

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**LARISSA BASTOS MARTINELLI**

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS GEOMETRICAMENTE  
NÃO LINEARES SUBMETIDAS A CARREGAMENTO DINÂMICO**

VITÓRIA  
2019

LARISSA BASTOS MARTINELLI

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS GEOMETRICAMENTE  
NÃO LINEARES SUBMETIDAS A CARREGAMENTO DINÂMICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves

VITÓRIA  
2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

M385o Martinelli, Larissa Bastos, 1992-  
Otimização de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico / Larissa Bastos Martinelli. - 2019.  
118 f. : il.

Orientador: Élcio Cassimiro Alves.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Otimização estrutural. 2. Dinâmica estrutural. 3. Treliças (construção civil). 4. Aço - Estruturas. I. Alves, Élcio Cassimiro. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 624

---

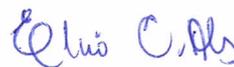
# UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

## OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS GEOMETRICAMENTE NÃO LINEARES SUBMETIDAS A CARREGAMENTO DINÂMICO

**Larissa Bastos Martinelli**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Aprovada no dia **29 de março de 2019** por:



---

Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves  
Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais  
Orientador – UFES



---

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira  
Doutor em Engenharia e Tecnologia Espaciais  
Examinador Interno – UFES



---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior  
Doutor em Engenharia Civil  
Examinador Externo – UFC



---

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira  
Doutor em Engenharia Civil  
Examinador Externo – UFOP

**Vitória – ES, março de 2019**

## **AGRADECIMENTOS**

Meus sinceros agradecimentos:

Ao professor Élcio Cassimiro Alves, pela orientação, paciência, disponibilidade e confiança durante toda a elaboração deste trabalho.

Aos professores do PPGEC/UFES, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos colegas e funcionários do PPGEC/UFES, que contribuíram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudo concedida.

À minha família, pelo carinho, apoio e incentivo constantes.

## RESUMO

Este trabalho trata da otimização de estruturas treliçadas com comportamento não linear geométrico submetidas a carregamento dinâmico. O problema de otimização formulado tem o objetivo de determinar a área da seção transversal das barras que minimiza a massa total da estrutura, impondo-se restrições aos deslocamentos nodais e às tensões axiais. Para resolvê-lo, foi desenvolvido um programa computacional na plataforma MATLAB®, utilizando os algoritmos do método dos Pontos Interiores e do método da Programação Quadrática Sequencial presentes no *Optimization Toolbox*™. Foram incluídas rotinas para agrupamento de barras e para conversão da solução ótima obtida com uso de variáveis de projeto contínuas em valores comerciais de perfis tubulares. O elemento finito não linear de treliça espacial é descrito por uma formulação Lagrangeana atualizada. O procedimento de análise dinâmica não linear geométrica implementado combina o método de Newmark com iterações do tipo Newton-Raphson, sendo validado por meio da comparação com soluções presentes na literatura e com soluções obtidas no software ANSYS®. Exemplos de treliças planas e espaciais submetidas a diferentes tipos de carregamento dinâmico são resolvidos com a aplicação do programa computacional desenvolvido. Os resultados indicam que: o método da Programação Quadrática Sequencial é o mais eficiente para a resolução do problema de otimização estudado, a consideração do amortecimento estrutural pode gerar uma redução significativa na massa total, o uso do procedimento de conversão para seções comerciais fornece soluções a favor da segurança e o agrupamento de barras torna a duração do processo de otimização satisfatória.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Não linearidade geométrica. Análise dinâmica. Treliças. Estruturas de aço. Perfil tubular.

## ABSTRACT

This study addresses the optimization of lattice structures with geometrically nonlinear behavior under dynamic loading. The formulated optimization problem aims to determine the cross-sectional area of the bars which minimizes the total mass of the structure, imposing constraints on nodal displacements and stresses. In order to solve this optimization problem, it was developed a computational program on MATLAB®, using the Interior Point method and the Sequential Quadratic Programming method, the algorithms of which are available on *Optimization Toolbox*™. It was included routines for grouping the bars and to convert the optimal solution obtained using continuous design variables in commercial values of structural hollow-sections. The space truss nonlinear finite element is described by an updated Lagrangian formulation. The implemented geometric nonlinear dynamic analysis procedure combines Newmark's method with Newton-Raphson type iterations, being validated by comparison with solutions available in the literature and with solutions obtained using ANSYS® software. Examples of plane and space trusses under different dynamic loading are solved using the developed computational program. The results show that: the Sequential Quadratic Programming method is the most efficient to solve the studied optimization problem, consideration of structural damping can lead to a significant reduction in the total mass, the use of the conversion procedure for commercial sections provides solutions in favor of security and the grouping of bars generates a satisfactory duration for the optimization process.

Keywords: Structural optimization. Geometric nonlinearity. Dynamic analysis. Trusses. Steel structures. Structural hollow-sections.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Elemento finito de treliça espacial: sistema local de coordenadas.....	31
Figura 2.2 – Elemento finito nas configurações $C_{n-1}$ e $C_n$ : sistema global de coordenadas.....	32
Figura 2.3 – Procedimento de solução incremental-iterativo.....	42
Figura 2.4 – Tipos de otimização: a) de dimensões; b) de forma; c) topológica.....	43
Figura 2.5 – Importância da escolha do valor inicial da variável de projeto. ....	46
Figura 3.1 – Interface inicial do Truss3D e menu de acesso ao programa computacional desenvolvido. ....	52
Figura 3.2 – Fluxograma de funcionamento do programa computacional.....	54
Figura 3.3 – Interface inicial: entrada de dados.....	55
Figura 3.4 – Janela de agrupamento de barras.....	56
Figura 3.5 – Gráfico para acompanhamento da otimização. ....	57
Figura 3.6 – Aviso de conclusão da otimização. ....	57
Figura 3.7 – Janela de resultados para perfil circular. ....	58
Figura 3.8 – Menus da janela de resultados. ....	58
Figura 3.9 – Visualização dos gráficos de respostas nodais. ....	59
Figura 3.10 – Visualização dos gráficos de tensões axiais. ....	59
Figura 3.11 – Relatório de otimização. ....	60
Figura 3.12 – Janela para comparações entre respostas dinâmicas. ....	61
Figura 4.1 – Domo geodésico: a) vista lateral b) vista frontal.....	63
Figura 4.2 – Carregamentos aplicados no domo geodésico. ....	63
Figura 4.3 – Deslocamento do nó central na direção Z para $\xi = 0\%$ : a) carregamento A; b) carregamento B. ....	64
Figura 4.4 – Treliça plana.....	65
Figura 4.5 – Carregamentos aplicados na treliça plana. ....	65
Figura 4.6 – Deslocamento do nó central na direção Y para $\xi = 0\%$ : a) carregamento A; b) carregamento B. ....	66
Figura 4.7 – Viga treliçada. ....	67
Figura 4.8 – Deslocamento do nó 25 na direção Z para $\xi = 0\%$ .....	68
Figura 4.9 – Deslocamento do nó central na direção Z para $\xi = 5\%$ . ....	68
Figura 4.10 – Deslocamento do nó central na direção Y para $\xi = 5\%$ .....	69
Figura 4.11 – Deslocamento do nó 25 na direção Z para $\xi = 5\%$ .....	70

Figura 4.12 – Carregamento aplicado no nó central do domo geodésico. ....	72
Figura 4.13 – Agrupamento de barras do domo geodésico. ....	72
Figura 4.14 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0\%$ e perfil circular.....	76
Figura 4.15 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0,5\%$ e perfil circular. ....	78
Figura 4.16 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 5\%$ e perfil circular.....	80
Figura 4.17 – Domo geodésico: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais. ....	81
Figura 4.18 – Carregamento aplicado no nó central da treliça plana. ....	82
Figura 4.19 – Treliça plana: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0\%$ .....	84
Figura 4.20 – Treliça plana: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0,5\%$ .....	86
Figura 4.21 – Treliça plana: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 5\%$ .....	87
Figura 4.22 – Treliça plana: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais. ....	88
Figura 4.23 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0\%$ .....	91
Figura 4.24 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0,5\%$ .....	92
Figura 4.25 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 5\%$ .....	94
Figura 4.26 – Viga treliçada: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais. ....	95
Figura 4.27 – Viga treliçada: nó e barra analisados. ....	95
Figura 4.28 – Torre treliçada. ....	96
Figura 4.29 – Torre treliçada: a) carregamento aplicado nos nós 5 e 7 na direção X; b) carregamento aplicado no nó 8 na direção X; c) carregamento aplicado no nó 8 na direção Z. ....	96
Figura 4.30 – Numeração e agrupamento de barras da torre treliçada.....	97
Figura 4.31 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0\%$ . ....	99
Figura 4.32 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0,5\%$ . ..	101
Figura 4.33 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 5\%$ . ....	102
Figura 4.34 – Torre treliçada: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais. ....	103
Figura 4.35 – Treliça piramidal.....	104
Figura 4.36 – Treliça piramidal: carregamento aplicado.....	104
Figura 4.37 – Treliça piramidal: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0\%$ . ..	106

Figura 4.38 – Treliza piramidal: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 0,5\%$ . .....	108
Figura 4.39 – Treliza piramidal: gráficos de massa total x iterações para $\xi = 5\%$ . ..	109
Figura 4.40 – Treliza piramidal: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais. .....	110

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Assuntos abordados pelos trabalhos revisados e por esta dissertação. ....	29
Tabela 4.1 – Restrições impostas ao domo geodésico. ....	72
Tabela 4.2 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil circular. ....	73
Tabela 4.3 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil quadrado. ....	73
Tabela 4.4 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil retangular. ....	73
Tabela 4.5 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0\%$ e perfil circular. ....	74
Tabela 4.6 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0\%$ e perfil quadrado. ....	74
Tabela 4.7 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0\%$ e perfil retangular. ....	74
Tabela 4.8 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0,5\%$ e perfil circular. ....	76
Tabela 4.9 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0,5\%$ e perfil quadrado. ....	77
Tabela 4.10 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 0,5\%$ e perfil retangular. ....	77
Tabela 4.11 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 5\%$ e perfil circular. ....	79
Tabela 4.12 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 5\%$ e perfil quadrado. ....	79
Tabela 4.13 – Estrutura final do domo geodésico: $\xi = 5\%$ e perfil retangular. ....	79
Tabela 4.14 – Agrupamento de barras da treliça plana. ....	82
Tabela 4.15 – Restrições impostas à treliça plana. ....	82
Tabela 4.16 – Estrutura inicial da treliça plana. ....	83
Tabela 4.17 – Estrutura final da treliça plana: $\xi = 0\%$ . ....	83
Tabela 4.18 – Estrutura final da treliça plana: $\xi = 0,5\%$ . ....	85
Tabela 4.19 – Estrutura final da treliça plana: $\xi = 5\%$ . ....	86
Tabela 4.20 – Agrupamento de barras da viga treliçada. ....	89
Tabela 4.21 – Restrições impostas à viga treliçada. ....	89
Tabela 4.22 – Estrutura inicial da viga treliçada. ....	89
Tabela 4.23 – Estrutura final da viga treliçada: $\xi = 0\%$ . ....	90
Tabela 4.24 – Estrutura final da viga treliçada: $\xi = 0,5\%$ . ....	91
Tabela 4.25 – Estrutura final da viga treliçada: $\xi = 5\%$ . ....	93
Tabela 4.26 – Agrupamento de barras da torre treliçada. ....	97
Tabela 4.27 – Restrições impostas à torre treliçada. ....	97
Tabela 4.28 – Estrutura inicial da torre treliçada. ....	98
Tabela 4.29 – Estrutura final da torre treliçada: $\xi = 0\%$ . ....	98
Tabela 4.30 – Estrutura final da torre treliçada: $\xi = 0,5\%$ . ....	100

Tabela 4.31 – Estrutura final da torre treliçada: $\xi = 5\%$ .....	101
Tabela 4.32 – Agrupamento de barras da treliça piramidal.....	104
Tabela 4.33 – Restrições impostas à treliça piramidal. ....	104
Tabela 4.34 – Estrutura inicial da treliça piramidal.....	105
Tabela 4.35 – Estrutura final da treliça piramidal: $\xi = 0\%$ .....	105
Tabela 4.36 – Estrutura final da treliça piramidal: $\xi = 0,5\%$ .....	107
Tabela 4.37 – Estrutura final da treliça piramidal: $\xi = 5\%$ .....	108

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>A</b>	vetor contendo a área da seção transversal das barras da estrutura
$\mathbf{A}_h(\mathbf{x})$	matriz Jacobiana das restrições de igualdade
$\mathbf{A}_g(\mathbf{x})$	matriz Jacobiana das restrições de desigualdade
$A$	área da seção transversal
$A_i$	área da seção transversal da i-ésima barra
$A_{\text{máx}}$	limite superior para a área da seção transversal das barras
$A_{\text{mín}}$	limite inferior para a área da seção transversal das barras
$\mathbf{a}_i$	gradientes da restrição de igualdade $h_i$
$\mathbf{a}_j$	gradientes da restrição de desigualdade $g_j$
<b>C</b>	matriz de amortecimento da estrutura
$C_0$	configuração inicial indeformada
$C_{n-1}$	última configuração deformada conhecida
$C_n$	configuração deformada atual
$c_X$	cosseno diretor em relação ao eixo global X
$c_Y$	cosseno diretor em relação ao eixo global Y
$c_Z$	cosseno diretor em relação ao eixo global Z
<b>d</b>	direção de busca
<b>E</b>	módulo de elasticidade longitudinal
<b>e</b>	vetor composto por elementos iguais a 1.
$\bar{\mathbf{F}}$	vetor de forças efetivo
$f, f(\mathbf{x})$	função objetivo
$f_{Ax}$	força interna do nó A na direção do eixo local x
$f_{Ay}$	força interna do nó A na direção do eixo local y

$f_{Az}$	força interna do nó A na direção do eixo local z
$f_{Bx}$	força interna do nó B na direção do eixo local x
$f_{By}$	força interna do nó B na direção do eixo local y
$f_{Bz}$	força interna do nó B na direção do eixo local z
$\mathbf{F}_e$	vetor de forças externas da estrutura
$\mathbf{F}_i$	vetor de forças internas da estrutura
$\mathbf{f}_i$	vetor de forças internas do elemento no sistema local
$\mathbf{f}_{i\text{global}}$	vetor de forças internas do elemento no sistema global
$\Delta\mathbf{f}_i$	incremento de forças internas
$f_y$	tensão de escoamento
$\mathbf{g}$	gradiente da função objetivo
$\bar{\mathbf{g}}$	vetor de forças dinâmicas residuais
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	restrições de desigualdade
$g_j, g_j(\mathbf{x})$	j-ésima restrição de desigualdade
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	restrições de igualdade
$h_i, h_i(\mathbf{x})$	i-ésima restrição de igualdade
$\bar{\mathbf{K}}$	matriz de rigidez efetiva
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez da estrutura
$\mathbf{k}$	matriz de rigidez do elemento no sistema local
$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$	matrizes de ordem superior do elemento no sistema local
$\mathbf{k}_e$	matriz de rigidez elástica do elemento no sistema local
$\mathbf{k}_g$	matriz de rigidez geométrica do elemento no sistema local
$\mathbf{k}_{\text{global}}$	matriz de rigidez do elemento no sistema global
L	comprimento do elemento

$L_i$	comprimento da $i$ -ésima barra
$\mathbf{M}$	matriz de massa da estrutura
$\mathbf{m}$	matriz de massa do elemento
$n - 1$	passo incremental anterior
$n$	passo incremental atual
$nb$	número total de barras da estrutura
$r_i, r_j$	fatores de penalidade
$\mathbf{S}$	matriz diagonal cujos elementos das diagonais são dados pelo vetor $\mathbf{s}$
$\mathbf{s}$	vetor de variáveis de folga
$s_i$	$i$ -ésima variável de folga
$\mathbf{T}$	matriz de transformação entre o sistema local e global
$t$	tempo
$\Delta t$	incremento de tempo
$tol$	tolerância de convergência
$\mathbf{U}$	vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$\Delta \mathbf{U}$	vetor de incremento dos deslocamentos nodais
$\delta \mathbf{U}$	vetor de correção dos deslocamentos nodais
$\dot{\mathbf{U}}$	vetor de velocidades nodais da estrutura
$\ddot{\mathbf{U}}$	vetor de acelerações nodais da estrutura
$U_{lim}$	valor limite admissível para os deslocamentos nodais
$U_{máx}$	valor máximo absoluto de deslocamento nodal sofrido pela estrutura
$\mathbf{u}$	vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local
$u_A$	translação do nó A na direção do eixo local $x$
$u_B$	translação do nó B na direção do eixo local $x$

$v_A$	translação do nó A na direção do eixo local y
$v_B$	translação do nó B na direção do eixo local y
$\mathbf{x}$	vetor de variáveis de projeto
$x_l$	l-ésima variável de projeto
$x_l^{\text{inf}}$	limite inferior da l-ésima variável de projeto
$x_l^{\text{sup}}$	limite superior da l-ésima variável de projeto
$X_A, Y_A, Z_A$	coordenadas do nó A referenciadas ao sistema global
$X_B, Y_B, Z_B$	coordenadas do nó B referenciadas ao sistema global
$\mathbf{W}$	Hessiana da função Lagrangiana
$w_A$	translação do nó A na direção do eixo local z
$w_B$	translação do nó B na direção do eixo local z
$\alpha$	tamanho de passo
$\alpha_0, \alpha_1$	coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh
$\gamma, \beta$	constantes de integração temporal de Newmark
$\gamma_{a1}$	coeficiente de ponderação da resistência
$\Lambda_g$	matriz diagonal cujos elementos das diagonais são dados pelo vetor $\lambda_g$
$\lambda$	multiplicadores de Lagrange
$\lambda_h$	vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade
$\lambda_g$	vetor de multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade
$\mu$	parâmetro de barreira
$\rho$	massa específica
$\xi, \xi$	taxa de amortecimento
$\sigma_{C_{\text{lim}}}$	valor limite admissível para a tensão de compressão
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$	valor máximo de tensão axial de compressão atuante na estrutura

$\sigma_{Tlim}$	valor limite admissível para a tensão de tração
$\sigma_{Tm\acute{a}x}$	valor máximo de tensão axial de tração atuante na estrutura
$\omega$	frequência natural de vibração
$\phi$	vetor do modo de vibração

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	OBJETIVOS	19
1.2	JUSTIFICATIVA	20
1.3	BASE COMPUTACIONAL TRUSS3D	20
1.4	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>23</b>
2.1	ESTADO DA ARTE	23
2.1.1	Análise dinâmica não linear geométrica	23
2.1.2	Otimização com consideração de restrições dinâmicas	25
2.1.3	Otimização com consideração de não linearidade geométrica	26
2.1.4	Otimização com análise dinâmica não linear geométrica	27
2.1.5	Síntese do estado da arte	28
2.2	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	29
2.2.1	Formulação do elemento finito não linear	31
2.3	ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	35
2.3.1	Matriz de massa	36
2.3.2	Matriz de amortecimento	37
2.3.2.1	Frequências naturais	38
2.3.3	Solução da equação de equilíbrio	39
2.3.3.1	Método de Newmark	40
2.3.3.2	Procedimento incremental-iterativo	41
2.4	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	43
2.4.1	Pontos Interiores	46
2.4.2	Programação Quadrática Sequencial	49
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>51</b>
3.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	52
3.2	PROGRAMA COMPUTACIONAL	54
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>62</b>
4.1	VALIDAÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	62
4.1.1	Sem amortecimento ( $\xi = 0\%$ )	62
4.1.1.1	Exemplo 1: domo geodésico	62

4.1.1.2	Exemplo 2: treliça plana .....	65
4.1.1.3	Exemplo 3: viga treliçada .....	67
<b>4.1.2</b>	<b>Com amortecimento (<math>\xi = 5\%</math>).....</b>	<b>68</b>
4.1.2.1	Exemplo 1: domo geodésico .....	68
4.1.2.2	Exemplo 2: treliça plana .....	69
4.1.2.3	Exemplo 3: viga treliçada .....	69
<b>4.1.3</b>	<b>Considerações sobre a validação .....</b>	<b>70</b>
<b>4.2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE DIMENSÕES .....</b>	<b>70</b>
4.2.1	Exemplo 1: domo geodésico .....	71
4.2.2	Exemplo 2: treliça plana.....	82
4.2.3	Exemplo 3: viga treliçada.....	88
4.2.4	Exemplo 4: torre treliçada.....	96
4.2.5	Exemplo 5: treliça piramidal .....	103
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	
	<b>111</b>	
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>114</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Projetar estruturas eficientes e de baixo custo sem prejudicar sua integridade é um desafio constante para engenheiros (ARORA, 2012). Um bom projeto deve apresentar o menor custo possível e atender às condições arquitetônicas, de segurança e construtivas, o que faz da busca pela melhor solução um problema bastante complexo.

O procedimento convencional para definir qual configuração da estrutura deve ser adotada consiste em um processo de tentativa e erro. Usualmente, parte-se de uma configuração inicial estimada e verifica-se o atendimento de certos critérios estabelecidos. Caso algum desses critérios não seja atendido, adota-se uma nova configuração e repetem-se as verificações, até que todos os critérios sejam satisfeitos. Em seguida, o projetista deve decidir se essa solução será mantida ou se alterações serão feitas para melhorá-la. No entanto, não existe uma maneira formal para realizar esse aprimoramento e não há garantias de que a melhor solução foi encontrada. Como testar todas as soluções possíveis é uma tarefa inviável, esse procedimento depende fortemente da intuição e experiência do projetista.

Alternativamente, pode-se adotar técnicas de otimização estrutural, com as quais a maioria das interferências subjetivas do projetista são afastadas. O procedimento otimizado tem início com a formulação do problema de otimização, por meio da definição das variáveis de projeto, da função objetivo e do conjunto de restrições que devem ser atendidas. Em seguida, uma configuração inicial é aprimorada automaticamente com o uso de um método de otimização adequado até que a solução ótima seja encontrada.

Neste trabalho, o procedimento otimizado será aplicado ao estudo de treliças metálicas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico. Treliças são estruturas compostas por elementos de barra com ligações rotuladas, caracterizadas por transmitir apenas esforços axiais, de tração ou compressão. Uma treliça é dita plana quando todas as suas barras e cargas estão no mesmo plano e espacial caso contrário.

Na otimização de dimensões desse tipo de estrutura, as variáveis de projeto são inerentemente discretas, isto é, elas não podem assumir valores reais arbitrários,

devendo ser escolhidas a partir de um conjunto de valores predefinidos. Isso porque a escolha das dimensões das seções transversais de seus elementos está condicionada aos valores comerciais disponíveis nos catálogos de fabricantes de perfis estruturais.

A eficiência do processo de otimização é bastante afetada quando a estrutura está submetida a carregamento dinâmico, uma vez que a realização repetitiva da análise estrutural dinâmica durante a otimização gera um grande esforço computacional. Isso é agravado se o comportamento não linear da estrutura for considerado, já que o procedimento de análise estrutural se torna ainda mais complexo. No entanto, a consideração dos efeitos não lineares permite que seja obtido uma previsão mais realista do comportamento estrutural.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar a otimização de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico. A seguir são listados os objetivos específicos:

- Desenvolver rotinas para realizar a análise dinâmica não linear geométrica de estruturas treliçadas planas e espaciais;
- Validar as rotinas de análise dinâmica não linear geométrica por meio da comparação com soluções numéricas presentes na literatura e com soluções geradas pelo software ANSYS®;
- Formular o problema de otimização para determinar a área da seção transversal das barras que minimiza a massa total de uma estrutura treliçada geometricamente não linear submetida a carregamento dinâmico, impondo-se restrições aos deslocamentos nodais e às tensões axiais;
- Desenvolver um programa computacional na plataforma MATLAB® para estudar o problema de otimização formulado, utilizando o método dos Pontos Interiores e o método da Programação Quadrática Sequencial;
- Desenvolver rotinas para agrupamento de barras, visando reduzir a duração do processo de otimização; e
- Como os métodos de otimização adotados trabalham apenas com variáveis de projeto contínuas, desenvolver rotinas para realizar a conversão das soluções

ótimas obtidas para seções comerciais, mais especificamente seções tubulares.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

A otimização estrutural tem sido amplamente estudada nas últimas décadas. Nessa linha de pesquisa, muitos estudos já foram realizados sobre o projeto ótimo de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos e vários outros sobre a consideração de algum tipo de não linearidade durante o processo de otimização. No entanto, há uma escassez nas literaturas nacional e internacional de trabalhos que abordem os dois assuntos simultaneamente, ou seja, que estudem problemas de otimização de estruturas com comportamento não linear submetidas a carregamento dinâmico. Fica claro, portanto, a necessidade de esforços de pesquisa com esse direcionamento, o que motiva a realização desta dissertação.

## **1.3 BASE COMPUTACIONAL TRUSS3D**

Esta dissertação dá continuidade à expansão de uma base computacional chamada Truss3D, que vem sendo desenvolvida há alguns anos por alunos da Universidade Federal do Espírito Santo, sob a orientação do Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves.

A implementação dessa base computacional teve início em 2014, com o Projeto de Graduação dos ex-alunos Hélio Gomes Filho e Mindszenty Júnior Pedroza Garozi. Nesse trabalho, os autores desenvolveram um programa computacional, chamado inicialmente de Structure3D, capaz de realizar a modelagem estrutural e a análise estática linear de treliças planas e espaciais.

Essa ferramenta computacional foi implementada modularmente na plataforma MATLAB®, de forma a facilitar a inclusão de novas funcionalidades em trabalhos futuros. Isso possibilitou que, nos anos seguintes, vários alunos de graduação e pós-graduação contribuíssem para a sua ampliação, utilizando-a como base para o desenvolvimento de programas computacionais de análise, dimensionamento e otimização estrutural.

A primeira contribuição foi feita por Novelli et al. (2015a), que inseriram no Structure3D um programa de dimensionamento de estruturas treliçadas submetidas a

carregamentos estáticos de acordo com a ABNT NBR 8800:2008 e a ABNT NBR 16239:2013, utilizando perfis tubulares comerciais. Nesse mesmo ano, Novelli et al. (2015b), elaboraram um programa para realizar o dimensionamento ótimo de treliças tubulares submetidas a carregamentos estáticos com uso do método da Programação Quadrática Sequencial.

Em 2016, o nome da base computacional foi alterado de Structure3D para Truss3D, devido ao seu foco no estudo de estruturas treliçadas. Nessa época, Martinelli et al. (2016) desenvolveram programas computacionais de análise estática não linear e de análise dinâmica linear. A análise estática não linear era realizada com uso do método de Newton-Raphson e a análise dinâmica linear utilizava o método de Newmark. Além disso, Azolin et al. (2016) elaboraram um programa de otimização estrutural para treliças submetidas a carregamentos dinâmicos. Esse programa desprezou os efeitos da não linearidade, impôs restrições aos deslocamentos nodais e utilizou o método da Programação Quadrática Sequencial. Os autores também foram responsáveis pela implementação da análise modal.

Posteriormente, o programa de análise estática não linear foi aprimorado por Martinelli e Alves (2017b), que implementaram o método do comprimento de arco, possibilitando o traçado de todo o caminho de equilíbrio da estrutura. Essa nova rotina de análise estática não linear foi utilizada em Martinelli e Alves (2017a) para desenvolver um dimensionamento otimizado de treliças tubulares geometricamente não lineares submetidas a carregamentos estáticos de acordo com a ABNT NBR 8800:2008 e a ABNT NBR 16239:2013, utilizando o método dos Pontos Interiores.

Em seguida, Neves et al. (2018) iniciaram os estudos de otimização discreta, elaborando um programa de dimensionamento otimizado de treliças tubulares submetidos a carregamentos estáticos. As restrições impostas seguiram os critérios presentes na ABNT NBR 8800:2008 e na ABNT NBR 16239:2013 e o problema de otimização foi resolvido utilizando o método dos Algoritmos Genéticos. Os autores também implementaram uma nova forma de inserção de geometria no Truss3D com uso de agrupamento de barras, por meio da importação de um arquivo em formato .dxf gerado pelo software AutoCAD®. Por fim, Martinelli e Alves (2018) ampliaram o programa de análise dinâmica iniciado em Martinelli et al. (2016), incluindo rotinas para considerar os efeitos da não linearidade geométrica e aprimorando sua interface gráfica.

Nesta dissertação, a base computacional existente é expandida ainda mais, por meio da inserção de um programa computacional capaz de estudar a otimização de treliças geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico. Mais detalhes sobre os recursos do Truss3D utilizados neste trabalho e sua integração com o programa computacional desenvolvido são apresentados no Capítulo 3.

#### **1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO**

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos. No Capítulo 1 foi feita uma breve introdução ao tema, a apresentação dos objetivos e da justificativa do trabalho e a descrição do histórico de desenvolvimento da base computacional Truss3D.

O Capítulo 2 contém a revisão da literatura, abordando os principais trabalhos relacionados ao objeto de estudo desta dissertação, com atenção especial para trabalhos sobre análise dinâmica não linear geométrica, otimização com consideração de não linearidade geométrica e otimização com consideração de restrições dinâmicas. Além disso, também é apresentada uma fundamentação teórica abrangendo não linearidade geométrica, análise dinâmica não linear geométrica e otimização estrutural.

O Capítulo 3 explica a metodologia empregada, incluindo a formulação do problema de otimização estudado e a descrição do programa computacional desenvolvido.

O Capítulo 4 é dedicado à apresentação e discussão dos resultados. Inicialmente, é feita a validação do procedimento de análise dinâmica implementado, utilizando como base de comparação soluções numéricas encontradas na literatura e soluções geradas pelo software ANSYS®. Em seguida, são estudados exemplos de aplicação do programa computacional desenvolvido.

Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

## **2 REVISÃO DA LITERATURA**

Este capítulo é dividido em duas partes. Inicialmente, na Seção 2.1, são abordados trabalhos anteriores relacionados ao objeto de estudo desta dissertação. Em seguida, nas Seções 2.2 a 2.4, é apresentada uma fundamentação teórica, abrangendo os efeitos da não linearidade geométrica, a análise dinâmica não linear geométrica e a otimização estrutural.

### **2.1 ESTADO DA ARTE**

Nesta seção, é feita uma revisão dos principais estudos relacionados aos temas de interesse desta dissertação. O estado da arte apresentado foi restringido à trabalhos aplicados a estruturas treliçadas. Nas subseções que abrangem otimização estrutural, foram abordados apenas trabalhos sobre otimização de dimensões.

#### **2.1.1 Análise dinâmica não linear geométrica**

Muitos pesquisadores têm se empenhado no aperfeiçoamento e desenvolvimento de metodologias práticas e eficientes para a análise dinâmica não linear de estruturas treliçadas.

Nessa linha de pesquisa, destaca-se, inicialmente, o artigo de Noor e Peters (1980), que apresentaram um procedimento computacional para obter a resposta dinâmica de treliças espaciais com não linearidade física e geométrica utilizando uma formulação mista, cujas incógnitas fundamentais consistem nas forças nos elementos, velocidades nodais e deslocamentos nodais. O sistema de equações obtido para descrever o comportamento das treliças é um misto de equações algébricas e diferenciais e sua integração temporal é feita por meio de um algoritmo explícito.

Kassimali e Bidhendi (1988) realizaram um estudo da estabilidade e da resposta não linear de duas configurações de treliças, o domo geodésico e a treliça de Von Mises, submetidas a carregamentos dinâmicos. O método de análise adota uma formulação Euleriana e a integração numérica é feita com o método de Newmark.

Zhu et al. (1994) utilizaram uma formulação Lagrangeana atualizada e o método de Newmark em um procedimento computacional para obter a resposta dinâmica não

linear geométrica e física de treliças espaciais gerada por diferentes tipos de carregamentos dinâmicos, com durações e amplitudes variadas.

Wang et al. (2006) desenvolveram uma nova formulação, chamada VFIFE (*Vector Form Intrinsic Finite Element*), para simular o comportamento dinâmico não linear de treliças espaciais. O procedimento proposto foi combinado com um método de integração temporal explícito e aplicado a vários exemplos numéricos.

Ferreira (2009) desenvolveu um procedimento para análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais, com ênfase em estruturas *tensegrity*. A não linearidade geométrica foi abordada por meio da formulação Posicional, que utiliza como incógnitas as posições nodais ao invés dos deslocamentos, e a análise dinâmica foi realizada com uso de algoritmos de integração temporal explícitos (Diferenças Centrais e  $\alpha$ -Generalizado) e implícitos (Wilson- $\theta$  e HHT).

Outro assunto de interesse em análises dinâmicas é a determinação da carga dinâmica crítica, que pode causar instabilidade na estrutura mesmo que ela se mantenha estável sobre uma carga estática de mesma magnitude (XUE; MEEK, 2001). Entre os principais trabalhos que tratam da instabilidade de estruturas treliçadas não lineares submetidas a carregamentos dinâmicos, pode-se citar: Kim et al. (1997), que investigaram numericamente a influência do amortecimento na instabilidade dinâmica de treliças espaciais abatidas sujeitas a diferentes tipos de carregamentos dinâmicos; e Xue e Meek (2001), que analisaram a instabilidade dinâmica não linear geométrica de estruturas bi e tridimensionais utilizando a formulação corrotacional.

Diante do grande número de equações resultantes da discretização do modelo estrutural em elementos finitos, alguns autores direcionaram suas pesquisas para o desenvolvimento de técnicas para reduzir a dimensão do problema e, conseqüentemente, diminuir o tempo de análise. Dentre eles, destaca-se as contribuições de Abrate e Sun (1983), que utilizaram o método matricial e modelos contínuos equivalentes para estudar treliças planas apresentando grandes deflexões quando sujeitas a carregamentos estáticos e dinâmicos; e Slaats et al. (1995), que propuseram três tipos de modos para redução do sistema de equações não linear dinâmico aplicados a treliças planas geometricamente não lineares.

### 2.1.2 Otimização com consideração de restrições dinâmicas

Os problemas de otimização considerando restrições dinâmicas são caracterizados pelo grande esforço computacional necessário para a realização repetitiva da análise estrutural dinâmica e a verificação das restrições em cada instante do tempo (SILVA, 2000).

Dentro dessa linha de pesquisa, alguns estudos buscaram a configuração estrutural ótima de treliças considerando restrições de frequência natural. Bellagamba e Yang (1981) abordaram um problema de minimização da massa estrutural de treliças submetidas a carga estática, com restrições de deslocamentos nodais, tensões e frequência natural. Khot (1985) utilizou um método baseado no critério de otimalidade para minimizar o peso de uma estrutura sujeita a múltiplas restrições de frequência. Uma treliça com 38 elementos foi estudada, considerando duas distribuições diferentes de massa não estrutural, para satisfazer três restrições diferentes de frequência. Kaveh e Ilchi Ghazaan (2016) discutiram o projeto ótimo de domos treliçados de grande porte com múltiplas restrições de frequências naturais. O procedimento adotado reduz o peso da estrutura ao longo de várias etapas de otimização, utilizando inicialmente um número pequeno de variáveis de projeto, que vai sendo gradualmente aumentado a cada etapa.

Além disso, diversos autores têm estudado problemas de otimização de treliças submetidas a carregamentos dinâmicos. Ohno et al. (1989) apresentaram uma metodologia computacional para obter o menor peso de estruturas treliçadas planas submetidas a múltiplas cargas dinâmicas, satisfazendo restrições de deslocamentos nodais, tensões e frequências naturais. Silva (1992) elaborou um sistema computacional para a determinação do peso mínimo de estruturas treliçadas planas e espaciais solicitadas por carregamento harmônico, considerando restrições de resposta dinâmica e frequência natural. Chen (1992) desenvolveu um procedimento de otimização para obter o menor peso de estruturas planas com restrições de deslocamentos estáticos e dinâmicos, utilizando Programação Linear Sequencial e um sistema reduzido aproximado. Kocer e Arora (2002) formularam o problema de otimização de torres de linhas de transmissão submetidas a carregamentos dinâmicos de terremoto. Fonseca (2007) desenvolveu um procedimento para a otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais, especialmente torres de linha de transmissão

com perfis tubulares, submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos, aplicando algoritmos genéticos e redes neurais.

### **2.1.3 Otimização com consideração de não linearidade geométrica**

A otimização estrutural considerando o comportamento não linear geométrico tem sido muito estudada na literatura há algumas décadas. A seguir, é feito um histórico sobre os principais trabalhos que abordam a otimização de dimensões de estruturas treliçadas geometricamente não lineares.

Smaoui e Schmit (1988) introduziram uma abordagem integrada para obter projetos com peso mínimo de treliças espaciais com não linearidade geométrica, combinando as etapas de análise e otimização em um processo único. Foram estudados domos treliçados com e sem imperfeições geométricas, sujeitos a restrições de deslocamentos, tensões, áreas das seções transversais e de estabilidade.

Buscando reduzir o custo computacional do processo de otimização, Haftka (1989) propôs uma abordagem integrada para obter o projeto ótimo de estruturas que requerem análise não linear. O procedimento começa com uma resposta estrutural linearizada e os efeitos não lineares são introduzidos gradualmente até a obtenção da solução ótima. Foram estudados exemplos de treliças planas e espaciais sujeitas a restrições de tensão e de área mínima das seções transversais.

Pyrz (1990) tratou da otimização discreta de treliças com comportamento não linear geométrico. O problema estudado consiste na minimização do peso estrutural e determinação do conjunto ótimo de seções transversais dos elementos, de forma que o carregamento externo aplicado não cause perda de estabilidade na estrutura. São apresentados exemplos de treliças espaciais abatidas, sujeitas a restrições de tensões e estabilidade.

Saka e Ulker (1992) desenvolveram um algoritmo de otimização de treliças espaciais com não linearidade geométrica, considerando restrições de deslocamentos, tensões e área das seções transversais das barras. Foi demonstrado numericamente que a consideração do comportamento não linear no processo de otimização pode resultar em uma maior redução de peso que a consideração de comportamento linear.

Sedaghati et al. (2001) utilizaram a técnica de controle de deslocamentos, proposta por Batoz e Dhatt (1979), na etapa de análise do problema de otimização de treliças simétricas geometricamente não lineares com restrições de estabilidade.

Vários exemplos de referência em otimização de estruturas geometricamente não lineares podem ser encontrados em Suleman e Sedaghati (2005). Nesse artigo, os autores desenvolveram um algoritmo de otimização para treliças e vigas sujeitas a grandes deslocamentos e restrições de estabilidade.

Hrinda e Nguyen (2008) propuseram uma técnica de otimização, combinando o método do comprimento de arco e a abordagem da densidade de energia de deformação, para buscar o peso mínimo de treliças abatidas geometricamente não lineares considerando restrições de estabilidade.

Silva (2011) estudou problemas de otimização utilizando Algoritmos Genéticos (AG) para buscar soluções ótimas para estruturas reticuladas com comportamento não linear geométrico, através da variação das características das seções transversais das barras. Foram utilizadas codificações especiais dos cromossomos no AG, por meio de restrições de cardinalidade simples e múltiplas, para obter os melhores agrupamentos das barras das estruturas. Um estudo comparativo entre otimização usando análise linear e análise não linear também é fornecido.

Martinelli e Alves (2017a) apresentaram a formulação e implementação computacional do dimensionamento otimizado de treliças tubulares com comportamento geometricamente não linear de acordo com as normas ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 16239:2013, utilizando o método do comprimento de arco e o método dos Pontos Interiores.

#### **2.1.4 Otimização com análise dinâmica não linear geométrica**

Apesar do grande número de publicações em temas afins, conforme apresentado nas seções anteriores, são poucos os trabalhos que abordam otimização estrutural considerando simultaneamente efeitos dinâmicos e de não linearidades.

Esse aspecto é destacado por Kim e Park (2010), que chamam atenção para a dificuldade de encontrar exemplos na literatura de otimização da resposta dinâmica não linear, principalmente com o uso de métodos de otimização determinísticos.

Segundo os autores, isso se deve ao alto custo computacional gerado para lidar com funções não lineares dependentes do tempo ao longo do processo de otimização. Como alternativa, os autores propõem uma expansão do método das Forças Estáticas Equivalentes para o caso não linear. O procedimento de solução envolve a aproximação das forças dinâmicas aplicadas em um conjunto de forças estáticas que produzam o mesmo campo de resposta. Alguns exemplos de aplicação são apresentados, incluindo uma treliça plana com não linearidade física.

Recentemente, no entanto, a validade do método das Forças Estáticas Equivalentes foi questionada por Stolpe et al. (2018), que afirmam que suas propriedades teóricas de convergência não são tão fortes, geralmente falhando em encontrar a solução ótima do problema dinâmico considerado.

A falta de trabalhos abordando o objeto de estudo desta dissertação reforça a necessidade de esforços de pesquisa para o desenvolvimento dessa área de conhecimento.

#### **2.1.5 Síntese do estado da arte**

Os trabalhos revisados nas seções anteriores deste capítulo estão listados na Tabela 2.1, onde são classificados de acordo com os assuntos abordados. Na última linha dessa tabela foi incluída esta dissertação, para situá-la no contexto da literatura.

Tabela 2.1 – Assuntos abordados pelos trabalhos revisados e por esta dissertação.

Referência	Não linearidade geométrica	Carregamentos dinâmicos	Análise dinâmica	Otimização estrutural
Noor e Peters (1980)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Abrate e Sun (1983)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kassimali e Bihendi (1988)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Zhu et al. (1994)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Slaats et al. (1995)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kim et al. (1997)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Xue e Meek (2001)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wang et al. (2006)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ferreira (2009)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Bellagamba e Yang (1981)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Khot (1985)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Ohno et al. (1989)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Silva (1992)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Chen (1992)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Kocer e Arora (2002)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fonseca (2007)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Kaveh e Ilchi Ghazaan (2016)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Smaoui e Schmit (1988)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Haftka (1989)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Pyrz (1990)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Saka e Ulker (1992)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Sedaghati et al. (2001)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Suleman e Sedaghati (2005)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Hrinda e Nguyen (2008)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Silva (2011)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Martinelli e Alves (2017a)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Kim e Park (2010)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<b>Martinelli (2019)</b>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

## 2.2 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Dentre os tipos de não linearidade que podem se manifestar em uma estrutura, destacam-se dois: a não linearidade física e a não linearidade geométrica.

A não linearidade física resulta do fato do material não apresentar um comportamento elástico linear, ou seja, a relação tensão-deformação não é linear e, portanto, a lei de

Hooke não é obedecida. Nesse caso, a não linearidade aparece na forma de equações constitutivas mais complexas.

Já a não linearidade geométrica, também conhecida como efeitos de segunda ordem, é produzida por deformações finitas associadas com mudanças na rigidez da estrutura para um determinado nível de carregamento aplicado. Esse tipo de não linearidade deve ser considerado sempre que houver mudanças significativas na geometria da estrutura, uma vez que essa situação gera um acréscimo considerável de forças internas. Nesse caso, as equações de equilíbrio da estrutura são escritas na configuração deformada e o princípio da superposição não é válido.

Durante o processo de discretização espacial do problema estrutural, os efeitos não lineares são simulados por meio da formulação adotada para descrever o movimento dos elementos finitos que compõem a estrutura. As duas principais formulações propostas na literatura especializada são a Euleriana e a Lagrangeana. Na formulação Euleriana as coordenadas espaciais, ou seja, as coordenadas associadas ao corpo deformado, são utilizadas como referência. Já na formulação Lagrangeana, as coordenadas materiais, isto é, aquelas associadas ao corpo antes da deformação, que são empregadas como coordenadas de referência.

Segundo Yang e Kuo (1994), a formulação Lagrangeana é especialmente adequada para análises não lineares do tipo passo-a-passo de corpos sólidos, em que o principal interesse está no histórico de deformação de cada ponto do corpo durante o processo de carregamento. A formulação Euleriana, por outro lado, tem sido mais utilizada na análise de problemas de mecânica dos fluidos, em que a atenção é focada no movimento do material ao longo de um certo volume de controle.

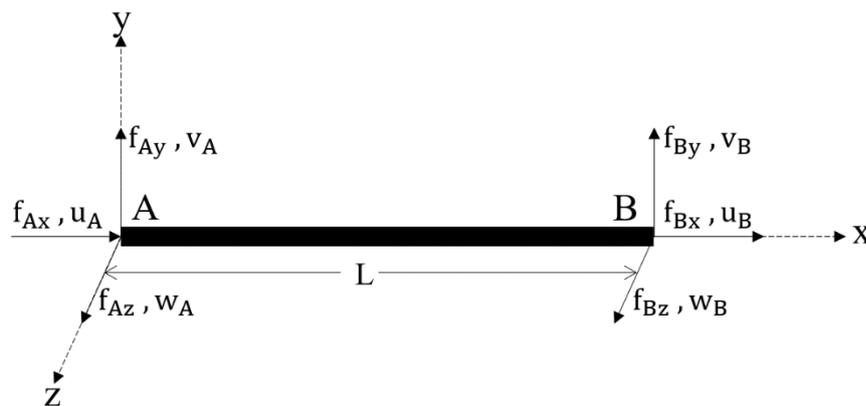
Pela abordagem Lagrangeana, o movimento de uma estrutura pode ser descrito por três configurações típicas: a configuração inicial indeformada ( $C_0$ ), a última configuração deformada conhecida ( $C_{n-1}$ ) e a configuração deformada atual ( $C_n$ ). Dependendo de qual configuração anterior é selecionada como referência para estabelecer o equilíbrio do corpo na configuração atual, a formulação Lagrangeana pode ser identificada como atualizada ou total. Na formulação Lagrangeana atualizada, a última configuração deformada conhecida ( $C_{n-1}$ ) é tomada como referência, enquanto na formulação Lagrangeana total utiliza-se a configuração inicial indeformada ( $C_0$ ).

Nesta dissertação foi adotada uma formulação Lagrangeana atualizada. A seguir, são apresentados o elemento finito estudado, os pontos mais relevantes para a definição da matriz de rigidez e do vetor de forças internas desse elemento e o procedimento necessário para determinar a matriz de rigidez e o vetor de forças internas da estrutura. Para uma explicação detalhada contendo as deduções das expressões apresentadas, ver Yang e Kuo (1994). Ressalta-se que apenas os efeitos da não linearidade geométrica são considerados.

### 2.2.1 Formulação do elemento finito não linear

O elemento finito de treliça estudado está ilustrado na Figura 2.1. Trata-se de um elemento espacial, limitado pelo nós A e B. Os deslocamentos e forças nodais do elemento também são apresentados.

Figura 2.1 – Elemento finito de treliça espacial: sistema local de coordenadas.



Fonte: Autora.

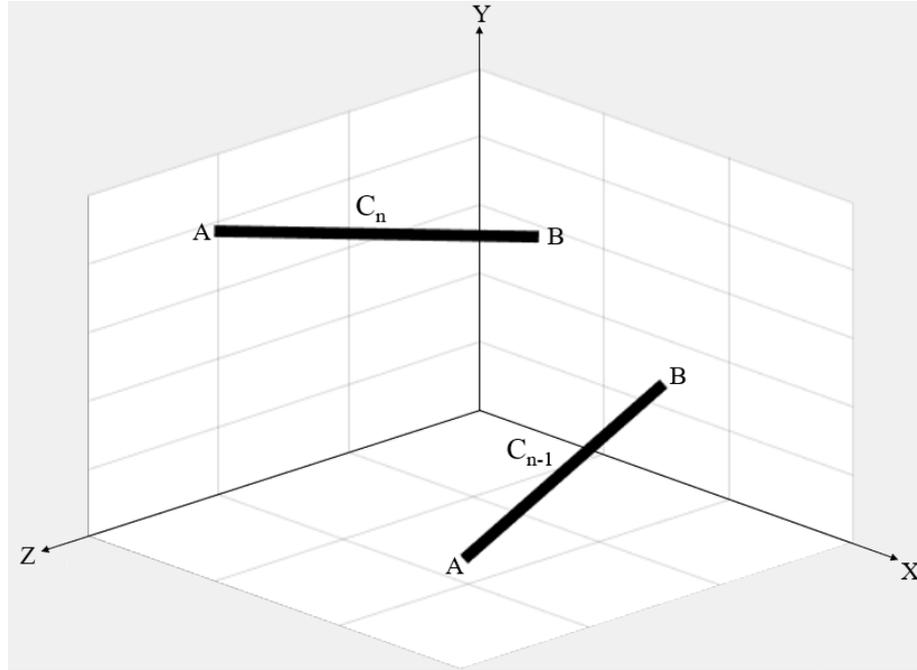
Considera-se que na configuração de equilíbrio  $C_{n-1}$  os nós A e B do elemento possuem coordenadas  $(X_{A_{n-1}}, Y_{A_{n-1}}, Z_{A_{n-1}})$  e  $(X_{B_{n-1}}, Y_{B_{n-1}}, Z_{B_{n-1}})$ , respectivamente (Figura 2.2). O comprimento do elemento nessa configuração é dado por:

$$L_{n-1} = \sqrt{(X_{B_{n-1}} - X_{A_{n-1}})^2 + (Y_{B_{n-1}} - Y_{A_{n-1}})^2 + (Z_{B_{n-1}} - Z_{A_{n-1}})^2} \quad (2.1)$$

Na configuração de equilíbrio  $C_n$ , os nós A e B passam a ocupar as coordenadas  $(X_{A_n}, Y_{A_n}, Z_{A_n})$  e  $(X_{B_n}, Y_{B_n}, Z_{B_n})$ , respectivamente. O comprimento do elemento nessa configuração é dado por:

$$L_n = \sqrt{(X_{B_n} - X_{A_n})^2 + (Y_{B_n} - Y_{A_n})^2 + (Z_{B_n} - Z_{A_n})^2} \quad (2.2)$$

Figura 2.2 – Elemento finito nas configurações  $C_{n-1}$  e  $C_n$ : sistema global de coordenadas.



Fonte: Autora.

O deslocamento sofrido entre as configurações  $C_{n-1}$  e  $C_n$  é dado, no sistema local de coordenadas, pela equação:

$$\mathbf{u} = \{u_A \ v_A \ w_A \ u_B \ v_B \ w_B\}^T \quad (2.3)$$

Analogamente, o vetor de forças internas nas configurações  $C_{n-1}$  e  $C_n$  é composto, no sistema local de coordenadas, por três forças em cada extremidade da barra, ou seja:

$$\mathbf{f}_{i_{n-1}} = \{f_{Ax_{n-1}} \ f_{Ay_{n-1}} \ f_{Az_{n-1}} \ f_{Bx_{n-1}} \ f_{By_{n-1}} \ f_{Bz_{n-1}}\}^T \quad (2.4)$$

$$\mathbf{f}_{i_n} = \{f_{Ax_n} \ f_{Ay_n} \ f_{Az_n} \ f_{Bx_n} \ f_{By_n} \ f_{Bz_n}\}^T \quad (2.5)$$

Para um elemento de treliça em equilíbrio, todas as forças cisalhantes desaparecem e as forças axiais são iguais em magnitudes, mas opostas em sentido. Portanto, as Equações (2.4) e (2.5) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{i_{n-1}} = \{-f_{Bx_{n-1}} \ 0 \ 0 \ f_{Bx_{n-1}} \ 0 \ 0\}^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{f}_{i_n} = \{-f_{Bx_n} \ 0 \ 0 \ f_{Bx_n} \ 0 \ 0\}^T \quad (2.7)$$

O vetor de forças internas da configuração deformada atual ( $\mathbf{f}_{i_n}$ ) se relaciona com o vetor de forças internas da configuração deformada anterior ( $\mathbf{f}_{i_{n-1}}$ ) por meio da equação:

$$\mathbf{f}_{i_n} = (\mathbf{f}_{i_{n-1}} + \Delta\mathbf{f}_i) \frac{L_n}{L_{n-1}} \quad (2.8)$$

em que o vetor  $\Delta\mathbf{f}_i$  é dado por:

$$\Delta\mathbf{f}_i = \{-\Delta N \ 0 \ 0 \ \Delta N \ 0 \ 0\}^T \quad (2.9)$$

$$\Delta N = EA \left( \frac{L_n^2 - L_{n-1}^2}{2L_n^2} \right) \quad (2.10)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e A a área da seção transversal.

A matriz de rigidez do elemento, no sistema local de coordenadas, é definida pela equação:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (2.11)$$

Como pode ser observado na equação anterior, a matriz de rigidez é composta por cinco componentes: a matriz de rigidez elástica ( $\mathbf{k}_e$ ), a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{k}_g$ ) e as matrizes de ordem superior ( $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$ ). Todas elas são definidas nas equações seguintes:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{k}_g = \frac{f_{Bx_{n-1}}}{L_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{2L_{n-1}^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{2L_{n-1}^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EA}{6L_{n-1}^3} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & -\mathbf{h} \\ -\mathbf{h} & \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & 3\Delta v^2 + \Delta u^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & 3\Delta w^2 + \Delta v^2 + \Delta u^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

sendo  $\Delta u = u_B - u_A$ ,  $\Delta v = v_B - v_A$  e  $\Delta w = w_B - w_A$ .

Segundo Yang e Kuo (1994), a vantagem do uso das matrizes  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$ , juntamente com as matrizes  $\mathbf{k}_e$  e  $\mathbf{k}_g$ , é permitir a análise do alongamento e das características de corpo rígido do elemento de treliça.

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento podem ser transformados para o sistema global de coordenadas da seguinte forma:

$$\mathbf{k}_{\text{global}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{f}_{\text{iglobal}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_i \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação entre o sistema local e global, dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{c_X}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} & \frac{c_Y}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} & \frac{c_Z}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} \\ \frac{-c_X c_Y}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} & 0 & \frac{-c_Y c_Z}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} \\ \frac{-c_Z}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} & 0 & \frac{c_X}{\sqrt{c_X^2 + c_Z^2}} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

sendo  $c_X$ ,  $c_Y$  e  $c_Z$  os cossenos diretores em relação aos eixos globais X, Y e Z.

Para o caso particular em que o eixo local x é paralelo ao eixo global Y, ou seja, quando  $c_X = c_Z = 0$ , a matriz  $\mathbf{R}$  passa a ser definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & c_Y & 0 \\ -c_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

A transformação da matriz de rigidez é feita com a matriz  $\mathbf{T}$  atualizada na configuração  $C_{n-1}$ . Já para a transformação do vetor de forças internas, utiliza-se a matriz  $\mathbf{T}$  atualizada na última iteração processada.

Por fim, a matriz de rigidez da estrutura ( $\mathbf{K}$ ) é obtida no sistema global por meio da sobreposição das matrizes de rigidez determinadas para cada elemento que a compõe ( $\mathbf{k}_{\text{global}}$ ). Assim como o vetor de forças internas da estrutura ( $\mathbf{F}_i$ ) consiste na sobreposição dos vetores de forças internas definidos para cada um dos elementos ( $\mathbf{f}_{i\text{global}}$ ).

### 2.3 ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Segundo Clough e Penzien (2003), um problema estrutural dinâmico difere de um problema estático em dois aspectos principais. A primeira diferença está na característica dinâmica do carregamento, que por definição significa que sua magnitude, direção e/ou posição variam com o tempo. Como consequência, a resposta estrutural também varia com o tempo, e, portanto, um problema dinâmico não tem uma única solução, mas sim uma sucessão de soluções correspondentes aos instantes de interesse. O segundo aspecto é que na análise de problemas dinâmicos as forças inerciais, definidas pela segunda Lei de Newton como o produto da massa pela aceleração, passam a ser relevantes.

O objetivo principal de uma análise dinâmica é calcular as respostas provocadas na estrutura por um dado carregamento aplicado dependente do tempo. As respostas dinâmicas de interesse são os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, obtidos como funções do tempo, assim como a magnitude dos esforços internos gerados.

A equação de equilíbrio que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural pode ser escrita, após a discretização espacial, como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_e(t) \quad (2.23)$$

em que  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  e  $\mathbf{U}$  são, respectivamente, os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais;  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa;  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento;  $\mathbf{F}_i$  é o vetor de forças internas, que é função dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ ; e  $\mathbf{F}_e$  é o vetor de forças externas dependente do tempo.

Conforme exposto na Seção 2.2.1, o vetor de forças internas da estrutura ( $\mathbf{F}_i$ ) é obtido por meio da sobreposição das contribuições de cada elemento finito. A determinação da matriz de massa ( $\mathbf{M}$ ) e da matriz de amortecimento ( $\mathbf{C}$ ) é apresentada nas Seções 2.3.1 e 2.3.2.

A Equação (2.23) consiste em um sistema de equações diferenciais ordinárias, em quantidade igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Para a solução, essas equações devem ser discretizadas e integradas no tempo por meio de um algoritmo de integração. A estratégia de solução adotada é apresentada na Seção 2.3.3.

### 2.3.1 Matriz de massa

A matriz de massa consiste em uma representação discreta da distribuição de massa contínua da estrutura, podendo ser escrita na forma consistente ou concentrada.

A matriz de massa consistente é definida com o uso de funções de forma que decorrem diretamente da discretização de elementos finitos. Esse tipo de matriz de massa pode proporcionar maior precisão da resposta do sistema e uma convergência mais rápida do processo iterativo de solução (GALVÃO, 2004).

Para um elemento de treliça espacial, a matriz de massa consistente é dada por:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do material,  $A$  é a área da seção transversal e  $L$  é o comprimento do elemento.

A matriz de massa concentrada é obtida por um procedimento mais simples, em que toda a massa dos elementos é assumida como estando concentrada em seus nós. A matriz resultante é diagonal e, por isso, apresenta a vantagem computacional de requerer menor espaço de armazenamento e menos tempo de processamento.

Para um elemento de treliça espacial, a matriz de massa concentrada é dada por:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A escolha do tipo de matriz de massa a ser adotada está relacionada com o tipo de análise que será realizada, o tipo de método de solução empregado e até mesmo o tipo de discretização utilizado. Portanto, nenhuma das duas abordagens apresentadas pode ser considerada como ideal para a solução de todos os problemas dinâmicos. Nesta dissertação, optou-se pela utilização da matriz de massa concentrada, por ser a mais utilizada nos trabalhos revisados na Seção 2.1.

Ressalta-se que a matriz de massa da estrutura é obtida por meio da sobreposição das matrizes de massa de cada elemento.

### 2.3.2 Matriz de amortecimento

Para definir a matriz de amortecimento da estrutura optou-se por utilizar o método do amortecimento proporcional, também conhecido como amortecimento de Rayleigh. Dessa forma, a matriz de amortecimento é representada como uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa, ou seja:

$$\mathbf{C} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{K} \quad (2.26)$$

em que  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  são os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh. Seus valores são obtidos a partir de duas taxas de amortecimento  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , referentes a duas frequências naturais distintas  $\omega_i$  e  $\omega_j$ , pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \begin{bmatrix} \omega_i & -\omega_j \\ -1/\omega_i & 1/\omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Usualmente adota-se a mesma taxa de amortecimento para ambas as frequências naturais, ou seja,  $\xi_i = \xi_j = \xi$ . Nesse caso, a Equação (2.27) é simplificada para:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \begin{Bmatrix} \omega_i \omega_j \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

O valor adotado para a taxa de amortecimento depende do tipo de material e do nível de tensão. Para estruturas de aço, por exemplo,  $\xi$  pode variar de 0,5% a 5% (COOK et al., 1989).

De acordo com Vaz (2011),  $\omega_i$  e  $\omega_j$  podem ser tomados como iguais às duas menores frequências naturais de vibração da estrutura. O cálculo das frequências naturais é explicado na seção seguinte.

### 2.3.2.1 Frequências naturais

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da sua distribuição de massa e rigidez. A cada frequência natural está associado um modo de vibração, que descreve as configurações assumidas pela estrutura ao oscilar em vibração livre (SILVA, 2009).

Para determinar essas duas características dinâmicas da estrutura, assume-se que após sofrer uma perturbação inicial, o sistema estrutural continua a vibrar por si próprio sem a ação de forças externas. Na resolução desse problema de vibração livre, os efeitos de amortecimento são geralmente desconsiderados. Assim, a equação de equilíbrio dinâmico da estrutura (Equação (2.23)) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Admite-se que nessas condições a estrutura apresenta movimentos harmônicos da forma:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \text{sen}(\omega t) \quad (2.30)$$

sendo  $\omega$  uma frequência natural de vibração do sistema em rad/s e  $\boldsymbol{\phi}$  o vetor do modo de vibração correspondente, que contém as amplitudes do movimento associadas aos graus de liberdade da estrutura.

Admitindo a resposta da Equação (2.30) na Equação (2.29), chega-se a equação característica do problema de autovalor:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

em que  $\omega^2$  é o autovalor e  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor correspondente. O número de frequências naturais e modos de vibração obtidos pela solução da Equação (2.31) é igual ao número de graus de liberdade da estrutura.

Vale notar que a matriz de rigidez de uma estrutura geometricamente não linear varia ao longo da análise dinâmica, gerando alterações nas suas frequências naturais. Neste trabalho, no entanto, as frequências naturais da estrutura foram consideradas constantes, portanto a matriz  $\mathbf{K}$  utilizada na Equação (2.31) é composta apenas pela sobreposição das matrizes de rigidez elástica das barras da estrutura (Equação (2.12)).

### 2.3.3 Solução da equação de equilíbrio

A literatura especializada dispõe de vários métodos de solução para determinar respostas dinâmicas, cada um com vantagens e desvantagens que devem ser ponderadas no momento da escolha, levando em consideração as particularidades do sistema analisado.

Para sistemas estruturais não lineares, costuma-se utilizar métodos de integração direta, que podem ser classificados como explícitos ou implícitos. Nos métodos explícitos, a solução do problema dinâmico no instante atual  $t_n$  é obtida em termos do histórico dos deslocamentos nodais e de suas derivadas nos instantes anteriores. Já nos métodos implícitos, além desse histórico, a solução também é função dos deslocamentos nodais e de suas derivadas no instante atual  $t_n$  (COOK et al., 1989).

Para problemas de dinâmica estrutural, Cook et al. (1989) afirmam que os métodos implícitos normalmente apresentam um desempenho melhor que os explícitos. Neste trabalho, adotou-se o método implícito de Newmark, que é apresentado na Seção

2.3.3.1, combinado com um procedimento iterativo, conforme detalhado na Seção 2.3.3.2.

Antes, porém, algumas considerações sobre a notação utilizada devem ser feitas. Nas expressões apresentadas:

- Subscritos referem-se ao passo incremental. Assim,  $n$  indica o passo incremental atual e  $n - 1$  indica o passo incremental anterior; e
- Sobrescritos referem-se às iterações, isto é:  $k$  indica a iteração atual e  $k - 1$  indica a iteração anterior. A etapa predita do procedimento de solução corresponde a iteração 0.

### 2.3.3.1 Método de Newmark

As fórmulas gerais do método de Newmark são dadas pelas equações abaixo:

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_{n-1} + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_n] \quad (2.32)$$

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n-1} + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}[2\beta\ddot{\mathbf{U}}_n + (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] \quad (2.33)$$

em que os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  definem a variação da aceleração ao longo do incremento de tempo  $\Delta t$  e determinam a estabilidade e eficiência do método. Neste trabalho, adotou-se  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$ , que correspondem ao método de Newmark com aceleração constante, por serem os valores mais utilizados nos trabalhos revisados na Seção 2.1.

A partir da Equação (2.33), encontra-se a seguinte expressão para as acelerações nodais:

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\Delta\mathbf{U} - \Delta t\dot{\mathbf{U}}_{n-1}) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_{n-1} \quad (2.34)$$

Substituindo a equação anterior na Equação (2.32), a expressão para as velocidades nodais pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{U} - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{U}}_{n-1} - \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_{n-1} \quad (2.35)$$

A substituição das Equações (2.34) e (2.35) na Equação (2.23) estabelece o equilíbrio dinâmico da estrutura no instante  $t_n$  em função dos deslocamentos nodais. A condição de equilíbrio fica definida como:

$$\bar{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.36)$$

com  $\bar{\mathbf{K}}$  e  $\bar{\mathbf{F}}$  sendo definidos como a matriz de rigidez efetiva e o vetor de forças efetivo, expressos como:

$$\bar{\mathbf{K}} = a_1\mathbf{M} + a_2\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (2.37)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{e_n} + \mathbf{M}[a_3\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + a_4\ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] + \mathbf{C}[a_5\dot{\mathbf{U}}_{n-1} + a_6\ddot{\mathbf{U}}_{n-1}] - \mathbf{F}_{i_{n-1}} \quad (2.38)$$

Os coeficientes usados nas equações anteriores são:

$$a_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}; a_2 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}; a_3 = \frac{1}{\beta\Delta t}; a_4 = \frac{1}{2\beta} - 1; a_5 = \frac{\gamma}{\beta} - 1; a_6 = \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \quad (2.39)$$

### 2.3.3.2 Procedimento incremental-iterativo

Para obter o histórico das respostas dinâmicas não lineares, combina-se o método de Newmark com iterações do tipo Newton-Raphson, compondo um procedimento de solução incremental-iterativo.

Em cada passo incremental, inicialmente, calcula-se uma estimativa para os deslocamentos nodais, por meio da Equação (2.36). Com isso, utilizando as Equações (2.34) e (2.35), obtém-se também uma estimativa para as velocidades e acelerações nodais. Essa etapa inicial é chamada de fase predita.

Como  $\mathbf{F}_i$  é uma função não linear dos deslocamentos nodais, essa solução estimada nem sempre satisfaz a equação de equilíbrio da estrutura, gerando forças residuais. O vetor de forças dinâmicas residuais ( $\bar{\mathbf{g}}$ ) quantifica o desequilíbrio do sistema, sendo definido como:

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{F}_{e_n} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{F}_{i_n} \quad (2.40)$$

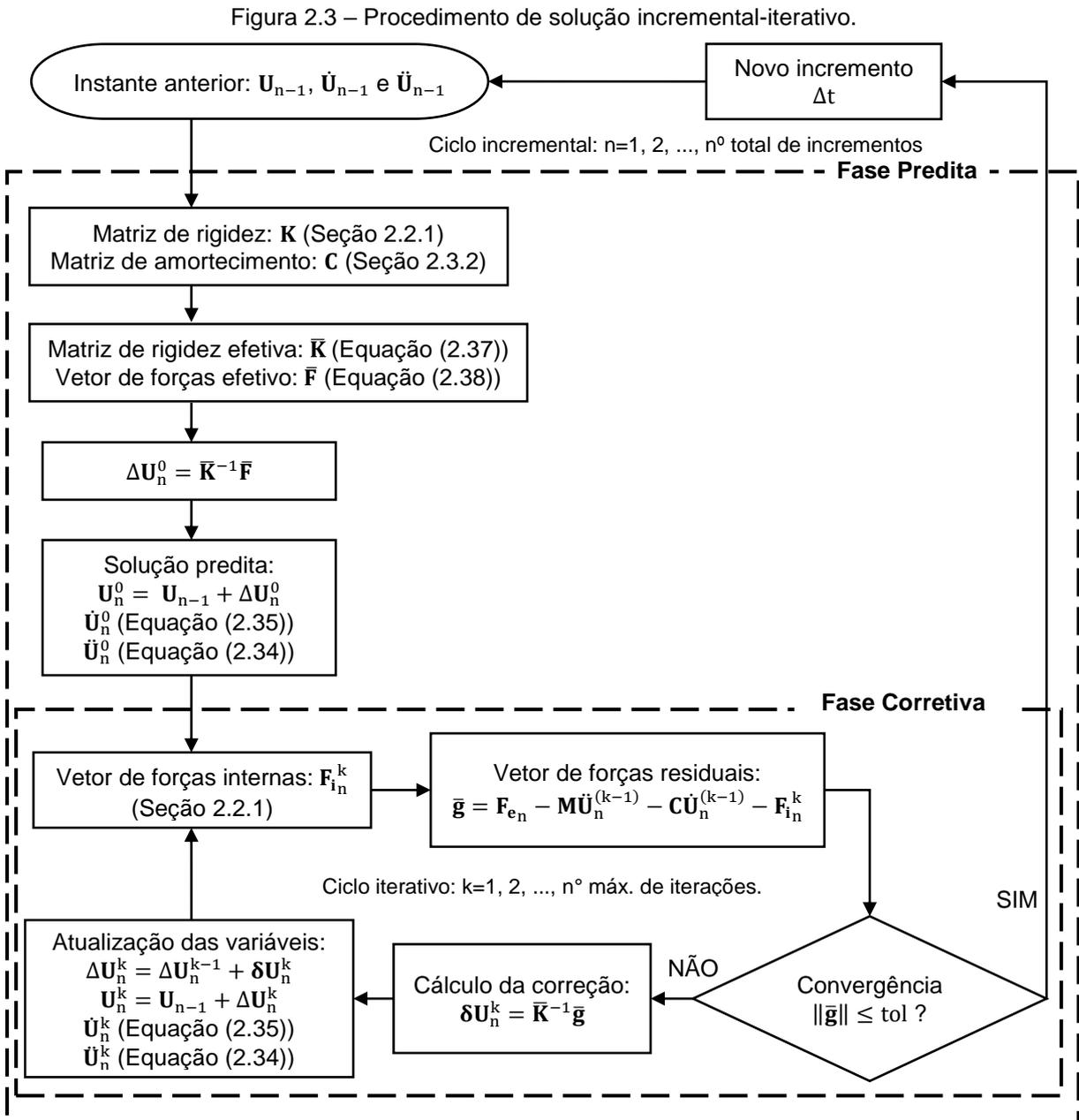
Em seguida, na fase corretiva, calcula-se uma correção para os deslocamentos nodais ( $\delta\mathbf{U}$ ), que posteriormente é utilizada para corrigir as velocidades e acelerações nodais. O processo iterativo termina quando, segundo um critério de convergência, o equilíbrio

da estrutura for restaurado. Neste trabalho, foi adotado o critério de convergência abaixo:

$$\|\bar{\mathbf{g}}\| \leq \text{tol} \quad (2.41)$$

sendo tol a tolerância de convergência, adotada como  $10^{-3}$ .

Esse procedimento de solução está resumido na Figura 2.3.

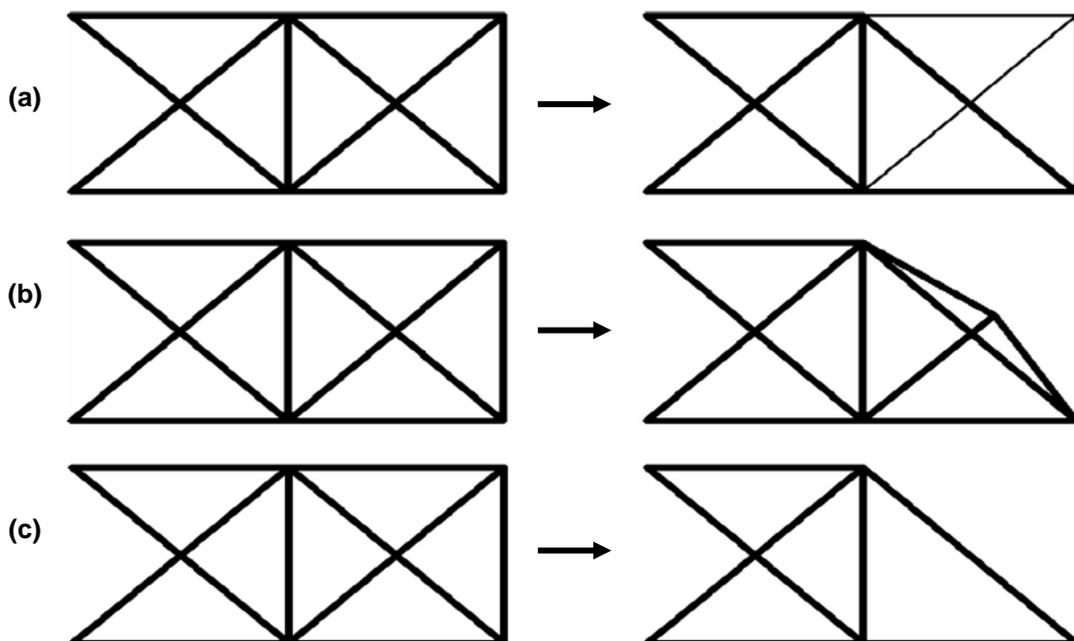


## 2.4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização é um processo sistemático para determinar a melhor solução de um dado problema. Para isso, uma solução inicial é aprimorada automaticamente, por meio da determinação sucessiva de novas soluções, cuja viabilidade é avaliada de acordo com sua capacidade de atingir o objetivo do problema (minimizar o custo, maximizar a rigidez, etc.) e de atender a certos critérios, usualmente relacionados com desempenho, segurança, limitações de fabricação, entre outros.

Problemas de otimização estrutural podem ser tratados com três enfoques diferentes: otimização de dimensões, de forma e topológica (Figura 2.4). Na otimização de dimensões, busca-se determinar as dimensões ótimas das seções transversais dos elementos da estrutura, mantendo sua forma e topologia fixas. Na otimização de forma, a solução ótima é obtida alterando a posição dos contornos externos e internos da estrutura, fixando suas dimensões e topologia. Já a otimização topológica está relacionada com a melhor distribuição do material, mantendo fixas a forma e as dimensões da estrutura. A topologia ótima é obtida com a criação de furos em estruturas contínuas e com a remoção ou inclusão de elementos em estruturas discretizadas.

Figura 2.4 – Tipos de otimização: a) de dimensões; b) de forma; c) topológica.



Fonte: Adaptado de Fonseca (2007).

De modo geral, um problema de otimização pode ser esquematizado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Determinar} & \mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r\} \\
 \text{Que minimiza/maximiza} & f(\mathbf{x}) \\
 \text{Sujeito a:} & \\
 \text{restrições de igualdade:} & h_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \dots, p \\
 \text{restrições de desigualdade:} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \ j = 1, \dots, q \\
 \text{restrições laterais:} & x_l^{\text{inf}} \leq x_l \leq x_l^{\text{sup}}, \ l = 1, \dots, r
 \end{array} \tag{2.42}$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de projeto,  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo,  $h_i(\mathbf{x})$  são as restrições de igualdade,  $g_j(\mathbf{x})$  são as restrições de desigualdade e  $x_l^{\text{inf}}$  e  $x_l^{\text{sup}}$  são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto.

A função objetivo é a representação matemática do propósito do problema, que pode envolver sua minimização ou maximização. Essa função é utilizada durante a otimização como um critério para avaliar o mérito de cada possível solução.

As restrições representam as condições que devem ser atendidas para que uma solução seja considerada viável, podendo haver restrições de igualdade e/ou desigualdade. Uma restrição de desigualdade  $g_j(\mathbf{x})$  é dita ativa quando assume valor zero para um dado  $\mathbf{x}$ . Caso a restrição de desigualdade assuma um valor negativo, ela passa a ser chamada de inativa, sendo que sua influência sobre a solução ótima fica cada vez menor quanto mais afastado de zero for esse valor. Obviamente, restrições de igualdade devem ser sempre ativas.

Tanto a função objetivo quanto as restrições devem ser funções das variáveis de projeto. Essas últimas são os parâmetros que são alterados ao longo da busca pela solução ótima. Cada solução testada durante a otimização consiste em um conjunto diferente de valores atribuídos às variáveis de projeto. Essas variáveis podem ser contínuas, discretas ou inteiras. As contínuas podem assumir qualquer valor real entre os limites inferior e superior especificados. As discretas são selecionadas a partir de um conjunto finito de valores. E as inteiras, como o próprio nome indica, devem ser dadas por valores inteiros.

De certa forma, o uso de variáveis discretas e inteiras geram restrições adicionais ao problema de otimização, visto que limitam o espaço de busca. Com isso, para um

mesmo problema de minimização, o valor ótimo da função objetivo tende a ser menor com a utilização de variáveis contínuas do que com variáveis discretas ou inteiras. Arora (2012) sugere que problemas de otimização que exijam o uso de variáveis discretas ou inteiras sejam resolvidos, inicialmente, considerando as variáveis como contínuas e, posteriormente, tenham os valores discretos/inteiros mais próximos atribuídos à solução ótima encontrada, verificando ao final a viabilidade dessa nova solução.

Uma vez formulado o problema de otimização, deve-se selecionar um método de solução adequado para resolvê-lo. De forma geral, os métodos de otimização são procedimentos iterativos, que podem ser classificados como determinísticos ou probabilísticos.

Os métodos determinísticos apresentam comportamento previsível, isto é, para um certo conjunto de dados de entrada será sempre obtido o mesmo resultado. Usualmente, a busca pelas possíveis soluções requer o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Portanto, para aplicá-los é necessário que a função objetivo seja contínua e diferenciável no espaço de busca. Como exemplo desse tipo de método, pode-se citar o método dos Pontos Interiores, o método da Programação Quadrática Sequencial e o método do Lagrangeano Aumentado.

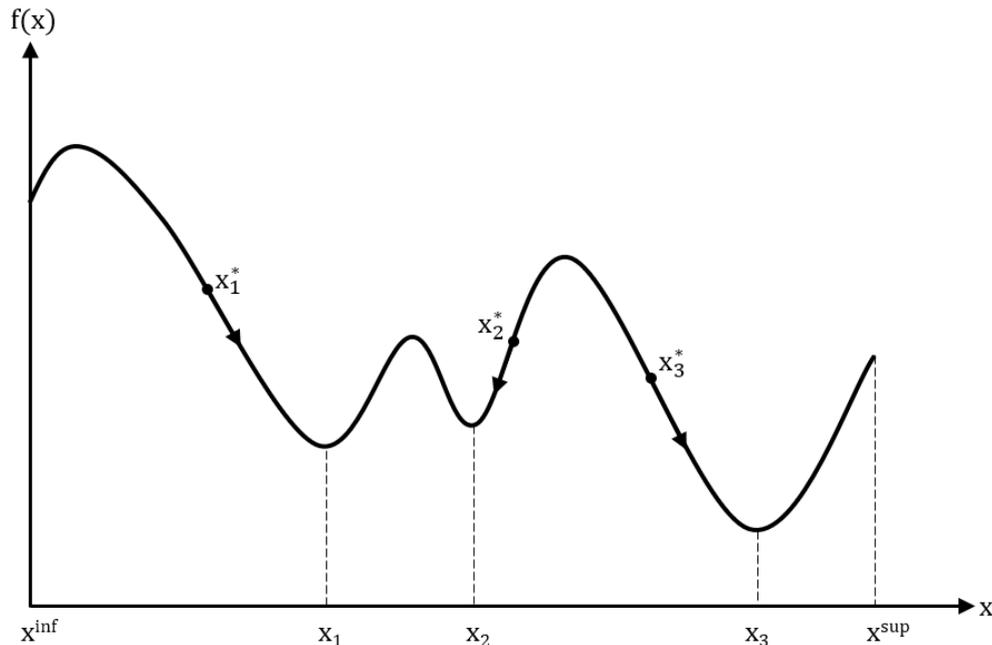
Nos métodos probabilísticos, a busca por soluções é feita apenas por meio da avaliação da função objetivo, não utilizando suas derivadas em relação às variáveis de projeto. Devido à natureza estocástica dos algoritmos de busca, um mesmo conjunto de dados de entrada pode resultar em soluções finais diferentes. Entre os métodos probabilísticos, destaca-se o método dos Algoritmos Genéticos, o método do Recozimento Simulado e o método da Colônia de Formigas.

A solução obtida pelo método de otimização utilizado é dita um mínimo local quando ela é a melhor solução possível na sua vizinhança. Caso a solução encontrada seja a melhor possível em todo o espaço de busca, ela é dita um mínimo global.

Cabe ressaltar que a qualidade da solução obtida pode estar relacionada com o ponto de partida definido para o processo de otimização. Dependendo do valor inicial especificado para as variáveis de projeto, o algoritmo de otimização pode não ser capaz de encontrar o mínimo global, convergindo, assim, para um mínimo local. Isso

é ilustrado na Figura 2.5, onde simula-se o comportamento de uma função objetivo de uma única variável.  $x_1$  e  $x_2$  correspondem a pontos onde a função atinge o valor mínimo localmente, enquanto  $x_3$  corresponde ao mínimo global. Se a otimização partir dos pontos  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$ , o algoritmo convergirá para os pontos ótimos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente.

Figura 2.5 – Importância da escolha do valor inicial da variável de projeto.



Fonte: Autora.

Nesta dissertação será estudado um problema de otimização de dimensões, utilizando o método dos Pontos Interiores e o método da Programação Quadrática Sequencial. Algumas considerações sobre esses dois métodos de otimização são feitas nas seções seguintes.

### 2.4.1 Pontos Interiores

O método dos Pontos Interiores trabalha diretamente com a região viável do problema estudado. Essa região é composta por todos os pontos do espaço de busca que atendem às restrições impostas ao problema, chamados de pontos viáveis.

O procedimento de solução consiste, basicamente, em, partindo de um ponto inicial, definir uma direção de busca e um tamanho de passo para encontrar um novo ponto viável com valor de função objetivo menor ou igual ao anterior. Dessa forma, uma

sequência de pontos é gerada no interior da região viável até a convergência para a solução ótima, que necessariamente também está contida nessa região.

A principal vantagem desse método é que os pontos gerados em cada iteração do processo de otimização têm valores decrescentes de função objetivo e atendem a todas as restrições impostas. Com isso, em caso de não convergência, garante-se que o último ponto encontrado terá sempre o valor da função menor ou igual aos anteriores, além de ser uma solução viável.

O algoritmo do método dos Pontos Interiores pertencente ao *Optimization Toolbox*<sup>TM</sup> do MATLAB<sup>®</sup>, que será utilizado nesta dissertação, é baseado nos trabalhos de Byrd et al. (1999, 2000) e Waltz et al. (2006). Nessa abordagem, o problema de otimização original é definido como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{Sujeito a:} && \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &&& \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Acrescentando variáveis de folga positivas e uma penalidade logarítmica, o problema de otimização original é associado a um problema de barreira:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f_\mu(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) \\ &\text{Sujeito a:} && \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ &&& \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo  $\mu > 0$  o parâmetro de barreira,  $\mathbf{s}$  o vetor de variáveis de folga e  $\mathbf{z} = [\mathbf{x} \ \mathbf{s}]^T$ .

À medida que  $\mu$  decresce para zero, o valor mínimo da  $f_\mu(\mathbf{z})$  se aproxima do valor mínimo de  $f(\mathbf{x})$ . Associa-se ao problema da Equação (2.44) a seguinte função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = f_\mu(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\lambda}_h^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}_g^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) \quad (2.45)$$

em que  $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbb{R}^l$  e  $\boldsymbol{\lambda}_g \in \mathbb{R}^m$  são os vetores de multiplicadores de Lagrange e  $\boldsymbol{\lambda}$  é definido como  $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_h \ \boldsymbol{\lambda}_g]^T$ .

As condições de otimalidade de primeira ordem para o problema da Equação (2.44) são dadas por:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{A}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\Lambda}_g \mathbf{e} - \mu \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.46)$$

em que  $\mathbf{S}$  e  $\boldsymbol{\Lambda}_g$  são matrizes diagonais cujos elementos das diagonais são dados pelos vetores  $\mathbf{s}$  e  $\boldsymbol{\lambda}_g$ , respectivamente;  $\mathbf{A}_h(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{A}_g(\mathbf{x})$  são as matrizes Jacobianas das restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , respectivamente; e o vetor  $\mathbf{e}$  é composto por elementos iguais a 1.

Aplicando o método de Newton para resolver o problema da Equação (2.46), obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) & \mathbf{A}(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_z \\ \mathbf{d}_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_z \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) \\ \mathbf{c}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) &= \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_g(\mathbf{x}) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_h \\ \mathbf{d}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \end{bmatrix}, \\ \nabla_z \mathcal{L}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \mu) &= \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}_h + \mathbf{A}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}_g \\ \mathbf{S} \boldsymbol{\Lambda}_g \mathbf{e} - \mu \mathbf{e} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Após a definição das direções de busca  $\mathbf{d}_z$  e  $\mathbf{d}_\lambda$ , com a solução do sistema da Equação (2.47), determina-se a nova solução  $(\mathbf{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^* &= \mathbf{z} + \alpha_z \mathbf{d}_z \\ \boldsymbol{\lambda}^* &= \boldsymbol{\lambda} + \alpha_\lambda \mathbf{d}_\lambda \end{aligned} \quad (2.49)$$

Os valores de tamanho de passo  $\alpha_z$  e  $\alpha_\lambda$  são calculados em duas etapas. Primeiro calcula-se os valores máximos:

$$\begin{aligned} \alpha_z^{\text{máx}} &= \max\{\alpha \in (0,1]: \mathbf{s} + \alpha \mathbf{d}_s \geq (1 - \tau) \mathbf{s}\} \\ \alpha_\lambda^{\text{máx}} &= \max\{\alpha \in (0,1]: \boldsymbol{\lambda}_g + \alpha \mathbf{d}_g \geq (1 - \tau) \boldsymbol{\lambda}_g\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

com  $0 < \tau < 1$  (usualmente adota-se  $\tau = 0,995$ ).

Depois realiza-se uma busca linear para definir os tamanhos de passo  $\alpha_z \in (0, \alpha_z^{\text{máx}}]$  e  $\alpha_\lambda \in (0, \alpha_\lambda^{\text{máx}}]$ , de modo a reduzir uma função de mérito, definida como:

$$f_\mu(\mathbf{z}) + \nu \|\mathbf{c}(\mathbf{z})\| \quad (2.51)$$

em que o parâmetro  $\nu$  pode aumentar com as iterações, com intuito de forçar a solução para a região viável. Se a função de mérito não for reduzida, o algoritmo rejeita o passo atual e calcula um novo passo.

### 2.4.2 Programação Quadrática Sequencial

O algoritmo do método da Programação Quadrática Sequencial foi originalmente proposto por Wilson (1963) e posteriormente aprimorado por diversos pesquisadores como Garcia Palomares e Mangasarian (1976), Han (1977) e Powell (1978).

Em linhas gerais, esse método baseia-se no estudo do problema de otimização proposto por meio da resolução de uma sequência de problemas mais simples cujas soluções convirjam para a solução do problema de otimização original. O problema de otimização considerado é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{Sujeito a:} \quad & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para isso, a função objetivo do problema é substituída por uma aproximação quadrática e cada restrição é substituída por uma aproximação linear, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \mathbf{g}^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \\ \text{Sujeito a:} \quad & h_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & g_j + \mathbf{a}_j^T \mathbf{d} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.53)$$

Em que  $\mathbf{g}$  é o gradiente da função objetivo,  $\mathbf{d}$  é a direção de busca,  $\mathbf{W}$  é a Hessiana da função Lagrangiana,  $\mathbf{a}_i$  são os gradientes da restrição de igualdade  $h_i$  e  $\mathbf{a}_j$  são os gradientes da restrição de desigualdade  $g_j$ .

A Equação (2.53) consiste em um Problema de Programação Quadrática (PPQ). Segundo Parente Junior (2000), a solução desse tipo de problema envolve as três etapas definidas a seguir:

1. Eliminação das restrições de igualdade, reduzindo a quantidade de variáveis independentes. Com isso, obtém-se um problema reduzido de programação quadrática, contendo apenas restrições de desigualdade;
2. Transformação do problema reduzido de programação quadrática em um Problema Linear Complementar (PLC). A resolução do PLC pode ser feita por meio de métodos de pivoteamento como o de Lemke; e
3. Recuperação da solução para o espaço original com o cálculo das variáveis eliminadas na etapa 1, obtendo-se a direção de busca  $\mathbf{d}$  e os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ .

Por fim, é feita uma busca linear na direção de busca  $\mathbf{d}$  para determinar um tamanho de passo  $\alpha$  que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade  $p(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d})$ , definida pela expressão:

$$p(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l r_i |h_i(\mathbf{x})| + \sum_{j=1}^m r_j \max[g_j(\mathbf{x}), 0] \quad (2.54)$$

em que  $r_i$  e  $r_j$  são fatores de penalidade.

### 3 METODOLOGIA

Para a implementação do programa computacional, foram criadas um conjunto de rotinas na plataforma MATLAB® (R2016a) capazes de executar as seguintes tarefas:

- Realizar a análise dinâmica não linear geométrica de estruturas treliçadas, utilizando o procedimento de solução apresentado na Seção 2.3.3;
- Realizar a otimização de dimensões de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico, utilizando o método dos Pontos Interiores ou o método da Programação Quadrática Sequencial;
- Definir grupos de barras com área de seção transversal igual, para reduzir o número de variáveis de projeto e, conseqüentemente, reduzir a duração do processo de otimização; e
- Converter a solução ótima obtida com uso de variável de projeto contínua para valores de seções comerciais, com a opção de utilizar perfil tubular circular, quadrado ou retangular.

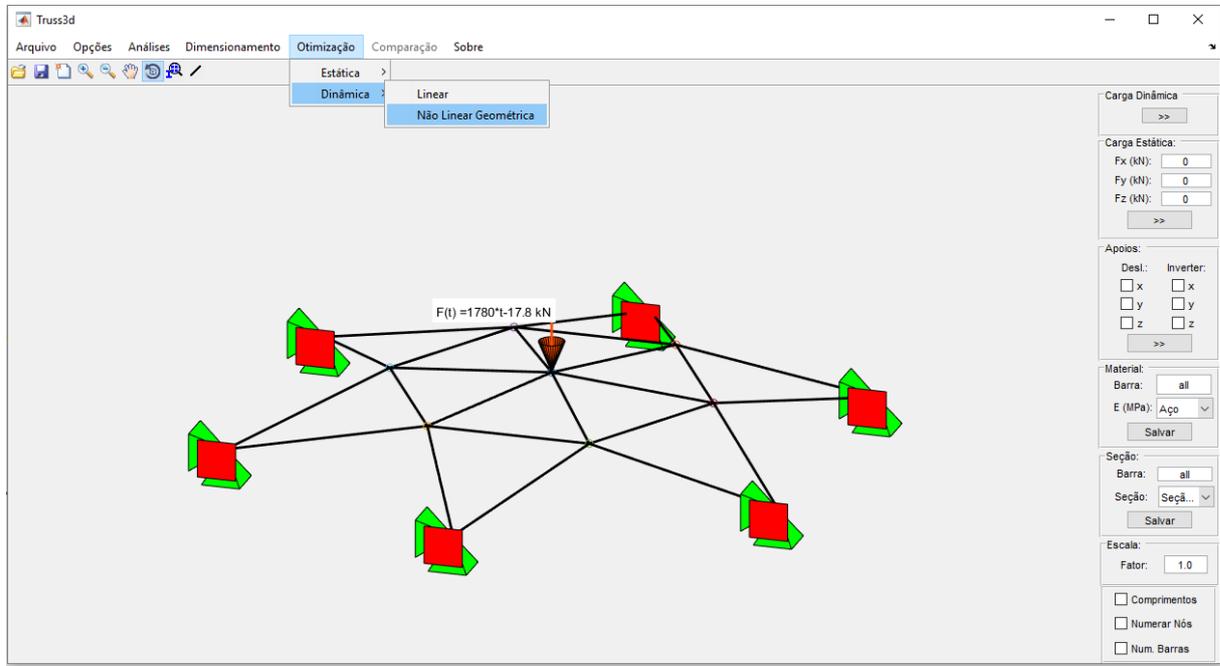
Além disso, também foi desenvolvida uma interface gráfica, utilizando o GUIDE (*Graphical User Interface Development Environment*) do MATLAB®. A interface do programa é simples e de uso intuitivo, tendo o objetivo de auxiliar o usuário durante a entrada dos dados necessários para a otimização e facilitar a visualização e interpretação dos resultados.

O programa computacional foi integrado ao Truss3D (Figura 3.1), uma base computacional para análise, dimensionamento e otimização de estruturas treliçadas que vem sendo desenvolvida por alunos de graduação e pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, sob a orientação do Prof. Dr. Élcio Cassimiro Alves. Os recursos do Truss3D foram utilizados na etapa de pré-processamento, que consiste na definição de todas as características relevantes da estrutura inicial a ser otimizada (geometria, condições de apoio, propriedades geométricas, propriedades do material e carregamento dinâmico aplicado). Mais detalhes sobre essa etapa podem ser encontrados em Martinelli e Alves (2018).

Destaca-se que, no processo de otimização implementado, os algoritmos utilizados do método dos Pontos Interiores e do método da Programação Quadrática Sequencial são partes integrantes do *Optimization Toolbox*™ do MATLAB®. A aplicação desses

algoritmos é feita por meio da função *fmincon*, que é especialmente indicada para encontrar a solução ótima de problemas sujeitos a restrições não lineares, como é o caso do problema de otimização estudado neste trabalho.

Figura 3.1 – Interface inicial do Truss3D e menu de acesso ao programa computacional desenvolvido.



Fonte: Autora.

A seguir, serão abordados a formulação do problema de otimização estudado e o funcionamento do programa computacional desenvolvido.

### 3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O objetivo do problema de otimização estudado é determinar a área da seção transversal das barras que minimiza a massa total da estrutura treliçada, impondo-se restrições aos deslocamentos nodais e às tensões axiais.

Portanto, as variáveis de projeto são as áreas da seção transversal das barras da estrutura, que estão contidas no vetor **A**:

$$\mathbf{A} = \{A_1 A_2 \dots A_{nb}\} \quad (3.1)$$

sendo  $nb$  o número total de barras da estrutura.

A função objetivo calcula a massa total da estrutura pelo somatório da massa de cada barra que a compõe, conforme a equação:

$$f = \sum_{i=1}^{nb} \rho A_i L_i \quad (3.2)$$

em que  $\rho$  é a massa específica,  $A_i$  é a área da seção transversal da  $i$ -ésima barra e  $L_i$  é o comprimento da  $i$ -ésima barra.

As restrições impostas ao problema são descritas pelas equações:

$$U_{m\acute{a}x} \leq U_{lim} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{Tm\acute{a}x} \leq \sigma_{Tlim} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{Cm\acute{a}x} \leq \sigma_{Clim} \quad (3.5)$$

sendo  $\sigma_{Tm\acute{a}x}$  e  $\sigma_{Cm\acute{a}x}$  os valores máximos de tensão axial de tração e compressão, respectivamente, atuantes na estrutura;  $\sigma_{Tlim}$  e  $\sigma_{Clim}$  os valores limites admissíveis para as tensões de tração e compressão, respectivamente;  $U_{m\acute{a}x}$  o valor máximo absoluto de deslocamento nodal sofrido pela estrutura e  $U_{lim}$  o valor limite admissível para os deslocamentos nodais.

Além disso, as variáveis de projeto são limitadas pelos valores máximo ( $A_{m\acute{a}x}$ ) e mínimo ( $A_{m\acute{m}n}$ ) que podem ser atribuídos a elas, ou seja:

$$A_{m\acute{m}n} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}, i = 1, \dots, nb \quad (3.6)$$

com os valores  $A_{m\acute{m}n}$  e  $A_{m\acute{a}x}$  definidos de acordo com um catálogo comercial de tubos estruturais.

Em síntese, o problema de otimização estudado pode ser esquematizado da seguinte forma:

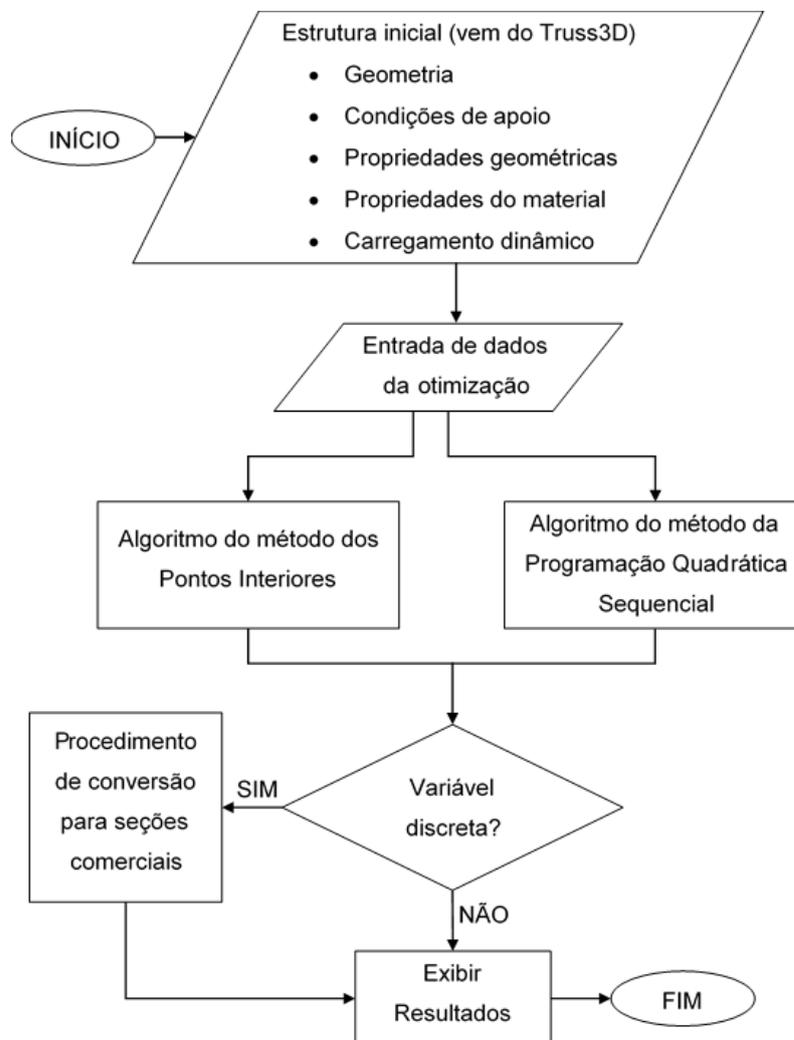
$$\begin{array}{ll} \text{Determinar} & \mathbf{A} = \{A_1 A_2 \dots A_{nb}\} \\ \text{Que minimiza} & f = \sum_{i=1}^{nb} \rho A_i L_i \\ \text{Sujeito a:} & U_{m\acute{a}x} - U_{lim} \leq 0 \\ & \sigma_{Tm\acute{a}x} - \sigma_{Tlim} \leq 0 \\ & \sigma_{Cm\acute{a}x} - \sigma_{Clim} \leq 0 \\ & A_{m\acute{m}n} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}, i = 1, \dots, nb \end{array} \quad (3.7)$$

Destaca-se que a restrição lateral, dada pela Equação (3.6), é verificada por comparação direta com as variáveis de projeto. Já a verificação das restrições de resposta dinâmica (Equações (3.3) a (3.5)) requerem que seja feita uma análise dinâmica não linear geométrica a cada iteração do processo de otimização. O procedimento de análise estrutural utilizado foi explicado na Seção 2.3.3.

### 3.2 PROGRAMA COMPUTACIONAL

Na Figura 3.2 é apresentado o fluxograma de funcionamento do programa computacional desenvolvido.

Figura 3.2 – Fluxograma de funcionamento do programa computacional.



Fonte: Autora.

Partindo das informações fornecidas pelo Truss3D sobre a estrutura inicial a ser otimizada, a primeira etapa do programa computacional é a entrada dos dados

necessários para a execução do processo de otimização. Isso é feito na interface inicial apresentada na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Interface inicial: entrada de dados.

The screenshot shows a software window titled "Entrada de Dados" (Data Entry) with a "Comparações" (Comparisons) dropdown menu. The window is divided into several sections:

- Perfil Tubular (Tubular Profile):** Three radio buttons are present: "Circular" (selected), "Quadrado" (Square), and "Retangular" (Rectangular).
- Análise Dinâmica (Dynamic Analysis):**
  - "Duração:" (Duration): [ ] s
  - " $\Delta t$ :" (Time increment): [ ] s
  - Two radio buttons: "Desprezar amortecimento" (Ignore damping, selected) and "Considerar amortecimento" (Consider damping).
  - "Taxa de amortecimento ( $\xi$ ):" (Damping ratio): [ ] %
- Restrições (Constraints):** Three input fields:
  - "Deslocamento nodal:" (Nodal displacement): [ ] m
  - "Tensão de tração:" (Tension): [ ] MPa
  - "Tensão de compressão:" (Compression): [ ] MPa
- Solução (Solution):** Two radio buttons: "Contínua" (Continuous) and "Discreta" (Discrete, selected).
- Agrupamento de barras (Bar grouping):** A button labeled ">>".
- Método de Otimização (Optimization Method):**
  - Two radio buttons: "Pontos Interiores" (Interior points, selected) and "Programação Quadrática Sequencial" (Sequential Quadratic Programming).
  - "Máx. iterações:" (Max iterations): [ 1000 ]
  - "Máx. avaliações função objetivo:" (Max objective function evaluations): [ 3000 ]
  - "Tolerância variável de projeto:" (Design variable tolerance): [ 1e-10 ]
  - "Tolerância função objetivo:" (Objective function tolerance): [ 1e-6 ]
  - "Tolerância restrições:" (Constraint tolerance): [ 1e-6 ]

At the bottom right of the window is a button labeled "Otimizar" (Optimize).

Fonte: Autora.

Nessa janela, o usuário deve, inicialmente, informar dados relacionados à análise dinâmica que será executada em cada iteração da otimização. Isso inclui a duração da análise, o tamanho do incremento de tempo e a taxa de amortecimento considerada na montagem da matriz de amortecimento da estrutura. Em seguida, devem ser definidos os valores limites admissíveis para os deslocamentos nodais e as tensões axiais, que serão utilizados na verificação das restrições impostas ao problema de otimização.

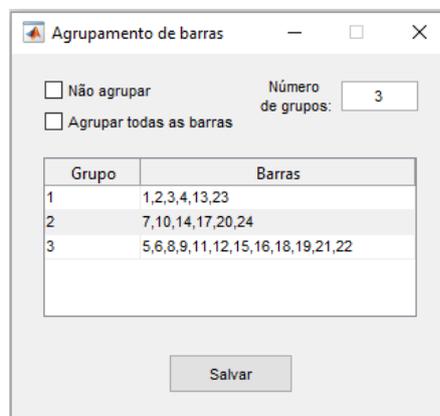
Também é necessário escolher se a solução encontrada deve ser apresentada com valores contínuos ou discretos. Essa escolha define se o procedimento de conversão para seções comerciais será utilizado ou não.

Outro ponto importante é a definição do tipo de perfil tubular considerado. Essa opção influencia nos valores mínimo e máximo que limitarão as variáveis de projeto, além de indicar qual tabela de perfil será utilizada como referência no procedimento de conversão para seções comerciais.

Para resolver o problema de otimização, o usuário pode optar pelo método dos Pontos Interiores ou o método da Programação Quadrática Sequencial. Os valores padrões dos critérios de parada desses métodos (tolerâncias de convergência, número máximo de iterações e número máximo de avaliações da função objetivo) também são apresentados nessa janela para conhecimento do usuário, estando disponíveis para alteração, caso desejado.

Por último, deve-se acionar o botão de definição do agrupamento de barras, que direciona o usuário para a janela da Figura 3.4. Se a opção “Não agrupar” for selecionada, um valor diferente poderá ser atribuído para a área da seção transversal de cada barra, portanto, a quantidade de variáveis de projeto será igual à quantidade de barras da estrutura. A seleção da opção “Agrupar todas as barras” indica que deve ser atribuído a mesma área para a seção transversal de todas as barras, fazendo com que o problema de otimização tenha apenas uma variável de projeto. Alternativamente, pode ser informado um número de grupos para serem criados e as barras integrantes de cada um deles. Nesse caso, a quantidade de variáveis de projeto é igual à quantidade de grupos.

Figura 3.4 – Janela de agrupamento de barras.

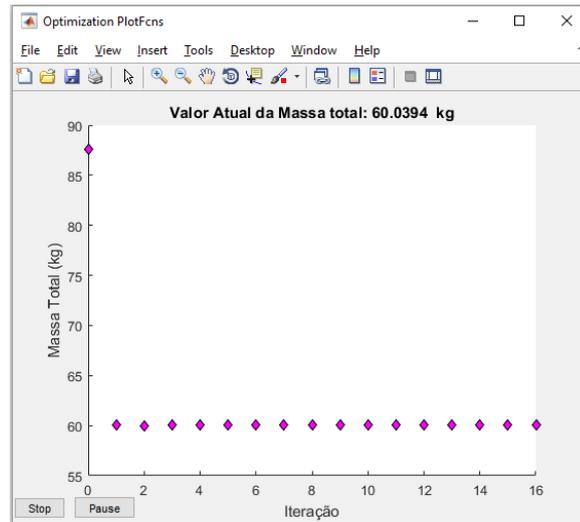


Fonte: Autora.

Depois de definidos todos os dados de entrada necessários, basta clicar no botão “Otimizar” da interface inicial para que o processo de otimização tenha início. Com isso, o algoritmo do método de otimização escolhido é executado.

Simultaneamente à execução desse algoritmo, ocorre a plotagem do gráfico apresentado na Figura 3.5, onde é indicado o valor de massa total encontrado em cada iteração, para que o usuário possa acompanhar o progresso da otimização.

Figura 3.5 – Gráfico para acompanhamento da otimização.

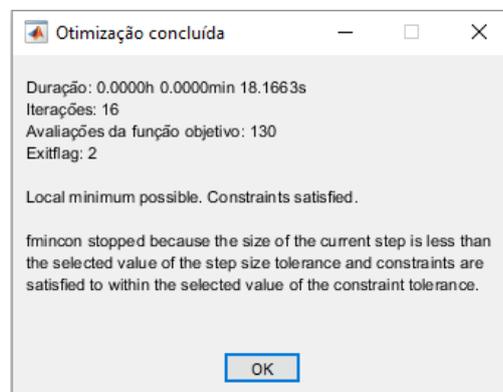


Fonte: Autora.

Caso o usuário tenha selecionado a opção “variável discreta”, ao final da execução do algoritmo do método de otimização a solução contínua encontrada é convertida para valores discretos, por meio da aplicação do procedimento de conversão para seções comerciais. Nessa etapa, é feita uma busca na tabela do tipo de perfil escolhido para selecionar um valor comercial que seja igual ou imediatamente superior ao valor ótimo que foi atribuído para cada variável de projeto. Esse procedimento é feito com base em um catálogo comercial de tubos estruturais.

Quando o processo de otimização chega ao fim, a janela da Figura 3.6 é exibida, trazendo informações sobre a duração desse processo, o número de iterações realizadas, a quantidade necessária de avaliações da função objetivo e o motivo de parada do método de otimização.

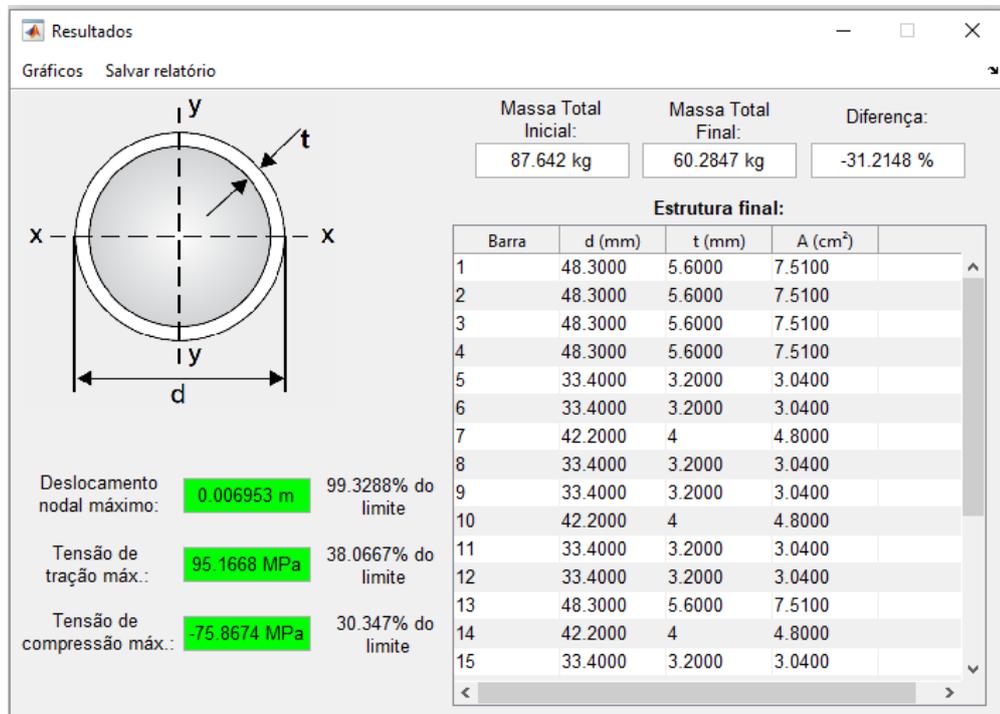
Figura 3.6 – Aviso de conclusão da otimização.



Fonte: Autora.

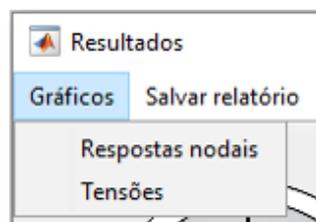
Por fim, a última etapa do programa computacional é a exibição dos resultados, que é feita na janela da Figura 3.7. Além da solução ótima, são apresentados o valor inicial e final da massa total da estrutura, bem como a diferença percentual entre eles (um valor negativo indica uma redução na massa total e um valor positivo indica um aumento). Para verificação da viabilidade da solução encontrada, principalmente caso tenha sido aplicado o procedimento de conversão para seções comerciais, também são fornecidos seus valores máximos de deslocamento nodal e tensões axiais. A cor verde indica que esses valores atendem às restrições impostas e a cor vermelha indica o caso contrário.

Figura 3.7 – Janela de resultados para perfil circular.



Fonte: Autora.

Figura 3.8 – Menus da janela de resultados.

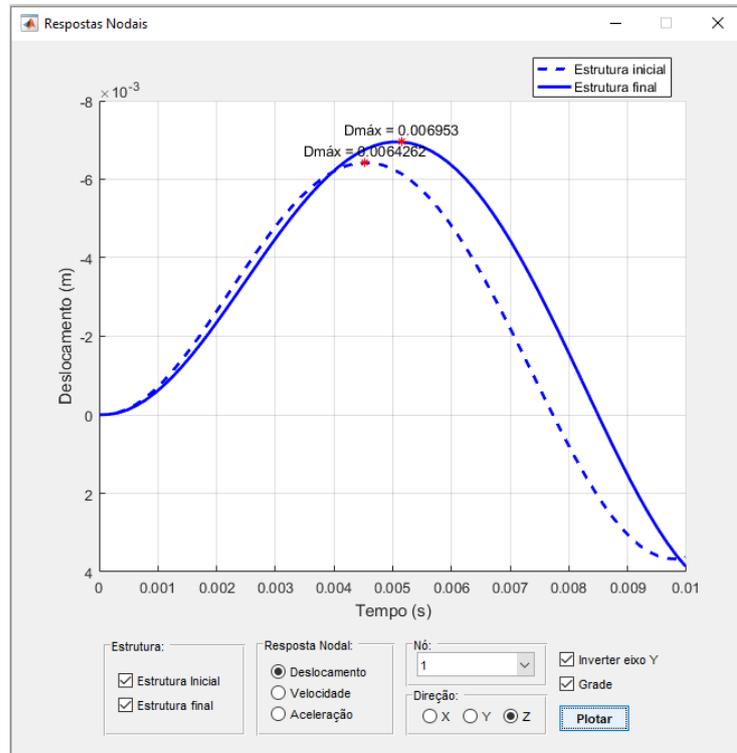


Fonte: Autora.

A janela de resultados também possui dois menus, destacados na Figura 3.8. O menu “Gráficos” permite a avaliação das respostas dinâmicas das estruturas inicial e final. A visualização dos gráficos de respostas nodais (deslocamento, velocidade e

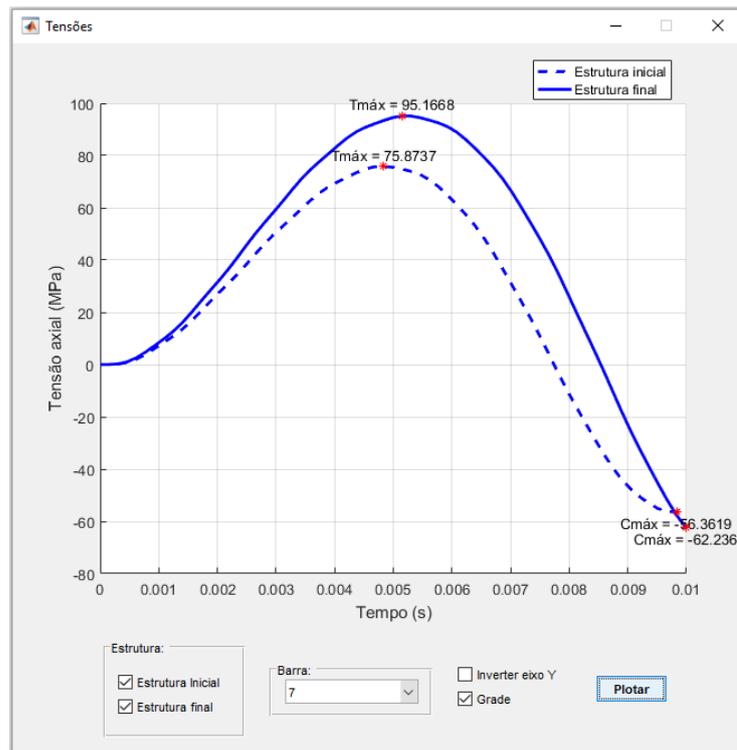
aceleração) é feita na janela da Figura 3.9 e a visualização dos gráficos de tensão axial é feita na janela da Figura 3.10.

Figura 3.9 – Visualização dos gráficos de respostas nodais.



Fonte: Autora.

Figura 3.10 – Visualização dos gráficos de tensões axiais.



Fonte: Autora.

O menu “Salvar relatório” gera um arquivo de texto contendo informações sobre as estruturas inicial e final, como a área da seção transversal das barras, o valor de massa total e a listagem dos valores de respostas nodais e de tensões axiais em cada instante analisado (Figura 3.11).

Figura 3.11 – Relatório de otimização.

Optimização 1 - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

RELATÓRIO DE OTIMIZAÇÃO  
Dia: 28.2.2019 | Hora: 16h 27m 7s

MASSA TOTAL INICIAL: 87,6420 kg  
MASSA TOTAL FINAL: 60,2847 kg

ESTRUTURA INICIAL:      ESTRUTURA FINAL:

Barra	A (cm <sup>2</sup> )	Barra	A (cm <sup>2</sup> )
1	6.4500	1	7.5100
2	6.4500	2	7.5100
3	6.4500	3	7.5100
4	6.4500	4	7.5100
5	6.4500	5	3.0400
6	6.4500	6	3.0400
7	6.4500	7	4.8000
8	6.4500	8	3.0400
9	6.4500	9	3.0400
10	6.4500	10	4.8000
11	6.4500	11	3.0400
12	6.4500	12	3.0400
13	6.4500	13	7.5100
14	6.4500	14	4.8000
15	6.4500	15	3.0400
16	6.4500	16	3.0400
17	6.4500	17	4.8000
18	6.4500	18	3.0400
19	6.4500	19	3.0400
20	6.4500	20	4.8000
21	6.4500	21	3.0400
22	6.4500	22	3.0400
23	6.4500	23	7.5100
24	6.4500	24	4.8000

RESPOSTAS NODAIS - ESTRUTURA INICIAL

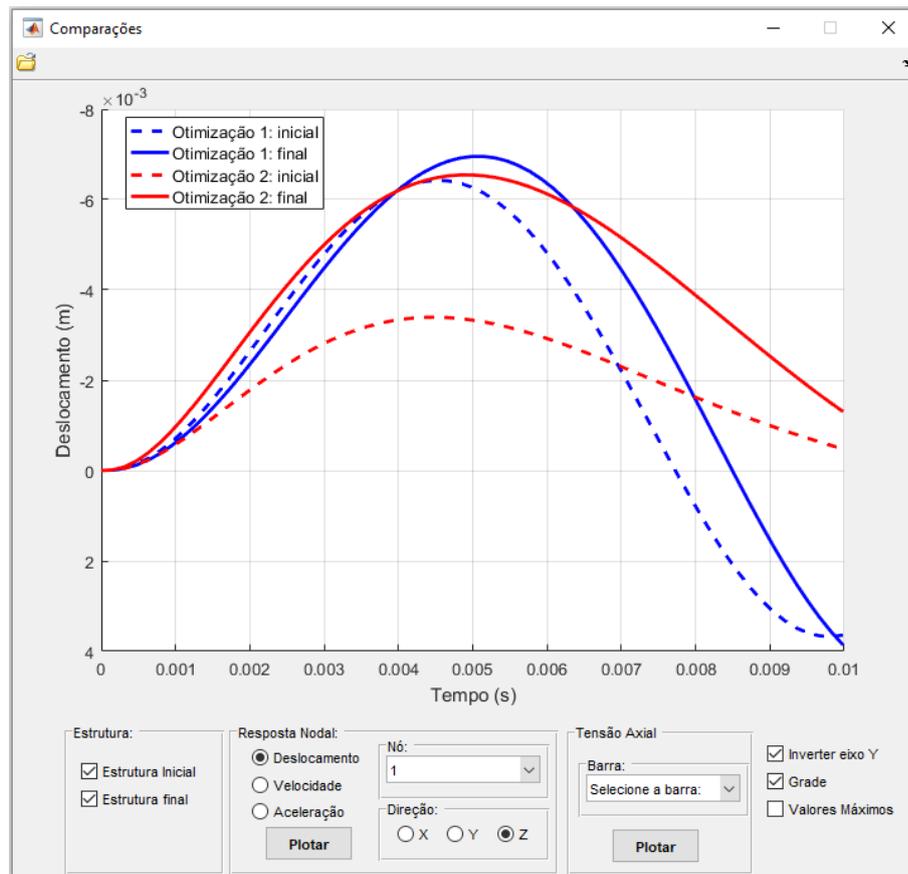
Nó 1:

Tempo (s)	Dx (m)	Dy (m)	Dz (m)	Vx (m/s)	Vy (m/s)	Vz (m/s)	Ax (m/s <sup>2</sup> )	Ay (m/s <sup>2</sup> )	Az (m/s <sup>2</sup> )
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000156	0.000000	-0.000000	-0.000011	0.000000	-0.000000	-0.138367	0.000000	-0.000000	-1773.933519
0.000312	0.000000	-0.000000	-0.000054	0.000000	-0.000000	-0.410629	0.000000	0.000000	-1716.605514
0.000468	0.000000	0.000000	-0.000138	0.000000	0.000000	-0.672378	-0.000000	0.000000	-1639.155959
0.000624	0.000000	0.000000	-0.000262	0.000000	0.000000	-0.921168	-0.000000	0.000000	-1550.461316
0.000780	0.000000	0.000000	-0.000424	0.000000	0.000000	-1.155307	0.000000	0.000000	-1451.315905
0.000936	0.000000	0.000000	-0.000622	0.000000	-0.000000	-1.372643	0.000000	-0.000000	-1335.040491

Fonte: Autora.

Os relatórios de otimização salvos podem ser, posteriormente, carregados na janela da Figura 3.12. Dessa forma, são gerados gráficos comparativos para as respostas nodais e tensões axiais, permitindo que a mudança de comportamento estrutural seja avaliada. Essa janela é acessada por meio do menu “Comparações” da interface inicial (ver Figura 3.3).

Figura 3.12 – Janela para comparações entre respostas dinâmicas.



Fonte: Autora.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos nesta dissertação.

Na Seção 4.1, o método de solução abordado na Seção 2.3.3 é utilizado para obter a resposta transiente de treliças planas e espaciais. O objetivo dessa seção é validar o procedimento de análise dinâmica não linear geométrica implementado.

Na Seção 4.2, são apresentados cinco exemplos de aplicação do programa computacional desenvolvido. O objetivo é determinar a área da seção transversal das barras que minimiza a massa total da estrutura, impondo-se restrições aos deslocamentos nodais e às tensões axiais.

### 4.1 VALIDAÇÃO DA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Nesta seção, busca-se validar o procedimento de análise dinâmica não linear geométrica implementado por meio do estudo de três exemplos de estruturas treliçadas. Inicialmente, na Seção 4.1.1, os exemplos são analisados desprezando o amortecimento e os resultados obtidos são comparados com soluções numéricas presentes na literatura. Em seguida, na Seção 4.1.2, os exemplos são analisados adotando uma taxa de amortecimento igual a 5%. Devido à falta de soluções com consideração de amortecimento disponíveis na literatura, esses resultados são comparados com os obtidos pelo software ANSYS® (versão 18.2).

#### 4.1.1 Sem amortecimento ( $\xi = 0\%$ )

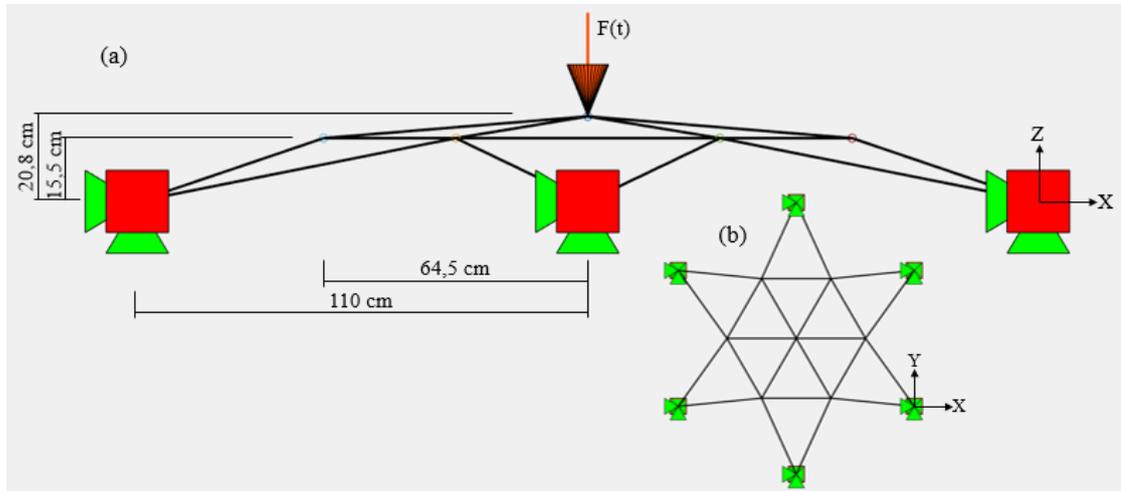
##### 4.1.1.1 Exemplo 1: domo geodésico

O primeiro exemplo consiste em um domo geodésico composto por 24 barras e 13 nós, conforme mostra a Figura 4.1. Suas propriedades físicas e geométricas são: módulo de elasticidade  $E = 68992$  MPa, área da seção transversal  $A = 6,45$  cm<sup>2</sup> e massa específica  $\rho = 2760$  kg/m<sup>3</sup>.

A estrutura está solicitada por uma força dependente do tempo  $F(t)$ , aplicada no seu nó central na direção Z. Para essa força, considerou-se a atuação individual dos dois

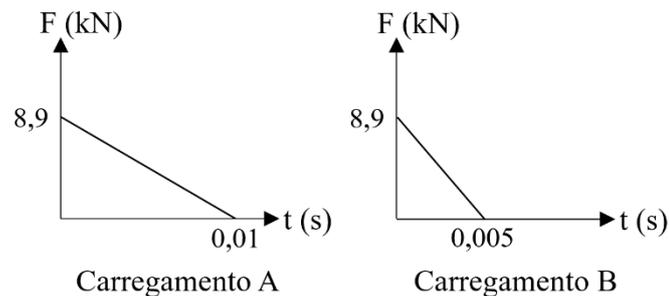
carregamentos apresentados na Figura 4.2, que diferem apenas no tempo de aplicação.

Figura 4.1 – Domo geodésico: a) vista lateral b) vista frontal.



Fonte: Autora.

Figura 4.2 – Carregamentos aplicados no domo geodésico.

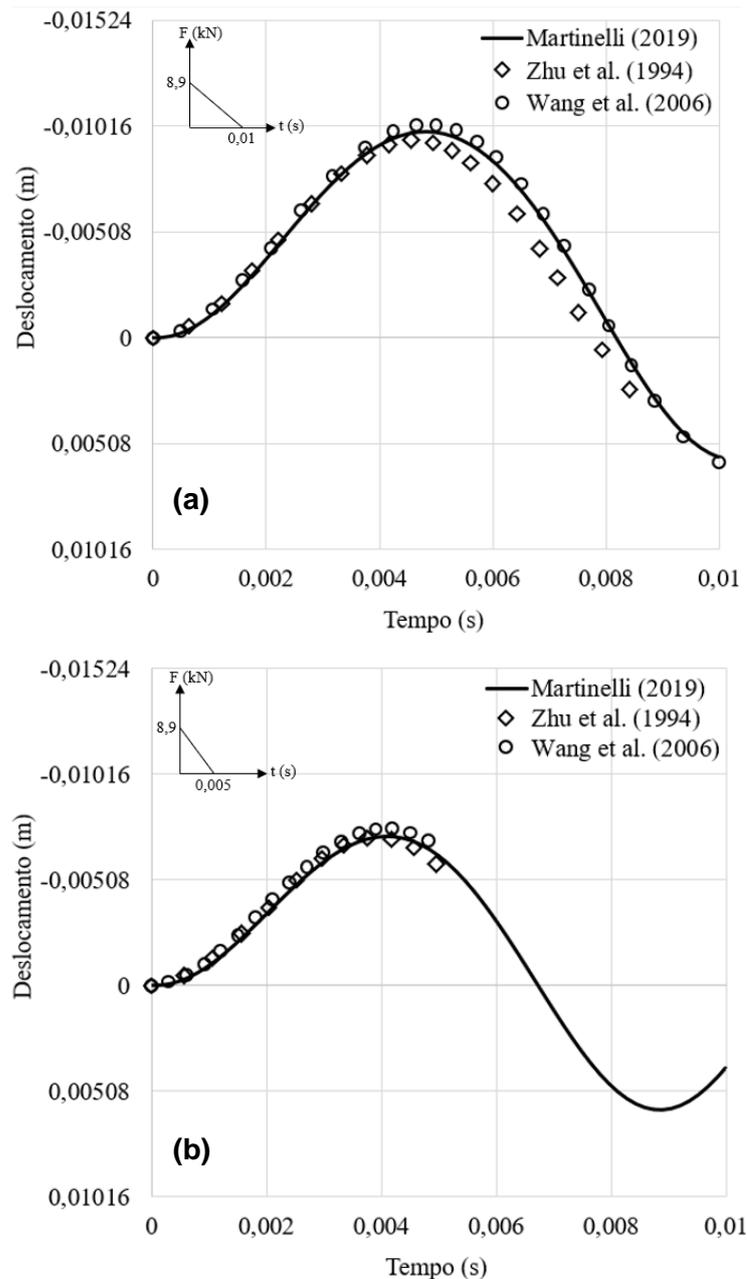


Fonte: Autora.

Este exemplo foi estudado anteriormente em Zhu et al. (1994) e Wang et al. (2006), que são utilizados como base de comparação para a validação dos resultados. Em Zhu et al. (1994), os efeitos da não linearidade geométrica foram incluídos por meio de uma formulação Lagrangeana atualizada e a integração temporal da equação de equilíbrio dinâmico foi realizada com o método de Newmark com aceleração constante. Já em Wang et al. (2006), uma nova formulação chamada de VFIFE (*Vector Form Intrinsic Finite Element*) foi combinada com um método de integração temporal explícito. Para traçar a resposta transiente da estrutura, os autores não utilizaram parâmetros de amortecimento e adotaram um incremento de tempo  $\Delta t = 0,000156$  s, definido a partir do período natural de vibração vertical do domo em sua configuração inicial ( $T = 0,0078$ s) como  $T/50$ .

Nesta dissertação, a análise dinâmica também foi realizada utilizando um incremento de tempo  $\Delta t = 0,000156$  s e desprezando o amortecimento. A Figura 4.3 apresenta os resultados obtidos com os carregamentos A e B para o deslocamento do nó central na direção Z. Destaca-se que na conversão de unidades dos artigos de referência, considerou-se  $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$  e  $1 \text{ kips} = 4,45 \text{ kN}$ .

Figura 4.3 – Deslocamento do nó central na direção Z para  $\xi = 0\%$ : a) carregamento A; b) carregamento B.



Fonte: Autora.

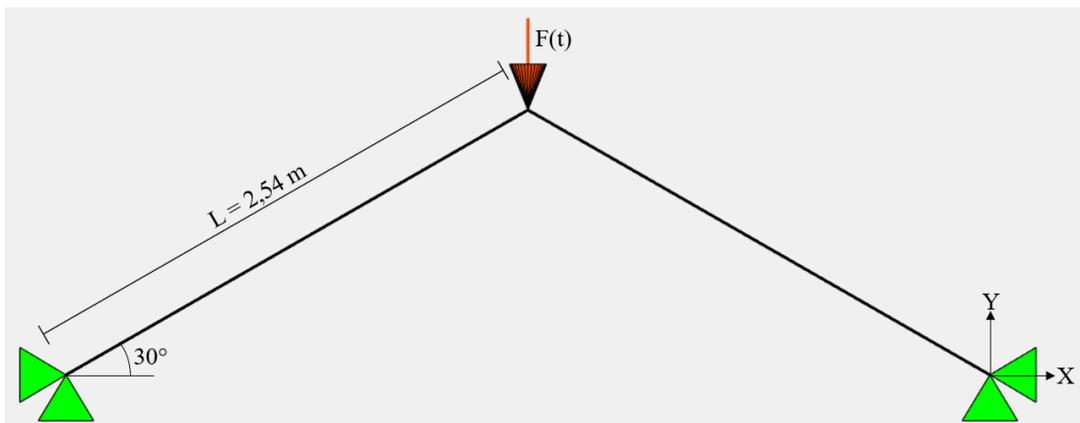
Vale notar que, para o carregamento B, os autores dos artigos de referência forneceram resultados apenas para a duração de aplicação da força (0,005 s). Nesta

dissertação, com o intuito de utilizar a mesma duração da análise dinâmica para ambos os carregamentos considerados (0,01 s), forneceu-se também a resposta dinâmica da estrutura após a aplicação do carregamento B.

#### 4.1.1.2 Exemplo 2: treliça plana

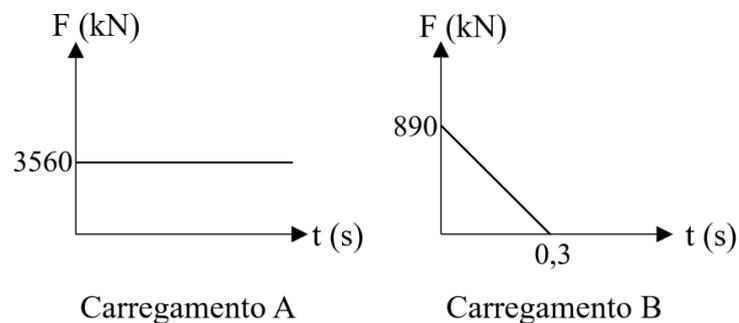
O segundo exemplo trata de uma treliça plana composta por duas barras (Figura 4.4). Ambas possuem comprimento  $L = 2,54$  m, módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa, área da seção transversal  $A = 6,45$  cm<sup>2</sup> e massa específica  $\rho = 7850000$  kg/m<sup>3</sup>. A estrutura está submetida a uma força  $F(t)$ , aplicada em seu nó central na direção Y. Para essa força, foi considerada a atuação individual dos dois carregamentos apresentados na Figura 4.5.

Figura 4.4 – Treliça plana.



Fonte: Autora.

Figura 4.5 – Carregamentos aplicados na treliça plana.



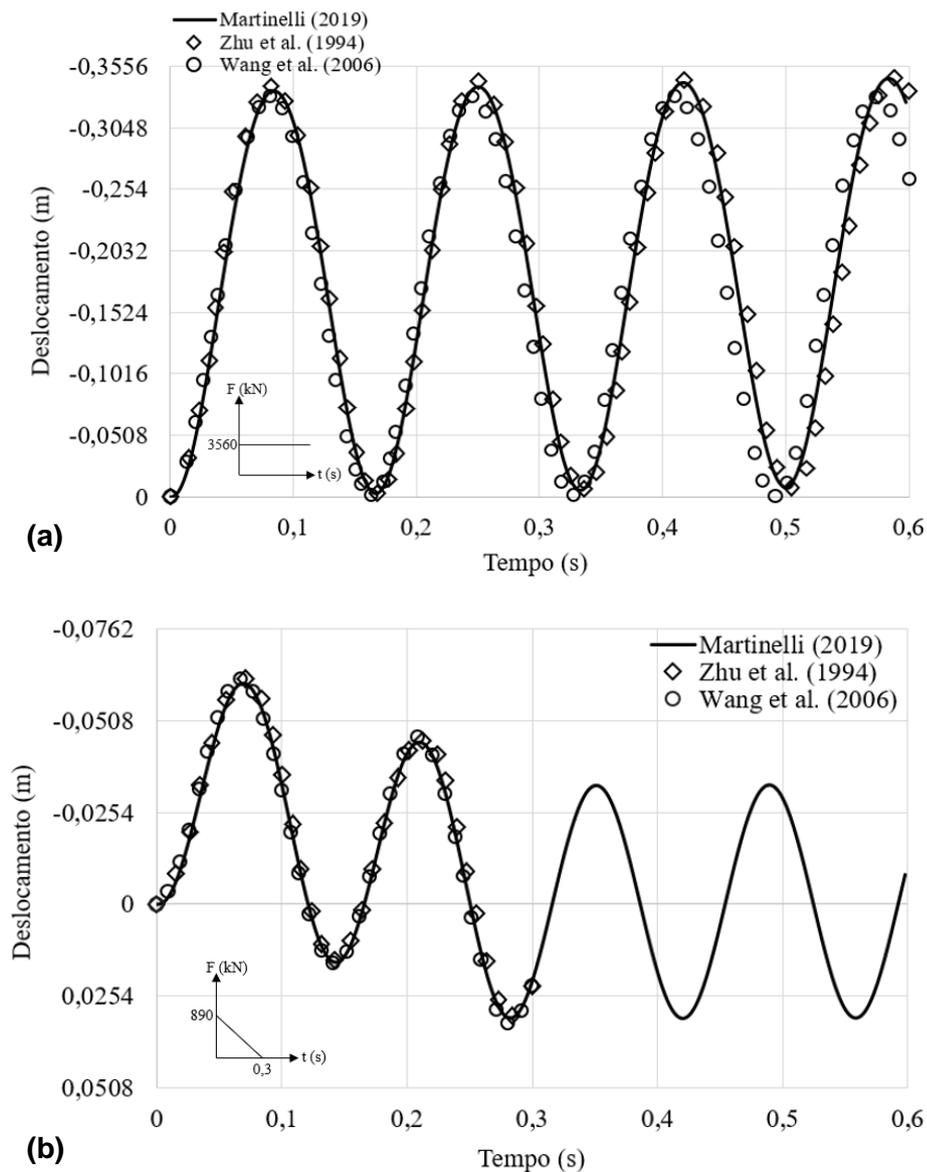
Fonte: Autora.

Este exemplo também foi estudado anteriormente em Zhu et al. (1994) e Wang et al. (2006). Nesta dissertação, assim como foi feito nesses artigos, as análises dinâmicas foram realizadas desprezando o amortecimento e adotando um incremento de tempo

$\Delta t = 0,00278$  s. O valor do incremento de tempo foi definido como  $T/50$ , em que  $T$  é o período natural de vibração vertical da treliça em sua configuração inicial ( $T = 0,139$  s).

A Figura 4.6 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento do nó central da treliça na direção Y, comparando-os com os de Zhu et al. (1994) e Wang et al. (2006). Destaca-se que a conversão de unidades desses artigos de referência foi feita considerando  $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$  e  $1 \text{ kips} = 4,45 \text{ kN}$ .

Figura 4.6 – Deslocamento do nó central na direção Y para  $\xi = 0\%$ : a) carregamento A; b) carregamento B.



Fonte: Autora.

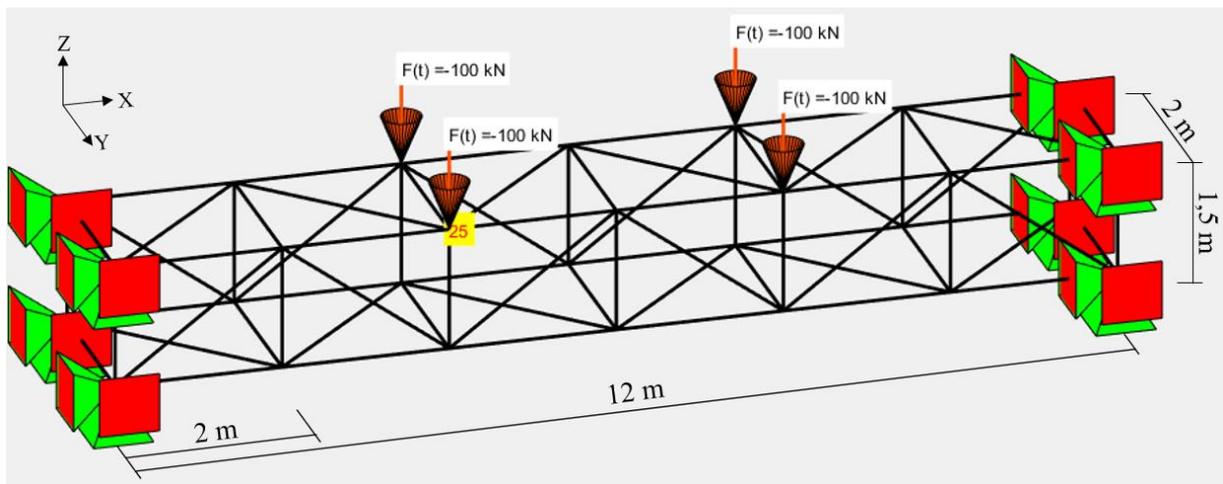
Ressalta-se que, para o carregamento B, os autores dos artigos de referência forneceram resultados apenas para a duração de aplicação da força (0,3 s). Nesta

dissertação, optou-se por fornecer também a resposta dinâmica da estrutura após a aplicação do carregamento B, de forma que fosse utilizada a mesma duração da análise dinâmica para ambos os carregamentos considerados (0,6 s).

#### 4.1.1.3 Exemplo 3: viga treliçada

Este exemplo foi retirado de Ferreira (2009) e consiste em uma viga treliçada composta por 76 barras e 28 nós, conforme mostra a Figura 4.7. A estrutura possui módulo de elasticidade  $E = 71700 \text{ MPa}$  e massa específica  $\rho = 4152 \text{ kg/m}^3$ . Quanto a área da seção transversal,  $A = 0,8 \text{ cm}^2$  para as barras longitudinais,  $A = 0,6 \text{ cm}^2$  para as barras transversais e  $A = 0,4 \text{ cm}^2$  para as diagonais. As forças aplicadas são consideradas como carregamentos de impacto, com  $F(t) = 100 \text{ kN}$ .

Figura 4.7 – Viga treliçada.

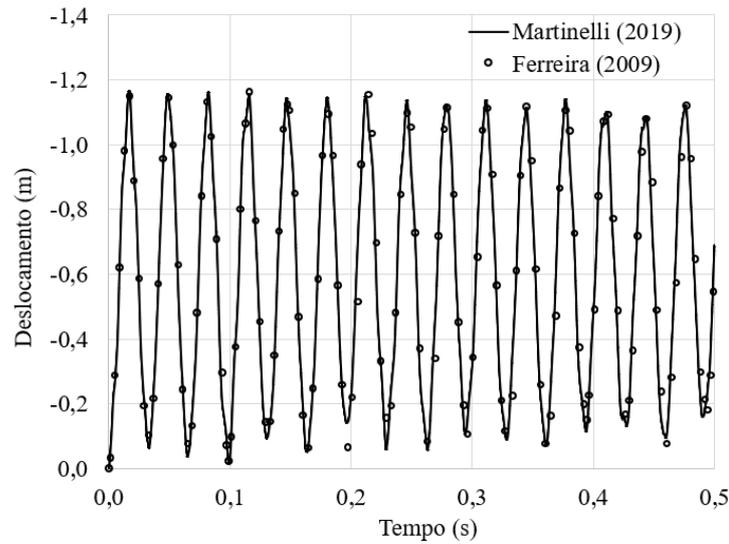


Fonte: Autora.

Ferreira (2009) analisou este exemplo utilizando uma formulação Lagrangeana total chamada de Posicional, o método de integração temporal HHT e um incremento de tempo  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ . Nesta dissertação, a análise dinâmica foi realizada com um incremento de tempo um pouco menor, igual a  $10^{-5} \text{ s}$ . Assim como no trabalho de referência, o amortecimento não foi considerado.

Na Figura 4.8 é apresentado o gráfico do deslocamento do nó 25 ao longo do tempo. Os resultados desta dissertação são comparados com os de Ferreira (2009).

Figura 4.8 – Deslocamento do nó 25 na direção Z para  $\xi = 0\%$ .



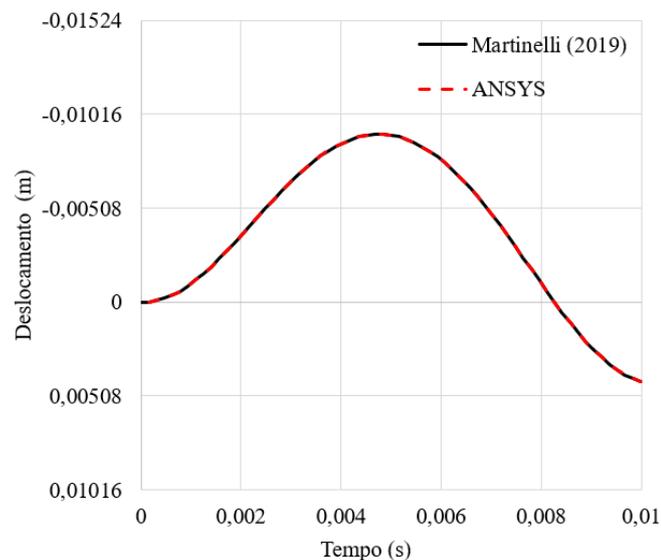
Fonte: Autora.

#### 4.1.2 Com amortecimento ( $\xi = 5\%$ )

##### 4.1.2.1 Exemplo 1: domo geodésico

Este exemplo foi estudado com os mesmos dados apresentados na Seção 4.1.1.1. Para a análise com consideração do amortecimento, no entanto, considerou-se a aplicação do carregamento A indicado na Figura 4.2. Na Figura 4.9, os resultados obtidos para o deslocamento do nó central na direção Z são comparados com os resultados fornecidos pela análise no software ANSYS®.

Figura 4.9 – Deslocamento do nó central na direção Z para  $\xi = 5\%$ .

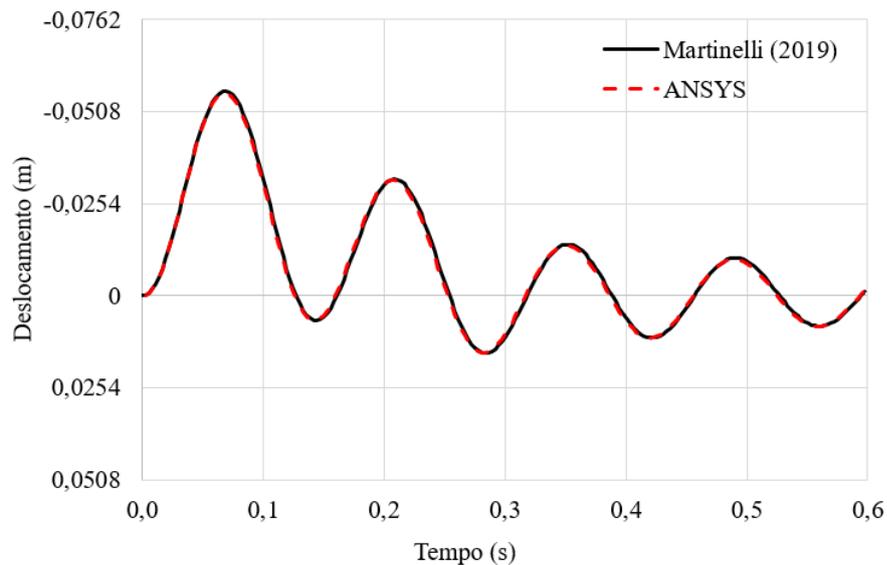


Fonte: Autora.

#### 4.1.2.2 Exemplo 2: treliça plana

Este exemplo foi analisado com os mesmos dados apresentados na Seção 4.1.1.2. Para a análise com consideração do amortecimento, no entanto, considerou-se a aplicação do carregamento B indicado na Figura 4.5. Os resultados obtidos para o deslocamento do nó central na direção Y são apresentados na Figura 4.10.

Figura 4.10 – Deslocamento do nó central na direção Y para  $\xi = 5\%$ .

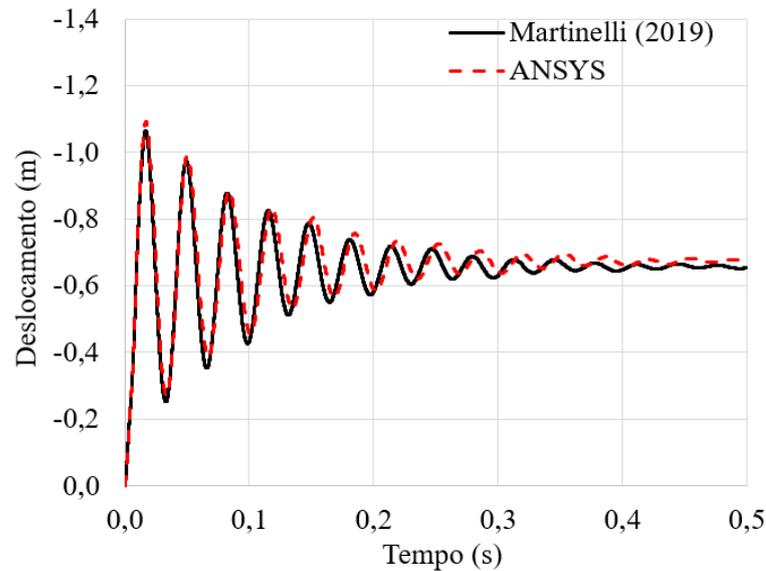


Fonte: Autora.

#### 4.1.2.3 Exemplo 3: viga treliçada

Todas as informações referentes a este exemplo foram apresentadas na Seção 4.1.1.3. Os resultados obtidos para a análise com consideração do amortecimento são apresentados na Figura 4.11. O gráfico refere-se ao deslocamento do nó 25 na direção Z.

Figura 4.11 – Deslocamento do nó 25 na direção Z para  $\xi = 5\%$ .



Fonte: Autora.

#### 4.1.3 Considerações sobre a validação

Nos três exemplos estudados, o procedimento de análise dinâmica não linear geométrica implementado foi utilizado para traçar a variação do deslocamento nodal ao longo do tempo para os casos amortecido e não amortecido.

Observando os gráficos gerados, percebe-se que as respostas transientes obtidas nesta dissertação estão em concordância com os resultados presentes na literatura e com os resultados gerados pelo software ANSYS®. Portanto, considera-se que o procedimento de análise implementado foi validado.

## 4.2 OTIMIZAÇÃO DE DIMENSÕES

Nesta seção, o programa computacional desenvolvido é utilizado para estudar a otimização de dimensões de cinco exemplos de estruturas treliçadas submetidas a diferentes tipos de carregamento dinâmico.

O deslocamento nodal limite ( $U_{lim}$ ) considerado em cada exemplo foi calculado tomando como base os valores máximos estabelecidos no ANEXO C da ABNT NBR 8800:2008. Já as tensões limites de tração ( $\sigma_{Tlim}$ ) e compressão ( $\sigma_{Clim}$ ) foram definidas como:

$$\sigma_{Tlim} = \sigma_{Clim} = \frac{f_y}{\gamma_{a1}} \quad (4.1)$$

em que  $f_y$  é a tensão de escoamento e  $\gamma_{a1}$  é o coeficiente de ponderação da resistência, que é igual a 1 em combinações de serviço.

Todos os exemplos foram estudados com as mesmas propriedades físicas e mecânicas, a saber: tensão de escoamento  $f_y = 250$  MPa, módulo de elasticidade  $E = 200$  GPa e massa específica  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.

Com intuito de verificar se a solução encontrada consiste em um mínimo local ou um mínimo global, cada exemplo foi estudado partindo de dois casos de estrutura inicial, aos quais foram atribuídos como valor inicial da variável de projeto valores próximos aos seus limites superior e inferior. Cada caso de estrutura inicial foi otimizado considerando três valores diferentes de taxa de amortecimento.

Para cada taxa de amortecimento, foram realizados os seguintes processos de otimização:

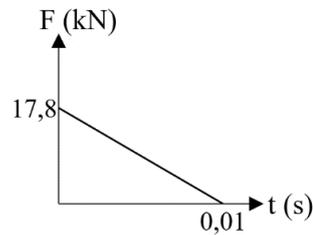
- PI-C: Pontos Interiores (solução contínua);
- PI-D: Pontos Interiores combinado com procedimento de conversão para seções comerciais (solução discreta);
- PQS-C: Programação Quadrática Sequencial (solução contínua); e
- PQS-D: Programação Quadrática Sequencial combinada com procedimento de conversão para seções comerciais (solução discreta).

A eficiência dos métodos de otimização PI e PQS é avaliada de acordo com dois parâmetros: a quantidade de iterações realizadas e a quantidade necessária de avaliações da função objetivo (Aval. fun. obj.).

#### 4.2.1 Exemplo 1: domo geodésico

Este exemplo foi apresentado na Seção 4.1.1.1. Para esta seção, as propriedades do material foram alteradas, conforme especificado no início da Seção 4.2, e a intensidade do carregamento dinâmico aplicado foi aumentada (Figura 4.12).

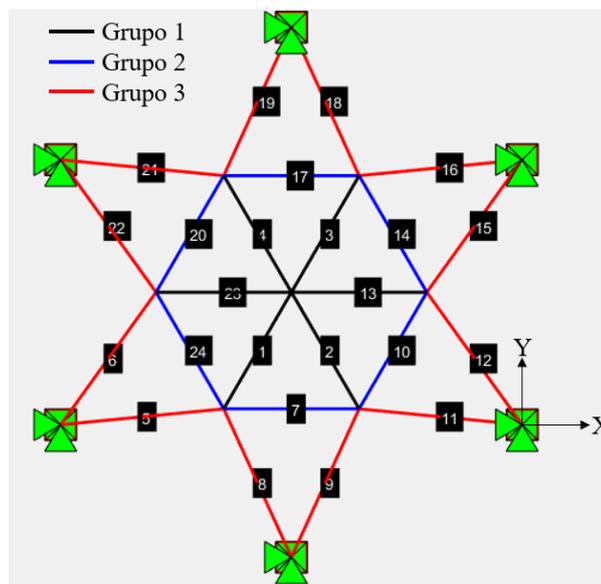
Figura 4.12 – Carregamento aplicado no nó central do domo geodésico.



Fonte: Autora.

O programa de otimização foi executado com duração da análise dinâmica de 0,01 s, incremento de tempo  $\Delta t = 0,000156$  s e o agrupamento de barras indicado na Figura 4.13. As restrições impostas ao problema de otimização estão resumidas na Tabela 4.1.

Figura 4.13 – Agrupamento de barras do domo geodésico.



Fonte: Autora.

Tabela 4.1 – Restrições impostas ao domo geodésico.

Circular		Quadrado		Retangular		$U_{lim}$ (m)	$\sigma_{Tlim}$ (MPa)	$\sigma_{Clim}$ (MPa)
$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )			
3,04	260	6,41	219	6,41	177	0,007	250	250

Dois casos de estrutura inicial foram estudados: o caso 1 mantém a área da seção transversal adotada na Seção 4.1.1.1 (6,45 cm<sup>2</sup>) e o caso 2 adota a área máxima permitida para o tipo de perfil tubular considerado. Informações referentes às estruturas iniciais de cada tipo de perfil tubular estão resumidas nas Tabelas 4.2 a 4.4.

Tabela 4.2 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil circular.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	260	260	260
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	260	260	260
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	260	260	260
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,00643	0,00637	0,0059	0,000143	0,000141	0,00013
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	75,8737	75,1224	69,2714	1,7137	1,697	1,5756
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	89,3877	88,6466	82,8275	2,1475	2,1274	1,9847
MT (kg)	87,642	87,642	87,642	3532,8577	3532,8577	3532,8577

Tabela 4.3 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil quadrado.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	219	219	219
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	219	219	219
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	219	219	219
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,00643	0,00637	0,0059	0,000169	0,000168	0,000157
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	75,8737	75,1224	69,2714	2,0354	2,0156	1,8713
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	89,3877	88,6466	82,8275	2,5500	2,5262	2,3566
MT (kg)	87,642	87,642	87,642	2975,7532	2975,7532	2975,7532

Tabela 4.4 – Estrutura inicial do domo geodésico: perfil retangular.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	177	177	177
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	177	177	177
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	177	177	177
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,00643	0,00637	0,0059	0,00021	0,000208	0,00019
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	75,8737	75,1224	69,2714	2,5201	2,4955	2,3165
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	89,3877	88,6466	82,8275	3,1560	3,1265	2,9164
MT (kg)	87,642	87,642	87,642	2405,0608	2405,0608	2405,0608

Observa-se que todas as restrições impostas ao problema de otimização são atendidas nas estruturas iniciais de todos os tipos de perfil tubular.

Os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando a taxa de amortecimento  $\xi = 0\%$  são apresentados nas Tabelas 4.5 a 4.7.

Tabela 4.5 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0\%$  e perfil circular.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	7,4534	7,4532	7,51	7,51	7,4533	7,4532	7,51	7,51
A2 (cm <sup>2</sup> )	4,7756	4,7756	4,8	4,8	4,7756	4,7756	4,8	4,8
A3 (cm <sup>2</sup> )	3,0402	3,0400	3,04	3,04	3,0400	3,0400	3,04	3,04
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,007	0,007	0,00695	0,00695	0,007	0,007	0,00695	0,00695
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	95,777	95,7779	95,1668	95,1668	95,7778	95,7779	95,1668	95,1668
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	76,479	76,481	75,8674	75,8674	76,4809	76,481	75,8674	75,8674
MT (kg)	60,0394	60,0374	60,28	60,28	60,0378	60,0374	60,28	60,28
iterações	16	18	16	18	28	32	28	32
Aval. fun. obj.	130	174	130	174	223	233	223	233
Duração (s)	22,8877	23,8047	18,1663	24,3280	30,3608	34,7690	30,5409	32,2065

Tabela 4.6 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0\%$  e perfil quadrado.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	6	2	6	2	13	8	13	8
Aval. fun. obj.	28	12	28	12	56	36	56	36
Duração (s)	4,6040	2,1109	4,8108	2,1106	9,2379	5,4301	8,6762	5,8836

Tabela 4.7 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0\%$  e perfil retangular.

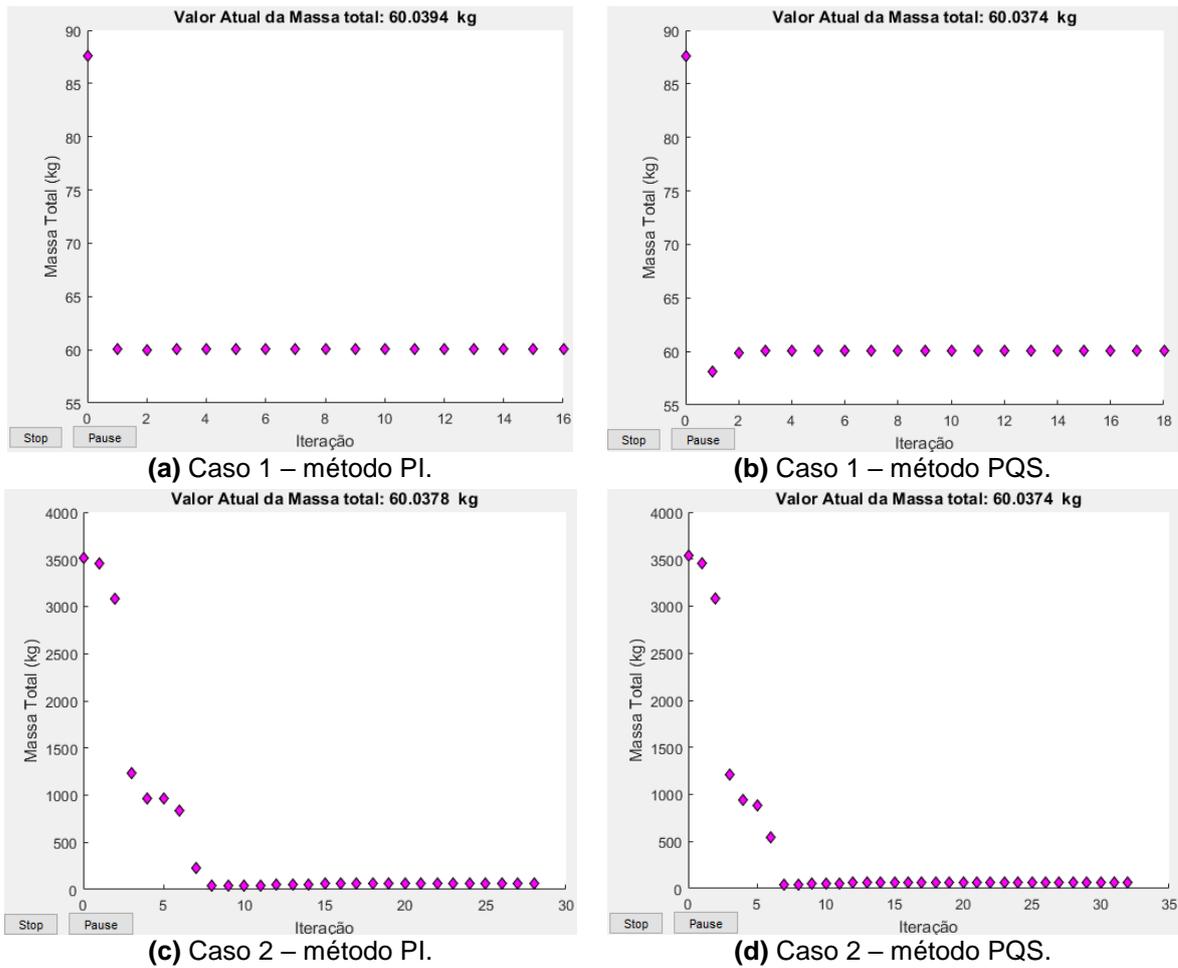
	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{\text{máx}}$ (m)	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647	0,00647
$\sigma_{T_{\text{máx}}}$ (MPa)	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40	76,40
$\sigma_{C_{\text{máx}}}$ (MPa)	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96	89,96
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	5	2	5	2	13	7	13	7
Aval. fun. obj.	24	12	24	12	56	29	56	29
Duração (s)	3,7451	2,0685	3,7448	2,0594	8,6444	4,9058	8,6762	4,6894

Para o perfil tubular circular, houve uma pequena diferença entre os resultados obtidos com os processos de otimização PI-C e PQS-C, em cada um dos casos de estrutura inicial estudados. Como essa diferença é pequena (cerca de 0,003%), ela não influenciou no procedimento de conversão para seções comerciais, portanto PI-D e PQS-D forneceram a mesma solução. Além disso, os resultados obtidos partindo do caso 1 de estrutura inicial foram iguais aos obtidos partindo do caso 2, com exceção das soluções obtidas com PI-C, que apresentaram uma variação de 0,0027% na massa total. Adicionalmente, nota-se que, para esse tipo de perfil, as restrições ativas foram a de deslocamento nodal e a da área mínima do grupo 3.

Para os perfis quadrado e retangular, foi encontrada a mesma solução para todos os casos de estrutura inicial e processos de otimização estudados. Essa solução consiste na utilização da área mínima permitida, igual a 6,41 cm<sup>2</sup>. Portanto, a restrição ativa para esses tipos de perfil foi a de área mínima.

A melhor solução encontrada com a taxa de amortecimento  $\xi = 0\%$ , considerando o valor da massa total da estrutura e a adequação aos perfis comerciais, foi a obtida com perfil circular e uso do procedimento de conversão para seções comerciais. Os gráficos de massa total x iterações dessa solução são apresentados na Figura 4.14. Destaca-se que para o perfil circular, diferente do que aconteceu com os perfis quadrado e retangular, o método PI convergiu com menos iterações e com uma quantidade menor de avaliações da função objetivo. No entanto, a solução encontrada pelo método PQS foi mais leve que a encontrada pelo método PI.

Figura 4.14 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$  e perfil circular.



Fonte: Autora.

Nas Tabelas 4.8 a 4.10, são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0,5\%$ .

Tabela 4.8 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0,5\%$  e perfil circular.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	7,3996	7,3996	7,51	7,51	7,3996	7,3996	7,51	7,51
A2 (cm <sup>2</sup> )	4,7257	4,7257	4,8	4,8	4,7257	4,7257	4,8	4,8
A3 (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04
U <sub>máx</sub> (m)	0,007	0,007	0,0069	0,0069	0,007	0,007	0,0069	0,0069
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	95,979	95,979	94,2042	94,2042	95,979	95,979	94,2042	94,2042
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	76,452	76,452	75,3045	75,3045	76,452	76,452	75,3045	75,3045
MT (kg)	59,72	59,72	60,28	60,28	59,72	59,72	60,28	60,28
Iterações	41	29	41	29	32	36	32	36
Aval. fun. obj.	340	259	340	259	244	248	244	248
Duração (s)	45,2272	33,2978	44,2705	33,4501	34,4541	34,7006	33,4937	34,3316

Tabela 4.9 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0,5\%$  e perfil quadrado.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	5	2	5	2	13	8	13	8
Aval. fun. obj.	24	12	24	12	56	36	56	36
Duração (s)	3,7847	2,1033	3,6731	2,0864	9,1961	5,921	8,2385	5,694

Tabela 4.10 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 0,5\%$  e perfil retangular.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64	75,64
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23	89,23
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	6	2	6	2	13	7	13	7
Aval. fun. obj.	28	12	28	12	56	29	56	29
Duração (s)	4,2219	2,1042	3,7986	2,1281	9,0345	4,9425	8,7167	4,5179

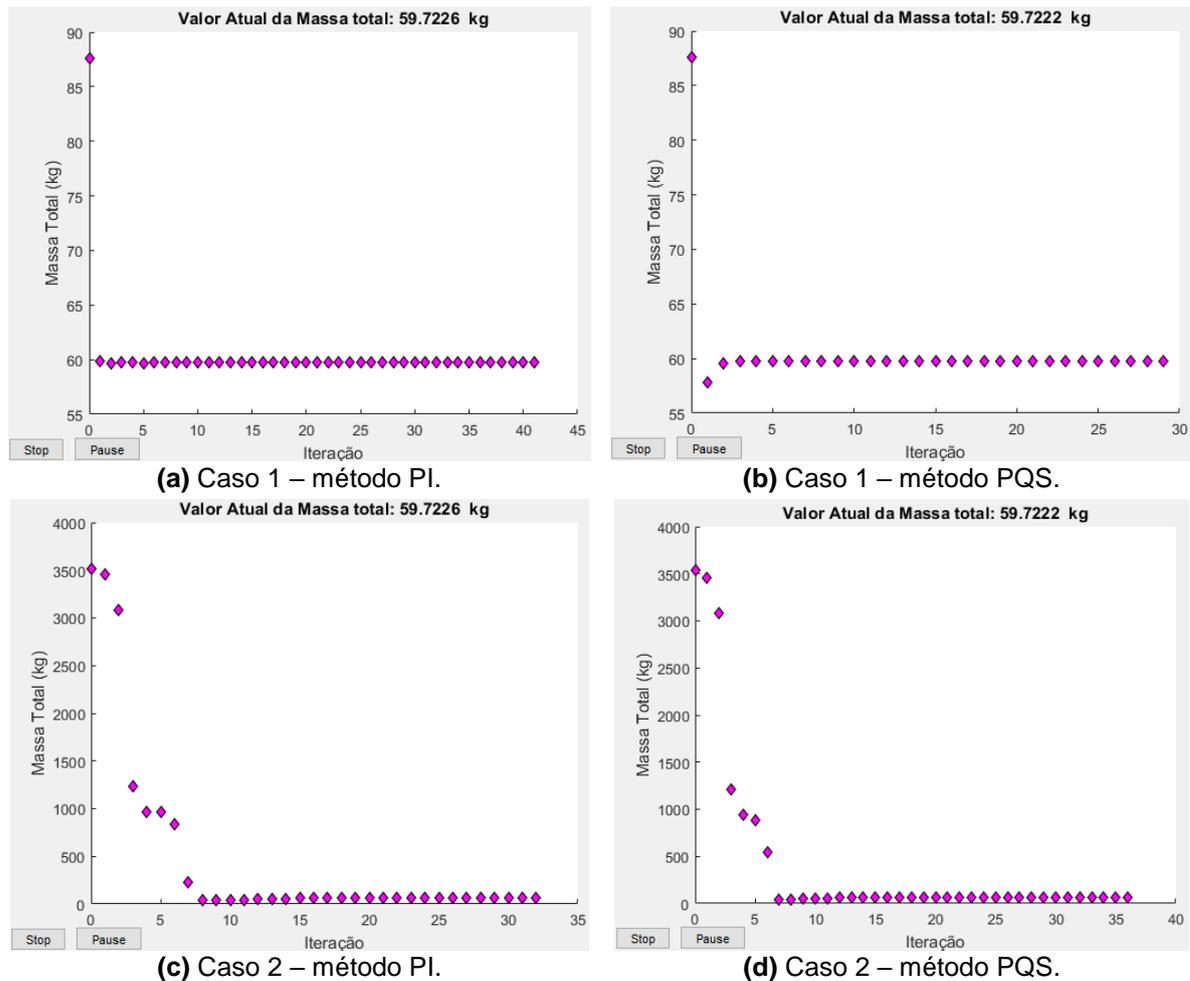
Para  $\xi = 0,5\%$  e perfil circular, observa-se que, em cada caso de estrutura inicial estudado, os métodos PI e PQS geraram a mesma solução contínua e a mesma solução discreta. Além disso, os resultados obtidos partindo do caso 1 foram iguais aos obtidos partindo do caso 2 e as restrições ativas foram a da área mínima do grupo 3 e a de deslocamento nodal.

Novamente, a utilização dos perfis quadrado e retangular resultou na seleção da área mínima para todos os casos e processos de otimização estudados. Com isso, a melhor

solução encontrada para  $\xi = 0,5\%$  foi a obtida com perfil circular e uso do procedimento de conversão para seções comerciais.

A Figura 4.15 apresenta os gráficos de massa total x iterações da melhor solução obtida com  $\xi = 0,5\%$ . Para essa solução, o método mais eficiente foi o PQS no caso 1 e o PI no caso 2.

Figura 4.15 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$  e perfil circular.



Fonte: Autora.

Comparando as soluções contínuas obtidas com  $\xi = 0,5\%$  e  $\xi = 0\%$ , percebe-se que a consideração do amortecimento gerou uma pequena redução na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. A solução obtida com  $\xi = 0,5\%$  é 0,53% mais leve que a obtida com  $\xi = 0\%$ .

Nas Tabelas 4.11 a 4.13 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 5\%$ .

Tabela 4.11 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 5\%$  e perfil circular.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,8483	6,8483	7,51	7,51	6,8483	6,8483	7,51	7,51
A2 (cm <sup>2</sup> )	4,413	4,413	4,8	4,8	4,413	4,413	4,8	4,8
A3 (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,007	0,007	0,0064	0,0064	0,007	0,007	0,0064	0,0064
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	96,564	96,564	87,3532	87,3532	96,564	96,564	87,3532	87,3532
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	77,242	77,242	70,2359	70,2359	77,242	77,242	70,2359	70,2359
MT (kg)	57,0927	57,0927	60,28	60,28	57,0927	57,0927	60,28	60,28
iterações	11	7	11	7	25	20	25	20
Aval. fun. obj.	59	51	59	51	111	88	111	88
Duração (s)	8,2792	7,1230	8,4615	7,0203	15,9159	12,8517	16,7303	12,5562

Tabela 4.12 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 5\%$  e perfil quadrado.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	5	2	5	2	13	8	13	8
Aval. fun. obj.	24	12	24	12	56	36	56	36
Duração (s)	3,7682	2,1776	3,7986	2,0494	8,6222	5,5106	8,6234	5,5213

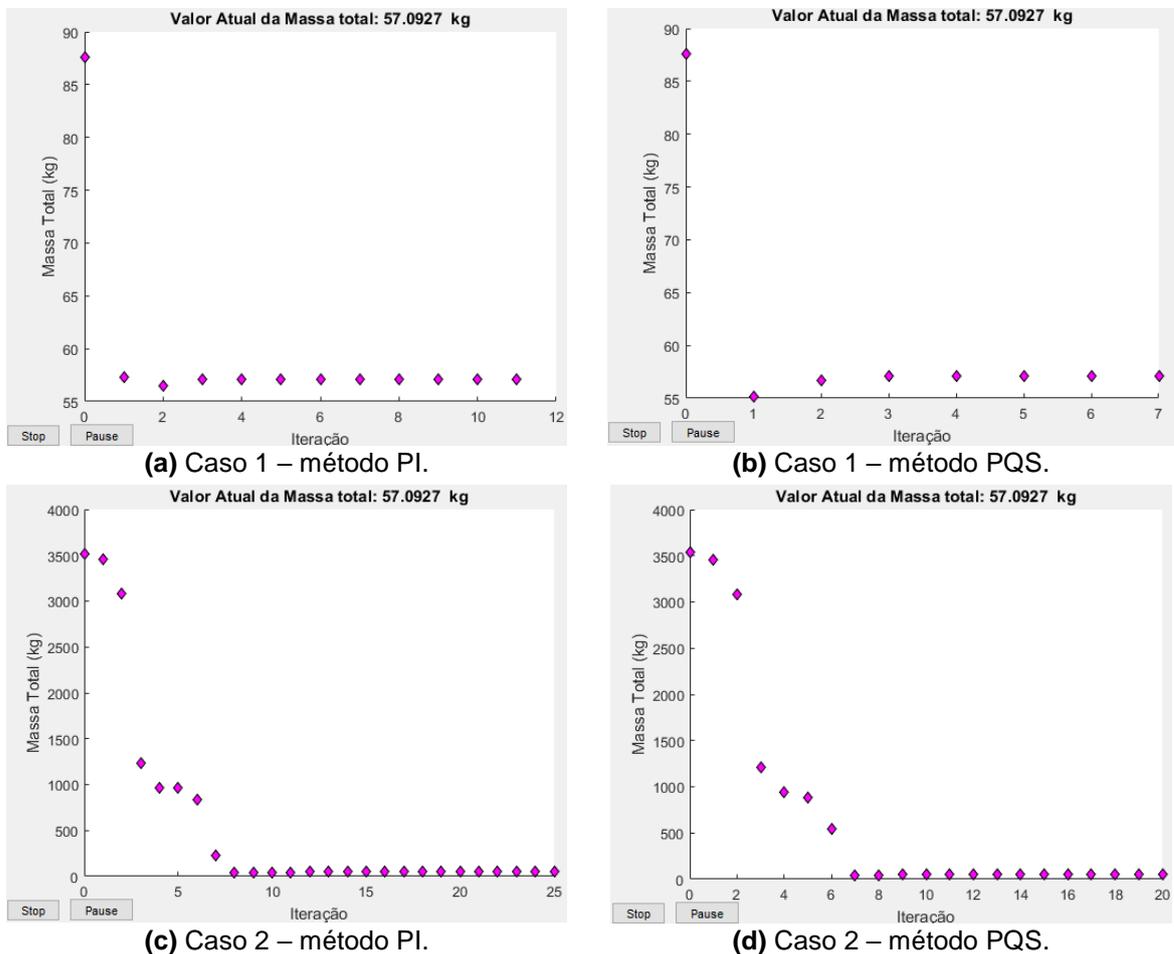
Tabela 4.13 – Estrutura final do domo geodésico:  $\xi = 5\%$  e perfil retangular.

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A2 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
A3 (cm <sup>2</sup> )	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41	6,41
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75	69,75
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36	83,36
MT (kg)	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10	87,10
iterações	5	2	5	2	13	7	13	7
Aval. fun. obj.	24	12	24	12	56	29	56	29
Duração (s)	3,7933	2,1622	3,6839	2,1391	8,7108	5,0158	9,0091	4,7177

As observações feitas para  $\xi = 0,5\%$  também são válidas para os resultados obtidos com  $\xi = 5\%$ . Adicionalmente, observa-se que o aumento da taxa de amortecimento causou uma redução ainda maior na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. A solução contínua obtida com  $\xi = 5\%$  é 4,9% mais leve que a obtida com  $\xi = 0\%$ .

A Figura 4.16 apresenta os gráficos de massa total x iterações para a melhor solução obtida com  $\xi = 5\%$ , isto é, a solução discreta obtida com uso do perfil circular. Para essa taxa de amortecimento, o método PQS foi o mais eficiente.

Figura 4.16 – Domo geodésico: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$  e perfil circular.

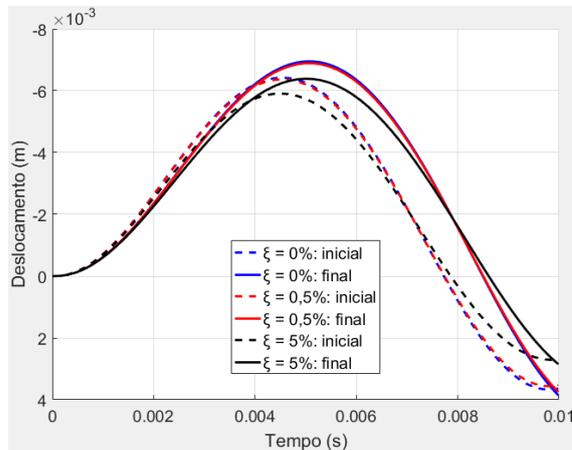


Fonte: Autora.

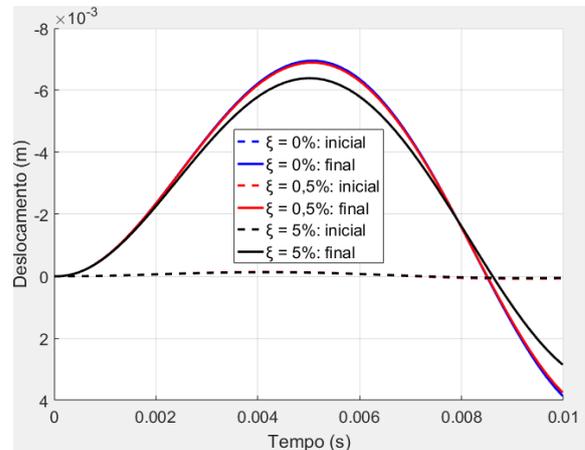
Na Figura 4.17 é feita uma análise comparativa entre a estrutura inicial e final de cada taxa de amortecimento estudada. Para a estrutura final, considerou-se a melhor solução obtida, ou seja, a com uso de perfil circular e uso do procedimento de conversão para seções comerciais. Os gráficos referem-se ao nó central, que apresentou o maior deslocamento nodal, e às barras dos grupos 1 e 2, que

apresentaram os maiores valores de tensão axial de compressão e tração, respectivamente.

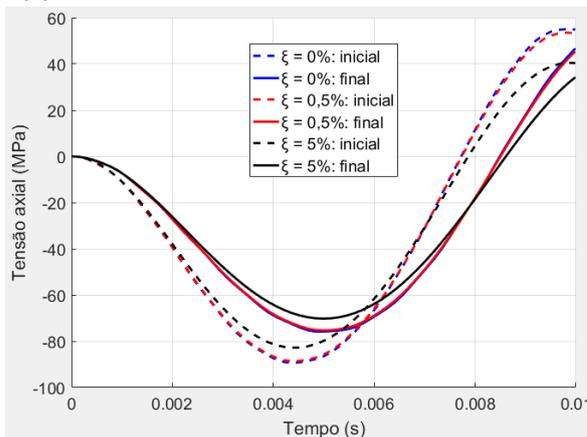
Figura 4.17 – Domo geodésico: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais.



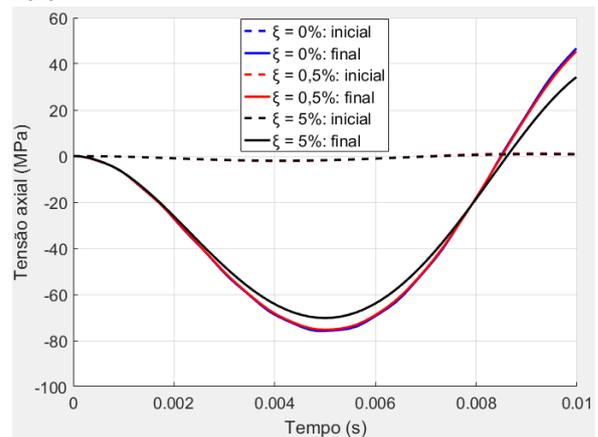
(a) Caso 1 – deslocamento em Z do nó central.



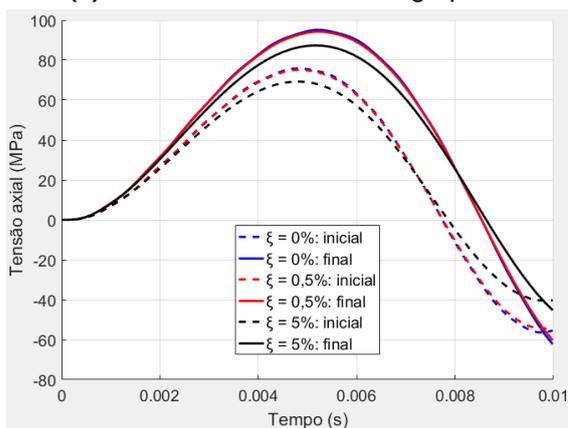
(b) Caso 2 – deslocamento em Z do nó central.



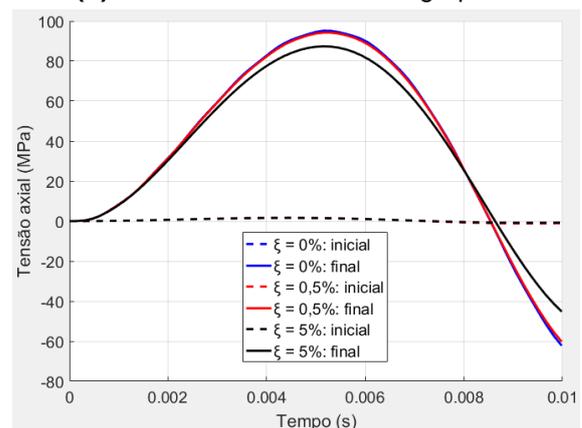
(c) Caso 1 – tensão axial do grupo 1.



(d) Caso 2 – tensão axial do grupo 1.



(e) Caso 1 – tensão axial do grupo 2.



(f) Caso 2 – tensão axial do grupo 2.

Fonte: Autora.

Para todas as taxas de amortecimento estudadas, a utilização do perfil circular forneceu soluções melhores que os perfis quadrado e retangular. A solução contínua obtida com o perfil circular é 31,1% mais leve para  $\xi = 0\%$ , 31,4% mais leve para  $\xi = 0,5\%$  e 34,4% mais leve para  $\xi = 5\%$ .

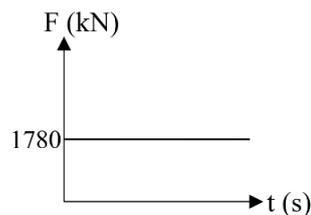
Isso se deve ao fato do perfil circular possuir um espaço de busca mais amplo, abrangendo áreas de 3,04 cm<sup>2</sup> a 260 cm<sup>2</sup>. Para o perfil quadrado, o espaço de busca compreende apenas áreas entre 6,41 cm<sup>2</sup> e 219 cm<sup>2</sup>. Já o do perfil retangular é ainda mais restrito, abrangendo áreas entre 6,41 cm<sup>2</sup> e 177 cm<sup>2</sup>.

Diante dessa tendência do perfil circular levar às melhores soluções, os próximos exemplos serão estudados apenas com esse tipo de perfil.

#### 4.2.2 Exemplo 2: treliça plana

Este exemplo foi analisado na Seção 4.1.1.2. Para a otimização, no entanto, as propriedades do material foram alteradas, conforme especificado no início da Seção 4.2. O carregamento adotado é apresentado na Figura 4.18.

Figura 4.18 – Carregamento aplicado no nó central da treliça plana.



Fonte: Autora.

O programa de otimização foi executado utilizando perfil tubular circular, duração da análise dinâmica de 0,06 s e incremento de tempo  $\Delta t = 0,00002$  s. Como a estrutura é simétrica, foi utilizado o agrupamento de barras indicado na Tabela 4.14, portanto tem-se apenas uma variável de projeto. As restrições impostas ao problema de otimização estão indicadas na Tabela 4.15.

Tabela 4.14 – Agrupamento de barras da treliça plana.

Grupo	Barras
1	TODAS

Tabela 4.15 – Restrições impostas à treliça plana.

$A_{\min}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{\max}$ (cm <sup>2</sup> )	$U_{\lim}$ (m)	$\sigma_{T_{\lim}}$ (MPa)	$\sigma_{C_{\lim}}$ (MPa)
3,04	260	0,013	250	250

Dois casos de estrutura inicial foram estudados: o caso 1 mantém a área adotada na Seção 4.1.1.2 (6,45 cm<sup>2</sup>) e o caso 2 adota a área máxima permitida para perfis

circulares (260 cm<sup>2</sup>). As informações referentes à estrutura inicial de cada caso estudado estão resumidas na Tabela 4.16.

Tabela 4.16 – Estrutura inicial da treliça plana.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A (cm <sup>2</sup> )	6,45	6,45	6,45	260	260	260
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,1561	0,1531	0,1423	0,0035	0,0034	0,0032
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	5795	5745	5360	137,0575	135,9834	127,0784
MT (kg)	25,7213	25,7213	25,7213	1036,828	1036,828	1036,828

Observa-se que as estruturas iniciais do caso 2 atendem a todas as restrições impostas ao problema. As estruturas iniciais do caso 1, no entanto, não atendem às restrições de deslocamento nodal e de tensão de compressão.

Na Tabela 4.17 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0\%$ .

Tabela 4.17 – Estrutura final da treliça plana:  $\xi = 0\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	142,6615	142,6615	152	152	142,6615	142,6615	152	152
$U_{m\acute{a}x}$ (m)	0,0064	0,0064	0,006	0,006	0,0064	0,0064	0,006	0,006
$\sigma_{T_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{C_{m\acute{a}x}}$ (MPa)	250	250	234,613	234,613	250	250	234,613	234,613
MT (kg)	568,90	568,90	606,14	606,14	568,90	568,90	606,14	606,14
iterações	15	11	15	11	10	8	10	8
Aval. fun. obj.	32	24	32	24	22	18	22	18
Duração (s)	26,5644	15,9461	20,6282	15,2660	14,4323	11,7455	14,4891	12,0858

Em cada caso de estrutura inicial, os métodos PI e PQS forneceram a mesma solução contínua e a mesma solução discreta, diferindo apenas no número de iterações, na quantidade de avaliações da função objetivo e na duração do processo de otimização.

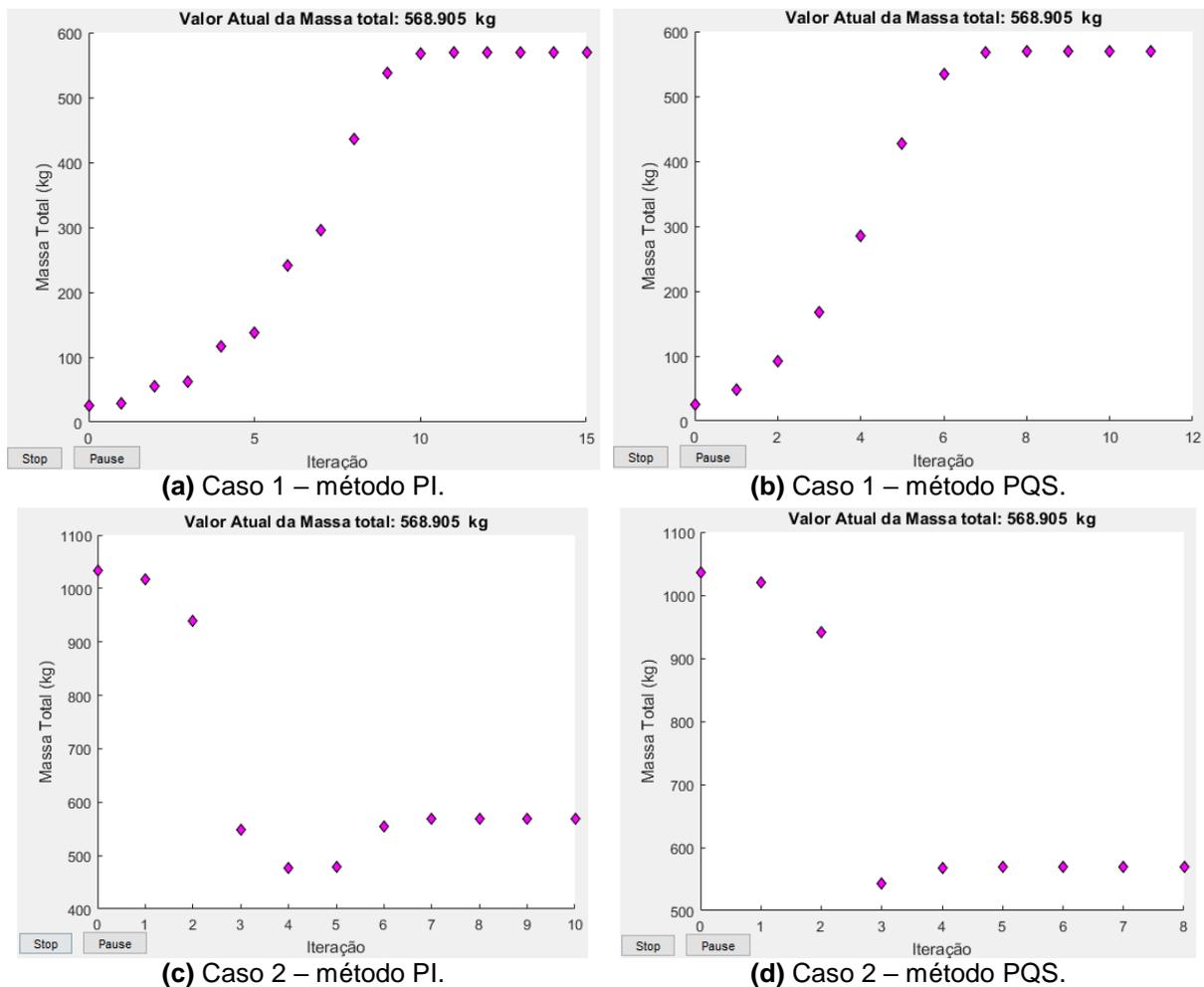
Conforme esperado, o procedimento de conversão para seções comerciais, utilizado por PI-D e PQS-D, implicou um aumento da variável de projeto e, conseqüentemente, um aumento da massa total da estrutura. Também foi observada uma redução no

deslocamento máximo e nas tensões máximas, em relação a solução contínua. Portanto, os resultados obtidos com uso do procedimento de conversão estão a favor da segurança.

Ressalta-se que os resultados encontrados partindo do caso 1 de estrutura inicial foram iguais aos obtidos partindo do caso 2. O fato de convergir para a mesma solução, partindo de pontos extremos opostos, é um forte indício de que a solução encontrada seja de fato a melhor solução para esta estrutura, isto é, um mínimo global.

Na Figura 4.19 são apresentados os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ . Destaca-se que o método PQS convergiu com menos iterações e com menos avaliações da função objetivo que o método PI.

Figura 4.19 – Treliza plana: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ .



Fonte: Autora.

Os gráficos do caso 1 apresentam um trecho inicial crescente, o que difere do comportamento esperado em um problema de minimização. Isso acontece porque a

estrutura inicial não atende a todas as restrições do problema, então o algoritmo inicialmente aumenta o valor da variável de projeto até encontrar uma solução viável e, a partir dela, minimiza a função objetivo até a convergência.

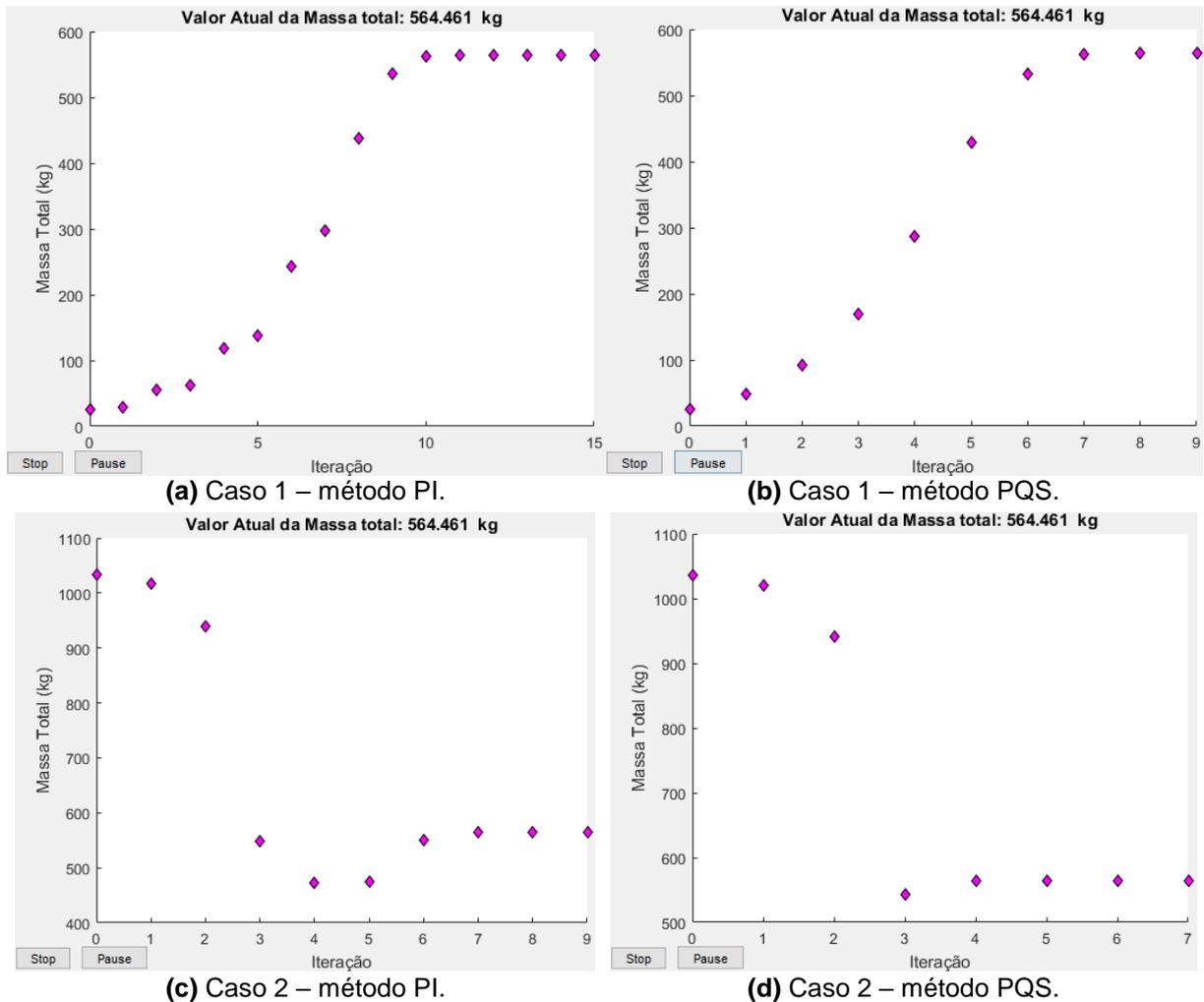
Na Tabela 4.18 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0,5\%$ .

Tabela 4.18 – Estrutura final da treliça plana:  $\xi = 0,5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	141,5470	141,5470	152	152	141,5470	141,5470	152	152
U <sub>máx</sub> (m)	0,0064	0,0064	0,006	0,006	0,0064	0,0064	0,006	0,006
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	232,776	232,776	250	250	232,776	232,776
MT (kg)	564,46	564,46	606,14	606,14	564,46	564,46	606,14	606,14
iterações	15	9	15	9	9	7	9	7
Aval. fun. obj.	32	20	32	20	20	16	20	16
Duração (s)	20,6082	12,9231	20,0504	13,0051	13,4059	10,5589	13,1780	10,6057

As constatações apresentadas para os resultados sem amortecimento ( $\xi = 0\%$ ) também são válidas para os resultados da Tabela 4.18. Adicionalmente, percebe-se que a consideração do amortecimento gerou uma diminuição na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para a solução contínua, por exemplo, houve uma redução de 0,78% na massa total em relação à solução obtida com  $\xi = 0\%$ .

Os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$  são apresentados na Figura 4.20. Para essa taxa de amortecimento o método de otimização mais eficiente foi o PQS.

Figura 4.20 – Treliça plana: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$ .

Fonte: Autora.

A Tabela 4.19 apresenta os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 5\%$ .

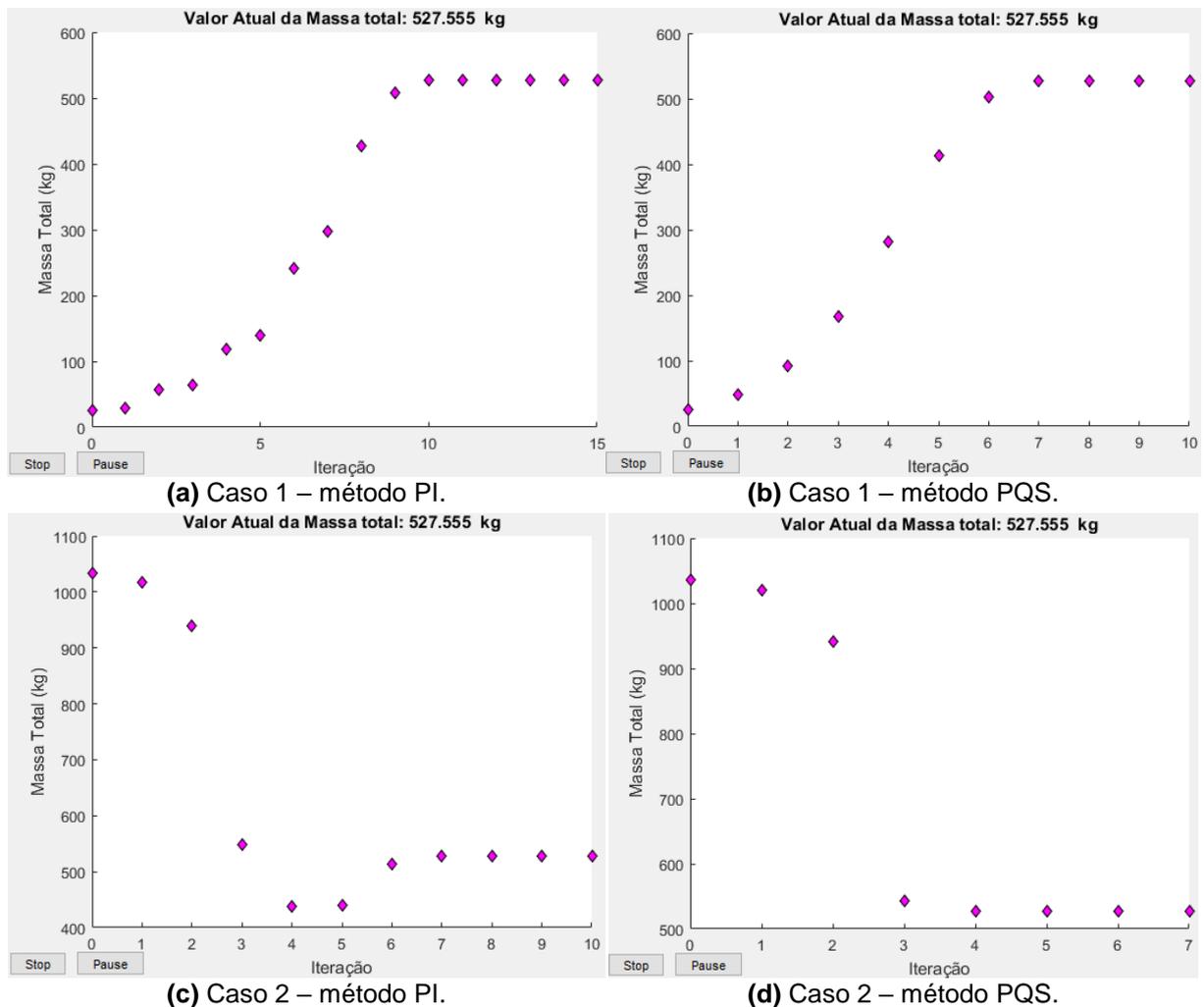
Tabela 4.19 – Estrutura final da treliça plana:  $\xi = 5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	132,2923	132,2923	152	152	132,2923	132,2923	152	152
U <sub>máx</sub> (m)	0,0064	0,0064	0,0055	0,0055	0,0064	0,0064	0,0055	0,0055
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	217,53	217,53	250	250	217,53	217,53
MT (kg)	527,55	527,55	606,14	606,14	527,55	527,55	606,14	606,14
iterações	15	10	15	10	10	7	10	7
Aval. fun. obj.	32	22	32	22	22	16	22	16
Duração (s)	20,5841	14,0670	20,3553	14,1900	14,4303	10,6113	14,4445	10,6817

Além das observações feitas para as taxas de amortecimento anteriores, observa-se que o aumento da taxa de amortecimento para 5%, gerou uma redução ainda maior na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para a solução contínua, a estrutura final é 7,3% mais leve que a obtida para  $\xi = 0\%$ .

A Figura 4.21 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ . Assim como nas outras taxas de amortecimento estudadas, o método PQS foi o mais eficiente.

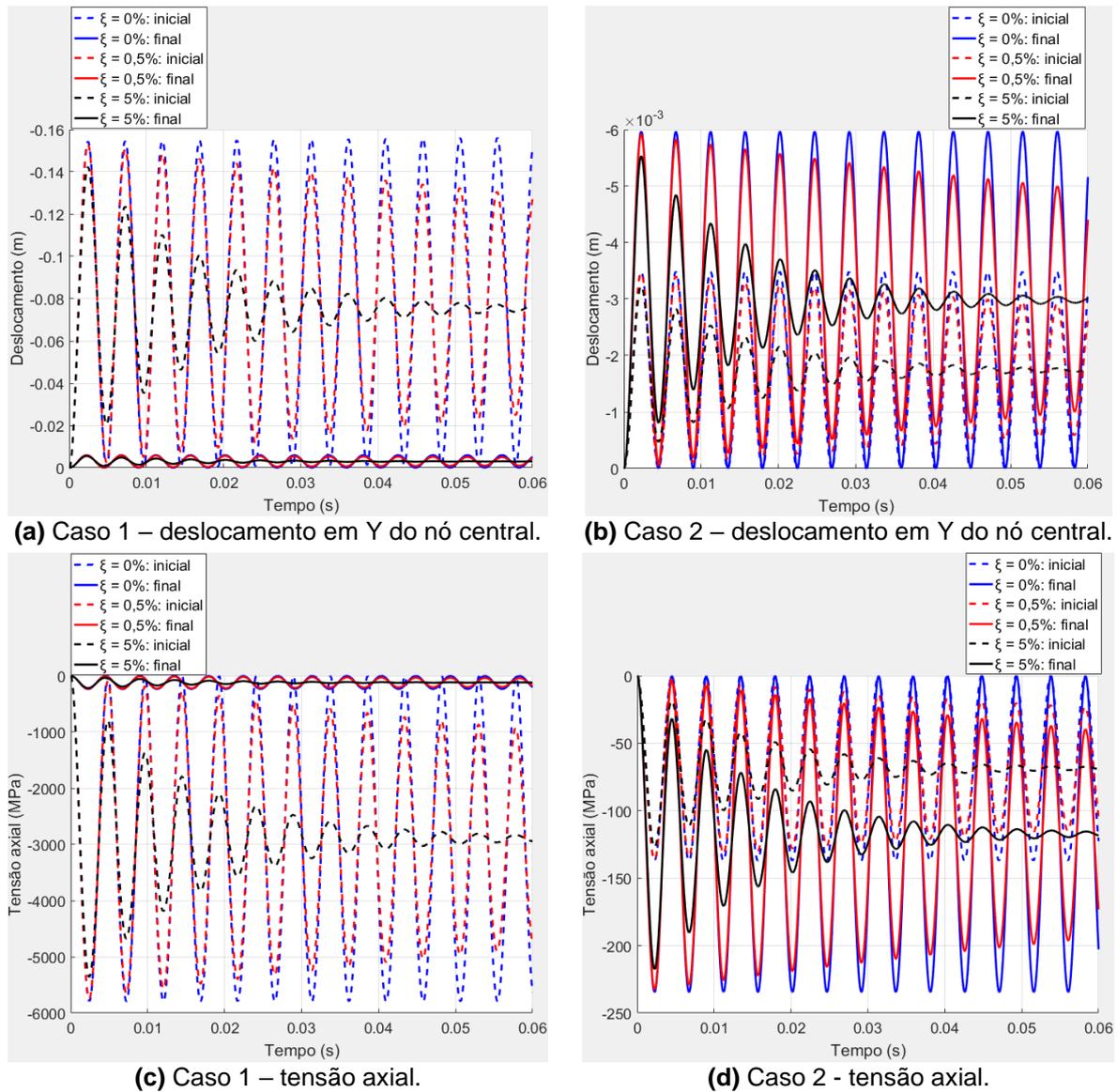
Figura 4.21 – Treliça plana: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ .



Fonte: Autora.

A Figura 4.22 compara o comportamento da estrutura inicial e final de cada taxa de amortecimento estudada. As estruturas finais referem-se à solução discreta, considerada como a melhor solução, devido à sua adequação aos perfis comerciais.

Figura 4.22 – Treliça plana: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais.



Fonte: Autora.

Por fim, nota-se que para todas as otimizações realizadas neste exemplo, a única restrição ativa foi a de tensão axial de compressão.

### 4.2.3 Exemplo 3: viga treliçada

Este exemplo aborda a viga treliçada apresentada na Seção 4.1.1.3. Nesta seção, alteraram-se as propriedades do material, conforme especificado no início da Seção 4.2.

Utilizando o programa computacional desenvolvido, a otimização foi realizada com o uso de perfil tubular circular, duração da análise dinâmica de 0,5 s e incremento de tempo  $\Delta t = 0,001$  s.

Com o objetivo de reduzir a duração do processo de otimização, adotou-se o agrupamento de barras indicado na Tabela 4.20. As restrições impostas ao problema estão na Tabela 4.21.

Tabela 4.20 – Agrupamento de barras da viga treliçada.

Grupo	Barras
1	TODAS

Tabela 4.21 – Restrições impostas à viga treliçada.

$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )	$U_{lim}$ (m)	$\sigma_{Tlim}$ (MPa)	$\sigma_{Clim}$ (MPa)
3,04	260	0,034	250	250

Assim como foi feito nos exemplos anteriores, dois casos de estrutura inicial foram estudados. Para este exemplo, no entanto, o caso 1 não mantém as áreas adotadas na Seção 4.1.1.3, por serem valores menores que a área mínima indicada na Tabela 4.21. Portanto, a estrutura inicial do caso 1 adota a área mínima permitida para perfis circulares (3,04 cm<sup>2</sup>) e o caso 2 adota a área máxima permitida (260 cm<sup>2</sup>).

As informações referentes à estrutura inicial de cada caso estudado estão resumidas na Tabela 4.22.

Tabela 4.22 – Estrutura inicial da viga treliçada.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	260	260	260
$U_{máx}$ (m)	0,1029	0,0961	0,0889	0,00114	0,00112	0,00110
$\sigma_{Tmáx}$ (MPa)	1233,6018	1174,6439	1091,6469	13,9408	13,6804	12,4203
$\sigma_{Cmáx}$ (MPa)	1215,9809	1196,6147	1070,4303	14,2840	14,0577	12,5779
MT (kg)	384,0699	384,0699	384,0699	32848,0837	32848,0837	32848,0837

As estruturas iniciais consideradas no caso 2 atendem a todas as restrições impostas ao problema de otimização. Já nas estruturas iniciais do caso 1, somente a restrição lateral é atendida.

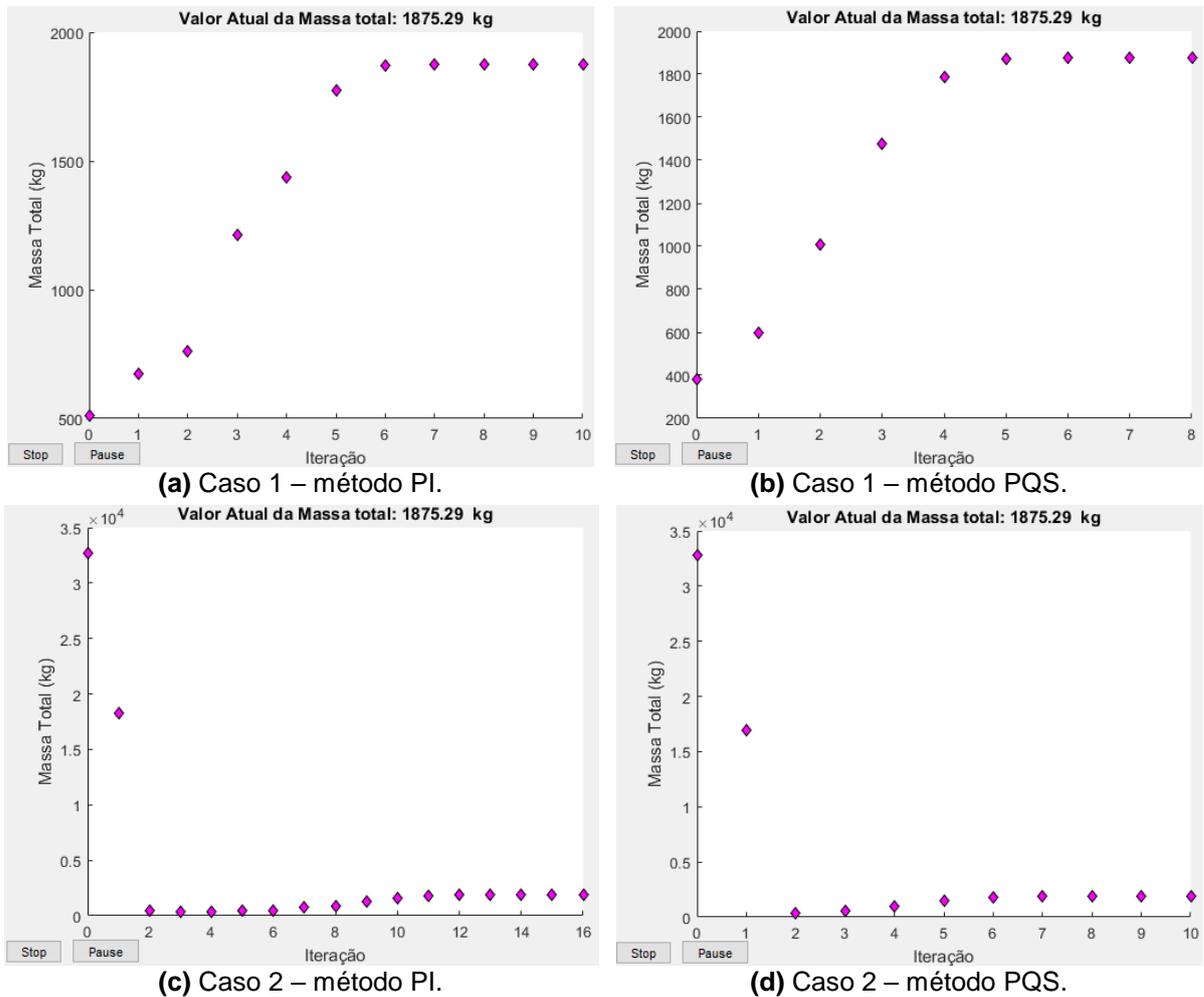
Na Tabela 4.23 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0\%$ .

Tabela 4.23 – Estrutura final da viga treliçada:  $\xi = 0\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	14,8433	14,8433	16,3	16,3	14,8433	14,8433	16,3	16,3
U <sub>máx</sub> (m)	0,0203	0,0203	0,0184	0,0184	0,0203	0,0203	0,0184	0,0184
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	244,489	244,489	222,615	222,615	244,489	244,489	222,615	222,615
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	227,6761	227,6761	250	250	227,6761	227,6761
MT (kg)	1875,28	1875,28	2059,32	2059,32	1875,28	1875,28	2059,32	2059,32
Iterações	10	8	10	8	16	10	16	10
Aval. fun. obj.	22	19	22	19	34	23	34	23
Duração	1min e 23,205s	1min e 10,857s	1min e 21,813s	1min e 10,666s	2min e 3,853s	1min e 26,491s	2min e 4,136s	1min e 25,304s

Para cada caso de estrutura inicial, os métodos PI e PQS forneceram a mesma solução contínua e a mesma solução discreta. Além disso, os resultados encontrados partindo do caso 1 foram iguais aos encontrados partindo do caso 2, levantando a hipótese de mínimo global.

A Figura 4.23 contém os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ . Para essa taxa de amortecimento o método PQS foi o mais eficiente.

Figura 4.23 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ .

Fonte: Autora.

Na Tabela 4.24 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização, considerando  $\xi = 0,5\%$ .

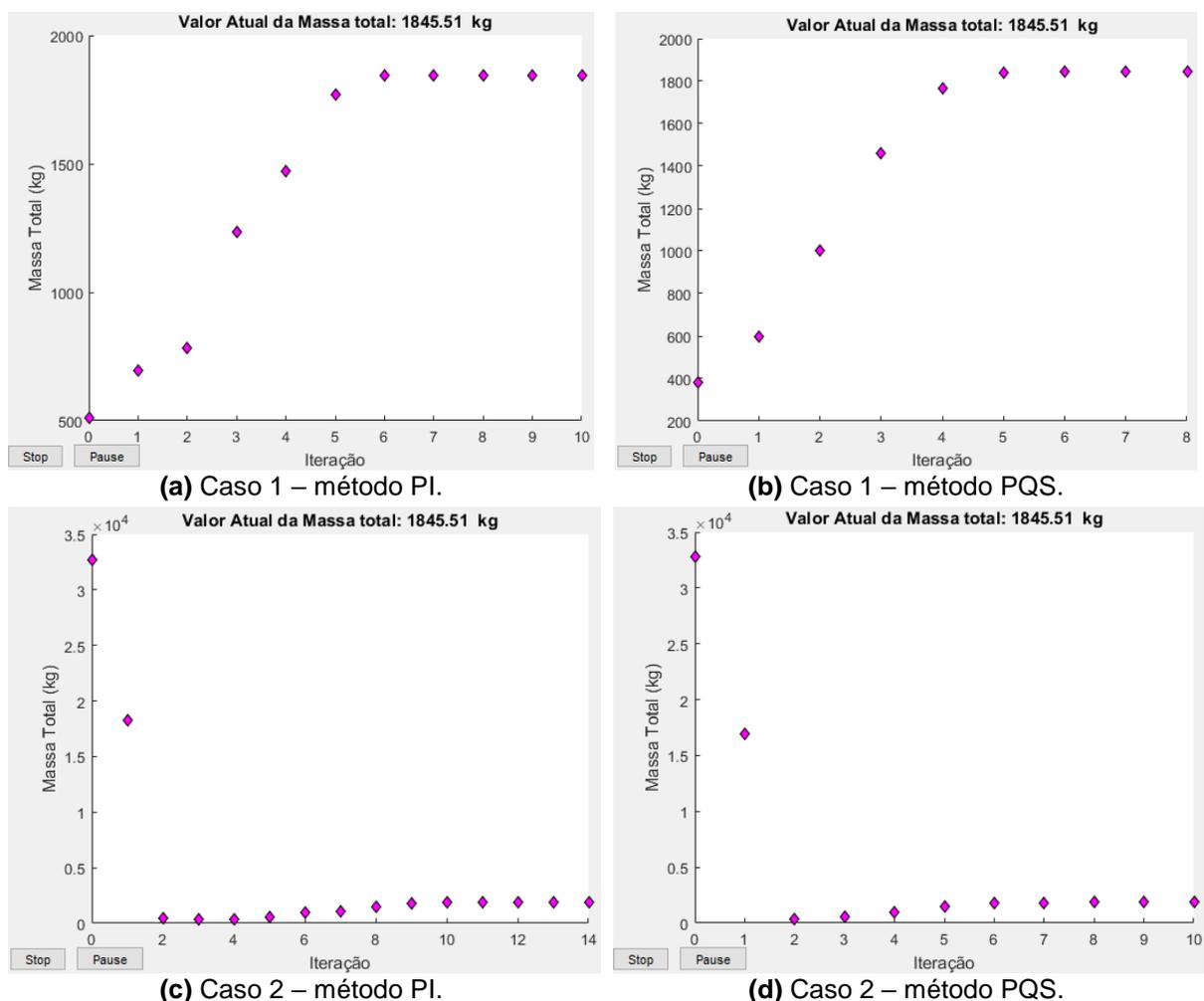
Tabela 4.24 – Estrutura final da viga treliçada:  $\xi = 0,5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	14,6077	14,6077	14,7	14,7	14,6077	14,6077	14,7	14,7
U <sub>máx</sub> (m)	0,0199	0,0199	0,0198	0,0198	0,0199	0,0199	0,0198	0,0198
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	243,71	243,71	242,18	242,18	243,71	243,71	242,18	242,18
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	248,431	248,431	250	250	248,431	248,431
MT (kg)	1845,51	1845,51	1857,18	1857,18	1845,51	1845,51	1857,18	1857,18
Iterações	10	8	10	8	14	10	14	10
Aval. fun. obj.	22	19	22	19	30	23	30	23
Duração	1min e 21,33s	1min e 10,79s	1min e 20,91s	1min e 10,00s	1min e 47,60s	1min e 24,81s	1min e 47,80s	1min e 23,98s

Em relação ao desempenho dos processos de otimização e a equivalência dos resultados obtidos com os dois casos de estrutura inicial, as observações feitas para  $\xi = 0\%$  também são válidas para  $\xi = 0,5\%$ . Destaca-se ainda que a consideração de amortecimento implicou uma redução na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para a solução contínua, houve uma redução de 1,6% na massa total em relação à solução obtida com  $\xi = 0\%$ .

A Figura 4.23 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$ . Com essa taxa de amortecimento, o método PQS necessitou de menos iterações e uma quantidade menor de avaliações da função objetivo que o método PI.

Figura 4.24 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$ .



Fonte: Autora.

Na Tabela 4.25 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 5\%$ .

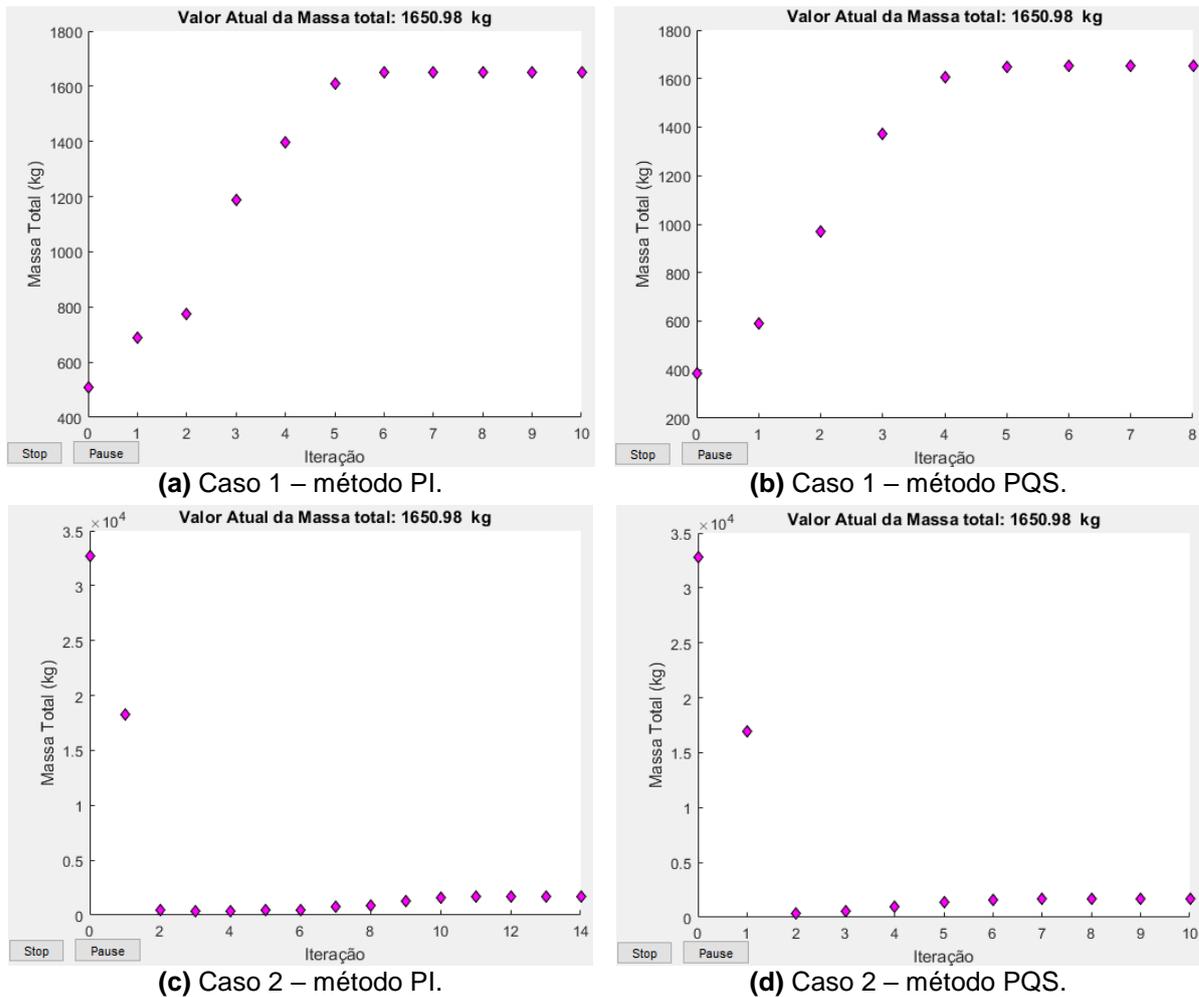
Tabela 4.25 – Estrutura final da viga treliçada:  $\xi = 5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	13,0679	13,0679	13,1	13,1	13,0679	13,0679	13,1	13,1
U <sub>máx</sub> (m)	0,02065	0,02065	0,0206	0,0206	0,02065	0,02065	0,0206	0,0206
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	248,68	248,68	248,07	248,07	248,68	248,68	248,07	248,07
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	249,3871	249,3871	250	250	249,3871	249,3871
MT (kg)	1650,98	1650,98	1655,04	1655,04	1650,98	1650,98	1655,04	1655,04
Iterações	10	8	10	8	14	10	14	10
Aval. fun. obj.	22	19	22	19	31	23	31	23
Duração	1min e 13,67s	1min e 4,15s	1min e 13,20s	1min e 3,24s	1min e 41,90s	1min e 17,11s	1min e 47,79s	1min e 15,92s

Com o aumento da taxa de amortecimento para 5%, houve uma redução de 12% na massa total da estrutura em comparação ao resultado obtido com  $\xi = 0\%$ , quando se considera a solução contínua.

A Figura 4.25 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ . Novamente, o método mais eficiente foi o PQS.

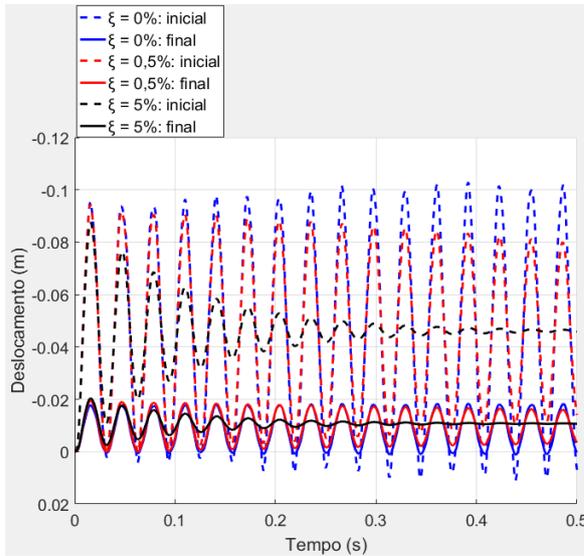
Figura 4.25 – Viga treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ .



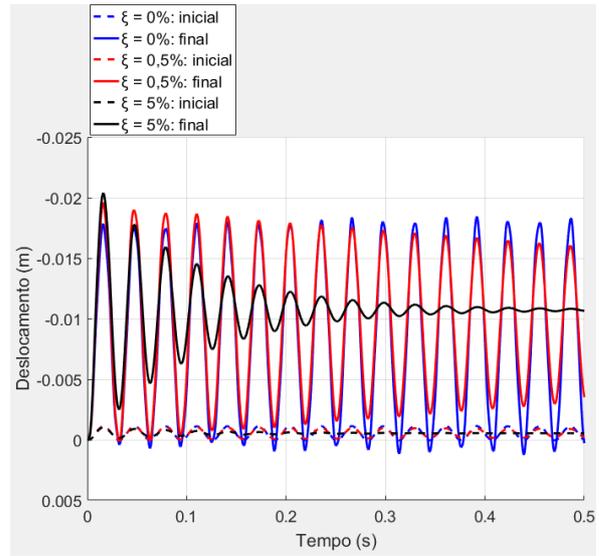
Fonte: Autora.

Na Figura 4.26 é feita uma análise comparativa entre a estrutura inicial e final de cada taxa de amortecimento estudada. Para a estrutura final, considerou-se a melhor solução obtida, ou seja, a solução discreta. Os gráficos referem-se ao nó 22, que apresentou o maior deslocamento nodal com  $\xi = 0\%$ , e à barra 40, que apresentou o maior valor de tensão axial com  $\xi = 0\%$  (ver Figura 4.27).

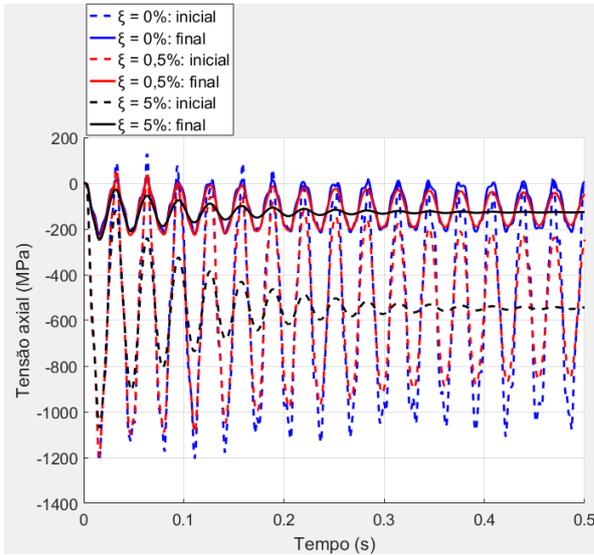
Figura 4.26 – Viga treliçada: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais.



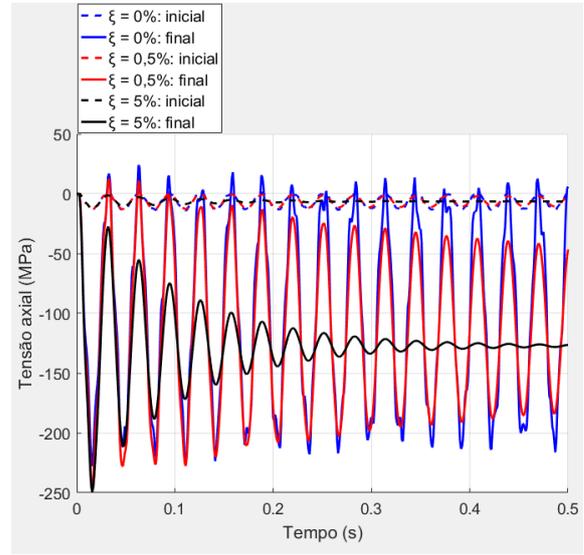
(a) Caso 1 – deslocamento em Z do nó 22.



(b) Caso 2 – deslocamento em Z do nó 22.



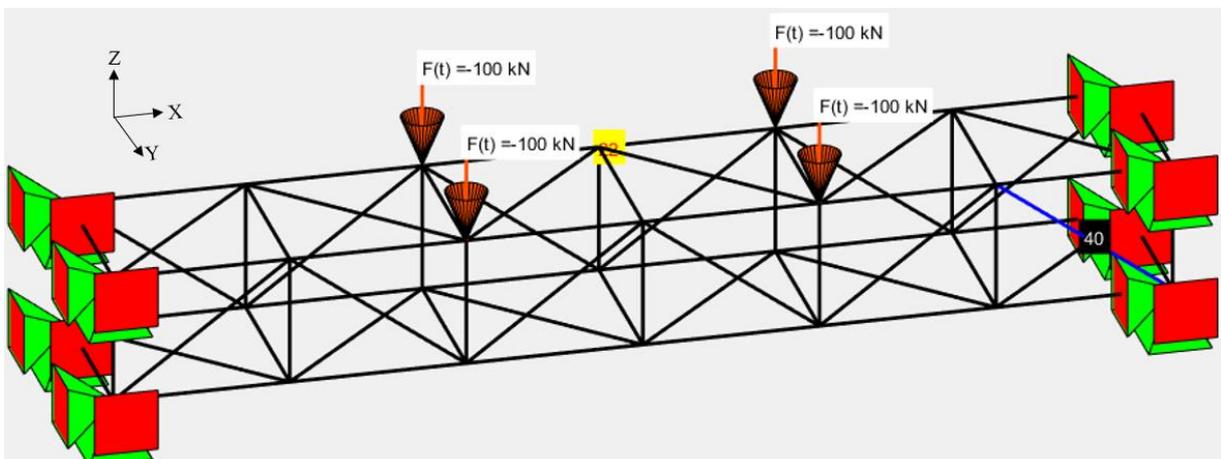
(c) Caso 1 – tensão axial da barra 40.



(d) Caso 2 – tensão axial da barra 40.

Fonte: Autora.

Figura 4.27 – Viga treliçada: nó e barra analisados.



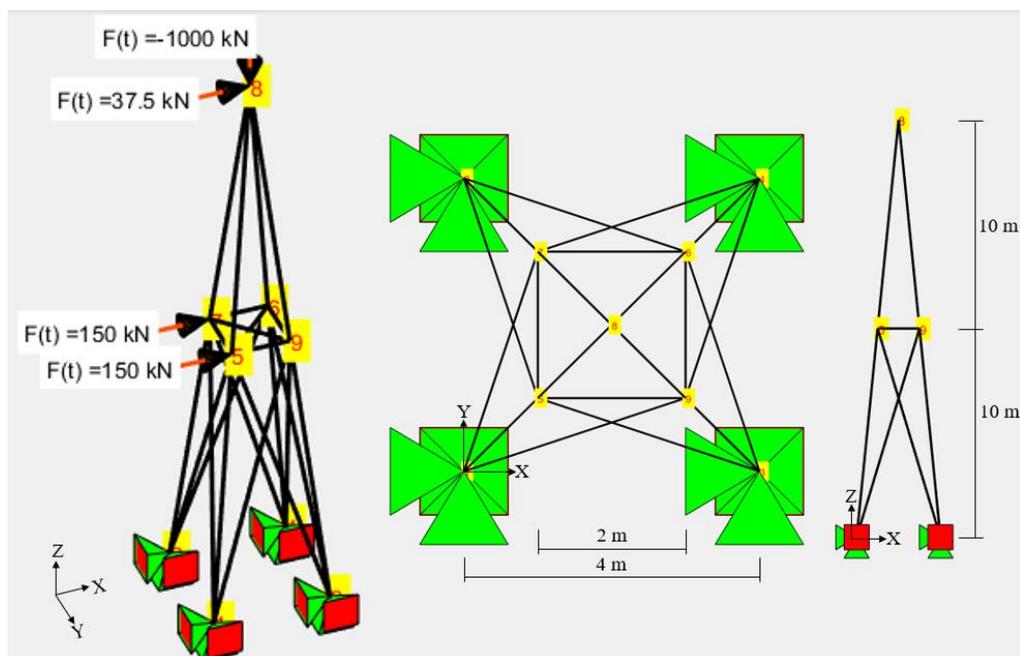
Fonte: Autora.

Por fim, ressalta-se que para todas as taxas de amortecimento estudadas neste exemplo, a única restrição ativa foi a de tensão axial de compressão.

#### 4.2.4 Exemplo 4: torre treliçada

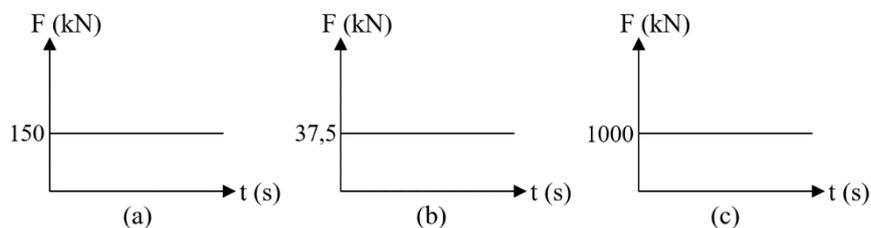
Este exemplo consiste em uma torre treliçada composta por 22 barras e 8 nós (Figura 4.28). A estrutura está solicitada por carregamentos aplicados subitamente, que permanecem invariáveis com o tempo (Figura 4.29).

Figura 4.28 – Torre treliçada.



Fonte: Autora.

Figura 4.29 – Torre treliçada: a) carregamento aplicado nos nós 5 e 7 na direção X; b) carregamento aplicado no nó 8 na direção X; c) carregamento aplicado no nó 8 na direção Z.



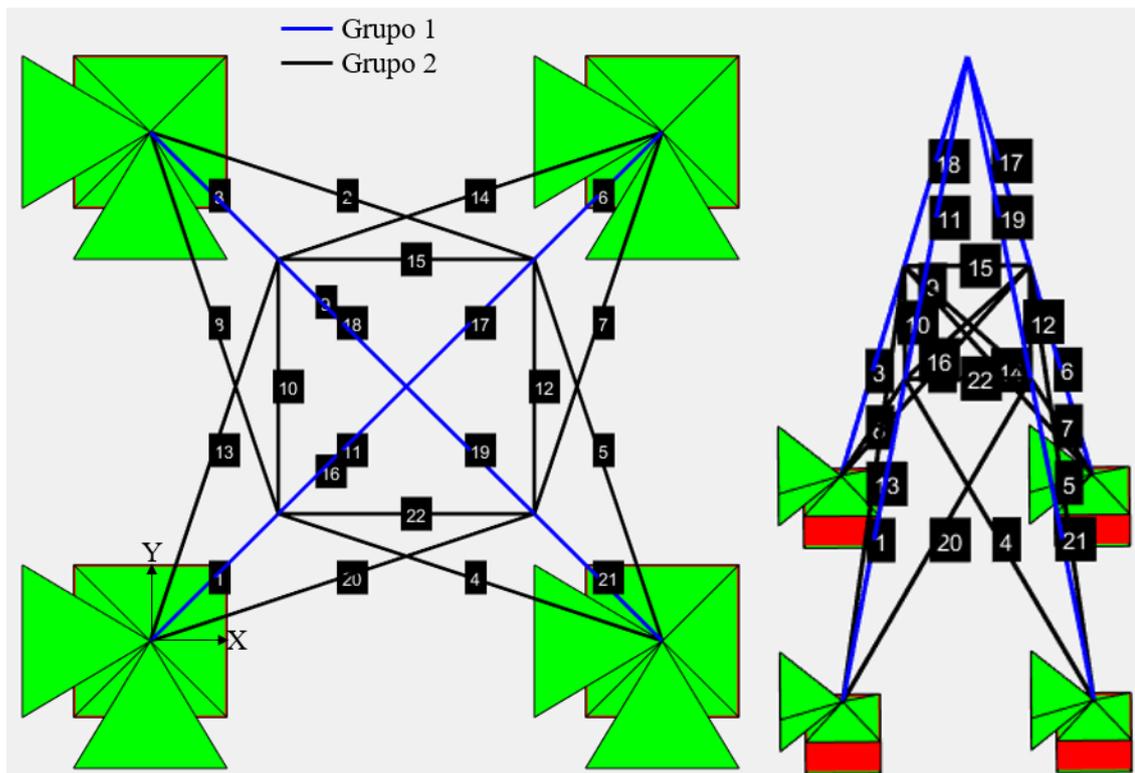
Fonte: Autora.

O programa de otimização foi executado utilizando perfil tubular circular, duração da análise dinâmica de 0,24 s, incremento de tempo  $\Delta t = 0,001$  s e o agrupamento de barras indicado na Tabela 4.26 e na Figura 4.13. As restrições impostas ao problema de otimização estão resumidas na Tabela 4.27.

Tabela 4.26 – Agrupamento de barras da torre treliçada.

Grupo	Barras
1	1, 3, 6, 11, 17, 18, 19, 21.
2	2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 22.

Figura 4.30 – Numeração e agrupamento de barras da torre treliçada.



Fonte: Autora.

Tabela 4.27 – Restrições impostas à torre treliçada.

$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )	$U_{lim}$ (m)	$\sigma_{Tlim}$ (MPa)	$\sigma_{Clim}$ (MPa)
3,04	260	0,10	250	250

Dois casos de estrutura inicial foram estudados: o caso 1 adota para todas as barras a área mínima permitida (3,04 cm<sup>2</sup>) e o caso 2 adota a área máxima permitida (260 cm<sup>2</sup>). Informações referentes às estruturas iniciais de cada caso estudado estão resumidas na Tabela 4.28.

Tabela 4.28 – Estrutura inicial da torre treliçada.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A1 (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	260	260	260
A2 (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	260	260	260
U <sub>máx</sub> (m)	1,5825	1,5674	1,4581	0,0109	0,0108	0,0099
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	1640,104	1317,5884	966,6336	16,6083	14,8032	10,0116
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	3437,293	2876,0449	2543,5392	31,5701	25,0717	21,0901
MT (kg)	425,6326	425,6326	425,6326	36402,7865	36402,7865	36402,7865

Observa-se que as estruturas iniciais do caso 2 atendem todas as restrições impostas ao problema de otimização. As estruturas iniciais do caso 1, no entanto, atendem apenas as restrições laterais.

Na Tabela 4.29 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0\%$ .

Tabela 4.29 – Estrutura final da torre treliçada:  $\xi = 0\%$ .

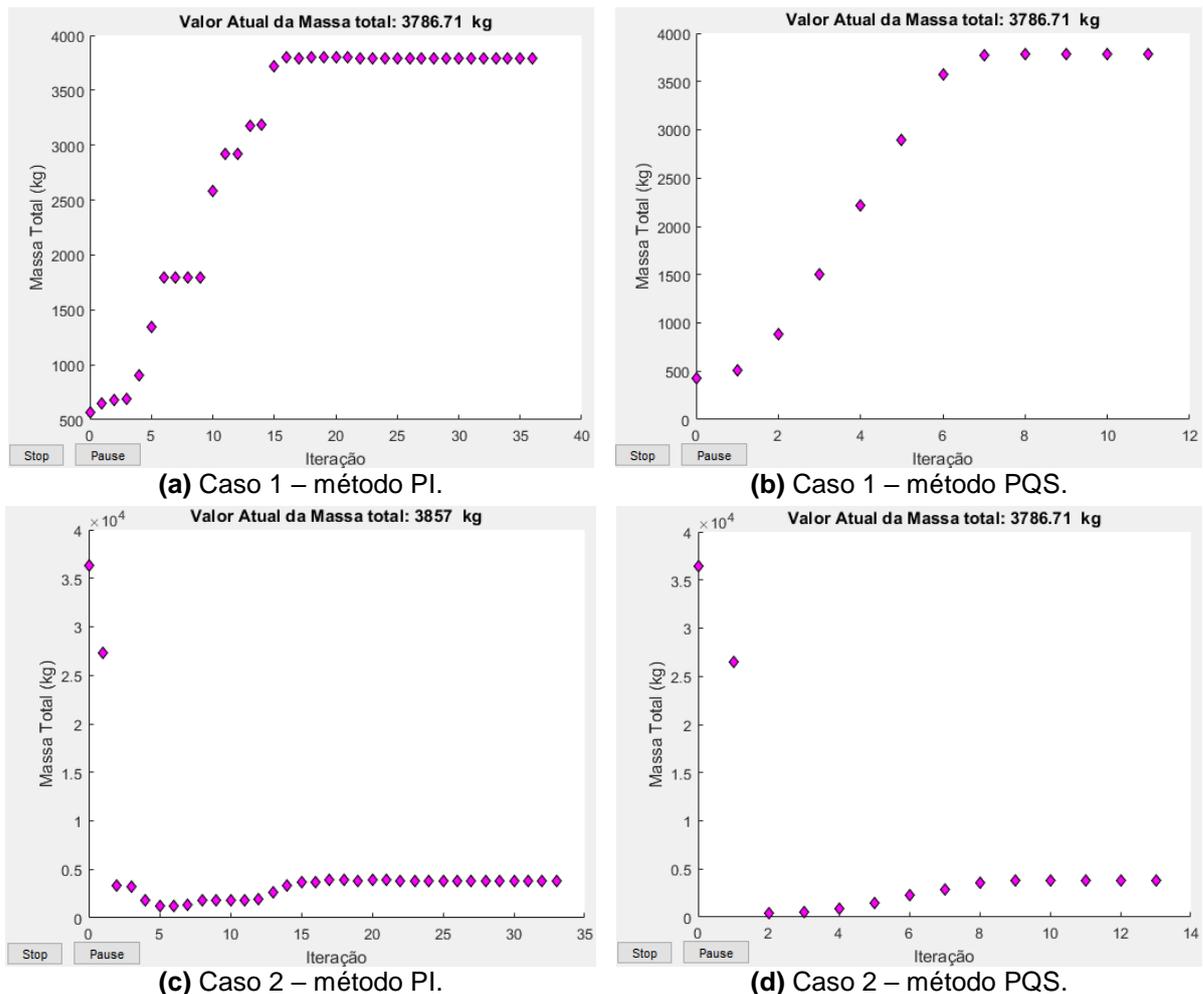
	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	32,8923	32,8923	35	35	33,4167	32,8923	35	35
A2 (cm <sup>2</sup> )	22,2041	22,2041	24,8	24,8	22,6876	22,2041	24,8	24,8
U <sub>máx</sub> (m)	0,1	0,1	0,0925	0,0925	0,09824	0,1	0,0925	0,0925
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	184,901	184,901	167,2208	167,2208	181,27	184,901	167,2208	167,2208
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	239,5002	239,5002	249,9934	250	239,5002	239,5002
MT (kg)	3786,71	3786,71	4119,20	4119,20	3857,00	3786,71	4119,20	4119,20
Iterações	36	11	36	11	34	13	34	13
Aval. fun. obj.	165	39	165	39	153	46	153	46
Duração	1min e 26,85s	19,04s	1min e 14,44s	18,42s	1min e 6,65s	20,37s	1min e 5,54s	20,47s

No caso 1 de estrutura inicial, PI-C e PQS-C forneceram a mesma solução. No caso 2, esses processos de otimização convergiram para soluções muito próximas, mas não iguais. Como a diferença entre essas soluções é pequena, o procedimento de conversão para seções comerciais, utilizado em PI-D e PQS-D, gerou soluções iguais.

Os resultados obtidos partindo do caso 1 de estrutura inicial foram iguais aos partindo do caso 2, com exceção das soluções obtidas com PI-C. No entanto, a diferença entre as soluções obtidas pelo PI-C nos casos 1 e 2 é de apenas 1,8%.

A Figura 4.31 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ . Para essa taxa de amortecimento, o método PQS chegou à solução ótima realizando menos iterações e menos avaliações da função objetivo que o método PI.

Figura 4.31 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ .



Fonte: Autora.

Na Tabela 4.30 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0,5\%$ .

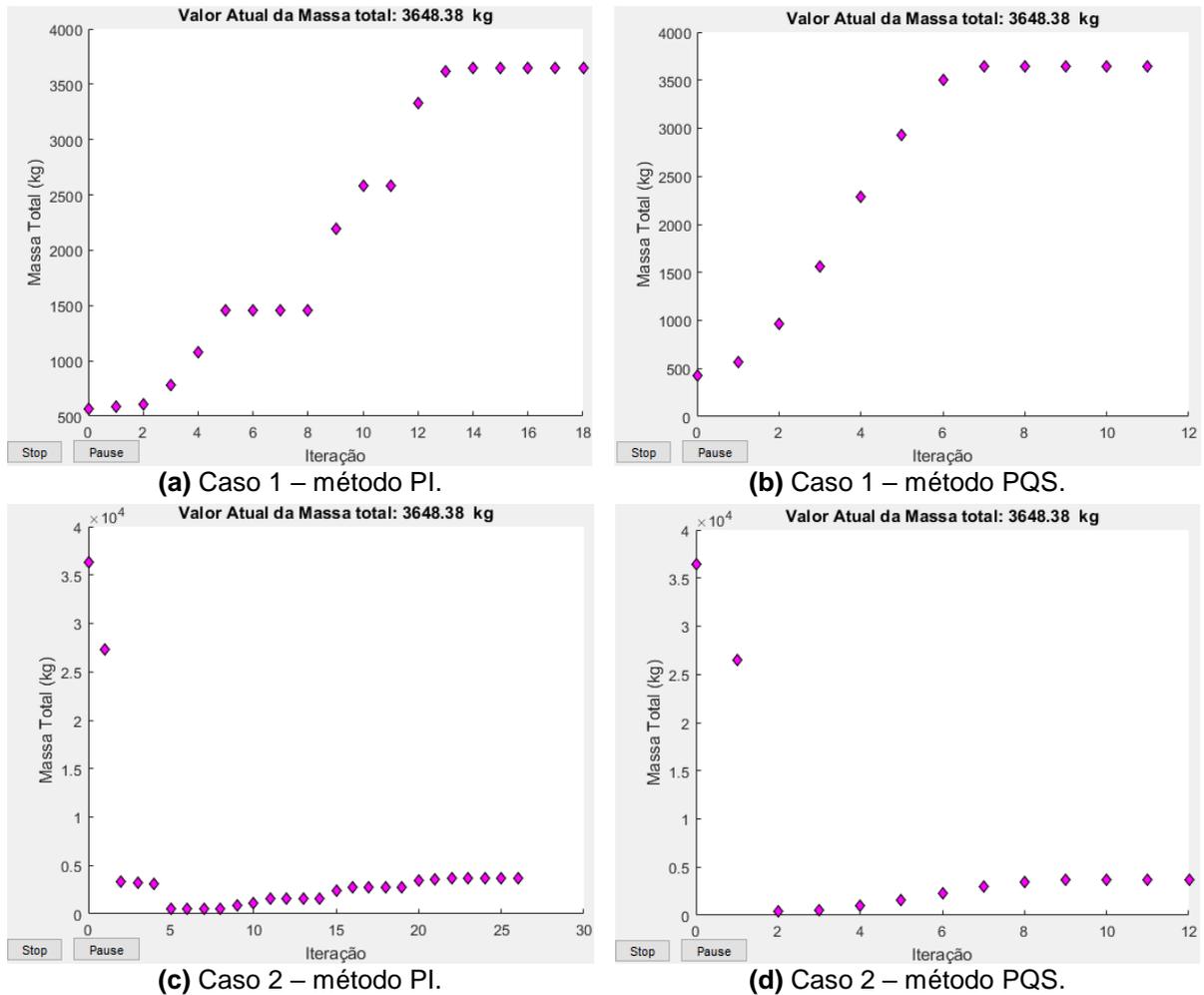
Tabela 4.30 – Estrutura final da torre treliçada:  $\xi = 0,5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	34,0725	34,0725	35	35	34,0725	34,0725	35	35
A2 (cm <sup>2</sup> )	19,4205	19,4205	19,8	19,8	19,4205	19,4205	19,8	19,8
U <sub>máx</sub> (m)	0,1	0,1	0,0975	0,0975	0,1	0,1	0,0975	0,0975
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	187,78	187,78	184,01	184,01	187,78	187,78	184,01	184,01
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	245,1503	245,1503	250	250	245,1503	245,1503
MT (kg)	3648,38	3648,38	3736,27	3736,27	3648,38	3648,38	3736,27	3736,27
Iterações	18	11	18	11	26	12	26	12
Aval. fun. obj.	58	38	58	38	84	41	84	41
Duração (s)	25,8297	16,9646	25,9075	16,9636	36,5857	18,0755	36,8157	18,0646

Em cada caso de estrutura inicial estudados, os métodos PI e PQS geraram a mesma solução contínua e a mesma solução discreta. Além disso, os resultados encontrados partindo do caso 1 foram iguais aos obtidos partindo do caso 2, levantando a hipótese de mínimo global.

Vale notar que a consideração do amortecimento gerou uma diminuição na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para a solução contínua, por exemplo, houve uma redução de 3,65% na massa total em relação à solução obtida com  $\xi = 0\%$ .

Os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$  são apresentados na Figura 4.32. Para essa taxa de amortecimento, o método PQS foi o mais eficiente.

Figura 4.32 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$ .

Fonte: Autora.

Na Tabela 4.31 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 5\%$ .

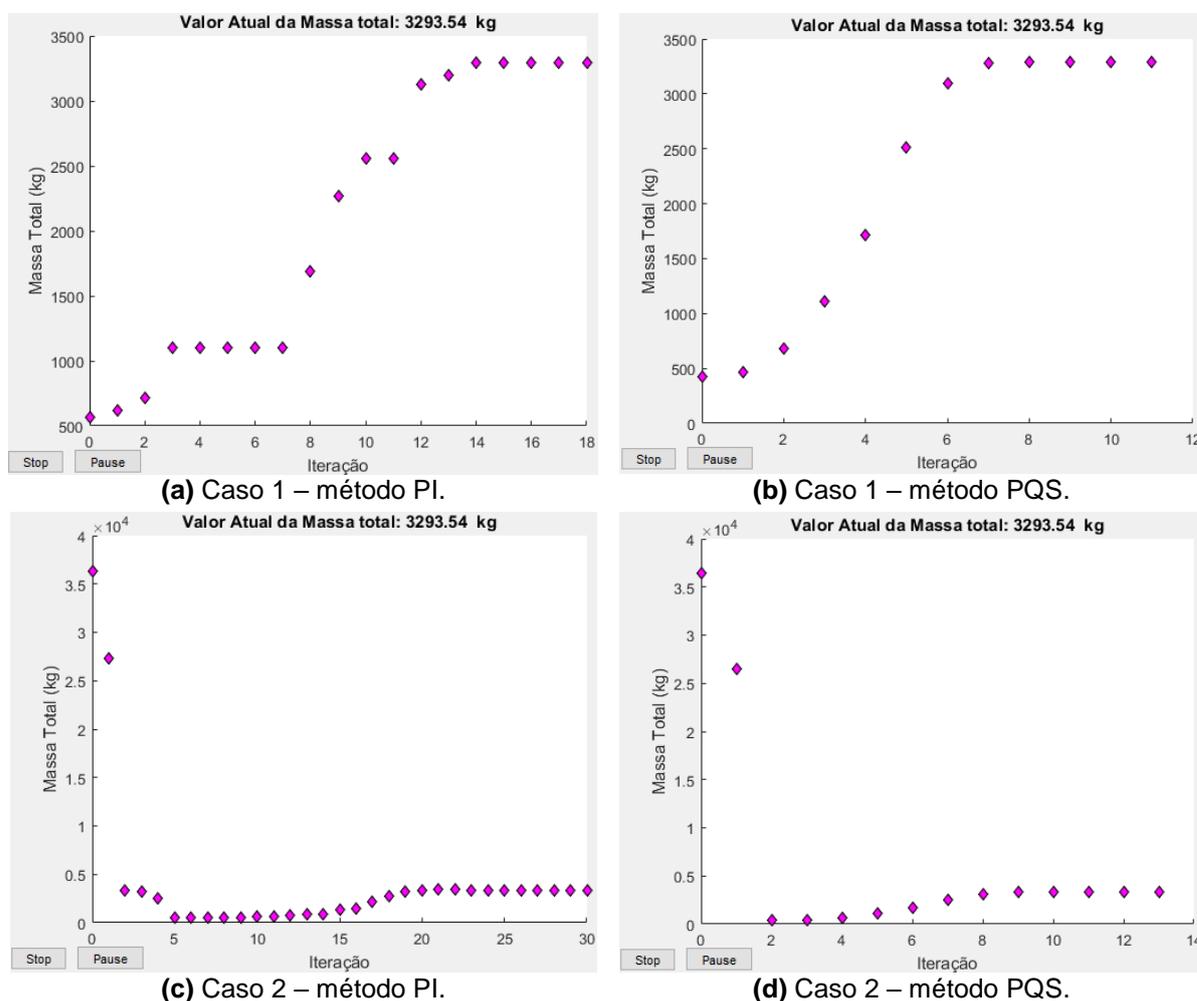
Tabela 4.31 – Estrutura final da torre treliçada:  $\xi = 5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A1 (cm <sup>2</sup> )	32,1817	32,1817	35	35	32,1817	32,1817	35	35
A2 (cm <sup>2</sup> )	16,3531	16,3531	17,7	17,7	16,3531	16,3531	17,7	17,7
U <sub>máx</sub> (m)	0,1	0,1	0,0919	0,0919	0,1	0,1	0,0919	0,0919
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	173,67	173,67	160,41	160,41	173,67	173,67	160,41	160,41
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	230,7772	230,7772	250	250	230,7772	230,7772
MT (kg)	3293,53	3293,53	3575,44	3575,44	3293,53	3293,53	3575,44	3575,44
Iterações	18	11	18	11	30	13	30	13
Aval. fun. obj.	60	38	60	38	93	46	93	46
Duração (s)	25,5701	16,4404	25,5004	16,7638	43,9124	21,7140	43,0806	21,5616

As constatações apresentadas para  $\xi = 0,5\%$  também são válidas para os resultados obtidos com  $\xi = 5\%$ . Adicionalmente, percebe-se que o aumento da taxa de amortecimento gerou uma redução ainda maior na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para a solução contínua, a massa total obtida foi 13% menor que a obtida com  $\xi = 0\%$ .

A Figura 4.33 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ . Novamente, o método PQS foi o mais eficiente.

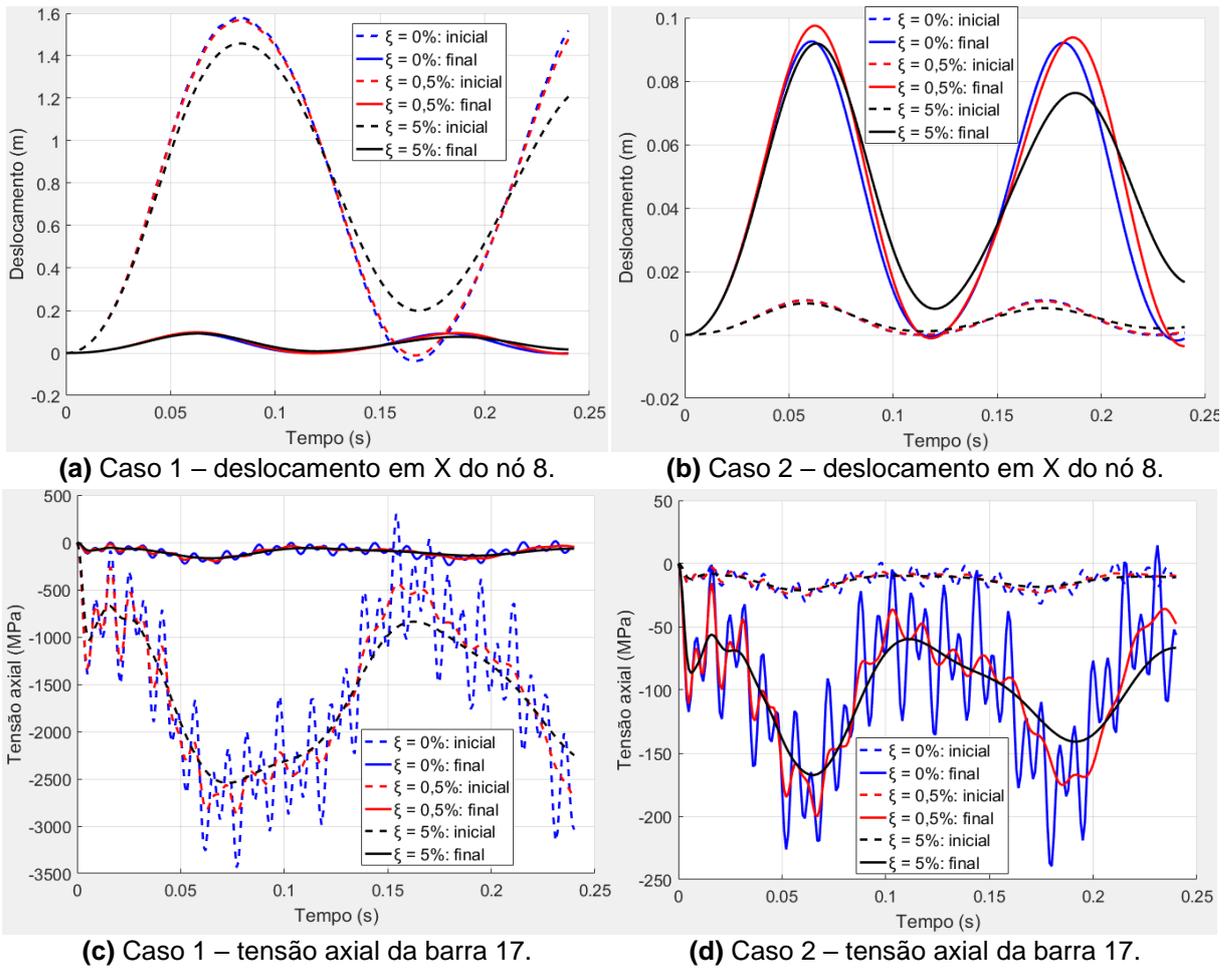
Figura 4.33 – Torre treliçada: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ .



Fonte: Autora.

A Figura 4.34 compara o comportamento da estrutura inicial e final de cada taxa de amortecimento estudada. Para a estrutura final, considerou-se a melhor solução obtida, ou seja, a solução discreta. Os gráficos referem-se ao nó 8, que apresentou o maior deslocamento nodal para todas as taxas de amortecimento, e à barra 17, que apresentou o maior valor de tensão axial com  $\xi = 0\%$ .

Figura 4.34 – Torre treliçada: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais.



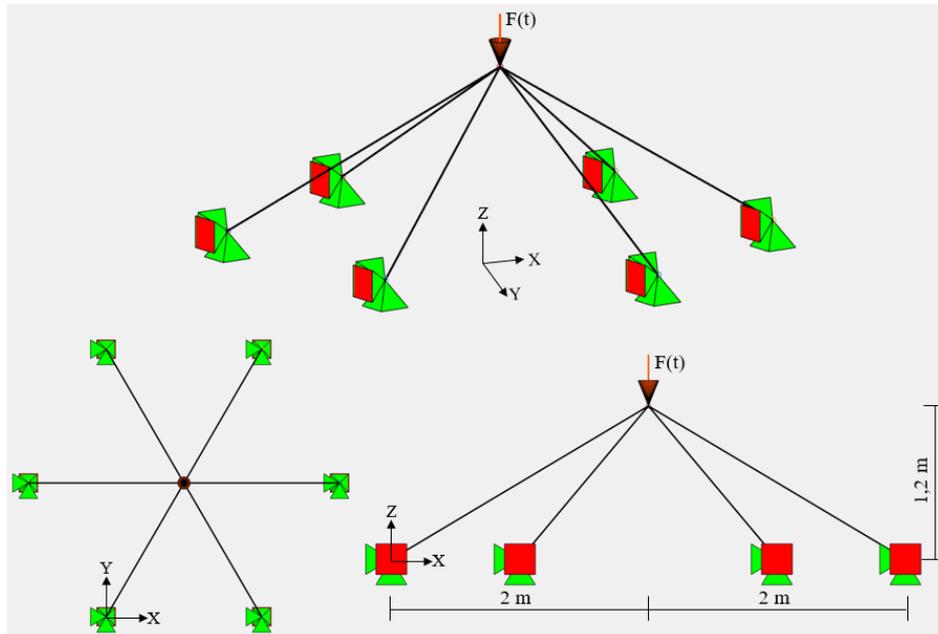
Fonte: Autora.

Por fim, destaca-se que para todas as taxas de amortecimento estudadas neste exemplo, as restrições ativas foram a de deslocamento nodal e a de tensão axial de compressão.

#### 4.2.5 Exemplo 5: treliça piramidal

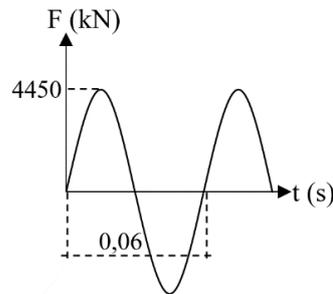
Este exemplo trata de uma treliça espacial composta por 6 barras igualmente espaçadas, apresentada na Figura 4.35. A estrutura está solicitada por um carregamento senoidal  $F(t)$ , aplicado em seu nó central na direção Z (Figura 4.36).

Figura 4.35 – Trelça piramidal.



Fonte: Autora.

Figura 4.36 – Trelça piramidal: carregamento aplicado.



Fonte: Autora.

Para o uso do programa de otimização, adotou-se perfil tubular circular, duração da análise dinâmica de 0,06 s e incremento de tempo  $\Delta t = 0,0002$  s. Conforme indicado na Tabela 4.32, considerou-se um único grupo contendo todas as barras da trelça, portanto tem-se apenas uma variável de projeto. As restrições impostas ao problema de otimização estão resumidas na Tabela 4.33.

Tabela 4.32 – Agrupamento de barras da trelça piramidal.

Grupo	Barras
1	TODAS

Tabela 4.33 – Restrições impostas à trelça piramidal.

$A_{mín}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{máx}$ (cm <sup>2</sup> )	$U_{lim}$ (m)	$\sigma_{Tlim}$ (MPa)	$\sigma_{Clim}$ (MPa)
3,04	260	0,01	250	250

A Tabela 4.34 reúne informações sobre os dois casos de estrutura inicial considerados. O caso 1 adota para todas as barras a área mínima permitida para a seção transversal (3,04 cm<sup>2</sup>) e o caso 2 adota a área máxima (260 cm<sup>2</sup>). Observa-se que, as estruturas iniciais do caso 2 atendem a todas as restrições e as do caso 1 atendem apenas a restrição lateral.

Tabela 4.34 – Estrutura inicial da treliça piramidal.

	CASO 1			CASO 2		
	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$	$\xi = 0\%$	$\xi = 0,5\%$	$\xi = 5\%$
A (cm <sup>2</sup> )	3,04	3,04	3,04	260	260	260
U <sub>máx</sub> (m)	0,1285	0,1276	0,1233	0,00135	0,00134	0,00129
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	4769	4675	4489	59,3169	58,2343	55,7500
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	5433	5399	5226	59,3943	58,9908	56,8805
MT (kg)	33,396	33,396	33,396	2856,2335	2856,2335	2856,2335

Na Tabela 4.35 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0\%$ .

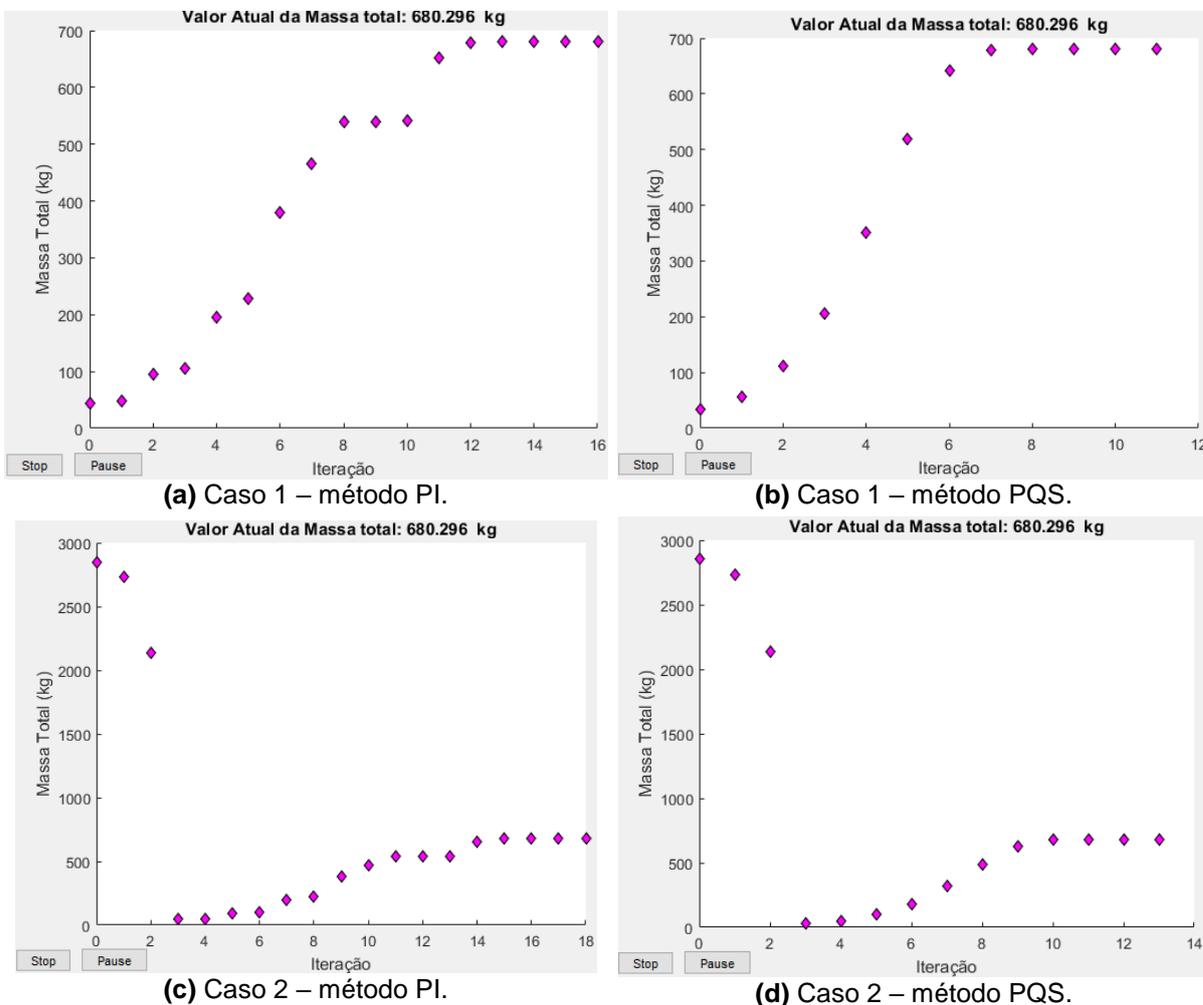
Tabela 4.35 – Estrutura final da treliça piramidal:  $\xi = 0\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	61,9266	61,9266	63	63	61,9266	61,9266	63	63
U <sub>máx</sub> (m)	0,0057	0,0057	0,0056	0,0056	0,0057	0,0057	0,0056	0,0056
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	248,36	248,36	244,14	244,14	248,36	248,36	244,14	244,14
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	245,73	245,73	250	250	245,73	245,73
MT (kg)	680,30	680,30	692,09	692,09	680,30	680,30	692,09	692,09
iterações	16	11	16	11	18	13	18	13
Aval. fun. obj.	35	25	35	25	39	30	39	30
Duração (s)	7,2463	5,3838	6,547	4,8302	7,4130	5,5226	7,2054	5,7084

Para cada caso de estrutura inicial estudado, os métodos PI e PQS forneceram a mesma solução contínua e a mesma solução discreta. Além disso, os resultados encontrados partindo do caso 1 são iguais aos partindo do caso 2, levantando a hipótese de mínimo global.

A Figura 4.37 apresenta os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ . Destaca-se que o método PQS foi o que convergiu com menos iterações e realizando menos avaliações da função objetivo.

Figura 4.37 – Trelça piramidal: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0\%$ .



Fonte: Autora.

A Tabela 4.36 apresenta os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 0,5\%$ .

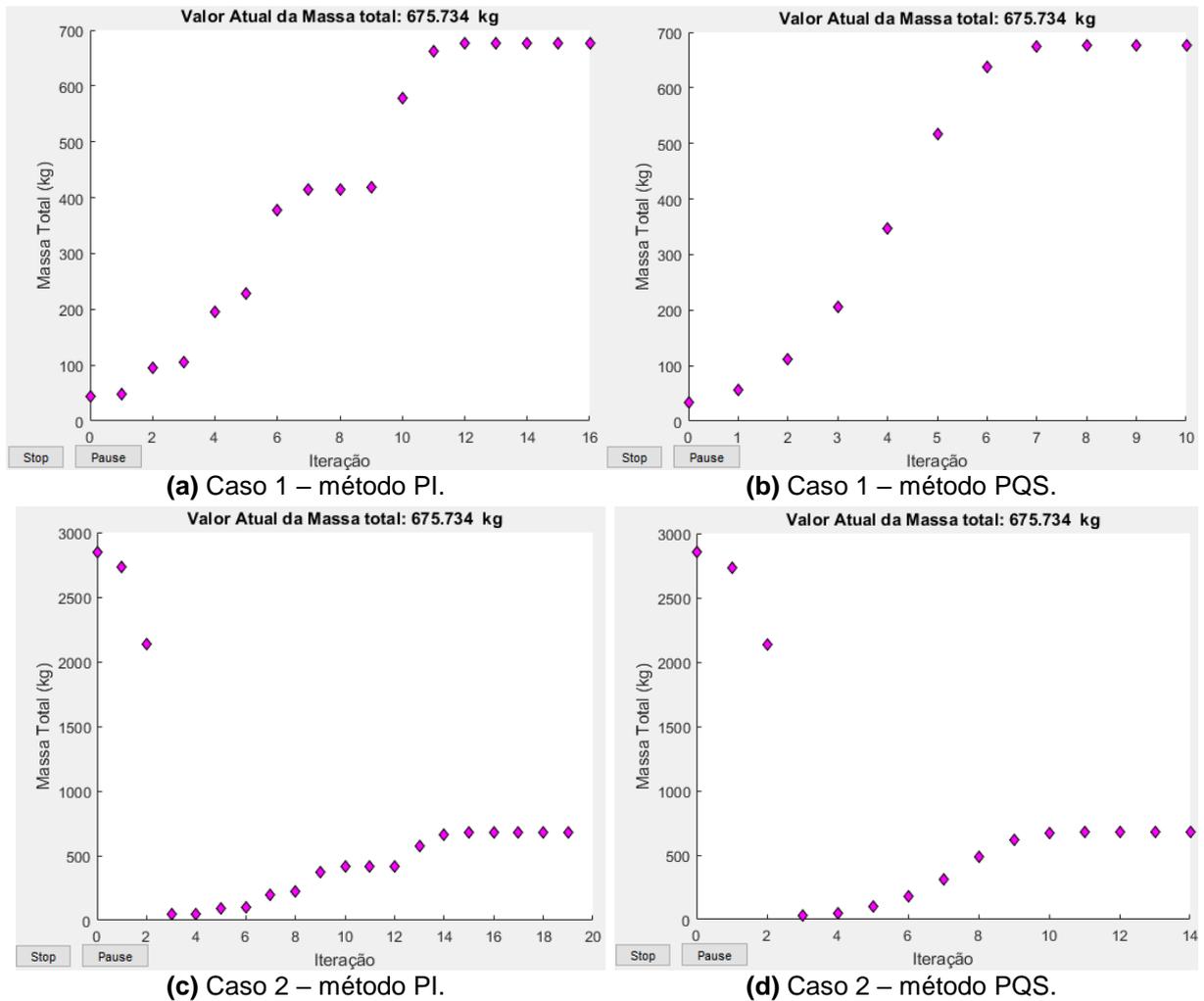
Tabela 4.36 – Estrutura final da treliça piramidal:  $\xi = 0,5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	61,5114	61,5114	63	63	61,5114	61,5114	63	63
U <sub>máx</sub> (m)	0,0057	0,0057	0,0055	0,0055	0,0057	0,0057	0,0055	0,0055
$\sigma_{T_{máx}}$ (MPa)	245,48	245,48	239,70	239,70	245,48	245,48	239,70	239,70
$\sigma_{C_{máx}}$ (MPa)	250	250	244,07	244,07	250	250	244,07	244,07
MT (kg)	675,73	675,73	692,09	692,09	675,73	675,73	692,09	692,09
iterações	16	10	16	10	19	14	19	14
Aval. fun. obj.	35	23	35	23	41	32	41	32
Duração (s)	6,7956	4,4197	6,4245	4,3770	7,4296	5,7923	7,3298	5,7779

Em relação ao desempenho dos processos de otimização e aos resultados obtidos para os dois casos de estrutura inicial, as constatações feitas para  $\xi = 0\%$  também são válidas para  $\xi = 0,5\%$ .

Assim como nos exemplos anteriores, a consideração do amortecimento gerou uma redução na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura. Para  $\xi = 0,5\%$ , a massa total obtida na solução contínua é 0,7% menor que a obtida desprezando o amortecimento ( $\xi = 0\%$ ).

Os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$  são apresentados na Figura 4.38. Observa-se que o método de otimização mais eficiente foi o PQS.

Figura 4.38 – Trelíça piramidal: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 0,5\%$ .

Fonte: Autora.

Na Tabela 4.37 são apresentados os resultados obtidos pelo programa de otimização considerando  $\xi = 5\%$ .

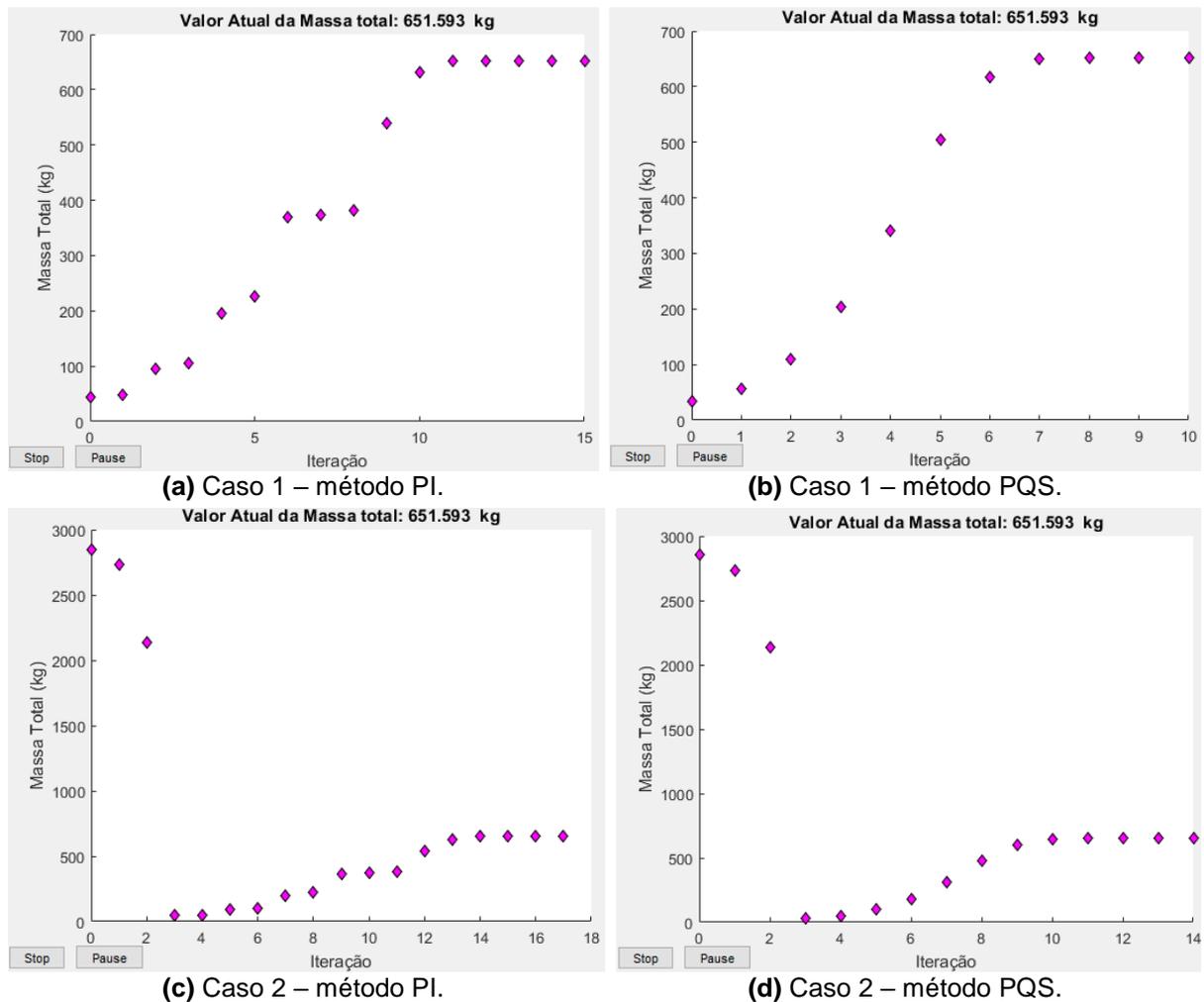
Tabela 4.37 – Estrutura final da trelíça piramidal:  $\xi = 5\%$ .

	CASO 1				CASO 2			
	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D	PI-C	PQS-C	PI-D	PQS-D
A (cm <sup>2</sup> )	59,3138	59,3138	63	63	59,3138	59,3138	63	63
U <sub>máx</sub> (m)	0,0057	0,0057	0,0053	0,0053	0,0057	0,0057	0,0053	0,0053
$\sigma_{T\text{máx}}$ (MPa)	243,73	243,73	229,52	229,52	243,73	243,73	229,52	229,52
$\sigma_{C\text{máx}}$ (MPa)	250	250	235,32	235,32	250	250	235,32	235,32
MT (kg)	651,59	651,59	692,09	692,09	651,59	651,59	692,09	692,09
iterações	15	10	15	10	17	14	17	14
Aval. fun. obj.	32	23	32	23	37	32	37	32
Duração (s)	5,5965	4,1330	5,5917	4,1374	6,7623	5,5818	6,5965	6,0147

Além das observações feitas para as demais taxas de amortecimento, percebe-se que com  $\xi = 5\%$  a redução na área da seção transversal das barras e na massa total da estrutura foi maior. A estrutura final obtida na solução contínua é 4,2% mais leve que a obtida para  $\xi = 0\%$ .

A Figura 4.39 contém os gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ . Novamente, o método PQS foi o mais eficiente.

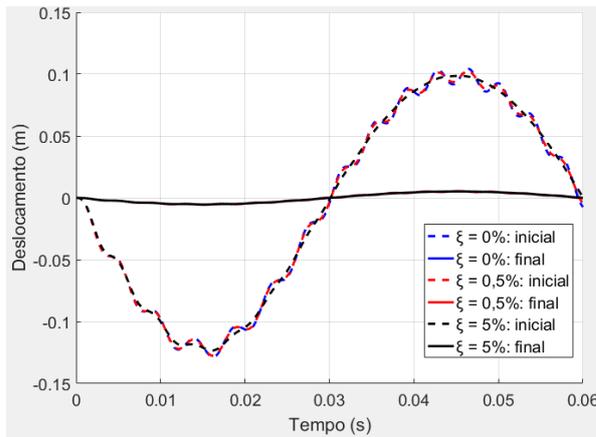
Figura 4.39 – Treliza piramidal: gráficos de massa total x iterações para  $\xi = 5\%$ .



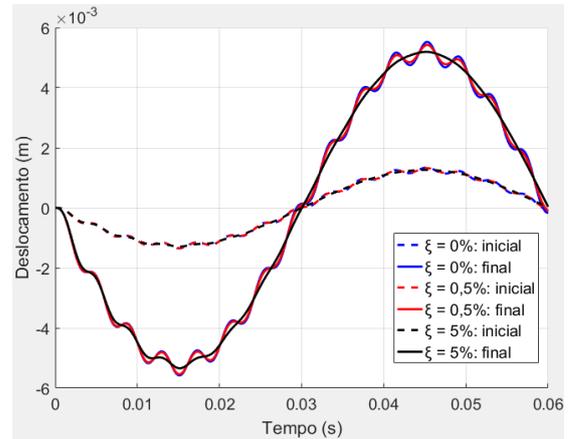
Fonte: Autora.

Na Figura 4.40 compara-se o comportamento da estrutura antes e depois da otimização, para as três taxas de amortecimento estudadas. As estruturas finais referem-se à solução discreta, considerada como a melhor solução, devido à sua adequação aos perfis comerciais.

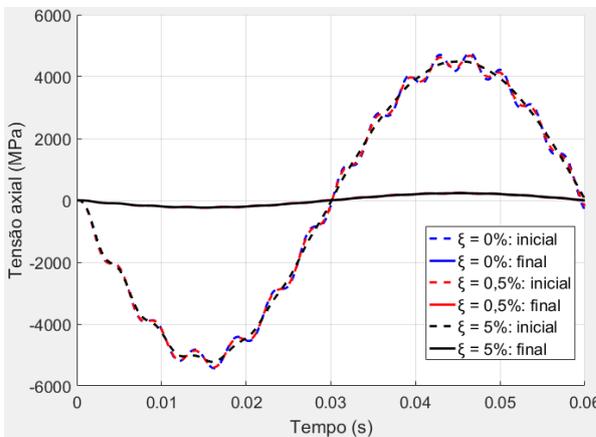
Figura 4.40 – Treliza piramidal: análise comparativa entre as estruturas iniciais e finais.



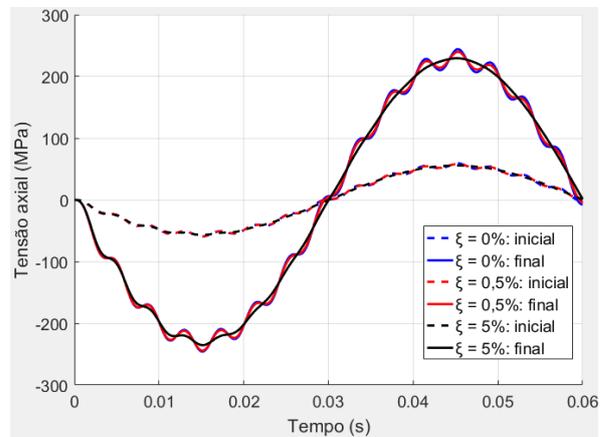
(a) Caso 1 – deslocamento em Z do nó central.



(b) Caso 2 – deslocamento em Z do nó central.



(c) Caso 1 – tensão axial.



(d) Caso 2 – tensão axial.

Fonte: Autora.

Por fim, nota-se que, para todas as otimizações realizadas neste exemplo, a única restrição ativa foi a de tensão axial de compressão.

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional para o estudo da otimização de dimensões de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico. A implementação foi feita na plataforma MATLAB®, utilizando os algoritmos do método dos Pontos Interiores (PI) e do método da Programação Quadrática Sequencial (PQS) presentes no *Optimization Toolbox*™.

O problema de otimização foi formulado para determinar a área da seção transversal das barras que minimiza a massa total da estrutura, impondo-se restrições aos deslocamentos nodais e às tensões axiais. Essas restrições implicam na realização de uma análise dinâmica não linear geométrica em cada iteração do processo de otimização. Na Seção 4.1, o procedimento de análise implementado foi validado por meio da comparação com soluções numéricas encontradas na literatura e com soluções obtidas com o software ANSYS®.

Como o problema de otimização estudado necessitava que as variáveis de projeto fossem tratadas como discretas e os métodos de otimização adotados trabalham apenas com variáveis contínuas, um procedimento de conversão para seções comerciais foi implementado, utilizando como base um catálogo comercial de tubos estruturais.

Além disso, diante do elevado custo computacional usualmente gerado na resolução desse tipo de problema de otimização, foi incluída uma rotina de agrupamento de barras, visando reduzir a duração do processo de otimização.

Na Seção 4.2, foram apresentados resultados de aplicação do programa computacional desenvolvido. Após a análise desses resultados, conclui-se que:

- O procedimento de conversão para seções comerciais teve um desempenho satisfatório, visto que todas as soluções obtidas após a conversão atendiam às restrições impostas. Como era esperado, esse procedimento implica um aumento na massa total da estrutura quando comparada com a solução obtida diretamente com otimização contínua. O maior aumento de massa total gerado foi de 14,9% no Exemplo 2 para  $\xi = 5\%$ ;

- Graças à rotina de agrupamento de barras implementada, a duração do processo de otimização foi satisfatória. A otimização com maior duração foi de 2min e 4,136s no Exemplo 3 (utilizando  $\xi = 0\%$ , PI-D e caso 2 de estrutura inicial);
- Em todos os exemplos, o aumento da taxa de amortecimento gerou uma redução na massa total da estrutura final. Para  $\xi = 0,5\%$ , a maior redução foi de 3,65% no Exemplo 4 e a menor foi de 0,53% no Exemplo 1. Para  $\xi = 5\%$ , a maior redução também ocorreu no Exemplo 4 (13%) e a menor ocorreu no Exemplo 5 (4,2%);
- A tensão axial de compressão foi restrição ativa em todos os exemplos, exceto no Exemplo 1. O deslocamento nodal foi restrição ativa no Exemplo 1 e no Exemplo 4. A área mínima de algum dos grupos de barras foi restrição ativa apenas no Exemplo 1. Já a tensão de tração não foi restrição ativa em nenhum dos exemplos, sendo que a maior influência dessa restrição ocorreu no Exemplo 4, em que o valor máximo encontrado foi cerca de 98,7% do limite imposto, e a menor influência foi no Exemplo 2, em que a tensão de tração foi igual a zero para todas as taxas de amortecimento.
- Os processos de otimização PI-C e PQS-C convergiram para a mesma solução na maioria dos exemplos. As únicas exceções aconteceram no Exemplo 1 e no Exemplo 4, ambos para  $\xi = 0\%$ . Nessas situações, a variação na massa total foi de no máximo 1,8% e observou-se que as soluções obtidas por PQS-C foram mais leves que as obtidas por PI-C;
- Os processos de otimização PI-D e PQS-D, que utilizam o procedimento de conversão para seções comerciais, convergiram para a mesma solução em todos os exemplos estudados, independente da estrutura inicial adotada;
- Os resultados obtidos partindo do caso 1 de estrutura inicial foram iguais aos obtidos partindo do caso 2 na maioria dos exemplos. As únicas exceções aconteceram para  $\xi = 0\%$  nos Exemplos 1 e 4. Destaca-se que essa diferença de resultados só ocorreu com PI-C, sendo que a variação máxima de massa total foi de 1,8%;
- O método PQS foi o mais eficiente para resolução do problema de otimização. Ele necessitou de menos iterações, realizou menos avaliações da função objetivo e convergiu mais rápido na grande maioria dos exemplos. Além disso,

em todos os exemplos, convergiu para a mesma solução independente da estrutura inicial adotada, levantando a hipótese de mínimo global;

- Como a estratégia adotada para tentar identificar mínimos locais e globais foi partir de pontos iniciais próximos aos limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, na maioria dos exemplos o caso 1 de estrutura inicial consistiu em uma solução inviável. Convém notar que o algoritmo do método dos Pontos Interiores do MATLAB® não exige que a solução inicial seja viável, portanto, à priori, esse não é um fator que comprometeria o desempenho desse método. Um indício disso são os resultados obtidos no Exemplo 1, que foi o único em que o caso 1 era solução viável, e em que, ainda assim, o método PI apresentou alguns problemas de convergência.

Diante da grande influência apresentada pela restrição de tensão axial de compressão nos exemplos, sugere-se para pesquisas futuras a adaptação do problema de otimização estudado neste trabalho, de forma que seja incluída uma verificação de flambagem.

Adicionalmente, propõe-se uma extensão deste estudo com a utilização de métodos de otimização que trabalhem diretamente com variáveis discretas, gerando uma comparação entre os resultados obtidos com esses métodos e com o uso do procedimento de conversão para seções comerciais. O método dos Algoritmos Genéticos pode ser uma boa opção, uma vez que também está disponível no *Optimization Toolbox*™ do MATLAB®.

Além disso, pode-se dar continuidade a este trabalho por meio da inclusão da não linearidade física na etapa de análise estrutural da otimização, tornando-a mais realista em termos de projeto. Outra possibilidade está em adotar um novo enfoque para o problema de otimização, como a realização da otimização de forma ou da otimização topológica.

Por fim, este trabalho também pode ser ampliado pela aplicação de outros tipos de elementos estruturais, como vigas e pórticos, e pela consideração de outros tipos de materiais, estudando estruturas de concreto ou estruturas mistas de aço e concreto.

## REFERÊNCIAS

- ABRATE, S.; SUN, C. T. Dynamic analysis of geometrically nonlinear truss structures. **Computers & Structures**, v. 17, n. 4, p. 491-497, 1983.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 3. ed. [s.l.] Academic Press, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16239**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Rio de Janeiro, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- AZOLIN, L. G.; NOVELLI, L.; ALVES, E. C. Projeto otimizado de estruturas tubulares espaciais submetidas a carregamento dinâmico. In: CILAMCE, 37., 2016, Brasília. **Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília: ABMEC, 2016.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262-1267, 1979.
- BELLAGAMBA, L.; YANG, T. Y. Minimum-mass truss structures with constraints on fundamental natural frequency. **AIAA Journal**, v. 19, n. 11, p. 1452-1458, 1981.
- BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. **Mathematical Programming**, v. 89, n. 1, p. 149-185, 2000.
- BYRD, R.H.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. **SIAM Journal on Optimization**, v. 9, n. 4, p. 877-900, 1999.
- CHEN, T.-Y. Design optimization with static and dynamic displacement constraints. **Structural Optimization**, v. 4, n. 3-4, p. 179-185, 1992.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3. ed. Berkeley: Computers & Structures, 2003.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3. ed. [s.l.] John Wiley & Sons, 1989.
- FERREIRA, I. P. **Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais**. 2009. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Centro Federal de Educação Tecnológica, Belo Horizonte, 2009.
- FONSECA, M. **Otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais sob carregamentos estáticos e dinâmicos, usando algoritmos genéticos e redes neurais**. 2007. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia

Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2007.

GALVÃO, A. S. **Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas**. 2004. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GARCIA PALOMARES , U. M.; MANGASARIAN, O. L. Superlinearly convergent quasi-newton algorithms for nonlinearly constrained optimization problems. **Mathematical Programming**, v. 11, n. 1, p. 1-13, 1976.

HAFTKA, R. T. Integrated nonlinear structural analysis and design. **AIAA Journal**, v. 27, n. 11, p. 1622-1627, 1989.

HAN, S. P. A globally convergent method for nonlinear programming. **Journal of optimization theory and applications**, v. 22, n. 3, p. 297-309, 1977.

HRINDA, G. A.; NGUYEN, D. T. Optimization of stability-constrained geometrically nonlinear shallow trusses using an arc length sparse method with a strain energy density approach. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, n. 15, p. 933-950, 2008.

KASSIMALI, A.; BIDHENDI, E. Stability of trusses under dynamic loads. **Computers & Structures**, v. 29, n. 3, p. 381-392, 1988.

KAVEH, A.; ILCHI GHAZAAN, M. Optimal design of dome truss structures with dynamic frequency constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, n. 3, p. 605-621, 2016.

KHOT, N. S. Optimization of structures with multiple frequency constraints. **Computers & Structures**, v. 20, n. 5, p. 869-876, 1985.

KIM, S.-D.; KANG, M.-M.; KWUN, T.-J.; HANGAI, Y. Dynamic instability of shell-like shallow trusses considering damping. **Computers & Structures**, v. 64, n. 1-4, p. 481-489, 1997.

KIM, Y-II; PARK, G-J. Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 9-12, p. 660-676, 2010.

KOCER, F. Y.; ARORA, J. S. Optimal Design of Latticed Towers Subjected to Earthquake Loading. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, n. 2, p. 197-204, 2002.

MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Otimização do dimensionamento de treliças tubulares considerando a não-linearidade geométrica. In: CILAMCE, 38., 2017, Florianópolis. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis: ABMEC, 2017a.

MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Programa computacional para análise não-linear de treliças espaciais. In: CILAMCE, 38., 2017, Florianópolis. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis: ABMEC, 2017b.

MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Programa computacional para análise dinâmica de estruturas treliçadas. In: SIMMEC, 13., 2018, Vitória. **Anais do XIII SIMMEC – Simpósio de Mecânica Computacional**. Disponível em: <https://www.doity.com.br/anais/xiiisimmec2018/trabalho/68330>. Acesso em: 27 fev. 2019.

MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C.; NOVELLI, L.; AZOLIN, L. G. Um sistema para análise dinâmica e não linear de treliças espaciais. In: CILAMCE, 37., 2016, Brasília. **Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília: ABMEC, 2016.

NEVES, B. S.; LIMA, B. S.; ALVES, E. C. Dimensionamento otimizado de treliças tubulares com o uso de Algoritmo Genético. In: SIMMEC, 13., 2018, Vitória. **Anais do XIII SIMMEC – Simpósio de Mecânica Computacional**. Disponível em: <https://www.doity.com.br/anais/xiiisimmec2018/trabalho/68246>. Acesso em: 27 fev. 2019.

NOOR, A. K.; PETERS, J. M. Nonlinear dynamic analysis of space trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 21, n. 2, p. 131-151, 1980.

NOVELLI, L.; ALVES, E. C.; GOMES FILHO, H.; GAROZI, M. J. P.; AZEVEDO, M. S. Ferramenta computacional para o dimensionamento de estruturas tubulares treliçadas. In: CILAMCE, 36., 2015, Rio de Janeiro. **Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Rio de Janeiro: ABMEC, 2015a.

NOVELLI, L.; ALVES, E. C.; GOMES FILHO, H.; GAROZI, M. J. P.; SIAS, F. M.; AZEVEDO, M. S. Otimização do dimensionamento de estruturas tubulares espaciais de aço. In: CILAMCE, 36., 2015, Rio de Janeiro. **Proceedings of the XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Rio de Janeiro: ABMEC, 2015b.

OHNO, T.; KRAMER, G. J. E.; GRIERSON, D. E. Least-weight design of frameworks under multiple dynamic loads. **Structural Optimization**, v. 1, n. 3, p. 181–191, 1989.

PARENTE JUNIOR, E. **Análise de sensibilidade e otimização de forma de estruturas geometricamente não-lineares**. 2000. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

POWELL, M. J. D. The convergence of variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations. In: **Nonlinear programming 3**. Academic Press, 1978. p. 27-63.

PYRZ, M. Discrete optimization of geometrically nonlinear truss structures under stability constraints. **Structural Optimization**, v. 2, n. 2, p. 125–131, 1990.

SAKA, M. P.; ULKER, M. Optimum design of geometrically nonlinear space trusses. **Computers & Structures**, v. 42, n. 3, p. 289-299, 1992.

SEDAGHATI, R.; TABARROK, B.; SULEMAN, A. Structural design optimization of nonlinear symmetric structures using the group theoretic approach. **AIAA Journal**, v.

39, n. 8, p. 1593-1599, 2001.

SILVA, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas**. 2009. Tese (Doutorado) - Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

SILVA, M. A. **Sobre a otimização de estruturas submetidas a carregamento dinâmico**. 2000. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

SILVA, M. M. **Otimização de estruturas reticuladas incluindo não-linearidade geométrica**. 2011. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

SILVA, R. A. **Otimização estrutural sujeita a restrições dinâmicas**. 1992. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.

SLAATS, P. M. A.; JONGH, J. DE; SAUREN, A. A. H. J. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1155–1171, 1995.

SMAOUI, H.; SCHMIT, L. A. An integrated approach to the synthesis of geometrically non-linear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 3, p. 555-570, 1988.

STOLPE, M.; VERBART, A.; ROJAS-LABANDA, S. The equivalent static loads method for structural optimization does not in general generate optimal designs. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 58, n. 1, p. 139-154, 2018.

SULEMAN, A.; SEDAGHATI, R. Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, n. 4, p. 273-296, 2005.

THE MATHWORKS. **MATLAB R2016a**. Natick, 2016.

THE MATHWORKS. **Optimization toolbox user's guide**. Natick, 2016.

VALLOUREC. **Tubos estruturais seção circular, quadrada e retangular**. Catálogo.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

WALTZ, R. A.; MORALES, J. L.; NOCEDAL, J.; ORBAN, D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. **Mathematical Programming**, v. 107, n. 3, p. 391-408, 2006.

WANG, C.-Y; WANG, R.-Z ; CHUANG, C.-C. ; WU, T.-Y. Nonlinear dynamic analysis of reticulated space truss structures. **Journal of Mechanics**, v. 22, n. 3, p. 199-212, 2006.

WILSON, R. B. **A simplicial algorithm for concave programming**. 1963. Ph. D. Dissertation - Harvard University Graduate School of Business Administration, 1963.

XUE, Q.; MEEK, J. L. Dynamic response and instability of frame structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 40-41, p. 5233-5242, 2001.

YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. **Theory and analysis of nonlinear framed structures**. New York: Prentice Hall, 1994.

ZHU, K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. **Computers & Structures**, v. 52, n. 1, p. 9-15, 1994.