Jomar Ferreira Ramos Junior

A Transformada de Fourier para o Laplaciano Generalizado

Vitória

2024

Jomar Ferreira Ramos Junior

A Transformada de Fourier para o Laplaciano Generalizado

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim

Vitória
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Ramos Junior, Jomar Ferreira, 1998-

R175t A Transformada de Fourier para o Laplaciano Generalizado / Jomar Ferreira Ramos Junior. - 2024.

87 f. : il.

Orientador: Fábio Júlio Valentim da Silva.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Transformada de Fourier. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Funções de Green. 4. Teoria Espectral. 5. Operadores Diferenciais. 6. Operadores auto-adjuntos. I. da Silva, Fábio Júlio Valentim. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

A Transformada de Fourier para o Laplaciano Generalizado

Jomar Ferreira Ramos Junior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 05 de março de 2024 por:

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. José Miguel Mendoza Aranda
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Jean Carlos Silva
Universidade Federal de Minas Gerais

Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, 05 de março de 2024

Jomar Ferreira Ramos Junior

A Transformada de Fourier para o Laplaciano Generalizado

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 05 de março de 2024:

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. José Miguel Mendoza Aranda
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Jean Carlos da Silva
Universidade Federal de Minas Gerais
Membro Externo

Vitória
2024

À minha família, por seu amor incondicional e apoio constante; aos meus amigos, pela compreensão e incentivo ao longo desta jornada; e a todos os professores e mentores que me guiaram e inspiraram, esta dissertação é dedicada a vocês. Que este trabalho possa contribuir de alguma forma para o avanço do conhecimento em nossa área e para o bem da sociedade.

Agradecimentos

Expresso minha profunda gratidão a Deus, por Sua infinita sabedoria, por me conceder forças nos momentos desafiadores e por guiar meus passos ao longo desta jornada acadêmica.

Agradeço ao Dr. Fábio Júlio Valentim da Silva, meu orientador, pela orientação dedicada, pelo apoio constante e pela sua expertise que foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação. Sua orientação foi essencial para o meu crescimento acadêmico e profissional.

À minha família, meu mais sincero agradecimento pelo amor incondicional, apoio e compreensão demonstrados em todos os momentos. Vocês são minha base e inspiração.

Aos amigos e colegas de estudo, pelo incentivo, amizade e troca de conhecimentos ao longo dessa jornada. Em especial aos meus irmãos de outra mãe: Carlos Eduardo Wolkartt Vago, Guilherme Barbieri Piski, Adler Armelini Furlan.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado (FAPES), pela concessão da bolsa de estudos em parte do período do mestrado. Sem o apoio financeiro oferecido por esta instituição, este trabalho não seria possível.

Por fim, agradeço à todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para o seu desenvolvimento. Que esta dissertação possa contribuir de alguma forma para o avanço do conhecimento em nossa área e para o bem da sociedade.

“O talento é natural. A habilidade é desenvolvida com horas e horas de treinamento"

Kobe Bryant

Resumo

Esta dissertação acadêmica tem como objetivo principal contribuir para o aprimoramento do entendimento da Teoria de Fourier aplicada ao laplaciano generalizado. A metodologia proposta envolve a construção de uma base ortonormal de autofunções para o operador, com base na escolha apropriada de funções de Green. O problema central consiste em encontrar a solução $u(x)$ que satisfaça determinadas condições de contorno para a equação $\mathcal{L}u = f$, utilizando uma representação em série das autofunções do operador $\mathcal{L}$. A dissertação aborda aspectos fundamentais, como a definição do domínio do laplaciano generalizado, a análise das Funções de Green e suas aplicações na resolução de equações diferenciais parciais, bem como transformadas para o laplaciano generalizado. O interesse em consolidar a Teoria de Fourier para o laplaciano generalizado visa proporcionar uma compreensão mais profunda das propriedades desse operador e sua relação com a Teoria de Fourier, estabelecendo um alicerce para pesquisas futuras, incluindo casos mais complexos como o operador diferencial na ordem inversa. Este trabalho representa uma contribuição significativa para a compreensão da teoria do laplaciano generalizado e suas conexões com a Teoria de Fourier.

Palavras-chave: Laplaciano Generalizado, Teoria de Fourier, Base de Autofunções, Operador Diferencial, Transformada Generalizada.

Abstract

This academic dissertation aims primarily to contribute to the enhancement of understanding of the Fourier Theory applied to the generalized Laplacian. The proposed methodology involves the construction of an orthonormal basis of eigenfunctions for the operator, based on the appropriate choice of Green's functions. The central problem consists of finding the solution $u(x)$ that satisfies certain boundary conditions for the equation $\mathcal{L}u = f$, using a series representation of the eigenfunctions of the operator $\mathcal{L}$. The dissertation addresses fundamental aspects such as the definition of the domain of the generalized Laplacian, the analysis of Green's functions and their applications in solving partial differential equations, as well as transformations for the generalized Laplacian. The interest in consolidating the Fourier Theory for the generalized Laplacian aims to provide a deeper understanding of the properties of this operator and its relation to Fourier Theory, establishing a foundation for future research, including more complex cases such as the differential operator in reverse order. This work represents a significant contribution to the understanding of the theory of the generalized Laplacian and its connections with Fourier Theory.

Keywords: Generalized Laplacian, Fourier Theory, Basis of Eigenfunctions, Differential Operator, Generalized Transform.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Esta dissertação objetiva contribuir para consolidação do entendimento da teoria a cerca desta generalização da equação do calor. Pretendemos estabelecer bases claras da Teoria de Fourier no contexto do laplaciano generalizado. Partindo de uma escolha apropriada de funções de Green, vamos construir uma base ortonormal de autofunções para o operador, similar à de senos e cossenos para o laplaciano, induzindo uma transformação que o trivializa, como feito em (DYM; MCKEAN, 1976a), e nos artigos (FELLER, 1955; FELLER, 1957).

A ideia geral para essa teoria, sem muito rigor, começa com o problema abaixo, onde queremos encontrar a solução $u(x)$ que satisfaz as condições de contorno.

$$\mathcal{L}u = f$$

Quando temos uma base ortonormal de autofunções de $\mathcal{L}$, e considerando que elas satisfaçam as condições de contorno, podemos escrever:

$$\mathcal{L}\phi_n = -\lambda_n \phi_n$$

Assumindo que $u(x)$ pode ser escrita na expansão pelas autofunções, temos:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Portanto, vale:

$$f(x) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \phi_n(x)$$

Aplicando o produto interno com a autofunção ϕ_m, obtemos uma fórmula para a constante c_m na qual escrevemos $u(x)$.

$$\langle f, \phi_m \rangle = \left\langle -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \phi_n, \phi_m \right\rangle = -c_m \lambda_m \langle \phi_m, \phi_m \rangle = -c_m \lambda_m$$

Então, é possível determinar a solução $u(x)$, através de seus coeficientes:

$$c_m = -\lambda_m^{-1} \langle f, \phi_m \rangle$$

Em particular, o assunto focal deste trabalho é uma abordagem mais teórica e menos aplicada, isto é, serão tratados com mais detalhes os teoremas e a teoria que visam construir desde os objetos e espaços, até a transformada generalizada que trivializa a solução desse laplaciano.

Em (DYM; MCKEAN, 1976a), que é a principal referência deste trabalho, usamos esse raciocínio, considerando o laplaciano generalizado, que é o operador $\mathfrak{G} : f \to \dfrac{d^2 f}{dW dx}$, onde W é uma função não-decrescente, contínua à direita, que pode conter saltos.

Dividida em quatro capítulos interligados, a pesquisa começa com uma introdução às definições fundamentais, incluindo a função massa W, e avança para a definição do domínio do laplaciano generalizado. Nesta dissertação, vamos nos concentrar no caso em que W é limitada e está definida num intervalo finito. Em seguida, explora-se a natureza do operador diferencial, demonstrando sua auto-adjunção e não-positividade em seu domínio. A dissertação também aborda o conceito de Funções de Green, uma ferramenta crucial na resolução de equações diferenciais parciais, destacando sua utilidade na obtenção de soluções particulares e gerais. A Função de Green depende de um parâmetro $\omega \in \mathbb{C}$, neste estudo vamos nos concentrar no caso em que $\omega = ib$, com $b > 0$. Por fim, são apresentadas as transformadas para o laplaciano generalizado, revelando a relação entre o Operador de Green, a Função Espectral Principal e as transformadas pares e ímpares. Essa pesquisa oferece uma compreensão aprofundada das propriedades do laplaciano generalizado, contribuindo para a consolidação do conhecimento sobre a Transformada de Fourier deste Laplaciano.

O interesse em consolidar o entendimento da Teoria de Fourier para o laplaciano generalizado está em estudar o segundo caso, onde o operador diferencial é $\mathfrak{H} : f \to \dfrac{d^2 f}{dx dW}$, no qual a ordem da derivação está trocada, portanto, reforçando o entendimento para o primeiro caso $dW dx$, será possível investigar e realizar uma pesquisa com uma base mais sólida para o segundo caso $dx\, dW$.

É esperado que o leitor possua um conhecimento amplo sobre Medida e Integração, como em (BARTLE, 2014). Conhecimentos sobre Análise Funcional como em (REED; SIMON, 1981) ajudam a compreender melhor a motivação e a construção dos objetos.

2 Cordas

O objetivo desta dissertação é construir a Transformada de Fourier para o operador laplaciano generalizado. Neste capítulo, vamos introduzir algumas definições para iniciar a teoria. O termo generalizado vem com a introdução de uma função W, chamada de *massa*, que será a derivada de segunda ordem $dWdx$ do operador $\mathfrak{G}$, diferentemente do laplaciano clássico dx^2. A partir da função massa, definimos um conjunto predecessor e dele vamos extrair o domínio do laplaciano generalizado. Mais precisamente, vamos apresentar um laplaciano generalizado pois existem diversas maneiras de generalizar o laplaciano clássico. Além disso são apresentadas algumas propriedades para as funções nesta classe.

2.1 Conceitos

Iniciamos com a definição da função W e seu domínio, para gerar o laplaciano generalizado.

O problema de vibração unidimensional em uma corda é um dos problemas fundamentais estudados na física e na matemática aplicada. Ele envolve modelar o comportamento dinâmico de uma corda esticada entre duas extremidades fixas quando sujeita a uma perturbação inicial. A solução desse problema muitas vezes requer o uso de técnicas matemáticas avançadas, incluindo o operador Laplaciano e a transformada de Fourier, motivando a definição abaixo.

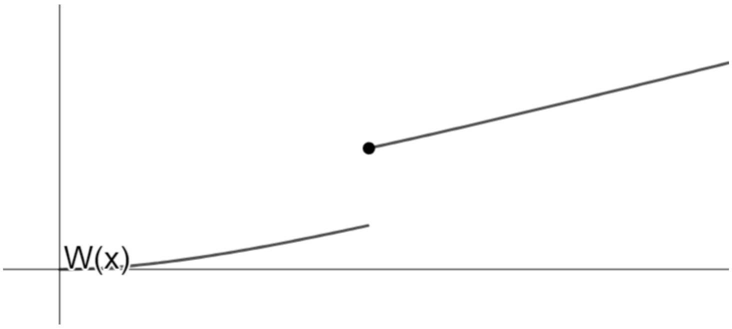
Definição 2.1.1. Uma corda é um par lW onde o número $0 < l \leq \infty$ é o comprimento da corda e $W = W(x)$ é uma função real que representa a massa acumulada da corda do início até o ponto $x < l$. Pedimos que W seja, naturalmente, não negativa, não decrescente e contínua à direita.

A *massa colocada* em x, representa o salto da função em x, denotado por $W[x]$. É dado pela diferença $W(x) - W(x-)$, onde $x-$ é o limite à esquerda de x.

Observação. Na definição 2.1.1, o comprimento l pode ser infinito. Vamos nos concentrar apenas nos casos em que $l + W(l) < \infty$, ou seja, o comprimento l é finito e a função W é limitada. Nesse caso em que as cordas têm comprimento finito, existe um parâmetro $0 \leq k \leq \infty$ que diz como a corda está amarrada no final e representamos a corda como a trinca lWk.

Exemplo 2.1.2. W com salto, limitada e $l = \infty$.

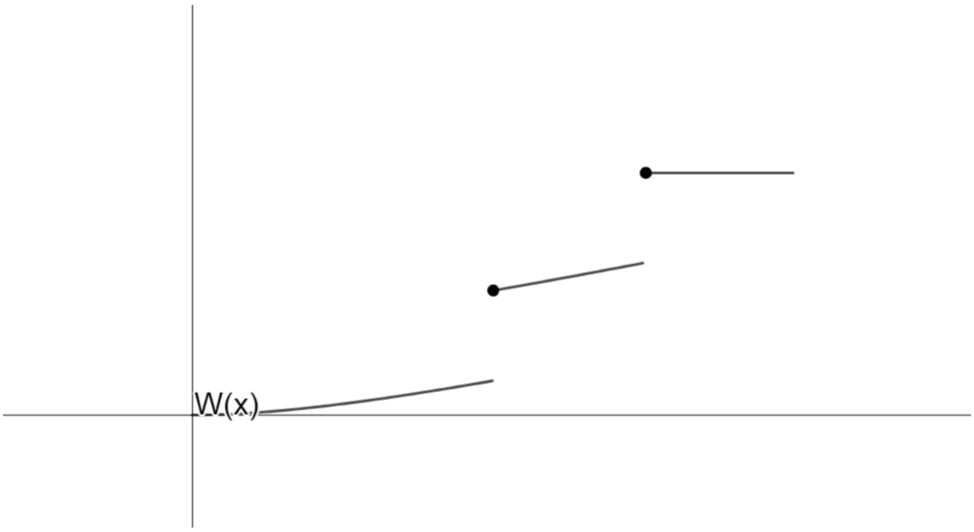
Figura 1 – W com salto, limitada e $l = \infty$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Exemplo 2.1.3. W com saltos, limitada e $l < \infty$.

Figura 2 – W com saltos, limitada e $l < \infty$.



Fonte: Produção do próprio autor.

A partir dessa função massa W da definição da corda, vamos definir uma medida e sempre que falarmos da função W daqui pra frente, estamos falando sobre a medida, a menos de uma menção explícita contrária.

Definição 2.1.4. A medida gerada pela função real massa W, é a medida definida na σ-álgebra dos borelianos, onde a medida de um intervalo $(a, b]$ é dada pela diferença da função nos extremos:

$$W((a, b]) = W(b) - W(a)$$

A princípio, a função massa W só está definida no intervalo $[0, l]$, mas estendemos essa função em toda a reta definindo $W(x) = 0$ para $x < 0$ e $W(x) = W(l)$ para

$x > l$. Lembre-se que $l + W(l) < \infty$, então a medida do intervalo $[0, l]$ é finita, pois $W([0, l]) = W(l) - W(0-) < \infty$.

Vamos representar por $\sigma(W)$ a menor sigma álgebra para a qual a função W é mensurável e por um resultado clássico de Teoria da Medida, obtemos:

$$\sigma(W) = \sigma(\{W^{-1}(\ (-\infty, r]\ ); r \in \mathbb{Q}\})$$

Dizemos que uma função f é $W-$mensurável se $f^{-1}(\ (-\infty, r]\ ) \in \sigma(W)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

A princípio, consideramos funções f definidas apenas no intervalo $[0, l]$, mas quando necessário, vamos considerar as suas extensões $f(x) = 0 \quad , x < 0$ e $f(x) = f(l) \quad , x > l$.

Considere o Espaço de Hilbert Complexo $L^2([0, l], dW)$ das funções W-mensuráveis que satisfazem:

$$\|f\|_W^2 = \int_{[0,l]} |f(x)|^2 dW(x) < \infty$$

O produto interno do espaço é dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,l]} f \cdot g^* dW$$

onde g^* é o conjugado da função g. Como, a princípio, a função massa W não precisa ser contínua, é preciso tomar cuidado com os extremos na integral, pois pode ocorrer para algum a:

$$\int_{\{a\}} dW(x) \neq 0$$

Portanto, fixemos a notação:

Notação.

- $\int_{a-}^{b} dW(x) = \int_{[a,b]} dW(x)$ é a integral no intervalo fechado $[a, b]$, considerando a massa em a e b ;
- $\int_{a-}^{b-} dW(x) = \int_{[a,b)} dW(x)$ é a integral no intervalo $[a, b)$, considerando a massa em a e desconsiderando em b ;
- $\int_{a}^{b-} dW(x) = \int_{(a,b)} dW(x)$ é a integral no intervalo aberto (a, b), desconsiderando a massa em a e b ;
- $\int_{a}^{b} dW(x) = \int_{(a,b]} dW(x)$ é a integral no intervalo $(a, b]$, desconsiderando a massa em a e considerando em b .

Observação. As duas notações são equivalentes, mas em determinados contextos é mais interessante usar uma ou outra. Essa notação será usada somente ao integrarmos em função de W, em outras integrais vamos manter a notação usual, como, por exemplo $\int_a^b dx$.

Além de enxergar a função W pelo seu caráter de medida, também queremos falar sobre a derivada em relação a essa função, por isso definimos:

Definição 2.1.5. Dizemos que uma função real g possui derivada em relação a W num ponto $x \in \mathbb{R}$ se o limite abaixo existe:

$$\frac{dg}{dW}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{W(x+h) - W(x)}$$

Se o limite existe para todo o x real, dizemos que g é derivável em relação a W.

Observe que, quando W é crescente, temos $x << W$, isto é, a medida de Lebesgue dx é absolutamente contínua em relação à medida dW, por isso vale o Teorema de Radon-Nikodym, enunciado abaixo, com ele podemos obter uma espécie de Regra da Cadeia para a derivação nos casos em que W é crescente.

Teorema 2.1.6 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sejam λ e μ medidas σ-finitas mensuráveis nos borelianos da reta tais que $\lambda << \mu$, λ é absolutamente contínua em relação a μ, então existe uma função mensurável (nos borelianos) $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:*

$$\lambda(A) = \int_A f \; d\mu \quad \text{, para todo } A \text{ boreliano}$$

Essa função f é chamada de derivada de Radon-Nikodym e é representada por $\frac{d\lambda}{d\mu}$. Ainda, para qualquer função g integrável em relação a λ, vale:

$$\int_A g \; d\lambda = \int_A g \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \; d\mu$$

Proposição 2.1.7. *Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por*

$$F(s) = \int_a^s f(x)dx$$

onde $f[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então vale:

$$\frac{dF(x)}{dW} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dW} = f(x)\frac{dx}{dW}.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$. Usando o Teorema de Radon Nikodyn temos que

$$F(s) = \int_a^s f(x)\frac{dx}{dW} \, dW.$$

Logo,

$$\frac{dF(x)}{dW} = f(x)\frac{dx}{dW} = \frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dW},$$

o que prova o resultado. □

$$\frac{df(x)}{dW} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dW}(x)$$

Prosseguimos com algumas definições.

Definição 2.1.8. Chamamos de Operador Diferencial Formal, o operador que para cada função f, associa sua derivada em relação a x e a W, isto é:

$$f \longrightarrow \frac{d^2 f}{dW\ dx}$$

.

O domínio desse operador são as funções em $L^2([0,l], dW)$ para as quais existe essa derivada de segunda ordem, primeiro em relação a x e depois em relação à medida W.

Observação 2.1.9. Em geral, não vale a comutatividade dessas derivadas, isto é, não vale que:

$$\frac{d^2 f}{dW\ dx} = \frac{d^2 f}{dx\ dW}$$

Pois $\dfrac{df}{dW}$ pode existir para f descontínua, desde que os pontos de descontinuidade da f coincidam com os pontos de descontinuidade da W, e teríamos $\dfrac{df}{dW}(x) = \dfrac{\text{salto em } x \text{ de } f}{\text{salto em } x \text{ de } W}$, e por outro lado, como f é descontínua, $\dfrac{df}{dx}(x)$ não estaria bem definida.
No caso em que W é diferenciável em relação a x, temos:

$$\frac{df}{dW}(x) = \frac{f'}{W'} \implies \frac{d^2 f}{dx\ dW} = \frac{W' f'' - W'' f'}{(W')^2}$$

Enquanto

$$\frac{d^2 f}{dW\ dx} = \frac{d(f')}{dW}(x) = \frac{f''}{W'}$$

Por isso, não vale a comutatividade,em geral.

O propósito deste capítulo é associar uma classe de operadores $\mathfrak{G}$ com uma corda dada e isso é feito através da restrição do operador diferencial formal à domínios especiais $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$. O operador $\mathfrak{G}$ será definido como uma restrição do Operador Diferencial Formal, a um domínio específico $\mathbf{D}(\mathfrak{G}) \subset L^2([0,l], dW)$.

Vamos construir esse domínio $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ nas próximas seções, mas já observe que a ação do operador $\mathfrak{G}$ numa função f em seu domínio é $\dfrac{d^2 f}{dW dx}$.

Tal operador $\mathfrak{G}$ será chamado de **Laplaciano Generalizado**, pois faz um papel semelhante ao laplaciano, mas na segunda derivada, usa a função massa W, que generaliza a escrita do laplaciano.

2.2 O domínio $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$

Nesta seção, vamos iniciar a construção do domínio do operador $\mathfrak{G}$. A ideia geral é começar com espaços maiores e reduzir tais espaços para que satisfaçam as propriedades desejadas e através de alguns teoremas de extensão obter o domínio do operador de forma que seja maximal. Veremos algumas propriedades para as funções nesta classe $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ e na próxima seção, impondo algumas condições de contorno, teremos o domínio do operador $\mathfrak{G}$.

Fixemos as seguintes notações:

$$f^+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$f^-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

onde f^+ e f^- são as derivadas à esquerda e a direita de x respectivamente.

Definição 2.2.1. Considere a classe de funções definida em toda a reta $L^2([0,l], dW)$, definimos a classe $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$, com $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \subset L^2([0,l], dW)$, como a classe de funções para as quais valem que se $f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$, então f pode ser escrita como:

$$f(x) = f(0) + f^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) \tag{2.1}$$

onde $\int_{[0,l]} |\mathfrak{G}f(s)|^2 dW(s) < \infty$.

Em outras palavras, $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) = \{f \in L^2([0,l], dW)$ tal que f pode ser escrita como (2.1)$\}$.

Mais a frente daremos exemplos de funções nesta classe $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$, porém antes é necessário verificar algumas propriedades sobre as funções nesse conjunto, isso vai ajudar a compreender melhor os exemplos.

Nesse momento $\mathfrak{G}f$ é apenas a representação de uma função. Observe que as funções nessa classe se estendem linearmente fora do intervalo $[0,l]$:

- $x > l$:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \downarrow x} \left[\frac{f(0) + f^-(0)y + \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y - x} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{-f(0) - f^-(0)x - \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y - x} \right] \end{aligned}$$

Simplificando e utilizando que $l < x \leq z \leq y$, vale:

$$f^+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f^-(0)(y - x) + \int_x^y dz [\int_{0-}^l \mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_l^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)]}{y - x}$$

Mas como $W(s) = W(l)$ para $l \leq s \leq z$, temos $\int_l^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) = 0$ e então:

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \lim_{y \downarrow x} \frac{f^-(0)(y-x) + \int_x^y dz \int_{0-}^l \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x} \\
&= \lim_{y \downarrow x} \frac{f^-(0)(y-x) + (y-x)\int_{0-}^l \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x} \\
&= \lim_{y \downarrow x} f^-(0) + \int_{0-}^l \mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^-(0) + \int_{0-}^l \mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^+(l)
\end{aligned}$$

Assim, para $x > l$, vale

$$f(x) = f(l) + f^+(l)(x-l)$$

- $x < 0$:

  De igual modo,

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \\
&= \lim_{y \uparrow x} \left[\frac{f(0) + f^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{-f(0) - f^-(0)y - \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y} \right]
\end{aligned}$$

  Simplificando e utilizando que $y < x < 0$, vale:

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) - \int_x^0 dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_y^0 dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y} \\
&= \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) + \int_y^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y}
\end{aligned}$$

  Mas como $W(s) = 0$ para $s < 0$ e $y \leq z \leq x < 0$,
  temos $\int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) = -\int_z^{0-} \mathfrak{G}f(s)dW(s) = 0$ e então:

$$f^+(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y)}{x-y} = f^-(0)$$

  Assim, para $x < 0$, vale

$$f(x) = f(0) + f^-(0)x \tag{2.2}$$

Prosseguimos com a proposição.

Proposição 2.2.2. *Para $f \in \boldsymbol{D}_0(\mathfrak{G})$, podemos calcular a derivada à direita e à esquerda como:*

$$f^+(x) = \begin{cases} f^-(0) + \int_0^x \mathfrak{G}f(z)dW(z), \ \textit{para } 0 \leq x \leq l \\ f^-(0), \ \textit{para } x < 0 \end{cases}$$

e

$$f^-(x) = \begin{cases} f^-(0) + \int_0^{x-} \mathfrak{G}f(z)dW(z), \; \textit{para } 0 < x \leq l \\ f^-(0), \; \textit{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Demonstração. Como visto acima, para $x < 0$, vale (2.2) que diz que $f(x) = f(0)+f^-(0)x$, logo, para $x < 0$, temos $f^+(x) = f^-(x) = f^-(0)$. Por definição,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \lim_{y\downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\downarrow x} \left[\frac{f(0)+f^-(0)y + \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{-f(0)-f^-(0)x - \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x} \right] \end{aligned}$$

Simplificando e utilizando que $x \leq z \leq y$, vale:

$$f^+(x) = \lim_{y\downarrow x} \frac{f^-(0)(y-x) + \int_x^y dz[\int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)]}{y-x}$$

Mas como $\int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s)$ é constante em relação a z, temos:

$$f^+(x) = \lim_{y\downarrow x} \frac{f^-(0)(y-x) + (y-x)\int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_x^y dz \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x}$$

Vamos mostrar agora, que $\lim_{y\downarrow x} \int_x^y dz \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) = 0$.

Escreva $F(z) = \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)$, queremos $\lim_{y\downarrow x} \int_x^y F(z)dz = 0$ e para isso, basta mostrar que $F(z)$ é limitada.

De fato, por definição, $f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \implies \mathfrak{G}f \in L^2([0,l],dW)$, como a medida de $[0,l]$ é finita, vale que $\mathfrak{G}f$ é integrável, isto é, $\int_{0-}^l |\mathfrak{G}f(s)|dW(s) = M < \infty$. Em particular, $F(z) = \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) \leq M$ e, vale, $\lim_{y\downarrow x} \int_x^y dz \int_x^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) = 0$

Portanto,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \lim_{y\downarrow x} \frac{f^-(0)(y-x) + (y-x)\int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{y-x} \\ &= \lim_{y\downarrow x} f^-(0) + \int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^-(0) + \int_{0-}^x \mathfrak{G}f(s)dW(s) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \lim_{y\uparrow x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \\ &= \lim_{y\uparrow x} \left[\frac{f(0)+f^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{-f(0)-f^-(0)y - \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)}{x-y} \right] \end{aligned}$$

Simplificando e utilizando que $y \leq z \leq x$, vale:

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) + \int_y^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G} f(s) dW(s)}{x-y} \\ &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) + \int_y^x dz [\int_{0-}^y \mathfrak{G} f(s) dW(s) + \int_y^z \mathfrak{G} f(s) dW(s)]}{x-y} \end{aligned}$$

Mas como $\int_{0-}^y \mathfrak{G} f(s) dW(s)$ é constante em relação a z, temos:

$$f^-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) + (x-y) \int_{0-}^y \mathfrak{G} f(s) dW(s) + \int_y^x dz \int_y^z \mathfrak{G} f(s) dW(s)}{x-y}$$

Novamente, temos $\lim_{y \uparrow x} \int_y^x dz \int_y^z \mathfrak{G} f(s) dW(s) = 0$, analogamente ao caso anterior, com a observação de que quando $y \uparrow x$, e como $y \leq z < x$, vale $z \downarrow y$. Portanto,

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \lim_{y \uparrow x} \frac{f^-(0)(x-y) + (x-y) \int_{0-}^y \mathfrak{G} f(s) dW(s)}{x-y} \\ &= f^-(0) + \lim_{y \uparrow x} \int_{0-}^y \mathfrak{G} f(s) dW(s) = f^-(0) + \int_{0-}^{x-} \mathfrak{G} f(s) dW(s) \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.3. *Para $f \in \boldsymbol{D}_0(\mathfrak{G})$, valem os seguintes itens:*

1. $f^+(y) - f^-(x) = \int_{x-}^y \mathfrak{G} f(z) dW(z)$

2. $\Big(\mathfrak{G} f(x)\Big) W[x] = f^+(x) - f^-(x)$

Demonstração.

1. Ora, fazendo a subtração, obtemos $f^+(y) - f^-(x) =$
   $= f^-(0) + \int_0^y \mathfrak{G} f(z) dW(z) - f^-(0) - \int_0^{x-} \mathfrak{G} f(z) dW(z) = \int_{x-}^y \mathfrak{G} f(z) dW(z)$

2. Segue do item anterior que $f^+(x) - f^-(x) = \int_{x-}^x \mathfrak{G} f(z) dW(z) = \mathfrak{G} f(x) \int_{x-}^x dW(z) = \mathfrak{G} f(x) \cdot [W(x) - W(x-)] = \mathfrak{G} f(x) W[x]$

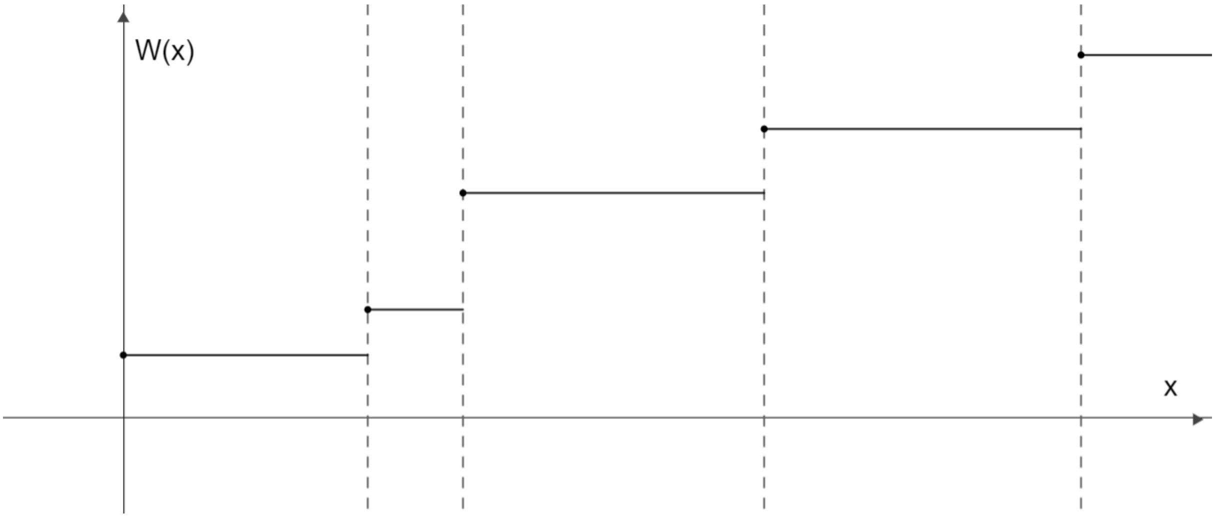
□

Exemplo 2.2.4. Se W cresce apenas em finitos saltos $W_0, W_1, \cdots, W_n$ colocados em $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = l$ então $\mathfrak{G}$ pode ser expresso na forma:

$$\mathfrak{G} f(x_k) = \frac{\left[\dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right]}{W_k}$$

para $k = 1, \cdots, n-1$, mas para $k = 0$ e $k = n$ pode ser que $\mathfrak{G} f$ não tenha essa escrita, pois não estão bem definidos x_{k+1} ou x_{k-1} para esses casos. Se fixar os valores de $f(l)$ e $f(0)$, então a função $f(x)$ é completamente definida.

Figura 3 – Exemplo de W somente saltos.



Fonte: Produção do próprio autor.

De fato, como visto em 2.2.3 temos $\mathfrak{G}f(x_k) = \dfrac{f^+(x_k) - f^-(x_k)}{W[x_k]} = \dfrac{f^+(x_k) - f^-(x_k)}{W_k}$. Além disso, seja $x_k < y < x_{k+1}$, a derivada é constante em todo o intervalo sem massa, pois $f^+(y) = f^-(0) + \int_{0-}^{y} \mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^-(0) + \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{G}f(x_i)W_i$, observe que a integral soma todos os saltos até y, e como a massa é constante nesse intervalo, a derivada é constante, logo f é linear nesse intervalo e podemos calcular a derivada como a diferença:

$$f^+(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

.

Pelo mesmo motivo, temos $f^-(x_k) = f^+(x_{k-1}) = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Além disso, no exemplo, se fixarmos $f^-(0)$ e $f^+(l)$, o operador estará totalmente determinado.

Exemplo 2.2.5. Caso em que W é suave e estritamente crescente.

Se reduz ao estudo da segunda derivada da função. De fato, para uma função g:

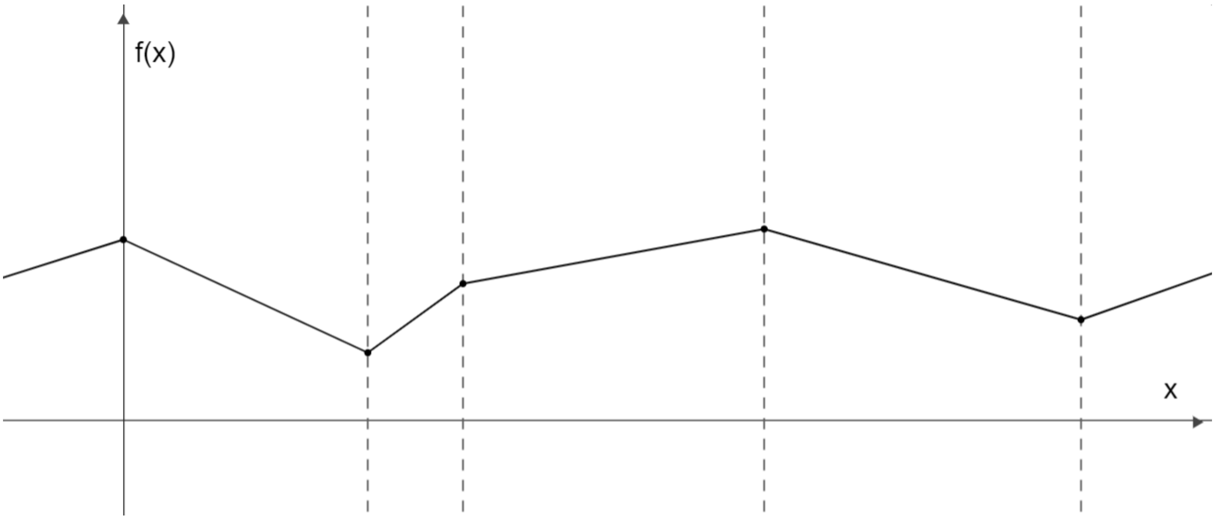
$$\begin{aligned}\frac{dg}{dW}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{W(x+h) - W(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{h}{W(x+h) - W(x)} \\ &= g'(x) \cdot (W'(x))^{-1}\end{aligned}$$

Daí, $\dfrac{d^2 f}{dW dx} = \dfrac{df'}{dW} = f'' \cdot (W')^{-1}$.

Como W é estritamente crescente, temos $W' > 0$ e não existe problema com $(W')^{-1}$.

O próximo lema traz uma motivação para o estudo de $\mathfrak{G}$.

Figura 4 – Exemplo de f para W somente saltos.



Fonte: Produção do próprio autor.

Lema 2.2.6. *Se $A(s) > 0$ e $B(s)$ é tal que $B(s)/A(s)$ é integrável, então o operador diferencial formal:*

$$f \longrightarrow Af'' + Bf'$$

pode ser colocado na forma $\mathfrak{G}f = f''/W'$ com respeito a uma nova variável x.

Demonstração. Ora, basta realizar uma mudança de variável de x para x' e definir uma função massa adequada.

Note que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right) &= \frac{d}{dx'}\left(\frac{dx}{dx'}\frac{df}{dx}\right) = \frac{dx}{dx'}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\frac{df}{dx}\right)\\ &= \frac{dx}{dx'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\right)\frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dx}{dx'}\right]\\ &= \frac{dx}{dx'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\right)\frac{df}{dx} + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{dx}{dx'}\right]\\ &= \frac{dx}{dx'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\right)f' + f''\frac{dx}{dx'}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right) = \frac{dx}{dx'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\right)f' + f''\frac{dx}{dx'}\right] \tag{2.3}$$

A nova variável é:

$$x' = \int_0^x e^{-\int_0^z \frac{B(s)}{A(s)}ds}dz$$

Daí, obtemos:

$$\frac{dx}{dx'} = \left(\frac{dx'}{dx}\right)^{-1} = \left(e^{-\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}\right)^{-1} = e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}$$

E ainda:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dx'}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}\right) = e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds} \cdot \frac{B(x)}{A(x)}$$

Substituindo essas informações em (2.3), obtemos:

$$\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right) = \left(e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}\right)^2 \left[\frac{B(x)}{A(x)}f' + f''\right] = \frac{\left(e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}\right)^2}{A(x)}\left[B(x)f' + A(x)f''\right]$$

Assim, escrevendo $\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right) = f''$ em termos da variável x', basta definirmos $W' = \frac{\left(e^{\int_0^x \frac{B(s)}{A(s)}ds}\right)^2}{A(x)}$ em termos da variável x' e podemos escrever:

$$\mathfrak{G}f = \frac{f''}{W'} = A(x)f'' + B(x)f'$$

De fato, W é uma função massa, pois, da maneira que é definida, $W' \geq 0$.

$\square$

O lema ilustra que dada uma EDO mais complexa, através de uma mudança de variáveis, recaímos sobre o problema $\mathfrak{G}$, então, resolvendo para $\mathfrak{G}$, resolvemos para o caso mais geral.

2.3 Condições de Contorno

Agora, vamos colocar mais algumas restrições a $\mathfrak{G}$ obtendo um domínio menor $\mathbf{D}(\mathfrak{G}) \subset \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ com propriedades que serão importantes nos próximos passos.

Inicialmente, definimos:

Definição 2.3.1. $\mathbf{D}_-(\mathfrak{G}) := \mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \cap (f : f^-(0) = 0)$, isso é, o conjunto das $f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ tais que a derivada à esquerda em 0 é nula.

Definição 2.3.2. $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G}) := \mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \cap (f : \|f\| + \|\mathfrak{G}f\| < \infty) \cap (f : kf^+(l) + f(l) = 0)$, isso é, o conjunto das $f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ tais que:

1. $\|f\| < \infty$
2. $\|\mathfrak{G}f\| < \infty$
3. Vale $kf^+(l) + f(l) = 0$, onde k é um parâmetro que diz como a corda está "amarrada" em l, o parâmetro assume um valor entre $0 \leq k \leq \infty$. Essa condição $kf^+(l) + f(l) = 0$ vem com o entendimento de que se $k = \infty$, então $f^+(l) = 0$ e

para $k < \infty$, a condição $kf^+(l) + f(l) = 0$ é equivalente a $f(l+k) = 0$, isto é, como já vimos, para $x > l$, a função f se estende linearmente, assim, temos:

$$f(l+k) = f(l) + (l+k-l) \cdot f^+(l) = kf^+(l) + f(l)$$

Portanto, $f(l+k) = 0 \Leftrightarrow kf^+(l) + f(l) = 0$.

Observação 2.3.3. O parâmetro k que informa como a corda está amarrada, é uma informação sobre a corda, o objeto que inicia a definição de toda teoria, então isso não gera um problema quanto a boa definição de $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, pois o parâmetro k está fixado. Ele não é exigido na definição, pois é uma informação sobre cordas finitas, se $l = \infty$ não seria necessário tal parâmetro.

Por fim, definimos a classe de funções e o operador:

Definição 2.3.4. $\mathbf{D}(\mathfrak{G}) := \mathbf{D}_-(\mathfrak{G}) \cap \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$

Definição 2.3.5. O operador $\mathfrak{G}$ é definido como uma restrição do Operador Diferencial Formal, ao domínio $\mathbf{D}(\mathfrak{G}) \subset L^2([0,l], dW)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \ : \mathbf{D}(\mathfrak{G}) \ &\longrightarrow \ L^2([0,l], dW) \\ f \ &\longmapsto \ \frac{d^2 f}{dW \ dx} \end{aligned}$$

A motivação para definirmos o domínio $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ desse modo consiste nos seguintes fatos, que veremos com mais detalhes nos próximos capítulos:

- $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é denso em $L^2([0,l], dW)$
- O operador $\mathfrak{G}$ atuando no domínio $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é auto-adjunto e não-positivo.

3 Operador Diferencial

No próximo capítulo, queremos definir a Função de Green do laplaciano generalizado, porém, é necessário que o operador satisfaça algumas propriedades. O objetivo dessa seção é provar que o operador diferencial $\mathfrak{G}$ restrito ao domínio $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é auto-adjunto e não-positivo para cada possível escolha do parâmetro k, com $0 \leq k \leq \infty$.

Para isso, devemos checar os seguintes itens:

1. $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é denso em $L^2([0,l], dW)$
2. $\mathfrak{G}$ é simétrico
3. $\mathfrak{G}$ é não-positivo
4. $\mathfrak{G}$ é auto-adjunto

3.1 Contexto do Operador $\mathfrak{G}$

A proposição seguinte prova o item 1.

Proposição 3.1.1. *O conjunto $\boldsymbol{D}(\mathfrak{G})$ é denso em $L^2([0,l], dW)$ para cada possível valor de k, com $0 \leq k \leq \infty$*

Demonstração. Sabemos que as funções contínuas são densas em $L^2([0,l], dW)$, isso vale apenas porque o intervalo é limitado, então precisamos provar o resultado apenas para f contínua, conforme o Teorema 11.18 (RUDIN, 1987), encontrado nas páginas 326 e 327.

Seja $f \in \mathcal{C}_{[0,l]}$, o espaço das funções contínuas em $[0,l]$. Note que o conjunto das funções absolutamente contínuas é denso em $\mathcal{C}_{[0,l]}$. De fato, os polinômios são absolutamente contínuos e em num intervalo compacto são densos em $\mathcal{C}_{[0,l]}$, pois dados $g \in \mathcal{C}_{[0,l]}$ e $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p tal que $\|p - g\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{[W(l) - W(0-)]^{1/2}}$, o que implica que $\int_{[0,l]} |p(x) - g(x)|^2 dW(x) \leq \dfrac{\varepsilon^2}{W(l) - W(0-)} \cdot (W(l) - W(0-)) = \varepsilon^2$.

Assim, basta provar o resultado para as funções absolutamente contínuas. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma g absolutamente contínua, tal que $\|f - g\| < \varepsilon$. Como essa g é absolutamente contínua, é escrita como $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(y)dy$, onde g' é a derivada em quase todo ponto de g e g' é Lebesgue integrável. Além disso, vamos provar a seguir que existe uma função:

$$h(y) = \int_0^y k(s)dW(s), \text{ com } k \in \mathcal{C}_{[0,l]} \tag{3.1}$$

E que satisfaz:

$$\int_0^x |g'(y) - h(y)| dy < \varepsilon$$

Por ser Lebesgue integrável, g' é muito bem aproximada por uma finita combinação linear de funções características, isto é,

$$g'(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{J_i}(x) \quad \text{, onde } J_i \text{ é um intervalo e } \alpha_i \text{ é uma constante em } \mathbb{C}$$

Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear **finita** tal que:

$$\int \Big| g'(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{J_i}(x) \Big| dx < \varepsilon/2$$

Vamos construir a função $h(x)$ desejada, utilizando a ideia abaixo para aproximar uma função característica e, consequentemente, aproximar a g'.

Sejam o intervalo $J = [j_0, j_1] \subset (0, l)$, a função característica 1_J e $\delta > 0$ qualquer. Tome funções contínuas $\varphi_0 \geq 0$ e $\varphi_1 \geq 0$ tais que:

$$\int \varphi_0(x) dW(x) = \int \varphi_1(x) dW(x) = 1$$

Além disso, as funções φ_0 se anula fora do intervalo $[j_0 - \delta, j_0]$ e φ_1 se anula fora do intervalo $[j_1, j_1 + \delta]$, como na figura 5, onde $j_0^* = j_0 - \delta$ e $j_1^* = j_1 + \delta$.

Defina a função $j(x) := \int_{0-}^{x} (\varphi_0(y) - \varphi_1(y)) dW(y)$, exemplo na figura 7. Note que $(\varphi_0(y) - \varphi_1(y)) \in \mathcal{C}_{[0,l]}$.

Após breve reflexão, conclui-se que:

$$\int |1_J(x) - j(x)| dx < 2\delta$$

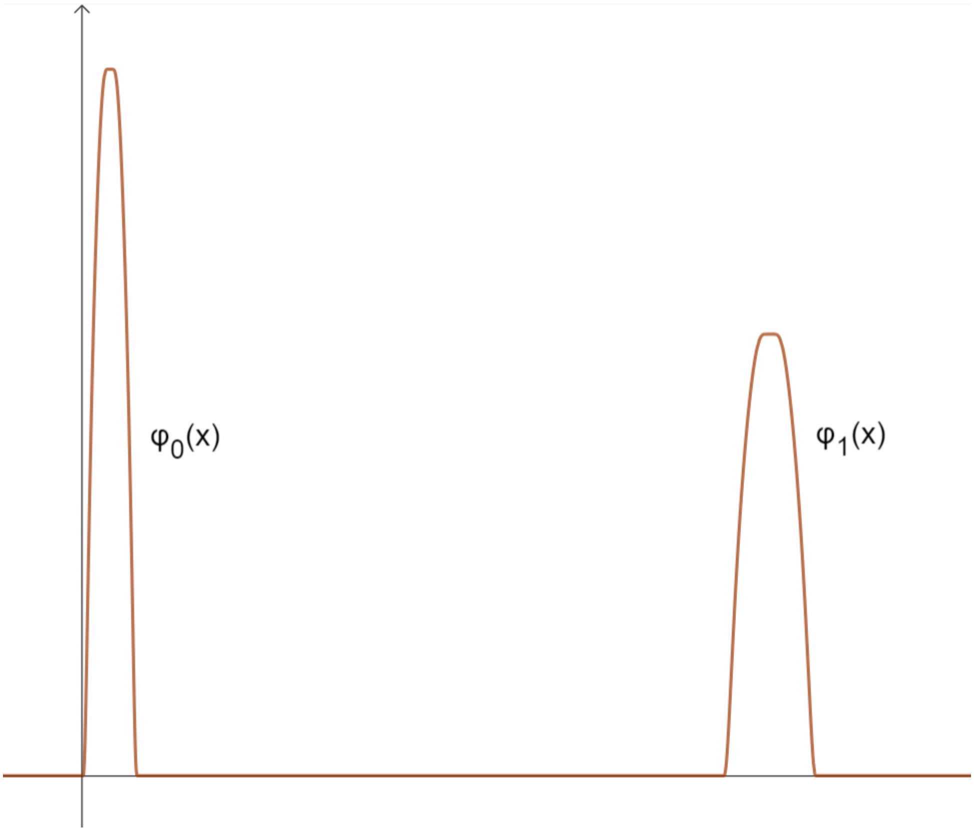
Então, para cada intervalo J_i, existe essa função $j_i(x)$ que aproxima a indicadora $1_{J_i}(x)$ tal que $\int |1_{J_i}(x) - j_i(x)| dx < 2\delta_i$.

Para o mesmo ε anterior, tome $\delta_i = \dfrac{\varepsilon}{4n|\alpha_i|}$. Lembre-se que n está fixado (depende de ε) como a quantidade de funções características.

Defina $h(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i j_i(x)$ e observe que:

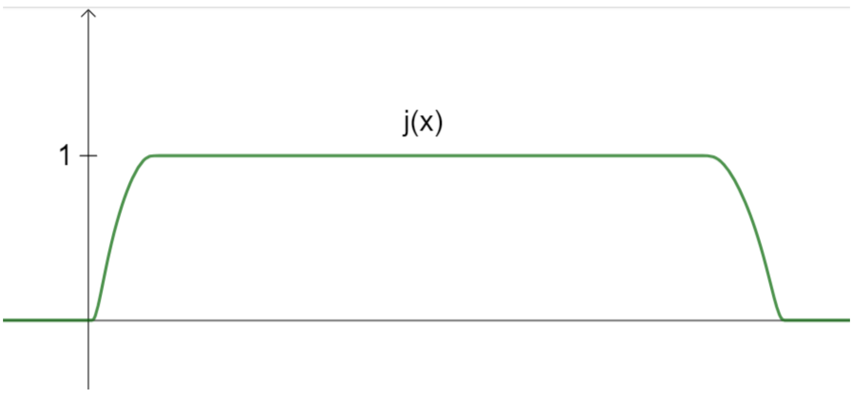
$$\begin{aligned}
\int \Big| g'(x) - h(x) \Big| dx &\leq \int \Big| g'(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{J_i}(x) \Big| dx + \int \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{J_i}(x) - h(x) \Big| dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int \Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{J_i}(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i j_i(x) \Big| dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int \sum_{i=1}^{n} \Big| \alpha_i \Big(1_{J_i}(x) - j_i(x) \Big) \Big| dx
\end{aligned}$$

Figura 5 – Exemplo de φ_0 e φ_1



Fonte: Produção do próprio autor.

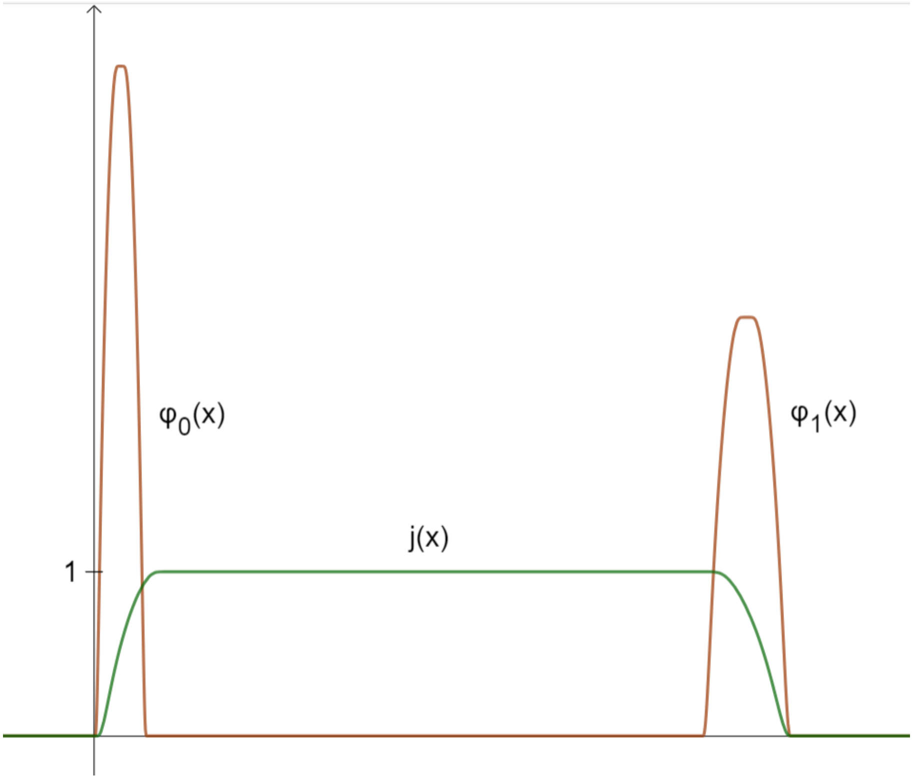
Figura 6 – Exemplo de $j(x)$



Fonte: Produção do próprio autor.

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \int |\alpha_i||1_{J_i}(x) - j_i(x)|dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \int |1_{J_i}(x) - j_i(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} 2|\alpha_i|\delta_i \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} 2|\alpha_i| \frac{\varepsilon}{4n|\alpha_i|} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Figura 7 – Exemplo de $j(x)$ com φ's



Fonte: Produção do próprio autor.

Além disso, como cada $j_i(x) = \int_{0-}^{x}(\varphi_0^i(y) - \varphi_1^i(y))dW(y)$, defina $k(y) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\big(\varphi_0^i(y) - \varphi_1^i(y)\big)$ e note que é contínua, pois φ_0^i, φ_1^i são contínuas e finalmente, vale:

$$h(y) = \int_{0-}^{y} k(s)dW(s)$$

Vale, então:

$$\int_0^x \Big|g'(y) - \int_{0-}^{y} k(s)dW(s)\Big|dy < \varepsilon, \text{ com } k(s) \in \mathcal{C}_{[0,l]}$$

Demonstrando assim, a existência dessa $h(x)$ da equação (3.1).

Por fim, defina $g_0(x) = g(0) + \int_0^x[\int_{0-}^{y} k(s)dW(s)]dy$. Assim definida, $g_0 \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ e $\mathfrak{G}g_0 = k$. Ainda, observe que vale $g_0(x) = g(0) + \int_0^x h(y)dy$. Então, pela desigualdade triangular:

$$\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \|g - g_0\|$$
$$\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \|g(0) + \int_0^x g'(y)dy - g(0) - \int_0^x h(y)dy\| \Rightarrow$$
$$\|f - g_0\| \leq \|f - g\| + \|\int_0^x g'(x) - h(x)dx\| \leq \|f - g\| + \int_0^x |g'(x) - h(x)|dx < 2\varepsilon$$

□

A Proposição seguinte prova os itens 2 e 3.

Proposição 3.1.2. *Para toda $f \in \boldsymbol{D}(\mathfrak{G})$,*

$$\langle \mathfrak{G}f, f\rangle_W = \langle f, \mathfrak{G}f\rangle_W = \begin{cases} -\int_0^{l+k} |f^+|^2dx = -\int_0^l |f^+|^2dx - k|f^+(l)|^2, \ se\ 0 \leq k < \infty \\ -\int_0^l |f^+|^2dx, \ se\ k = \infty \end{cases}$$

Demonstração. Relembre que o produto interno do espaço é dado por $\langle f, g\rangle = \int_{[0,l]} f \cdot g^* dW$.

Para $0 < x < l$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) &= \int_{\{0\}} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_{(0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) \\ &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + \int_{(0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ora, lembre-se que $\mathfrak{G}f(x) = \dfrac{d}{dW}\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dW}f^+(x) \implies \mathfrak{G}f(s)dW(s) = df^+(s)$ Substituindo na (3.2), temos:

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + \int_{(0,x]} f^*(s)df^+(s) \\ &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + \int_0^x f^*(s)df^+(s) \end{aligned}$$

Integrando por partes a integral de 0 a x, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + \int_0^x f^*(s)df^+(s) \\ &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + f^*(s)f^+(s)\Big|_0^x - \int_0^x (f^*)^+(s)f^+(s)ds \end{aligned}$$

Pela linearidade da derivada, vale $(f^*)^+(s) = (f^+)^*(s)$, e $(f^+)^*(s) \cdot f^+(s) = |f^+(s)|^2$

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + f^*(s)f^+(s)\Big|_0^x - \int_0^x |f^+(s)|^2ds \\ &= f^*(0)\mathfrak{G}f(0)W[0] + f^*(x)f^+(x) - f^*(0)f^+(0) - \int_0^x |f^+(s)|^2ds \\ &= f^*(0)(f^+(0) - f^-(0)) + f^*(x)f^+(x) - f^*(0)f^+(0) - \int_0^x |f^+(s)|^2ds \\ &= f^*(x)f^+(x) - \int_0^x |f^+(s)|^2ds - f^*(0)f^-(0) \end{aligned}$$

Como $f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, temos $f^-(0) = 0$ e resta:

$$\int_{[0,x]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^*(x)f^+(x) - \int_0^x |f^+(s)|^2ds \tag{3.3}$$

Fazendo $x \uparrow l$, obtemos pela equação (3.3):

$$\int_{[0,l)} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^*(l-)f^+(l-) - \int_0^l |f^+(s)|^2ds$$

Como $l + W(l-) < \infty$, pela proposição 2.2.2, temos por um lado $f^+(l-) = f^-(0) + \int_0^{l-} \mathfrak{G}f(z)dW(z)$, e por outro, $f^-(l) = f^-(0) + \int_0^{l-} \mathfrak{G}f(z)dW(z)$, daí vale $f^-(l) = f^+(l)$.

Ainda, f é contínua em l, pois temos $f^-(l)$ e $f^+(l)$ bem definidas (não necessariamente iguais), mas isso já é suficiente para a continuidade e, portanto, $f(l-) = f(l)$.

Então, podemos escrever:

$$\int_{[0,l)} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) = f^*(l)f^-(l) - \int_0^l |f^+(s)|^2 ds$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{[0,l]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) &= \int_{[0,l)} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) + \int_{\{l\}} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s)\\ &= f^*(l)f^+(l) - \int_0^l |f^+(s)|^2 ds + f^*(l)\mathfrak{G}f(l)W[l]\\ &= f^*(l)[f^+(l) + \mathfrak{G}f(l)W[l]] - \int_0^l |f^+(s)|^2 ds\\ &= f^*(l)[f^-(l) + (f^+(l) - f^-(l))] - \int_0^l |f^+(s)|^2 ds\\ &= f^*(l)f^+(l) - \int_0^l |f^+(s)|^2 ds\end{aligned}$$

Pela definição de $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$ 2.3.2, vale a relação $kf^+(l) + f(l) = 0 \implies f(l) = -kf^+(l) \implies f^*(l) = -k(f^+)^*(l)$, se $k < \infty$, caso $k = \infty$, temos $f(l) = 0 \implies f^*(l) = 0$. Finalmente,

$$\langle \mathfrak{G}f, f\rangle_W = \int_{[0,l]} f^*(s)\mathfrak{G}f(s)dW(s) = \begin{cases} -k|f^+(l)|^2 - \int_0^l |f^+(s)|^2, \text{ se } 0 < k < \infty \\ -\int_0^l |f^+(s)|^2, \text{ se } k = \infty \end{cases}$$

Como o operador $\mathfrak{G}$ é linear, vale $(\mathfrak{G}f)^* = \mathfrak{G}(f^*)$, igualmente no caso da derivada pela direita $(f^*)^+(x) = (f^+)^*(x)$. Com essas considerações, e com um raciocínio análogo ao primeiro caso, obtemos:

$$\langle f, \mathfrak{G}f\rangle_W = \int_{[0,l]} f(s)\mathfrak{G}f^*(s)dW(s) = \begin{cases} -k|f^+(l)|^2 - \int_0^l |f^+(s)|^2, \text{ se } 0 < k < \infty \\ -\int_0^l |f^+(s)|^2, \text{ se } k = \infty \end{cases}$$

$\square$

A prova do Item 4, $\mathfrak{G}$ é auto-adjunto, será feita no próximo capítulo Funções de Green, pois deriva de um resultado do Operador de Green, na Proposição 4.5.3.

4 Funções de Green

As funções de Green são uma técnica poderosa para resolver equações diferenciais parciais, particularmente quando envolvem operadores diferenciais lineares. A ideia central é encontrar uma solução particular para uma EDP sujeita a condições de contorno específicas.

$$\mathcal{L}u(x) = f(x)$$

Onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear (como o operador Laplaciano), $u(x)$ é a função desconhecida e $f(x)$ é uma função dada, as funções de Green fornecem uma solução particular da forma:

$$u(x) = \int G(x, y)f(y)dy$$

Onde $G(x, y)$ é a função de Green associada ao operador $\mathcal{L}$. A função de Green satisfaz a equação diferencial homogênea associada ao operador $\mathcal{L}$ com condições de contorno adequadas. Uma vez que a função de Green é conhecida, a solução geral da EDP pode ser obtida através de uma convolução da função de Green com a função $f(x)$.

No próximo capítulo, veremos a construção das Transformadas para o laplaciano generalizado, essa construção depende de uma relação entre as Funções de Green do Operador e da sua Função Espectral Principal, para realizar uma espécie de decomposição do operador em termos de suas autofunções.

4.1 Apresentando os Operadores

Como vimos no capítulo anterior, no Lema 3.1.2 o operador $\mathfrak{G}$ é não-positivo, logo, seu espectro está contido no intervalo $(-\infty, 0]$, o objetivo da Função de Green é encontrar uma espécie de operador inverso de $\mathfrak{G}$, mas para isso, é necessário realizar um deslocamento por um múltiplo da identidade para que esse novo operador esteja fora do espectro garantindo uma boa definição para a inversa.

Vamos definir dois operadores que, a princípio, são objetos diferentes, porém, mais a frente veremos que se tratam do mesmo objeto.

Definição 4.1.1. O Operador de Green de parâmetro ω do operador $\mathfrak{G}$ é definido como:

$$\mathbf{G}_\omega := (-\omega^2 I - \mathfrak{G})^{-1} \tag{4.1}$$

Definição 4.1.2. A Função de Green do Operador $\mathfrak{G}$ com parâmetro ω é

$$G_\omega(x,y) = \begin{cases} A(x,\omega)D(y,\omega), \text{ se } x \leq y \\ A(y,\omega)D(x,\omega), \text{ se } y \leq x \end{cases}, \tag{4.2}$$

As funções $A(x,\omega)$ e $D(y,\omega)$ serão definidas nas próximas seções.

Definição 4.1.3. O Operador Integral da Função de Green de parâmetro ω do operador $\mathfrak{G}$ é definido como:

$$\mathbf{G}_\omega : f \in L^2([0,l], dW) \longrightarrow \int_{[0,l]} G_\omega(x,y)f(y)dW(y) \tag{4.3}$$

Onde a Função de Green $G_\omega(x,y)$ é o núcleo desse operador integral.

Observação 4.1.4. A notação $\mathbf{G}_\omega$ foi usada tanto para se referir ao Operador de Green, que é a inversa $(-\omega^2 - \mathfrak{G})^{-1}$, quanto para o Operador Integral da Função de Green, pois, apesar de a princípio serem objetos diferentes, o Teorema 4.5.1 demonstra que, nesse contexto, são os mesmos operadores.

Note que, para $\lambda \notin (-\infty, 0]$, ou melhor, para $\lambda > 0$, temos $(\mathfrak{G} - \lambda I)f \neq 0, \forall f \not\equiv 0$. Isso já seria suficiente para definir uma inversa $(\mathfrak{G} - \lambda I)^{-1}$, mas observe que $(\mathfrak{G} - \lambda I)$ é não-positivo, assim, para trabalharmos com um operador positivo, é conveniente definirmos o operador na ordem inversa $(\lambda I - \mathfrak{G})^{-1}$. Além disso, nos próximos passos, vai se tornar necessário utilizar $\sqrt{\lambda}$, por isso, tomamos na definição $\lambda = -\omega^2$, e para que se tenha $\lambda > 0$, deve ocorrer $-\omega^2 > 0 \implies \omega^2 < 0$, isto é, ω é um número complexo não-real.

Vamos provar a existência de $\mathbf{G}_\omega$, como em (4.3) através de sua construção. O interessante é que para cada ω, $\mathbf{G}_\omega$ será auto-adjunto e limitado.

Tal construção será feita através da correspondência do operador de Green $\mathbf{G}_\omega$ com o operador integral da função de Green $\mathbf{G}_\omega = \int_{[0,l]} G_\omega(x,y)f(y)dW(y)$, formado pela solução $A \in \mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$ que satisfaz $\mathfrak{G}A = -\omega^2 A$, com $A(0,\omega) = 1$ e pela solução $D \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$ que satisfaz $\mathfrak{G}D = -\omega^2 D$, com $D^-(0,\omega) = -1$.

No Capítulo 5.4 , Green Functions, em (DYM; MCKEAN, 1976b), a teoria é construída para os diversos casos em que $\omega^2 < 0$, nesse trabalho vamos nos concentrar no caso em que $\omega = ib$, com $b > 0$.

Neste momento, vamos nos concentrar na Função de Green $G_\omega(x,y)$, mais especificamente na construção de $A(x)$ e $D(x)$ e a demonstração de algumas propriedades.

4.2 Solução $A(x,\omega)$

Nesta seção, vamos apresentar a função $A(x,\omega)$, o primeiro fator da Função de Green e algumas de suas propriedades. Também veremos que $A(x)$ satisfaz a certas condições de contorno. Além disso, mostramos a unicidade dessa solução $A(x)$ no contexto.

Definição 4.2.1. Considere a sequência de funções, onde:

$$p_0(x) = 1$$

$$p_n(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s)$$

e defina

$$A(x,\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega^{2n} p_n(x) \tag{4.4}$$

Quando o parâmetro estiver claro, podemos omitir na notação e escrever apenas $A(x)$.

De fato, esse somatório está bem definido, pois $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\omega^{2n}p_n(x) < \infty$. Vamos verificar isso quando falarmos sobre as propriedades de $A(x,\omega)$.

Observação 4.2.2. No contexto dessa dissertação, em geral, o parâmetro $\omega = ib$, assim, a função A pode ser escrita como:

$$A(x) = A(x, ib) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (ib)^{2n} p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n(x)$$

Aprofundando o estudo sobre as funções $p_n(x)$, vamos mostrar algumas de suas propriedades, que auxiliam a demonstrar as propriedades da função $A(x)$ na próxima seção.

Proposição 4.2.3. *Sejam $p_n(x)$ definidas como em 4.2.1, então, valem para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, as seguintes propriedades:*

i . $p_n(x) \leq (n!)^{-1}[\int_0^x W(y)dy]^n$

ii . $p_n(x) \leq (n!)^{-2}[xW(x)]^n$

iii . $p^+_{n+1}(x) \leq (n!)^{-1}W(x)[\int_0^x W(y)dy]^n$

Demonstração. i . $p_n(x) \leq (n!)^{-1}\Big[\int_0^x W(y)dy\Big]^n$

Note que p_n é não-decrescente. De fato, observe inicialmente que $p_1(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z dW(s)$ e, por definição, W é não-decrescente e não-negativa, logo $\int_{0-}^z dW(s)$ é uma função (de z) não-decrescente e não-negativa, o que implica que p_1 é não-decrescente, e novamente $\int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s)$ é uma função (de z) não-decrescente e não-negativa, o que implica p_n é não-decrescente.

Agora, considere:

$$p_n(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s)$$

$$\leq \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(z)dW(s)$$
$$= \int_0^x \Big[p_{n-1}(z) \int_{0-}^z dW(s)\Big]dz = (*)$$

Além disso, $p_1(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z dW(s) \implies \dfrac{dp_1(z)}{dz} = \int_{0-}^z dW(s)$, portanto:

$$(*) = \int_0^x p_{n-1}(z)dp_1(z)$$

Logo:

$$p_n(x) \leq \int_0^x p_{n-1}(z)dp_1(z)$$

Por fim, usando a recursão para $n-1, n-2, \cdots, 2$ e o fato de que n é finito, vale:

$$p_n(x) \leq \int_0^x \Big[\cdots \Big[\int_0^x p_1(z)dp_1(z)\Big]\cdots\Big]dp_1(z) = \frac{\big[p_1(x)\big]^n}{n!} \leq \frac{\big[\int_0^x W(y)dy\big]^n}{n!}$$

Pois, $p_1(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z dW(s) = \int_0^x W(z) - W(0-)dz \leq \int_0^x W(z)dz$

ii . $p_n(x) \leq (n!)^{-2}[xW(x)]^n$

Esse item faremos por indução. Considere o caso $n = 1$.

$$p_1(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z dW(s) \leq \int_0^x W(z) - W(0-)dz \leq \int_0^x W(z)dz$$
$$\leq \int_0^x W(x)dz \leq W(x)\int_0^x dz \leq xW(x)$$

Portanto, vale para $n = 1$.

Suponha válido para n, $p_n(x) \leq \dfrac{\big[xW(x)\big]^n}{(n!)^2}$, então:

$$p_{n+1}(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_n(s)dW(s) \leq \int_0^x dz \int_{0-}^z \frac{\big[sW(s)\big]^n}{(n!)^2}dW(s)$$
$$\leq \int_0^x dz \int_{0-}^z \frac{\big[zW(s)\big]^n}{(n!)^2}dW(s) \leq \int_0^x \Big[\frac{z^n}{n!}\int_{0-}^z \frac{W(s)^n}{n!}dW(s)\Big]dz$$
$$\leq \int_0^x \frac{z^n}{n!}\frac{W(z)^{n+1}}{(n+1)!}dz \leq \frac{W(x)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x \frac{z^n}{n!}dz \leq \frac{W(x)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\leq \frac{\big[xW(x)\big]^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

Assim, a desigualdade vale para todo n.

iii . $p^+_{n+1}(x) \leq (n!)^{-1}W(x)[\int_0^x W(y)dy]^n$

Como $p_{n+1}(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_n(s)dW(s)$ então:

$$p_{n+1}^{+}(x) = \int_{0-}^{x} p_n(s)dW(s)$$

Usando o item i .

$$p_{n+1}^{+}(x) \leq \int_{0-}^{x} (n!)^{-1}\Big[\int_{0}^{x} W(y)dy\Big]^{n} dW(s) \leq (n!)^{-1}W(x)\Big[\int_{0}^{x} W(y)dy\Big]^{n}$$

$\square$

Vamos precisar de um resultado sobre derivação de séries, a demonstração deste resultado pode ser encontrado no livro (LIMA, 1982), no capítulo sobre Séries de Funções.

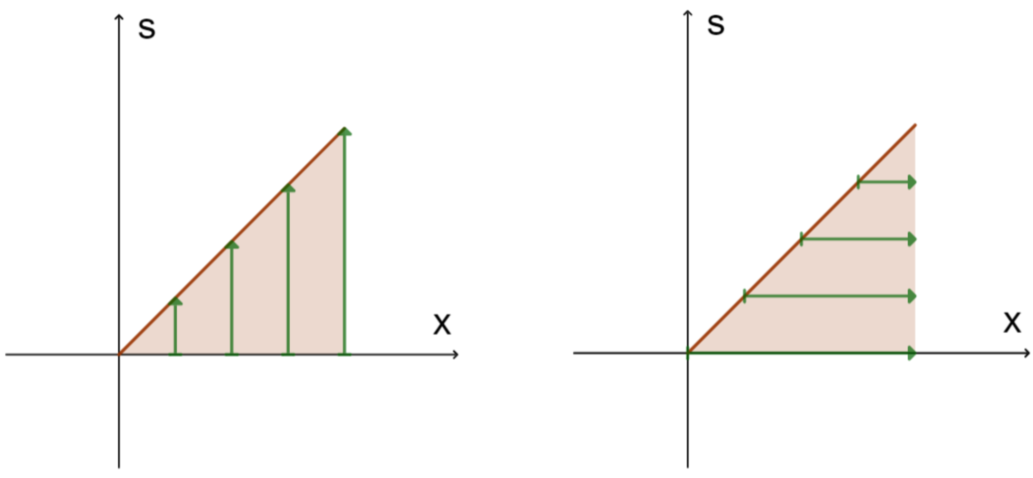
Teorema 4.2.4 (Derivação de Séries)**.** *Seja* $\sum f_n$ *uma série de funções deriváveis no intervalo* $[a, b]$*. Se* $\sum f_n(c)$ *converge para um certo* $c \in [a, b]$ *e a série* $\sum f_n' = g$ *converge uniformemente em* $[a, b]$*, então a função* f *dada pela série* $f = \sum f_n$ *converge uniformemente em* $[a, b]$ *e possui derivada* $f' = g = \sum f_n'$*.*

Além disso, um resultado clássico de Teoria da Medida, que pode ser encontrado em (BARTLE, 2014).

Teorema 4.2.5 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam* $(X, \mathbf{X}, \mu)$ *e* $(Y, \mathbf{Y}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos e seja a medida* π *em* $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *o produto* $\mu \cdot \nu$*. Se a função* F *em* $Z = X \times Y$ *é integrável com respeito a* π *então vale:*

$$\int_X \left[\int_Y F d\nu\right] d\mu = \int_Y \left[\int_X F d\mu\right] d\nu$$

Figura 8 – Exemplo de aplicação do Teorema de Fubini



Fonte: Produção do próprio autor.

Aqui estão algumas propriedades sobre $A(x)$ que serão úteis no decorrer do estudo.

Proposição 4.2.6. *Para a função $A(x, \omega)$, o primeiro fator da Função de Green, valem as seguintes propriedades:*

1. $A \equiv 1$ *para* $x \leq 0$ *;*
2. $A^{+} \geq 0$*, ou seja, A é não-decrescente ;*
3. $\mathfrak{G}A \geq 0$*, ou seja, A é convexa ;*
4. $A(l) < \infty$ *;*
5. $A^{+}(l) < \infty$ *;*
6. $A \in L^2([0, l], dW)$ *;*

Demonstração. 1. $A \equiv 1$ *para* $x \leq 0$ *;*

Considere $x < 0$. Pela definição $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n(x)$. Além disso, $p_0(x) = 1$ para todo x e $p_n(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s) dW(s)$. Observe que para $x \leq z < 0$, a função W não tem massa, logo

$$\int_{0-}^{z} p_{n-1}(s) dW(s) = -\int_{z}^{0-} p_{n-1}(s) dW(s) = 0$$

Daí, $p_n(x) = 0$ para $n \geq 1$. Então, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n} p_n(x) = 1$.

Se $x = 0$, a integral pode ter massa, porque pode existir um salto em 0, isto é ,

$$\int_{0-}^{0} p_{n-1}(s) dW(s) = p_{n-1}(0) \cdot W[0]$$

Mas ainda assim, ocorre $p_n(x) = \int_0^0 p_{n-1}(0) \cdot W[0]\; dz = 0$ para $n \geq 1$. Portanto, $A(0) = 1$ também.

2. $A^{+} \geq 0$*, ou seja, A é não-decrescente ;*

Pelo resultado de Derivação de Séries 4.2.4, e pelas propriedades de $p_n(x)$, podemos derivar a série, como a soma das derivadas.

Logo, derivando a expressão de $A(x)$, obtemos $A^{+}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n^{+}(x)$. $p_0(x) = 1 \implies p_0^{+}(x) = 0$ e podemos escrever $A^{+}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n} p_n^{+}(x)$.

Para mostrar que $A^{+} \geq 0$ é suficiente mostrar que cada $p_n^{+}(x) \geq 0$ para $n \geq 1$.

Já vimos que $p_n^{+}(x) = \int_{0-}^{x} p_{n-1}(s) dW(s)$ para $n \geq 1$. No item anterior, vimos que para $x < 0$, a integral $\int_{0-}^{x} p_{n-1}(s) dW(s) = 0$.

Novamente, como W é não-decrescente, para garantir que $p_n^{+}(x) \geq 0$, basta que $p_n(x) \geq 0$.

De fato, fazendo a indução em n. Para $n = 0$, $p_0(x) = 1 \geq 0$. Suponha válido pra $n-1$, então

$$p_n(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s) \geq 0$$

Pois W é não-decrescente e $p_{n-1}(s) \geq 0$ por hipótese de indução.

Sendo assim, concluímos que $A^+ \geq 0$.

3. $\mathfrak{G}A \geq 0$ *e* A *é convexa ;*

   Novamente, pelo resultado de derivação de séries, podemos aplicar o operador $\mathfrak{G}$ em $A(x)$, e obtemos $\mathfrak{G}A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\mathfrak{G}p_n(x)$, pois $\mathfrak{G}$ é linear.

   Observe que podemos comutar o somatório com o operador $\mathfrak{G}$ pelo Teorema de Fubini 4.2.5.

   Ora , $\mathfrak{G}p_n(x) = \mathfrak{G} \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s) = p_{n-1}(x)$ para $n \geq 1$.

   No caso $n = 0$, temos $\mathfrak{G}p_0(x) = 0$.

   Logo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}A(x) &= \mathfrak{G}p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}\mathfrak{G}p_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_{n-1}(x) = b^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}p_n(x) \geq 0 \end{aligned}$$

   De fato, $p_n(x) \geq 0$, o que é suficiente para termos $\mathfrak{G}A \geq 0$.

   Para que A seja convexa é suficiente mostrar que A^+ é não-decrescente. De certo, para $x < y$, temos $A^+(y) - A^+(x) = \int_x^y \mathfrak{G}A(s)\ dW(s) \geq 0$.

4. $A(l) < \infty$;

   Vamos utilizar a propriedade i . sobre p_n, que diz que $p_n(x) \leq (n!)^{-1}[\int_0^x W(y)dy]^n$.

   Com base nisso,

$$\begin{aligned} A(l) &= \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}p_n(l) \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}(n!)^{-1}\left[\int_0^l W(y)dy\right]^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy]^n}{n!} = e^{[b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy]} < \infty \end{aligned}$$

   De fato, $W(l) < \infty$ por hipótese (Observação 2.1.1) e W é não-decrescente, e como o comprimento da corda é finito $l < \infty$, temos $b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy < \infty$.

5. $A^+(l) < \infty$;

   De novo, usaremos outra propriedade sobre p_n , a propriedade iii ., que diz que $p_{n+1}^+(x) \leq (n!)^{-1}W(x)[\int_0^x W(y)dy]^n$.

Com base nisso,

$$
\begin{aligned}
A^+(l) &= \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n^+(l) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n} p_n^+(l) \text{ , pois } p_0^+(l) = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^{2(n+1)} p_{n+1}^+(l) \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{2(n+1)} \cdot (n!)^{-1} W(l) \left[\int_0^l W(y)dy \right]^n \\
&\leq b^2 W(l) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy]^n}{n!} = b^2 W(l) \cdot e^{[b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy]} < \infty
\end{aligned}
$$

De fato, $e^{[b^2 \cdot \int_0^l W(y)dy]} < \infty$ como vimos antes e $b^2 W(l)$ também.

6. $A \in L^2([0,l], dW)$;

   Por fim, sabemos que $A(l) < \infty$ e $A^+(x) \geq 0$ para todo x.

   Defina a função constantes $f(x) = A(l)$ e observe que $f(x) \geq A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então como $W \geq 0$ e é não-decrescente, vale $\int_{[0,l]} f(x)dW(x) \geq \int_{[0,l]} A(x)dW(x)$.

   E ainda, $\int_{[0,l]} f(x)dW(x) = A(l) \cdot \Big(W(l) - W(0-) \Big) < \infty$, logo $A \in L^2([0,l], dW)$.

$\square$

Observação 4.2.7. Note que $A(x) = 1$ para $x < 0$ e $A^+ \geq 0$, isso implica que $A(x) \geq 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora iniciamos os resultados sobre as condições de contorno e unicidade, estes resultados justificam o nome "solução"para a função $A(x)$.

Proposição 4.2.8. *$A(x)$ está na classe $\boldsymbol{D}_-(\mathfrak{G})$ e é solução de $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x)$ para $0 \leq x \leq l$.*

Demonstração. Como $\mathbf{D}_-(\mathfrak{G}) = \mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \cap (f : f^-(0) = 0)$ vamos provar que $A(x)$ está em $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ e $(f : f^-(0) = 0)$.

- $(f : f^-(0) = 0)$

$$
\begin{aligned}
A^-(0) &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{A(0) - A(x)}{0 - x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}(p_n(0) - p_n(x))}{0 - x} \\
&= \lim_{x \uparrow 0} \frac{1(p_0(0) - p_0(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}(p_n(0) - p_n(x))}{-x} \\
&= \lim_{x \uparrow 0} \frac{1(1-1) + \sum_{n=0}^{\infty} b^{2(n+1)} \Big[\int_0^0 dz \int_{0-}^z p_n(s)dW(s) - \int_0^x dz \int_{0-}^z p_n(s)dW(s) \Big]}{-x}
\end{aligned}
$$

Como $W(s) = 0$ para $s < 0$, temos $\displaystyle\int_0^s g(s)dW(s) = 0$, onde $g(s)$ é qualquer.

$$
= \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^{2(n+1)} \Big[0 - 0 \Big]}{-x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{0}{-x} = 0
$$

- $\mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$

  Queremos provar que $A(x) = A(0) + A^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s)dW(s)$

  Para isso, observe que $\mathfrak{G}p_n(x) = \dfrac{d^2}{dW\ dx} \int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s) = p_{n-1}(x)$

  Pela linearidade, segue:

$$\mathfrak{G}A(x) = \mathfrak{G}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\mathfrak{G}p_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_{n-1}(x) \tag{4.5}$$

  O que implica:

$$\begin{aligned}
\int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s)dW(s) &= \int_0^x dz \int_{0-}^z \Big[\sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_{n-1}(s)\Big]dW(s) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}\Big[\int_0^x dz \int_{0-}^z p_{n-1}(s)dW(s)\Big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_n(s)
\end{aligned}$$

  Pelo Teorema de Fubini 4.2.5, podemos comutar a integral com o somatório, pois $\int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s)dW(s) \le A(x) - A^-(0)x < M$

  Por fim, já vimos que $A^-(0) = 0$ e que $p_n(0) = 0$ para $n \ge 1$, logo $A(0) = b^0p_0(0) = 1$.

  Portanto:

$$\begin{aligned}
A(0) + A^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s)dW(s) &= 1 + 0x + \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_n(s) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}p_n(s) = A(x)
\end{aligned}$$

  Além disso, da Equação (4.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b^{2n}p_{n-1}(x) = b^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b^{2(n-1)}p_{n-1}(x) \\
&= b^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}p_n(x) = b^2A(x)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.9. *$A(x)$ é a única solução de $\mathfrak{G}f(x) = b^2f(x)$ de classe $\boldsymbol{D}_-(\mathfrak{G})$ com $f(0) = 1$.*

Demonstração. Suponha que exista outra função f que cumpre essas propriedades, isto é, $f(0) = 1$, $\mathfrak{G}f(x) = b^2f(x)$ e $f \in \mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$.

Observação. Como uma maneira de exibir o pensamento sobre as demonstrações do teorema, inicialmente houve a tentativa de usar o argumento apresentado a seguir, porém, ele não vale para todos os casos, vale somente se existissem finitos pontos x em que A e f são diferentes.

Para o leitor, vale como menção a ideia abaixo:

Defina $y := \min\{s \in (0,l] \ ; \ A(s) \neq f(s)\}$.

Então vale que $A(s) = f(s)$ para todo $s \in [0,y)$ e:

$$\begin{aligned}
A(y) - f(y) &= 1 + \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s)dW(s) - \left[1 + \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s)\right] \\
&= \int_0^y dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}A(s) - \mathfrak{G}f(s)dW(s) \\
&= \int_0^y dz \int_{0-}^z b^2A(s) - b^2 f(s)dW(s) \\
&= b^2 \int_0^y dz \int_{0-}^z A(s) - f(s)dW(s)
\end{aligned}$$

Mas, como $A(s) = f(s)$ para todo $s \in [0,y)$ temos:

$$A(y) - f(y) = b^2 \int_0^y dz \int_{0-}^z 0dW(s) = 0$$

Absurdo, pois $A(y) \neq f(y)$.

Prosseguimos com uma demonstração que vale para o caso geral.

Se estivéssemos no espaço $C^2([0,l])$, uma maneira de conseguir a igualdade entre duas funções f, g é obter $f(a) = g(a)$, em um $a \in [0,l]$, $f'(b) = g'(b)$, em um $b \in [0,l]$, e $f''(x) = g''(x)$ para todo $x \in [0,l]$, vamos tentar usar algo parecido, que envolve o operador $\mathfrak{G}$ que é justamente a derivada em x e em $W(x)$.

Novamente, supomos f uma solução diferente de A que cumpre com as propriedades solicitadas.

Seja $y \in (0,l]$, como já vimos acima:

$$A(y) - f(y) = b^2 \int_0^y dz \int_{0-}^z \Big(A(s) - f(s)\Big)dW(s) \tag{4.6}$$

Ora, temos $\mathfrak{G}A(x) = b^2A(x)$ e $\mathfrak{G}f(x) = b^2f(x) \implies (b^2 - \mathfrak{G})(A(x) - f(x)) = 0$, como b^2 está fora do espectro de $\mathfrak{G}$, então o operador $(b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$ está bem definido e vale para todo s :

$$\begin{aligned}
(b^2 - \mathfrak{G})^{-1}\Big((b^2 - \mathfrak{G})(A(s) - f(s))\Big) = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}0 \implies \\
(A(s) - f(s)) = 0
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.6):

$$A(y) - f(y) = b^2 \int_0^y dz \int_{0-}^z 0dW(s) = 0 \implies A(y) = f(y)$$

$\square$

Proposição 4.2.10. *$A(x)$ não pertence a classe $\boldsymbol{D}_+(\mathfrak{G})$.*

Demonstração. De fato, como W é não-decrescente e $p_0(x) = 1$, p_n é não-decrescente, isso implica que $A(x)$ é não-decrescente, isto é, $A^+(x) \geq 0$, daí, como $A(0) = 1$, vale $A(x) > 0$.

Finalmente, para que $A \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, deveríamos ter $k \cdot A^+(l) + A(l) = 0$, mas como k é um parâmetro entre $0 \leq k \leq \infty$ isso não pode ocorrer, pois $A^+(l) \geq 0$ e $A(l) > 0$.

□

Observação 4.2.11. Observe que pelo Teorema 4.2.9 e pela Proposição 4.2.10, concluímos que a única solução para $\mathfrak{G}h = b^2 h$ com $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é a solução trivial $h = 0$, pois, se houvesse alguma solução não-trivial, teríamos $h = \alpha A$ com $\alpha > 0$, com $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G}) \subset \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, e isso implicaria $A \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, o que é absurdo.

4.3 Solução $D(x, \omega)$

Nesta seção, vamos apresentar a função $D(x, \omega)$, o primeiro fator da Função de Green e algumas de suas propriedades. Também veremos que $D(x)$ satisfaz a certas condições de contorno. Além disso, mostramos a unicidade dessa solução $D(x)$ na classe $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$.

Definição 4.3.1. A função $D(x, \omega)$ que compõe a Função de Green, depende da função $A(x, \omega)$ e é dada por:

$$D(x, \omega) := A(x, \omega) \int_x^{l+k} A(y, \omega)^{-2} dy \tag{4.7}$$

onde k é a constante que diz como a corda está amarrada. Quando o parâmetro estiver claro, podemos omitir na notação e escrever apenas $D(x)$.

A boa definição é obtida relembrando algumas propriedades já vistas sobre a função $A(x, \omega)$. Pela observação 4.2.7, temos que $A \geq 1$, logo $A(y, \omega)^{-2} \leq 1$ e a integral vai de x até $l + k$, por isso $A(x, \omega) \int_x^{l+k} A(y, \omega)^{-2} dy < \infty$.

Observação 4.3.2. Para $x \geq l$, $D(x)$ pode ser escrita como $D(x) = D(l) + (x - l) \cdot D^+(l)$

Isso ocorre, porque possui inclinação constante, com:

$$\begin{aligned}
D^+(x) &= \left(A(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy \right)^+ \\
&= A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy + A(x) \cdot \left(\int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy \right)^+ \\
&= A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy + A(x) \cdot \big(- A(x)^{-2} \big) \\
&= A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy - A(x)^{-1}
\end{aligned}$$

Para $x \geq l$, temos $A^+(x) = A^+(l)$ e $A(x) = A(l) + (x-l)A^+(l)$, substituindo:

$$\begin{aligned}
D^+(x) &= A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy - A(x)^{-1} \\
&= A^+(l) \cdot \int_x^{l+k} [A(l) + (y-l)A^+(l)]^{-2} dy - [A(l) + (x-l)A^+(l)]^{-1} \\
&= A^+(l) \cdot \Bigg[\Big(A^+(l)\Big)^{-1} \Bigg(- \Big(A(l) + ((l+k)-l)A^+(l)\Big)^{-1} \\
&\quad + \Big(A(l) + (x-l)A^+(l)\Big)^{-1} \Bigg) \Bigg] - [A(l) + (x-l)A^+(l)]^{-1} \\
&= -[A(l) + kA^+(l)]^{-1} + [A(l) + (x-l)A^+(l)]^{-1} - [A(l) + (x-l)A^+(l)]^{-1} \\
&= -[A(l) + kA^+(l)]^{-1}
\end{aligned}$$

Na segunda linha, usamos a expressão abaixo para resolver a integral:

$$\int_a^b [c + (x-l)d]^{-2} = -[d(c + (b-l)d)]^{-1} + [d(c + (a-l)d)]^{-1}$$

Aqui estão algumas propriedades sobre $D(x)$ que serão úteis no decorrer do estudo.

Proposição 4.3.3. *Para a função $D(x, \omega)$, o primeiro fator da Função de Green, valem as seguintes propriedades:*

7. $D(x) \geq 0$ *para* $x \leq l + k$ *;*
8. $\mathfrak{G}D(x) \geq 0$*, ou seja, D é convexa , para* $x \leq l + k$ *;*
9. $D^+ \leq 0$*, ou seja, D é não-crescente ;*
10. $D \in L^2([0, l], dW)$

Demonstração. 7. $D(x) \geq 0$ *para* $x \leq l + k$ *;*

Usando o fato de $A(x) \geq 0$, e novamente que $W \geq 0$, então a integral $\int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy \geq 0$, já que a função $A(y)^{-2} \geq 0$ e $x \leq l + k$. Portanto, $D(x) \geq 0$.

Se $x > l + k$, teríamos $D(x) = \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy = -\int_{l+k}^{x} A(y)^{-2} dy$ e já não poderíamos garantir $D(x) \geq 0$.

8. $\mathfrak{G}D(x) \geq 0$*, ou seja, D é convexa , para* $x \leq l + k$*;*

Veremos no Teorema 4.3.4 que $\mathfrak{G}D(x) = b^2 D(x)$, assim, como $D(x) \geq 0$ para $x \leq l + k$, temos $\mathfrak{G}D(x) \geq 0$ nesse intervalo.

9. $D^+ \leq 0$*, ou seja, D é não-crescente ;*

Para $x \geq l$, vimos na Observação 4.3.2, que $D^+(x) = -[A(l) + kA^+(l)] \leq 0$, pois $A(l), A^+(l), k \geq 0$.

Para $x < l$. Pela propriedade anterior, temos que $\mathfrak{G}D(s) \geq 0$ para $s \leq l+k$, então D^+ é não-decrescente nesse intervalo, isto é, $x \leq y \implies D^+(x) \leq D^+(y)$. Logo, $x \leq l \implies D^+(x) \leq D^+(l) \leq 0$

10. $D \in L^2([0,l], dW)$

    Também na demonstração do Teorema 4.3.4, $D \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, em particular, $D \in L^2([0,l], dW)$.

$\square$

Teorema 4.3.4. *$D(x)$ é a única solução de $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x)$ de classe $\boldsymbol{D}_+(\mathfrak{G})$ com $f^-(0) = -1$.*

Demonstração. Vamos dividir a prova em duas etapas.

D é solução com $D^-(0) = -1$.

$$\begin{aligned}
D^-(x) &= \left(A(x)\cdot\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\right)^- \\
&= A^-(x)\cdot\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A(x)\cdot\left(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\right)^- \\
&= A^-(x)\cdot\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A(x)\cdot\big(-A(x)^{-2}\big) \\
&= A^-(x)\cdot\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy - A(x)^{-1}
\end{aligned}$$

Em $x = 0$, $A^-(0) = 0$ e $A(0) = 1$, daí $D^-(0) = -1$.

Vimos nas propriedades que $D \in L^2([0,l], dW)$, precisamos mostrar que $kD^+(l) + D(l) = 0$ para que D seja de classe $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$.

Usando a escrita da Observação 4.3.2, $D^+(l) = -[A(l) + kA^+(l)]^{-1}$

Ainda, $D(l) = A(l)\int_l^{l+k} A(y)^{-2}dy$, com $A(y) = A(l) + (y-l)A^+(l)$, resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
D(l) &= A(l)\int_l^{l+k}[A(l) + (y-l)A^+(l)]^{-2}dy \\
&= A(l)\cdot\Big[-[A^+(l)(A(l) + ((l+k)-l)A^+(l))]^{-1} \\
&\quad + [A^+(l)(A(l) + (l-l)A^+(l))]^{-1}\Big] \\
&= \frac{A(l)}{A^+(l)}\cdot\Big[-[A(l) + ((l+k)-l)A^+(l)]^{-1} + [A(l) + (l-l)A^+(l)]^{-1}\Big] \\
&= \frac{A(l)}{A^+(l)}\cdot\Big[-[A(l) + kA^+(l)]^{-1} + A(l)^{-1}\Big]
\end{aligned}$$

Então,

$$kD^+(l) + D(l) = -k[A(l) + kA^+(l)]^{-1} + \frac{A(l)}{A^+(l)}\cdot\Big[-[A(l) + kA^+(l)]^{-1} + A(l)^{-1}\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-k}{A(l)+kA^+(l)} - \frac{A(l)}{A^+(l)} \cdot \frac{1}{A(l)+kA^+(l)} + \frac{1}{A^+(l)} \\
&= \frac{-kA^+(l)-A(l)}{A^+(l)[A(l)+kA^+(l)]} + \frac{1}{A^+(l)} \\
&= -\frac{1}{A^+(l)} + \frac{1}{A^+(l)} = 0
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\|D\|_W < \infty$.

Ora, vimos nas propriedades de A que A é não-decrescente e $A(l) < \infty$, logo, para x entre $0 \leq x \leq l$, temos $A(x) \leq A(l) < \infty$.

Ainda, pela observação 4.2.7, $A(x) \geq 1$, logo $A(x)^{-2} \leq 1$.

Portanto,

$$D(x) = A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy \leq A(l)(l+k-x) \leq A(l)(l+k) \implies$$
$$\|D\|_W^2 = \int_{[0,l]} |D(x)|^2 dW(x) \leq [A(l)(l+k)]^2 \cdot [W(l) - W(0-)] < \infty$$

Agora, vamos mostrar que $\mathfrak{G}D = b^2 D$.

Já sabemos que $D^+(x) = A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy - A(x)^{-1}$, derivando em relação a W em ambos os lados:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}D(x) &= \frac{d}{dW}\Big(D^+(x)\Big) = \frac{d}{dW}\left(A^+(x) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy - A(x)^{-1}\right) \\
&= \frac{d}{dW}\Big(A^+(x)\Big) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) \\
&\quad + \frac{d}{dW}\Big(-A(x)^{-1}\Big) \\
&= \Big(\mathfrak{G}A(x)\Big) \cdot \int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) \\
&\quad + \frac{d}{dW}\Big(-A(x)^{-1}\Big) \\
&= b^2 A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) \\
&\quad + \frac{d}{dW}\Big(-A(x)^{-1}\Big) \\
&= b^2 D(x) + A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) + \frac{d}{dW}\Big(-A(x)^{-1}\Big) \\
&= b^2 D(x)
\end{aligned}$$

Na última passagem, usamos que $A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) + \frac{d}{dW}\Big(-A(x)^{-1}\Big) = 0$.

Note que essa igualdade vale nos casos em que W é constante, pois para a derivada de uma função f estar bem definida quando W é constante é necessário que $\frac{df}{dW} = 0$.

Quando W é crescente, podemos usar o resultado inicial sobre derivar em termos de W, a Proposição 2.1 e usar $\dfrac{df}{dW} = \dfrac{dx}{dW} \cdot \dfrac{df}{dx}$.

De fato, usando $\dfrac{d}{dx}$ como a derivada à direita.

$$\begin{aligned} A^+(x) \cdot \frac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) &= A^+(x) \cdot \frac{dx}{dW} \cdot \frac{d}{dx}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) \\ &= A^+(x) \cdot \frac{dx}{dW} \cdot \frac{d}{dx}\Big(-\int_{l+k}^{x} A(y)^{-2}dy\Big) \\ &= A^+(x) \cdot \frac{dx}{dW} \cdot \big(-A(x)^{-2}\big) \\ &= -\frac{dx}{dW} \cdot \frac{A^+(x)}{A(x)^2} \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dW}\big(-A(x)^{-1}\big) &= \frac{dx}{dW} \cdot \frac{d}{dx}\big(-A(x)^{-1}\big) \\ &= \frac{dx}{dW} \cdot A(x)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}\big(A(x)\big) = \frac{dx}{dW} \cdot \frac{A^+(x)}{A(x)^2} \end{aligned}$$

Concluímos que vale $A^+(x) \cdot \dfrac{d}{dW}\Big(\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\Big) + \dfrac{d}{dW}\big(-A(x)^{-1}\big) = 0$ e, mais ainda, $\mathfrak{G}D = b^2D$.

Como $\mathfrak{G}D(x) = \dfrac{d}{dW}\big(D^+(x)\big) = b^2D(x)$, integrando em relação a $W(s)$, podemos escrever:

$$D^+(x) = D^-(0) + \int_{0-}^{x} b^2D(s)dW(s)$$

Integrando em relação a z:

$$D(x) = D(0) + D^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^{z} b^2D(s)dW(s)$$

Logo, $D \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$.

Para obter $\|\mathfrak{G}D\|_W < \infty$, basta observar que

$$\|\mathfrak{G}D\|_W = \|b^2D\|_W = b^2\|D\|_W < \infty$$

.

Relembrando, concluímos que:

- $\mathfrak{G}D = b^2D$
- $D \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$

- $D^-(0) = -1$
- $\|\mathfrak{G}D\|_W < \infty$
- $\|D\|_W < \infty$
- $kD^+(l) + D(l) = 0$

Assim, $D(x)$ é **uma** solução de $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x)$ de classe $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$ com $f^-(0) = -1$.

Unicidade.

Suponha que exista outra função f que cumpre essas propriedades, isto é, $f^-(0) = -1$, $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x)$ e $f \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$.

Em particular, $f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^z \mathfrak{G}f(s)dW(s) \\ &= f(0) - 1x + b^2 \int_0^x dz \int_{0-}^z f(s)dW(s) \implies \\ f^-(x) &= -1 + b^2 \int_{0-}^x f(s)dW(s) \end{aligned}$$

Analogamente, $D^-(x) = -1 + b^2 \int_{0-}^x D(s)dW(s)$

Portanto, $D^-(x) - f^-(x) = b^2 \int_{0-}^x D(s) - f(s)dW(s)$.

Pelo mesmo argumento usado no Teorema 4.2.9, temos $\mathfrak{G}D(x) = b^2 D(x)$ e $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x) \implies (b^2 - \mathfrak{G})(D(x) - f(x)) = 0$, como b^2 está fora do espectro de $\mathfrak{G}$, então o operador $(b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$ está bem definido e vale para todo s :

$$\begin{aligned} (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}\Big((b^2 - \mathfrak{G})(D(s) - f(s))\Big) = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}0 \implies \\ (D(s) - f(s)) = 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} D^-(x) - f^-(x) &= b^2 \int_{0-}^x D(s) - f(s)dW(s) \\ &= b^2 \int_{0-}^x 0dW(s) = 0 \end{aligned}$$

E vale a igualdade $D^-(x) = f^-(x)$ para todo $x \in [0, l]$.

Além disso, como $f, D \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, temos $kf^-(l) + f(l) = 0$ e $kD^-(l) + D(l) = 0$. Assim, como k é um parâmetro fixo, dado com a corda, $D(l)$ e $f(l)$ estão determinados e vale a igualdade $D(l) = f(l)$.

Daí, como as derivadas são iguais, D e f são contínuas e possuem um ponto em comum $D(l) = f(l)$, vale a igualdade entre as funções $D(x) = f(x)$.

Assim, $D(x)$ é a **única** solução de $\mathfrak{G}f(x) = b^2 f(x)$ de classe $\mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$ com $f^-(0) = -1$.

$\square$

Observação 4.3.5. $D(x)$ não pertence a classe $\mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$.

Basta notar que $D^-(0) = -1 \neq 0$, logo $D \notin \mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$.

Proposição 4.3.6. *Sejam $A(x)$ e $D(x)$ os fatores que compõe a função de Green do operador $\mathfrak{G}$ para um parâmetro qualquer. Então vale, para todo $x \in \mathbb{R}$, a seguinte igualdade:*

$$A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = A^-(x)D(x) - A(x)D^-(x) = 1$$

Demonstração. Para $x < 0$, temos:

$$A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = -1 \cdot D^+(x) = -1 \cdot D^-(0) = -1 \cdot (-1) = 1$$

O raciocínio é o mesmo para $A^-(x)D(x) - A(x)D^-(x) = 1$.

Para $x > l$, temos:

Já vimos que A, D são lineares em intervalos sem massa e, por definição, $x > l$ é um intervalo sem massa, isto é, a inclinação é constante.

$$\begin{aligned}
A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) &= A^+(l)D(x) - A(x)D^+(l) \\
&= A^+(l)\Big[D(l) + (x-l)D^+(l)\Big] \\
&\quad - \Big[A(l) + (x-l)A^+(l)\Big]D^+(l) \\
&= A^+(l)D(l) - A(l)D^+(l) + (x-l)A^+(l)D^+(l) \\
&\quad - (x-l)A^+(l)D^+(l) \\
&= A^+(l)D(l) - A(l)D^+(l)
\end{aligned}$$

Novamente, temos $A^-(x)D(x) - A(x)D^-(x) = A^+(l)D(l) - A(l)D^+(l)$ com o mesmo raciocínio, assim, resta provarmos o resultado para $0 \leq x \leq l$.

Como o resultado já vale para $x < 0$, a ideia é mostrar que a função $A'D - AD'$ é constante, ou seja, a derivada é nula.

Assim, para $0 \leq x \leq l$, temos:

$$\begin{aligned}
D(x) &= A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy \implies \\
D'(x) &= A'(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A(x)\cdot(-A(x)^{-2}) \\
&= A'(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy - A(x)^{-1} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D''(x) &= A''(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy + A'(x)\cdot(-A(x)^{-2}) - (-A(x)^{-2})A'(x)\\ &= A''(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy - A'(x)(A(x)^{-2}) + A'(x)(A(x)^{-2})\\ &= A''(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\end{aligned}$$

Onde A' é apenas uma notação para representar que a conta é a mesma tanto para a A^+ quanto A^- e não que exista de fato a derivada.

$$\begin{aligned}\Big(A'(x)D(x) - A(x)D'(x)\Big)' &= A''(x)D(x) - A(x)D''(x) + A'(x)D'(x) - A'(x)D'(x)\\ &= A''(x)D(x) - A(x)D''(x)\\ &= A''(x)\cdot A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy\\ &- A(x)\cdot A''(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy = 0\end{aligned}$$

Portanto, vale $A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = A^-(x)D(x) - A(x)D^-(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

□

4.4 Exemplos de Função de Green

Exemplo 4.4.1. $W(x) = x$, $l < \infty$, $0 \leq k \leq \infty$

Inicialmente, temos $p_1(x)$:

$$p_1(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z 1dW(s) = \int_0^x dz \int_0^z ds = \int_0^x zdz = \frac{x^2}{2!}$$

De igual modo, $p_2(x)$:

$$p_2(x) = \int_0^x dz \int_{0-}^z p_1(s)dW(s) = \int_0^x dz \int_0^z \frac{s^2}{2!}ds = \int_0^x \frac{z^3}{3!}dz = \frac{x^4}{4!}$$

Recursivamente, $p_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Note que, $W(x) = x$ apenas no intervalo $[0, l]$, pela Definição 2.1.1, pois $W(x) = 0$, se $x < 0$ e $W(x) = W(l) = l$, se $x > l$. Assim, temos:

- Se $x < 0 \implies A(x) = 1$
- Se $x > l$, $p_n(x) = p_n(l) \implies A(x) = A(l)$

Daí, para $0 < x < l$:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} p_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{(bx)^2}{2!} + \frac{(bx)^4}{4!} + \cdots + \frac{(bx)^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
&= cosh(bx)
\end{aligned}
$$

Ainda,

$$
\begin{aligned}
D(x) &= A(x) \int_x^{l+k} A(y)^{-2} dy \\
&= A(x) \left[\int_x^l A(y)^{-2} dy + \int_l^{l+k} A(l)^{-2} dy \right] \\
&= cosh(bx) \left[\int_x^l cosh(by)^{-2} dy + \int_l^{l+k} cosh(bl)^{-2} dy \right] \\
&= cosh(bx) \left[\int_x^l cosh(by)^{-2} dy + k \cdot cosh(bl)^{-2} \right] \\
&= cosh(bx) \left[\left(\frac{tanh(bl)}{b} - \frac{tanh(bx)}{b} \right) + k \cdot cosh(bl)^{-2} \right] \\
&= \frac{cosh(bx)}{b} \Big[\Big(tanh(bl) - tanh(bx) \Big) + kb \cdot cosh(bl)^{-2} \Big]
\end{aligned}
$$

Por fim, para $x \leq y$, temos:

$$G(x, y) = A(x) \cdot D(y)$$

$$G(x, y) = cosh(bx) \cdot \frac{cosh(by)}{b} \Big[\Big(tanh(bl) - tanh(by) \Big) + kb \cdot cosh(bl)^{-2} \Big]$$

Exemplo 4.4.2. $W(x) = \delta \cdot 1_{[a,+\infty)}(x)$, com $0 < a < l$, $l < \infty$, $0 \leq k \leq \infty$

Inicialmente, temos $p_1(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \int_0^x dz \int_{0-}^z 1 dW(s) \\
&= \int_0^x 1 \cdot \delta \cdot 1_{[a,+\infty)}(z) dz \\
&= \delta(x - a) \cdot 1_{[a,+\infty)}(x)
\end{aligned}
$$

De igual modo, $p_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= \int_0^x dz \int_{0-}^z p_1(s) dW(s) \\
&= \int_0^x dz \int_{0-}^z \delta(s - a) \cdot 1_{[a,+\infty)}(s) dW(s) \\
&= \int_0^x (\delta(a - a) \cdot 1_{[a,+\infty)}(a)) \cdot \delta \cdot 1_{[a,+\infty)}(z) dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Recursivamente, temos $p_n(x) = 0$ para $n \geq 2$. Daí $A(x) = 1 + b^2 \cdot p_1(x) = 1 + b^2 \cdot \delta(x - a) \cdot 1_{[a,+\infty)}(x)$.

Ainda,

$$\begin{aligned} D(x) &= A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy \\ &= A(x)\left[\int_x^{l} A(y)^{-2}dy + \int_l^{l+k} A(l)^{-2}dy\right] \text{ , pois } x > l \implies A(x) = A(l) \end{aligned}$$

Se $x < a$, então:

$$\begin{aligned} &= A(x)\left[\int_x^{l} A(y)^{-2}dy + \int_l^{l+k} A(l)^{-2}dy\right] \\ &= A(x)\left[\int_x^{a} A(y)^{-2}dy + \int_a^{l} A(y)^{-2}dy + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[\int_x^{a} 1dy + \int_a^{l} (1+b^2\delta(y-a))^{-2}dy + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[(a-x) + \left(-\frac{1}{b^2\delta(b^2\delta(y-a)+1)}\bigg|_a^l\right) + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[(a-x) + \left(-\frac{1}{b^2\delta A(y)}\bigg|_a^l\right) + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[(a-x) + \left(\frac{1}{b^2\delta A(a)} - \frac{1}{b^2\delta A(l)}\right) + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[(a-x) + \left(\frac{1}{b^2\delta A(x)} - \frac{1}{b^2\delta A(l)}\right) + k\cdot A(l)^{-2}\right] , \end{aligned}$$

pois $x < a \implies A(x) = A(a)$

Se $a \leq x \leq l$, então:

$$\begin{aligned} D(x) &= A(x)\left[\int_x^{l} A(y)^{-2}dy + \int_l^{l+k} A(l)^{-2}dy\right] \\ &= A(x)\left[\int_x^{l} A(y)^{-2}dy + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[\int_x^{l} (1+b^2\delta(y-a))^{-2}dy + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[-\frac{1}{b^2\delta(b^2\delta(y-a)+1)}\bigg|_x^l + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[-\frac{1}{b^2\delta A(y)}\bigg|_x^l + k\cdot A(l)^{-2}\right] \\ &= A(x)\left[\frac{1}{b^2\delta A(x)} - \frac{1}{b^2\delta A(l)} + k\cdot A(l)^{-2}\right] \end{aligned}$$

Se $l < x$, então:

$$\begin{aligned} D(x) &= A(x)\int_x^{l+k} A(y)^{-2}dy \\ &= A(x)\int_x^{l+k} A(l)^{-2}dy \\ &= A(x)\cdot(l+k-x)A(l)^{-2} \end{aligned}$$

$$= A(x) \cdot (k - (x - l))A(l)^{-2}$$

Podemos resumir a escrita usando funções indicadoras, assim temos:

$$D(x) = A(x)\left[(a - x) \cdot 1_{[0,a)}(x) + \left(\frac{1}{b^2\delta A(x)} - \frac{1}{b^2\delta A(l)}\right) \cdot 1_{[0,l]}(x) + \frac{k - (x - l) \cdot 1_{(l,l+k]}(x)}{A(l)^2}\right]$$

Por fim, para $x \leq y$, temos:

$$G(x, y) = A(x) \cdot D(y)$$
$$G(x, y) = A(x) \cdot A(y)\left[(a - y) \cdot 1_{[0,a)}(y) + \left(\frac{1}{b^2\delta A(y)} - \frac{1}{b^2\delta A(l)}\right) \cdot 1_{[0,l]}(x) + \frac{k - (y - l) \cdot 1_{(l,l+k]}(y)}{A(l)^2}\right]$$

4.5 Igualdade entre o Operador Integral e Operador de Green

Por fim, apresentamos o principal teorema da seção que apresenta a igualdade entre o Operador Integral da Função de Green e o Operador de Green, validando a notação utilizada no início da seção.

Relembre as definições do Operador de Green e do Operador Integral da Função de Green.

Definição (4.1.1)**.** O Operador de Green de parâmetro ω do operador $\mathfrak{G}$ é definido como:

$$\mathbf{G}_\omega := (-\omega^2 I - \mathfrak{G})^{-1}$$

Definição (4.1.3)**.** O Operador Integral da Função de Green de parâmetro ω do operador $\mathfrak{G}$ é definido como:

$$\mathbf{G}_\omega : f \in L^2([0, l], dW) \longrightarrow \int_{[0,l]} G_\omega(x, y)f(y)dW(y)$$

Onde a Função de Green $G_\omega(x, y)$ é o núcleo desse operador integral.

Prosseguimos com o Teorema.

Teorema 4.5.1. *O operador integral da função de Green com parâmetro ib do operador* $\mathfrak{G}$*,* $\mathbf{G}_{ib}$*, é o mesmo que o Operador de Green com parâmetro ib do operador* $\mathfrak{G}$ *,* $(b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$ *.*

$$\mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1} \tag{4.8}$$

Demonstração. O objetivo é mostrar que $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, l]$ e toda $f \in L^2([0, l], dW)$, para assim concluir $\mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$.

Para essa demonstração vamos dividir em algumas etapas com pequenas afirmações que serão provadas.

Afirmação 1. $b^2\mathbf{G}_{ib}1 \leq 1$, onde $1 = 1(x)$ é a função constante igual a 1.

Demonstração 1. Para $0 \leq x < l$:

$$\begin{aligned} b^2\mathbf{G}_{ib}1(x) &= b^2\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)1(y)dW(y) = b^2\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y) \\ &= b^2\left[\int_{0-}^{x} G_{ib}(x,y)dW(y) + \int_{x}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y)\right] \end{aligned}$$

Em $\int_{0-}^{x} G_{ib}(x,y)dW(y)$, temos $y \leq x$, daí $G_{ib}(x,y) = A(y)D(x)$.

Em $\int_{x}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y)$, temos $x \leq y$, daí $G_{ib}(x,y) = A(x)D(y)$.

$$\begin{aligned} b^2\mathbf{G}_{ib}1(x) &= b^2\left[\int_{0-}^{x} G_{ib}(x,y)dW(y) + \int_{x}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y)\right] \\ &= b^2\left[\int_{0-}^{x} A(y)D(x)dW(y) + \int_{x}^{l} A(x)D(y)dW(y)\right] \\ &= D(x)\int_{0-}^{x} b^2A(y)dW(y) + A(x)\int_{x}^{l} b^2D(y)dW(y) \\ &= D(x)\int_{0-}^{x} \mathfrak{G}A(y)dW(y) + A(x)\int_{x}^{l} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \end{aligned}$$

Observe que $\int_{0-}^{x} \mathfrak{G}A(y)dW(y) = A^+(x)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} &D(x) = D(0) + D^-(0)x + \int_0^x dz\int_{0-}^{z} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \implies \\ &D^+(x) = D^-(0) + \int_{0-}^{x} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_x^l \mathfrak{G}D(y)dW(y) =& \mathfrak{G}D(l)W[l] + \int_x^{l-} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \\ =& \mathfrak{G}D(l)W[l] + \Bigg[D^-(0) + \int_{0-}^{l-} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \\ & - D^-(0) - \int_{0-}^{x} \mathfrak{G}D(y)dW(y)\Bigg] \\ =& \mathfrak{G}D(l)W[l] + D^+(l-) - D^+(x) = \Big(\mathfrak{G}D(l)W[l] + D^-(l)\Big) - D^+(x) \\ =& D^+(l) - D^+(x) \leq -D^+(x) \text{ , pois } D^+ \leq 0 \end{aligned}$$

Como $A(x) \geq 0$ e $-D^+(x) \geq 0$, então $-A(x)D^+(x) \geq 0$ e vale

$$\begin{aligned} b^2\mathbf{G}_{ib}1(x) &= D(x)\int_{0-}^{x} \mathfrak{G}A(y)dW(y) + A(x)\int_{x}^{l} \mathfrak{G}D(y)dW(y) \\ &\leq A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = 1 \text{ , pela Proposição 4.3.6} \end{aligned}$$

Para $x \geq l$:

$$\begin{aligned} b^2\mathbf{G}_{ib}1(x) &= b^2\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y) = D(x)\int_{0-}^{l} b^2A(y)dW(y) \text{ , pois } x \geq y \\ &= A^+(l)D(x) = A^+(x)D(x) \text{ , pois } A^+(l) = A^+(x) \text{ para } x \geq l \\ &\leq A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = 1 \end{aligned}$$

Para $x < 0$:

$$\begin{aligned} b^2\mathbf{G}_{ib}1(x) &= b^2\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y) = A(x)\int_{0-}^{l} b^2D(y)dW(y) \text{ , pois } x \leq y \\ &= A(x)\Big[D^+(l) - D^+(0-)\Big] \leq -A(x)D^+(0-) \\ &= -A(x)D^+(x) \text{ , pois } D^(x) = D^+(0-) \text{ para } x < 0 \\ &\leq A^+(x)D(x) - A(x)D^+(x) = 1 \end{aligned}$$

Afirmação 2. $\|\mathbf{G}_{ib}f\| \leq b^{-2}\|f\|$ para $f \in L^2([0,l],dW)$.

Demonstração 2. Usando que $b^2\mathbf{G}_{ib}1 \leq 1$, i.e., $\mathbf{G}_{ib}1 \leq b^{-2}$

$$\|\mathbf{G}_{ib}f\|^2 = \int_{0-}^{l}\left|\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)f(y)dW(y)\right|^2 dW(x)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para:

$$\begin{aligned} \left|\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)f(y)dW(y)\right|^2 &= \left(\int_{0-}^{l} \sqrt{G_{ib}(x,y)}\cdot\sqrt{G_{ib}(x,y)}f(y)dW(y)\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y)\right)\left(\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,s)|f(s)|^2dW(s)\right) \end{aligned}$$

A troca de variáveis da última integral só foi feita para explicitar que a função de Green das duas últimas integrais não possuem relação. Além disso, observe que a função $\sqrt{G_{ib}(x,y)}$ está bem definida pois $G_{ib}(x,y) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{ib}f\|^2 &\leq \int_{0-}^{l}\left[\left(\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y)dW(y)\right)\left(\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,s)|f(s)|^2dW(s)\right)\right]dW(x) \\ &\leq \int_{0-}^{l}\frac{1}{b^2}\left[\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,s)|f(s)|^2dW(s)\right]dW(x) \\ &= \frac{1}{b^2}\left[\int_{0-}^{l}\left(\int_{0-}^{l} G_{ib}(x,s)dW(x)\right)|f(s)|^2dW(s)\right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{b^4} \int_{0-}^{l} |f(s)|^2 dW(s) = b^{-4} \|f\|^2$$

Afirmação 3. $\mathbf{G}_{ib} f \in \mathbf{D}_{-}(\mathfrak{G})$ e $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib} f = f$ para $0 \leq x < l$.

Demonstração 3. Queremos mostrar que $\mathbf{G}_{ib} f \in \mathbf{D}_{-}(\mathfrak{G})$, isto é, mostrar que $\mathbf{G}_{ib} f \in \mathbf{D}_{0}(\mathfrak{G})$ e $\mathbf{G}_{ib} f^{-}(0) = 0$.

Para $x < 0$:

Ora,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ib} f(x) =& \int_{0-}^{l} G_{ib}(x,y) f(y) dW(y) \text{ , como } x < 0 \leq y \text{, temos } G_{ib}(x,y) = A(x)D(y) \\
=& \int_{0-}^{l} A(x)D(y) f(y) dW(y) \\
=& A(x) \int_{0-}^{l} D(y) f(y) dW(y) \text{ e } A(x) = 1 \text{ , para } x < 0 \\
=& \int_{0-}^{l} D(y) f(y) dW(y) \text{ , que é constante em } x
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{G}_{ib} f^{-}(0) = 0$.

Agora para verificar que $\mathbf{G}_{ib} f \in \mathbf{D}_{0}(\mathfrak{G})$. Considere $x < l$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ib} f(x) =& \int_{0-}^{x} A(y)D(x) f(y) dW(y) + \int_{x}^{l} A(x)D(y) f(y) dW(y) \\
=& D(x) \int_{0-}^{x} A(y) f(y) dW(y) + A(x) \int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y) \implies \\
(\mathbf{G}_{ib} f)^{+}(x) =& D^{+}(x) \int_{0-}^{x} A(y) f(y) dW(y) + A^{+}(x) \int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y)
\end{aligned}$$

Observação 4.5.2. Vale a igualdade, pois podemos derivar sob o sinal da integral, assim $(\mathbf{G}_{ib} f)^{+}(x) = \int_{0-}^{l} G_{ib}^{+}(x,y) dW(y)$ onde G_{ib}^{+} é a derivada à direita em relação a x. De fato, como existem A^{+} e D^{+} em todos os pontos e ainda são limitadas, estamos em condinções de utilizar essa derivação.

Ainda, $G_{ib}^{+}(x,y) = A^{+}(x)D(y)$, se $x \leq y$ e $G_{ib}^{+}(x,y) = A(x)D^{+}(y)$, se $y < x$.

Derivando em relação a W

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mathbf{G}_{ib} f)^{+}(x)}{dW(x)} =& \frac{d}{dW(x)} \left(D^{+}(x) \int_{0-}^{x} A(y) f(y) dW(y) + A^{+}(x) \int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y) \right) \\
=& \frac{dD^{+}(x)}{dW(x)} \int_{0-}^{x} A(y) f(y) dW(y) + \frac{dA^{+}(x)}{dW(x)} \int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y) \\
&+ D^{+}(x)A(x) f(x) + A^{+}(x) \frac{d}{dW(x)} \left(\int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y) \right) \\
=& \mathfrak{G} D(x) \int_{0-}^{x} A(y) f(y) dW(y) + \mathfrak{G} A(x) \int_{x}^{l} D(y) f(y) dW(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ D^+(x)A(x)f(x) - A^+(x)\frac{d}{dW(x)}\left(\int_l^x D(y)f(y)dW(y)\right)\\
&= \mathfrak{G}D(x)\int_{0-}^x A(y)f(y)dW(y) + \mathfrak{G}A(x)\int_x^l D(y)f(y)dW(y)\\
&+ D^+(x)A(x)f(x) - A^+(x)D(x)f(x)\\
&= b^2\left[D(x)\int_{0-}^x A(y)f(y)dW(y) + A(x)\int_x^l D(y)f(y)dW(y)\right]\\
&+ \left[D^+(x)A(x) - A^+(x)D(x)\right]f(x)\\
&= b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - f(x) \text{ , pois } D^+(x)A(x) - A^+(x)D(x) = 1
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever, para $x < l$:

$$
\mathbf{G}_{ib}f(x) = \mathbf{G}_{ib}f(0) + (\mathbf{G}_{ib}f)^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^l \left[b^2\mathbf{G}_{ib}f(s) - f(s)\right]dW(s)
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f(x) &= b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - \mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(x)\\
&= b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - \left[b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - f(x)\right] = f(x)
\end{aligned}
$$

Como $f, \mathbf{G}_{ib}f \in L^2([0,l], dW) \implies (b^2\mathbf{G}_{ib}f - f) \in L^2([0,l], dW)$, então, resta apenas verificar $x \geq l$.

Para concluir que $\mathbf{G}_{ib}f \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G})$, é suficiente que $\mathbf{G}_{ib}f(x)$ seja linear para $x \geq l$, pois $x \geq l$ é um intervalo sem massa.

Finalmente, para $x \geq l$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ib}f(x) &= \int_{0-}^l A(y)D(x)f(y)dW(y) \text{ , pois } y \leq l \leq x\\
&= D(x)\int_{0-}^l A(y)f(y)dW(y)
\end{aligned}
$$

Daí, como $\int_{0-}^l A(y)f(y)dW(y)$ é constante em x e para $x \geq l$, temos $D(x)$ é linear, logo $\mathbf{G}_{ib}f(x)$ também é linear e temos $\mathbf{G}_{ib}f \in \mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$.

Afirmação 4. $\mathbf{G}_{ib}f \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$ e $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f(l) = f(l)$.

Demonstração 4. Ora, para que $\mathbf{G}_{ib}f \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, precisamos de $\|\mathbf{G}_{ib}f\| < \infty$ e $\|\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f\| < \infty$.

Pela Afirmação 2, $\|\mathbf{G}_{ib}f\| \leq b^{-2}\|f\| < \infty$.

Para o caso $\|\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f\| < \infty$, observe que pela afirmação anterior, vale para $0 \leq x < l$, $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f = f$, portanto, vale $\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(x) = b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - f(x)$.

Assim,

$$
\|\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f\|^2 = \int_{0-}^l |\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(x)|^2 dW(x)
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(l)|^2W[l] + \int_{0-}^{l-} |\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(x)|^2 dW(x) \\
&= |\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(l)|^2W[l] + \int_{0-}^{l-} |b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) - f(x)|^2 dW(x) \\
&< \infty \text{ , pois } b^2\mathbf{G}_{ib}f - f \in L^2([0,l], dW)
\end{aligned}
$$

Além disso, a condição $k(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l) + \mathbf{G}_{ib}f(l) = 0$ é verdadeira, pois, para $x \geq l$, $\mathbf{G}_{ib}f(x) = D(x)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y)$, daí:

$$
k(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l) + \mathbf{G}_{ib}f(l) = \Big[kD^+(l) + D(l)\Big]\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) = 0
$$

Note que $D \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, logo $kD^+(l) + D(l) = 0$.

Finalmente, temos $\mathbf{G}_{ib}f \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$.

Resta mostrar que $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f(l) = f(l)$.

Pelo Corolário 2.2.3 sabemos que $\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib}f(l) = \dfrac{(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l) - (\mathbf{G}_{ib}f)^-(l)}{W[l]}$.

Por um lado,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{G}_{ib}f(x) = D(x)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) \text{ , para } x \geq l \implies \\
&(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l) = D^+(l)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para $x < l$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{ib}f)^+(x) &= D^+(x)\int_{0-}^{x} A(y)f(y)dW(y) + A^+(x)\int_{x}^{l} D(y)f(y)dW(y) \implies \\
(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l-) &= D^+(l-)\int_{0-}^{l-} A(y)f(y)dW(y) + A^+(l-)\int_{l-}^{l} D(y)f(y)dW(y) \\
&= D^+(l-)\int_{0-}^{l-} A(y)f(y)dW(y) + A^+(l-)D(l)f(l)W[l] \implies \\
(\mathbf{G}_{ib}f)^-(l) &= D^-(l)\int_{0-}^{l-} A(y)f(y)dW(y) + A^-(l)D(l)f(l)W[l] \\
&= D^-(l)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) + \Big[A^-(l)D(l) - A(l)D^-(l)\Big]f(l)W[l] \\
&= D^-(l)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) + f(l)W[l]
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{G}_{ib}f)^+(l) - (\mathbf{G}_{ib}f)^-(l) &= D^+(l)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) \\
&\quad - \left[D^-(l)\int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) + f(l)W[l]\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[D^{+}(l) - D^{-}(l)\Big] \int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) - f(l)W[l] \\
&= \Big[\mathfrak{G}D(l)W[l]\Big] \int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) - f(l)W[l] \\
&= b^2 D(l)W[l] \int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) - f(l)W[l] \\
&= \left[b^2 D(l) \int_{0-}^{l} A(y)f(y)dW(y) - f(l)\right] W[l] \\
&= \Big[b^2 \mathbf{G}_{ib} f(l) - f(l)\Big] W[l]
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\mathfrak{G}\mathbf{G}_{ib} f(l) = \frac{(\mathbf{G}_{ib} f)^{+}(l) - (\mathbf{G}_{ib} f)^{-}(l)}{W[l]} = b^2 \mathbf{G}_{ib} f(l) - f(l)
$$

Afirmação 5. $\mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$.

Demonstração 5. Já vimos nas afirmações 3 e 4 que $\mathbf{G}_{ib} f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ e que satisfaz $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib} f = f$ para toda $f \in L^2([0,l], dW)$.

Como o operador $(b^2 - \mathfrak{G})$ possui inversa, é injetivo e, pela relação $(b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib} f = f$ concluímos que $\mathbf{G}_{ib}$ também é injetivo.

Resta mostrar, que $\mathbf{G}_{ib}$ é sobrejetivo.

De fato, seja $f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ tal que não exista nenhuma $g \in L^2([0,l], dW)$ que satisfaça $\mathbf{G}_{ib} g = f$. Defina a função $h = f - \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f$. Observe que $(b^2 - \mathfrak{G})f \in L^2([0,l], dW)$, logo $h \neq 0$. Além disso, $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ pois f , $\mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

Finalmente, note que:

$$
\begin{aligned}
(b^2 - \mathfrak{G})h &= (b^2 - \mathfrak{G})\Big(f - \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f\Big) \\
&= (b^2 - \mathfrak{G})f - (b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f \\
&= (b^2 - \mathfrak{G})f - \Big((b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}\Big)(b^2 - \mathfrak{G})f \\
&= (b^2 - \mathfrak{G})f - (b^2 - \mathfrak{G})f = 0 \implies \\
b^2 h &= \mathfrak{G}h
\end{aligned}
$$

Assim, $h \neq 0$ é solução de $b^2 h = \mathfrak{G}h$ em $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$, absurdo pela Observação 4.2.11.

Logo, $\mathbf{G}_{ib}$ é sobrejetivo e ainda vale $f - \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f = 0 \implies \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f = f$.

Portanto, como vale para toda $f \in L^2([0,l], dW)$, temos:

$$
\mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f = (b^2 - \mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib} f = f \implies \mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}
$$

. $\square$

Proposição 4.5.3. *O operador $\mathfrak{G}$ agindo no domínio $\boldsymbol{D}(\mathfrak{G})$ é auto-adjunto para cada possível valor de k, com $0 \leq k \leq \infty$.*

Demonstração. Isso vem do fato de o Operador Integral da Função de Green ser auto-adjunto, não vamos demonstrar aqui, mas um estudo sobre a teoria das Funções de Green pode dar ao leitor a compreensão desse assunto, a demonstração de que o Operador Integral da Função de Green é auto-adjunto pode ser encontrada em (KIPNIS, 2011).

Agora sabemos, pelo Teorema 4.5.1, que vale $\mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$. Além disso, $\mathbf{G}_{ib}$ é auto-adjunto, isto é, $\mathbf{G}_{ib}^* = \mathbf{G}_{ib}$.

Sejam $f, h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, então:

$$\begin{aligned}
\langle f, h \rangle &= \Big\langle f, \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})h \Big\rangle \ \text{ , pois } \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G}) = 1 \\
&= \Big\langle \mathbf{G}_{ib} f, (b^2 - \mathfrak{G})h \Big\rangle \ \text{ , pois } \mathbf{G}_{ib} \text{ é auto-adjunto} \\
&= \Big\langle \mathbf{G}_{ib} f, b^2 h \Big\rangle - \langle \mathbf{G}_{ib} f, \mathfrak{G} h \rangle = b^2 \langle \mathbf{G}_{ib} f, h \rangle - \langle \mathbf{G}_{ib} f, \mathfrak{G} h \rangle \ \text{ , pois } b^2 \in \mathbb{R} \\
&= b^2 \langle \mathbf{G}_{ib} f, h \rangle - \langle \mathfrak{G}^*(\mathbf{G}_{ib} f), h \rangle = \Big\langle b^2(\mathbf{G}_{ib} f), h \Big\rangle - \langle \mathfrak{G}^*(\mathbf{G}_{ib} f), h \rangle \\
&= \Big\langle b^2(\mathbf{G}_{ib} f) - \mathfrak{G}^*(\mathbf{G}_{ib} f), h \Big\rangle = \Big\langle (b^2 - \mathfrak{G}^*)(\mathbf{G}_{ib} f), h \Big\rangle \\
&= \Big\langle \Big((b^2 - \mathfrak{G}^*) \mathbf{G}_{ib} \Big) f, h \Big\rangle
\end{aligned}$$

E isso vale para toda $f, h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, logo, devemos ter $(b^2 - \mathfrak{G}^*)\mathbf{G}_{ib} = 1$, isto é, $(b^2 - \mathfrak{G}^*)^{-1} = \mathbf{G}_{ib} = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1} \implies \mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}$

□

Proposição 4.5.4. *O operador $\mathbf{G}_{ib}$ é um operador compacto.*

Demonstração. Para provar a compacidade do operador, vamos mostrar que ele é um operador de classe Hilbert-Schmidt, isto é, o operador $\mathbf{G}_{ib}$ satisfaz:

$$\int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} G_{ib}(x, y)^2 dW(y) \right] dW(x) < \infty$$

E usar o Teorema 6.10 do (SZÜCS; WEIDMANN, 2012), que diz que todo o operador Hilbert-Schmidt é compacto.

Recorde que $G_{ib}(x, y) = A(x)D(y)$, $x \leq y$ e $G_{ib}(x, y) = A(y)D(x)$, $y \leq x$.

Pelas propriedades de A e D, temos $0 \leq A, D < \infty$, ainda $A^+ \geq 0$ e $D^+ \leq 0$, isto é, A é não-decrescente e D é não-crescente. Assim, $D(0) \geq D(z)$ e $A(l) \geq A(z)$ para todo $z \in [0, l]$.

Portanto, $G_{ib}(x, y)^2 \leq \Big[A(l)D(0) \Big]^2 < \infty$ e vale:

$$\int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} G_{ib}(x, y)^2 dW(y) \right] dW(x) \leq \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} \Big[A(l)D(0) \Big]^2 dW(y) \right] dW(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[A(l)D(0)\Big]^2 \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} dW(y) \right] dW(x) \\
&= \Big[A(l)D(0)\Big]^2 \cdot \Big[W([0,l])\Big]^2 < \infty
\end{aligned}
$$

□

5 Transformadas

Vimos no capítulo anterior que o Operador de Green com parâmetro ib do laplaciano generalizado pode ser escrito como um operador integral, definido pela Função de Green $G_{ib}(x, y)$ como núcleo. Neste capítulo, vamos obter a Função Espectral Principal do Operador Laplaciano Generalizado $\mathfrak{G}$, que, em termos gerais, é uma função que permite escrever a Função de Green $G_\omega(x, y)$ como uma integral. A partir dessa Função Espectral Principal, obtemos a Transformada Par e a Transformada Ímpar para o Laplaciano Generalizado.

5.1 Função Espectral Principal

Usaremos fortemente o Teorema Espectral, sob as hipóteses corretas, ele garante a existência de uma base ortonormal de autofunções, a partir dela, se obtém a Função Espectral Principal.

Definição 5.1.1. A função ímpar $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma função espectral principal do operador auto-adjunto $\mathfrak{G}$ se a Função de Green G_ω pode ser escrita como:

$$G_\omega(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x, \gamma)A(y, \gamma)}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) \tag{5.1}$$

Considere a medida $d\Delta(\gamma)$ como a medida gerada pelos borelianos onde $\Delta\Big((a, b]\Big) = \Delta(b) - \Delta(a)$. Observe que se a Função de Green pode ser escrita dessa maneira, então a integral precisa estar bem definida para essa função espectral Δ.

A equação (5.1) deve valer para ω fora do espectro do operador $\mathfrak{G}$ e apenas para $0 \leq x, y \leq l$ nos casos em que x e y não estão no mesmo intervalo sem massa, isso é, um intervalo $I \ni x, y$ tal que W é constante no intervalo.

Seja $[a, b]$ um intervalo onde $W(z)$ é constante para todo $z \in [a, b]$, dizemos que esses intervalos são intervalos sem massa, pelo apego físico. Considere também $x < y \in [a, b]$.

Por um lado, como o intervalo é sem massa, $A(x) = \alpha x + \beta$ é afim, com $\alpha > 0$, pois $A^+(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} D(y) &= A(y) \int_y^{l+k} A(s)^{-2} ds \\ &= A(y) \left[\int_y^b [\alpha s + \beta]^{-2} ds + \int_b^{l+k} A(s)^{-2} ds \right] \\ &= A(y) \left[\frac{1}{\alpha(\alpha y + \beta)} - \frac{1}{\alpha(\alpha b + \beta)} + C \right] \end{aligned}$$

$$= (\alpha y + \beta)\left[\frac{1}{\alpha(\alpha y + \beta)} - \frac{1}{\alpha(\alpha b + \beta)} + C\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha} + (\alpha y + \beta)\left[-\frac{1}{\alpha(\alpha b + \beta)} + C\right]$$

Como α, β, C, b são constantes, podemos escrever $D(y) = \hat{\alpha} y + \hat{\beta}$. Ainda, $D^+ \leq 0$, daí $\hat{\alpha} < 0$.

Portanto, D é afim e $G_\omega(x, y) = (\alpha x + \beta)(\hat{\alpha} y + \hat{\beta}) = \alpha\hat{\alpha}xy + \alpha\hat{\beta}x + \hat{\alpha}\beta y + \beta\hat{\beta}$.

Observe que $\alpha\hat{\alpha} < 0$.

Por outro lado, a equação (5.1) nos dá $G_\omega(x, y)$ em termos de $A(x, \gamma)$ e $A(y, \gamma)$.

$$G_\omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x, \gamma)A(y, \gamma)}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$$

Como $x, y \in [a, b]$ então A é afim, mas os coeficientes dependem de γ:

$$G_\omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_\gamma x + \beta_\gamma)(\alpha_\gamma y + \beta_\gamma)}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$$
$$G_\omega(x, y) = \frac{1}{\pi}\left[(xy)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) + (x + y)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\gamma\beta_\gamma}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)\right]$$
$$G_\omega(x, y) = (xy)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) + (x + y)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\gamma\beta_\gamma}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$$

Como ω está fora do espectro, temos:

$$\frac{\alpha_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} > 0 \implies \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_\gamma^2}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma) > 0 \text{ , pois } \Delta \text{ é não-negativa.}$$

Em resumo, poderíamos escrever:

$$G_\omega(x, y) = c_1(xy) + c_2(x + y) + c_3 \text{ , com } c_1 > 0$$

Contradizendo $\alpha\hat{\alpha} < 0$, logo, a fórmula não se mantém nesse caso, funcionando apenas para x, y fora do mesmo intervalo sem massa, conforme veremos a seguir.

Para a demonstração do principal resultado deste capítulo, vamos precisar de uma definição sobre o espectro de operadores lineares.

Definição 5.1.2. Um autovalor de um operador é dito um *autovalor simples* quando possui multiplicidade algébrica igual a 1. Quando todos os autovalores do operador são simples, dizemos que o espectro é simples.

Pela definição da função espectral, como $x = 0$ é um ponto de crescimento de W, a fórmula deve valer para $x = y = 0$ e, como visto na propriedade 1 da função A, temos $A(0,\gamma) = A(0,\omega) = 1$

Por um lado, $\mathbf{G}_\omega(0,0) = A(0,\omega)D(0,\omega) = D(0,\omega)$.

Por outro lado, $\mathbf{G}_\omega(0,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$.

$$D(0,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$$

Então, $d\Delta$ é determinado por $D(0,\omega)$:

Observação 5.1.3. Se Δ é uma função ímpar não-decrescente com $\int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta(\gamma) < \infty$, então ela pode ser recuperada:

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma^2 - \omega^2} d\Delta(\gamma)$$

para $\omega = a + ib$ pela fórmula

$$\Delta(\gamma_2) - \Delta(\gamma_1) = \lim_{b \downarrow 0} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} Im[\omega D(\omega)]da$$

onde, Im é a parte imaginária e a integral da é em relação a parte real de $\omega = a + ib$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada no Capítulo 1.2, Positive Harmonic Functions on the upper half-plane, em (DYM; MCKEAN, 1976a)

O objetivo dessa seção é provar que existe uma bijeção entre os operadores auto-adjuntos $\mathfrak{G}$ e funções ímpares não-decrescentes Δ com $\int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta < \infty$ através dessa associação, isto é, para cada operador $\mathfrak{G}$ existe uma única Δ que satisfaz (5.1) e para cada Δ existe um único operador no qual é satisfeita (5.1).

Observação. O Teorema 5.1.4 é o teorema que garante a existência e unicidade da função espectral dado um operador e vice-versa, a demonstração dele não será feita, mas pode ser encontrada no Capítulo 5.5, Principal Spectral Functions, em (DYM; MCKEAN, 1976a). Vamos demonstrar no Teorema 5.1.5 apenas a existência da função espectral, dado um operador, o que garante ao menos que a teoria não é vazia.

Teorema 5.1.4. *Através da função espectral principal, a associação entre operadores auto-adjuntos $\mathfrak{G}$ e funções ímpares não-decrescentes Δ, com $\int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta < \infty$ é injetiva e sobrejetiva, isto é:*

- *Dado o operador auto-adjunto $\mathfrak{G}$ existe uma única função ímpar não-decrescente Δ tal que a função de Green $\mathbf{G}_{ib}$ para $(b^2 - \mathfrak{G})^{-1}$ pode ser escrita como:*

$$\mathbf{G}_{ib}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\ ,\ com \int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta < \infty$$

- *Dada a função ímpar não-decrescente* Δ*, com* $\int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta < \infty$ *, existe um único operador auto-adjunto* $\mathfrak{G}$ *tal que a função de Green* $\mathbf{G}_{ib}$ *para* $(b^2-\mathfrak{G})^{-1}$ *pode ser escrita como:*

$$\mathbf{G}_{ib}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)$$

Teorema 5.1.5. *Dado um operador auto-adjunto* $\mathfrak{G}$ *existe uma função ímpar não-decrescente* Δ *tal que a função de Green* $\mathbf{G}_{ib}$ *para* $(b^2-\mathfrak{G})^{-1}$ *pode ser escrita como:*

$$\mathbf{G}_{ib}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\ ,\ com \int(\gamma^2+1)^{-1}d\Delta < \infty$$

Demonstração. Como vimos na Proposição 4.5.4 , o operador $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{ib}$ é um operador auto-adjunto **compacto**, e $\mathbf{G}(L^2([0,l],dW)) = \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, isto é, a imagem do operador $\mathbf{G}$ é $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$, que por sua vez é denso em $L^2([0,l],dW)$.

Estamos sob as hipóteses do Teorema Espectral, que garante a existência de uma família perpendicular e unitária (f_n) de autofunção do operador $\mathbf{G}_{ib}$, com autovalores reais α_n, que geram o espaço $L^2([0,l],dW)$.

A demonstração dessa versão do Teorema Espectral pode ser encontrada no Teorema VII.3 do (REED; SIMON, 1981).

Cada $f_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ e também é autofunção do operador $\mathfrak{G}$, pois:

$$\mathbf{G}_{ib}f_n = \alpha_n f_n \implies (b^2-\mathfrak{G})\mathbf{G}_{ib}f_n = (b^2-\mathfrak{G})\alpha_n f_n \implies$$
$$f_n = \alpha_n(b^2 f_n - \mathfrak{G}f_n) \implies \mathfrak{G}f_n = \left(b^2 - \frac{1}{\alpha_n}\right)f_n$$

De fato, $b^2 - \dfrac{1}{\alpha_n}$ é fixo real e temos f_n autofunção de $\mathfrak{G}$.

Além disso, pelo Lema 3.1.2, vale $\langle \mathfrak{G}f_n, f_n\rangle \leq 0$.

Denote $\beta_n = b^2 - 1/\alpha_n$ e escreva:

$$0 \geq \langle \mathfrak{G}f_n, f_n\rangle = \langle \beta_n f_n, f_n\rangle = \beta_n\langle f_n, f_n\rangle = \beta_n\|f_n\| = \beta_n$$

Daí, podemos escrever o autovalor $\beta_n = -\gamma_n^2$, com $\gamma_n \geq 0$.

Conforme o Teorema 4.2.9 , a menos de uma constante multiplicativa, $A(x,\gamma_n)$ é a única solução para $\mathfrak{G}f = -\gamma_n^2 f$ de classe $\mathbf{D}_-(\mathfrak{G})$, então, como f_n é solução dessa equação e pertence a $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$, em particular, a $\mathbf{D}_{-}(\mathfrak{G})$, ela pode ser escrita como múltiplo real de $A(x, \gamma_n)$.

A princípio, A é uma função que assume valores nos complexos, porém, note que, pela definição das funções p_n, que são integrais em W de funções que tomam valores apenas nos reais, ocorre que cada p_n é uma função real e, em particular, neste caso em que $\gamma_k \in \mathbb{R}$, temos:

$$A(x, \gamma_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\gamma_k)^{2n} p_n(x) \in \mathbb{R} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

.

Ora, como $f_k = \alpha \cdot A(x, \gamma_k)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que f_n assume valor apenas nos reais. Vamos usar no decorrer da demonstração, que vale $f_n(x)^* = f_n(x)$. Além disso, podemos escolher $\alpha \geq 0$, pois o sinal não muda a independência linear de cada f_n, daí, como $A \geq 0$, $f_n \geq 0$.

Em particular, o espectro $\gamma_n : n \geq 1$ de $\mathfrak{G}$ é simples, isto é, cada autovalor γ_n possui uma única autofunção unitário. De fato, se existir uma outra $g_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, com $\mathfrak{G} g_n = -\gamma_n^2 g_n$, novamente, pelo Teorema 4.2.9, teríamos $g_n = c_n \cdot A(x, \gamma_n) \implies g_n = c \cdot f_n$, onde c, c_n são constantes, e por isso g_n seria múltiplo de f_n.

Ainda, vale $\mathbf{G}_{ib} f_n = (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n$, pois:

$$\begin{aligned} f_n &= (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}(b^2 - \mathfrak{G}) f_n = (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}(b^2 f_n - \mathfrak{G} f_n) \\ &= (b^2 - \mathfrak{G})^{-1}(b^2 f_n + \gamma_n^2 f_n) = (b^2 + \gamma_n^2)(b^2 - \mathfrak{G})^{-1} f_n \implies \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}_{ib} f_n = (b^2 + \gamma_n^2)^{-1} \tag{5.2}$$

Como f_n's geram o espaço $L^2([0, l], dW)$, para uma $f \in L^2([0, l], dW)$ qualquer, podemos escrever $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$ e daí:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{G}_{ib} f, f \rangle &= \left\langle \mathbf{G}_{ib} f, \sum_{n_1=1}^{\infty} \langle f, f_{n_1} \rangle f_{n_1} \right\rangle = \sum_{n_1=1}^{\infty} \langle \mathbf{G}_{ib} f, f_{n_1} \rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^* \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\langle \mathbf{G}_{ib} \left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \langle f, f_{n_2} \rangle f_{n_2} \right), f_{n_1} \right\rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^* \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \left\langle \sum_{n_2=1}^{\infty} \langle f, f_{n_2} \rangle \mathbf{G}_{ib} f_{n_2}, f_{n_1} \right\rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^* \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \langle \mathbf{G}_{ib} f_{n_2}, f_{n_1} \rangle \langle f, f_{n_2} \rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^* \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left\langle (\gamma_{n_2}^2 + b^2)^{-1} f_{n_2}, f_{n_1} \right\rangle \langle f, f_{n_2} \rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^* \end{aligned}$$

$$= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} (\gamma_{n_2}^2 + b^2)^{-1} \langle f_{n_2}, f_{n_1} \rangle \langle f, f_{n_2} \rangle \langle f, f_{n_1} \rangle^*$$

Mas, como f_n's são perpendiculares, ocorre:

$\langle f_{n_2}, f_{n_1} \rangle = 0$, se $n_2 \neq n_1$ e $\langle f_{n_2}, f_{n_1} \rangle = 1$, se $n_2 = n_1$ e a escrita se resume a:

$$\langle \mathbf{G}_{ib} f, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \langle f_n, f_n \rangle \langle f, f_n \rangle \langle f, f_n \rangle^* = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} | \langle f, f_n \rangle |^2$$

Inspirados nessa escrita, nosso objetivo agora é mostrar que o núcleo do operador integral $\mathbf{G}_{ib}$ pode ser escrito como a série:

$$\mathbf{G}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y) \tag{5.3}$$

Inicialmente, vamos mostrar que $\mathbf{G}_{ib}(x, y) \geq \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$, com exceção aos intervalos sem massa e para qualquer $N \geq 1$ fixado.

Fixe $N \geq 1$ e defina o operador integral através do núcleo $\mathbf{G}_{ib}(x, y) - \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$, vamos mostrar que o operador é não-negativo, e daí, o núcleo é não-negativo, que vai implicar na desigualdade desejada, nos períodos em que W possui massa.

Denote por $T_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$ e T_N o operador com o núcleo $T_N(x, y)$ para simplificar durante a escrita abaixo.

Então, escrevemos $T_N f(x) = \int_{[0,l]} T_N(x, y) f(y) dW(y)$ e vale:

$$\begin{aligned}
\langle T_N f, f \rangle &= \int_{[0,l]} T_N f(x) \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} T_N(x, y) \cdot f(y) dW(y) \right] \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} \left(\sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y) \right) \cdot f(y) dW(y) \right] \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} f_n(x) f_n(y) \cdot f(y) dW(y) \right] \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \int_{[0,l]} \left[\int_{[0,l]} f(y) \cdot f_n(y) dW(y) \right] f_n(x) \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \int_{[0,l]} \left[\langle f, f_n \rangle \right] f_n(x) \cdot f(x)^* dW(x), \text{ pois } f_n^* = f_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \left[\langle f, f_n \rangle \right] \int_{[0,l]} f_n(x) \cdot f(x)^* dW(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} \left[\langle f_n, f \rangle^* \cdot \langle f_n, f \rangle \right] \text{ , pois } \langle f, f_n \rangle = \langle f_n, f \rangle^*
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} |\langle f_n, f\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} |\langle f, f_n\rangle|^2$$

Daí,

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{G}_{ib} - T_N)f, f\rangle &= \langle \mathbf{G}_{ib} f, f\rangle - \langle T_N f, f\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} |\langle f, f_n\rangle|^2 - \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} |\langle f, f_n\rangle|^2 \geq 0\end{aligned}$$

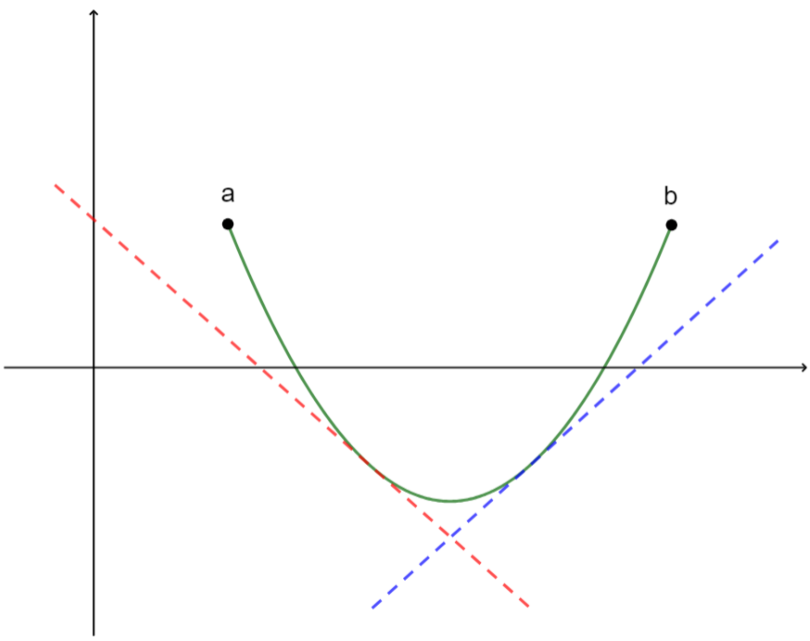
Então, podemos afirmar que vale $\mathbf{G}_{ib}(x,y) \geq \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$, mas a princípio essa desigualdade só é válida onde W possui massa, pois se $\mathbf{G}_{ib}(x,y) < \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$ em intervalos sem massa, ainda valeria $\langle (\mathbf{G}_{ib} - T)f, f\rangle \geq 0$.

O objetivo agora é provar que o somatório $\sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y)$ está bem definido para todo o intervalo $[0, l]$, incluindo intervalos sem massa.

Em particular, vale $\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x)^2 \geq 0$ para x fora de intervalos sem massa.

Seja $(a,b) \subset [0,l]$ um intervalo sem massa de W.

Figura 9 – Positividade de uma função



Fonte: Produção do próprio autor.

Seja f uma função em $L^2([0,l], dW)$ tal que $f''(x)$ existe para $x \in (a,b)$. Observando a figura, fica fácil de perceber que se antes do ponto a e após b uma função f é positiva e houver algum ponto entre a e b em que f é negativa, é necessário que a derivada da função cresça nesse intervalo, isto é, em alguma parte do intervalo devemos ter $f'' > 0$.

Vamos usar esse fato para obter essa desigualdade $\mathbf{G}_{ib}(x,x)-\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2 \geq 0$, vamos observar que existem os pontos a e b, onde a função é maior que zero e vamos mostrar que a segunda derivada é menor que zero, isso vai implicar que não existe nenhum $x \in (a,b)$ tal que $\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2 < 0$.

De fato, esse fenômeno ocorre pois já vimos na definição de cordas que 0 e l são sempre pontos de crescimento, assim, vale a desigualdade neles, isto é, $\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2 \geq 0$ para $x \in \{0,l\}$.

Vamos mostrar que $\left[\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2\right]'' < 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2\right]'' &= \left[A(x)D(x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2\right]'' \\
&= \Big(A(x)D(x)\Big)'' - \left(\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2\right)'' \\
= \Big(A'(x)D(x)+A(x)D'(x)\Big)' &- \left(2\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}\cdot(f_n(x))f_n'(x)\right)' \\
&= \Big(2A'(x)D'(x)+A''(x)D(x)+A(x)D''(x)\Big) \\
&-\left(2\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}\cdot\Big(f_n(x)f_n''(x)+(f_n'(x))^2\Big)\right)
\end{aligned}$$

Já vimos que num intervalo sem massa A e D são lineares, logo $A'' = D'' = 0$ nesses intervalos, além disso, como $f_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, para $x \in [a,b]$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= f_n(0) + f_n^-(0)x + \int_0^x dz \int_{0-}^{z} \mathfrak{G}f_n(s)dW(s) \\
&= f_n(0) + f_n^-(0)x + \int_0^a dz \int_{0-}^{z} \mathfrak{G}f_n(s)dW(s) + \int_a^x dz \int_{0-}^{z} \mathfrak{G}f_n(s)dW(s) \\
&= f_n(0) + f_n^-(0)x + C_1 + \int_a^x \left[\int_{0-}^{a} \mathfrak{G}f_n(s)dW(s) + \int_a^z \mathfrak{G}f_n(s)dW(s)\right]dz \\
&= f_n(0) + f_n^-(0)x + C_1 + \left[\int_{0-}^{a} \mathfrak{G}f_n(s)dW(s)\right]\int_a^x dz \\
&= f_n(0) + f_n^-(0)x + C_1 + C_2(x-a) \implies f_n(x) = \alpha x + \beta
\end{aligned}$$

Onde C_1, C_2, α, β são constantes, assim f_n é linear no intervalo sem massa e, portanto, $f_n''(x) = 0$

Juntando essas informações, isso implica:

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)^2\right]'' &= 2A'(x)D'(x) - \left(2\sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}\cdot(f_n'(x))^2\right) \\
&= 2\left(A'(x)D'(x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}\cdot(f_n'(x))^2\right) < 0
\end{aligned}$$

Pois $D' \leq 0$ e $A' \geq 0$.

Então, a desigualdade $\mathbf{G}_{ib}(x,x) - \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x)^2 \geq 0$ vale para todo $x \in [0,l]$, ou melhor, $\mathbf{G}_{ib}(x,x) \geq \sum_{n=1}^{N}(\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x)^2$.

Agora, podemos também afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x)^2 < \infty$ para $x \in [0,l]$, pois $\mathbf{G}_{ib}(x,x)$ está bem definido e vale a desigualdade anterior.

A desigualdade vale para $\mathbf{G}_{ib}(x,x)$, vamos mostrar que vale para $x, y \in [0,l]$, incluindo intervalos sem massa.

O Lema 5.2.2 da Desigualdade de Hölder, enunciado no próximo capítulo, aplicado para o espaço adequado, garante que $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)$ quando as séries a_k^2, b_k^2 são somáveis.

Aplicando esse resultado para $a_k = (\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_n(x)$ e $b_k = (\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_n(y)$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) f_k(y)\right|^2 &= \left[\sum_{k=1}^{\infty}\Big((\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_k(x)\Big)\Big((\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_k(y)\Big)\right]^2 \\
&\leq \left[\sum_{k=1}^{\infty}\Big((\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_k(x)\Big)^2\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Big((\gamma_k^2 + b^2)^{-1/2} f_k(y)\Big)^2\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x)^2\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(y)^2\right] < \infty
\end{aligned}$$

A princípio, isso ainda não é suficiente para concluir que a série $\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) f_k(y)$ converge, somente garante que ela é limitada.

Porém, vimos que $f_n \geq 0$, então, como a série é de termos positivos e limitada, ela converge.

Mais ainda, para x fixado, $\mathbf{G}_{ib}(x,y)$ é uma função em y e, calcula-se o produto interno abaixo:

$$\left\langle \mathbf{G}_{ib}(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) f_k(y), f_j(y) \right\rangle$$

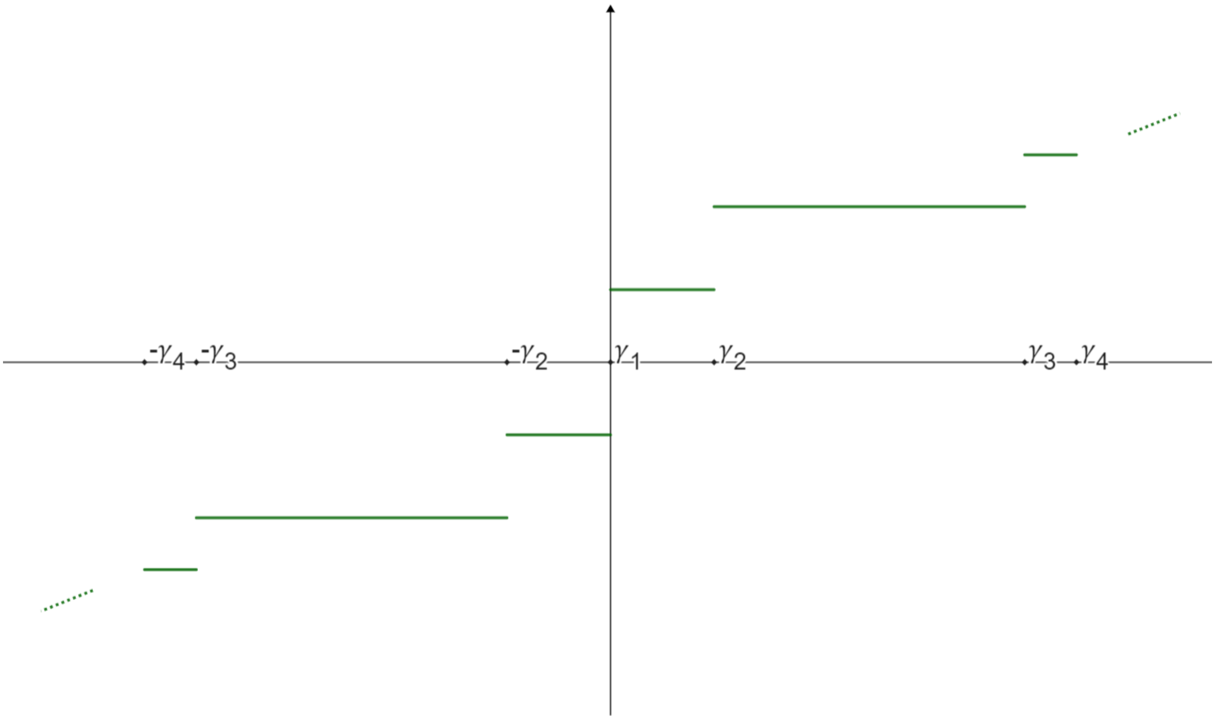
$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,l]} \Big(\mathbf{G}_{ib}(x,y) - \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) f_k(y)\Big) \cdot f_j(y)^* dW(y) \\
&= \int_{[0,l]} \mathbf{G}_{ib}(x,y) \cdot f_j(y)^* dW(y) - \int_{[0,l]} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) f_k(y)\Big) \cdot f_j(y)^* dW(y) \\
&= \int_{[0,l]} \mathbf{G}_{ib}(x,y) \cdot f_j(y)^* dW(y) - \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) \int_{[0,l]} f_k(y) \cdot f_j(y)^* dW(y) \\
&= \int_{[0,l]} \mathbf{G}_{ib}(x,y) \cdot f_j(y)^* dW(y) - \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^2 + b^2)^{-1} f_k(x) \langle f_k, f_j \rangle \ \text{, lembre que } f_j^* = f_j \\
&= \int_{[0,l]} \mathbf{G}_{ib}(x,y) \cdot f_j(y) dW(y) - (\gamma_j^2 + b^2)^{-1} f_j(x) = \mathbf{G}_{ib} f_j(x) - (\gamma_j^2 + b^2)^{-1} f_j(x) \\
&= (\gamma_j^2 + b^2)^{-1} f_j(x) - (\gamma_j^2 + b^2)^{-1} f_j(x) = 0
\end{aligned}$$

Portanto, vemos que $\mathbf{G}_{ib}(x,y) - \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y) = 0$ é perpendicular a todo f_j, daí, vale a igualdade em W, ou seja, nos pontos em que y está num intervalo sem massa, não é possível concluir a igualdade.

Então, temos a equação abaixo, quando x e y não estão no mesmo intervalo sem massa.

$$\mathbf{G}_{ib}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n^2 + b^2)^{-1} f_n(x) f_n(y) \tag{5.4}$$

Figura 10 – Exemplo de função Δ com 0 autovalor



Fonte: Produção do próprio autor.

Essa fórmula para $\mathbf{G}_{ib}$ se torna uma integral com a introdução da função ímpar não-decrescente Δ que salta $\frac{\pi}{2}\|A(x,\gamma_n)\| \cdot \|A(y,\gamma_n)\|$ em $-\gamma_n$ e em $+\gamma_n$, saltos de mesmo tamanho, como é uma função ímpar não-decrescente, em $-\gamma_n$ o salto é negativo, e em $+\gamma_n$ o salto é positivo.

Então, podemos escrever:

$$\mathbf{G}_{ib}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2 + b^2} d\Delta(\gamma)$$

Com a mesma ressalva do somatório da equação ((5.4)) de que x e y não podem estar no mesmo intervalo sem massa.

De fato, lembre-se que $f_n(x)$ é múltiplo de $A(x,\gamma_n)$ e também, f_n é unitária, então $f_n(x) = \dfrac{A(x,\gamma_n)}{\|A(x,\gamma_n)\|}$. Igualmente, $f_n(y) = \dfrac{A(y,\gamma_n)}{\|A(y,\gamma_n)\|}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int \frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma) &= \frac{1}{\pi}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{A(x,\gamma_n)A(y,\gamma_n)}{\gamma_n^2+b^2}\cdot\Delta[\gamma_n] \\
&\qquad + \frac{A(x,\gamma_n)A(y,\gamma_n)}{\gamma_n^2+b^2}\cdot\Delta[-\gamma_n]\Bigg)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\frac{A(x,\gamma_n)A(y,\gamma_n)}{\gamma_n^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{2\|A(x,\gamma_n)\|\cdot\|A(y,\gamma_n)\|} \\
&\qquad + \frac{A(x,\gamma_n)A(y,\gamma_n)}{\gamma_n^2+b^2}\cdot\frac{\pi}{2\|A(x,\gamma_n)\|\cdot\|A(y,\gamma_n)\|}\Bigg)\Bigg] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)f_n(y)}{\gamma_n^2+b^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n^2+b^2)^{-1}f_n(x)f_n(y) \\
&= \mathbf{G}_{ib}(x,y)
\end{aligned}$$

$\square$

5.2 Transformada

O objetivo desta seção é construir as transformadas "pares" e "ímpares", com base na mesma ideia da Transformada de Fourier que utiliza as funções *cos* e *sen*, como núcleo da transformada par e ímpar, respectivamente:

- *Transformada Par*

$$\hat{}_{cos} : f \to \hat{f_{cos}}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(x\gamma)f(x)dx$$

- *Transformada Ímpar*

$$\hat{}_{sen} : f \to \hat{f_{sen}}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} sen(x\gamma)f(x)dx$$

Com o auxílio da fórmula da função de Green vista na seção anterior (5.1), vamos demonstrar a existência das versões da Transformada "Par" e "Ímpar" para o caso geral, onde as funções $A(x,\gamma)$ e $B(x,\gamma)$ fazem o papel do cosseno e seno, como a seguir, onde $B(x,\gamma) = -\gamma^{-1}A^{+}(x,\gamma)$:

- *Transformada "Par"*

$$\hat{}_{par} : f \to \hat{f}_{par}(\gamma) = \int_{0-}^{l} A(x,\gamma)f(x)dW(x)$$

- *Transformada "Ímpar"*

$$\hat{}_{imp} : f \to \hat{f_{imp}}(\gamma) = \int_{0-}^{l} B(x,\gamma)f(x)dW(x)$$

Dizemos que as transformadas são "pares" e "ímpares" pela inspiração, mas não necessariamente valem as condições $A(x) = A(-x)$ e $B(x) = -B(-x)$ para toda função A e B, vai depender da função massa $W(x)$, o que valem são as condições que veremos de que a imagem da transformada "par" são as funções pares de $L^2(\mathbb{R}, d\Delta)$ e a imagem da transformada "ímpar" são as funções ímpares de $L^2(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Notação. Considere a classe de funções $L^2(\mathbb{R}, d\Delta)$, vamos denotar por:

- $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$ as funções pares de $L^2(\mathbb{R}, d\Delta)$, isto é, as funções $f \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$ com $f(x) = f(-x)$;
- $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$ as funções ímpares de $L^2(\mathbb{R}, d\Delta)$, isto é, as funções $f \in L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$ com $f(x) = -f(-x)$.

Considere a classe de funções $L^2([0, l+k], dx)$, vamos denotar por:

- $\mathbf{X} \subset L^2([0, l+k], dx)$ o conjunto das funções que satisfazem $\|f\|_x^2 = \int_0^{l+k} |f(x)|^2 dx < \infty$ e que são **constantes** em intervalos sem massa de W, mais precisamente $\mathbf{X} = \mathbf{X}_W$, pois depende da função massa.

Os resultados a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em (BARTLE, 2014), irão nos auxiliar na demonstração do Teorema 5.2.4.

Teorema 5.2.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam (f_n) de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e vale:*

$$\int f d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$$

Teorema 5.2.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Provemos a seguinte Proposição:

Proposição 5.2.3. *Seja $f \in L^2([0, l], dW)$, vale:*

$$\lim_{b\uparrow\infty} b^2 \mathbf{G}_{ib} f = f \ , \ \textit{em } L^2([0, l], dW) \ , \ \textit{ou seja,} \ \lim_{b\uparrow\infty} \|b^2 \mathbf{G}_{ib} f - f\|_W = 0$$

Demonstração. Inicialmente, vamos provar o resultado para $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ e usar a densidade para $L^2([0,l], dW)$.

Seja $f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$. Então está bem definido $\mathfrak{G}f$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned}
b^2\mathbf{G}_{ib}f - f &= b^2\mathbf{G}_{ib}f - \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G})f \text{ , pois } \mathbf{G}_{ib}(b^2 - \mathfrak{G}) = 1 \\
&= b^2\mathbf{G}_{ib}f - \mathbf{G}_{ib}(b^2 f) + \mathbf{G}_{ib}(\mathfrak{G}f) = b^2\mathbf{G}_{ib}f - b^2\mathbf{G}_{ib}f + \mathbf{G}_{ib}(\mathfrak{G}f) \\
&= \mathbf{G}_{ib}(\mathfrak{G}f)
\end{aligned}$$

Daí $\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| = \|\mathbf{G}_{ib}(\mathfrak{G}f)\|$.

Pela Afirmação 2. do Teorema 4.5.1, vale para toda $f \in L^2([0,l], dW)$ que $\|\mathbf{G}_{ib}f\| \leq b^{-2}\|f\|$, em particular, $\mathfrak{G}f \in L^2([0,l], dW)$, logo:

$$\begin{aligned}
\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| = \|\mathbf{G}_{ib}(\mathfrak{G}f)\| \leq b^{-2}\|\mathfrak{G}f\| \implies \\
\lim_{b\uparrow\infty} \|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| \leq \lim_{b\uparrow\infty} b^{-2}\|\mathfrak{G}f\| = 0 \text{ , pois } \|\mathfrak{G}f\| < \infty
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue para $f \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

Seja $f \in L^2([0,l], dW)$. Pela densidade de $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$, existe uma sequência de funções $f_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ tal que, dado um $\varepsilon > 0$ existe um certo índice fixo n_ε para o qual, se $n > n_\varepsilon \implies \|f_n - f\| < \varepsilon$.

Adicionando e subtraindo os termos $b^2\mathbf{G}_{ib}f_n$ e f_n obtemos:

$$\begin{aligned}
b^2\mathbf{G}_{ib}f - f &= b^2\mathbf{G}_{ib}f \pm b^2\mathbf{G}_{ib}f_n \pm f_n - f \\
&= b^2\mathbf{G}_{ib}f - b^2\mathbf{G}_{ib}f_n + b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n + f_n - f \implies \\
\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| &= \|b^2\mathbf{G}_{ib}f - b^2\mathbf{G}_{ib}f_n + b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n + f_n - f\| \implies \\
\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| &\leq \|b^2\mathbf{G}_{ib}f - b^2\mathbf{G}_{ib}f_n\| + \|b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \\
\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| &\leq \|b^2\mathbf{G}_{ib}(f - f_n)\| + \|b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n\| + \|f_n - f\|
\end{aligned}$$

Observe novamente que, pelo Teorema 4.5.1, $\|b^2\mathbf{G}_{ib}(f - f_n)\| \leq b^2 \cdot b^{-2}\|f - f_n\| = \|f - f_n\|$, então:

$$\|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| \leq \|f - f_n\| + \|b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n\| + \|f_n - f\| < \varepsilon + \|b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n\| + \varepsilon$$

Além disso, o resultado já vale para $f_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, então, passando o limite, obtemos:

$$\lim_{b\uparrow\infty} \|b^2\mathbf{G}_{ib}f - f\| \leq \lim_{b\uparrow\infty} \varepsilon + \|b^2\mathbf{G}_{ib}f_n - f_n\| + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon + \lim_{b\uparrow\infty} \|b^2 \mathbf{G}_{ib} f_n - f_n\| \leq 2\varepsilon$$

Tomando n grande o suficiente, podemos fazer ε tender a zero e assim, $\lim_{b\uparrow\infty} \|b^2\mathbf{G}_{ib} f - f\| = 0$.

$\square$

Seguimos com os teoremas das transformadas par e ímpar.

Teorema 5.2.4 (Transformada Par)**.**

A transformada "par"

$$\hat{}_{par} : f \to \hat{f}_{par}(\gamma) = \int_{0-}^{l} A(x,\gamma) f(x) dW(x) \tag{5.5}$$

é uma aplicação 1:1 com domínio em $L^2([0,l], dW)$ e imagem $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

A função original pode ser recuperada através da transformada inversa

$$\check{}_{par} : \hat{f}_{par} \to [\hat{f}_{par}]\check{}_{par}(x) = f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma) d\Delta(\gamma) \tag{5.6}$$

Ainda, vale a identidade de Plancherel:

$$\|f\|^2_W = \int_{0-}^{l} |f(x)|^2 dW(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_{par}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi}\|\hat{f}_{par}\|^2_\Delta$$

ou seja, a menos de um fator $\sqrt{\pi} f \to \hat{f}_{par}$ é um ***isomorfismo*** *entre $L^2([0,l], dW)$ e $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.*

Demonstração.

A Desigualdade de Hölder (Lema 5.2.2), garante a existência da integral.

De fato, $f \in L^2([0,l], dW)$ e $A(x,\gamma) \in \mathbf{D}_0(\mathfrak{G}) \subset L^2([0,l], dW)$, logo $A(x,\gamma)\cdot f(x) \in L^1$, isto é, $\int_{0-}^{l} A(x,\gamma) f(x) dW(x) < \infty$, então a transformada está bem definida.

Note que, pela Definição 4.2.1, $A(x,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n(x)$, por isso:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{par}(\gamma) &= \int_{0-}^{l} A(x,\gamma) f(x) dW(x) = \int_{0-}^{l} \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n(x)\Big) f(x) dW(x) \\
&= \int_{0-}^{l} \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-\gamma)^{2n}p_n(x)\Big) f(x) dW(x) = \int_{0-}^{l} A(x,-\gamma) f(x) dW(x)
\end{aligned}$$

$$= \hat{f}_{par}(-\gamma)$$

Portanto, a função $\hat{f}_{par}$ é par, justificando a notação.

Mais a frente, vamos demonstrar a identidade de Plancherel, $\|f\|_W^2 = \dfrac{1}{\pi}\|\hat{f}_{par}\|_\Delta^2$, e como $f \in L^2([0,l], dW)$, temos $\hat{f}_{par} \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Ainda resta a transformada inversa, a identidade de Plancherel e o isomorfismo.

Para a transformada inversa, vamos usar a Proposição 5.2.3 e a fórmula da Função de Green (5.1).

Relembre que a ação do Operador de Green, é o operador integral $\mathbf{G}_{ib}f(x) = \int_{0-}^{l} \mathbf{G}_{ib}(x,y)f(y)dW(y)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{ib}f(x) &= \int_{0-}^{l} \mathbf{G}_{ib}(x,y)f(y)dW(y) \\
&= \int_{0-}^{l} \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)A(y,\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\right] f(y)dW(y) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)}{\gamma^2+b^2}\left[\int_{0-}^{l} A(y,\gamma)f(y)dW(y)\right] d\Delta(\gamma) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)
\end{aligned}$$

De fato, pelo Teorema de Fubini 4.2.5 podemos trocar a ordem das integrais da segunda pra terceira linha.

Portanto, vale:

$$\mathbf{G}_{ib}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma) \tag{5.7}$$

Multiplicando a Equação ((5.7)) em ambos os lados por b^2 e aplicando o limite com $b \uparrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\uparrow\infty} b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) &= \lim_{b\uparrow\infty} b^2\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{b\uparrow\infty}\frac{b^2}{\gamma^2+b^2}\cdot A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)
\end{aligned}$$

Como $A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)$ é integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada 5.2.1, podemos trocar o limite com a integral.

Além disso, $\lim_{b\uparrow\infty}\dfrac{b^2}{\gamma^2+b^2} = 1$ e temos:

$$\lim_{b\uparrow\infty} b^2\mathbf{G}_{ib}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)$$

Por fim, pela Proposição 5.2.3, vale:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)$$

Agora, em vista de obter a identidade de Plancherel, observe que $\|f\|_W^2 = \langle f, f\rangle$ e usando a Proposição 5.2.3 temos $\|f\|_W^2 = \langle f, \lim_{b\uparrow\infty} b^2 \mathbf{G}_{ib} f\rangle = \lim_{b\uparrow\infty} b^2 \langle f, \mathbf{G}_{ib} f\rangle$

Isso motiva a encontrar $\langle f, \mathbf{G}_{ib} f\rangle$ e usando a Equação ((5.7)), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathbf{G}_{ib} f\rangle &= \int_{0-}^{l} f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\right]^* dW(x)\\
&= \int_{0-}^{l} f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(x,\gamma)\hat{f}_{par}(\gamma)^*}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\right] dW(x)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{f}_{par}(\gamma)^*}{\gamma^2+b^2}\left[\int_{0-}^{l} A(x,\gamma)f(x)dW(x)\right]d\Delta(\gamma)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{f}_{par}(\gamma)^*\cdot\hat{f}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{f}_{par}(\gamma)|^2}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)
\end{aligned}$$

Novamente, multiplicando por b^2 e fazendo $b\uparrow\infty$ segue:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\uparrow\infty} b^2\langle f, \mathbf{G}_{ib} f\rangle &= \lim_{b\uparrow\infty} b^2\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{f}_{par}(\gamma)|^2}{\gamma^2+b^2}d\Delta(\gamma)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{b\uparrow\infty}\frac{b^2}{\gamma^2+b^2}\cdot|\hat{f}_{par}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma)\\
\|f\|_W^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_{par}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi}\|\hat{f}_{par}\|_\Delta^2
\end{aligned}$$

Por fim, resta mostrar que existe um isomorfismo entre $L^2([0,l], dW)$ e $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

De fato, é um morfismo pois o operador envolvido tanto no morfismo original quanto na inversa é a integral, que é linear, preservando as operações dos espaços.

Pela existência da inversa, já podemos concluir que $\hat{}_{par}$ é uma injeção $L^2([0,l], dW) \to L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Vamos mostrar que é também sobrejeção.

Seja $g \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$. Queremos mostrar que g é a imagem pela transformada de alguma função em $L^2([0,l], dW)$.

Inspirado na transformada inversa, considere a função em $L^2([0,l], dW)$:

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)g(\gamma)d\Delta(\gamma) \tag{5.8}$$

A princípio, $\check{g}$ é apenas uma notação, não necessariamente, $\check{g}$ é a transformada inversa de g.

Como $\check{g} \in L^2([0,l], dW)$, podemos aplicar a transformada $\hat{\check{g}}$ que está em $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$ e, aplicando a transformada inversa, retornamos à função original, isto é:

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\pi} \int A(x,\gamma)\hat{\check{g}}(\gamma)d\Delta(\gamma) \tag{5.9}$$

Portanto, unindo as equações (5.8) e (5.9), temos:

$$\frac{1}{\pi} \int A(x,\gamma)g(\gamma)d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int A(x,\gamma)\hat{\check{g}}(\gamma)d\Delta(\gamma) \tag{5.10}$$

O objetivo é mostrar que $\hat{\check{g}} = g$, assim, mostramos que g é a imagem de uma função de $L^2([0,l], dW)$.

Na demonstração do Teorema da Função Espectral 5.1.5, vimos que a integral em $d\Delta$ na realidade se escreve como um somatório em enumeráveis pontos, onde $\Delta[\gamma]$ é o salto da função em γ, e podemos reescrever a equação (5.10) como abaixo:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A(x,\gamma_j)g(\gamma_j)\Delta[\gamma_j] = \sum_{j=1}^{\infty} A(x,\gamma_j)\hat{\check{g}}(\gamma_j)\Delta[\gamma_j] \tag{5.11}$$

Para concluir que $\hat{\check{g}} = g$, é necessário apenas a igualdade $\hat{\check{g}}(\gamma_j) = g(\gamma_j)$, $j \in \mathbb{N}$, pois é uma igualdade de funções em quase todo ponto e a função espectral só possui massa nesses pontos.

Observe que tanto a transformada, como a inversa, são lineares, assim, vamos realizar todo o processo para as funções truncadas.

Considere a função $g_k(y) = g(\gamma_k) \cdot 1_{\gamma_k}(y)$, onde $1_{\gamma_k}(y)$ é a função indicadora do ponto γ_k, relembre que γ_k é real então não há problema com definição.

Realizando o mesmo processo, inspirado na transformada inversa, obtemos $\check{g}_k$, para o qual vale uma versão da equação (5.11), mas nesse caso, se reduz para:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A(x,\gamma_j)g_k(\gamma_j)\Delta[\gamma_j] = \sum_{j=1}^{\infty} A(x,\gamma_j)\hat{\check{g}}_k(\gamma_j)\Delta[\gamma_j]$$
$$g_k(\gamma_k) = \hat{\check{g}}_k(\gamma_k)$$

Finalmente:

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(y) \implies \quad \text{, pela linearidade da transformada inversa}$$
$$\check{g}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \check{g}_j(y) \implies \quad \text{, pela linearidade da transformada}$$
$$\hat{\check{g}}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\check{g}}_j(y) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(y) = g(y) \text{ , pois } \hat{\check{g}}_j(y) = g_j(y)$$

Assim, concluímos que $g \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$ é a imagem de $\breve{g} \in L^2([0,l], dW)$, como g é qualquer, temos que a transformada é sobrejetiva também.

$\square$

Avançando o assunto, vamos falar sobre a transformada ímpar. Para a demonstração vamos precisar de um resultado preliminar de análise funcional, cuja demonstração pode ser encontrada em (OLIVEIRA, 2001), no **Corolário 18.8. ii.**, na página 130.

Lema 5.2.5. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se M é um subconjunto de $\mathcal{H}$, então*

$$\overline{Lin(M)} = \mathcal{H} \iff M^\perp = \{0\}$$

.

Onde $\overline{Lin(M)}$ é a notação para o fecho das combinações lineares finitas de elementos do subconjunto M.

Teorema 5.2.6 (Transformada Ímpar)**.**

A transformada "ímpar"

$$\hat{}_{imp} : f \to \hat{f_{imp}}(\gamma) = \int_0^{l+k} B(x,\gamma) f(x) dx \tag{5.12}$$

é uma aplicação 1:1 com domínio em $L^2([0,l], dW)$ e imagem $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

A função original pode ser recuperada através da transformada inversa

$$\check{}_{imp} : \hat{f_{imp}} \to [\hat{f_{imp}}\check{]}_{imp}(x) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int B(x,\gamma) \hat{f_{imp}}(\gamma) d\Delta(\gamma) \tag{5.13}$$

Ainda, vale a identidade de Plancherel:

$$\|f\|^2_X = \int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int |\hat{f_{imp}}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi} \|\hat{f_{imp}}\|^2_\Delta$$

*ou seja, a menos de um fator $\sqrt{\pi} f \to \hat{f_{imp}}$ é um **isomorfismo** entre $\mathbf{X}$ e $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.*

Demonstração. Para a demonstração desse teorema, a ideia é obter algumas relações com a transformada par, aproveitando que para essa transformada já demonstramos o resultado.

A prova será feita em várias etapas, vamos iniciar mostrando que a transformada ímpar $\hat{}_{imp}$ está bem definida e que vale a identidade de Plancherel.

Inicialmente observe que a transformada como integral está bem definida.

$$\begin{aligned}
\hat{f_{imp}}(\gamma) &= \int_{0-}^{l+k} B(x,\gamma) f(x) dx \\
&= \int_{0-}^{l+k} \frac{-A^+(x,\gamma)}{\gamma} f(x) dx = -\frac{1}{\gamma} \int_{0-}^{l+k} A^+(x,\gamma) f(x) dW(x)
\end{aligned}$$

$$\leq -\frac{1}{\gamma}\int_{0-}^{l+k} A^+(l,\gamma)f(x)dx \text{ , pois } A^+(x) \leq A^+(l),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$= -\frac{1}{\gamma}A^+(l,\gamma)\int_{0-}^{l+k} f(x)dx < \infty$$

De fato, como $W([0,l+k]) < \infty$ e $f \in L^2([0,l+k],dx)$, temos que f é integrável, isto é, $\int_{0-}^{l+k} |f(x)|dx < \infty$. Ainda, vimos nas propriedades de A, que a $A^+(l) < \infty$, daí se conclui $\hat{f_{imp}}(\gamma) < \infty$.

Vamos justificar a notação e mostrar que a transformada realmente é uma função ímpar de γ.

Por definição $B(x,\gamma) = \dfrac{-A^+(x,\gamma)}{\gamma}$, substituindo a fórmula para $A(x,\gamma)$ e derivando, obtemos:

$$A(x,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n(x) \implies A^+(x,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n^+(x) \implies$$
$$B(x,\gamma) = \frac{-A^+(x,\gamma)}{\gamma} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n^+(x)}{\gamma}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n-1}p_n^+(x)$$

Calculando $B(x,-\gamma)$ com essa fórmula:

$$B(x,-\gamma) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-\gamma)^{2n-1}p_n^+(x) \text{ , o expoente é ímpar, logo } (-\gamma)^{2n-1} = -\gamma^{2n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n-1}p_n^+(x) = -B(x,\gamma)$$

Podemos escrever $\hat{f_{imp}}(\gamma)$:

$$\hat{f_{imp}}(\gamma) = \int_{0-}^{l+k} B(x,\gamma)f(x)dx$$
$$= \int_{0-}^{l+k} -B(x,-\gamma)f(x)dx = -\int_{0-}^{l+k} B(x,-\gamma)f(x)dx = -\hat{f_{imp}}(-\gamma)$$

Então, vale que a função $\hat{f_{imp}}$ é ímpar, resta mostrar que está em $L^2_{imp}(\mathbb{R},d\Delta)$.

Prosseguindo, vamos mostrar que valem alguns resultados para um conjunto denso em $\mathbf{X}$, que é o conjunto das funções que estão em $L^2([0,l+k],dx)$ e que são constantes nos intervalos sem massa.

Afirmação 1. O conjunto $\Big(h^+ : h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\Big)$ é denso em $\mathbf{X}$.

Demonstração 1. Vamos usar o Lema 5.2.5 para provar que esse conjunto é denso. Note que $\mathbf{X}$ é um espaço de Hilbert, pois é um subespaço fechado de $L^2([0,l+k],dx)$. De fato, basta refletir que a soma de funções que pertencem a $L^2([0,l+k],dx)$ e são constantes em intervalos sem massa resultam em funções que estão em $L^2([0, l+k], dx)$, pois $L^2([0, l+k], dx)$ é um espaço fechado, e como ambas são constantes em intervalos sem massa, a soma também o é.

Denote o conjunto $\left(h^+ : h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\right)$ por B. É fácil verificar que $\mathrm{Lin}(B) = B$, isso ocorre pela linearidade da derivada e porque $h^-(0) = 0$ para $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

Assim, pelo Lema, $\overline{B} = \mathbf{X} \iff B^\perp = \{0\}$, e $\overline{B} = \mathbf{X}$ é equivalente a B é denso em $\mathbf{X}$. Portanto, para mostrar que $\left(h^+ : h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\right)$ é denso em $\mathbf{X}$, vamos verificar que $B^\perp = \{0\}$.

Seja $j \in \mathbf{X}$ perpendicular a toda função em B, isto é, $j \perp h^+$ para toda $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

O objetivo é concluir que $j \equiv 0$.

$$0 = \left\langle h^+, j \right\rangle_x = \int_0^{l+k} h^+(x) \cdot j^*(x)dx \tag{5.14}$$

Podemos escrever $h^+(x) = \int_{0-}^{x} \mathfrak{G}h(s)dW(s)$ e substituindo em (5.14):

$$0 = \left\langle h^+, j \right\rangle_x = \int_0^{l+k} h^+(x) \cdot j^*(x)dx = \int_0^{l+k} \left[\int_{0-}^{x} \mathfrak{G}h(s)dW(s) \right] \cdot j^*(x)dx$$

Pelo Teorema de Fubini 4.2.5 podemos trocar a ordem das integrais, e observando a Figura 8, obter:

$$\begin{aligned} \int_0^{l+k} \left[\int_{0-}^{x} \mathfrak{G}h(s)dW(s) \right] \cdot j^*(x)dx &= \int_{0-}^{l+k} \mathfrak{G}h(s) \left[\int_s^{l+k} j^*(x)dx \right] dW(s) \\ &= \int_{0-}^{l+k} \mathfrak{G}h(s) \left[\int_s^{l+k} j(x)dx \right]^* dW(s) \end{aligned}$$

Em resumo, $\int_{0-}^{l+k} \mathfrak{G}h(s) \left[\int_s^{l+k} j(x)dx \right]^* dW(s) = 0$ para toda $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

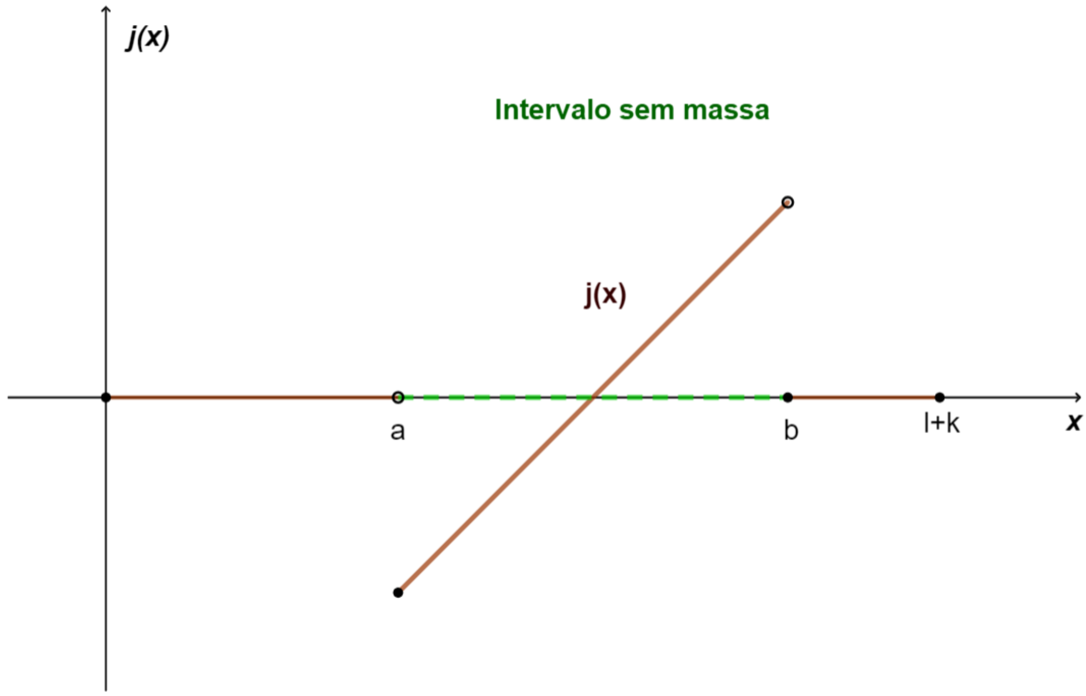
Logo, devemos ter $\left[\int_s^{l+k} j(x)dx \right]^* = 0 \implies \int_s^{l+k} j(x)dx = 0$ para todo s, com $0 \leq s \leq l+k$, exceto possivelmente em intervalos sem massa, onde mesmo o integrando não sendo nulo, a medida em W é.

Note que, se vale $\int_s^{l+k} j(x)dx = 0$ para todo s, com $0 \leq s \leq l+k$, podemos concluir que $j \equiv 0$.

De fato, é possível garantir que $\int_s^{l+k} j(x)dx = 0$ vale para $0 \leq s \leq l+k$ sem restrições pela maneira como o conjunto $\mathbf{X}$ é definido, j é constante em intervalos sem massa. Então casos como o da Figura 11, cuja integral seria nula, exceto em intervalos sem massa, não podem ocorrer.

Finalmente, podemos concluir que $j \equiv 0$, e por isso, $B^\perp = \{0\}$, i.e., $\left(h^+ : h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\right)$ é denso em $\mathbf{X}$.

Figura 11 – Exemplo de uma função j que **não** ocorre.



Fonte: Produção do próprio autor.

Afirmação 2. Vale $\|h^+\|_x^2 = \dfrac{1}{\pi}\|(\hat{h^+})_{imp}\|_\Delta^2$ para $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

Demonstração 2. No Lema 3.1.2, vimos que $\langle f, \mathfrak{G} f\rangle_W = -\int_0^{l+k} |f^+(x)|^2 dx$. Então, para $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, temos $\int_0^{l+k} |h^+(x)|^2 dx = -\langle h, \mathfrak{G} h\rangle_W$.

Ainda, usando a transformada inversa $h(x) = \dfrac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)$ e substituindo:

$$
\begin{aligned}
-\langle h, \mathfrak{G}h\rangle_W &= -\int_{0-}^{l} h(x)\Big[\mathfrak{G}h(x)\Big]^* dW(x)\\
&= -\int_{0-}^{l} h(x)\left[\mathfrak{G}\left(\frac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right)\right]^* dW(x)
\end{aligned}
$$

Lembre-se que $\mathfrak{G} = \dfrac{d}{dW}\dfrac{d}{dx}$, e como $h(x)$ e $\mathfrak{G}h(x)$ estão bem definidos, podemos derivar sob o sinal da integral (em relação a x) e obter:

$$
\begin{aligned}
-\langle h, \mathfrak{G}h\rangle_W &= -\int_{0-}^{l} h(x)\left[\mathfrak{G}\left(\frac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right)\right]^* dW(x)\\
&= -\int_{0-}^{l} h(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \Big[\mathfrak{G}A(x,\gamma)\Big]\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* dW(x)\\
&= -\int_{0-}^{l} h(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \Big[-\gamma^2 A(x,\gamma)\Big]\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* dW(x)\\
&= \int_{0-}^{l} h(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2 A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* dW(x)
\end{aligned}
$$

Em multilplicação de números complexos, vale a relação com o conjugado:

$$z_1 \cdot z_2^* = (z_1^* \cdot z_2)^*$$

Daí, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
-\langle h, \mathfrak{G}h\rangle_W &= \int_{0-}^{l} h(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2 A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* dW(x) \\
&= \left[\int_{0-}^{l} h^*(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2 A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]dW(x)\right]^*
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema de Fubini 4.2.5, troca-se a ordem das integrais e usando a relação novamente:

$$\begin{aligned}
-\langle h, \mathfrak{G}h\rangle_W &= \left[\int_{0-}^{l} h^*(x)\left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2 A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]dW(x)\right]^* \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2\left[\int_{0-}^{l} h^*(x)A(x,\gamma)dW(x)\right]\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2\left[\int_{0-}^{l} h(x)A^*(x,\gamma)dW(x)\right]^*\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^*
\end{aligned}$$

Observe que, pela linearidade e como $p_n(x) \in \mathbb{R}$, vale:

$$A(x,\gamma)^* = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma^{2n}p_n(x)\Big)^* = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\gamma^*)^{2n}p_n(x) = A(x,\gamma^*)$$

.

Além disso, γ varia em $\mathbb{R}$, logo $\gamma = \gamma^*$. Finalmente:

$$\begin{aligned}
-\langle h, \mathfrak{G}h\rangle_W &= \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2\left[\int_{0-}^{l} h(x)A^*(x,\gamma)dW(x)\right]^*\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2\left[\int_{0-}^{l} h(x)A(x,\gamma)dW(x)\right]^*\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2\left[\hat{h}_{par}\right]^*\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\right]^* = \left[\frac{1}{\pi}\int \gamma^2|\hat{h}_{par}(\gamma)|^2d\Delta(\gamma)\right]^* \\
&= \left[\frac{1}{\pi}\int |\gamma^2\hat{h}_{par}(\gamma)|^2d\Delta(\gamma)\right]^* = \frac{1}{\pi}\int |\gamma\hat{h}_{par}(\gamma)|^2d\Delta(\gamma)
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\|h^+\|_x^2 = \int_0^{l+k}|h^+(x)|^2dx = -\langle h, \mathfrak{G}h\rangle = \frac{1}{\pi}\int|\gamma^2\hat{h}_{par}(\gamma)|^2d\Delta(\gamma) = \frac{1}{\pi}\|\gamma\hat{h}_{par}\|_\Delta^2$$

A fim de obter a Identidade de Plancherel para a transformada ímpar, basta mostrar que $(\hat{h^+})_{imp} = -\gamma\hat{h}_{par}$.

Inicie com:

$$
\begin{aligned}
-\gamma^2 \hat{h}_{par}(\gamma) &= -\gamma^2 \int_{[0,l]} h(x)A(x,\gamma)dW(x) \\
&= \int_{[0,l]} h(x)\Big(-\gamma^2 A(x,\gamma)\Big)dW(x) \\
&= \int_{[0,l]} h(x)\mathfrak{G}A(x,\gamma)dW(x)
\end{aligned}
$$

Prosseguimos com a integral por partes:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dW}\Big(h(x)A^+(x)\Big) &= h(x)\frac{d}{dW}\Big(A^+(x)\Big) + \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x) \implies \\
h(x)\frac{d}{dW}\Big(A^+(x)\Big) &= \frac{d}{dW}\Big(h(x)A^+(x)\Big) - \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x) \implies \\
\int_{[0,l]} h(x)\mathfrak{G}A(x,\gamma)dW(x) &= h(x)A^+(x)\Big|_{0-}^{l} - \int_{0-}^{l} \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x) \\
&= h(l)A^+(l) - \int_{0-}^{l} \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x) \\
&\quad - h(0-)A^+(0-) \\
&= h(l)A^+(l) - \int_{0-}^{l} \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x)
\end{aligned}
$$

Na última igualdade, utilizamos a propriedade $A^+(0-) = 0$.

Temos também, $\frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big) = \frac{dx}{dW} \cdot \frac{d}{dx}\Big(h(x)\Big)$ e por isso, podemos reescrever:

$$
\begin{aligned}
\int_{0-}^{l} \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x) &= \int_{0-}^{l} \frac{dx}{dW} \cdot \frac{d}{dx}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x) \\
&= \int_{0-}^{l} h^+(x)A^+(x)\frac{dx}{dW} \cdot dW(x) = \int_{0-}^{l} h^+(x)A^+(x)dx \\
&= \int_{0}^{l} h^+(x)A^+(x)dx
\end{aligned}
$$

Em resumo:

$$
\begin{aligned}
-\gamma^2 \hat{h}_{par}(\gamma) &= \int_{[0,l]} h(x)\mathfrak{G}A(x,\gamma)dW(x) = h(l)A^+(l) - \int_{0-}^{l} \frac{d}{dW}\Big(h(x)\Big)A^+(x)dW(x) \\
&= h(l)A^+(l) - \int_{0}^{l} h^+(x)A^+(x)dx = h(l)A^+(l) - \frac{\gamma}{\gamma}\int_{0}^{l} h^+(x)A^+(x)dx \\
&= h(l)A^+(l) + \gamma\int_{0}^{l} h^+(x)\Big[-\frac{A^+(x)}{\gamma}\Big]dx \\
&= h(l)A^+(l) + \gamma\int_{0}^{l} h^+(x)B(x,\gamma)dx
\end{aligned}
$$

Para finalizar, vamos mostrar que para todo parâmetro k, $0 \leq k \leq \infty$, temos $h(l)A^+(l) = \gamma \int_l^{l+k} h^+(x)B(x,\gamma)dx$.

- $k = \infty$.

Nesse caso, por definição, $A^+(l) = 0 \implies B(x,\gamma) = 0$, para $l \leq x$ e isso implica $\gamma \int_l^{l+k} h^+(x)B(x,\gamma)dx = 0$.

Vale, portanto, $h(l)A^+(l) = 0 = \gamma \int_l^{l+k} h^+(x)B(x,\gamma)dx$.

- $k < \infty$.

  Relembre, $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, em particular, $h \in \mathbf{D}_+(\mathfrak{G})$, logo, h satisfaz $kh^+(l) + h(l) = 0 \implies h(l) = -kh^+(l)$.

  Além disso, $h, A \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$ e segue, para $l \leq x \leq l+k$, que $h^+(x) = h^+(l)$ e $A^+(x) = A^+(l)$. Daí:

$$\begin{aligned}\gamma \int_l^{l+k} h^+(x)B(x,\gamma)dx = \gamma \int_l^{l+k} h^+(l)B(l,\gamma)dx = \gamma B(l,\gamma)h^+(l)\int_l^{l+k} dx \\ = \gamma B(l,\gamma)kh^+(l) = \gamma\left[-\frac{A^+(l)}{\gamma}\right]kh^+(l) \\ = -A^+(l)kh^+(l) = h(l)A^+(l)\end{aligned}$$

Podemos concluir então, que

$$-\gamma^2\hat{h}_{par}(\gamma) = \gamma\int_0^{l+k} h^+(x)B(x,\gamma)dx = \gamma(\hat{h^+})_{imp} \implies (\hat{h^+})_{imp} = -\gamma\hat{h}_{par}$$

Por isso, vale $\|h^+\|_x^2 = \dfrac{1}{\pi}\|(\hat{h^+})_{imp}\|_\Delta^2$ para $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$.

Afirmação 3. Vale a Identidade de Plancherel $\|f\|_x^2 = \dfrac{1}{\pi}\|(\hat{f})_{imp}\|_\Delta^2$ para toda $f \in \mathbf{X}$.

Demonstração 3. Seja $f \in \mathbf{X}$, pela densidade provada na *Afirmação 1.*, existe uma sequência de (f_n), onde cada $f_n = h_n^+$, com $h_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, para as quais vale:

Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que $n \geq n_0 \implies \|f - f_n\|_x < \varepsilon$.

Ora,

$$\begin{aligned}&\|f\|_x = \|f - f_n + f_n\|_x \implies \\ &\|f_n\|_x - \|f - f_n\|_x \leq \|f\|_x \leq \|f_n\|_x + \|f - f_n\|_x \implies \\ &\Big|\|f\|_x - \|f_n\|_x\Big| \leq \|f - f_n\|_x < \varepsilon\end{aligned}$$

Já vimos que para f_n, vale Plancherel $\|f_n\|_x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta$, então:

$$\Big|\|f\|_x - \|f_n\|_x\Big| < \varepsilon \implies \left|\|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta\right| < \varepsilon \tag{5.15}$$

Queremos mostrar que $\left|\|f\|_x - \dfrac{1}{\pi}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta^2\right| = 0$ para toda $f \in \mathbf{X}$.

Escreva:

$$\left| \|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right| = \left| \|f\|_x \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right|$$
$$\leq \left| \|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right|$$

Assim, com vista a controlar a segunda parcela, vamos mostrar que $(\hat{f}_n)_{imp} \to \hat{f}_{imp}$.

$$\begin{aligned}\lim_n (\hat{f}_n)_{imp}(\gamma) &= \lim_n \int_0^{l+k} B(x,\gamma) f_n(x)dx \text{ , pelo Teorema da Convergência Dominada 5.2.1}\\ &= \int_0^{l+k} \lim_n \Big(B(x,\gamma)f_n(x)\Big)dx = \int_0^{l+k} B(x,\gamma)\lim_n \Big(f_n(x)\Big)dx\\ &= \int_0^{l+k} B(x,\gamma)f(x)dx = \hat{f}_{imp}(\gamma)\end{aligned}$$

Relembre que $\|f_n - f\|_x \to 0$ e $\|f\|_x < \infty$, então $\sup \|f_n\|_x < \infty$ e, por Plancherel, $\sup \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta < \infty \implies \sup \|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta < \infty$.

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada 5.2.1:

$$\begin{aligned}\lim_n \|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta^2 &= \lim_n \int |(\hat{f}_n)_{imp}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma) = \int \lim_n |(\hat{f}_n)_{imp}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma)\\ &= \int |\hat{f}_{imp}(\gamma)|^2 d\Delta(\gamma) = \|\hat{f}_{imp}\|_\Delta^2\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta \to \|\hat{f}_{imp}\|_\Delta. \tag{5.16}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, para n grande o suficiente, valem:

$$\left| \|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right| \leq \left| \|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right|$$
$$< \varepsilon + \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\|(\hat{f}_n)_{imp}\|_\Delta - \|\hat{f}_{imp}\|_\Delta\Big) \right| < 2\varepsilon \quad \Big(\text{Eq. (5.16) e (5.15)}\Big).$$

Daí, temos $\left| \|f\|_x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta \right| = 0$, isto é, $\|f\|_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|\hat{f}_{imp}\|_\Delta$ para toda $f \in \mathbf{X}$.

Afirmação 4. A transformada ímpar $\hat{}_{imp} : f \to \hat{f}_{imp}$ é uma aplicação sobrejetiva entre $\mathbf{X} \to L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Demonstração 4. Assim como em toda a demonstração, temos a ideia de associar os resultados da transformada par, que já estão demonstrados, para obter os da transformada ímpar.

Nosso objetivo será mostrar que o conjunto $S := \Big\{[(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp} \; ; \; h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\Big\}$, o conjunto das derivadas à direita da transformada ímpar de h, para cada $h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})$, é denso em $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Obtendo este conjunto **denso** e com a Identidade de Plancherel, é suficiente para concluirmos que a transformada ímpar é sobrejetiva.

Na *Afirmação 1.*, vimos que $(\hat{h^+})_{imp} = -\gamma \hat{h}_{par}$, daí $[(\hat{\mathbf{G}_i h})^+]_{imp} = -\gamma (\hat{\mathbf{G}_i h})_{par}$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{G}_i h})_{par}(\gamma) &= \int_{0-}^{l} A(x,\gamma)[(\mathbf{G}_i h)(x)]dW(x) \text{ , pela Eq. (5.7) podemos escrever}\\
&= \int_{0-}^{l} A(x,\gamma)\left[\frac{1}{\pi}\int \frac{A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1}\right]dW(x)\\
&= \int_{0-}^{l} A(x,\gamma)\left[\frac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)\left(\frac{\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1}\right)\right]dW(x) \text{ , } \frac{\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1} \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)\\
&= \int_{0-}^{l} A(x,\gamma)\left(\frac{\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1}\right)^{\check{}}_{par} dW(x)\\
&= \left[\left(\frac{\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1}\right)^{\check{}}_{par}\right]^{\hat{}}_{par} = \frac{\hat{h}_{par}(\gamma)}{\gamma^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Portanto, } [(\hat{\mathbf{G}_i h})^+]_{imp} = -\gamma (\hat{\mathbf{G}_i h})_{par} = \frac{-\gamma}{\gamma^2+1}\hat{h}_{par}(\gamma) \tag{5.17}
$$

Ora, na Proposição 3.1.1, foi provado que $\mathbf{D}(\mathfrak{G})$ é denso em $L^2([0,l], dW)$, e vimos anteriormente que a transformada par $\hat{}_{par}$ é $1:1$ e vale a identidade de Plancherel $\|f\|_W^2 = \frac{1}{\pi}\|\hat{f}_{par}\|_\Delta^2$.

Figura 12 – Diagrama da Transformada Par

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(\mathfrak{G}) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & L^2([0,l], dW) \arrow[d] \\
{[\mathbf{D}(\mathfrak{G})]\hat{}_{par}} \arrow[r, dashed] & L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)
\end{tikzcd}
$$

Fonte: Produção do próprio autor.

Por isso, podemos afirmar que o conjunto $[\mathbf{D}(\mathfrak{G})]\hat{}_{par}$ é denso em $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Defina a aplicação Truncamento em n da função f, $T_n(f)$ como:

$$T_n(f)(\gamma) = \begin{cases} 0 \text{ , se } -1/n < \gamma < 1/n \\ 0 \text{ , se } |\gamma| > n \\ f(\gamma) \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

Observe que $f \in L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta) \implies T_n(f) \in L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$. Realmente, $|T_n(f)| \leq |f| \implies T_n(f) \in L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$ e como os intervalos em que $T_n(f)$ se anula por definição são simétricos, se f é ímpar, $T_n(f)$ também é.

Ainda, para f_{imp} ímpar, vale:

$$T_n(f_{imp}) = \frac{-\gamma}{\gamma^2+1} \cdot T_n\left(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right) \tag{5.18}$$

Com exceção para $\gamma = 0$, onde $f_{imp}(0) = T_n(f_{imp})(0) = 0$, pois são funções ímpares, sendo assim, não existe problema com $\dfrac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}$.

Note que $T_n\left(\dfrac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right) \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$. De fato, $\dfrac{\gamma^2+1}{-\gamma}$ é ímpar, e multiplicação de funções ímpares, dá uma função par e vale:

$$\begin{aligned}
&\left|T_n\left(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right)\right| \leq \left|\frac{n^2+1}{-n} \cdot f_{imp}\right| \text{ e também} \\
&\left|T_n\left(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right)\right| \leq \left|\frac{(1/n)^2+1}{-(1/n)} \cdot f_{imp}\right| \implies \\
&\left|T_n\left(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right)\right| \leq max\left\{\frac{(1/n)^2+1}{(1/n)}, \frac{n^2+1}{n}\right\} \cdot |f_{imp}| \text{ e como } n \text{ é fixo, temos:} \\
&\left\|T_n\left(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\right)\right\| \leq \frac{n^2+1}{n} \cdot \|f_{imp}\| < \infty
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos provar a densidade do conjunto S. Seja $f_{imp} \in L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

$$\begin{aligned}
\|f_{imp} - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta &= \|f_{imp} \pm T_n(f_{imp}) - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta \\
&\leq \|f_{imp} - T_n(f_{imp})\|_\Delta + \|T_n(f_{imp}) - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta
\end{aligned}$$

Ora, o Truncamento $\|f_{imp} - T_n(f_{imp})\|_\Delta \to 0$. Por um lado f_{imp} é ímpar, não temos problema em um possível ponto com massa em 0, por outro lado, $f_{imp} \in L^2(\Delta)$, então $\int |f_{imp}|^2 d\Delta$ converge e basta tomar n grande o suficiente para que a cauda da integral seja menor que um $\varepsilon > 0$ dado.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\|f_{imp} - T_n(f_{imp})\|_\Delta < \varepsilon$

Para $\|T_n(f_{imp}) - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta$, vamos usar a densidade de $[\mathbf{D}(\mathfrak{G})\hat{]}_{par}$. Vimos na Equação (5.17) que $[(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp} = \dfrac{-\gamma}{\gamma^2+1}\hat{h}_{par}(\gamma)$ e na Equação (5.18) que $T_n(f_{imp}) =$

$\dfrac{-\gamma}{\gamma^2+1} \cdot T_n\bigg(\dfrac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg)$. Por isso:

$$\begin{aligned}\|T_n(f_{imp}) - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta &= \left\|\frac{-\gamma}{\gamma^2+1} \cdot T_n\bigg(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg) + \frac{\gamma}{\gamma^2+1}\hat{h}_{par}(\gamma)\right\|_\Delta \\ &= \left|\frac{\gamma}{\gamma^2+1}\right| \cdot \left\|\hat{h}_{par}(\gamma) - T_n\bigg(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg)\right\|_\Delta \\ &\leq \left\|\hat{h}_{par}(\gamma) - T_n\bigg(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg)\right\|_\Delta < \varepsilon\end{aligned}$$

Como $[\mathbf{D}(\mathfrak{G})\hat{]}_{par}$ é denso em $L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$ e $T_n\bigg(\dfrac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg) \in L^2_{par}(\mathbb{R}, d\Delta)$, vale

$$\left\|\hat{h}_{par}(\gamma) - T_n\bigg(\frac{\gamma^2+1}{-\gamma} \cdot f_{imp}\bigg)\right\|_\Delta < \varepsilon$$

.

Logo, $\|f_{imp} - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta \leq \|f_{imp} - T_n(f_{imp})\|_\Delta + \|T_n(f_{imp}) - [(\mathbf{G}_i h)^+\hat{]}_{imp}\|_\Delta < 2\varepsilon$

Afirmação 5. A transformada inversa ímpar $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\int B(x,\gamma)\hat{f_{imp}}(\gamma)d\Delta(\gamma)$ está bem definida.

Demonstração 5. É suficiente, mostrar que vale a a transformada inversa para um conjunto denso em $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$ e que leva em um conjunto denso em $\mathbf{X}$.

Novamente, utilizando a transformada inversa par, para a qual já sabemos a validade, vamos obter a transformada inversa ímpar nesse conjunto denso.

Considere o conjunto $\Big(h^+ \ ; \ h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\Big)$, já vimos que ele é denso em $\mathbf{X}$. Além disso, vale Plancherel (logo, vale a injetividade) e a sobrejetividade da transformada ímpar. Assim, conjunto $\Big((\hat{h^+})_{imp} \ ; \ h \in \mathbf{D}(\mathfrak{G})\Big)$ é denso em $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

Além disso, usando a Equação (5.13), calcula-se a transformada inversa de $(\hat{h^+})_{imp}$:

$$\begin{aligned}[(\hat{h^+})_{imp}\check{]}_{imp}(x) &= \frac{1}{\pi}\int B(x,\gamma)(\hat{h^+})_{imp}(\gamma)d\Delta(\gamma) \\ &= \frac{1}{\pi}\int \frac{A^+(x,\gamma)}{-\gamma}(\hat{h^+})_{imp}(\gamma)d\Delta(\gamma) \quad \textit{Afirm. 2.:} \quad (\hat{h^+})_{imp} = -\gamma\hat{h}_{par} \\ &= \frac{1}{\pi}\int \frac{A^+(x,\gamma)}{-\gamma}\Big(-\gamma\hat{h}_{par}(\gamma)\Big)d\Delta(\gamma) \\ &= \frac{1}{\pi}\int A^+(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma) \text{ , derivando em } x \text{ sob a integral} \\ &= \frac{d}{dx}\bigg(\frac{1}{\pi}\int A(x,\gamma)\hat{h}_{par}(\gamma)d\Delta(\gamma)\bigg) \text{ , vale a transformada inversa par} \\ &= \frac{d}{dx}\Big(h(x)\Big) = h^+(x)\end{aligned}$$

Portanto, vale a transformada inversa ímpar para um conjunto denso em $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$, o que implica que vale a transformada inversa para todo $L^2_{imp}(\mathbb{R}, d\Delta)$.

□

6 Conclusão

Nesta dissertação, buscamos consolidar o entendimento da teoria relacionada à generalização da equação do calor, focando especificamente na Teoria de Fourier no contexto do laplaciano generalizado. Ao estabelecer bases claras através da construção de uma base ortonormal de autofunções para o operador, similar à abordagem tradicional dos senos e cossenos para o laplaciano, avançamos em direção à trivialização desse operador, seguindo a linha de pesquisa apresentada em (DYM; MCKEAN, 1976a) e outros artigos relevantes (FELLER, 1955; FELLER, 1957).

A metodologia adotada se baseia na obtenção de soluções através da expansão em termos das autofunções do operador diferencial, o que nos permite determinar os coeficientes dessa expansão a partir da relação entre a função forçante e as autofunções. Essa abordagem teórica, embora menos aplicada, é fundamental para a compreensão aprofundada das propriedades do laplaciano generalizado.

Ao longo dos quatro capítulos interligados, exploramos desde as definições fundamentais até a construção da transformada generalizada que trivializa a solução desse laplaciano. Destacamos a importância das funções de Green como ferramenta crucial na resolução de equações diferenciais parciais e demonstramos sua utilidade na obtenção de soluções particulares e gerais. Além disso, abordamos a natureza do operador diferencial, sua auto-adjunção e não-positividade em seu domínio.

Este estudo não apenas contribui para a consolidação do conhecimento sobre a Transformada de Fourier do laplaciano generalizado, mas também prepara o terreno para investigações futuras, especialmente no caso do operador $\mathfrak{H} : f \to \dfrac{d^2}{dxdW}$, onde a ordem das derivações está trocada. Ao fortalecer nossa compreensão do primeiro caso ($dWdx$), estamos habilitados a explorar com mais solidez e de forma mais aprofundada as complexidades e nuances do segundo caso ($dxdW$). A compreensão aprofundada desses operadores diferenciais generalizados não apenas enriquece o conhecimento teórico, mas também abre novas perspectivas para aplicações práticas em uma variedade de campos, desde física e engenharia até finanças e ciência de dados. Assim, ao abordar essa questão de forma sistemática e rigorosa, esperamos contribuir significativamente para o avanço do conhecimento nessa área e inspirar futuras pesquisas.

Em suma, esta dissertação oferece uma contribuição significativa para a consolidação da teoria relacionada ao laplaciano generalizado. Espera-se que os resultados aqui apresentados inspirem novas investigações e aprofundem ainda mais nosso entendimento desses operadores diferenciais generalizados.

Referências

BARTLE, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley, 2014. (Wiley Classics Library). ISBN 9781118626122. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=aE1YBAAAQBAJ>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 37 e 73.

DYM, H.; MCKEAN, H. *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*. [S.l.]: Academic Press, 1976. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 64 e 91.

DYM, H.; MCKEAN, H. *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*. [S.l.]: Academic Press, 1976. Citado na página 34.

FELLER, W. *On Second Order Differential Operators*. [S.l.: s.n.], 1955. v. 61. 90–105 p. (Annals of Mathematics, v. 61). Citado 2 vezes nas páginas 12 e 91.

FELLER, W. *Generalized second order differential operators and their lateral conditions*. [S.l.: s.n.], 1957. v. 1. 459–504 p. (Illinois J. Math, v. 1). Citado 2 vezes nas páginas 12 e 91.

KIPNIS, C. L. C. *Green's Functions and Linear Differential Equations: Theory, Applications and Computation*. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300: [s.n.], 2011. Citado na página 60.

LIMA, E. *Curso de análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982. (Curso de análise, v. 1). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7OJUAAAAYAAJ>. Citado na página 37.

OLIVEIRA, C. D. *Introdução à análise funcional*. IMPA, 2001. (Publicações matemáticas). ISBN 9788524401862. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ov1UAAAAYAAJ>. Citado na página 79.

REED, M.; SIMON, B. *I: Functional Analysis*. Elsevier Science, 1981. (Methods of Modern Mathematical Physics). ISBN 9780080570488. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rpFTTjxOYpsC>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 65.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987. (Mathematics series). ISBN 9780071002769. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NmW7QgAACAAJ>. Citado na página 27.

SZÜCS, J.; WEIDMANN, J. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer New York, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9781461260271. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=vMvcBwAAQBAJ>. Citado na página 60.