medida direta?



Solução: Escolha dois pontos na praia, A e B, de onde possa avistar as ilhas e meça a distância  $\overline{AB}$ .

Com um instrumento de medir ângulos (teodolito, transferidor, etc.), meça os ângulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  indicados na seguinte figura.



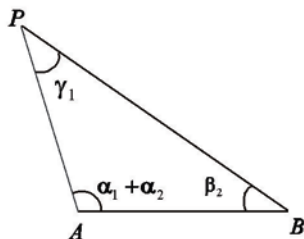
Queremos obter a distância de P até Q.

No triângulo PAQ da figura é conhecida a medida  $\alpha_1$  do ângulo  $\widehat{PAQ}$ . Se obtivermos as medidas  $\overline{AP}$  e  $\overline{AQ}$ , usaremos a Lei dos Cossenos para obter a medida  $\overline{PQ}$ .

$$\text{Assim, } \boxed{\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \alpha_1} (*)$$

### Cálculo de $\overline{AP}$

Considere o triângulo  $ABP$ . Assim,  $\gamma_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_2 = 180^\circ$ , que permite conhecer a medida  $\gamma_1$ :

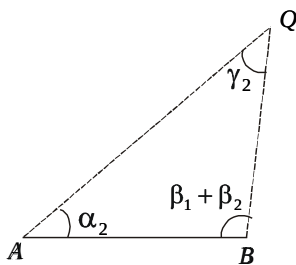


$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2)$$

Usando a Lei dos Senos, temos  $\frac{\overline{AP}}{\text{sen } \beta_2} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_1} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } \gamma_1}$

### Cálculo de $\overline{AQ}$

Considere o triângulo  $ABQ$ . Logo,  $\alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma_2 = 180^\circ$ . Portanto,  $\gamma_2$  será conhecido:



$$\gamma_2 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)$$

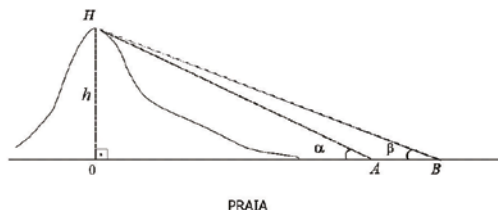
Usando a Lei dos Senos, temos

$$\frac{\overline{AQ}}{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_2} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } (\beta_1 + \beta_2)}{\text{sen } \gamma_2}$$

Conclusão: Substituindo os valores  $\overline{AP}$  e  $\overline{AQ}$  na equação (\*) obtemos o valor de  $\overline{PQ}$ , que é a distância entre as ilhas.

#### Exemplo 4 – Cálculo da altura de um ponto inacessível

Considere uma pessoa na praia de Piúma que avista o cume do Monte H e deseja calcular a altura daquela montanha.



#### Solução:

Seja A o ponto onde está a pessoa num local plano. Com o auxílio de um instrumento, meça o ângulo  $\alpha$ , como na figura. Recue até o ponto B de modo que esse esteja no plano determinado pelo triângulo hipotético AOH. Meça a distância AB e o ângulo  $\beta$ .

Da figura temos:

- $\overline{AB} = a$  (medida conhecida)
- $\overline{OA} = x$  (medida desconhecida)
- $\overline{OH} = h$  (medida desconhecida)
- $\alpha, \beta$  (medidas conhecidas)

Como os triângulos AOH e BOH são retângulos, temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA} + \overline{AB}} = \frac{h}{x + a} \Rightarrow h = (x + a) \operatorname{tg} \beta$$

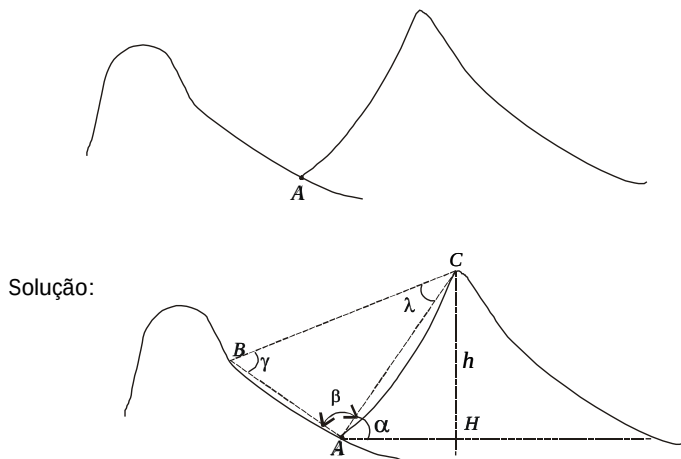
Portanto:

$$x \operatorname{tg} \alpha = (x + a) \operatorname{tg} \beta \Rightarrow x \operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{tg} \beta + a \operatorname{tg} \beta \Rightarrow x(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = a \operatorname{tg} \beta \Rightarrow x = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

Sendo  $h = x \operatorname{tg} \alpha$ , chegamos a 
$$h = a \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

### Exemplo 5 – Cálculo da altura de um ponto inacessível

Uma pessoa entre as montanhas de Domingos Martins, Espírito Santo, avista o cume de uma montanha e deseja calcular a sua altura em relação ao nível de seus pés.



Observe que não há um plano horizontal, como no exemplo 4, no qual a pessoa possa medir uma distância  $AB$ . Mesmo assim, marque um ponto acessível  $B$ , como na figura. Calcule a distância  $AB$  e meça os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

O ângulo  $\lambda$  é calculado sabendo que  $\gamma + \beta + \lambda = 180^\circ$ . Logo,

$$\lambda = 180^\circ - (\gamma + \beta)$$

O triângulo  $ACH$  é retângulo, logo  $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}}$  e a altura procurada é  $\overline{HC} = \overline{AC} \cdot \text{sen } \alpha$ , mas será possível encontrar  $\overline{AC}$  usando a Lei dos Senos no triângulo  $ABC$ .

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } \lambda} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \gamma}$$

Assim,

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \lambda}$$

E, finalmente, a altura procurada é

$$\overline{HC} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \lambda}$$

## Exercícios

- 1) Duplicando dois lados de um triângulo e mantendo fixo o ângulo entre eles, qual a relação entre as áreas dos dois triângulos?
- 2) Calcule o seno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.
- 3) Numa circunferência de raio 1, considere um ângulo central  $PÔQ$  de medida  $\alpha$  radianos,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Determine, em função de  $\alpha$ , a área da região limitada pelo arco e pela corda  $PQ$ .
- 4) Seja um triângulo retângulo de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Externamente a esse triângulo, sobre cada um dos seus lados, constrói-se um quadrado. Determine, em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , as medidas dos lados do triângulo cujos vértices são os centros dos quadrados.

- 5) Prove a proposição (Lei das Tangentes):

Seja  $ABC$  um triângulo não retângulo e não isósceles. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , então valem as igualdades

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)}.$$

- 6) Resolva o exercício 4 da seção 4.1, igualando a área do triângulo  $ABC$  com a soma das áreas dos triângulos obtidos pela bissetriz do ângulo  $\hat{A}$ .
- 7) A declividade de uma reta, quando vista através do ângulo que ela forma com o eixo  $x$  do plano cartesiano, é chamada também de coeficiente angular.

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função afim  $f(x) = ax + b$ , então mostre que:

a)  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  em que  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  são dois pontos quaisquer do gráfico de  $f$ ;

b)  $a = \operatorname{tg} \theta$  em que  $\theta$  é o ângulo formado pelo eixo  $x$  com o gráfico de  $f$  ( $\theta$  medido no sentido positivo).

- 8) (Condição de perpendicularismo de duas retas no plano cartesiano).

Mostre que duas retas, não verticais, são perpendiculares se e somente se o produto de suas declividades é igual a  $-1$ .

- 9) Use o exercício 8 acima para dar uma demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.

*"Se  $ABC$  é um triângulo tal que  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ , então o triângulo  $ABC$  é retângulo."*

- 10) Use a Lei dos Cossenos para dar outra demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.





# III

**FUNÇÕES  
TRIGONOMÉTRICAS**



Nesta parte do livro, iniciaremos o estudo das razões trigonométricas do ponto de vista do conceito de Função. Chama-se função toda correspondência que associa cada valor da variável  $x$  de um conjunto  $X$  um único valor da variável  $y$  num conjunto  $Y$ . Se a cada número real  $x$ , que é a medida de um arco  $AP$ , associamos o número real  $\text{sen } x$ , estamos, assim, definindo uma função que denominaremos função seno.

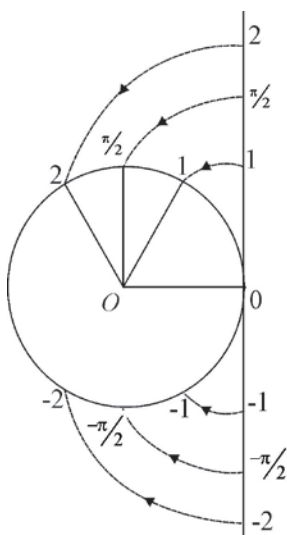
# 16

---

## Representação dos números reais na circunferência trigonométrica

A cada número real  $x$  corresponde um ponto  $P$  na circunferência trigonométrica, tal que a medida do arco  $AP$  seja  $x$  radianos. Como a circunferência trigonométrica possui raio igual a 1 unidade, o ponto dessa circunferência correspondente ao número 1 é a extremidade do arco de medida 1 radiano.

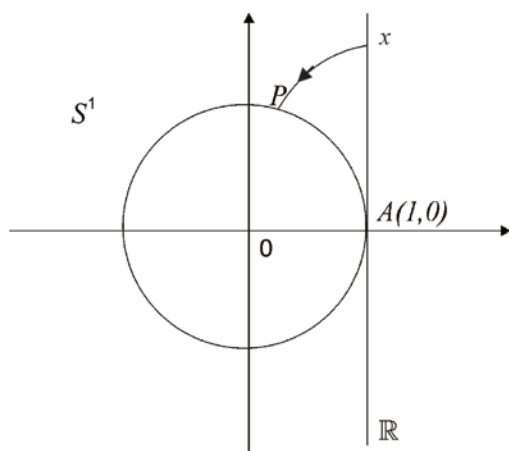
Geometricamente, é como se estivéssemos enrolando a reta real na circunferência trigonométrica. No sentido anti-horário encontram-se os pontos correspondentes aos números reais positivos e no sentido horário aos negativos.



Dessa forma, se a um ponto  $P$  da circunferência trigonométrica associamos um número real  $\alpha$ , então todos os números reais  $x = \alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , serão representados pelo mesmo ponto  $P$ .

Isso significa que o arco  $AP$  tem comprimento  $x = \alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e intuitivamente o arco inicia em  $A$ , dá  $k$  voltas na circunferência e termina no ponto  $P$ .

A ideia geométrica intuitiva de enrolar a reta real orientada na circunferência trigonométrica  $S^1$  pode ser expressa formalmente pela função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que consiste em associar cada número real  $x$ , o ponto  $P$  sobre  $S^1$  de modo que o arco  $AP$  tenha comprimento igual a  $x$ , em que  $A = (1, 0)$ . Se  $x > 0$ , então o arco de  $A$  até  $P$  é percorrido no sentido anti-horário, chamado sentido positivo, e se  $x < 0$ , o arco  $AP$  é percorrido no sentido horário a partir do ponto  $A$  e chamado de sentido negativo.



$$E(x) = P \text{ quando } \widehat{AP} = x$$

Dessa maneira, enquanto  $x$  percorre na reta real um intervalo de comprimento  $\ell$ , a imagem  $E(x)$  da função de Euler percorre um arco de mesmo comprimento  $\ell$ . Veja na figura que  $E(0) = A$ ,  $E(2k\pi) = A$  e, de modo geral,  $E(x + 2k\pi) = E(x) \forall k \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

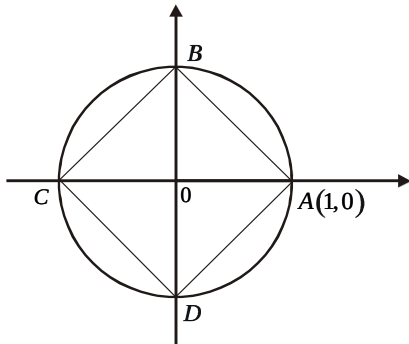
### Exercício 1

- 1) Localize aproximadamente na circunferência trigonométrica as extremidades  $P$  dos arcos  $AP$  associados pela função de Euler aos números reais:

- a)  $-2$     b)  $2$     c)  $5$     d)  $-6$     e)  $99\pi$     f)  $\frac{33\pi}{4}$     g)  $20$

### Exercício 2

Dê a expressão geral dos números reais associados às medidas dos arcos  $AP$  quando  $P$  é qualquer vértice do quadrilátero  $ABCD$  da figura.



$$A = E\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ para } k = 0, 4, 8, 12, \dots$$

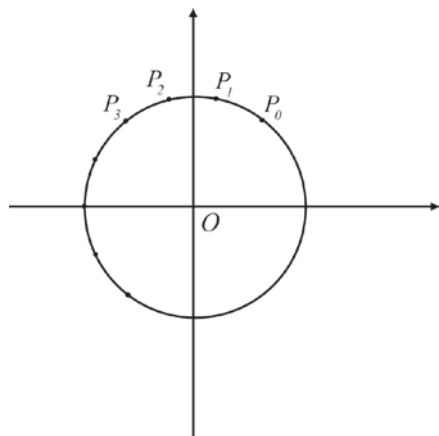
$$B = E\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ para } k = 1, 5, 9, 13, \dots$$

$$C = E\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ para } k = 2, 6, 10, 14, \dots$$

$$D = E\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ para } k = 3, 7, 11, 15, \dots$$

### Exercício 3

Considere um polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência trigonométrica.



Se  $x_0$  é um número real associado a um vértice  $P_0$ , isto é,  $E(x_0) = P_0$ , então escreva a expressão geral dos números reais associados aos vértices desse polígono.

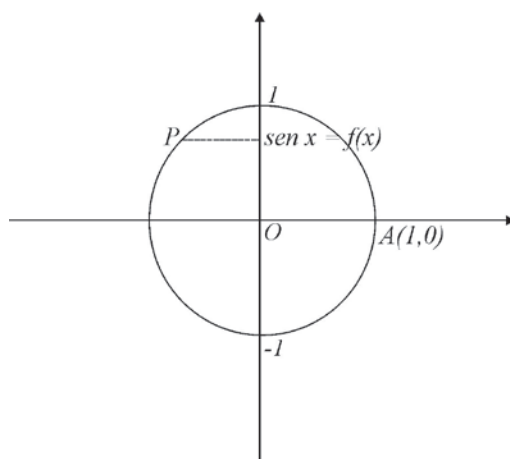
# 17

---

## A função seno

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é assim definida: Para cada número real  $x$ , podemos associar um ponto  $P$  na circunferência trigonométrica tal que a medida do arco  $AP$  seja  $x$ . Definimos  $f(x)$  como sendo o número real correspondente à projeção vertical de  $P$  sobre o eixo vertical do sistema de coordenadas cartesianas, também conhecido como ordenada do ponto  $P$ .

Este número real  $f(x)$  é denominado *sen  $x$* .



Observe que  $-1 \leq f(x) \leq 1$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \text{sen } x$ , é chamada de função seno.

$$x \mapsto \text{sen } x$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{contradomínio} = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$\text{Gr}(f) = \{(x, \text{sen } x); x \in \mathbb{R}\}$$

Para representar o  $\text{Gr}(f)$  no plano cartesiano seria necessário, em princípio, conhecer todos os pares ordenados  $(x, \text{sen } x)$ . No entanto, com o conhecimento de alguns desses pontos e de propriedades dessa função, esboçaremos uma figura para o gráfico.

## 17.1 Propriedades e gráfico

Propriedade 1. A função seno é ímpar

Com efeito, seja  $f(x) = \text{sen } x$ .

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos

$$f(-x) = \text{sen}(-x) = \text{sen}(0 - x) = \text{sen } 0 \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 0 = -\text{sen } x = -f(x)$$

Assim,  $f$  é função ímpar. Portanto,  $\text{Gr}(f)$ , representado no plano cartesiano, é simétrico em relação à origem  $O$ .

**Definição:** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica se existe um número real  $p \neq 0$  tal que  $f(x+p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O menor  $p > 0$  que satisfaz a equação é chamado de período da função.



Propriedade 2. A função seno é periódica de período  $p = 2\pi$

Com efeito, seja  $f(x) = \text{sen } x$ .

Pergunta-se: Existe  $p \in \mathbb{R}^*$  tal que  $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ?

Responder essa pergunta é equivalente a responder se a equação  $f(x+p) = f(x)$ , cuja incógnita é  $p$ , tem solução independente dos valores de  $x$ . Para tal, basta resolver a equação:

$$\text{sen}(x+p) = \text{sen } x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resolvendo-a:

$$\text{sen}(x+p) - \text{sen } x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 \text{sen} \left[ \frac{(x+p)-x}{2} \right] \cdot \cos \left[ \frac{(x+p)+x}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \text{sen} \frac{p}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{p}{2} \right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{sen} \frac{p}{2} = 0, \text{ pois } \cos \left( x + \frac{p}{2} \right) \neq 0 \text{ para muitos valores de } x.$$

$$\text{sen} \frac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{p \in \mathbb{R}^*; p = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*\} = \{\dots, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi, \dots\}$$

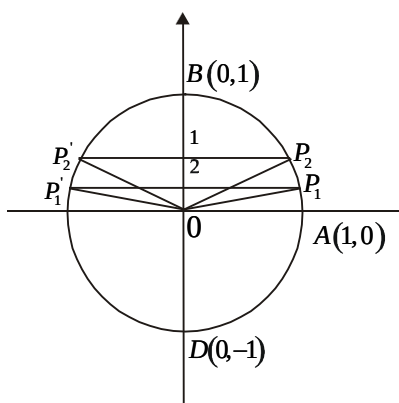
Obs.: A equação  $\text{sen}(x+p) = \text{sen } x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$  pode ser resolvida geometricamente como no capítulo 14, sobre equações trigonométricas.

Resposta: O conjunto dos números reais  $p$  tais que  $f(x+p) = f(x)$  podem ser expressos por  $p = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*$ . Disso se conclui que a função  $f(x) = \text{sen } x$  é periódica. O menor número positivo solução da equação é  $p = 2\pi$ . Portanto, o período é  $2\pi$ .

Esboço do gráfico da função  $f(x) = \text{sen } x$ .

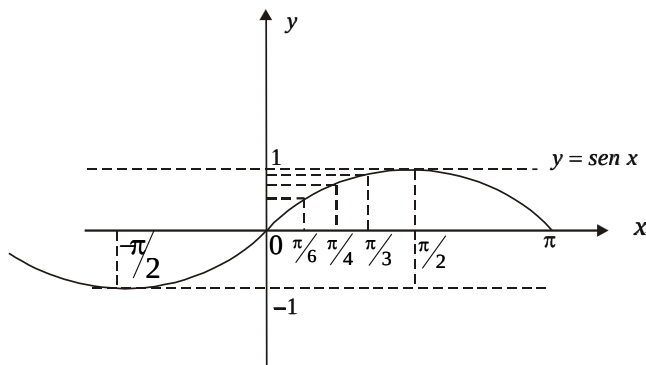
Sabemos que

- $f$  é uma função ímpar, logo o  $Gr(f)$  é simétrico em relação à origem.
- $f$  é periódica de período  $2\pi$ .
- Na circunferência trigonométrica, arcos  $AP$  cujos pontos  $P$  são simétricos em relação ao eixo  $y$  possuem senos iguais e, portanto, no intervalo  $[0, \pi]$ , o gráfico da função seno é simétrico em relação ao eixo  $x = \frac{\pi}{2}$ .



Com essas informações e conhecendo o seno de alguns arcos do 1º quadrante, podemos esboçar o seguinte gráfico.

$$\begin{aligned} f(0) &= \text{sen} 0 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \text{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \text{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \text{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$



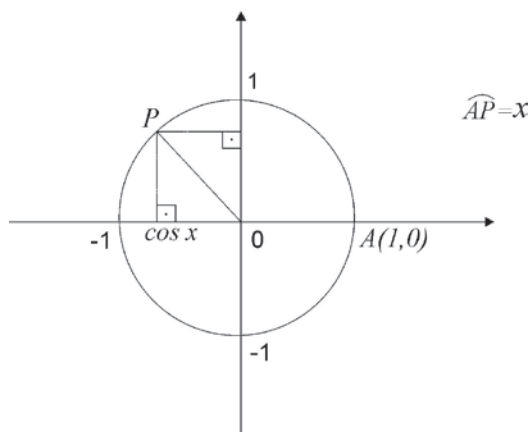
Observe que a representação geométrica das imagens  $f(x)$  no eixo  $y$  do  $Gr(f)$  são idênticas nos valores  $\text{sen } x$  representados nesse eixo quando olhados na circunferência trigonométrica.

# 18

---

## A função cosseno

Com raciocínio completamente análogo, definimos a função cosseno  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  à abscissa do ponto  $P$  da circunferência trigonométrica, cujo arco  $AP$  tem medida  $x$ .



Assim, a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  expressa por  $g(x) = \cos x$  é denominada função cosseno.

$$x \mapsto g(x) = \cos x$$

Observe que, sendo  $P$  um ponto da circunferência unitária, temos que as abscissas, assim como as ordenadas de  $P$ , pertencem ao intervalo  $[-1, 1]$ .

Isto é,  $-1 \leq \cos x \leq 1$  e  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

Para a função  $g$ , temos:

$$Dom(g) = \mathbb{R}$$

$$\text{Contradomínio} = \mathbb{R}$$

$$Im(g) = [-1, 1]$$

$$Gr(g) = \{(x, \cos x); x \in \mathbb{R}\}.$$

## 18.1 Propriedades e gráfico

1) A função cosseno é par.

Com efeito:

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$g(-x) = \cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cdot \cos x + \sin 0 \cdot \sin x = \cos x = g(x)$$

2) A função cosseno é periódica de período  $2\pi$ .

De fato:

Resolvendo a equação  $\cos(x + p) = \cos x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , obtemos as soluções

$$p = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

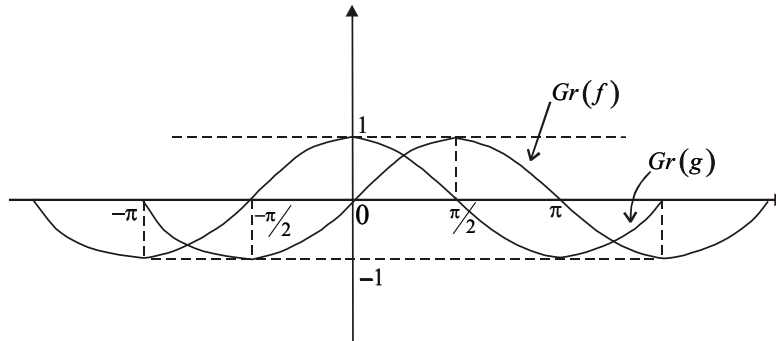
## Gráfico da função cosseno

Sendo  $f(x) = \sin x$ , temos que

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos x = \cos x = g(x).$$

Isto é,  $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

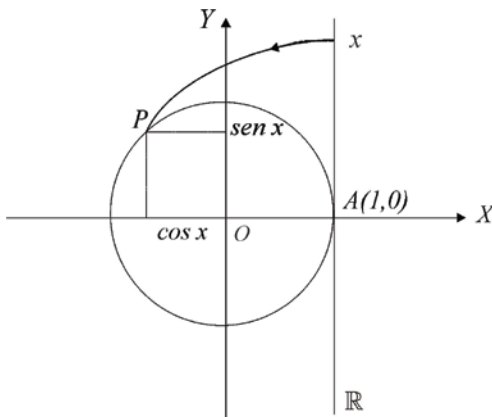
Portanto, o gráfico da função  $g$  é uma translação horizontal de  $\frac{\pi}{2}$  para a esquerda do gráfico da função  $f$ .



As duas curvas traçadas são, na verdade, a mesma, denominada “senóide”.

Mais formalmente, as funções  $f(x) = \text{sen } x$  e  $g(x) = \cos x$  podem ser vistas como resultado da composição da função de Euler com a função projeção. Sejam as funções projeções  $\Pi_{ABS} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Pi_{ABS}(x, y) = x$  e  $\Pi_{ORD} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Pi_{ORD}(x, y) = y$ .

Assim, a composta  $\mathbb{R} \xrightarrow{E} S^1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Pi_{ORD}} \mathbb{R}$  é a função seno, pois se  $E(x)$  é o ponto sobre  $S^1$  e  $\Pi_{ORD}(P)$  é a projeção sobre o eixo  $y$  do sistema de coordenadas, então  $f(x) = \Pi_{ORD}(E(x)) = \text{sen } x$ . Analogamente, temos que  $g(x) = \Pi_{ABS}(E(x)) = \cos x$ .



Sendo  $E(x) = P$  temos que

$$\Pi_{ORD}(P) = \text{sen } x \text{ e } \Pi_{ABS}(P) = \cos x.$$

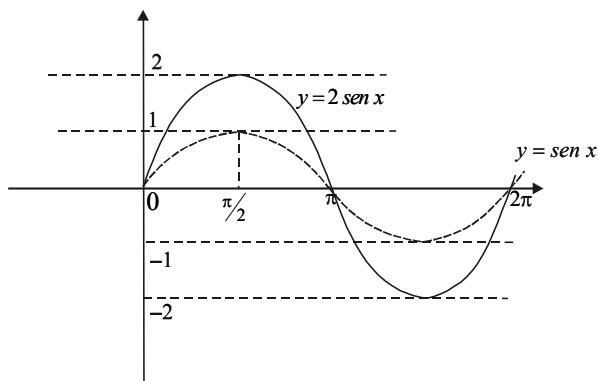
Resumindo, podemos reescrever a função de Euler assim:

$$E(x) = (\cos x, \text{sen } x)$$

### Exemplo 1

O gráfico de função  $y = 2\operatorname{sen} x$  é uma expansão ou dilatação vertical do gráfico da função seno.

De fato:  $-2 \leq 2 \operatorname{sen} x \leq 2$



### Exemplo 2

Dada a função  $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ , sabemos que o gráfico de  $g$  é uma contração horizontal do gráfico da função seno. Logo, o período da função  $g$  é o período da função seno dividido por 2, isto é,  $p = \pi$ .

Podemos também ver isso usando a definição de função periódica, resolvendo a equação  $g(x+p) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e tomando a menor solução positiva.

$$g(x+p) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2(x+p) = \operatorname{sen} 2x, \quad \forall x \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x+2p) - \operatorname{sen} 2x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

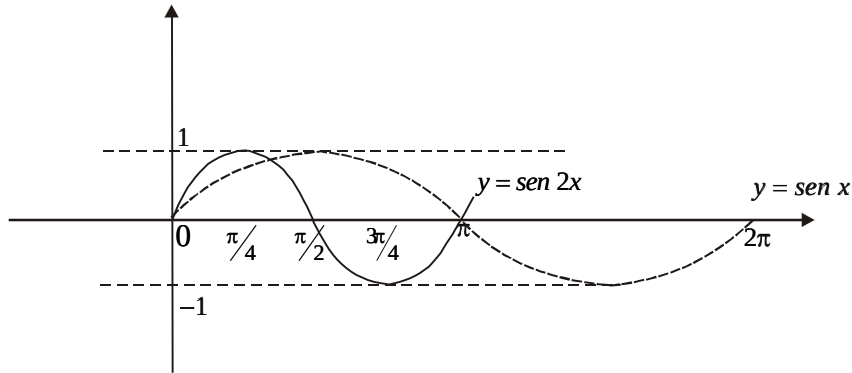
$$2 \operatorname{sen} \left( \frac{2x+2p-2x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{2x+2p+2x}{2} \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2 \operatorname{sen} p \cdot \cos(2x+p) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{sen} p = 0, \quad \text{pois } \cos(2x+p) \neq 0 \text{ para certos valores de } x$$

reais, por exemplo  $x = \frac{-p}{2}$ . Logo,  $p = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Portanto, a equação possui solução não nula

$p = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . A menor solução positiva é  $p = \pi$ .

Gráfico de  $g(x) = \text{sen } 2x$



### Exemplo 3

Dada a função  $g(x) = a + b \text{sen}(cx + d)$ , com  $a, b, c \neq 0$ , vamos mostrar que o período de

$$g \text{ é } p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

De fato, resolvendo a equação  $g(x + p) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$a + b \text{sen}[c(x + p) + d] = a + b \text{sen}[cx + d] \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\text{sen}(cx + cp + d) = \text{sen}(cx + d) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(cx + cp + d) = (cx + d) + 2k\pi \text{ ou } (cx + cp + d) = \pi - (cx + d) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2k\pi}{c} \text{ ou } p = -2x + \left[ \frac{(2k+1)\pi - 2d}{c} \right] \text{ (essa depende de } x, \text{ como por exemplo, se}$$

$$x = -\left(\frac{d}{c} + \frac{p}{2}\right) \text{ então } p \text{ não é a solução}).$$

Logo,  $p = \frac{2k\pi}{c}$  é a solução que não depende de  $x$ .

Portanto, a equação inicial possui solução não nula, a saber:  $p = \frac{2k\pi}{c}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$  e o conjunto solução é  $S = \left\{ \pm \frac{2\pi}{c}, \pm \frac{4\pi}{c}, \pm \frac{6\pi}{c}, \dots \right\}$ . O menor  $p > 0$  que será o período é

$$p = \frac{2\pi}{|c|} = \begin{cases} \frac{2\pi}{c} & \text{se } c > 0 \\ \frac{2\pi}{-c} & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Observe que o gráfico de  $g(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$  pode ser obtido do gráfico de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  através de contrações, expansões, reflexões e translações, conforme os valores das constantes  $a, b, c$  e  $d$ .

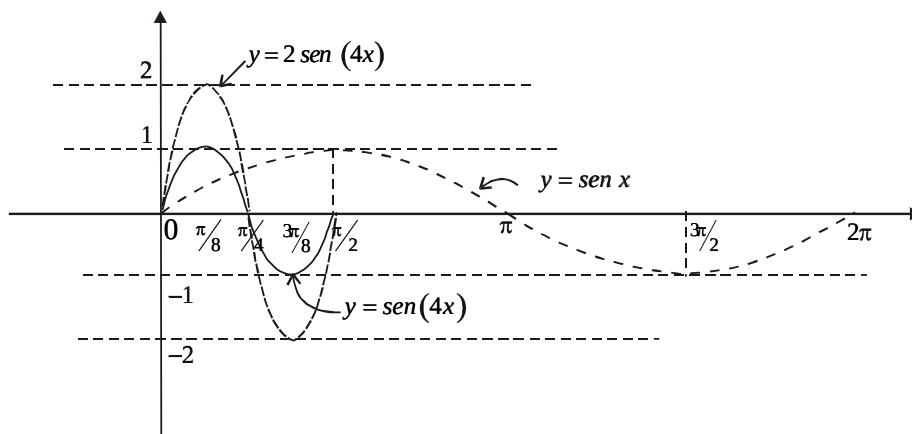
#### Exemplo 4

Esboçar o gráfico de  $g(x) = 1 + 2 \operatorname{sen}(4x)$ .

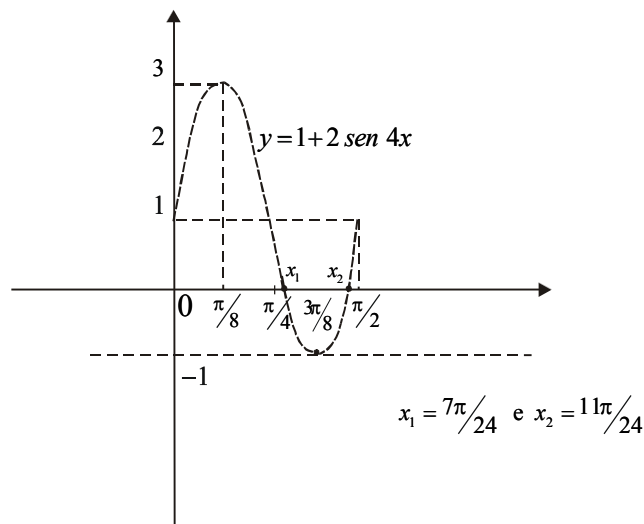
$$\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$\text{Período: } p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g) &= [-1, 3], \text{ pois } -1 \leq \operatorname{sen}(4x) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \operatorname{sen}(4x) \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 1 \leq 1 + 2 \operatorname{sen}(4x) \leq 2 + 1 \Leftrightarrow \\ &-1 \leq \underbrace{1 + 2 \operatorname{sen}(4x)}_{g(x)} \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq g(x) \leq 3. \end{aligned}$$







Zeros da função  $g$ :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} 4x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 4x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z(g) = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

### Exemplo 5

Dada a função  $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ , determine:

- $\operatorname{Dom}(h)$  e  $\operatorname{Im}(h)$
- Zeros de  $h$
- Esboço do gráfico de  $h$

Vamos trocar a expressão  $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$  por outra equivalente, mas de fácil manejo:

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{sen} x + \cos x = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x - (\frac{\pi}{2} - x)}{2} \right) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Outro modo mais direto:

$$h(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Assim,  $h$  pode ser também expressa por  $h(x) = \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$ . Portanto, temos:

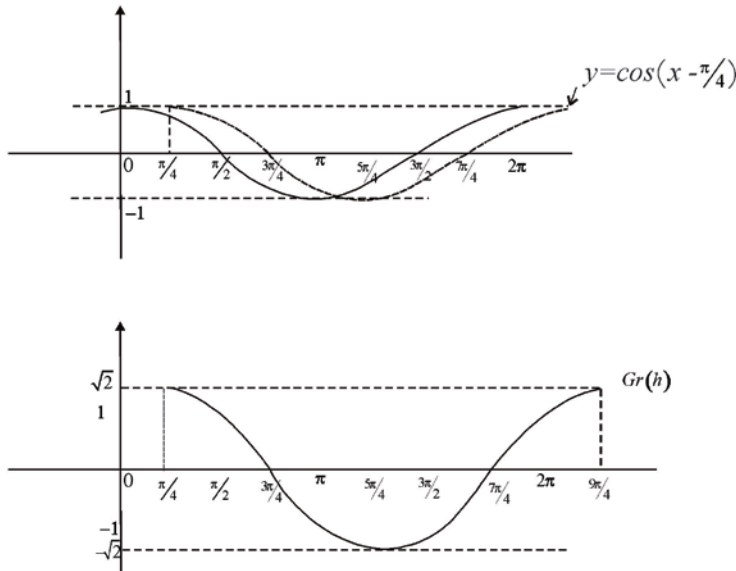
a)  $Dom(h) = \mathbb{R}$  e  $Im(h) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

b)  $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) O gráfico de  $h$  é o resultado de uma translação horizontal de  $\frac{\pi}{2}$  para a direita seguida de uma dilatação vertical de  $\sqrt{2}$  no gráfico da função  $g(x) = \cos x$

O gráfico da função  $h$ :



Observação:

Com raciocínio análogo ao usado no exemplo 4 do capítulo 14, sempre podemos expressar as funções do tipo  $H(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ , na forma equivalente  $H(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen}(x + \alpha)$  ou  $H(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(x - \alpha)$ .



# 19

---

## Exercícios

1) Dê o domínio das funções:

a)  $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x-1}$

b)  $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

c)  $h(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

2) Dê o domínio, a imagem, os zeros e o gráfico das funções:

a)  $y = -1 + 2 \cos 2x$

b)  $y = |-1 + 2 \cos 2x|$

c)  $y = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

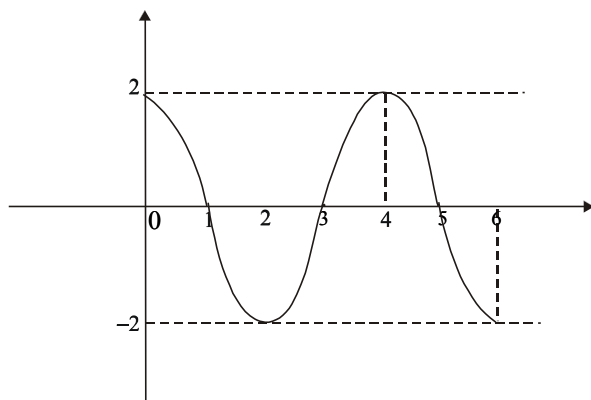
d)  $y = \operatorname{sen} \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right)$

e)  $y = 1 - 2 \operatorname{sen} \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)$

f)  $y = \operatorname{sen} |x|$

g)  $y = \cos^2 x$  (Dica: veja em 13.2 que  $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$  )

- 3) Encontre os números  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a curva dada seja o gráfico da função  $y = b \cos(cx - d)$



- 4) Resolva as equações em  $\mathbb{R}$ :

- a)  $|\sin x| = 1$
- b)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- c)  $\sin x + \cos x = 1$
- d)  $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{8}$
- e)  $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$

- 5) Resolva a inequação:

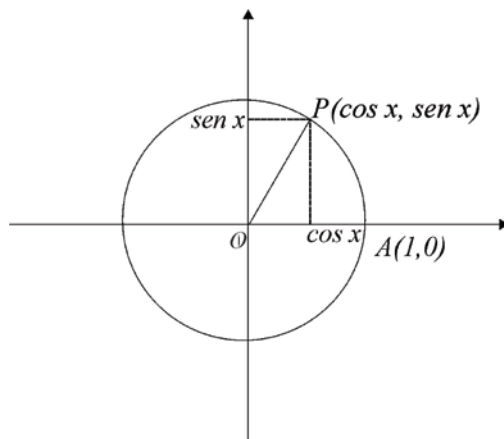
- a)  $2 \sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0$  no intervalo  $[0, 2\pi]$
- b)  $\cos 2x < 1 + \sin x$  em  $\mathbb{R}$
- c)  $\sin x \geq \cos x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$

# 20

---

## A função tangente

A cada número real  $x$ , temos em correspondência, na circunferência trigonométrica, um arco  $AP$  de medida  $x$ . Para cada arco  $AP$  cuja abscissa do ponto  $P$  seja não nula, associamos a razão da ordenada pela abscissa  $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ .

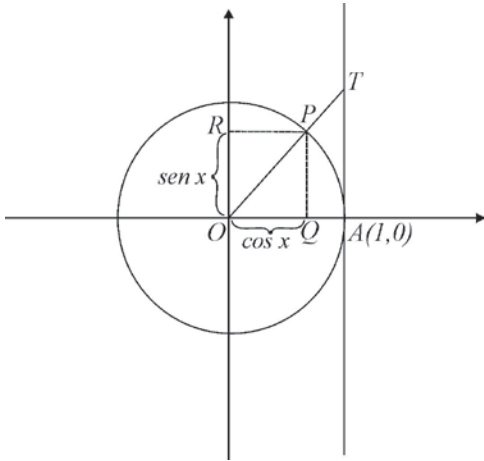


Assim, definimos a função  $f : \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  que denominamos função

tangente e denotamos por  $f(x) = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

Geometricamente, temos:



A medida algébrica do arco  $AP$  é  $x$ . Os triângulos  $OPQ$  e  $POR$  são congruentes e semelhantes ao triângulo  $OTA$ .

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{sen\,x}}{\overline{\cos\,x}} = \frac{\overline{AT}}{1} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{\overline{sen\,x}}{\overline{\cos\,x}} = f(x).$$

Figura análoga pode ser feita para  $P$  em qualquer quadrante, desde que se considere  $\overline{AT}$ ,  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{OR}$ , etc. como a medida algébrica do segmento (medida com sinal).

## 20.1 Propriedades e gráfico

- 1) A função tangente é ímpar.

De fato:

Como a função seno é ímpar e a cosseno é par, temos

$$f(-x) = \frac{\overline{sen(-x)}}{\overline{\cos(-x)}} = \frac{-\overline{sen\,x}}{\overline{\cos\,x}} = -f(x) \quad \forall x \in Dom(f).$$

- 2) A função tangente é periódica de período  $p = \pi$ .

De fato:

A equação  $f(x+p) = f(x)$  tem solução na incógnita  $p$  para todo

$$x \in Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$tg(x+p) - tg(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{sen[(x+p)-x]}}{\overline{\cos(x+p)} \cdot \overline{\cos\,x}} = 0 \Leftrightarrow \overline{sen\,p} = 0 \Rightarrow p = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Logo, no conjunto}$$

$S = \{p \in \mathbb{R}; p = k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$  estão as soluções não nulas. Portanto,  $f(x) = tg\,x$  é periódica.

O período é o menor elemento positivo de  $S$ , isto é,  $p = \pi$ .



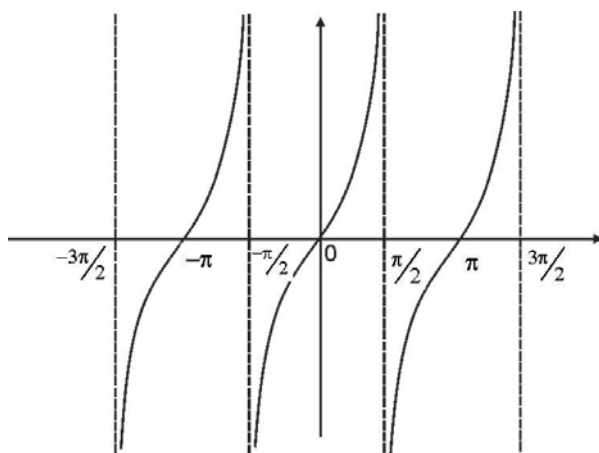
3) A função tangente é crescente no intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . De fato:  $\forall x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  com

$$x_1 < x_2 \text{ temos } 0 < x_2 - x_1 < \pi. \text{ Logo, } f(x_2) - f(x_1) = \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} \text{ é}$$

positivo, pois  $\cos x_1 > 0$ ,  $\cos x_2 > 0$  e  $\operatorname{sen}(x_2 - x_1) > 0$ .

Assim,  $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$ , o que significa que a função tangente é crescente nesse intervalo.

### Gráfico da função tangente



Como a função tangente tem período  $p = \pi$ , segue que ela é crescente em cada intervalo da forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

### Exemplo 1

A função  $f(x) = a + b \operatorname{tg}(cx + d)$  com  $c \neq 0$  tem período  $p = \frac{\pi}{|c|}$ .

Resolvendo a equação  $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in \operatorname{Dom}(f)$ , temos:

$$\operatorname{tg}(cx + cp + d) - \operatorname{tg}(cx + d) = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}[cx + cp + d - cx - d]}{\cos(cx + cp + d) \cdot \cos(cx + d)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen}(cp)}{\cos(cx + cp + d) \cdot \cos(cx + d)} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} cp = 0 \Leftrightarrow cp = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p = \frac{k\pi}{c}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a equação possui solução não nula  $p = \frac{k\pi}{c}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$  e a menor solução positiva é

$$\frac{\pi}{c} \text{ se } c > 0 \text{ ou } \frac{\pi}{-c} \text{ se } c < 0, \text{ ou seja, o período é } \frac{\pi}{|c|}.$$

Obs.: Lembre-se de que a equação  $\operatorname{tg}(cx + cp + d) = \operatorname{tg}(cx + d)$  pode ser resolvida geometricamente, conforme estudado no capítulo 14 (equações trigonométricas). Desse modo, temos

$$cx + cp + d = cx + d + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow cp = k\pi \Rightarrow p = \frac{k\pi}{c}; k \in \mathbb{Z}^*.$$

## Exemplo 2

Seja a função dada pela expressão  $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

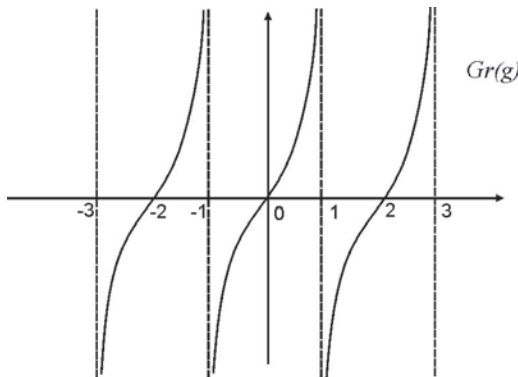
$$\operatorname{Dom}(g) = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} = \{ x \in \mathbb{R}; x \neq 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

Isto é: o domínio de  $g$  é o conjunto dos números reais, excluídos os números inteiros ímpares.

Assim, temos  $g: \mathbb{R} - \{ 2k+1; k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

O período é  $p = \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 2$ .

O gráfico de  $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  é uma contração horizontal de  $\frac{\pi}{2}$  do gráfico da função  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

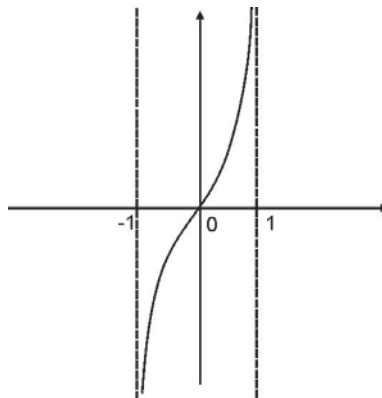


Observe pelo gráfico que  $g$ , quando restrita ao intervalo  $(-1, +1)$ , é uma bijeção com o eixo  $y$ , que é a reta real.

Notação:  $g|_{(-1,1)} : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  é uma função bijetora

Assim, vimos que há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e o intervalo aberto  $(-1, +1)$ . Isto é, a função  $\bar{g} : (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\bar{g}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  é uma bijeção, cuja justificativa pode ser vista pelo seu gráfico:



### Exercícios

- 1) Prove algebricamente que a função  $\bar{g}$  (definida no exemplo 2) é bijetora.
- 2) A função  $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$  é periódica? Em caso afirmativo, determine seu período.
- 3) Mostre através de exemplo que a função tangente não é crescente em todo o seu domínio

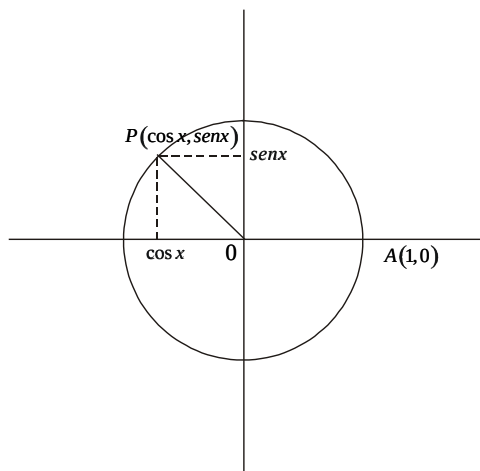
$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



# 21

## A função cotangente

Definimos a função cotangente associando cada número real  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ao quociente da abscissa pela ordenada do ponto  $P$  da circunferência trigonométrica, cujo arco  $AP$  mede  $x$ .



Notação:

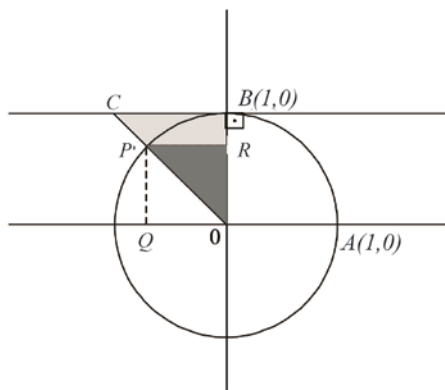
$$f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$f$  é denominada função cotangente e abreviada por

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Interpretação Geométrica



Pela semelhança dos triângulos hachurados, temos:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \overline{BC}, \text{ e como } \overline{PR} = \overline{OQ}, \text{ concluímos que}$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} = \overline{BC}.$$

$$\text{Assim, } f(x) = \cot gx = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{m(OQ)}{m(OR)} = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}} = -\overline{BC} = m(BC)$$

Portanto, se  $x$  é a medida algébrica do arco  $AP$ , então  $f(x)$  é a medida algébrica do segmento  $BC$ .

## 21.1 Propriedades e gráfico

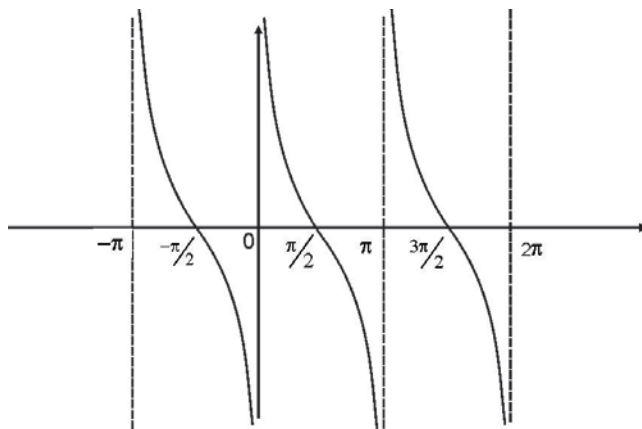
1) A função cotangente é ímpar.

2) A função cotangente é periódica de período  $\pi$ .

As provas dessas duas propriedades são inteiramente análogas às aquelas já feitas para a função tangente.

### Gráfico da função cotangente

Como a função tangente é ímpar e  $tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot gx$ , então a função  $f(x) = \cot gx = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ . Assim, o gráfico da função  $f(x) = \cot gx$  é uma translação horizontal de  $\frac{\pi}{2}$  para a direita, seguida de uma reflexão em torno do eixo  $x$  da função tangente.



Observe pelo gráfico que a função cotangente é decrescente em cada intervalo aberto da forma  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Isso também pode ser observado pela definição de cotangente na circunferência trigonométrica.

### Exercícios

- 1) Seja  $f(x) = a + b \cot g(cx + d)$  com  $b$  e  $c$  não nulos. Verifique que  $f$  é uma função periódica e determine o seu período.
- 2) Dada  $g(x) = |\cot g x| - 1$ , determine:
  - a) domínio, zeros e o conjunto imagem de  $g$
  - b) um esboço do gráfico de  $g$
- 3) Resolva a inequação:  $1 - \cot g 2x < 0$
- 4) Esboce no mesmo sistema cartesiano os gráficos de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = \operatorname{tg} x$  no intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Os gráficos se intersectam quantas vezes?

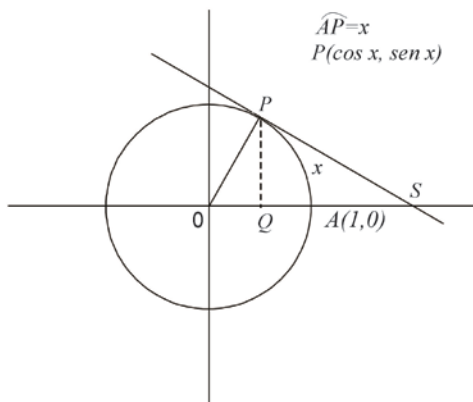




# 22

## A função secante

A cada número real  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , associamos o arco  $AP$  de medida  $x$  na circunferência trigonométrica e definimos a função  $f(x)$  como sendo o inverso da abscissa do ponto  $P(\cos x, \sin x)$ . Isto é,  $f: \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .



Observe na circunferência trigonométrica que os triângulos  $OPQ$  e  $OPS$  são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\overline{OS}}{1} \Leftrightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\cos x} = f(x).$$

Portanto, se  $x$  é a medida algébrica do arco  $AP$ , então  $f(x)$  é a medida algébrica do segmento  $OS$ . A função  $f$ , assim definida, é chamada de função secante e denotada por  $f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ .

$$\text{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R}; y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$$

## 22.1 Propriedades e gráfico

- 1) A função secante é par.

De fato:

Sabendo-se que a função cosseno é par, temos:

$$f(-x) = \sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$$

- 2) A função secante é periódica de período  $2\pi$ .

De fato:

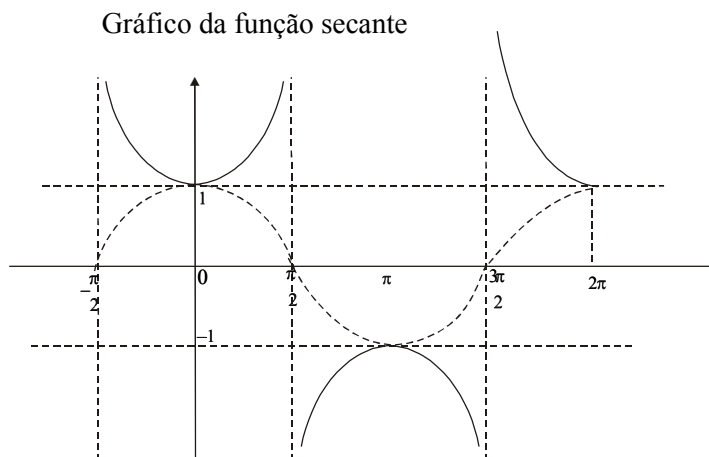
A equação  $f(x+p) = f(x)$ ,  $\forall x \in \text{Dom}(f)$  possui solução não nula  $p = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$  e o período é  $p = 2\pi$ .

- 3) A função secante é crescente no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2})$ , pois  $\forall x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$  com  $x_1 < x_2$

$$\text{temos } 0 < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < x_1 - x_2 < 0. \text{ Logo } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\cos x_2} - \frac{1}{\cos x_1} = \\ = \frac{\cos x_1 - \cos x_2}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} = \frac{-2\sin(\frac{x_1+x_2}{2}) \cdot \sin(\frac{x_1-x_2}{2})}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}. \text{ Como } 0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{-\pi}{4} < \frac{x_1-x_2}{2} < 0,$$

temos  $\cos x_1 > 0$ ,  $\cos x_2 > 0$ ,  $\sin(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$  e  $\sin(\frac{x_1-x_2}{2}) < 0$ .

Portanto  $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



# 23

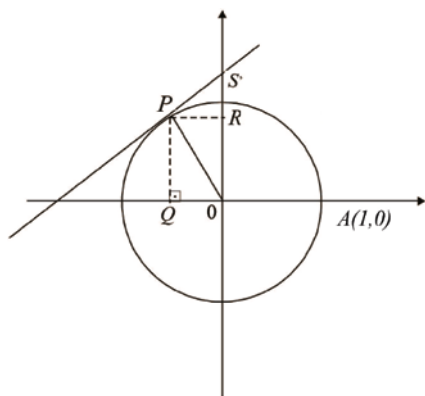
## A função cossecante

A cada número real  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , corresponde um arco  $AP$  de medida  $x$  na circunferência trigonométrica, o qual associamos a o número real que é o inverso da ordenada do ponto  $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ . Assim, definimos a função  $f$  como sendo a correspondência entre o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  e o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , dada por  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sen} x} = f(x) \text{ e a denominamos função cossecante.}$$

Notação:  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x$

Na circunferência trigonométrica temos



$$P(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

Os triângulos  $OPQ$  e  $OPS$  são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} \text{ e como } \overline{PQ} = \overline{OR} \text{ temos } \frac{1}{\overline{OR}} = \overline{OS}.$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{m(OR)} = \frac{1}{OR} = \overline{OS} = m(OS).$$

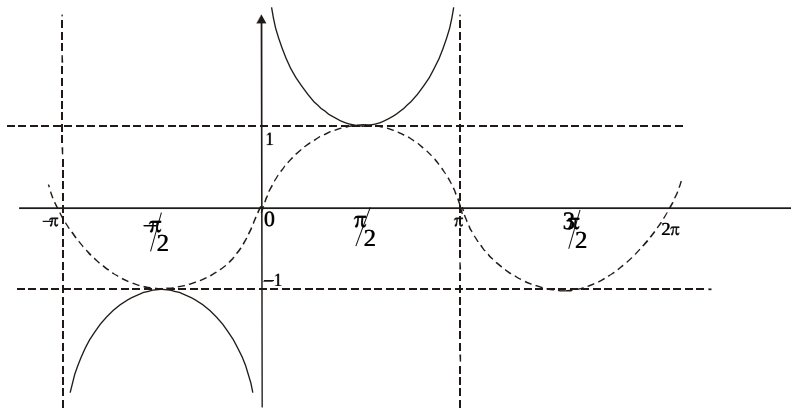
Isto é,  $\operatorname{cosec} x = m(OS)$ . Logo, a medida algébrica do segmento  $OS$  é a imagem da medida algébrica do arco  $AP$  pela função  $f$ , denominada cossecante.

### 23.1 Propriedades e gráfico

Facilmente, verifica-se que:

- $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- a função cossecante é ímpar
- a função cossecante é periódica de período  $2\pi$

Gráfico da função cossecante



Observe que  $\text{cossec } x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ . Assim,  $\text{cossec } x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e, por conseguinte, o gráfico da função cossecante pode ser obtido a partir do gráfico da função secante, por meio de uma translação horizontal de  $\frac{\pi}{2}$  para a direita.

# 24

---

## Exercícios

- 1) Determine o conjunto imagem da função  $f(x) = 3 \cos \sec x - 1$ .
- 2) Resolva as equações e inequações:
  - a)  $\operatorname{tg} x + \cot g x = 2 \cos \sec x$
  - b)  $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$
  - c)  $\cot g x = \operatorname{sen} 2x$
  - d)  $\operatorname{tg} x < \cot g x$
- 3) Qual é o valor máximo que a função  $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$  pode atingir?



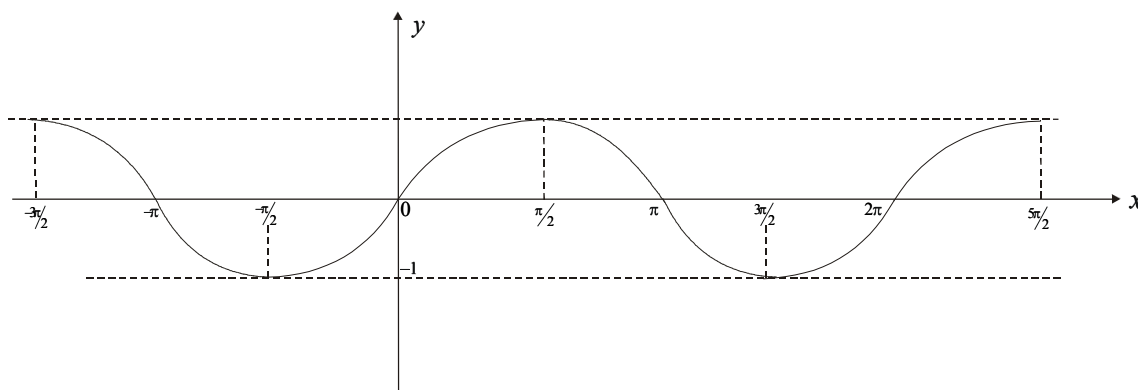
# 25

## Funções trigonométricas inversas

Conforme estudado no “Volume 1”, sabemos que uma função  $f: A \rightarrow B$  possui inversa  $g: B \rightarrow A$  se e somente se  $f$  é uma função bijetora.

As funções trigonométricas são periódicas. Portanto, não são injetoras nos seus domínios de definição.

Veja, por exemplo, a função seno:  $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Isso mostra claramente que ela não é injetora. No entanto, se restringirmos o domínio da função seno para um intervalo da forma  $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ , ela será injetora. Veja isso no seu gráfico, dado a seguir.



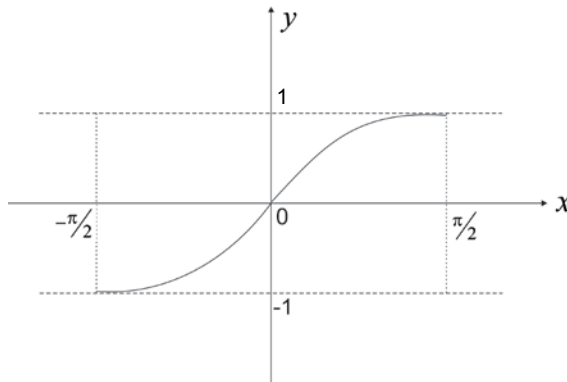
Vamos considerar uma restrição da função seno ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Assim, o conjunto imagem referente a essa restrição continua sendo o intervalo  $[-1, 1]$ .

## 25.1 A função arco seno

Consideremos a função  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \text{sen } x$ .

$$x \rightarrow y = \text{sen } x$$

Essa função é uma bijeção entre os intervalos  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $[-1, 1]$ , como podemos ver através do seu gráfico:



Portanto,  $f$  possui inversa  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , assim definida: para cada  $y \in [-1, 1]$ ,  $f^{-1}$  associa o número  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , que é a medida do arco cujo seno vale  $y$ .

Notação:  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

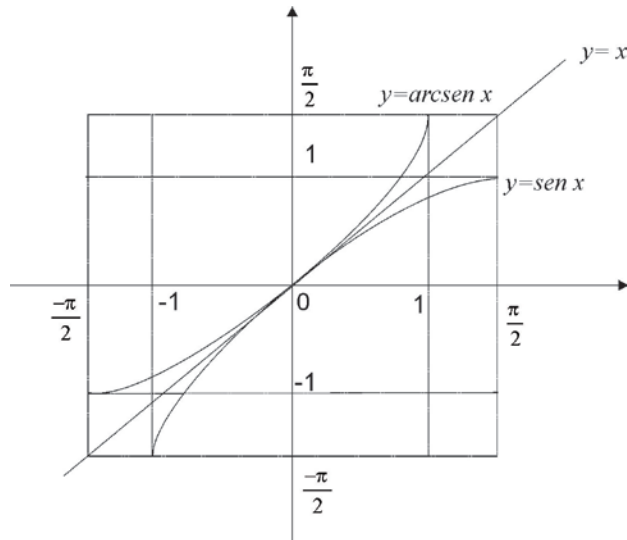
$$y \mapsto x = \text{arc sen } y$$

$$\text{Isto é: } f^{-1}(y) = \text{arc sen } y = x$$

Obs. 1: Sendo  $f^{-1}$  a inversa de  $f$ , temos  $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ , isto é:  $y = \text{sen } x \Leftrightarrow \text{arc sen } y = x$  e, analogamente,  $y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y$ .



Obs. 2: Como sabemos, se representamos o  $Gr(f^{-1})$  e o  $Gr(f)$  num mesmo sistema cartesiano, vemos que eles são simétricos em relação à reta  $y = x$ .



Obs.3: O domínio da função arco seno é o intervalo  $[-1, 1]$  e o conjunto imagem é o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Portanto,  $\forall x \in [-1, 1]$  temos  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Obs. 4: A função arco seno é ímpar.

De fato:  $y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \sen y \Leftrightarrow -x = -\sen y = \sen(-y)$ , pois a função seno é ímpar. Logo,  $-x = \sen(-y) \Leftrightarrow -y = \arcsen(-x)$ . Portanto, como  $y = \arcsen x$ , temos  $\arcsen(-x) = -y = -\arcsen x$ .

$$\arcsen(-x) = -\arcsen x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

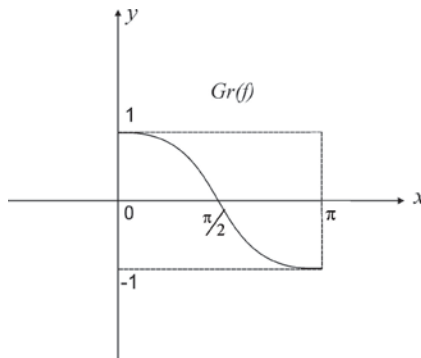
## Exercício

Usando a definição de injetividade, prove que a função  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \sin x$  é injetora.

(Sugestão: Se  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $f(x_1) = f(x_2)$ , então resolva a equação  $\sin x_1 = \sin x_2$  para ver que  $x_1 - x_2 = 2k\pi$  ou  $x_1 + x_2 = \pi + 2k\pi$ . Como  $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , conclua que  $x_1 = x_2$ ).

## 25.2 A função arco cosseno

Seja  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = \cos x$ . Esta é a função cosseno restrita ao intervalo  $[0, \pi]$ . O gráfico de  $f$  é:



Ao observarmos o  $Gr(f)$ , vemos que  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  é uma função bijetora. Logo, possui

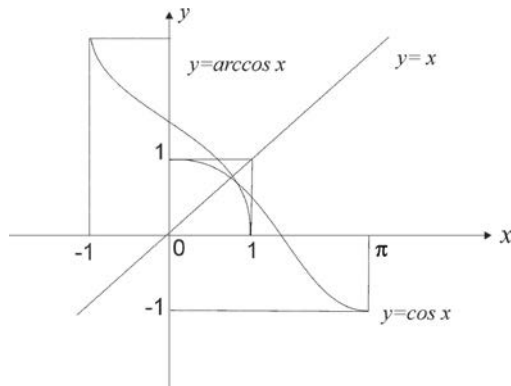
$$x \mapsto \cos x = y$$

inversa  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , definida por  $f^{-1}(y) = x = \text{arco cujo cosseno é } y$ .

$$y \mapsto x = \arccos y$$

Como  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ , temos que  $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$  ou equivalentemente  $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ .

Como já sabemos, o  $Gr(f^{-1})$  é simétrico, em relação à diagonal  $y = x$ , ao  $Gr(f)$ , quando representados num mesmo sistema de eixos ortogonais.



O domínio da função arco cosseno é o intervalo  $[-1, 1]$  e o conjunto imagem é o intervalo  $[0, \pi]$ . Assim, temos que  $0 \leq \arccos x \leq \pi, \forall x \in [-1, 1]$ .

Obs.: A função arco cosseno não é par nem é ímpar.

De fato:

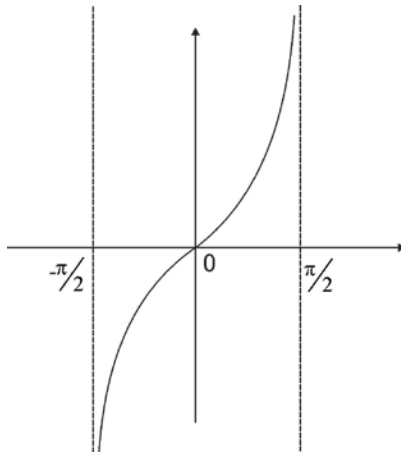
$$\arccos(-1) = \pi \text{ e } \arccos(+1) = 0$$

Assim,  $\arccos(-1) \neq \arccos(+1)$  e  $\arccos(-1) \neq -\arccos(1)$ . Portanto, existe  $x_0 \in [-1, 1]$  tal que  $f(-x_0) \neq f(x_0)$  e  $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ .

### 25.3 A função arco tangente

Seja  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

Veja que a função  $f$  é uma restrição da função tangente ao domínio  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Seu gráfico é:



Examinando o gráfico, vemos que  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = \operatorname{tg} x$  é uma função bijetora e, portanto, possui

inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

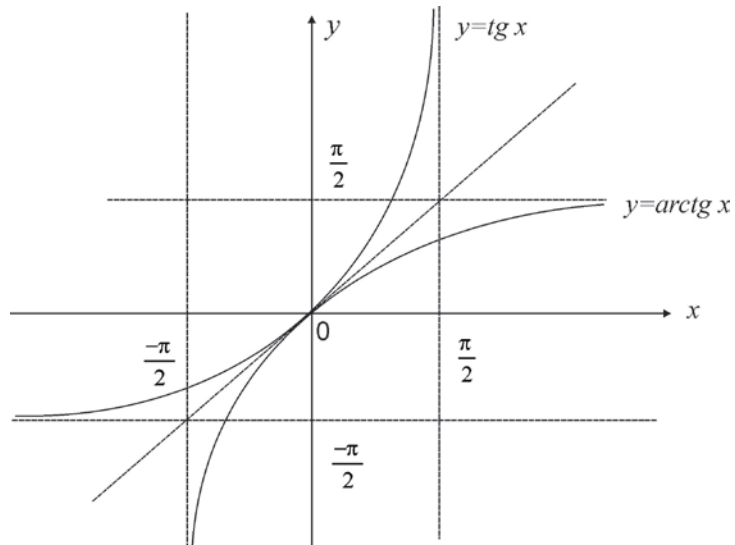
$y \mapsto x = \operatorname{arctg} y$  definida por  $f^{-1}(y) = x = \operatorname{arctg} y$  cuja tangente dá  $y$ .

Notação:  $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$\operatorname{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$  e  $\operatorname{Im}(f^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , portanto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ .

Obs. 1: A função arco tangente é ímpar (veja o exercício 1).

## Gráfico da função arco tangente



Obs. 2: A função arco tangente é uma correspondência biunívoca entre a reta real  $\mathbb{R}$  e o intervalo aberto  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

### Exemplos

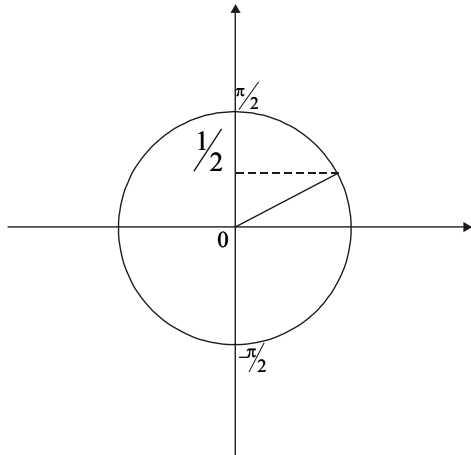
1) Calculemos os valores de:

- a)  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2}$
- b)  $\operatorname{arccos} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$
- c)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1)$

Solução:

a) Devemos ter  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ . Chamando  $y = \arcsen \frac{1}{2}$ , temos  $\sen y = \frac{1}{2}$ , com

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

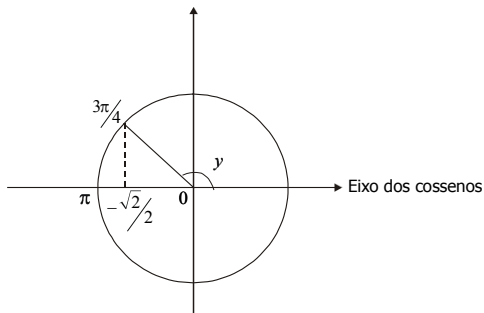


$y$  é o arco cujo seno é  $\frac{1}{2}$  com  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Logo, a única solução é  $y = \frac{\pi}{6}$ .

Conclusão:  $\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ .

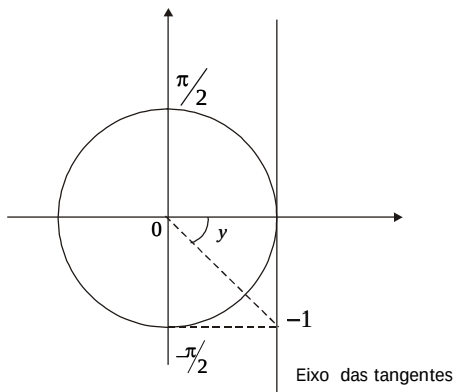
b) Chamamos  $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = y$ , logo, temos  $\cos y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$  e  $0 \leq y \leq \pi$ . Assim:



$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow \cos y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ e } y \in [0, \pi] \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3\pi}{4}, \text{ portanto } \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

c) Chamamos  $\arctan(-1) = y$ . Logo,  $\arctan(-1) = y \Leftrightarrow \tan y = -1$  e  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{4}$



$$\Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Portanto, } \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

2) Resolvendo a equação  $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$ .

Uma maneira de resolver essa equação é fazer uma substituição de variáveis para trabalhar com a função tangente, ao invés da função arco-tangente, como na equação dada.

Façamos  $\arctan 2x = \alpha$  e  $\arctan 3x = \beta$ , em que  $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ .

Logo,  $2x = \tan \alpha$  e  $3x = \tan \beta$  e  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{Então, } \arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}.$$

Observe que as duas últimas igualdades anteriores não são equivalentes. Há apenas uma implicação. Portanto, pode ocorrer que soluções da equação  $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$  não sejam também soluções da equação original. Sendo assim, é preciso fazer uma verificação nas soluções encontradas para dar uma resposta correta.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 3x}{1 - 2x \cdot 3x} = 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{1 - 6x^2} = 1 \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

Verificando esses valores na equação originalmente dada,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x = \frac{\pi}{4}$ , vemos que

para  $x = -1$ , temos  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-2) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-3) < 0$ . Logo, diferente de  $\frac{\pi}{4}$  e para  $x = \frac{1}{6}$ , temos

$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$  pois, a função arcotangente é crescente. Logo  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$ . Se  $a = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}$  e  $b = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$  então  $\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$  e  $\operatorname{tg} b = \frac{1}{2}$  com  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ .

Seja  $\lambda = a + b$ . Logo  $\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$ .

Assim  $\operatorname{tg} \lambda = 1$  com  $0 < \lambda < \pi$  (pois  $0 < a + b < \pi$ ), do que concluímos que  $\lambda = \frac{\pi}{4}$ . Portanto

$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} = a + b = \lambda = \frac{\pi}{4}$ . Desse modo,  $x = \frac{1}{6}$  é a única solução:  $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$ .



# 26

---

## Exercícios

- 1) Prove que a função arco tangente é ímpar.
- 2) Dada a função  $f(x) = \arcsen(4x)$ , determine:
  - a) domínio, zeros e imagem de  $f$
  - b) um esboço do gráfico de  $f$
- 3) Dada a função  $g(x) = \cos(\arcsen x)$ , determine:
  - a) domínio, zeros e imagem de  $g$
  - b) um esboço do gráfico de  $g$
- 4) Mostre que a função  $h(x) = \arccos x + \arcsen x$  é constante.
- 5) Calcule:
  - a)  $\arcsen\left(\arccos \frac{3}{4}\right)$
  - b)  $\arcsen\left(\arctg \sqrt{2}\right)$
  - c)  $\arctg\left(\arcsen \frac{4}{5}\right)$

6) Calcular o valor de:

a)  $tg \left( 2 \cdot \text{arc } tg \frac{1}{5} \right)$

b)  $\cos \left( \text{arc } \cos \frac{5}{13} + \text{arc } \cos \frac{12}{13} \right)$

c)  $\text{sen} \left( \text{arc } tg 1 + \text{arc } tg \sqrt{2} \right)$

d)  $\text{arc } tg (x) + \text{arc } tg (-x)$

7) Resolva as equações:

a)  $\text{arc } \text{sen } x = \frac{\pi}{2}$

b)  $\text{arc } tg x = \frac{\pi}{4}$

c)  $\arccos \sqrt{x} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

d)  $\text{arc } tg x + \text{arc } tg (-1) = \pi$

8) Resolver as equações:

a)  $\text{arc } tg \left( \frac{1+x}{2} \right) + \text{arc } tg \left( \frac{1-x}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$

b)  $\text{arc } \text{sen} (2x) + \arccos(2x) = \frac{\pi}{4}$

9) Dê domínio, conjunto imagem e gráfico das funções:

a)  $f(x) = \text{sen}(\text{arc } \text{sen } x)$

b)  $g(x) = \text{arc } \text{sen} (\text{sen } x)$

c)  $h(x) = \cos(\arccos x)$

d)  $k(x) = \arccos(\cos x)$

10) Prove que  $\sec(\arctg x) = \sqrt{1+x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

11) Seja  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  dada por  $f(x) = \sec x$ :

a) determine a inversa  $f^{-1}$  e esboce o gráfico.

b) chame a inversa de arco-secante e prove que  $\arcsec x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

12) Determine o domínio, imagem e o gráfico:

a)  $f(x) = \arcsen x + \arccos x$

b)  $g(x) = \arctg x + \operatorname{arccotg} x$

c)  $h(x) = \arcsen(\cos x)$



# 27

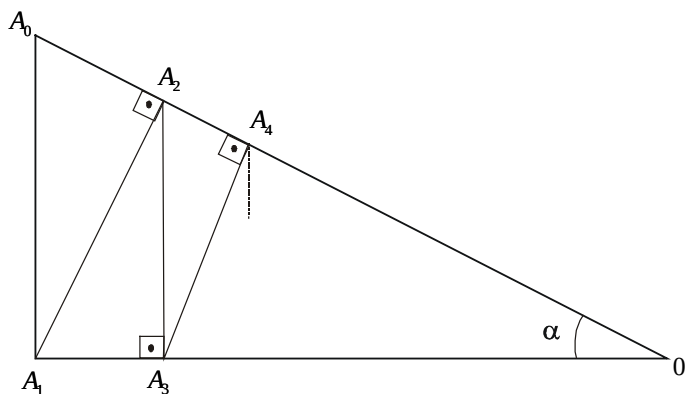
---

## Exercícios complementares

- 1) Ref[3] Um astronauta em órbita vê uma fração da superfície da terra chamada calota esférica. Se o diâmetro dessa calota é visto pelo astronauta segundo um ângulo de  $60^\circ$ , qual será a área da superfície do nosso planeta vista por ele?

Obs.: A área de uma calota esférica é dada por  $A = 2\pi rh$ , em que  $r$  é o raio da esfera e  $h$  é a altura da calota.

- 2) Determine a área do retângulo de maior área possível que pode ser inscrito num semicírculo de raio  $r$ .
- 3) Prove que em qualquer paralelogramo a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais.
- 4) Ref[3] Na sequência de segmentos  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_nA_{n+1}, \dots$  cada segmento é perpendicular a um lado do ângulo  $\hat{O}$ , como na figura. Sendo  $A_0A_1 = p$  e  $\hat{O} = \alpha$ , mostre que o comprimento do segmento  $A_nA_{n+1}$  é  $p \cos^n \alpha$ . Quando  $p=1$ , calcule o valor da soma infinita  $\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_nA_{n+1}} + \dots$ , em função de  $\alpha$ .



- 5) Prove que para todo  $x \in \mathbb{R}$  tem-se  $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x = 0$ .
- 6) Para quais valores de  $a$  a equação  $a \sin x = \sec x$  tem solução?
- 7) Para que valores de  $a$  a equação  $1 + \sin^2(ax) = \cos x$  tem alguma solução não nula?
- 8) Encontre os valores reais de  $c$  para que a equação  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = c$  admita solução.
- 9) Determine os valores de  $a \in \mathbb{R}$  para que a equação  $\sin^4 x + \cos^4 x = a$  possua solução.
- 10) Se  $\operatorname{tg}(x-y) = \sqrt{3}$  e  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$ , determine  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ .
- 11) Sejam  $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Se  $a < b$ , prove que  $a - \sin a < b - \sin b$ .
- 12) Faça o gráfico de  $y = \sin |x|$ .

13) Faça o gráfico de  $y = \operatorname{sen}^2 x$ .

14) Determine domínio, imagem, período e esboce o gráfico da função  $y = 1 + 3 \operatorname{sen}(2x)$ .

15) Determine o domínio, imagem, zeros e o gráfico de  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(2x - 1)$ .

16) Dada a função  $f(x) = |1 - \operatorname{tg}(\pi x)|$ , determine:

- a) domínio e imagem
- b) os zeros da função
- c) um esboço do gráfico

17) Se  $f(x) = 2\operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{sen} 6x - 1$ , determine o domínio, o período, os zeros, a imagem e o gráfico de  $f$ .

18) Resolva as inequações:

- a)  $1 - \cot g(2x) > 0$  em  $\mathbb{R}$
- b)  $2 \cos^2 x \leq \cos x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$
- c)  $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \leq 1$  em  $\mathbb{R}$

19) Calcule

a)  $\operatorname{sen} \left[ \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ .      b)  $2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{7} \right)$

20) Dada a função  $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$ :

- a) esboce o gráfico de  $f(x)$ .
- b) determine um domínio no qual  $f(x)$  tenha inversa e escreva uma expressão para a função inversa.

21) Resolva as equações:

a)  $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$

b)  $\cos(2 \arccos x) = 0$

c)  $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

d)  $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x - 3 = 0$

22) Resolva a inequação  $\operatorname{tg} x > \operatorname{cotg} x$ .

23) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica, de período  $p > 0$ . Prove que

$$f(x + kp) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

24) Prove que  $|\operatorname{sen} x| + |\cos x| \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

25) Mostre que a equação  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 2$  não possui solução.

26) Dê o domínio, os zeros, a imagem e o gráfico da função:

a)  $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x$

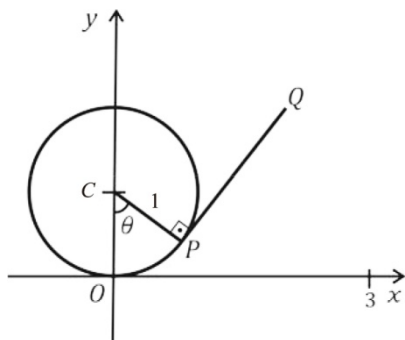
b)  $g(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$

27) (RPM nº 63) Prove que  $\cos(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen}(\cos x); \forall x \in \mathbb{R}$ .

28) (Fuvest-2017) O centro de um disco de raio 1 é colocado no ponto  $C = (0,1)$  do plano cartesiano  $Oxy$ . Uma das extremidades de um fio de espessura desprezível e comprimento 3 é fixada na origem  $O$  e a outra extremidade está inicialmente no ponto  $(3,0)$ . Mantendo o fio sempre esticado e com mesmo comprimento, enrola-se, no sentido anti-horário, parte dele em torno do disco, de modo que a parte enrolada do fio seja um arco  $OP$  da circunferência que delimita o disco. A medida do ângulo  $\widehat{OCP}$ , em radianos, é denotada por  $\theta$ . A parte não enrolada do fio é um segmento retilíneo  $\overline{PQ}$  que tangencia o disco no ponto  $P$ .

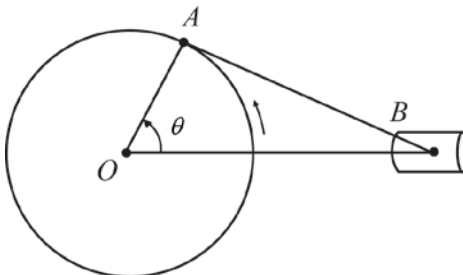


A figura ilustra a situação descrita.



Encontre uma expressão para as coordenadas do ponto Q em função de  $\theta$ , para  $\theta$  no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

29) Num motor a combustão, cada pistão está conectado ao virabrequim (eixo de manivela) como na figura. A haste de conexão AB tem 15 cm, o raio OA tem 5 cm e o virabrequim faz 2 rotações por segundo no sentido anti-horário. Escreva uma expressão para a posição do ponto B do pistão, em função do ângulo  $\theta$  (função posição). Essa função posição é periódica?



30) Seja  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  ( $x \neq 0$ ). Mostre que  $\frac{-1}{|x|} \leq f(x) \leq \frac{1}{|x|}$ ,  $\forall x \neq 0$ .



## RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

### PROPOSTOS

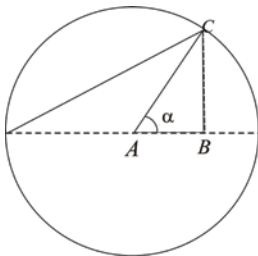
#### Parte I - Trigonometria no Triângulo Retângulo

##### 4.1 Exercícios

1)  $\frac{29}{12} \text{ cm}$

3)  $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$  e  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

- 4) Construa a circunferência com centro no vértice  $A$  e raio unitário como na figura.



##### 4.3 Exercícios

1)  $\overline{BC} = 4$

2)  $\overline{BC} = 30 \text{ cm}$

4)  $a \text{ cm}; \sqrt{3}a \text{ cm}; 2a \text{ cm}$

#### Parte II - Trigonometria na Circunferência

##### 5.1 Exercícios

1) a)  $18^\circ$  b)  $75^\circ$  c)  $135^\circ$  d)  $330^\circ$

2) a)  $0,05 \text{ rad}$  b)  $0,4 \text{ rad}$  c)  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

d)  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$  e)  $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

3) a)  $(57,3)^\circ$  b)  $172^\circ$  c)  $(286,5)^\circ$

4)  $2\pi \text{ cm}$

5)  $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$

6)  $8\pi \text{ cm}$

7)  $45^\circ$  ou  $315^\circ$

8) a)  $(162,5)^\circ$  b)  $36^\circ$

9)  $9\text{h}49\text{min}5\text{seg}$

10)  $x = 43$  minutos

##### 8.1 Seno e Cosseno

1)  $0 \text{ rad} < a < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  ou  $\pi \text{ rad} < a < \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

2) a)  $-3$  b)  $1$

3)  $\frac{-4}{5}$

4) a)  $\{r \in \mathbb{R}; -1 \leq r \leq 0\}$

b)  $\{r \in \mathbb{R}; 4 \leq r < 5\}$

5)  $\left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

## 8.2 Redução ao 1º quadrante

1) a)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  c)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  d)  $-\frac{1}{2}$

2) a)  $\frac{\sqrt{3}}{16}$  b) Zero

3) a)  $\alpha = 60^\circ$  ou  $\alpha = 120^\circ$

b)  $\alpha = 60^\circ$  ou  $\alpha = 300^\circ$

4)

a)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

d)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) a)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$

b)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{4\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6} \right\}$

6) a)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} + k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

## 8.3 Tangente e Cotangente

1) a)  $y = 0$  b)  $y = 1$

2) a)  $\frac{-\sqrt{3}}{3}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  c)  $\sqrt{3}$

3)  $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$

4)  $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

5)  $S = \left\{ \alpha / \frac{3\pi}{4} + k\pi \leq \alpha < (k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6)  $S = \left\{ \alpha / \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7)  $S = \left\{ \begin{array}{l} \alpha / 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{ou } \frac{3\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq \alpha \leq 2\pi \end{array} \right\}$

8)  $S = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$

10)  $\theta$  se aproxima de zero

e  $\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}$  se aproxima de 1

11)  $\overline{AC} = \frac{\theta(1 - \cos \theta)}{\theta - \sin \theta}$

## 8.4 Secante e Cossecante

1) a)  $-\sqrt{2}$  b)  $-2$  c)  $-2$  d)  $2$

2) a)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$c) \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$d) \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3) a) \left\{ \alpha / \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{3} \right\}$$

b)

$$\left\{ \alpha / 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq \alpha \leq 2\pi \right\}$$

$$c) \left\{ \alpha / \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < \alpha < 2\pi \right\} =$$

$$\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup (\pi, 2\pi)$$

## 8.6 Exercícios

$$1) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$2) \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ e } \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$4) \frac{5}{12}$$

$$5) -2 \text{ ou } -1$$

$$6) a = 5$$

7)

$$a) S = \left\{ \alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ ou } \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$b) \left\{ \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8) a)

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$b) S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}; 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi \text{ ou } \left[ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right] \right\}$$

$$d) S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$9) \text{ Sugestão: } (tg^2 \alpha - \sec^2 \alpha)^4 = 1 \quad \forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

## 12 Exercícios

$$1) \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$2) A \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2} \right); \frac{5\pi}{4} \approx 3,9$$

$$4) 15^\circ$$

$$6) 25\sqrt{3}$$

## 13 Transformações

$$1) a) S = \left\{ k\pi, k \frac{\pi}{3} \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$b) S = \left\{ \frac{k\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 2k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4) \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

## 14 Equações trigonométricas

- 1)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right.$   
 $\left. \text{ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$
- 2)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right.$   
 $\left. \text{ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 3)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 4)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 5)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 6)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{k\pi}{4}, \text{ sendo } k \text{ um n}^\circ \text{ inteiro par} \right\}$
- 7)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 8)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

### 15.3 Teorema (Lei dos Senos)

- 1)  $S_2 = 4S_1$
- 2)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 3)  $A(\alpha) = \frac{\alpha - \text{sen}\alpha}{2}$
- 4)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b); \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 2ab}{2}}; \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2ab}{2}}$
- 5) Dica: Use a Lei dos Senos para escrever  
 $\frac{\alpha}{b} = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{B}}$  e propriedades das proporções para  
 chegar a  $\frac{\alpha + b}{a - b} = \frac{\text{sen}\hat{A} + \text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{A} - \text{sen}\hat{B}}$  e finalmente use  
 transformação em produto.

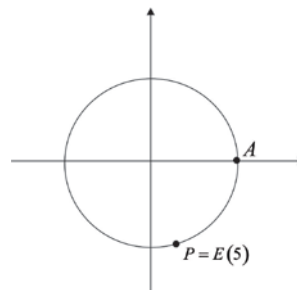
9) Sugestão: coloque o triângulo  $ABC$  no sistema cartesiano, com um vértice na origem e um lado sobre o eixo  $x$ . Mostre que o produto dos coeficientes angulares das retas suporte dos outros dois lados é  $-1$ .

## Parte III - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

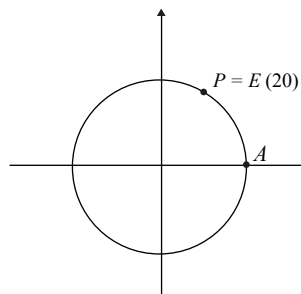
### 16 Representação dos números reais na circunferência trigonométrica

Exercício 1

1) c)



g)



Exercício 2

$$x = k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 3

$$x = x_0 + k \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 19 Exercícios

- 1) a)  $[1, +\infty) = \text{Dom}(f)$   
 b)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] = \text{Dom}(g)$   
 c)  $\text{Dom}(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 3)  $b = 2; c = \pm \frac{\pi}{2}; d = 2k\pi$   
 $b = -2; c = \pm \frac{\pi}{2}; d = (2k+1)\pi$
- 4)  
 a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $S = \mathbb{R}$   
 c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 d)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 e)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 5) a)  $\left[ 0, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$   
 b)  $S = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ \text{ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$   
 c) Intervalo  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$

### 21.1) Propriedades e gráfico

- 1)  $p = \frac{\pi}{|c|}$
- 3)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 4) 1 vez

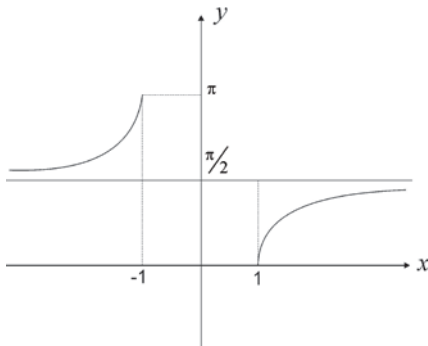
## 24 Exercícios

- 1)  $\text{Im}(f) = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$
- 2)  
 a)  $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$   
 b)  $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; x = k\pi \\ \text{ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$   
 c)  $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \text{ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$   
 d)  $\left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 3)  $\sqrt{2}$  (Sugestão: use transformação em produto)

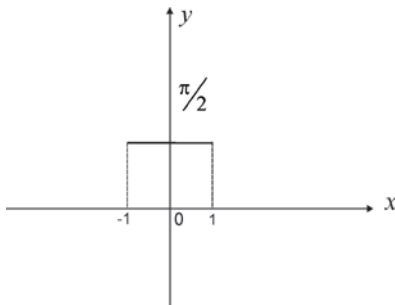
## 26 Exercícios

- 3) O gráfico é a semicircunferência unitária positiva.
- 5) a)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  c)  $\frac{4}{3}$
- 6) a)  $\frac{5}{12}$  b) Zero c)  $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$  d) Zero
- 7) a)  $\{1\}$  b)  $\{1\}$  c)  $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$  d)  $S = \emptyset$
- 8) a)  $S = \{-1, 1\}$  b)  $S = \emptyset$
- 9) Lembre que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_d$

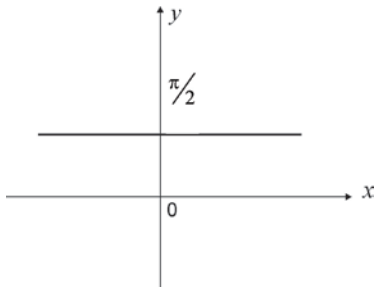
11) a)



12) a)  $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$ ;  $\text{Im}(f) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ;



b)  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ ;  $\text{Im}(g) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ;



c) Dica: Use item a para escrever

$$h(x) = \frac{\pi}{2} - x$$

## 27 Exercícios Complementares

1)  $A = \pi r^2$

2)  $A = r^2$

4) A soma da PG é  $\frac{1}{1 - \cos \alpha}$

5) Dica: Faça  $\sin^2 x = t$

6)  $a \leq -2$  ou  $a \geq 2$

7)  $a \in \mathbb{Q}$

8)  $-2 \leq c \leq 2$

9)  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

10) +4 ou -4

12) Sugestão: Observe que a função é par.

13) Sugestão:  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

17)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ;  $\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ;  $p = \frac{\pi}{3}$ ;

$$z(f) = \left\{ \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

18) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \right\}$

c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

19) a) 1 b)  $\frac{\pi}{4}$

20) a)  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x$

b)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsen(\sqrt{x})$



21) a)

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} ; x = (2k+1)\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{b) } S = \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\text{c) } S = \mathbb{R}$$

$$\text{d) } S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$22) S = \left\{ x \in \mathbb{R} ; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

26) a) Dica: use

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ e } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

b) Dica: Veja técnica usada no exemplo 4 do capítulo 14 (equações trigonométricas).

27) Sugestão: Tome a diferença, transforme em produto e observe que os dois fatores são positivos (arcos do 1º quadrante).

28)

$$Q (\sin \theta + (3 - \theta) \cos \theta, 1 - \cos \theta + (3 - \theta) \sin \theta)$$

$$29) x(\theta) = 5 \cos \theta + 5\sqrt{8 + \cos^2 \theta}$$

com período  $2\pi$



**COLEÇÃO DAS SEGUNDAS PROVAS DO PROCESSO SELETIVO  
ESTENDIDO PARA O CURSO DE MATEMÁTICA DA UFES DE 1998 A 2012**

**1 Segundas Provas de Matemática Básica I**

**1998**

- 1) Sejam  $A = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \operatorname{sen} \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$  e  $B = \left\{ w \in \mathbb{R} / w = \cos \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Descreva  $A \cap B$ .
- 2) Dada a função  $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ , determine o domínio, a imagem e um esboço do gráfico.
- 3) Dois lados de um triângulo medem 4 cm cada um e formam um ângulo  $\alpha$ . Para que valor de  $\alpha$  a área do triângulo é a maior possível? Qual é essa área máxima?
- 4) Num triângulo  $ABC$  temos  $\overline{AB} = 4$  cm,  $\overline{AC} = 2$  cm e a medida do ângulo  $\hat{A}$  é igual ao dobro da medida do ângulo  $\hat{B}$ . Determine  $\overline{BC}$ .
- 5) Dada a função  $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x)$ ,
  - a) esboce o gráfico de  $f(x)$
  - b) determine um domínio no qual  $f(x)$  tenha inversa e escreva uma expressão para a função inversa
- 6) Resolva as equações:
  - a)  $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$
  - b)  $\cos(2 \arccos x) = 0$
- 7) Resolva a inequação  $\operatorname{tg} x > \operatorname{cotg} x$ .

**1999**

- 1) Determine a área do paralelogramo cujas diagonais medem 12 cm e 18 cm formando um ângulo de  $60^\circ$ .
- 2) Determine o domínio, a imagem, o período e esboce o gráfico da função  $y = 1 + 3\operatorname{sen}(2x)$ .
- 3) Dada a função  $f(x) = |1 - \operatorname{tg}(\pi x)|$ , determine:
  - a) domínio e imagem
  - b) os zeros da função
  - c) um esboço do gráfico
- 4) Resolva as equações:
  - a)  $2\operatorname{sen} x - \cos \sec x = 1$
  - b)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \sec x$
- 5) Resolva as inequações:
  - a)  $\operatorname{cotg}(3x) - 1 < 0$  em  $\mathbb{R}$
  - b)  $2\operatorname{sen}^2 x \leq \operatorname{sen} x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$
- 6) Calcule  $\cos\left[\arctg\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ .

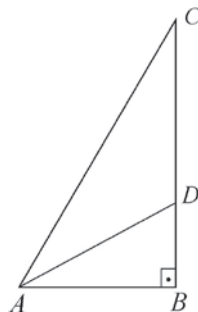
- 1) Na figura,  $ABC$  é um triângulo retângulo e tem-se

$$\overline{AB} = \sqrt{3}$$

$$\overline{BD} = 1$$

$$\widehat{DAC} = 30^\circ$$

Determine a medida do segmento  $CD$



- 2) Em quantos por cento aumentará a área de um triângulo se dois de seus lados forem aumentados de 50% cada um, sendo mantido o ângulo formado por eles?

- 3) Resolva as equações e inequações em  $\mathbb{R}$  :

a)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \sec x$

b)  $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$

c)  $\cos 2x + \cos 4x = \cos x$

- 4) Dada a função  $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ , determine:

a) o seu domínio, a sua imagem e os seus zeros

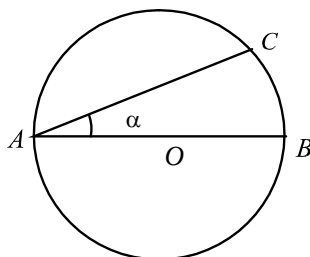
b) um esboço do seu gráfico

c) um domínio no qual  $f$  tenha inversa e esboce o gráfico da inversa

- 5) Resolva a inequação  $\operatorname{sen} 2x \geq \cos 2x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

- 6) Resolva o sistema 
$$\begin{cases} \operatorname{arcsen}(x+y) = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arccos}(2x-y) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

- 1) Sendo  $AB = 2$  cm o diâmetro da circunferência de centro  $O$ , determine a medida do segmento  $AC$  quando  $\alpha = 22^\circ 30'$ .



- 2) Dada a função  $g(x) = | \operatorname{tg}(2x) | - 1$ , determine o gráfico indicando domínio, imagem, período, paridade e zeros da função.

- 3) Resolva as equações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 0$

b)  $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$

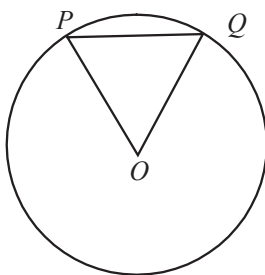
- 4) Resolver as inequações em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x$

b)  $\operatorname{tg}^2 x > 3$

5) Responda Verdadeiro ou Falso para as seguintes afirmações, justificando:

- a) Se  $x \in \mathbb{R}$  com  $\operatorname{sen} x \leq 1$  e  $\operatorname{cos} x \leq 1$  então  $\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x \leq 0$
- b) A função  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ , definida por  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , é sobrejetora
- c) Seja a função  $g : [1, +\infty[ \rightarrow [0, \pi/2[$  em que  $g(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$ . Então, uma expressão para a sua inversa pode ser dada por  $g^{-1}(y) = \sec y, \forall y \in [0, \pi/2[$
- d) Na figura, o comprimento do arco de circunferência  $PQ$  mede  $\frac{2\pi}{3}$



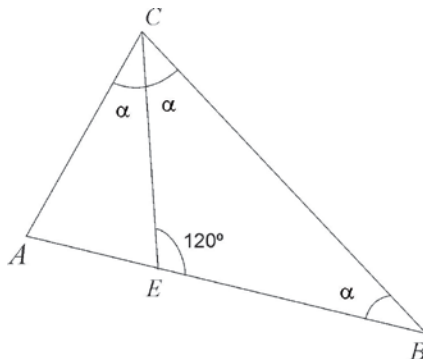
$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{PQ} = 2$$

- e) o valor da expressão  $\frac{\operatorname{sen}^2 77^\circ + \operatorname{cos}^2 77^\circ - 1}{\sec^2 23^\circ}$  é zero

1) Dada a função  $f(x) = 1 - |\cos(\pi x)|$ :

- determine o domínio, os zeros, o período e a imagem de  $f$
- construa o gráfico de  $f$ , esboçando as etapas

2) Calcule o perímetro do triângulo  $ABC$  da figura sabendo que  $\overline{CE} = 10$  cm.



3) Quais valores de  $x \in [-1, 1]$  são soluções da equação  $\sin \pi x + \cos \pi x = 0$ ?

4) Resolver em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\frac{1}{4} \leq \sin x \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\sin^2 x + \cos^4 x = 1$

5) Calcule o valor de  $y = \arctg 1/2 + \arctg 1/3$ .

6) Determine o valor do cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

7) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando:

a)  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

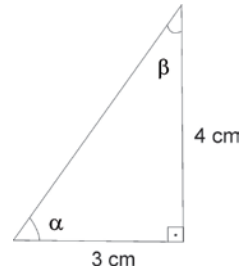
b) a medida do ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio às 13h15min é  $52^\circ 30'$

c) o período da função  $f(x) = |\sin(2\pi x)|$  é 1

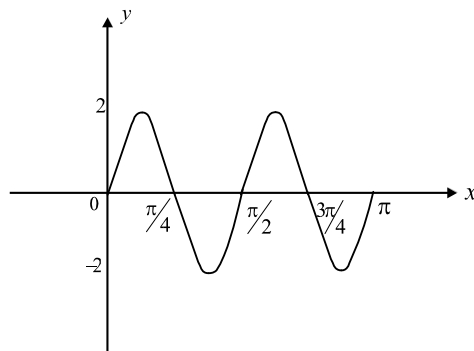
d) a equação  $\sin(\sin x) \cdot \cos(\sin x) = 1$  possui infinitas soluções



- 1) No triângulo retângulo da figura, calcule o valor de  $\cos(\alpha - \beta)$ .

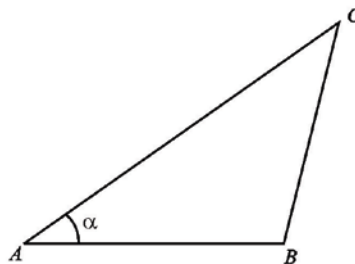


- 2) Às 4 horas e  $x$  minutos os ponteiros de um relógio formam um ângulo de  $180^\circ$ .  
Determine os minutos  $x$ .
- 3) Dê a expressão (lei de formação) de uma função real  $f$  cujos zeros são todos os números inteiros.
- 4) Esboce o gráfico da função  $f(x) = \arctg|x|$ .
- 5) Determine  $b$ ,  $c$  e  $d$  para que a curva seguinte seja o gráfico da função  $f(x) = b \cos(cx - d)$ .



6) Mostre que  $\arccos \frac{1}{x} = \operatorname{arcsec} x$ .

7) No triângulo  $ABC$  da figura, se mantivermos fixo o ângulo  $\alpha$  e aumentarmos o comprimento de cada lado  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  em 50%, em quantos por cento aumentará a área?



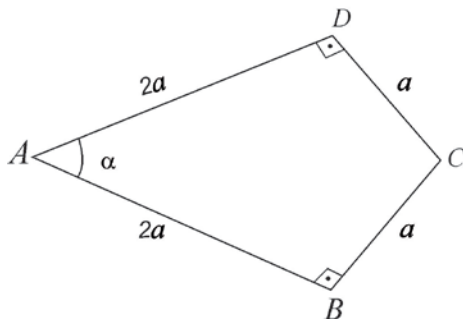
8) Resolver em  $\mathbb{R}$ :

a)  $2\operatorname{sen} x - \cos \operatorname{sec} x = 1$

b)  $\cos x \cdot \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x(1 + \cos 2x)$

c)  $\cos 2x - 2\operatorname{sen}^2 x < 0$

- 1) Dado o quadrilátero  $ABCD$  da figura, calcule  $\operatorname{sen} \alpha$ .



- 2) a) Verifique se a soma das raízes da equação  $4\cos^2 x + 4\operatorname{sen} x = 1$  pertencentes ao intervalo  $[0, 2\pi]$  é  $3\pi$ .
- b) Determine as raízes da equação  $\operatorname{sen}(\pi x) + \cos(\pi x) = 1$  no intervalo  $[-2, 2]$ .
- 3) Entre 4 e 5 horas, os ponteiros de um relógio formam ângulo reto em dois momentos. Determine o horário desses momentos.
- 4) Dada  $f(x) = 1 - \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|$ , determine:
- a) domínio, imagem e zeros da função
- b) um esboço do gráfico
- 5) Sendo  $f(x) = \arccos(x+2)$ , determine:
- a) domínio, imagem e zeros de  $f$
- b) um gráfico para  $f$
- c) uma expressão para a função inversa  $f^{-1}$  com domínio e imagem adequados

1) Resolva:

- a)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \cos \sec x$ , em  $\mathbb{R}$
- b)  $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = \cos x$ , em  $\mathbb{R}$
- c)  $2 \operatorname{sen}^2 x + (1 - \sqrt{3}) \operatorname{sen} x \leq \sqrt{3}/2$ , em  $[0, 2\pi]$

2) Dada a função  $f(x) = |\sec(\pi x) - 2|$ , determine:

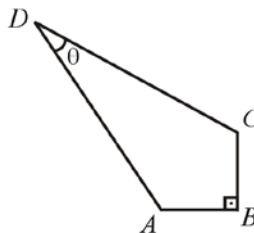
- a) domínio, imagem, período e zeros da função
- b) um esboço do gráfico (por etapas)

3) No quadrilátero  $ABCD$  da figura,

$$\overline{AB} = 2 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{CD} = 4 \text{ cm e}$$

$$\theta = 30^\circ. \text{ Calcule a medida em}$$

centímetros do perímetro do quadrilátero.

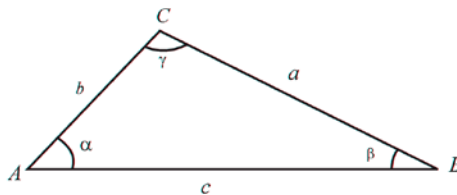


4) Prove que a função  $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$  é periódica e determine o seu período.

5) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando sua resposta:

- a)  $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- b)  $-\frac{1}{2} < \cos(\sqrt{3}) < 0$
- c) o conjunto solução da inequação  $\operatorname{tg}^2 x > 3$ , em  $\mathbb{R}$ , é  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- d) no triângulo  $ABC$  da figura,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}$$



- 1) Num quadrilátero  $ABCD$  tem-se  $\overline{AB} = 1$ ,  $\overline{BC} = 2$ ,  $\overline{CD} = \sqrt{3}$ ,  $\overline{AD} = 3$  e o ângulo  $\hat{A}BC$  mede  $60^\circ$ . Determine:
  - a) a medida do segmento  $AC$
  - b) a medida do ângulo  $\hat{A}DC$
  - c) a área do quadrilátero  $ABCD$
  
- 2) Resolva em  $\mathbb{R}$  :
  - a)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \sec x$
  - b)  $\frac{1}{4} \leq \operatorname{sen} x \cos x \leq \frac{1}{2}$
  
- 3) Dada a função  $f(x) = 1 - |\operatorname{tg}(\pi x)|$ , determine:
  - a) domínio, zeros e imagem de  $f$
  - b) um esboço do gráfico de  $f$  (por etapas)
  
- 4) Um cavalo pasta no interior de um cercado retangular de lados 10m e 30m. Ele encontra-se preso por uma corda amarrada no seu pescoço e numa estaca em um dos vértices do cercado.
  - a) Se o comprimento da corda for de 20m, qual o valor da área plana do cercado, em  $\text{m}^2$ , em que o cavalo pode pastar?
  - b) Determine o comprimento da corda de modo que o cavalo possa pastar em no máximo 25% da área total do cercado.

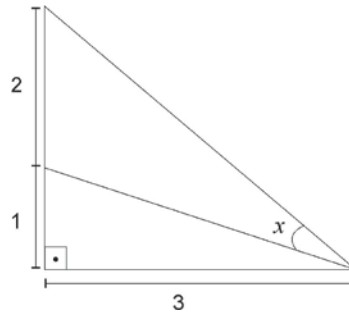
5) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando sua resposta:

a) a medida de um arco de 5 cm de comprimento numa circunferência de raio 4 cm é de 1,25 radianos

b) Na figura ao lado  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

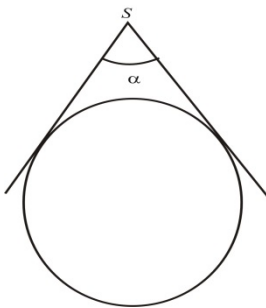
c)  $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 2$

d) Se  $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$  então  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta$



- 1) Seja  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ . Determine:
  - a) domínio, zeros e imagem de  $f$
  - b) um esboço do gráfico de  $f$
  
- 2) Dada a função  $g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctg(x-1)$ , determine:
  - a) domínio, zeros e imagem de  $g$
  - b) um esboço do gráfico de  $g$
  
- 3) Resolva as equações e inequações em  $\mathbb{R}$ :
  - a)  $4\sin^3 x - \sin x = 0$
  - b)  $\sin 4x + \cos 4x = 1$
  - c)  $\cos 2x < 1 + \sin x$
  - d)  $\cotg x > \tg x$
  
- 4) Dois segmentos  $AB$  e  $AC$ , de medidas 2 cm e 3 cm, formam um ângulo de medida  $\alpha$ . Seja  $S(\alpha)$  a área do triângulo  $ABC$  em função de  $\alpha$ :
  - a) esboce o gráfico da função área  $S(\alpha)$  no sistema cartesiano
  - b) para qual valor de  $\alpha$  se obtém o triângulo de área máxima?
  
- 5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando as respostas:
  - a) Às 3h33min os ponteiros de um relógio formam um ângulo de  $91^\circ 30'$
  - b) O conjunto imagem da função  $f(x) = 2 - 3\sec x$  é  $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
  - c) Existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\arctg x + \arctg \sqrt{3} = \pi$
  - d) Todos os zeros da função  $g(x) = \pi \sin(\pi x)$  são números inteiros

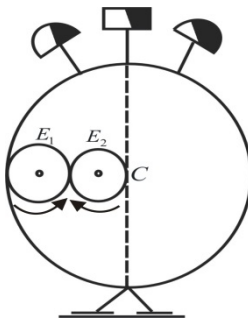
- 1) Uma sonda espacial distante 130 km da terra avista uma calota terrestre sob um ângulo  $\alpha = 160^\circ$ . Use essa informação para calcular o raio da terra.



Dados:

$$\text{sen } 80^\circ \cong 0,98 \text{ e } \cos 80^\circ \cong 0,18$$

- 2) A circunferência de um relógio despertador possui 30 cm de diâmetro e centro em  $C$ . Na figura a seguir, suponha que a engrenagem  $E_1$  dá 12 voltas por minuto e a engrenagem  $E_2$  dá 18. Calcule os raios das duas engrenagens.



- 3) Determine o valor de  $c$  para que os gráficos das funções  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = (x - \pi)^2 + c$  tenham um único ponto de interseção.

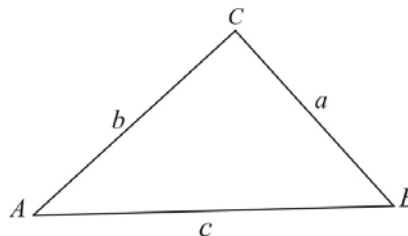
- 4) Qual é o valor máximo possível para  $y = \frac{2}{3 - \text{sen } x}$ .



- 5) Seja  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \right|$ . Determine:
- a) domínio, zeros, período e imagem de  $f$
  - b) um esboço do gráfico de  $f$
- 6) Resolver as equações e inequações:
- a)  $\sin(2x - \pi) - \cos x = 0$
  - b)  $\cos 2x < 1 + \sin x$
  - c)  $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x$
  - d)  $\operatorname{tg}(\cos x) = 0$

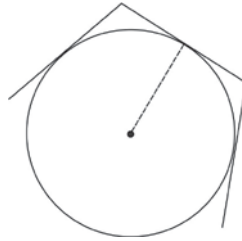
- 1) Num quadrado  $ABCD$  de lado medindo 1 cm, prolongue a diagonal  $AC$  até atingir o dobro de sua medida no ponto  $E$ . Determine a medida do segmento  $BE$ .
  
- 2) Sendo  $f(x) = |\cot gx - \operatorname{tg} x|$ , determine:
  - a) domínio, imagem e zeros de  $f$
  - b) um esboço do  $Gr(f)$
  
- 3) a) Se  $\lambda = (\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2$  e  $x + y = \frac{\pi}{3}$ , então calcule o valor numérico de  $\lambda$ .  
 b) Se  $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x - 1$ , determine o período e a imagem de  $f$ .
  
- 4) Resolva as equações e inequações:
  - a)  $\operatorname{sen} x = 1 - \cos x$
  - b)  $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$
  - c)  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$
  - d)  $\operatorname{tg}^2 x \leq \operatorname{tg} x$
  
- 5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando:
  - a) Se  $\operatorname{sen} x = -1$ , então  $\operatorname{sen} 2x = -2$
  - b) Se  $f(x) = \operatorname{sen}(ax + b)$  e  $g(x) = ax + b$ , então  $f(g^{-1}(x)) = \operatorname{sen} x$
  - c) Os gráficos das funções  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = \operatorname{tg} x$  se intersectam em pontos do plano cartesiano que não estão sobre o eixo  $x$
  - d) Se a temperatura média mensal, em grau Celsius, de uma cidade tem uma variação dada por  $T(t) = 20 + 12 \cos \frac{\pi t}{6}$ , então as temperaturas mínima e máxima dessa cidade são respectivamente  $8^\circ$  e  $32^\circ$

- 1) No triângulo  $ABC$  da figura,  $a, b$  e  $c$  são as medidas dos lados. Se  $\hat{A} = 45^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  e  $a = 2$ , calcule as medidas  $b$  e  $c$ .



- 2) Seja  $f(x) = 1 - |\sin(\pi x)|$ , determine:
- $\text{Dom}(f)$ ;  $\text{z}(f)$  e  $\text{Im}(f)$
  - Um esboço do gráfico de  $f$
- 3) Resolver as equações e inequações:
- $\sin 2x = \cot x$
  - $\frac{1}{4} \leq \sin x \cos x < \frac{1}{2}$
  - $\cos 3x + 2 \cos 6x + \cos 9x = 0$
- 4) Dada a função  $g(x) = \left| \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{3} \right|$ , determine:
- domínio, zeros e imagem de  $g$
  - esboço do gráfico de  $g$
- 5) Responda V ou F, justificando:
- Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$
  - O conjunto solução da equação  $1 + \sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2$  é finito
  - O conjunto imagem da função  $f(x) = 4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$  é o intervalo  $[3, 4]$
  - A equação  $3 \sin x + 4 \cos x = c$  tem solução para todo  $c \in [-5, 5]$

- 1) Uma circunferência de raio 2 cm é inscrita num polígono regular de 12 lados. Determine o perímetro e a área do polígono.



- 2) Resolver as equações e a inequação:

a)  $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 \leq 0$

b)  $\arctg x + \arctg(x-1) = \frac{\pi}{2}$

c)  $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = \cos x$

- 3) a) Esboce o gráfico de  $f(x) = \left| \arctg x \right| - \frac{\pi}{2}$

b) Para quais números reais  $x$  a função  $g(x) = 5 - 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  atinge o seu valor máximo?

- 4) Se  $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ , determine:

a) domínio, zeros e imagem de  $f$

b) um esboço do gráfico de  $f$

- 5) Responda V ou F, justificando as respostas:

a)  $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

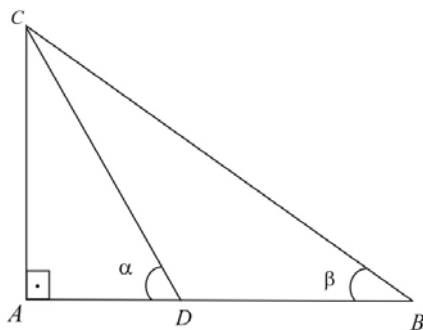
b)  $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$

c)  $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

d) O conjunto solução da equação  $\operatorname{arcsen}(-x) + \operatorname{arcsen}(x) = 0$  é  $S = \{0, 1\}$

1) Na figura, o triângulo  $ABC$  é retângulo com  $\overline{AB} = 2 + \sqrt{3}$  e  $\overline{AD} = \overline{AC} = 1$ , determine:

- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$
- a medida, em graus, do ângulo  $\beta$



2) Resolva as equações:

- $2 \cos 2x - \cos x = 3$
- $\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x = 1$

3) Se  $f(x) = \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 \right|$ , determine:

- domínio e zeros de  $f$
- um esboço do gráfico de  $f$

4) Se  $g(x) = \frac{2}{\pi} \arctg(x-1) + 1$ , determine:

- domínio, pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenadas e a imagem de  $g$
- um esboço do gráfico de  $g$

5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando as respostas:

a)  $\left(\cos^2 \frac{3\pi}{5} - \sin^2 \frac{3\pi}{5}\right) \cdot \cos \frac{3\pi}{10} - 2 \sin \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} = 0$

b) Se  $a \sec x = 1 + \operatorname{tg} x$  e  $b \sec x = 1 - \operatorname{tg} x$ , então  $a^2 + b^2 = 2$

c)  $\cos[\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

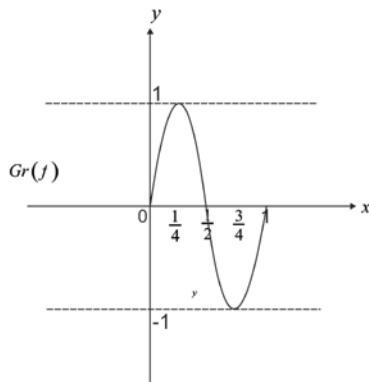
d) Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{2}$

## 2 Respostas das questões das segundas provas

1998

$$1) \quad A \cap B = \left\{ \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

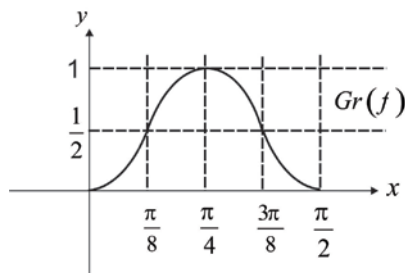
$$2) \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \quad \text{Im}(f) = [-1, 1]$$



$$3) \quad \alpha = 90^\circ, \quad A = 8$$

$$4) \quad \overline{BC} = 2\sqrt{3}$$

$$5) \quad \text{a)}$$



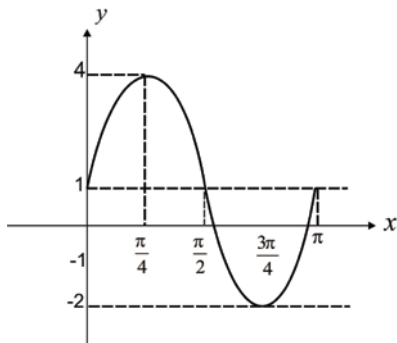
$$\text{b)} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arcsen \sqrt{x}$$

$$6) \quad \text{a)} \quad S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = (2k+1)\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{b)} \quad \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$7) \quad S = \left\{ x \in \mathbb{R} / \quad \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

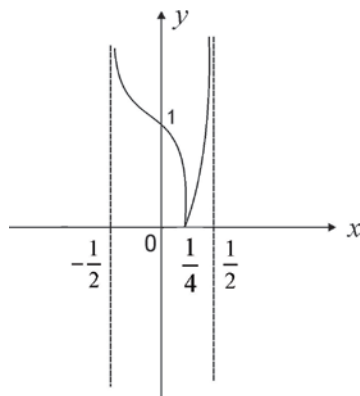
1)  $S = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$

2)  $\text{Dom} = \mathbb{R}; \text{Im} = [-2, 4]; p = \pi$



3) a)  $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{2k+1}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}; \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

b)  $z(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{4} + k; k \in \mathbb{Z} \right\}$  c)



4) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in [0, 2\pi] / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi \right\}$

6) zero



1)  $\overline{CD} = 2$

2) 125%

3) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

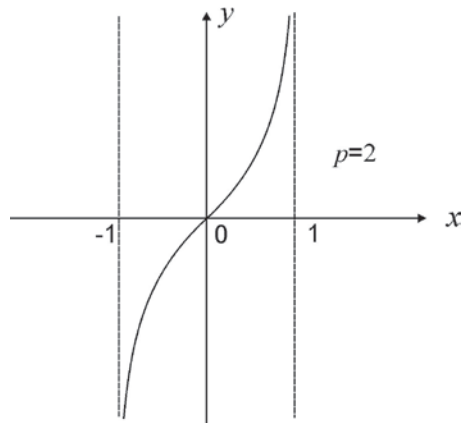
c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

4) a)  $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2k+1; k \in \mathbb{Z}\}$

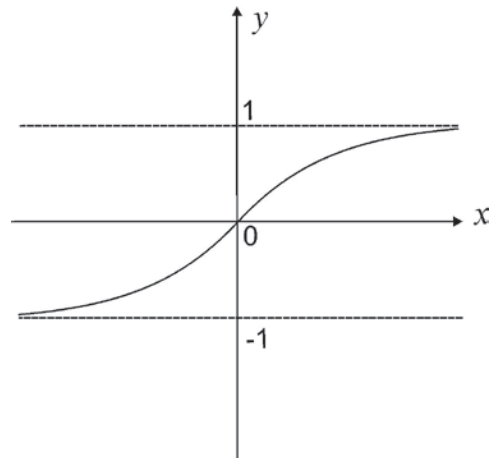
$z(f) = \{2k; k \in \mathbb{Z}\} = \text{n}^\circ \text{ inteiros pares}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

b)



c)  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$



5)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8} \text{ ou } \frac{9\pi}{8} \leq x \leq \frac{13\pi}{8} \right\}$

6)  $x = y = \frac{1}{2}$

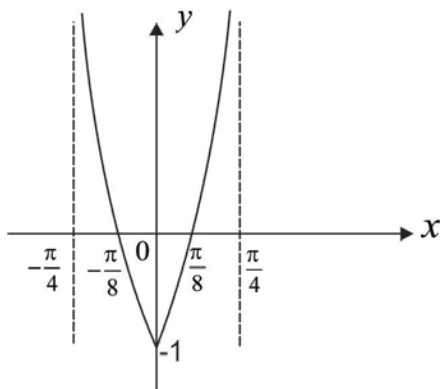
1)  $\overline{AC} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

2)  $\text{Dom}(g) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$z(g) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Im}(g) = [-1, \infty)$$

$$p = \frac{\pi}{2}$$



3) a)  $S = \{ x \in \mathbb{R}; x = 3 + 4k; k \in \mathbb{Z} \}$

b)  $S = \{ x \in \mathbb{R}; x = k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$

4) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

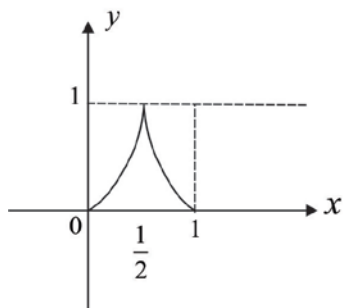
b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) a) F    b) F    c) V    d) V    e) V    (Justificar)

2002

1) a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ;  $\text{z}(f) = \mathbb{Z}$ ;  $p = 1$ ;  $\text{Im}(f) = [0, 1]$

b)



2) Perímetro =  $15(\sqrt{3} + 1)$

3)  $S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$

4) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5)  $y = \frac{\pi}{4}$

6)  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

7) a) F    b) V    c) F    d) F    (Justificar)

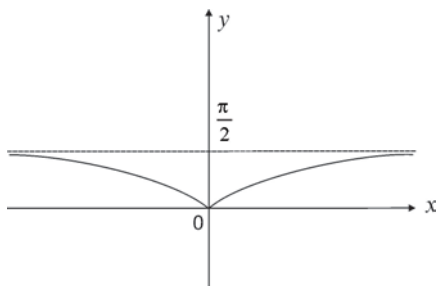
2003

1)  $\frac{24}{25}$

2)  $x \approx 54'32''$

3)  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$

4)



5)  $b = 2; c = 4; d = \frac{\pi}{2}$

7) 125%

8) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \mathbb{R}$

c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

**2004**

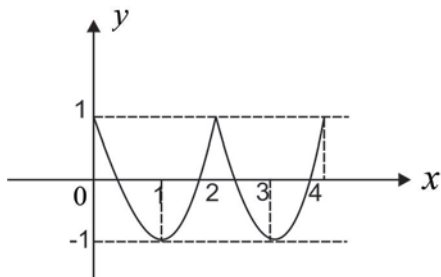
1)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

2) b)  $S = \left\{ -2, \frac{-3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\}$

3) 4h5'27" e 4h38'10"

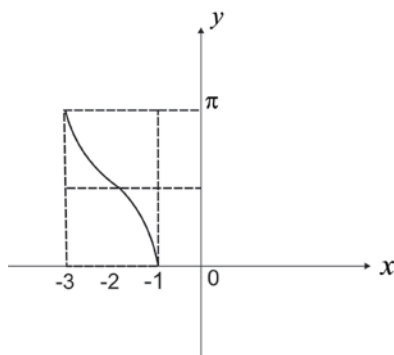
4) a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; \text{Im}(f) = [-1, 1]; z(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{1}{3} + 2k \text{ ou } x = \frac{5}{3} + 2k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)



5) a)  $\text{Dom}(f) = [-3, -1]$ ;  $\text{Im}(f) = [0, \pi]$ ;  $z(f) = \{-1\}$

b)



c)  $f^{-1}(x) = -2 + \cos x$

**2005**

1) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

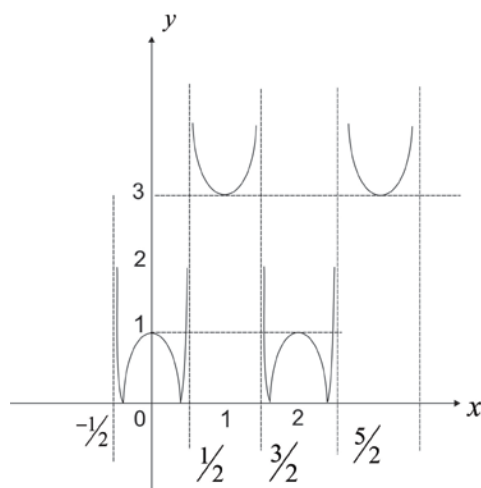
b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $S = \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$

2) a)  $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{1}{2} + k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$ ;  $p = 2$

$$z(f) = \left\{ \frac{1}{3} + 2k, \frac{5}{3} + 2k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b)



$Gr(f)$

3) Há duas possibilidades de quadriláteros convexos e duas de não convexos.

$$p_1 = 12 + 2\sqrt{3} \text{ e } p_2 = 6 + 2\sqrt{3}$$

4)  $p=3$

5) a) V      b) V      c) F      d) V      (Justificar)

**2006**

1) a)  $\overline{AC} = \sqrt{3}$

b)  $\hat{ADC} = 30^\circ$

c)  $S = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

2) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

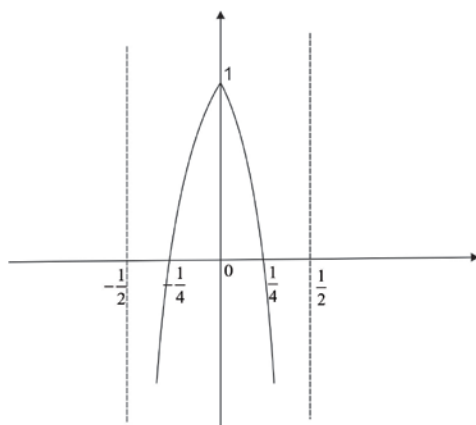
b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) a)  $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{1}{2} + k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$z(f) = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{k}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$$

b)



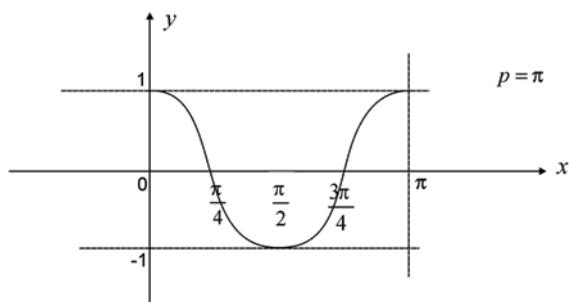
4) a)  $S = \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$       b)  $10\sqrt{\frac{3}{\pi}}$

5) a) V    b) V    c) F    d) F (Justificar)

**2007**

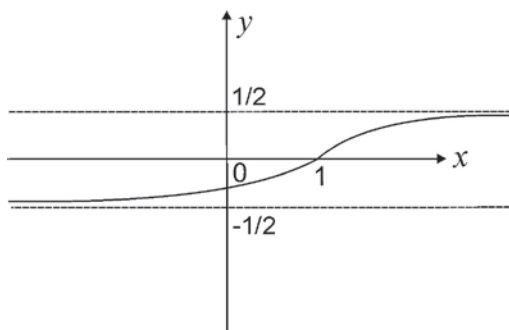
1) a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; z(f) = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}; \text{Im}(f) = [-1, 1]$

b)



2) a)  $Dom(g) = \mathbb{R}; \quad z(g) = \{1\}; \quad Im(g) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b)



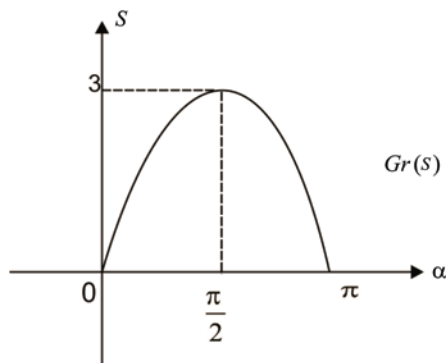
3) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = (k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < (2k+1)\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

d)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

4) a)  $S(\alpha) = 3\sin\alpha$   
 $0 \leq \alpha \leq \pi \text{ rad}$



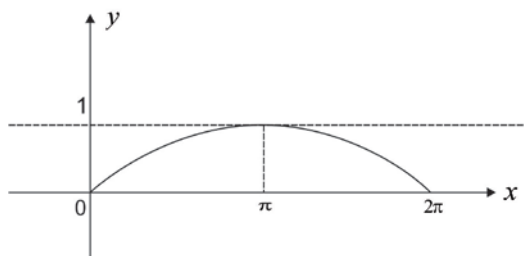
b)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

5) a) V b) V c) F d) V (Justificar)



## 2008

- 1) 6.370 km
- 2)  $R_1=3$  cm e  $R_2=4,5$  cm
- 3)  $c = -1$
- 4)  $y = 1$
- 5) a)  $Dom(f) = \mathbb{R}; \quad z(f) = \{2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}; \quad p = 2\pi; \quad Im(f) = [0,1]$   
 b)  $Gr(f)$

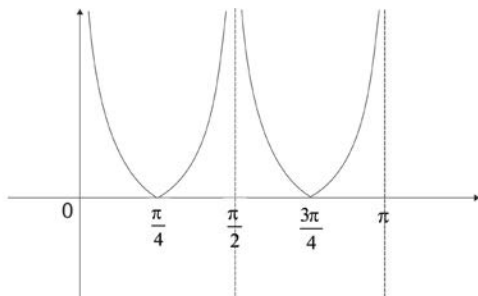


- 6) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{com } k \text{ inteiro par} \right\}$   
 d)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

## 2009

- 1)  $\overline{BE} = \sqrt{5}$
- 2) a)  $Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x \neq \frac{k\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad Im(f) = [0, +\infty) \text{ e}$   
 $z(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}; \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $Gr(f)$



3) a)  $\lambda = 3$

b)  $p = \pi$  e  $\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

4) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

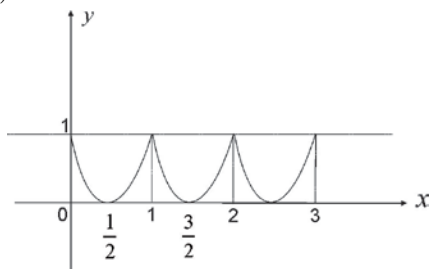
5) a) F      b) V      c) F      d) V      (Justificar)

**2010**

1)  $b = \sqrt{6}$  e  $c = 1 + \sqrt{3}$

2) a)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}; z(f) = \left\{ \frac{1}{2} + k; k \in \mathbb{Z} \right\}; \text{Im}(f) = [0, 1]$

b)  $Gr(f)$



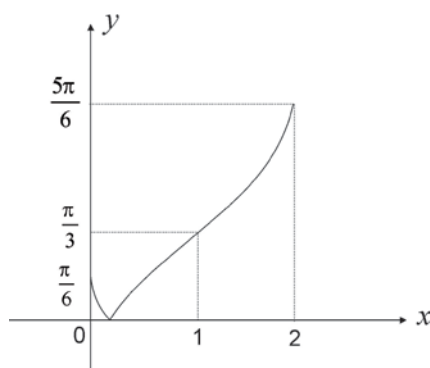
3) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

4) a)  $Dom(g) = [0, 2]; z(g) = \left\{ \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right\}; Im(g) = \left[ 0, \frac{5\pi}{6} \right]$

b)  $Gr(g)$



5) a) V    b) F    c) V    d) V    (Justificar)

**2011**

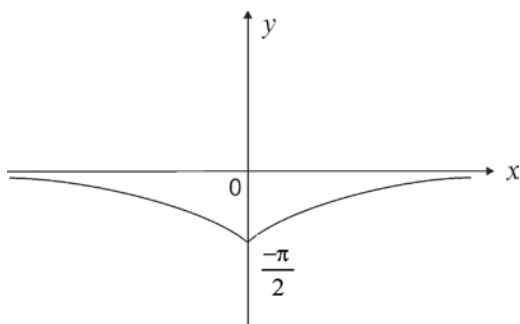
1)  $48(2-\sqrt{3})cm$  e  $48(2-\sqrt{3})cm^2$

2) a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

c)  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

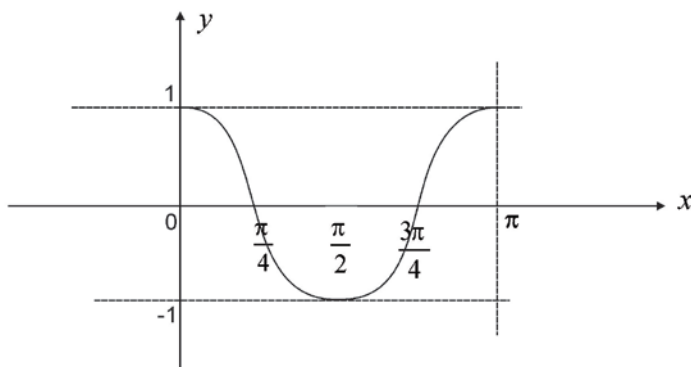
3) a)



b)  $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

4) a)  $Dom(f) = \mathbb{R}; z(f) = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}; Im(f) = [-1, 1]$

b)



5) a) V    b) F    c) V    d) F    (Justificar)

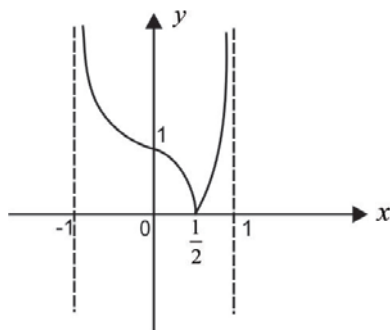
**2012**

1) a)  $\sqrt{3}$     b)  $15^\circ$

2) a)  $S = \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$     b)  $S = \left\{ 2k, 2k + \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

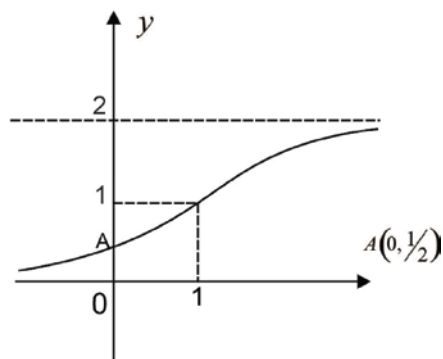
3) a)  $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2k+1; k \in \mathbb{Z}\}; z(f) = \left\{2k + \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)  $\text{Gr}(f)$



4) a)  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}; \text{Im}(g) = (0, 2); A = (0, 1/2)$

b)  $\text{Gr}(g)$



5) a) V    b) V    c) V    d) F    (Justificar)



# REFERÊNCIAS

- [1] ANTUNES, Fernando do Coltro. **Matemática por assunto**. São Paulo: Scipione, 1988. v. 3.
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do *et al.* **Trigonometria – números complexos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 1999.
- [4] IEZZI, Gelson *et al.* **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977, v. 3.
- [5] KENNEDY, Eduardo S. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1993.
- [6] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.



EDUFES