Universidade Federal do Espírito Santo
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Soluções de Vórtice das Equações de Ginzburg-Landau

Olesya Galkina

Vitória

2014

Universidade Federal do Espírito Santo
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Olesya Galkina

Soluções de Vórtice das Equações de Ginzburg-Landau

Dissertação submetida como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo.

Orientador: Magno Branco Alves

Vítoria

2014

Olesya Galkina

Soluções de Vórtice das Equações de Ginzburg-Landau

Dissertação submetida como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Magno Branco Alves

Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador

Prof. Dr. Leonardo Magalhães Macarini

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara

Universidade Federal do Espírito Santo

Vítoria

2014

Resumo

Nesta dissertação estudamos um teorema de C.H. Taubes sobre soluções de vórtice das equações de Ginzburg-Landau, que descrevem a supercondutividade. Para provar o teorema, precisamos mostrar a existência da solução de uma equação diferencial parcial elíptica não-linear de segunda ordem. Para obter a existência da solução, estudamos um funcional não-linear definido num certo espaço de Sobolev, e detalhamos as contas do artigo de Taubes. Também incluímos dois capítulos auxiliares sobre fibrados em retas complexos e preliminares analíticos.

Palavras-chave: supercondutividade, equações diferencias elípticas, espaços fibrados, equações de Ginzburg-Landau.

Abstract

In this work we study a theorem of C.H. Taubes concerning vortex solution to the Ginzburg-Landau equations, which describe superconductivity. To prove the theorem we need to show the existence of a solution to a non-linear elliptic partial differential equation of second order. To obtain the existence of solution we study a non-linear functional defined on an appropriate Sobolev space. We also include two auxiliary chapters concerning complex line bundles and analytical preliminaries.

Key-words: superconductivity, elliptic differential equations, bundle spaces, Ginzburg-Landau equations.

Sumário

Capítulo 1

Line Bundles

1.1 Line Bundles

Um *line bundle* é uma tripla (L, M, π) formada por variedades L e M e uma projeção suave $\pi : L \to M$ tal que

1. Cada *fibra* $\pi^{-1}(m)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa 1;

2. Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$$

   tais que para todo ponto m em U_α temos que $\phi_\alpha(\pi^{-1}(m)) \subset \{m\} \times \mathbb{C}$ e a restrição

$$\phi_\alpha |_{\pi^{-1}(m)} : \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times \mathbb{C}$$

   é um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear.

A cobertura $\{U_\alpha\}$ é uma *cobertura trivializadora*.

Exemplo 1.1.1 (Line bundle trivial)**.** Considere uma variedade M. O *line bundle trivial* é o produto $L = M \times \mathbb{C}$ com a projeção $\pi : L \to M$ dada por

$$\pi(m, z) = m.$$

Vamos mostrar que $\pi : L \to M$ é um line bundle.

1. Temos que $\pi^{-1}(m) = \{m\} \times \mathbb{C}$. Podemos ver que $\pi^{-1}(m)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa 1 com as operações

$$(m, z) + (m, w) = (m, z + w),$$

e

$$\alpha (m, z) = (m, \alpha z),$$

onde z, w e α são números complexos.

2. Temos que $\{M\}$ é uma cobertura aberta de M. Além disso, a aplicação identidade

$$Id : L \to M \times \mathbb{C}$$

satisfaz $Id(\pi^{-1}(m)) = \{m\} \times \mathbb{C}$, e portanto

$$Id|_{\pi^{-1}(m)} : \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times \mathbb{C}$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear.

Considere um line bundle $\pi : L \to M$. Uma aplicação $s : U \subset M \to L$ é uma *seção local* se para todo ponto m em U, temos que $s(m)$ está em $\pi^{-1}(m)$, ou seja,

$$\pi \circ s = Id_U.$$

Quando $U = M$, dizemos que s é uma *seção global.*

Exemplo 1.1.2 (Seções do line bundle trivial)**.** Considere o line bundle trivial $L = M \times \mathbb{C}$. Para toda função $f : M \to \mathbb{C}$, temos que a aplicação $s : M \to L$ dada por $s(m) = (m, f(m))$ é uma seção global. Reciprocamente, para toda seção global $s : M \to L$, temos que $s(m)$ está em $\{m\} \times \mathbb{C}$, portanto existe uma função $f : M \to \mathbb{C}$ tal que $s(m) = (m, f(m))$.

Proposição 1.1.3. *Considere variedades L e M e uma projeção $\pi : L \to M$, suponha que vale a condição 1 da definição de line bundle. Temos que $\pi : L \to M$ é um line bundle se e somente se existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam.*

Demonstração. Suponha que $\pi : L \to M$ é um line bundle. Tome uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M e difeomorfismos

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$$

tais que para todo ponto m em U_α temos que $\phi_\alpha(\pi^{-1}(m)) \subset \{m\} \times \mathbb{C}$ e a restrição

$$\phi_\alpha \mid_{\pi^{-1}(m)} : \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times \mathbb{C}$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear. Para cada α, definimos a seção local $s_\alpha : U_\alpha \to L$ por

$$s_\alpha(m) = \phi_\alpha^{-1}(m, 1).$$

Temos que $s_\alpha(m) \neq 0$ para todo m em U_α.

Reciprocamente, suponha que existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Definimos a aplicação

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$$

por

$$\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(z) = \left(m, \frac{z}{s_\alpha(m)}\right) \tag{1.1}$$

para cada $\pi^{-1}(m)$ em $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Aqui usamos que $\pi^{-1}(m)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa 1 e s_α não se anula. Temos que a inversa é

$$\phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C} \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

dada por

$$\phi_\alpha^{-1}(m, \lambda) = \lambda s_\alpha(m).$$

De fato, (1) Dado um z em $\pi^{-1}(U_\alpha)$, temos que z está $\pi^{-1}(m)$ para algum

m em U_α, portanto

$$
\begin{aligned}
\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha(z) &= \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(z) \\
&= \phi_\alpha^{-1}\left(m, \frac{z}{s_\alpha(m)}\right) \\
&= \frac{z}{s_\alpha(m)} s_\alpha(m) \\
&= z;
\end{aligned}
$$

(2) Dado um (m, λ) em $U_\alpha \times \mathbb{C}$, temos que $\lambda s_\alpha(m)$ está em $\pi^{-1}(m)$, portanto

$$
\begin{aligned}
\phi_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}(m, \lambda) &= \phi_\alpha(\lambda s_\alpha(m)) \\
&= \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(\lambda s_\alpha(m)) \\
&= \left(m, \frac{\lambda s_\alpha(m)}{s_\alpha(m)}\right) \\
&= (m, \lambda).
\end{aligned}
$$

A Equação (1.1) mostra que $\phi_\alpha(\pi^{-1}(m)) \subset \{m\} \times \mathbb{C}$ e

$$
\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(z + w) = \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(z) + \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(w),
$$

$$
\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(zw) = \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(z)\, \phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)}(w),
$$

portanto

$$
\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(m)} \colon \pi^{-1}(m) \to \{m\} \times \mathbb{C}
$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear. □

Exemplo 1.1.4 (Fibrado tangente da esfera)**.** Lembre que a esfera $\mathbb{S}^2$ é definida como o conjunto dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$
x^2 + y^2 + z^2 = 1.
$$

Podemos ver que o espaço tangente no ponto p em $\mathbb{S}^2$ é dado por

$$
T_p\mathbb{S}^2 = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : \langle p, v\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0\right\}.
$$

Lembre que o fibrado tangente à esfera $\mathbb{S}^2$ é definido como

$$T\mathbb{S}^2 = \bigcup_{p\in\mathbb{S}^2} \left(\{p\} \times T_p\mathbb{S}^2\right).$$

Considere a projeção $\pi : T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por

$$\pi(p, v) = p.$$

Vamos mostrar que $\pi : T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ é um line bundle. Temos que $\pi^{-1}(p) = T_p\mathbb{S}^2$ é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa 1 com as operações

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w),$$

e

$$(\alpha + i\beta)(p, v) = (p, \alpha v + \beta n_p \times v),$$

onde n_p é o vetor normal unitário no ponto p. Observe que iv é uma rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ dada por

$$iv = n_p \times v.$$

Vamos, por exemplo, mostrar que

$$[(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta)] v = (\alpha + i\beta)[(\gamma + i\delta) v].$$

Temos que

$$\begin{aligned}[(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta)] v &= [\alpha\gamma - \beta\delta + i(\alpha\delta + \beta\gamma)] v \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) v + (\alpha\delta + \beta\gamma) n_p \times v.\end{aligned}$$

Na esfera $\mathbb{S}^2$, temos que

$$\begin{aligned} i(iv) &= i(n_p \times v) \\ &= n_p \times (n_p \times v) \\ &= -v,\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}(\alpha+i\beta)\left[(\gamma+i\delta)\,v\right] &= (\alpha+i\beta)\,(\gamma v+\delta n_p\times v)\\ &= \alpha\,(\gamma v+\delta n_p\times v)+\beta n_p\times(\gamma v+\delta n_p\times v)\\ &= (a\gamma-\beta\delta)\,v+(a\delta+\beta\gamma)\,n_p\times v,\end{aligned}$$

logo

$$\left[(\alpha+i\beta)\,(\gamma+i\delta)\right]v=(\alpha+i\beta)\left[(\gamma+i\delta)\,v\right].$$

É possível verificar que as demais propriedades de espaço vetorial complexo valem em $\pi^{-1}(p)$.

É fácil ver que as seções de $T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ são os campos de vetores na esfera $\mathbb{S}^2$. Podemos obter campos de vetores na esfera que localmente não se anulam. Isto pode feito, por exemplo, usando coordenadas polares. Pela Proposição 1.1.3, concluímos que $T\mathbb{S}^2$ é um line bundle.

Exemplo 1.1.5 (Fibrado de Hopf)**.** A reta projetiva complexa $\mathbb{C}P^1$ é definida como o espaço $\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ com a relação de equivalência $\sim$, definida por $(z_1,z_2)\sim(w_1,w_2)$ se existe λ em $\mathbb{C}^*$ tal que

$$\begin{aligned}w_1&=\lambda z_1,\\ w_2&=\lambda z_2.\end{aligned}$$

A classe de (z_1,z_2) é denotada por $[z_1,z_2]$. Vamos mostrar que $\mathbb{C}P^1$ é uma variedade complexa de dimensão complexa 1. Definimos os conjuntos abertos

$$U_1=\left\{[z_1,z_2]\in\mathbb{C}P^1 : z_1\neq 0\right\},$$

$$U_2=\left\{[z_1,z_2]\in\mathbb{C}P^1 : z_2\neq 0\right\},$$

e definimos dois difeomorfismos $\psi_1 : U_1\to\mathbb{C}$ e $\psi_2 : U_2\to\mathbb{C}$ dados por

$$\psi_1\left([z_1,z_2]\right)=\frac{z_2}{z_1},$$

$$\psi_2\left([z_1,z_2]\right)=\frac{z_1}{z_2}.$$

Repare que

$$\psi_1 (U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*,$$

$$\psi_2 (U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*,$$

e

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\mathbb{C}P^1$ é variedade complexa de dimensão complexa 1. O fibrado de Hopf H é definido por

$$H = \left\{ (z, [z]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 : z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}.$$

Podemos ver que o fibrado de Hopf H é uma variedade complexa de dimensão complexa 2. Definimos a projeção $\pi : H \to \mathbb{C}P^1$ dada por $\pi (z, [z]) = [z]$. Vamos mostrar que $\pi : H \to \mathbb{C}P^1$ é um line bundle. Temos que a fibra $\pi^{-1} ([z])$ é dada por

$$\pi^{-1} ([z]) = \{ (\lambda z, [z]) : \lambda \in \mathbb{C}^* \}.$$

Podemos ver que $\pi^{-1} ([z])$ é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa 1 com as operações

$$(\lambda z, [z]) + (\mu z, [z]) = ((\lambda + \mu) z, [z]),$$

$$\lambda (\mu z, [z]) = ((\lambda \mu) z, [z]).$$

Definimos as seções locais $s_1 : U_1 \to H$ e $s_2 : U_2 \to H$ dadas por

$$s_1 ([z_1, z_2]) = \left(\left(1, \frac{z_2}{z_1} \right), [z_1, z_2] \right),$$

$$s_2 ([z_1, z_2]) = \left(\left(\frac{z_1}{z_2}, 1 \right), [z_1, z_2] \right).$$

Temos que as seções locais s_1 e s_2 não se anulam. Pela Proposição 1.1.3, concluímos que H é um line bundle sobre $\mathbb{C}P^1$.

Considere um line bundle $\pi : L \to M$ com uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M. Pela Proposição 1.1.3, podemos tomar seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Em $U_\alpha \cap U_\beta$ escreva

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta.$$

As funções $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ são as *funções de transição* de s_α.

Exemplo 1.1.6 (Funções de transição do fibrado de Hopf)**.** Lembre que o fibrado de Hopf é dado por

$$H = \left\{(z, [z]) : z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\},$$

com a projeção $\pi : H \to \mathbb{C}P^1$ dada por

$$\pi\left(z, [z]\right) = [z],$$

onde $[z] = \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Considere os conjuntos abertos

$$U_1 = \left\{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1 : z_1 \neq 0\right\},$$

e

$$U_2 = \left\{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1 : z_2 \neq 0\right\},$$

e as seções $s_1 : U_1 \to H$ e $s_2 : U_2 \to H$ dadas por

$$s_1\left([z_1, z_2]\right) = \left(\left(1, \frac{z_2}{z_1}\right), [z_1, z_2]\right),$$

$$s_2\left([z_1, z_2]\right) = \left(\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right), [z_1, z_2]\right).$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
s_1([z_1, z_2]) &= \left(\frac{z_2}{z_1}\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right), [z_1, z_2]\right) \\
&= \frac{z_2}{z_1}\left(\left(\frac{z_1}{z_2}, 1\right), [z_1, z_2]\right) \\
&= \frac{z_2}{z_1} s_2([z_1, z_2]) .
\end{aligned}
$$

Obtemos a função de transição $g_{12} : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{C}^*$ dada por

$$
g_{12}([z_1, z_2]) = \frac{z_2}{z_1}.
$$

Proposição 1.1.7. *Considere um line bundle $\pi : L \to M$ com uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Considere uma seção global $\xi : M \to L$ e escreva*

$$
\begin{aligned}
\xi \mid_{U_\alpha} &= \xi_\alpha s_\alpha, \\
\xi \mid_{U_\beta} &= \xi_\beta s_\beta
\end{aligned}
$$

em $U_\alpha \cap U_\beta$. Temos que

$$
\xi_\beta = g_{\alpha\beta} \xi_\alpha,
$$

onde $g_{\alpha\beta}$ são as funções de transição de s_α.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\xi_\beta s_\beta &= \xi \mid_{U_\alpha \cap U_\beta} \\
&= \xi_\alpha s_\alpha \\
&= \xi_\alpha g_{\alpha\beta} s_\beta .
\end{aligned}
$$

Dividindo os dois lados por s_β, obtemos

$$
\xi_\beta = \xi_\alpha g_{\alpha\beta}.
$$

□

Proposição 1.1.8. *Considere um line bundle $\pi : L \to M$ com uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Denote por $g_{\alpha\beta}$ as funções de transição de s_α. Temos que*

1. *$g_{\alpha\alpha} = 1$ em U_α;*

2. *$g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1$ em $U_\alpha \cap U_\beta$ (se não vazio);*

3. *$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (se não vazio).*

Demonstração. 1. Temos que $s_\alpha = g_{\alpha\alpha}s_\alpha$. Por outro lado, temos que $s_\alpha = 1 \cdot s_\alpha$. Portanto $g_{\alpha\alpha} = 1$.

2. Temos que

$$\begin{aligned} s_\alpha &= g_{\alpha\beta}s_\beta \\ &= g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}s_\alpha. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $s_\alpha = 1 \cdot s_\alpha$. Portanto $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1$.

3. Temos que

$$\begin{aligned} s_\alpha &= g_{\alpha\beta}s_\beta \\ &= g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}s_\gamma \\ &= g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}s_\alpha. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que$s_\alpha = 1 \cdot s_\alpha$. Portanto $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$. □

Observação 1.1.9. É conhecido que dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade M, se existem funções $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ satisfazendo as condições 1, 2 e 3 da Proposição 1.1.8, então existe, a menos de isomorfismo, um line bundle $L \to M$ e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam tais que

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$$

em $U_\alpha \cap U_\beta$ [8, p. 5].

1.2 Conexões e Curvatura

Uma *conexão* ∇ num line bundle $L \to M$ é uma aplicação linear $\nabla : \Gamma(L) \to \Gamma(T^*M \otimes L)$ tal que para toda seção $s : M \to L$ e função $f : M \to \mathbb{C}$ vale a *regra de Leibniz*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Em outras palavras, uma conexão ∇ num line bundle $L \to M$ é uma aplicação que associa cada seção $s : M \to L$ e campo de vetores X em M com uma seção $\nabla_X s : M \to L$, e tal que

1. Para uma seção $s : M \to L$ e campos de vetores X_1 e X_2 em M, temos que
$$\nabla_{X_1+X_2} s = \nabla_{X_1} s + \nabla_{X_2} s;$$
2. Para uma seção $s : M \to L$, um campo de vetores X em M e uma função $f : M \to \mathbb{C}$, temos que
$$\nabla_{fX} s = f\nabla_X s;$$
3. Para seções $s_1, s_2 : M \to L$ e um campo de vetores X em M, temos que
$$\nabla_X (s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2;$$
4. Para uma seção $s : M \to L$, uma função $f : M \to \mathbb{C}$ e um campo de vetores X em M, temos que
$$\nabla_X (fs) = df(X)\, s + f\nabla_X s.$$

Exemplo 1.2.1 (Conexão do line bundle trivial)**.** Considere o line bundle trivial $L = M \times \mathbb{C}$. Lembre que as seções em $L \to M$ são da forma

$$s(m) = (m, f(m)),$$

onde $f : M \to \mathbb{C}$. Podemos definir a conexão ∇ dada por

$$\nabla s = df.$$

Mais precisamente,

$$(\nabla_X s)(m) = (m, df_m(X_m)).$$

Vamos mostrar que ∇ é uma conexão em $L \to M$. Tome duas seções

$$s_1(m) = (m, f(m)),$$

e

$$s_2(m) = (m, h(m)),$$

e uma função $\phi : M \to \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned}(\nabla_X (s_1 + s_2))(m) &= (m, d(f+h)_m(X_m)) \\ &= (m, df_m(X_m) + dh_m(X_m)) \\ &= (m, df_m(X_m)) + (m, dh_m(X_m)) \\ &= (\nabla_X s_1)(m) + (\nabla_X s_2)(m).\end{aligned}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned}(\nabla_X (\phi s_1))(m) &= (m, d(\phi f)_m(X_m)) \\ &= (m, \phi(m)\, df_m(X_m) + f(m)\, d\phi_m(X_m)) \\ &= \phi(m)(m, df_m(X_m)) + d\phi_m(X_m)(m, f(m)) \\ &= d\phi_m(X_m)\, s_1(m) + \phi(m)(\nabla_X s_1)(m).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2,$$

$$\nabla(\phi s_1) = d\phi \otimes s_1 + \phi \nabla s_1.$$

Proposição 1.2.2. *[8, p. 8] Considere um line bundle $\pi : L \to M$ com uma conexão ∇. Considere uma seção local $s : U \subset M \to L$. Para quaisquer extensões $\tilde{s} : M \to L$ e $\bar{s} : M \to L$ de s, temos que*

$$\nabla\tilde{s}|_U = \nabla\bar{s}|_U.$$

Portanto podemos definir

$$\nabla s = \nabla\tilde{s}|_U.$$

Considere um line bundle $L \to M$ com uma conexão ∇, uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Para cada α, existe uma única 1-forma A_α em U_α tal que

$$\nabla s_\alpha = A_\alpha \otimes s_\alpha.$$

Mais precisamente,

$$(\nabla_X s_\alpha)(m) = (A_\alpha)_m (X_m)\, s_\alpha(m).$$

As 1-formas A_α são chamadas *1-formas de conexão* de s_α.

Observe que a definição é justificada pela proposição acima.

Proposição 1.2.3. *Considere um line bundle $L \to M$ com uma conexão ∇, uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Temos que*

$$A_\alpha = A_\beta + \overset{-1}{g_{\alpha\beta}} dg_{\alpha\beta},$$

onde $g_{\alpha\beta}$ são as funções de transição de s_α e A_α são as 1-formas de conexão de s_α.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\nabla s_\alpha &= \nabla(g_{\alpha\beta}s_\beta) \\
&= dg_{\alpha\beta} \otimes s_\beta + g_{\alpha\beta}\nabla s_\beta \\
&= dg_{\alpha\beta} \otimes s_\beta + g_{\alpha\beta}A_\beta \otimes s_\beta \\
&= (dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}A_\beta) \otimes s_\beta.
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}\nabla s_\alpha &= A_\alpha \otimes s_\alpha \\ &= g_{\alpha\beta} A_\alpha \otimes s_\beta.\end{aligned}$$

Portanto

$$g_{\alpha\beta} A_\alpha = dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} A_\beta.$$

Multiplicando ambos lados por $g_{\alpha\beta}^{-1}$, obtemos

$$A_\alpha = A_\beta + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}.$$

□

Proposição 1.2.4. *Considere um line bundle $L \to M$ com uma conexão ∇, uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Existe uma 2-forma F_∇ em M tal que*

$$F_\nabla|_{U_\alpha} = dA_\alpha,$$

onde A_α são as 1-formas de conexão de s_α.

A 2-forma F_∇ é a *curvatura* da conexão ∇.

Demonstração. Basta mostrar que $dA_\alpha = dA_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. Temos que

$$\begin{aligned}dA_\alpha &= d\left(A_\beta + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}\right) \\ &= dA_\beta - g_{\alpha\beta}^{-2} dg_{\alpha\beta} \wedge dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} d\left(dg_{\alpha\beta}\right) \\ &= dA_\beta.\end{aligned}$$

Acima usamos o fato que $d^2 = 0$ e $\omega \wedge \omega = 0$ para toda 1-forma ω. □

Proposição 1.2.5. *Considere um line bundle $L \to M$ com conexões ∇ e ∇'. Existe uma 1-forma η em M tal que*

$$\nabla' s = \nabla s + \eta \otimes s,$$

$$F_{\nabla'} = F_{\nabla} + d\eta.$$

Demonstração. Tome uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M e seções $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam. Podemos escrever

$$\nabla s_\alpha = A_\alpha \otimes s_\alpha,$$

$$\nabla' s_\alpha = A'_\alpha \otimes s_\alpha.$$

Definimos a 1-forma η em U_α por

$$\eta_\alpha = A'_\alpha - A_\alpha.$$

Vamos mostrar que em $U_\alpha \cap U_\beta$ vale $\eta_\alpha = \eta_\beta$. Denote por $g_{\alpha\beta}$ as funções de transição de s_α. Temos que

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha &= A'_\alpha - A_\alpha \\
&= \left(A'_\beta + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}\right) - \left(A_\beta + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}\right) \\
&= A'_\beta - A_\beta \\
&= \eta_\beta.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\nabla' s_\alpha &= A'_\alpha \otimes s \\
&= (A_\alpha + \eta_\alpha) \otimes s_\alpha,
\end{aligned}$$

logo

$$\nabla' s = \nabla s + \eta \otimes s.$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
F_{\nabla'} &= dA'_\alpha \\
&= dA_\alpha + d\eta_\alpha \\
&= F_{\nabla} + d\eta.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.6. *Considere um line bundle $L \to M$ com uma conexão ∇. Suponha que existe uma seção $\xi : M \to L$ que não se anula e tal que*

$$\nabla \xi = 0.$$

Temos que a curvatura da conexão é zero, ou seja

$$F_{\nabla} = 0.$$

Demonstração. Tome uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$ de M e seções locais $s_\alpha : U_\alpha \to L$ que não se anulam, e escreva

$$\xi|_{U_\alpha} = \xi_\alpha s_\alpha.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \nabla \xi|_{U_\alpha} &= \nabla \left(\xi_\alpha s_\alpha\right) \\ &= d\xi_\alpha \otimes s_\alpha + \xi_\alpha \nabla s_\alpha \\ &= d\xi_\alpha \otimes s_\alpha + \xi_\alpha A_\alpha \otimes s_\alpha \\ &= \left(d\xi_\alpha + \xi_\alpha A_\alpha\right) \otimes s_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\nabla \xi = 0$, temos que

$$\xi_\alpha A_\alpha = -d\xi_\alpha,$$

logo

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -\frac{d\xi_\alpha}{\xi_\alpha} \\ &= d\left(\ln \xi_\alpha\right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} F_\nabla &= ddA_\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

1.3 Classes de Chern

Teorema 1.3.1. *[8, p. 12] Considere um line bundle $L \to \Sigma$ sobre uma superfície compacta sem bordo Σ com uma conexão ∇. Temos que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma F_\nabla$$

é um inteiro que não depende de ∇.

O número $c_1(L) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma F_\nabla$ é a *classe de Chern.*

Exemplo 1.3.2. Considere o line bundle trivial $L = \Sigma \times \mathbb{C}$ sobre uma superfície compacta Σ. Sabemos que

$$\nabla = d$$

é uma conexão em $L \to \Sigma$. Sabemos que a curvatura F_∇ é nula. Portanto a classe de Chern é dada por

$$\begin{aligned} c_1(\Sigma \times \mathbb{C}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma F_\nabla \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.3. Considere o line bundle $T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Lembre que as coordenadas esféricas de $\mathbb{S}^2$ são

$$\begin{cases} x(\theta,\phi) = \sin\phi\cos\theta \\ y(\theta,\phi) = \sin\phi\sin\theta \\ z(\theta,\phi) = \cos\phi \end{cases}.$$

A base do plano tangente é formada pelos vetores

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi).$$

O vetor normal unitário n é dado por

$$\begin{aligned} n &= \frac{\frac{\partial}{\partial\phi}\times\frac{\partial}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial}{\partial\phi}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\right|} \\ &= (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi). \end{aligned}$$

Lembre que as seções do line bundle $T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ são campos de vetores em $\mathbb{S}^2$. Conside a seção $s : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ dada por

$$s = (-\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

Temos que

$$\nabla^{\mathbb{R}^3} s = d\theta \otimes (-\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$

Lembre que a conexão ∇ de $T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ é a projeção de $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ no plano tangente,

portanto

$$\begin{aligned}
\nabla s &= \nabla^{\mathbb{R}^3} s - < \nabla_{\mathbb{R}^3} s, n > n \\
&= \nabla^{\mathbb{R}^3} s + d\theta \otimes \sin\phi n \\
&= d\theta \otimes \left(-\cos\theta\cos^2\phi, -\sin\theta\cos{}^2\phi, \sin\phi\cos\phi\right) \\
&= d\theta \otimes \cos\phi\,(n \times s) \\
&= i\cos\phi d\theta \otimes s.
\end{aligned}$$

Resumindo, temos que

$$\nabla s = i\cos\phi d\theta \otimes s.$$

Portanto a 1-forma de conexão da seção s é dada por

$$A = i\cos\phi d\theta,$$

e curvatura é dada por

$$\begin{aligned}
F_\nabla &= d\,(i\cos\phi d\theta) \\
&= -i\sin\phi d\phi \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

Portanto a classe de Chern é dada por

$$\begin{aligned}
c_1\left(T\mathbb{S}^2\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{S}^2} F_\nabla \\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin\phi d\phi\right)d\theta \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Preliminares Analíticas

2.1 Medida e Integração

Considere um conjunto X. Uma familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma *σ-álgebra* se:

1. $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{A}$,

2. Se $E \in \mathcal{A}$, então o complementar $X \setminus E \in \mathcal{A}$;

3. Se $E_1, ..., E_n, ... \in \mathcal{A}$, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$.

Os elementos de $\mathcal{A}$ são *conjuntos mensuráveis*.

Considere um conjunto X e uma família S de subconjuntos de X. É possível mostrar que a interseção de todas as σ-álgebras contendo S é uma σ-álgebra, chamada *σ-álgebra gerada por S*. A σ-álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ é a *σ-álgebra de Borel* [5, 9].

Considere um conjunto X com uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Uma *medida* é uma função

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],$$

tal que dados os conjuntos disjuntos $E_1, E_2, ... \in \mathcal{A}$, temos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Teorema 2.1.1. *[5, 9] Existe única medida μ na σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que*
$$\mu\left([a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]\right) = (b_n - a_n) ... (b_1 - a_1).$$

Considere um conjunto X com uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *mensurável* se para todo a em $\mathbb{R}$ temos que

$$\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Um *espaço de medida* é uma tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ formada por um conjunto X com uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ e uma medida μ.

Proposição 2.1.2. *[5, 9] Temos que*

1. *Se f e g são as funções mensuráveis, então $f + g$ e fg são funções mensuráveis.*

2. *Se f e g são as funções mensuráveis, então* $\max\{f, g\}$ *e* $\min\{f, g\}$ *são mensuráveis.*

3. *Se uma sequencia de funções mensuráveis f_n converge pontualmente para uma função f, então f é mensurável.*

Observação 2.1.3. Toda função continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é mensurável (Borel). A recíproca é falsa [5].

Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Uma função $s : X \to \mathbb{R}$ é *simples* se ela assume número finito de valores $\{a_1, ..., a_n\}$. A *integral* de s é definida por
$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left\{s^{-1}(a_i)\right\},$$
onde $s^{-1}(a_i) = \{x \in X : s(x) = a_i\}$.

Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e função mensurável $f : X \to [0, \infty)$. A *integral* de f é definida por

$$\int_X f d\mu := \sup\left\{\int_X s d\mu : \text{ funções simples } s \leq f\right\}.$$

Considere um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$. Podemos escrever

$$f = f^+ - f^-,$$

onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$. A função f é *integrável* se $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$. A *integral* de f é definida por

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Observe que vale $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$ se, e somente se, $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

Teorema 2.1.4 (Teorema da convergência monótona). *[5, 9] Considere uma sequencia de funções mensuráveis f_n. Suponha que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$$

para todo x. Assuma que f_n converge pontualmente para uma função f. Então

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

Teorema 2.1.5 (Teorema da convergência dominada). *[5, 9] Considere uma sequencia de funções mensuráveis f_n. Suponha que f_n converge pontualmente para uma função f. Assuma que existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo n e x. Então

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

2.2 Espaços de Sobolev

O *espaço* $L^2(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 < \infty.$$

A *norma* de uma função f em $L^2(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f^2.$$

O *produto interno* de duas funções f e g em $L^2(\mathbb{R}^2)$ é definido por

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} fg.$$

Uma função mensurável f em $\mathbb{R}^n$ é *localmente integrável* se $\int_K |f| < \infty$ para todo conjunto compacto K em $\mathbb{R}^n$.

Considere uma função localmente integrável f em $\mathbb{R}^n$. Uma função localmente integrável $\partial_i f$ em $\mathbb{R}^n$ é a *i-esima derivada fraca* de f se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_i \phi = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \partial_i f$$

para toda função ϕ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. A definição acima é justificada pelas seguintes afirmações:

1. Se existem funções localmente integráveis g e h tais que

   $$\int_{\mathbb{R}^n} g\phi = \int_{\mathbb{R}^n} h\phi$$

   para toda função ϕ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $g = h$. Em particular, a i-ésima derivada fraca, se existir, é única.

2. Se a função f é suave, integrando por partes, obtemos

   $$\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_i \phi = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi (\partial_i f)$$

   para toda ϕ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo item 1, deduzimos que a i-ésima derivada fraca de f é igual a i-ésima derivada parcial (clássica) de f.

Mais informações sobre derivadas fracas podem ser encontradas em [7, cap 6] e [4, cap 5].

O *espaço de Sobolev* $H^1(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções localmente integráveis f em $\mathbb{R}^n$ tais que as derivadas fracas $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ existem, e alem disso

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 < \infty,$$

onde $\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$.

A *norma* de uma função f em $H^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\| f \|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 .$$

O *produto interno* de funções f e g em $H^1(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} fg + \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle .$$

Teorema 2.2.1. *[1, 4, 7] O espaço $H^1(\mathbb{R}^n)$ com produto interno $\langle f, g \rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ é um espaço de Hilbert.*

Mais informações sobre $H^1(\mathbb{R}^n)$ podem ser encontradas em [7, cap 7] e [4, cap 5].

O *espaço* $L^p(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty.$$

A *norma* de uma função f em $L^p(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\| f \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p .$$

Existem vários teoremas sobre imersões de Sobolev. Vamos usar o seguinte resultado no Capítulo 3.

Teorema 2.2.2 (*Desigualdade de Sobolev*)**.** *[7, p. 206] Para toda função f*

em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\| f \|_{L^k(\mathbb{R}^2)}^k \leq 2^{\frac{k}{2}+2} k^k \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^k$$

para todo $2 \leq k < \infty$.

Demonstração. Tivemos dificuldade de encontrar a constante explícita $2^{\frac{k}{2}+2}k^k$ na referência usada pelo artigo do Taubes. Esta constante é importante no Capítulo 3. Vamos obter o resultado usando outra referência. Pelo Teorema 8.5 item (ii) em [7, p. 206], sabemos que

$$\| f \|_{L^k(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{S_{2,k}}} \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

onde $S_{2,k} > \left\{ k^{1-\frac{2}{k}} (k-1)^{-1+\frac{1}{k}} \left(\frac{k-2}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \right\}^{-2}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{S_{2,k}}} &< k^{1-\frac{2}{k}} \frac{1}{(k-1)^{1-\frac{1}{k}}} \left(\frac{k-2}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \\
&\leq k^{1-\frac{2}{k}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^{1-\frac{1}{k}}} \left(\frac{k}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \\
&\leq k^{\frac{1}{2}-\frac{2}{k}} 2^{1-\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \\
&= k^{\frac{1}{2}-\frac{2}{k}} 2^{-1+\frac{3}{k}} \\
&\leq k 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{k}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\| f \|_{L^k(\mathbb{R}^2)}^k \leq 2^{\frac{k}{2}+2} k^k \| f \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^k .$$

$\square$

Existe uma teoria que generaliza a teoria clássica das imersões de Sobolev. O *espaço* $L_A(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(|f|) < \infty,$$

onde A é uma função satisfazendo certas propriedades [1, p. 262]. No nosso caso $A(t) = e^{t^2} - 1$. Vamos usar o seguinte resultado.

Teorema 2.2.3. *[1, p. 277-280] Para toda função f em $H^1(\mathbb{R}^2)$, existe uma constante positiva ρ (dependendo de f) tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\rho^2 f^2} - 1 \right) < \infty.$$

Demonstração. Gostaríamos de aplicar o teorema 8.27 em [1, p. 277] com $n = 2$, $p = 2$ e $m = 1$. Mas ele só vale para domínios limitados. Na p. 280 o autor explica a adaptação para domínios não limitados, e mostra como escolher a constante ρ. $\square$

2.3 Análise Funcional

Lembre que um espaço vetorial H com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é um *espaço de Hilbert* se H com a norma $\|v\|_H^2 = \langle v, v \rangle_H$ é um espaço métrico completo. Lembre que um *funcional* G num espaço de Hilbert H é uma função $G : H \to \mathbb{R}$.

Considere um funcional G definido num espaço de Hilbert H. Dados v e h em H, a *derivada de Gâteaux* $G'(v, h)$ é definida por

$$G'(v,h) = \lim_{t \to 0} \frac{G(v + th) - G(v)}{t},$$

se o limite existir.

Uma sequência v_n num espaço de Hilbert H *converge fracamente* para um v em H se

$$\langle v_n, w \rangle_H \to \langle v, w \rangle_H$$

para todo w em H.

Um funcional G definido em H é *semicontínuo inferiormente no sentido fraco* se para toda sequência v_n em H convergindo para um v em H no sentido fraco, temos que

$$G(v) \leq \liminf_n G(v_n).$$

No capítulo 3, vamos usar a seguinte proposição para mostrar que um certo funcional G definido em $H^1(\mathbb{R}^2)$ possui um ponto de mínimo local.

Proposição 2.3.1. *[11, p. 100] Considere um funcional G definido num espaço de Hilbert H. Suponha que a derivada de Gâteaux $G'(x,h)$ existe para todo x e h em H. Assuma que G é semicontínuo inferiormente no sentido fraco. Suponha que existe uma constante positiva R tal que*

$$G'(v,v) > 0$$

para todo v em H com $\|v\|_H = R$. Então existe ponto de mínimo local de G no interior da bola $|x| \leq R$, ou seja, existe um v_0 em H com $\|v_0\|_H < R$ tal que

$$G(v_0) \leq G(v)$$

para todo v suficientemente próximo de v_0. Em particular,

$$G'(v_0) = 0.$$

Um funcional G definido num espaço de Hilbert H é *convexo* se

$$G(tv_1 + (1-t)v_2) \leq tG(v_1) + (1-t)G(v_2)$$

para todo $0 \leq t \leq 1$ e v_1 e v_2 em H.

Um funcional G definido num espaço de Hilbert H é *estritamente convexo* se

$$G(tv_1 + (1-t)v_2) < tG(v_1) + (1-t)G(v_2)$$

para todo $0 < t < 1$ e v_1 e v_2 em H.

Vamos usar a seguinte proposição para mostrar a unicidade do ponto de mínimo do funcional G mencionado acima.

Proposição 2.3.2. *[11, p. 96] Considere um funcional estritamente convexo G definido num espaço de Hilbert H. Assuma que G possui um ponto de mínimo. Então este ponto de mínimo é único.*

Para aplicar a Proposição 2.3.1 é necessário assumir o funcional G semicontínuo inferiormente no sentido fraco. Vamos usar o seguinte resultado para mostrar que o funcional G é semicontínuo inferiormente no sentido fraco.

Proposição 2.3.3. *[11, p. 82] Considere um funcional convexo G num espaço de Hilbert H. Suponha que a derivada de Gâteaux $G'(v,h)$ existe para todo v e h em H. Assuma que $G'(v,\cdot)$ é contínuo para todo v em H. Então G é semicontínuo inferiormente no sentido fraco.*

Fixado um v em H, lembre que $G'(v,\cdot)$ é *contínuo em* $h \in H$ se para toda sequência h_n em H tal que $\|h - h_n\|_H \to 0$, temos que

$$|G'(v,h_n) - G'(v,h)| \to 0,$$

e $G'(v,\cdot)$ é *contínuo* se $G'(v,\cdot)$ é contínuo em h para todo h em H.

Capítulo 3

Teorema Principal

3.1 Vortex Number e Fórmula de Bogomol'nyi

Considere o line bundle trivial $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$. Pelo Exemplo 1.2.1 e Proposição 1.2.5, sabemos que toda conexão em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ é da forma

$$d_A = d - iA$$

para alguma 1-forma A em $\mathbb{R}^2$. Lembre que a curvatura da conexão d_A é dada por

$$F_A = dA.$$

Pelo Exemplo 1.1.2, sabemos que as seções de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ podem ser identificadas com funções complexas em $\mathbb{R}^2$. Neste capítulo identificamos seções com funções complexas e conexões com 1-formas.

Considere uma função complexa ϕ em $\mathbb{R}^2$ e uma 1-forma A em $\mathbb{R}^2$. Suponha que ϕ e A possuem derivadas fracas. A *energia* é definida por

$$E(\phi, A) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2} |d_A\phi|^2 + \frac{1}{2}|F_A|^2 + \frac{\lambda}{8} \left(|\phi|^2 - 1\right)^2 \right\},$$

onde λ é uma constante.

O estudo da energia é importante na teoria de supercondutividade. Quando $\lambda < 1$, a energia descreve supercondutores do tipo I, e quando $\lambda > 1$, a energia descreve supercondutores do tipo II [3, 6, 12]. Neste capítulo estamos interessados no caso $\lambda = 1$ (valor crítico). Quando $\lambda = 1$, a energia é limitada inferiormente por um múltiplo de *vortex number* (Teorema 3.1.2). Qualquer par (ϕ, A) que atinge o mínimo de energia é uma solução das equações de Ginzburg-Landau (Teorema 3.2.1).

Teorema 3.1.1. *Considere uma função complexa ϕ em $\mathbb{R}^2$ e uma 1-forma A em $\mathbb{R}^2$. Assuma que ϕ e A possuem derivadas fracas. Suponha que a energia $E(\phi, A) < \infty$. Então a energia E é invariante por transformações de calibre*

$$\begin{aligned} &\phi \to g\phi \\ &A \to A - ig^{-1}dg, \end{aligned}$$

onde g é uma função complexa com $|g| = 1$, ou seja,

$$E\left(g\phi, A - ig^{-1}dg\right) = E\left(\phi, A\right).$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} d_{A-ig^{-1}dg}\left(g\phi\right) &= d\left(g\phi\right) - i\left(A - ig^{-1}dg\right)\left(g\phi\right) \\ &= \phi dg + gd\phi - iAg\phi - \phi dg \\ &= g\left(d\phi - iA\phi\right) \\ &= gd_A\phi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{A-ig^{-1}dg} &= d\left(A - ig^{-1}dg\right) \\ &= dA - i\left(-1\right)g^{-2}dg \wedge dg - ig^{-1}ddg \\ &= dA \\ &= F_A, \end{aligned}$$

portanto

$$
\begin{aligned}
E\left(g\phi, A-ig^{-1}dg\right) &= \int_{\mathbb{R}^2}\left\{\frac{1}{2}\left|d_{A-ig^{-1}dg}\left(g\phi\right)\right|^2+\frac{1}{2}|F_{A-ig^{-1}dg}|^2+\frac{\lambda}{8}\left(|g\phi|^2-1\right)^2\right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left\{\frac{1}{2}\left|gd_A\phi\right|^2+\frac{1}{2}|F_A|^2+\frac{\lambda}{8}\left(|g\phi|^2-1\right)^2\right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left\{\frac{1}{2}\left|d_A\phi\right|^2+\frac{1}{2}|F_A|^2+\frac{\lambda}{8}\left(|\phi|^2-1\right)^2\right\} \\
&= E\left(\phi, A\right).
\end{aligned}
$$

□

Antes de enunciar o próximo teorema, vamos introduzir uma função cut-off χ_R tal que

$$
\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{em } B_R, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_{2R}, \end{cases}
$$

$$
0 \leq \chi_R \leq 1,
$$

e

$$
|d\chi_R| \leq \frac{C_1}{R},
$$

onde B_R é a bola de centro na origem e raio R.

Tome uma função suave $\tilde{\chi}$ em $[0, \infty)$ tal que

$$
\tilde{\chi} = \begin{cases} 1 & \text{em } \left[0,1\right], \\ 0 & \text{em } [2,\infty), \end{cases}
$$

$$
0 \leq \tilde{\chi} \leq 1.
$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
\sup|\tilde{\chi}'| &= \sup_{[1,2]}|\tilde{\chi}'| \\
&\leq C_1.
\end{aligned}
$$

Definimos

$$\chi_R(x) = \tilde{\chi}\left(\frac{|x|}{R}\right).$$

Temos que

$$\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{em } B_R, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_{2R}, \end{cases}$$

$$0 \leq \chi_R \leq 1.$$

Além disso,

$$d\chi_R(x) = \tilde{\chi}'\left(\frac{|x|}{R}\right)\frac{1}{R}d|x|,$$

logo

$$|d\chi_R(x)| \leq \frac{C_1}{R}.$$

Teorema 3.1.2. *Considere uma função complexa ϕ em $\mathbb{R}^2$ e uma 1-forma A em $\mathbb{R}^2$. Assuma que ϕ e A possuem derivadas fracas. Suponha que a energia $E(\phi, A) < \infty$. O limite*

$$\operatorname{vort}(\phi, A) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_A$$

existe. Além disso, $\operatorname{vort}(\phi, A)$ *é um número inteiro e invariante por transformações de calibre, chamado vortex number. Mais ainda, se a função ϕ é suave e $|\phi| \to 1$ no infinito, então* $\operatorname{vort}(\phi, A)$ *é igual ao índice de ϕ no infinito.*

Demonstração. Vamos assumir que a função ϕ é suave e $|\phi| \to 1$ quando $|x| \to \infty$. O caso geral pode ser encontrado em [2].

1.a. Vamos mostrar que

$$A = d(\arg\phi) - \frac{1}{2i}|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right). \tag{3.1}$$

Lembrando que $d_A\phi = d\phi - iA\phi$, temos que

$$\bar{\phi}d_A\phi = \bar{\phi}d\phi - iA|\phi|^2, \tag{3.2}$$

e

$$\phi\overline{d_A\phi} = \phi\overline{d\phi} + iA\,|\phi|^2\,. \tag{3.3}$$

Subtraindo (3.2) de (3.3), obtemos

$$2i\,|\phi|^2\,A = \left(\bar{\phi}d\phi - \phi\overline{d\phi}\right) - \left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right).$$

Como $|\phi| \to 1$ quando $x \to \infty$, podemos dividir por $|\phi|$ para $|x|$ suficientemente grande. Temos que

$$A = \frac{1}{2i}\,|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d\phi - \phi\overline{d\phi}\right) - \frac{1}{2i}\,|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right).$$

Escreva

$$\begin{aligned}\phi &= e^f\\ &= e^{f_1}e^{if_2}.\end{aligned}$$

Temos que

$$d\phi = e^f\,(df_1 + idf_2)\,,$$

e

$$\overline{d\phi} = e^{\bar{f}}\,(df_1 - idf_2)\,,$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\,|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d\phi - \phi\overline{d\phi}\right) &= \frac{1}{2i}\frac{1}{e^{2f_1}}\left(e^{\bar{f}}d\phi - e^f\overline{d\phi}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{e^{2f_1}}\left(e^{\bar{f}+f}\,(df_1 + idf_2) - e^{f+\bar{f}}\,(df_1 - idf_2)\right)\\ &= \frac{1}{2i}\,(df_1 + idf_2 - df_1 + idf_2)\\ &= d\,(\arg\phi)\,.\end{aligned}$$

Logo

$$A = d\,(\arg\phi) - \frac{1}{2i}\,|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right).$$

1.b. Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_R F_A &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_R dA\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\left(\chi_R A\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge A.\end{aligned}$$

Como χ_R tem o suporte compacto (a função se anula fora de B_{2R}), pelo teorema de Stokes, temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\left(\chi_R A\right) = 0,$$

portanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_R F_A = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge A. \tag{3.4}$$

Substituindo a Equação (3.1) na Equação (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_R F_A = &-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge d\left(\arg\phi\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge \frac{1}{2i}\left|\phi\right|^{-2}\left(\bar{\phi} d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge d\left(\arg\phi\right) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{B_{2R}\setminus B_R} d\left(\chi_R d\left(\arg\phi\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_{2R}}\chi_R d\left(\arg\phi\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R}\chi_R d\left(\arg\phi\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R} d\left(\arg\phi\right)\\ &= \operatorname{vort}\left(\phi, A\right).\end{aligned}$$

Podemos ver que $\operatorname{vort}\left(\phi, A\right)$ é o índice de ϕ. Lembre que o índice de ϕ é um múltiplo inteiro do índice da curva ∂B_R, portanto é um múltiplo inteiro de 1. Podemos escrever a Equação (3.5) como

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_R F_A = \operatorname{vort}\left(\phi, A\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge \frac{1}{2i}\left|\phi\right|^{-2}\left(\bar{\phi} d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right). \tag{3.6}$$

Vamos mostrar que quando $R \to \infty$ vale que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_A = \mathrm{vort}\,(\phi, A)\,.$$

Podemos assumir que $|\phi| \geq \frac{1}{2}$ para R suficientemente grande. Temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge \frac{1}{2i}|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right)\right| &\leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}|\phi|^{-2}\left|d\chi_R \wedge \left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}|\phi|^{-2}\left|d\chi_R\right|\left|\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right| \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{B_{2R}\setminus B_R}|\phi|^{-2}\left|d\chi_R\right|\left|\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right| \\
&\leq \frac{C_1}{4\pi R}\int_{B_{2R}\setminus B_R}|\phi|^{-2}\left(\left|\bar{\phi}d_A\phi\right| + \left|\phi\overline{d_A\phi}\right|\right) \\
&\leq \frac{C_1}{2\pi R}\int_{B_{2R}\setminus B_R}\frac{|d_A\phi|}{|\phi|} \\
&\leq \frac{C_1}{\pi R}\int_{B_{2R}\setminus B_R}|d_A\phi|\,.
\end{aligned}$$

Acima usamos o fato que $|d\chi_R| \leq \frac{C_1}{R}$. Pela desigualidade de Holder, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} d\chi_R \wedge \frac{1}{2i}|\phi|^{-2}\left(\bar{\phi}d_A\phi - \phi\overline{d_A\phi}\right)\right| &\leq \frac{C_1}{\pi R}\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R}|d_A\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R}1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C_1}{\pi R}\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R}|d_A\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{area}B_{2R})^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C_1}{\pi R}\sqrt{\pi}2R\left(\int_{B_{2R}\setminus B_R}|d_A\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2C_1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_R}|d_A\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_R}|d_A\phi|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}|d_A\phi|^2\,1_{\mathbb{R}^2\setminus B_R},$$

onde

$$1_{\mathbb{R}^2\setminus B_R} = \begin{cases} 1 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_R, \\ 0 & \text{em } B_R. \end{cases}$$

Temos que

$$\lim_{R\to\infty} |d_A\phi|^2 \, 1_{\mathbb{R}^2\setminus B_R} = 0.$$

Alem disso,

$$\left| |d_A\phi|^2 \, 1_{\mathbb{R}^2\setminus B_R} \right| \leq |d_A\phi|^2 .$$

Pelo teorema de convergência dominada (Teorema 2.1.5), temos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_R} |d_A\phi|^2 \, 1_{\mathbb{R}^2\setminus B_R} = 0.$$

Voltando à Equação (3.6), temos que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_A = \operatorname{vort}(\phi, A) .$$

2. Vamos mostrar que $\operatorname{vort}(\phi, A)$ é invariante por transformações de calibre

$$\begin{aligned} g &\to g\phi \\ A &\to A - ig^{-1}dg, \end{aligned}$$

onde g é uma função complexa com $|g| = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{vort}\left(g\phi, A - ig^{-1}dg\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_{A-ig^{-1}dg} \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_A \\ &= \operatorname{vort}(\phi, A) . \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.3 (Fórmula de Bogomol'nyi)**.** *Considere uma função complexa* ϕ *em* $\mathbb{R}^2$ *e uma 1-forma* A *em* $\mathbb{R}^2$*. Assuma que* ϕ *e* A *possuem derivadas* *fracas. Suponha que a energia $E(\phi, A) < \infty$. Então*

$$E\left(\phi, A\right) \geq \pi \operatorname{vort}\left(\phi, A\right),$$

e vale a igualdade se e somente se valem as equações de vórtice

$$\left(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2\right) - \left(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1\right) = 0, \tag{3.7}$$

$$\left(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2\right) + \left(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1\right) = 0, \tag{3.8}$$

e

$$F_{12} + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1\right) = 0. \tag{3.9}$$

Demonstração. Para provar o teorema, basta mostrar que

$$\begin{aligned} E\left(\phi, A\right) = &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\left(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2\right) - \left(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1\right)\right\}^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\left(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2\right) + \left(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1\right)\right\}^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left\{F_{12} + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1\right)\right\}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} F_{12}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left|d_A\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\left|F_A\right|^2 + \frac{1}{8}\left(|\phi|^2 - 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left|d_A\phi\right|^2 + \frac{1}{2}\left\{F_{12} + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1\right)\right\}^2 + \frac{1}{2}F_{12} - \frac{1}{2}F_{12}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} d_A\phi &= \partial_1\phi dx_1 + \partial_2\phi dx_2 - i\phi\left(A_1 dx_1 + A_2 dx_2\right) \\ &= \left(\partial_1\phi - iA_1\phi\right)dx_1 + \left(\partial_2\phi - iA_2\phi\right)dx_2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
|d_A\phi|^2 &= |\partial_1\phi - iA_1\phi|^2 + |\partial_2\phi - iA_2\phi|^2 \\
&= |\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2 + i(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1)|^2 + |\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2 + i(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1)|^2 \\
&= \{(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2) - (\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1)\}^2 + \{(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2) + (\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1)\}^2 \\
&\quad + 2(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2)(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1) - 2(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2)(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|d_A\phi|^2 + \frac{1}{2}|F_A|^2 + \frac{1}{8}\left(|\phi|^2 - 1\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\{(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2) - (\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1)\}^2 + \frac{1}{2}\{(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2) + (\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1)\}^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left\{F_{12} + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1\right)\right\}^2 + \frac{1}{2}F_{12} \\
&+ (\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2)(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1) - (\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2)(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1) \\
&- \frac{1}{2}F_{12}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right).
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}d\left(i\bar{\phi}d_A\phi\right) \\
&= \{(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2)(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1) - (\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2)(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1)\}\,dx_1 \wedge dx_2 \\
&- \frac{1}{2}F_{12}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
d\left(i\bar{\phi}d_A\phi\right) &= id\bar{\phi} \wedge d_A\phi + i\bar{\phi}dd_A\phi \\
&= id\bar{\phi} \wedge d_A\phi + i\bar{\phi}d(d\phi - iA\phi) \\
&= id\bar{\phi} \wedge d_A\phi + \bar{\phi}d\phi \wedge A + |\phi|^2\,dA.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
&id\bar{\phi}\wedge d_A\phi\\
&= i\left(\partial_1\bar{\phi}dx_1+\partial_2\bar{\phi}dx_2\right)\wedge\left(\left(\partial_1\phi-iA_1\phi\right)dx_1+\left(\partial_2\phi-iA_2\phi\right)dx_2\right)\\
&= i\left(\partial_1\bar{\phi}\left(\partial_2\phi-iA_2\phi\right)-\partial_2\bar{\phi}\left(\partial_1\phi-iA_1\phi\right)\right)dx_1\wedge dx_2\\
&= \left(\partial_1\phi_2+i\partial_1\phi_1\right)\left(\partial_2\phi_1+A_2\phi_2+i\left(\partial_2\phi_2-A_2\phi_1\right)\right)dx_1\wedge dx_2\\
&- \left(\partial_2\phi_2+i\partial_2\phi_1\right)\left(\partial_1\phi_1+A_1\phi_2+i\left(\partial_1\phi_2-A_1\phi_1\right)\right)dx_1\wedge dx_2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\bar{\phi}d\phi\wedge A+|\phi|^2\,dA\\
&= \bar{\phi}\left(\partial_1\phi dx_1+\partial_2\phi dx_2\right)\wedge\left(A_1dx_1+A_2dx_2\right)+F_{12}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)dx_1\wedge dx_2\\
&= \bar{\phi}\left(A_2\partial_1\phi-A_1\partial_2\phi\right)dx_1\wedge dx_2+F_{12}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)dx_1\wedge dx_2\\
&= \left(\phi_1-i\phi_2\right)\left(A_2\partial_1\phi_1-A_1\partial_2\phi_1+i\left(A_2\partial_1\phi_2-A_1\partial_2\phi_2\right)\right)dx_1\wedge dx_2\\
&+ F_{12}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)dx_1\wedge dx_2,
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
&d\left(i\bar{\phi}d_A\phi\right)\\
&= \left\{-2\left(\partial_1\phi_1+A_1\phi_2\right)\left(\partial_2\phi_2-A_2\phi_1\right)+2\left(\partial_2\phi_1+A_2\phi_2\right)\left(\partial_1\phi_2-A_1\phi_1\right)\right\}dx_1\wedge dx_2\\
&+ F_{12}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)dx_1\wedge dx_2,
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação. Podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{2}\left|d_A\phi\right|^2+\frac{1}{2}\left|F_A\right|^2+\frac{1}{8}\left(|\phi|^2-1\right)^2\right\}dx_1\wedge dx_2\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_1\phi_1+A_1\phi_2\right)-\left(\partial_2\phi_2-A_2\phi_1\right)\right\}^2dx_1\wedge dx_2\\
&+ \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_2\phi_1+A_2\phi_2\right)+\left(\partial_1\phi_2-A_1\phi_1\right)\right\}^2dx_1\wedge dx_2\\
&+ \frac{1}{2}\left\{F_{12}+\frac{1}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2-1\right)\right\}^2dx_1\wedge dx_2+\frac{1}{2}F_{12}dx_1\wedge dx_2\\
&- \frac{1}{2}d\left(i\bar{\phi}d_A\phi\right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Podemos tomar uma função cut-off χ_R como na prova do Teorema 3.1.2

$$\chi_R = \begin{cases} 1 & \text{em } B_R, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \setminus B_{2R}, \end{cases}$$
$$0 \leq \chi_R \leq 1,$$

e

$$|d\chi_R| \leq \frac{C_1}{R},$$

onde B_R é a bola de centro na origem e raio R. Multiplicando a Equação (3.10) por χ_R e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \chi_R \left\{ \frac{1}{2} |d_A\phi|^2 + \frac{1}{2} |F_A|^2 + \frac{1}{8} \left(|\phi|^2 - 1 \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R \left\{ (\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2) - (\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1) \right\}^2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R \left\{ (\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2) + (\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1) \right\}^2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R \left\{ F_{12} + \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1 \right) \right\}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R F_{12} \\
&- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R d \left(i\bar{\phi} d_A \phi \right).
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência monótona (Teorema 2.1.4), para provar o teorema, basta mostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R d \left(i\bar{\phi} d_A \phi \right) = 0.$$

O artigo [2] afirma que este limite é zero. $\square$

3.2 Teorema Principal

O resultado principal de [10] e deste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.2.1. *[10] Fixe pontos $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}^2$(não necessariamente distintos). Então, a menos de transformações de calibre, existe um único par*

(ϕ, A) formado por uma função complexa suave ϕ em $\mathbb{R}^2$ e uma 1-forma A em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$E(\phi, A) < \infty,$$

$$E(\phi, A) = \pi \operatorname{vort}(\phi, A),$$

e portanto o par (ϕ, A) é solução das equações de vórtice (3.7), (3.8) e (3.9). Além disso,

$$\{\textit{zeros de } \phi\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

com a ordem de anulamento de ϕ em a_0 sendo exatamente o número de vezes que a_0 aparece no conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Para provar o Teorema 3.2.1 basta transformar o problema numa equação diferencial parcial não-linear elíptica de segunda ordem.

Teorema 3.2.2. *[10] Fixe os pontos $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}^2$ (não necessariamente distintos). Considere as funções*

$$u_0(x) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{|x - a_k|^2}\right) \tag{3.11}$$

definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, e

$$g_0(x) = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\left(|x - a_k|^2 + \lambda\right)^2}$$

definida em $\mathbb{R}^2$, onde $\lambda > 4n$. Então existe uma única função real analítica v definida em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo

$$-\Delta v + g_0 - 1 + e^{u_0} e^{v} = 0 \tag{3.12}$$

e

$$\lim_{|x| \mapsto \infty} v(x) = 0.$$

Vamos mostrar que o Teorema 3.2.2 implica o Teorema 3.2.1. Considere a função

$$f_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v),$$

onde v e u_0 são as funções do Teorema 3.2.2. Podemos ver que f_1 é suave em $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. É possível mostrar que f_1 satisfaz

$$-\Delta f_1 + \frac{1}{2}\left(e^{2f_1} - 1\right) = 0 \tag{3.13}$$

e

$$\lim_{|x| \to a_k} f_1 = \frac{n_k}{2} \ln (x - a_k)^2 ,$$

onde n_k é a ordem de anulamento de ϕ em a_k (lembre que os pontos $a_1, \ldots, a_n$ não são necessariamente distintos). Para cada k, $1 \leq k \leq n$, defina o angulo

$$\alpha_k (x) = \arctan \frac{(x - a_k)_1}{(x - a_k)_2}.$$

Podemos ver que

$$\alpha_k (r, \theta + 2\pi) = \alpha (r, \theta) + 2\pi.$$

Defina a função

$$f_2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Observe que f_2 é suave em $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Temos que

$$\begin{aligned} f_2 (r, \theta + 2\pi) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (r, \theta + 2\pi) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (r, \theta) + 2\pi n. \end{aligned}$$

Defina

$$\phi = e^{f_1 + i f_2},$$

$$A_1 = \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2,$$

$$A_2 = -\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2.$$

É possível mostrar que ϕ e A são suaves em $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que o par

(ϕ, A) satisfaz as equações de vórtice (3.7), (3.8) e (3.9). Escreva

$$\hat{A} = A_1 + iA_2,$$

e

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\partial_1 + i\partial_2\right).$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 + i\left(-\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2\right) \\
&= -i\left(\partial_1 + i\partial_2\right)\left(f_1 + if_2\right) \\
&= -2i\bar{\partial} f,
\end{aligned}$$

onde $f = f_1 + if_2$. Logo

$$2\bar{\partial}\phi - i\hat{A}\phi = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
2\bar{\partial}\phi &= \left(\partial_1 + i\partial_2\right)\left(\phi_1 + i\phi_2\right) \\
&= \partial_1\phi_1 - \partial_2\phi_2 + i\left(\partial_1\phi_2 + \partial_2\phi_1\right).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-i\hat{A}\phi &= -i\left(A_1 + iA_2\right)\left(\phi_1 + i\phi_2\right) \\
&= A_1\phi_2 + A_2\phi_1 + i\left(-A_1\phi_1 + A_2\phi_2\right),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
0 &= 2\bar{\partial}\phi - i\hat{A}\phi \\
&= \left(\partial_1\phi_1 + A_1\phi_2\right) - \left(\partial_2\phi_2 - A_2\phi_1\right) \\
&\quad + i\left(\left(\partial_2\phi_1 + A_2\phi_2\right) + \left(\partial_1\phi_2 - A_1\phi_1\right)\right).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\ &= \partial_1 \left(-\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2\right) - \partial_2 \left(\partial_2 f_1 + \partial_1 f_2\right) \\ &= -\partial_1\partial_1 f_1 + \partial_1\partial_2 f_2 - \partial_1\partial_2 f_2 - \partial_2\partial_2 f_1 \\ &= -\partial_1\partial_1 f_1 - \partial_2\partial_2 f_1 \\ &= -\Delta f_1,\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}F_{12} + \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1\right) &= -\Delta f_1 + \frac{1}{2}\left(|\phi|^2 - 1\right) \\ &= -\Delta f_1 + \frac{1}{2}\left(\left|e^{f_1 + i f_2}\right|^2 - 1\right) \\ &= -\Delta f_1 + \frac{1}{2}\left(e^{2f_1} - 1\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Na ultima igualdade usamos a Equação (3.13). Isto mostra que (ϕ, A) é solução das Equações (3.7), (3.8) e (3.9).

O objetivo do resto deste capítulo é provar o Teorema 3.2.2.

3.3 Propriedades do funcional G

Para toda função v em $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, definimos o funcional

$$G(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - v\left(1 - g_0\right) + e^{u_0}\left(e^v - 1\right) \right\}. \tag{3.14}$$

Nesta seção vamos estudar as propriedades de G.

Proposição 3.3.1. *O funcional G pode ser estendido a $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. Ou seja, para toda função v em $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, temos que $G(v)$ é finito.*

Demonstração. Podemos escrever a Equação (3.14) como

$$\begin{aligned} G(v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} v\,(1 - g_0 - e^{u_0}) + \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\,(e^v - 1 - v) \\ &= (I) - (II) + (III)\,. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que se v está em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então $(I) < \infty$, $(II) < \infty$ e $(III) < \infty$.

1. Vamos mostrar que $(I) < \infty$. Por hipósese, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 < \infty.$$

2. Vamos mostrar que $(II) < \infty$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v\,(1 - g_0 - e^{u_0}) \leq \int_{\mathbb{R}^2} |v||1 - g_0 - e^{u_0}|.$$

Pela desigualidade de Holder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v\,(1 - g_0 - e^{u_0}) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por hipótese, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2 < \infty.$$

Para mostrar que $(II) < \infty$, basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 < \infty.$$

Para entender melhor a prova, vamos supor $n = 1$ e $a_1 = (0, 0)$. Neste caso, temos que

$$u_0(x) = -\ln\left(1 + \frac{\lambda}{|x|^2}\right),$$

e

$$g_0(x) = \frac{4\lambda}{(|x|^2 + \lambda)^2},$$

onde $\lambda > 4$. Temos que

$$\begin{aligned} e^{u_0} &= \left(1 + \frac{\lambda}{|x|^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{|x|^2}{|x|^2 + \lambda}. \end{aligned}$$

Portanto

$$1 - e^{u_0} = \frac{\lambda}{|x|^2 + \lambda}.$$

Podemos ver que

$$\begin{aligned} |1 - g_0 - e^{u_0}| &= \left| \frac{4\lambda}{(|x|^2 + \lambda)^2} + \frac{\lambda}{|x|^2 + \lambda} \right| \\ &\leq \frac{C_1}{|x|^2} \end{aligned}$$

para $|x|$ suficientemente grande. Elevando ao quadrado, vemos que

$$|1 - g_0 - e^{u_0}|^2 \leq \frac{C_2}{|x|^4}$$

para $|x|$ suficientemente grande. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 &= \int_{|x| \leq R_0} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 + \int_{|x| > R_0} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 \\ &\leq C_3 + C_2 \int_{|x| > R_0} \frac{1}{|x|^4}. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus R_0} \frac{1}{|x|^4} &= \int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{1}{R_0^2}, \end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 < \infty,$$

portanto $(II) < \infty$.

Vamos mostrar que $(III) < \infty$. Pela Equação (3.11), podemos ver que a função u_0 é negativa, portanto

$$e^{u_0} \leq 1,$$

logo

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\left(e^v - 1 - v\right)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}|e^v - 1 - v| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1 - v|.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.3, como v está em $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, existe uma constante positiva ρ (dependendo de v) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\rho^2 v^2} - 1\right) < \infty. \tag{3.15}$$

Podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1 - v| = \int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| + \int_{\left\{x:v(x)<\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v|. \tag{3.16}$$

Usando a desigualdade $e^x \geq 1 + x$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| &= \int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} \left(e^v - 1 - v\right) \\ &\leq \int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} \left(e^v - 1\right).\end{aligned}$$

Temos que $v \leq \rho^2 v^2$ no conjunto $\left\{x : v(x) \geq \frac{1}{\rho^2}\right\}$, portanto $e^v \leq e^{\rho^2 v^2}$ no conjunto $\left\{x : v(x) \geq \frac{1}{\rho^2}\right\}$, logo

$$\int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| \leq \int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} \left(e^{\rho^2 v^2} - 1\right).$$

Usando a desigualdade $e^x \geq 1+x$, vemos que a função $e^{\rho^2 v^2}-1$ é não-negativa, portanto

$$\int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\rho^2 v^2} - 1\right).$$

Usando a Equação (3.15), obtemos

$$\int_{\left\{x:v(x)\geq\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| < \infty. \tag{3.17}$$

Podemos ver que a função

$$x \to \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

é limitada no intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{\rho^2}\right)$, portanto

$$|e^v - 1 - v| \leq C_4 v^2$$

no conjunto $\left\{x : v(x) < \frac{1}{\rho^2}\right\}$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\left\{x:v(x)<\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| &\leq C_4 \int_{\left\{x:v(x)<\frac{1}{\rho^2}\right\}} v^2 \\ &\leq C_4 \int_{\mathbb{R}^2} v^2.\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} v^2 < \infty,$$

portanto

$$\int_{\left\{x:v(x)<\frac{1}{\rho^2}\right\}} |e^v - 1 - v| < \infty. \tag{3.18}$$

Pelas Equações (3.16), (3.17) e (3.18), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1 - v| < \infty.$$

□

Proposição 3.3.2. *Considere funções v e h em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Temos que a derivada de Gâteaux $G'(v,h)$ existe e é dada por*

$$G'(v,h) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \langle \nabla v, \nabla h \rangle - h\left(1 - g_0 - e^{u_0}\right) + he^{u_0}\left(e^v - 1\right) \right\}.$$

Alem disso, para toda função v em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que $G'(v,\cdot)$ é um funcional linear limitado em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Temos que

$$G(v) = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - v\left(1 - g_0\right) + e^{u_0}\left(e^v - 1\right) \right\},$$

e

$$\begin{aligned} G(v+th) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla(v+th)|^2 - (v+th)(1-g_0) + e^{u_0}\left(e^{v+th} - 1\right) \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + t\langle \nabla v, \nabla h\rangle + \frac{t^2}{2}|\nabla h|^2 \right\} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ -(v+th)(1-g_0) + e^{u_0}\left(e^{v+th} - 1\right) \right\}, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{G(v+th) - G(v)}{t} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \langle \nabla v, \nabla h\rangle + \frac{t}{2}|\nabla h|^2 - h(1-g_0) + e^{u_0}e^v\frac{e^{th}-1}{t} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \langle \nabla v, \nabla h\rangle - h(1-g_0) + he^{u_0+v} \right\} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{t}{2}|\nabla h|^2 + e^{u_0}e^v\frac{e^{th}-1-th}{t} \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \langle \nabla v, \nabla h\rangle - h\left(1-g_0-e^{u_0}\right) + he^{u_0}\left(e^v - 1\right) \right\} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{t}{2}|\nabla h|^2 + e^{u_0}e^v\frac{e^{th}-1-th}{t} \right\}, \end{aligned}$$

logo, pela definição de derivada de Gâteaux, temos que

$$\begin{aligned} G'(v,h) &= \lim_{t\to 0} \frac{G(v+th)-G(v)}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \{\langle \nabla v, \nabla h\rangle - h(1-g_0-e^{u_0}) + he^{u_0}(e^v-1)\} \\ &+ \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \frac{t}{2}|\nabla h|^2 + e^{u_0}e^v \frac{e^{th}-1-th}{t} \right\}. \end{aligned}$$

1. Por hipótese, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla h|^2 < \infty,$$

portanto

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} t\,|\nabla h|^2 = 0.$$

2. Vamos mostrar que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}e^v \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t} = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}e^v \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0} \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t} + \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0} \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t}(e^v-1) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t} \right| + \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t}(e^v-1) \right| \\ &= (I) + (II). \end{aligned} \tag{3.19}$$

2.a. Vamos mostrar que

$$\lim_{t\to 0} (I) = 0. \tag{3.20}$$

Como a função u_0 é negativa, temos que

$$e^{u_0} \leq 1,$$

portanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th} - 1 - th\right)}{t} \right| \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{th} - 1 - th \right|.$$

Usando a expansão em série das potencias da função exponencial, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{th} - 1 - th \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-1} h^k \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-1} |h|^k \right). \end{aligned}$$

Podemos ver que

$$n \mapsto \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} t^{k-1} |h|^k$$

é uma sequencia crescente de funções não-negativas. Pelo teorema da convergência monótona (Teorema 2.1.4), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-1} |h|^k \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^2} |h|^k.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th} - 1 - th\right)}{t} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-1} \int_{\mathbb{R}^2} |h|^k.$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev (Teorema 2.2.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |h|^k \leq 2^{k/2+2} k^k \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}^k.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th} - 1 - th\right)}{t} \right| \leq 4 \sum_{k=2}^{\infty} t^{k-1} \frac{k^k}{k!} \left(\sqrt{2} \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \right)^k.$$

Lembre que a fórmula de Stirling da aproximação assintótica é dada por

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k,$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k!e^k}{\sqrt{2\pi k}k^k} = 1.$$

Em particular, existe um numero inteiro positivo N tal que

$$k^k \leq k!e^k$$

para todo $k > N$. Temos que

$$t^{k-1}\frac{k^k}{k!} \leq t^{k-1}e^k$$

para todo $k > N$, e portanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\left|e^{u_0}\frac{\left(e^{th}-1-th\right)}{t}\right| &\leq 4\sum_{k=2}^{N} t^{k-1}\frac{k^k}{k!}\left(\sqrt{2}\parallel h\parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^k \\ &+ 4\sum_{k=N+1}^{\infty} t^{k-1}\left(\sqrt{2}e\parallel h\parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^k.\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direto da equação acima é uma soma finita, e o segundo termo é uma série com raio de convergência $\left(\sqrt{2}e\parallel h\parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^{-1}$. Portanto

$$\lim_{t\to 0}(I) = 0.$$

2.b. Vamos mostrar que

$$\lim_{t\to 0}(II) = 0. \tag{3.21}$$

Pela desigualdade de Holder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{u_0} \frac{\left(e^{th} - 1 - th\right)}{t} \left(e^v - 1\right) \right| \leq \frac{1}{t} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^v - 1\right)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{th} - 1 - th \right|^2 \right]^{1/2}. \tag{3.22}$$

Usando a desigualdade $e^x - x - 1 \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(e^v - 1\right)^2 &= e^{2v} - 2e^v + 1 \\ &= e^{2v} - 2v - 1 - 2\left(e^v - v - 1\right) \\ &\leq \left| e^{2v} - 2v - 1 \right|. \end{aligned}$$

Como $2v$ está em $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, pela prova da Proposição 3.3.1, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{2v} - 2v - 1 \right| < \infty,$$

portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^v - 1\right)^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{2v} - 2v - 1 \right| \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Agora trabalhamos com segundo termo do lado direto da Equação (3.22). Escreva $u = th$. Usando a expansão em série das potencias da função exponencial, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^u - 1 - u \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j,k=2}^{\infty} \frac{1}{j!k!} |u|^{j+k}.$$

Podemos ver que

$$n \mapsto \sum_{j,k=2}^{n} \frac{1}{j!k!} |u|^{j+k}$$

é uma sequencia crescente de funções não-negativas. Pelo teorema da convergência monótona (Teorema 2.1.4), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j,k=2}^{\infty}\frac{1}{j!k!}|u|^{j+k}=\sum_{j,k=2}^{\infty}\frac{1}{j!k!}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{j+k},$$

portanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|e^u-1-u|^2 &\leq \sum_{j,k=2}^{\infty}\frac{1}{j!k!}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{j+k}\\ &=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{n}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev (Teorema 2.2.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}|u|^n\leq 2^{n/2+2}n^n\parallel u\parallel^n_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

portanto

$$\int_{\mathbb{R}^2}|e^u-1-u|^2\leq 4\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^n}{(n-k)!k!}2^{n/2}\parallel u\parallel^n_{H^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Pela fórmula de Stirling, existe um numero inteiro positivo N tal que

$$n^n\leq n!e^n$$

para todo $n > N$. Portanto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |e^u - 1 - u|^2 &\leq 4\sum_{n=4}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^n}{(n-k)!k!} 2^{n/2} \parallel u \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}^n \\ &+ 4\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\sqrt{2}e \parallel u \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^n \\ &= 4\sum_{n=4}^{N}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^n}{(n-k)!k!} 2^{n/2} \parallel u \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}^n \\ &+ 4\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(2\sqrt{2}e \parallel u \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^n.\end{aligned}$$

Acima usamos o fato que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} = 2^n.$$

Lembrando que $u = th$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \left|e^{th} - 1 - th\right|^2 &\leq 4\sum_{n=4}^{N}\sum_{k=0}^{n} t^n \frac{n^n}{(n-k)!k!} 2^{n/2} \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}^n \\ &+ 4\sum_{n=N+1}^{\infty} t^n \left(2\sqrt{2}e \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^n. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direto da equação acima é uma soma finita, e o segundo termo é uma série com raio de convergência $\left(2\sqrt{2}e \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)^{-1}$. Pelas Equações (3.22), (3.23) e (3.24), temos que

$$\lim_{t\to 0} (II) = 0.$$

2.c. Pelas Equações (3.19), (3.20) e (3.21), obtemos

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0} e^v \frac{\left(e^{th} - 1 - th\right)}{t} = 0.$$

3. Pelos itens 1. e 2., concluímos que

$$G'(v,h) = \int_{\mathbb{R}^2} \{\langle \nabla v, \nabla h\rangle - h(1 - g_0 - e^{u_0}) + he^{u_0}(e^v - 1)\}.$$

Podemos ver que $G'(v,\cdot)$ é linear.

4. Vamos mostrar que

$$G'(v,h) \leq C(v) \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

onde $C(v)$ é uma constante positiva dependendo de v. Temos que

$$\begin{aligned}
|G'(v,h)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\langle \nabla v, \nabla h\rangle| + \int_{\mathbb{R}^2} |h|\,|1 - g_0 - e^{u_0}| + \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\,|h|\,|e^v - 1| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\langle \nabla v, \nabla h\rangle| + \int_{\mathbb{R}^2} |h|\,|1 - g_0 - e^{u_0}| + \int_{\mathbb{R}^2} |h|\,|e^v - 1|,
\end{aligned}$$

pois $e^{u_0} \leq 1$. Pelo desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
|G'(v,h)| \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla h|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} h^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_{\mathbb{R}^2} h^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pela prova da Proposição 3.3.1, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 < \infty,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1|^2 < \infty,$$

portanto

$$G'(v,h) \leq C(v) \parallel h \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

onde

$$C(v) = \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |1 - g_0 - e^{u_0}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |e^v - 1|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Pelo itens 3. e 4. temos que $G'(v, \cdot)$ é um funcional linear limitado em $H^1(\mathbb{R}^2)$. É conhecido que isto implica $G'(v, \cdot)$ contínuo. □

Proposição 3.3.3. *O funcional G é estritamente convexo, isto é, dado um número $0 < t < 1$ e funções v e w em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que*

$$G(tv + (1-t)w) < tG(v) + (1-t)G(w).$$

Demonstração. Escreva

$$\begin{aligned}
&G(tv + (1-t)w) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla (tv + (1-t)w)|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} (tv + (1-t)w)(1 - g_0) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0} \left(e^{tv+(1-t)w} - 1 \right) \\
&= (I) - (II) + (III).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que (I) é convexo, (II) é linear e (III) é estritamente convexo.

Termo (I). Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
(I)(tv + (1-t)w) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(t^2 |\nabla v|^2 + 2t(1-t) \langle \nabla v, \nabla w \rangle + (1-t)^2 |\nabla w|^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(t^2 |\nabla v|^2 + 2t(1-t) |\nabla v| |\nabla w| + (1-t)^2 |\nabla w|^2 \right).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
(I)\left(tv + (1-t)\,w\right) &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left\{t^2\left|\nabla v\right|^2 + t\,(1-t)\left(\left|\nabla v\right|^2 + \left|\nabla w\right|^2\right) + (1-t)^2\left|\nabla w\right|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left\{\left(t^2 + t\,(1-t)\right)\left|\nabla v\right|^2 + \left((1-t)^2 + t\,(1-t)\right)\left|\nabla w\right|^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(t\left|\nabla v\right|^2 + (1-t)\left|\nabla w\right|^2\right) \\
&= t\,(I)\,(v) + (1-t)\,(I)\,(w)\,.
\end{aligned}$$

Termo (II). Temos que

$$(II)\left(tv + (1-t)\,w\right) = t\,(II)\,(v) + (1-t)\,(II)\,(w)\,.$$

Termo (III). Como a função exponencial é estritamente convexa, temos que

$$e^{tv+(1-t)w} < te^v + (1-t)\,e^w.$$

Subtraindo 1 em ambos lados e multiplicando ambos lados por e^{u_0}, obtemos que

$$e^{u_0}\left(e^{tv+(1-t)w} - 1\right) < e^{u_0}\left(te^v + (1-t)\,e^w - 1\right),$$

logo

$$\begin{aligned}
(III)\left(tv + (1-t)\,w\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\left(e^{tv+(1-t)w} - 1\right) \\
&< t\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}e^v + (1-t)\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}e^w - \int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0} \\
&= t\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\left(e^v - 1\right) + (1-t)\int_{\mathbb{R}^2} e^{u_0}\left(e^w - 1\right) \\
&= t\,(III)\,(v) + (1-t)\,(III)\,(w)\,.
\end{aligned}$$

Portanto G é estritamente convexo. □

Proposição 3.3.4. *O funcional G é semicontínuo inferiormente no sentido fraco. Ou seja, se $v_n \to v$ no sentido fraco em $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, então*

$$G\,(v) \leq \liminf_n G(v_n).$$

Demonstração. Pela Proposição 3.3.2, sabemos que $G'(v,\cdot)$ é um funcional linear contínuo em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela Proposição 3.3.3, sabemos que $G'(v,\cdot)$ é estritamente convexo. Usando a Proposição 2.3.3, obtemos o resultado. □

Proposição 3.3.5. *Existe constantes $\alpha > 0$, b e $k > 0$ tais que*

$$G'(v,v) \geq \frac{\alpha \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{\left(1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)} - b$$

para toda função v em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Em particular, existe uma constante positiva R tal que

$$G'(v,v) > 0$$

para toda função v em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|v\|_{H^1} = R$.

Demonstração. Lembre que

$$u_0(x) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{|x - a_k|^2}\right),$$

e

$$g_0(x) = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\left(|x - a_k|^2 + \lambda\right)^2},$$

onde $\lambda > 4n$.

1. Vamos mostrar que

$$1 - g_0(x) \geq c_1, \tag{3.25}$$

onde $c_1 = 1 - \frac{4n}{\lambda}$. Temos que

$$\frac{\lambda}{\left(|x - a_k|^2 + \lambda\right)^2} \leq \frac{1}{\lambda},$$

portanto

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\left(|x-a_k|^2+\lambda\right)^2} \\ &\leq \frac{4n}{\lambda} \\ &= 1-c_1, \end{aligned}$$

logo

$$1-g_0(x) \geq c_1.$$

2. Vamos mostrar que

$$1-g_0(x)-e^{u_0(x)} \geq 0. \tag{3.26}$$

Temos que

$$\begin{aligned} e^{u_0(x)} &= \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{|x-a_k|^2+\lambda}{|x-a_k|^2}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\exp\left(\ln\left(\frac{|x-a_k|^2}{|x-a_k|^2+\lambda}\right)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{|x-a_k|^2}{|x-a_k|^2+\lambda}, \end{aligned}$$

portanto

$$g_0(x)+e^{u_0(x)} = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\left(|x-a_k|^2+\lambda\right)^2}+\prod_{k=1}^{n}\frac{|x-a_k|^2}{|x-a_k|^2+\lambda}. \tag{3.27}$$

Escreva

$$\gamma = \frac{4n}{\lambda}$$

e

$$z_k = \frac{\lambda}{|x-a_k|^2+\lambda}.$$

Note que

$$1 - z_k = \frac{|x - a_k|^2}{|x - a_k|^2 + \lambda}.$$

Podemos reescrever a Equação (3.27) como

$$g_0(x) + e^{u_0(x)} = \frac{\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^2 + \prod_{k=1}^{n}(1 - z_k). \tag{3.28}$$

Observe que

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{\lambda}{|x - a_k|^2 + \lambda} \\ &< 1, \end{aligned}$$

portanto

$$1 - z_k > 0.$$

Lembre a desigualdade aritmética-geométrica

$$\prod_{k=1}^{n} b_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^n$$

para b_i positivo. Temos que

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n}(1 - z_k) &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^n \\ &\leq 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Note que na ultima desigualdade acima usamos o fato que

$$1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k < 1.$$

Usando a Desigualdade (3.29) na Equação (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} g_0(x) + e^{u_0(x)} &\leq 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k + \frac{\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \\ &\leq 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k + \frac{\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Note que na segunda desigualdade usamos $z_k < 1$ e na terceira desigualdade usamos $\gamma < 1$. Provamos que

$$1 - g_0(x) - e^{u_0(x)} \geq 0.$$

3. Vamos mostrar que se $v \geq 0$, então

$$v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right) \geq \beta v^2 - \frac{1}{1-\beta}\left(u_0 + g_0\right)^2 \tag{3.30}$$

para todo $0 < \beta < 1$. Escrevemos

$$v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right) = v^2 + v\left(u_0 + g_0\right) + v\left(e^{u_0+v} - 1 - \left(u_0 + v\right)\right).$$

É possível mostrar que $e^x - 1 - x \geq 0$ para todo x em $\mathbb{R}$, logo

$$e^{u_0+v} - 1 - \left(u_0 + v\right) \geq 0,$$

portanto

$$\begin{aligned} v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right) &\geq v^2 + v\left(u_0 + g_0\right) \\ &= \beta v^2 + (1-\beta)\, v^2 + v\left(u_0 + g_0\right) \end{aligned}$$

para todo $0 < \beta < 1$. Completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) &\geq \beta v^2 + \left[(1-\beta)^{\frac{1}{2}} v + \frac{u_0+g_0}{2(1-\beta)^{\frac{1}{2}}}\right]^2 - \left(\frac{u_0+g_0}{2(1-\beta)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \\ &\geq \beta v^2 - \frac{1}{4(1-\beta)}(u_0+g_0)^2 \\ &\geq \beta v^2 - \frac{1}{1-\beta}(u_0+g_0)^2, \end{aligned}$$

portanto

$$v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) \geq \beta v^2 - \frac{1}{1-\beta}(u_0+g_0)^2.$$

4. Vamos mostrar que se $v \leq 0$, então

$$v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) \geq \frac{c_1|v|^2}{1+|v|}. \tag{3.31}$$

Temos que

$$v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) = |v|\left(1-g_0-e^{u_0}\right) + |v| e^{u_0}\left(1-e^{-|v|}\right).$$

Usando a desigualdade

$$1-e^{-x} \geq \frac{x}{1+x}$$

para $x \geq 0$, obtemos

$$1-e^{-|v|} \geq \frac{|v|}{1+|v|},$$

portanto

$$\begin{aligned} v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) &\geq |v|\left(1-g_0-e^{u_0}\right) + \frac{|v|^2 e^{u_0}}{1+|v|} \\ &= \frac{\left(|v|+|v|^2\right)\left(1-g_0-e^{u_0}\right)+|v|^2 e^{u_0}}{1+|v|}. \end{aligned}$$

Usando as Desigualdades (3.25) e (3.26), obtemos

$$v\left(e^{u_0+v}-1+g_0\right) \geq \frac{c_1|v|^2}{1+|v|}.$$

5. Vamos mostrar que

$$G'(v,v) \geq \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + \frac{c_1 \beta |v|^2}{1+|v|} \right) - b, \tag{3.32}$$

onde $\beta = \frac{1}{2}$ e $b = 2 \parallel u_0 + g_0 \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Pela Proposição 3.3.2, temos que

$$\begin{aligned} G'(v,v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\nabla v|^2 - v(1 - g_0 - e^{u_0}) + ve^{u_0}(e^v - 1) \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\nabla v|^2 + v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right) \right\}. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} G'(v,v) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 &+ \int_{\{v \geq 0\}} v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right) \\ &+ \int_{\{v \leq 0\}} v\left(e^{u_0+v} - 1 + g_0\right). \end{aligned}$$

Usando as Equações (3.30) e (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} G'(v,v) \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 &+ \int_{\{v \geq 0\}} \beta v^2 - \frac{1}{1-\beta} \int_{\{v \geq 0\}} (u_0 + g_0)^2 \\ &+ \int_{\{v \leq 0\}} \frac{c_1 |v|^2}{1+|v|}. \end{aligned}$$

Observe que na segunda integral vale que

$$\begin{aligned} \beta |v|^2 &\geq \frac{\beta |v|^2}{1+|v|} \\ &\geq \frac{c_1 \beta |v|^2}{1+|v|}, \end{aligned}$$

pois $0 < c_1 < 1$. Usando a desigualdade acima, obtemos

$$G'(v,v) \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 + \int_{\{v\geq 0\}} \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|} - \frac{1}{1-\beta}\int_{\{v\geq 0\}} (u_0+g_0)^2 + \int_{\{v\leq 0\}} \frac{c_1 |v|^2}{1+|v|}.$$

Como $0 < \beta < 1$, temos que

$$\frac{1}{1-\beta}\int_{\{v\geq 0\}} (u_0+g_0)^2 \leq \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbb{R}^2} (u_0+g_0)^2,$$

e

$$\int_{\{v\leq 0\}} \frac{c_1 |v|^2}{1+|v|} \geq \int_{\{v\leq 0\}} \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|},$$

logo

$$\begin{aligned} G'(v,v) &\geq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 + \int_{\{v\geq 0\}} \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|} - \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbb{R}^2} (u_0+g_0)^2. \\ &+ \int_{\{v\leq 0\}} \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|}\right) - \frac{1}{1-\beta}\int_{\mathbb{R}^2} (u_0+g_0)^2. \end{aligned}$$

Escreva $\beta = \frac{1}{2}$ e $b = 2 \parallel u_0 + g_0 \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Obtemos

$$G'(v,v) \geq \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + \frac{c_1\beta |v|^2}{1+|v|}\right) - b.$$

6. Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v|^2}{1+|v|} \geq \frac{\parallel v \parallel^4_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\left(\parallel v \parallel^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \parallel v \parallel^3_{L^3(\mathbb{R}^2)}\right)}. \tag{3.33}$$

Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v|}{(1+|v|)^{\frac{1}{2}}} (1+|v|)^{\frac{1}{2}} |v|.$$

Pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v|^2}{1+|v|} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(|v|^2 + |v|^3 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Elevando ambos os lados em quadrado e dividindo por $\left(\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \| v \|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3 \right)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|v|^2}{1+|v|} \geq \frac{\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4}{\left(\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \| v \|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3 \right)}.$$

7. Vamos terminar a prova da proposição. Usando a Desigualdade (3.33) na Desigualdade (3.32), obtemos

$$G'(v,v) \geq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 + \frac{c_1 \beta \| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4}{\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \| v \|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3} - b.$$

Lembrando que

$$\| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2,$$

tome $0 < \sigma < 1$ tal que

$$\| v \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = (1-\sigma) \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 = \sigma \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 .$$

Temos que

$$G'(v,v) \geq \sigma \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{c_1 \beta (1-\sigma)^2 \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^4}{(1-\sigma) \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \| v \|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3} - b.$$

Pela desigualdade de Sobolev (Teorema 2.2.2), temos que

$$\| v \|_{L^3(\mathbb{R}^2)}^3 \leq k \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^3,$$

onde $k = 8\sqrt{2} \cdot 27$. Então

$$\begin{aligned}
G'(v,v) &\geq \sigma \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} + \frac{c_1\beta\,(1-\sigma)^2 \parallel v \parallel^4_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{(1-\sigma) \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} + k \parallel v \parallel^3_{H^1(\mathbb{R}^2)}} - b \\
&= \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left(\sigma + \frac{c_1\beta\,(1-\sigma)^2}{(1-\sigma) + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}}\right) - b \\
&\geq c_1\beta \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} \left(\sigma + \frac{(1-\sigma)^2}{1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}}\right) - b,
\end{aligned}$$

pois $1 - \sigma < 1$ e $1 \geq c_1\beta$. Portanto

$$\begin{aligned}
G'(v,v) &\geq \frac{c_1\beta \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}} \left((1-\sigma)^2 + \sigma\left(1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right)\right) - b \\
&\geq \frac{c_1\beta \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}} \left((1-\sigma)^2 + \sigma\right) - b \\
&\geq \frac{3}{4} \frac{c_1\beta \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}} - b.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{3}{4}c_1\beta$, obtemos

$$G'(v,v) \geq \frac{\alpha \parallel v \parallel^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{1 + k \parallel v \parallel_{H^1(\mathbb{R}^2)}} - b.$$

$\square$

3.4 Prova do Teorema Principal

Pelas Proposições 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.4, sabemos que G é um operador definido no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^2)$, diferenciável no sentido de Gâteaux e semi-contínuo inferiormente no sentido fraco. Pela Proposição 3.3.5, sabemos que existe uma constante positiva R tal que

$$G'(v,v) > 0$$

para todo v em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = R$. Pela Proposição 2.3.1, existe uma função v_0 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ de mínimo local de G com $G'(v_0) = 0$. Pela Proposição 3.3.3, sabemos que G é estritamente convexo. Portanto, pela Proposição 2.3.2, a função v_0 é única. Mostramos que existe uma única função v_0 em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$G'(v_0, w) = 0$$

para todo w em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \{\nabla v_0 \cdot \nabla w - w\,(1 - g_0 - e^{u_0}) + we^{u_0}\,(e^{v_0} - 1)\} = 0$$

para todo w em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Por definição, segue que v_0 é a solução fraca da Equação (3.12). É possível mostrar que a função v_0 é analítica real [10].

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, J. J. Fournier. Sobolev Spaces, 2 ed. Academic Press (2003).

[2] M. Aigner. Existence of the Ginzburg-Landau Vortex Number. Commun. Math. Phys. 216, 17-22 (2001).

[3] H. J. De Vega e F. A. Schaposnik. Classical vortex solution of the Abelian Higgs model. Physical Review D 14.4, 1100 (1976).

[4] L. C. Evans. Partial Differential Equations, 2 ed. AMS (2010).

[5] G. B. Folland. Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2 ed. Wiley-Interscience (1999).

[6] L. Jacobs e C. Rebbi. Interaction energy of superconducting vortices. Physical Review B 19.9, 4486 (1979).

[7] E. Lieb e M. Loss. Analysis, 2 ed. AMS (2001).

[8] M. Murray. Line Bundles. Honours 1999 (Lecture notes) (2002).

[9] W. Rudin. Real and complex analysis, 3 ed. McGraw-Hill (1987).

[10] C. H. Taubes. Arbitrary N-Vortex Solutions to the First Order Ginzburg-Landau Equations. Commun. Math. Phys. 72, 277-292 (1980).

[11] M. M. Vainberg. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. John Wiley (1973).

[12] E. Weinberg. Multivortex solutions of the Ginzburg-Landau equations. Phys. Rev. D 19, 3008 (1979).