

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Joelso Giovanelli

O TEOREMA DA SEPARAÇÃO DE
JORDAN-BROUWER

VITÓRIA
2019

Joelso Giovanelli

O TEOREMA DA SEPARAÇÃO DE
JORDAN-BROUWER

Dissertação de mestrado apresentada ao
PPGMAT como parte dos requisitos exi-
gidos para a obtenção do título de Mestre
em Matemática

Orientadora: Prof^a Dr^a Marta Jakubowicz
Batoréo

VITÓRIA
2019

Dedicatória

Para Rayane.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao senhor, Deus todo-poderoso, criador do céu e da terra e de todas as coisas visíveis e invisíveis.

Agradeço a minha orientadora, Prof^a Dr^a Marta Jakubowicz Batoréo, por ter aceito essa empreitada e por tantas ajudas, conselhos e dicas.

Agradeço a minha banca examinadora pela criteriosa avaliação, pelas sugestões, correções e elogios.

Agradeço aos meus pais e irmãos, pelo apoio e por tornarem essa jornada possível.

Agradeço a Rayane, por tantas ajudas e pelo companheirismo e apoio nas horas mais difíceis.

Agradeço, de modo particular, ao amigo Franco Marchiori Louzada, pelas figuras desenhadas que estão ao longo do texto.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas, em especial, aos amigos e colegas do IC I-UFES e do CT II-UFES que tanto ajudaram e, tão mais leve e prazerosa, tornaram essa responsabilidade.

Agradeço a todos aqueles que, na cumplicidade de um momento, ajudaram-me a crescer profissionalmente e pessoalmente.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Este teorema afirma, *grosso modo*, que uma hipersuperfície no espaço euclidiano \mathbb{R}^n separa o espaço em dois conjuntos: um “interior” e outro “exterior”. A demonstração utiliza técnicas de Topologia Diferencial como, por exemplo, transversalidade e números de rotação. A referência principal deste trabalho é [GP74].

Palavras-chave: Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Teoria de Interseção, Módulo 2. Transversalidade. Número de Voltas. Variedades. Variedades com Bordo. Difeomorfismo. Mergulho em Espaços Euclidianos. Teorema da Aplicação Inversa. Submersões. Imersões.

Abstract

This dissertation presents a proof of the Jordan-Brouwer Theorem. This theorem states, roughly, that a hypersurface of the euclidean space \mathbb{R}^n divides the space in two sets: the “inside” and the “outside”. The proof relies on techniques from Differential Topology, e.g., transversality and winding numbers. The main reference for this work is [GP74].

Key-Words: The Jordan-Brouwer Separation Theorem. Intersection Theory Mod 2. Transversality. Winding Numbers. Manifolds. Manifolds with Boundary. Diffeomorphism. Embed in Euclidian Space. Inverse Function Theorem. Submersions. Immersions.

Sumário

Sumário	7
Introdução	7
1 Variedades Diferenciáveis	10
1.1 Definições	10
1.2 Derivadas e Espaços Tangentes	14
1.3 Teorema da Aplicação Inversa	18
1.3.1 Imersões	20
1.3.2 Submersões	25
1.4 Aplicações Transversais	32
1.5 Homotopia e Estabilidade	34
1.6 O Teorema de Sard	38
1.7 Mergulhos em Espaços Euclidianos	42
2 Transversalidade e Teoria da Interseção	50
2.1 Variedades Com Bordo	50
2.1.1 Variedades Unidimensionais e Algumas Consequências	57
2.2 Transversalidade	58
2.3 Teoria da Interseção Módulo 2	65
3 Teorema da Separação de Jordan-Brouwer	69
3.1 Apresentação e Demonstração do Teorema da Separação de Jordan- Brouwer	69
3.2 Método para Determinar se um Dado Ponto de \mathbb{R}^n Está na Região Interior a uma Hiperfície de \mathbb{R}^n	80
3.3 O Teorema de Borsuk-Ulam	82
Referências Bibliográficas	85

Introdução

Intuitivamente, sabemos que qualquer curva fechada, suave e simples divide o plano em duas regiões, uma região limitada, a “parte de dentro”, e outra não limitada, “a parte de fora”. Por séculos, se achava que isso era algo óbvio e não necessitava de demonstração. Apenas em 1865, C.G. Neumann chamou a atenção para a necessidade de se demonstrar a propriedade de “separação do plano” e, no ano de 1897 C. Jordan, em sua obra *Cours d'Analyse* ([Jor09]) apresentou uma demonstração para essa propriedade que, segundo F.C.V. Marinho ([Mar05]), se apresentava com o seguinte enunciado:

Se Γ é uma curva fechada e simples em \mathbb{R}^2 então o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ possui exatamente duas componentes conexas que têm Γ como fronteira comum.

No entanto, esta demonstração foi considerada não satisfatória pela comunidade científica, pois C. Jordan admitia esse teorema válido para polígonos, gerando discordâncias entre os matemáticos da época. Segundo O. Veblen, essa seria a única, porém relevante, falha na demonstração apresentada por Jordan e no ano de 1905 o próprio O. Veblen deu a primeira demonstração (que foi considerada satisfatória) em seu artigo *Theory of plane curves in non-metrical analysis situs* ([Veb05]). Entretanto, essa demonstração, para o caso de um polígono, era incorreta, sendo esta falha admitida pelo próprio Veblen alguns anos mais tarde. Posteriormente, muitas outras demonstrações foram apresentadas para este Teorema e a versão mais geral, foi dada por L.E.J Brouwer em 1911, no artigo, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n -dimensionalen Raum* ([Bro12]) que pode ser enunciado da seguinte forma:

Dada uma hiperfície X de \mathbb{R}^n , compacta e conexa. O seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui exatamente duas componentes conexas abertas, a “parte de fora” D_0 , que chamaremos de “exterior”, e a “parte de dentro” D_1 , que chamaremos de “interior”. Além disso, o fecho da “parte de dentro” $\overline{D_1}$ é uma variedade compacta com bordo $\partial \overline{D_1} = X$.

Neste trabalho, não faremos a demonstração do caso particular, apresentado por O. Veblen, mas apresentaremos uma teoria a fim de dar uma demonstração do caso geral, chamado de “Teorema da Separação de Jordan-Brouwer” seguindo os passos apresentados por V. Guillemin e A. Pollack ([GP74, p.87-89]).

Segundo a orientação dos mesmos, definiremos e provaremos as propriedades necessárias para demonstrá-lo, construindo, assim, uma escada que nos levará até o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. No Capítulo 1, começaremos por definir variedades diferenciáveis n -dimensionais sem bordo, assim como derivadas e espaços tangentes, por meio do difeomorfismo que estas possuem com algum subconjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Devido à necessidade de aplicação em contextos distintos, daremos algumas

demonstrações para o Teorema da Aplicação Inversa:

- (i) Considerando $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades e sua derivada no ponto $x \in X$, $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$, onde $y = f(x)$ um isomorfismo.
- (ii) Considerando $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave, injetiva numa subvariedade compacta Z , contida em X e $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ um isomorfismo para cada $x \in Z$. Neste caso, teremos f aplica difeomorficamente uma vizinhança de Z , em X , numa vizinhança de $f(Z)$ em Y .
- (iii) Retirando a hipótese de compacidade da subvariedade Z , do item anterior. Neste caso, também obtemos que f aplica difeomorficamente uma vizinhança de Z , em X , numa vizinhança de $f(Z)$ em Y .

Ainda no Capítulo 1, apresentaremos os conceitos, bem como os principais resultados de imersões e submersões, aplicações transversais, homotopia e estabilidade e o Teorema de Sard e mergulhos em espaços euclidianos. Neste último, será dada uma ênfase ao Teorema de Whitney.

No Capítulo 2, definiremos variedade com bordo e estenderemos os conceitos apresentados no Capítulo 1 a estas variedades, bem como, apresentaremos alguns novos, como a Teoria de Interseção módulo 2, por exemplo, que será intensamente usada para demonstrar, o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema da Separação de Jordan Brouwer. Para isso, os conceitos de transversalidade, homotopia e mergulhos em espaços euclidianos, apresentados nos capítulos anteriores, serão bastante úteis. Neste Capítulo, veremos que por meio de relações homotópicas saberemos se dois pontos quaisquer $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus X$ se encontram na mesma componente conexa, ou não, e por meio da transversalidade, saberemos se um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ se encontra na região “interior” ou “exterior” à hiperfície X .

Capítulo 1

Variedades Diferenciáveis

1.1 Definições

Considere os espaços euclidianos \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n :

Definição 1.1.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Diz-se que a aplicação $f: U \rightarrow V$ é suave (ou de classe C^∞) se f possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas.*

De modo geral, se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são subconjuntos arbitrários de espaços euclidianos, então diz-se que a aplicação $f: X \rightarrow Y$ é suave se para cada $x \in X$, existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, contendo x , e uma aplicação suave $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$.

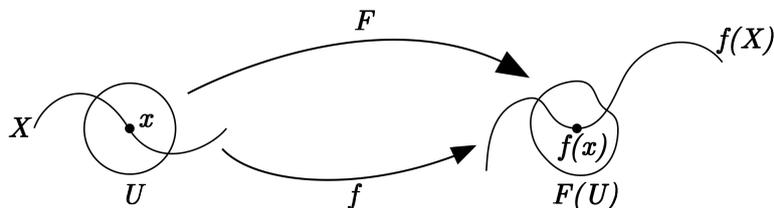


Figura 1.1: A aplicação F é a extensão da aplicação f numa vizinhança U , de x , contida em \mathbb{R}^n .

Proposição 1.1.2. *[GP74, Exercício 1.1.18] Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, e $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Considere as bolas $B(x_0, a)$ e $B(x_0, b)$ contidas em \mathbb{R}^k de centro x_0 e raios a e b , respetivamente. Então existe uma função suave $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = 1$, se $x \in B(x_0, a)$, $F(x) = 0$ se $x \notin B(x_0, b)$ e $0 < F(x) < 1$ nos pontos x do conjunto $B(x_0, b) \setminus B(x_0, a)$.*

Demonstração. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Afirmamos que esta aplicação f é suave. Com efeito, é claro que f é contínua, para todo $x \neq 0$, e que f é contínua em 0 pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Além disso, também é claro que f é suave para todo $x \neq 0$. Para $x < 0$, a derivada de ordem n , $f^{(n)}(x)$, é 0. Para $x > 0$, aplicando a regra da cadeia para funções de uma variável às sucessivas derivadas de f , obtemos um produto de e^{-1/x^2} por um polinômio P , na “variável” $1/x$. No ponto $x = 0$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0}$$

e, portanto, $f'(0) = 0$. Argumentando por indução, concluiremos que $f^n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondo $f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$, temos

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h},$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(0+h) - f^{(n)}(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(1/h) \cdot e^{-1/h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} Q(1/h) \cdot e^{-1/h^2} \\ &= 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}. \end{aligned}$$

Portanto, $f^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo f é suave.

Defina a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x-a)f(b-x)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. A função g é suave, pois é dada por um produto de aplicações suaves e observe que $g(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Defina também a aplicação $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^x g(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a aplicação h é suave. Agora, como $g(x) = 0$ para $x < a$ ou $x > b$, temos

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^x g(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt} = \frac{\int_a^x g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt}$$

e, dessa forma, temos que $h(x) = 0$ se $x < a$, $h(x) = 1$ se $x > b$ e $0 < h(x) < 1$ se $x \in (a, b)$.

Por fim, para determinar nossa F , consideramos o fato de que a norma euclidiana $|x|: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Assim, definindo $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = 1 - h(|x|)$ é uma função suave tal que $F(x) = 1$ para todo x pertencente à bola de raio a , $F(x) = 0$ para todo x fora da bola de raio b e $0 < F(x) < 1$ para todo ponto $x \in B(x_0, b) \setminus B(x_0, a)$, como queríamos. \square

Definição 1.1.3. Diz-se que uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo se f é bijetiva e sua inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ também é uma aplicação suave. Quando existe um difeomorfismo entre X e Y diz-se que os conjuntos X e Y são difeomorfos.

Definição 1.1.4. Sejam X e Y variedades de dimensões k e l respectivamente, com $k \leq l$, e Z uma subvariedade de Y , de dimensão k . Quando $f: X \rightarrow Z \subset Y$ é um difeomorfismo, diz-se que f aplica difeomorficamente X sobre Z .

Proposição 1.1.5. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $Z \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos arbitrários. Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são aplicações suaves então $g \circ f: X \rightarrow Z$ é uma aplicação suave. Mais ainda, se f e g são difeomorfismos, então $g \circ f$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ aplicações suaves. Para cada $x \in X$, existem um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $x \in U$, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $y := f(x) \in V$ e aplicações suaves $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G: V \rightarrow \mathbb{R}^l$ tais que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$ e $G|_{V \cap Y} = g|_{V \cap Y}$. Assim, substituindo U por $U \cap F^{-1}(V) \subseteq U$, se necessário, temos que $G \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ é suave com $(G \circ F)|_{U \cap X} = (g \circ f)|_{U \cap X}$. Logo $g \circ f$ é suave.

Se f e g são difeomorfismos, então, pelo que foi provado acima, $g \circ f$ é uma bijeção suave, pois f e g são bijeções suaves, e sua inversa $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$ dada por $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ é também uma bijeção suave, pois f^{-1} e g^{-1} são aplicações suaves. Portanto, $g \circ f$ também é difeomorfismo. \square

Definição 1.1.6. Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n . Diz-se que X é uma variedade de dimensão k se X é localmente difeomorfo ao \mathbb{R}^k . Mais precisamente, dado $x \in X$, existe uma vizinhança V de x contida em X difeomorfa a um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n .

A um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ chama-se parametrização local em torno de x . Usualmente, sua aplicação inversa $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ denota-se por $\varphi^{-1} = (x_1, \dots, x_k)$, onde $x_1, \dots, x_k: V \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas, e dá-se o nome de sistema de coordenadas locais, em torno de x .

Observação 1.1.7. A topologia considerada em X é a topologia induzida de \mathbb{R}^n , ou seja, um subconjunto V de X é aberto em X se existe um conjunto $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = \hat{V} \cap X$.

Exemplo 1.1.8. O círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é uma variedade de dimensão 1.

De fato, seja $(x_0, y_0) \in S^1$. Então ou $x_0 > 0$, ou $x_0 < 0$, ou $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$. Se $y_0 > 0$, considere $V_1 := \{(x, y) \in S^1; y > 0\}$ e

$$\begin{aligned} \varphi_1: (-1, 1) &\rightarrow V_1 \\ x &\mapsto (x, \sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

A aplicação φ_1 é uma bijeção suave com inversa

$$\begin{aligned} (\varphi_1)^{-1}: V_1 &\rightarrow (-1, 1) \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

que também é uma aplicação suave. Portanto, φ_1 é um difeomorfismo entre o semi-círculo superior V_1 e o intervalo aberto $(-1, 1)$, ou seja, φ_1 é uma parametrização local em torno de (x_0, y_0) . Procedendo de maneira análoga, se $y_0 < 0$, ou $x_0 > 0$, ou $x_0 < 0$ considere, respectivamente, as parametrizações

$$\begin{aligned}\varphi_2: (-1, 1) &\rightarrow \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}, & \varphi_2(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}) \\ \varphi_3: (-1, 1) &\rightarrow \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}, & \varphi_3(y) &= (\sqrt{1-y^2}, y) \\ \varphi_4: (-1, 1) &\rightarrow \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}, & \varphi_4(y) &= (-\sqrt{1-y^2}, y).\end{aligned}$$

Portanto, o círculo S^1 é localmente difeomorfo a \mathbb{R} , logo S^1 é uma variedade de dimensão 1.

Definição 1.1.9. Sejam X e Y variedades. Diz-se gráfico da aplicação $f: X \rightarrow Y$ o subconjunto de $X \times Y$, dado por

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

Proposição 1.1.10. Seja $F: X \rightarrow \text{graf}(f)$, dada por $F(x) = (x, f(x))$. Se $f: X \rightarrow Y$ é suave, então F é suave e $\text{graf}(f)$ é uma variedade com a mesma dimensão de X .

Demonstração. Primeiramente, se $f: X \rightarrow Y$ é suave, então a aplicação $F: X \rightarrow \text{graf}(f)$, dada por $F(x) = (x, f(x))$ é suave pois suas funções coordenadas são suaves. Agora, a aplicação $G: \text{graf}(f) \rightarrow X$, dada por $G(x, f(x)) = x$ está bem definida, é suave e, $G \circ F(x) = x$ e $F \circ G(x, f(x)) = (x, f(x))$, ou seja, $G = F^{-1}$. Portanto F é um difeomorfismo. Compondo as parametrizações locais $\psi: U \rightarrow V$ de X , onde U e V são abertos de \mathbb{R}^k e X , respectivamente, com a aplicação F , restrita a V , obtemos que $F \circ \psi$ é uma parametrização local de $\text{graf}(f)$. Logo, $\text{graf}(f)$ é uma variedade de dimensão de k , como queríamos. \square

Uma forma de se obter novas variedades a partir de variedades que conhecemos é considerando o produto cartesiano de variedades.

Teorema 1.1.11. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são variedades de dimensão k e l , respectivamente, então $X \times Y$ é uma variedade de dimensão $k + l$.

Demonstração. Suponha que $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ sejam variedades de dimensão k e l , respectivamente. Então $X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ e, para $x \in X$ e $y \in Y$, existem parametrizações locais $\varphi: W \rightarrow X$ e $\psi: U \rightarrow Y$ em torno de x e y , respectivamente, onde $W \subset \mathbb{R}^k$ e $U \subset \mathbb{R}^l$ são vizinhanças de x e y , respectivamente. Defina a aplicação $\varphi \times \psi: W \times U \rightarrow X \times Y$ por $(\varphi \times \psi)(w, u) = (\varphi(w), \psi(u))$, onde $w \in W$ e $u \in U$. A aplicação $\varphi \times \psi$ é uma bijeção suave (pois cada função coordenada é suave) com inversa $(\varphi \times \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \times \psi^{-1}$ definida por $(\varphi^{-1} \times \psi^{-1})(x, y) = (\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))$ também suave. Como $W \times U$ é vizinhança aberta de (x, y) em $X \times Y$, a aplicação $\varphi \times \psi$ é uma parametrização local em torno de $(x, y) \in X \times Y$. \square

Definição 1.1.12. Sejam X e Z variedades em \mathbb{R}^n . Diz-se que Z é uma subvariedade de X quando $Z \subset X$. Em particular, X é subvariedade de \mathbb{R}^n e X é uma subvariedade de X . Além disso, quando $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\dim X = n - 1$, diz-se que X é uma hiperfície.

Proposição 1.1.13. *Se X é uma variedade de dimensão k e U é um aberto de X , então U é uma subvariedade de X , de dimensão k .*

Demonstração. Dado um ponto $x \in U$, como X é variedade de dimensão k , existe uma vizinhança V de x , contida em X , e um difeomorfismo $\varphi: V_0 \rightarrow V$, onde $V_0 \subset \mathbb{R}^k$ é uma vizinhança da origem e $\varphi(0) = x$. Como U é aberto em X , a interseção $V \cap U$, contida em V , é um aberto em X e a restrição $\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap U)}: \varphi^{-1}(V \cap U) \rightarrow V \cap U$ é um difeomorfismo. Como $V \cap U$ também está contido em U e é aberto em U , temos que $\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap U)}$ é uma parametrização local de U em torno de x , como desejado. \square

1.2 Derivadas e Espaços Tangentes

Definição 1.2.1. *Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^m , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave e $x \in U$. Então para qualquer vetor $h \in \mathbb{R}^m$, a derivada de f no ponto x , na direção do vetor h é dada pelo limite*

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

se o limite existir.

Observação 1.2.2.

- (i) *Fixado $x \in U$, a aplicação $df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ atribui a cada vetor $h \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $df_x(h)$. Assim, quando f possui derivada em todos os pontos de seu domínio U , dizemos que f é derivável em U .*
- (ii) *A aplicação $df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e sua representação matricial com respeito às bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m é a matriz jacobiana de $f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$ no ponto x , ou seja, $Jf(y) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right]_{m \times n}$.*
- (iii) *Regra da Cadeia: se $f: U \rightarrow V$ e $g: V \rightarrow \mathbb{R}^l$ são aplicações suaves, onde U é subconjunto aberto de \mathbb{R}^m e V é subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , então, para cada $x \in U$, a derivada de $g \circ f$ é dada por $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$. (Veja, por exemplo, [Lim16a, p. 103].)*
- (iv) *Se a aplicação $f: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, com U e V subconjuntos abertos de \mathbb{R}^m , então $df_x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo.*

Vamos usar a aplicação derivada num ponto para definir espaços lineares que melhor aproximam uma variedade X perto de um ponto, os espaços tangentes.

Consideremos uma variedade X de dimensão k contida em \mathbb{R}^n e uma parametrização local em torno de um ponto $x \in X$, $\varphi: U \rightarrow X$, onde $U \subset \mathbb{R}^k$. Sem perda de generalidade, suponha que $\varphi(0) = x$. Diz-se que a melhor aproximação linear de $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, no ponto $\varphi^{-1}(x) = 0$, é a aplicação

$$u \mapsto \varphi(0) + d\varphi_0(u) = x + d\varphi_0(u).$$

Definição 1.2.3. *Define-se o espaço tangente a X no ponto x , como a imagem $d\varphi_0(\mathbb{R}^k)$ da aplicação $d\varphi_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e denota-se por $T_x X$.*

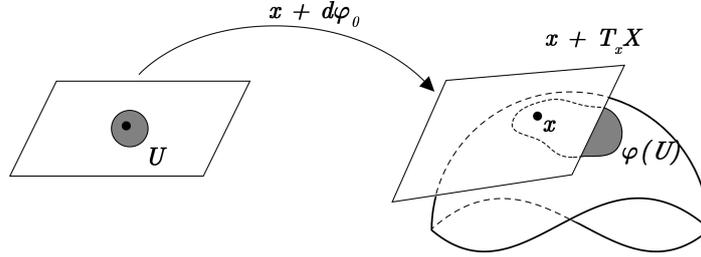


Figura 1.2: Espaço transladado $x + T_x X$ tangenciando uma superfície.

Observação 1.2.4. O espaço tangente $T_x X$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n de dimensão k paralelo ao espaço transladado $x + T_x X$.

Definição 1.2.5. Um vetor do subespaço vetorial $T_x X$ de \mathbb{R}^n diz-se um vetor tangente a X no ponto $x \in X$.

Proposição 1.2.6. O espaço tangente a X , num ponto $x \in X$, não depende da escolha da parametrização local.

Demonstração. Sejam X uma variedade de dimensão k e x um ponto em X . Considere uma parametrização local $\varphi: U_0 \rightarrow U$ em torno de x , com $\varphi(0) = x \in U$. Agora, considere outra parametrização $\psi: V_0 \rightarrow V$, com $\psi(0) = x \in V$. A aplicação

$$\xi = \psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)}: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$$

é um difeomorfismo, com $\psi \circ \xi = \varphi$. Pela regra da cadeia, $d\varphi_0 = d\psi_0 \circ d\xi_0$. Pela Observação 1.2.2 (iv), a aplicação $d\xi_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo, donde segue que $d\varphi_0(\mathbb{R}^k) = d\psi_0(\mathbb{R}^k)$. Portanto, o espaço $T_x X$ não depende da escolha da parametrização. \square

Observação 1.2.7. O espaço tangente a um subconjunto aberto U de X no ponto x é igual ao espaço tangente $T_x X$. Com efeito, sabemos pela Proposição 1.1.13 que U é uma subvariedade de X . Agora, seja $i: U \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Dado $x \in U$, pelo mesmo argumento usado na Proposição 1.1.13, temos que se $\varphi: V_0 \rightarrow V$ é uma parametrização local de X em torno de x , a restrição $\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap U)}$ é uma parametrização local de U em torno de x . Dessa forma, considerando $j: \varphi^{-1}(V \cap U) \rightarrow V_0$ a aplicação inclusão de $\varphi^{-1}(V \cap U)$ em V_0 obtém-se que $\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap U)} = \varphi \circ j$, donde, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} T_x U &= d(\varphi|_{\varphi^{-1}(V \cap U)})_0(\mathbb{R}^k) = d(\varphi \circ j)_0(\mathbb{R}^k) \\ &= d\varphi_0 \circ dj_0(\mathbb{R}^k) = d\varphi_0 \circ Id_{\mathbb{R}^k}(\mathbb{R}^k) \\ &= d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \\ &= T_x X, \end{aligned}$$

como queríamos.

Proposição 1.2.8. [GP74, Exercício 1.2.9(a)] Se X e Y são variedades quaisquer de dimensão k e l , respetivamente. Então $T_{(x,y)} X \times Y = T_x X \times T_y Y$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Demonstração. Já sabemos, pelo Teorema 1.1.11, que $X \times Y$ é uma variedade de dimensão $k+l$. Considere a parametrização local $\varphi \times \psi: U \times V \rightarrow X \times Y$ de $X \times Y$, em torno de (x, y) , definida na demonstração do Teorema 1.1.11, onde $\varphi \times \psi(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$.

Pela definição de espaço tangente temos

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}X \times Y &= d(\varphi \times \psi)_0(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \\ &= (d\varphi_0(\mathbb{R}^k), d\psi_0(\mathbb{R}^l)) \\ &= d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \times d\psi_0(\mathbb{R}^l) \\ &= T_x X \times T_y Y, \end{aligned}$$

como queríamos. \square

Dada uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ entre variedades diferenciáveis X e Y de dimensões k e l , respetivamente, dizemos que f é *suave* se, para todo $x \in X$ e para toda a parametrização ψ em torno de $f(x)$, existe uma parametrização φ em torno de x tal que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é aplicação suave de um aberto de \mathbb{R}^k sobre um aberto de \mathbb{R}^l . Iremos agora definir a derivada de uma aplicação suave num ponto $x \in X$. Suponhamos que $\varphi: U \rightarrow X$ é parametrização de X em torno de x , com $\varphi(0) = x$ e que $\psi: V \rightarrow Y$ é parametrização de Y em torno de $y = f(x)$, com $\psi(0) = y$. Assim, tomando abertos contidos em U ou V se necessário, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \psi \uparrow \\ U & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V. \end{array}$$

As derivadas $d\varphi_0$, $d\psi_0$ e dh_0 estão definidas como na Definição 1.2.1 e as aplicações $d\varphi_0$ e $d\psi_0$ são isomorfismos, motivando a seguinte definição.

Definição 1.2.9. A aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, onde $y = f(x)$, definida por $df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ diz-se a derivada da aplicação $f: X \rightarrow Y$ no ponto x .

O diagrama anterior induz o seguinte diagrama comutativo de aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{df_x} & T_y Y \\ d\varphi_0 \uparrow & & d\psi_0 \uparrow \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dh_0} & \mathbb{R}^l. \end{array}$$

Observação 1.2.10. A definição de derivada de uma aplicação num ponto não depende das parametrizações φ e ψ consideradas. Com efeito, considere as parametrizações locais em torno de $x \in X$ dadas por $\varphi: U_0 \rightarrow U$ e $\theta: \tilde{U}_0 \rightarrow \tilde{U}$ com $\varphi(0) = \theta(0) = x$ e considere também as parametrizações locais em torno de $y \in Y$ dadas por $\psi: V_0 \rightarrow V$ e $\eta: \tilde{V}_0 \rightarrow \tilde{V}$ com $\psi(0) = \eta(0) = y$. Com estas parametrizações podemos considerar os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\varphi \uparrow & & \psi \uparrow \\
U_0 & \xrightarrow{h=\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V_0
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\theta \uparrow & & \eta \uparrow \\
\tilde{U}_0 & \xrightarrow{\tilde{h}=\eta^{-1} \circ f \circ \theta} & \tilde{V}_0.
\end{array}$$

Para verificar que a definição da derivada de f em x não depende das parametrizações consideradas é suficiente verificar que

$$d\psi_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} = d\eta_0 \circ d(\eta^{-1} \circ f \circ \theta)_0 \circ (d\theta_0)^{-1}.$$

Seguindo um raciocínio análogo ao da demonstração da Proposição 1.2.6, as aplicações $\xi = \theta^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap \tilde{U})}$ e $\tilde{\xi} = \eta^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(V \cap \tilde{V})}$ são difeomorfismos e, pela regra da cadeia, $d\theta_0 \circ d\xi_0 = d\varphi_0$ e $d\eta_0 \circ d\tilde{\xi}_0 = d\psi_0$, onde $d\xi_0$ e $d\tilde{\xi}_0$ são isomorfismos. Além disso, como

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \xi^{-1} &= (\eta^{-1} \circ \psi) \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ (\theta^{-1} \circ \varphi)^{-1} \\
&= \eta^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \theta \\
&= \eta^{-1} \circ f \circ \theta,
\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
d\psi_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} &= (d\eta_0 \circ d\tilde{\xi}_0) \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\theta_0 \circ d\xi_0)^{-1} \\
&= d\eta_0 \circ (d\tilde{\xi}_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\xi_0)^{-1}) \circ (d\theta_0)^{-1} \\
&= d\eta_0 \circ (d(\tilde{\xi} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \xi^{-1})_0 \circ (d\theta_0)^{-1}) \\
&= d\eta_0 \circ d(\eta^{-1} \circ f \circ \theta)_0 \circ (d\theta_0)^{-1},
\end{aligned}$$

como desejado.

Observação 1.2.11. A regra da cadeia também vale para aplicações entre variedades. Mais precisamente, dadas aplicações suaves $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ e pontos $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, vale $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.

De fato, sejam X, Y e Z variedades de dimensões k, l e m , respetivamente, e $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ aplicações suaves. Considere $\varphi: U \rightarrow X$, $\psi: V \rightarrow Y$ e $\eta: W \rightarrow Z$ parametrizações locais de X, Y e Z , em torno de $\varphi(0) = x$, $\psi(0) = y = f(x)$ e $\eta(0) = z = g(y)$, respetivamente, com $U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^l$ e $W \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos. Resumimos os dados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{g \circ f} & & \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
\varphi \uparrow & & \psi \uparrow & & \eta \uparrow \\
U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{j} & W, \\
& & \xrightarrow{j \circ h} & &
\end{array}$$

onde $h: U \rightarrow V$ é definida por $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ e $j: V \rightarrow W$ é definida por $j = \eta^{-1} \circ g \circ \psi$. Pela Definição 1.2.9, $d(g \circ f)_x = d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ e, pela

Observação 1.2.2 (iii), $d(j \circ h)_0 = dj_0 \circ dh_0$, pois $h(0) = 0$. Além disso, pela Definição 1.2.9, $dh_0 = (d\psi_0)^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0$ e $dj_0 = (d\eta_0)^{-1} \circ dg_y \circ d\psi_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_x &= d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ (dj_0 \circ dh_0) \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ ((d\eta_0)^{-1} \circ dg_y \circ d\psi_0) \circ ((d\psi_0)^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0) \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= dg_y \circ df_x. \end{aligned}$$

Definição 1.2.12. Diz-se que as variedades X e Y são difeomorfas quando existe uma aplicação bijetiva suave $f: X \rightarrow Y$ com inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ suave. Essa aplicação f é chamada de difeomorfismo entre X e Y .

Proposição 1.2.13. Se uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo entre as variedades X e Y então, dado um conjunto $A \subset X$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um aberto em Y .

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo e considere $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$ a inversa de f . A aplicação g é suave, em particular, g é contínua. Assim, temos que dado um aberto $A \subset X$, o conjunto $g^{-1}(A)$ é aberto em Y , mas $g^{-1}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Portanto, temos que $g^{-1}(A) = f(A)$ que é aberto em Y , como queríamos. \square

1.3 Teorema da Aplicação Inversa

O clássico Teorema da Aplicação Inversa, da Análise Real, tem sua versão para variedades diferenciáveis. Sejam X e Y variedades com $\dim X = k$ e $\dim Y = l$, e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Como X e Y são variedades, então dados pontos $x \in X$ e $f(x) \in Y$, existem vizinhanças U e V de x e $f(x)$, respectivamente, e vizinhanças \hat{U} e \hat{V} de $0 \in \mathbb{R}^k$ e $0 \in \mathbb{R}^l$, respectivamente, tais que as aplicações $\varphi: \hat{U} \rightarrow U$ e $\psi: \hat{V} \rightarrow V$, são parametrizações locais, em torno de x e $f(x)$, respectivamente. Estas aplicações, a princípio, nada têm a ver uma com a outra, nem com a aplicação f , entretanto, veremos no decorrer desta seção que se $\dim X = \dim Y$, a aplicação f é um difeomorfismo local.

Definição 1.3.1. Sejam X e Y variedades e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Dado $x \in X$, diz-se que f é um difeomorfismo local em x quando existe uma vizinhança U de x tal que a restrição de f a U é um difeomorfismo sobre uma vizinhança W de $y = f(x) \in Y$. Quando f é difeomorfismo local em x , para todo $x \in X$, diz-se que f é difeomorfismo local.

Observação 1.3.2. [GP74, Exercício 1.3.5] Um difeomorfismo local $f: X \rightarrow Y$ injetivo é um difeomorfismo sobre um aberto de Y . De fato, como $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo local, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V_x de x , contida em X , tal que f aplica difeomorficamente V_x sobre um aberto W_x de Y , que contém $f(x)$. Dessa forma, podemos escrever

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x.$$

Como V_x é aberto em X , pela Proposição 1.2.13, o conjunto $f(V_x)$ é aberto em Y , que contém $f(x)$. Assim, temos que

$$f(X) = f\left(\bigcup_{x \in X} V_x\right) = \bigcup_{x \in X} f(V_x) = \bigcup_{x \in X} W_x$$

é uma união de abertos. Portanto, $f(X)$ é um aberto de Y .

Agora, como f é injetiva, temos que a aplicação f é bijetiva sobre sua imagem $f(X)$ e, portanto, tem uma inversa global $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$. Para cada $x \in X$, como $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo local, existe uma vizinhança V_x de x , contida em X , tal que $f|_{V_x}: V_x \rightarrow W_x$ é um difeomorfismo onde W_x é um aberto de Y com inversa $g: W_x \rightarrow V_x$ diferenciável que coincide com f^{-1} em W_x . A derivada de g em $y = f(x)$ coincide com $d(f^{-1})_y: T_y f(X) \rightarrow T_x X$. Portanto, $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo sobre um aberto de Y , como desejado.

Proposição 1.3.3. Uma condição necessária para que $f: X \rightarrow Y$ seja um difeomorfismo local em torno de $x \in X$ é que $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, $y = f(x)$, seja um isomorfismo.

Demonstração. Sejam $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos tais que $f: U \rightarrow V$ seja um difeomorfismo. Denotando a aplicação inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ por g tem-se, $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$. Pela regra da cadeia,

$$dg_{f(x)} \circ df_x = Id_{T_x X} \quad \text{e} \quad df_x \circ dg_{f(x)} = Id_{T_{f(x)} Y},$$

para todo $x \in U$, e portanto, $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, $y = f(x)$, é um isomorfismo, cuja aplicação inversa é $dg_{f(x)}: T_y Y \rightarrow T_x X$. \square

Esta condição também é suficiente, garantida pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3.4 (Teorema da Aplicação Inversa). *Suponha que $f: X \rightarrow Y$ seja uma aplicação cuja derivada no ponto x , $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo local em x .*

Demonstração. Como a aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$ é um isomorfismo, as variedades X e Y têm a mesma dimensão, digamos k . Considere U_0 e V_0 subconjuntos abertos de \mathbb{R}^k , $\varphi: U_0 \rightarrow U$ uma parametrização local em torno de $x \in X$, com $\varphi(0) = x \in U$, e $\psi: V_0 \rightarrow V$ parametrização local em torno de y , com $\psi(0) = y = f(x) \in V$ e $U = \varphi(U_0)$ e $V = \psi(V_0)$.

Observe o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & V \subset Y \\ \varphi \uparrow & & \psi \uparrow \\ U_0 & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V_0. \end{array}$$

A aplicação $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U_0 \rightarrow V_0$ está bem definida, como cada uma das funções é suave, temos que g é suave e aplicando a regra da cadeia, temos

$$dg_0 = d\psi_y^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0.$$

Pela Proposição 1.3.3, as aplicações $d\varphi_0$ e $d\psi_y$ são isomorfismos e, por hipótese, df_x também é um isomorfismo, dessa forma, temos que dg_0 é dada pela composta de isomorfismos, logo dg_0 também é um isomorfismo.

Como U_0 e V_0 estão contidos em \mathbb{R}^k , o Teorema da Aplicação Inversa para aplicações entre abertos de \mathbb{R}^k (vide e.g. [Lim16b, p.282]) garante que a aplicação

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U_0 \rightarrow V_0$$

é um difeomorfismo. Agora, como $f|_U = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, a aplicação $f|_U$ é uma composição de difeomorfismos.

Portanto $f|_U: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, como queríamos. \square

Na subseção seguinte, o Teorema da Aplicação Inversa aparecerá novamente e outras generalizações e demonstrações serão acrescentadas. Entretanto, a seguir, daremos algumas respostas à pergunta: qual o *comportamento* de f no caso em que $\dim X \neq \dim Y$? O Teorema da Aplicação Inversa é uma ferramenta bastante utilizada, não só na topologia, como também em outras áreas da Matemática. Entretanto, uma das condições de aplicação imposta por ele é que domínio e contra domínio tenham a mesma dimensão (i.e. $\dim X = \dim Y$). Pensando em generalizar essa ideia, pode-se enfraquecer essa hipótese, considerando os seguintes casos: $\dim X > \dim Y$ ou $\dim X < \dim Y$.

1.3.1 Imersões

Definição 1.3.5. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Quando, para um dado $x \in X$, a aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ é injetiva, diz-se que f é uma imersão em x . Se a aplicação f é uma imersão em x , para todo x pertencente a X , diz-se então que f é uma imersão.*

Observação 1.3.6. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma imersão, então $\dim X \leq \dim Y$.*

Definição 1.3.7. *A imersão canônica de $U \subset \mathbb{R}^k$ em $V \subset \mathbb{R}^l$, $k < l$, é a aplicação $i: U \hookrightarrow V$, definida por $i(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^l$.*

Observação 1.3.8. *A imersão canônica é uma imersão.*

Teorema 1.3.9 (Forma Local Das Imersões). *Suponha que $f: X \rightarrow Y$ seja uma imersão. Então existem sistemas de coordenadas locais em torno de x e $y = f(x)$ tais que $f(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$. Nestas condições, diz-se que f é localmente equivalente à imersão canônica em torno de x .*

Demonstração. Primeiramente, escolhem-se $\varphi: U \rightarrow X$ e $\psi: V \rightarrow Y$, parametrizações locais em torno de x e y , respetivamente, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$, de modo que o diagrama abaixo seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V. \end{array}$$

Agora iremos “expandir” a aplicação $g: U \rightarrow V$ e usar o Teorema da Aplicação Inversa. Como a aplicação $dg_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ é injetiva, pode-se assumir, fazendo uma mudança de base em \mathbb{R}^l , se necessário, que sua representação matricial é da forma

$$\begin{bmatrix} Id_k \\ 0 \end{bmatrix}_{l \times k},$$

onde Id_k é a matriz identidade $k \times k$. Defina

$$G: U \times \mathbb{R}^{l-k} \rightarrow \mathbb{R}^l \quad \text{por} \quad G(a, z) = g(a) + (0, z),$$

onde $0 \in \mathbb{R}^{l-k}$.

Observe que $G(0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^l$ e $U \times \mathbb{R}^{l-k}$ é aberto em \mathbb{R}^l pois é o produto cartesiano de conjuntos abertos, logo, G aplica um aberto de \mathbb{R}^l em \mathbb{R}^l . Assim a representação matricial de dG_0 é dada pela matriz identidade $l \times l$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, a aplicação G é um difeomorfismo local em

$0 \in \mathbb{R}^l$. Observe que a aplicação G foi definida de modo que se tenha $g = G \circ i$, onde i é a imersão canônica de U em $U \times \mathbb{R}^{l-k}$.

Como ψ e G são difeomorfismos locais em $0 \in \mathbb{R}^l$, então, considerando, se necessário, um aberto contido em $U \times \mathbb{R}^{l-k}$ de forma a que $G(U \times \mathbb{R}^{l-k}) \subset V$, $\psi \circ G$ também é difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^l$. Deste modo, $\psi \circ G$ pode ser usada como uma parametrização de Y em torno de $y \in Y$. Além disso, escolhendo U e V suficientemente pequenos o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \circ G \\ U & \xrightarrow{i} & V \end{array} .$$

Portanto, f é localmente equivalente à imersão canônica em torno de x . \square

Corolário 1.3.10. *Se Z é uma subvariedade de X com $\dim X = k$ e $\dim Z = l$ e $z \in Z$, então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_k) em torno de z tal que $x_{l+1} = \dots = x_k = 0$ em $U \cap Z$, onde U é uma vizinhança de z em X .*

Demonstração. Seja $j: Z \hookrightarrow X$ a aplicação de inclusão. Agora, considere $\varphi: U \rightarrow Z$, com $\varphi(0) = z$, e $\psi: V \rightarrow X$, com $\psi(0) = j(z)$, parametrizações locais em torno de z e $j(z)$, respetivamente, onde $U \subset \mathbb{R}^l$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ são conjuntos abertos. Considerando os conjuntos abertos U e V suficientemente pequenos e $i: U \hookrightarrow V$ a imersão canônica de U em V , o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & X \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{i} & V \end{array} .$$

Nestas condições, tem-se $j = \psi \circ i \circ \varphi^{-1}$. Como φ , i e ψ são difeomorfismos sobre as respetivas imagens, a aplicação j é um difeomorfismo local, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, $dj_z: T_z Z \rightarrow T_x X$, $x = j(z)$, é um isomorfismo. Assim, tem-se que a derivada dj_z é injetiva e, portanto, j é uma imersão. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, segue o resultado. \square

Observação 1.3.11. *Observa-se diretamente do Teorema da Forma Local das Imersões que se f é uma imersão no ponto x , então f é uma imersão numa vizinhança de x .*

Teorema 1.3.12. [GP74, Exercício 1.3.10] (Teorema da Aplicação Inversa Generalizado)

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave e injetiva em uma subvariedade compacta Z , contida em X . Se para todo $x \in Z$, a aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, onde $y = f(x)$, é um isomorfismo, então f aplica difeomorficamente Z sobre $f(Z)$. Além disso, f aplica uma vizinhança de Z , em X , sobre uma vizinhança de $f(Z)$, em Y .

Demonstração. Por hipótese, para cada $x \in Z$, a aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ é um isomorfismo, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 1.3.4), existe uma vizinhança U_x de x , contida em Z tal que $f|_{U_x}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. A reunião U dos conjuntos U_x é um conjunto aberto que contém a subvariedade Z .

Observe que a aplicação $f: U \rightarrow Y$ é um difeomorfismo local. Então, o trabalho, agora, consiste em mostrar que existe um conjunto aberto V em X , com $Z \subset V$, tal que f seja injetiva em V . Assim, pela Observação 1.3.2, como f é um difeomorfismo local injetivo em $V \cap U$, $f|_{V \cap U}: V \cap U \rightarrow f(V \cap U)$ é um difeomorfismo da vizinhança $V \cap U$ de Z sobre a vizinhança $f(V \cap U)$ de $f(Z)$.

Suponha, com vista a uma contradição, que tal conjunto aberto V não existe. Considere uma seqüência $\{\epsilon_k\}$ a convergir para 0. Para cada ϵ_k , considere o conjunto Z^k dos pontos $x \in X$ tal que a distância de x a Z é menor do que ϵ_k . (Aqui a distância considerada é a distância euclidiana no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , onde a variedade X está contida). Como, por suposição, f não é injetiva em cada Z^k , para cada k , existem a_k e b_k em Z^k , com $a_k \neq b_k$, mas $f(a_k) = f(b_k)$. As seqüências $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ possuem pontos de acumulação em Z , donde os conjuntos $\bigcup_k \{a_k\} \cup Z$ e $\bigcup_k \{b_k\} \cup Z$ são compactos, dado que o conjunto Z é compacto. Como, por hipótese, f é injetiva em Z , então subsequências convergentes de $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ convergem para o mesmo ponto $z \in Z$. De fato, dadas uma subsequência $\{a_{k_i}\}$ de $\{a_k\}$, com $\lim a_{k_i} = z_1 \in Z$ e uma subsequência $\{b_{k_i}\}$ de $\{b_k\}$, com $\lim b_{k_i} = z_2 \in Z$, tem-se $\lim f(a_{k_i}) = f(z_1)$ e $\lim f(b_{k_i}) = f(z_2)$, pela continuidade de f ; como $f(a_{k_i}) = f(b_{k_i})$, tem-se $f(z_1) = f(z_2)$ e, portanto, $z_1 = z_2 (= z)$, pela injetividade de f em Z . Agora, por hipótese, df_z é um isomorfismo e, pelo Teorema da Aplicação Inversa, f é difeomorfismo numa vizinhança de z , em particular, f é injetiva nessa vizinhança o que contradiz a existência nessa vizinhança de distintos a_k e b_k tais que $f(a_k) = f(b_k)$. Portanto existe um aberto V em X que contém Z onde a aplicação f é injetiva.

Mais ainda, tem-se que $f: V \cap U \rightarrow f(V \cap U)$ é um difeomorfismo, como desejado. \square

É particularmente interessante a imagem de uma imersão. A imagem da imersão canônica $i: \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^l$, $k < l$, é, talvez, o mais simples exemplo de uma subvariedade, entretanto, não se pode afirmar que a imagem de uma imersão arbitrária $f: X \rightarrow Y$ é uma subvariedade de Y . Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3.13. [GP74, Exercício 1.3.7] Considere a aplicação $g: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Vejamos que a aplicação g é um difeomorfismo local.

Consideremos as parametrizações $\varphi_i: (-1, 1) \rightarrow V_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, de S^1 como no Exemplo 1.1.8. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $g(t_0)$ pertence a algum dos abertos V_i . Suponhamos que $g(t) \in V_1$. Nesse caso, t_0 pertence a um intervalo da forma $(2k\pi, (2k+1)\pi)$. A função coordenada

$$\begin{aligned} (\varphi_1)^{-1} \circ g|_{(2k\pi, (2k+1)\pi)}: (2k\pi, (2k+1)\pi) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \cos 2\pi t \end{aligned}$$

é uma aplicação suave com aplicação inversa suave $x \mapsto \arccos(x)$. Caso $g(t_0)$ pertença a um outro aberto V_i , por um raciocínio análogo ao anterior, mostra-se que, localmente, a função coordenada $(\varphi_i)^{-1} \circ g$ é suave com inversa suave. Dessa forma, temos que g é um difeomorfismo local.

Agora defina a aplicação $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ por $G(t, s) = (g(t), g(s))$. Vejamos que aplicação G é um difeomorfismo local do plano \mathbb{R}^2 no toro $S^1 \times S^1$. Dado $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$, suponhamos que $G(t_0, s_0) \in V_1 \times V_1$. Considerando a parametrização $\varphi_1 \times \varphi_1: (a, b) \mapsto (\varphi_1(a), \varphi_1(b))$ de $S^1 \times S^1$ em torno de $G(t_0, s_0)$, a representação local de G é dada por

$$(t, s) \mapsto (\cos 2\pi t, \cos 2\pi s).$$

Nesse caso, a matriz que representa a derivada $dG_{(t,s)}$ é dada por

$$2\pi \begin{bmatrix} -\text{sen}2\pi t_0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}2\pi s_0 \end{bmatrix}.$$

Como $G(t_0, s_0) \in V_1 \times V_1$, o determinante da matriz é diferente de 0, logo a aplicação $dG_{(t_0, s_0)}$ é isomorfismo. Por um raciocínio análogo, prova-se que $dG_{(t_0, s_0)}$ é isomorfismo em (t_0, s_0) , para todo (t_0, s_0) em \mathbb{R}^2 . Portanto G é um difeomorfismo local.

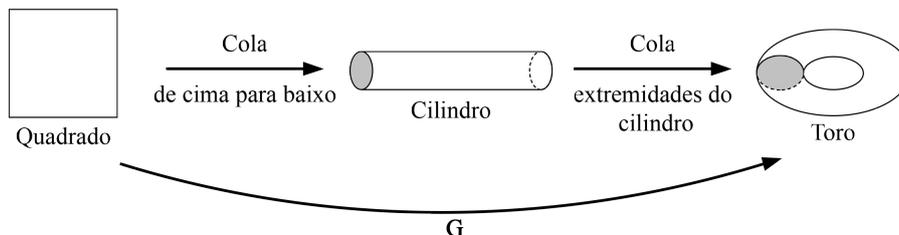


Figura 1.3: “Transformação” do quadrado num toro.

Agora defina uma aplicação $f: L \rightarrow S^1 \times S^1$ como sendo a restrição de G a uma reta $L = \{(x, y); y = \alpha x\}$ de \mathbb{R}^2 que passa pela origem, cuja declividade α é um número irracional.

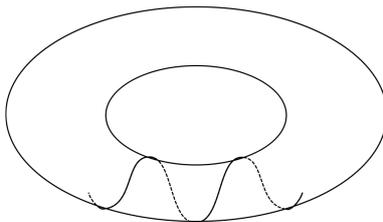


Figura 1.4: A imagem da curva $G|_L: L \rightarrow S^1 \times S^1$, no toro.

Como $f = G|_L = G \circ i$, onde $i: L \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a inclusão da reta L no plano \mathbb{R}^2 e as aplicações G e i são imersões, a aplicação f é uma imersão. Além disso, a aplicação f é injetiva: de fato, dados $(t, \alpha t), (s, \alpha s) \in L$ tais que $f(t, \alpha t) = f(s, \alpha s)$, segue que $\cos(2\pi t) = \cos(2\pi s)$, $\text{sen}(2\pi t) = \text{sen}(2\pi s)$, $\cos(2\pi \alpha t) = \cos(2\pi \alpha s)$ e $\text{sen}(2\pi \alpha t) = \text{sen}(2\pi \alpha s)$ e, portanto, como α é irracional, tem-se $(t, \alpha t) = (s, \alpha s)$.

A imagem $f(L)$ de f não é uma subvariedade do toro $S^1 \times S^1$. Com efeito, se $f(L)$ fosse subvariedade de $S^1 \times S^1$ então, para todo $z \in L$, existiria uma

vizinhança U de z tal que $f|_U: U \rightarrow S^1 \times S^1$ é um difeomorfismo sobre a imagem, em particular, para cada $z \in L$, a imagem de cada vizinhança conexa de z é conexa. No entanto, considerando uma vizinhança conexa U de z , a imagem $f(U) \subset S^1 \times S^1$ contém uma infinidade de segmentos da curva dada por $f(L)$, pois α é irracional e, portanto, não é conexa.

O Teorema da Forma Local das Imersões garante que uma imersão f aplica uma vizinhança W dum ponto x , suficientemente pequena, difeomorficamente em sua imagem $f(W)$. No entanto, para que $f(W)$ seja uma subvariedade de Y é necessário que todos os pontos $y \in f(W)$ possuam vizinhanças parametrizáveis. Para garantir que a imagem de uma imersão é variedade, apresentamos a seguinte definição

Definição 1.3.14. Diz-se que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$, entre variedades X e Y , é própria se a pré-imagem de qualquer compacto contido em Y é um compacto, contido em X . Uma imersão injetiva e própria chama-se mergulho.

Teorema 1.3.15. Um mergulho $f: X \rightarrow Y$ aplica X sobre uma subvariedade difeomorficamente.

Demonstração. Para mostrar que $f(X)$ é uma variedade, é suficiente mostrar que a imagem de qualquer conjunto aberto W de X é um conjunto aberto de $f(X)$. Com efeito, se f é uma aplicação que leva cada aberto W contido em X num aberto $U = f(W)$ contido em $f(X)$, então temos que dado $y \in U$, existe uma vizinhança V de y , em Y , tal que a aplicação $\varphi: V_0 \subset \mathbb{R}^l \rightarrow V$ é um difeomorfismo, onde V_0 é um aberto de \mathbb{R}^l contendo a origem e $\varphi(0) = y$. Observe que $U \cap V$ está contido em V e tomando um subconjunto de $U \cap V$, se necessário, temos que a aplicação $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)}: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$ é um difeomorfismo entre conjuntos abertos. Como $U \cap V$ também está contido em $U = f(X)$, temos que $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)}: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V$ é uma parametrização local, em torno de $y \in f(X)$. Portanto é suficiente mostrar que $f(W)$ é um aberto de $f(X)$.

Se $f(W)$ não é aberto de $f(X)$, então existe uma sequência $\{y_i\}$ em $f(X)$ que não pertence a $f(W)$ mas que converge para algum ponto $y \in f(W)$. Como o conjunto $\{y, y_i\}$ é compacto, a pré-imagem em X também é compacta, pois f é própria. Como f é um mergulho, por definição, f é injetiva e cada ponto y_i é a pré-imagem de um único $x_i \in X$ e y possui precisamente uma pré-imagem $x \in W$. Como $\{x, x_i\}$ é compacto, passando a uma subsequência, se necessário, pode-se assumir que a sequência $\{x_i\}$ converge para um ponto $z \in X$. Então $\lim f(x_i) = f(z)$, mas como $\lim y_i = \lim f(x_i) = f(x) = y$, pela injetividade de f , tem-se $z = x$. Agora, W é aberto e como $\lim x_i = x$, conclui-se que, para $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $x_i \in W$, mas isto contraria o fato de que $y_i \notin f(W)$.

Agora, tendo provado que $f(X)$ é uma variedade, pode-se finalmente, provar que a aplicação $f: X \rightarrow f(X)$ é um difeomorfismo. Considere V um aberto de $f(X)$ e $V' \subset f(X)$ um conjunto compacto que contém V . Como f é um mergulho, a pré-imagem de V' por f é um compacto U' , contido em X . Agora considere a pré-imagem U de V por f . O conjunto U é aberto em X e está contido no compacto U' . Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, substituindo os abertos U e V por abertos neles contidos, se necessário, considere parametrizações locais $\varphi: U_0 \rightarrow X$ e $\psi: V_0 \rightarrow f(X)$ de X e $f(X)$, respetivamente, com

$\varphi(U_0) = U$ e $\psi(V_0) = V$, onde $U_0 \subset \mathbb{R}^k$ e $V_0 \subset \mathbb{R}^l$ são abertos, tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

Agora, pela construção feita, temos que $f|_U: U \rightarrow V$ é dada pela seguinte composição $f|_U = \psi^{-1} \circ i \circ \varphi$, onde $i: U_0 \hookrightarrow V_0$ é a imersão canônica. Como cada uma das aplicações ψ^{-1} , i e φ é um difeomorfismo, temos assim que $f|_U$ é um difeomorfismo de U sobre V . Como U e V são abertos, temos que f é um difeomorfismo local e, como f é injetiva, por hipótese, temos, pela Observação 1.3.2, que f é um difeomorfismo de X sobre $f(X)$.

Portanto, $f(X)$ é uma subvariedade de Y e $f: X \rightarrow f(X)$ é um difeomorfismo. \square

1.3.2 Submersões

Agora, para responder à “outra parte” da pergunta feita antes desta subseção, considera-se o caso em que $\dim X > \dim Y$.

Definição 1.3.16. *Considere variedades X e Y e uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$. Quando, para todo $x \in X$, $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$, $y = f(x)$, é sobrejetiva, diz-se que f é uma submersão em x . Se a aplicação f é uma submersão em x , para todo $x \in X$, f diz-se uma submersão.*

Observação 1.3.17. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma submersão, então $\dim X \geq \dim Y$.*

De modo análogo ao que foi feito com imersões, também define-se submersão canônica.

Definição 1.3.18. *Chama-se submersão canônica de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^l , $k \geq l$, à projeção definida por $(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_l)$.*

Observação 1.3.19. *A submersão canônica é uma submersão.*

Teorema 1.3.20 (Forma Local das Submersões). *Suponha que $f: X \rightarrow Y$ seja uma submersão em x e, seja $y = f(x)$. Então existem sistemas de coordenadas locais em torno de x e y tais que $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$, onde $k = \dim X$ e $l = \dim Y$. Nestas condições, diz-se que f é equivalente à submersão canônica em torno de x .*

Demonstração. Sejam $\varphi: U \rightarrow X$ e $\psi: V \rightarrow Y$ parametrizações locais de X e Y , em torno dos pontos x e y , respectivamente, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$ e onde $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ são conjuntos abertos. Definindo $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

Agora, a aplicação g será modificada de modo a poder-se aplicar o Teorema da Aplicação Inversa. Como f é submersão em x , a aplicação $dg_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva. Fazendo uma escolha conveniente de uma base em \mathbb{R}^k , temos que a matriz

$$[Id_k|0]_{l \times k},$$

representa a aplicação dg_0 com respeito a essa base. Agora defina $G: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ por $G(a) = (g(a), a_{l+1}, \dots, a_k)$, onde $a = (a_1, \dots, a_k)$. Assim, a matriz que representa $dG_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é a matriz identidade $k \times k$, donde G é um difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^k$. Como φ e G^{-1} são difeomorfismos locais, então $\varphi \circ G^{-1}$ é difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^k$. Deste modo, $\varphi \circ G^{-1}$ pode ser usada como parametrização de X em torno de $x \in X$. Além disso, escolhendo U e V suficientemente pequenos e definindo s como a submersão canônica, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow \varphi \circ G^{-1} & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

Portanto, f é localmente equivalente à submersão canônica em torno de x . \square

Novamente fazendo analogia com imersões observa-se que submersão é um conceito local, ou seja, se f é uma submersão no ponto x , então f é submersão em alguma vizinhança de x , ou seja, submersão também é um conceito local.

Definição 1.3.21. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades X e Y . Diz-se que um ponto $y \in Y$ é valor regular de f se $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$ for sobrejetiva em todo o ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Quando $y \in Y$ não é valor regular de f , diz-se que y é valor crítico de f .*

Na Geometria, quando $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave entre superfícies regulares, e y é valor regular de f , então o conjunto

$$\{x \in X: f(x) = y\}$$

é uma superfície regular. A título de informação, consulte, por exemplo, [dC05, p.69]. Sabendo que a ideia de regularidade de superfícies, na Geometria, é bastante similar à ideia de diferenciabilidade em variedades, pode-se pensar num resultado para variedades que generalize este, para superfícies. Partindo desta intuição, obtém-se o seguinte teorema.

Teorema 1.3.22 (Teorema da Pré-Imagem). *Se y é valor regular da aplicação $f: X \rightarrow Y$, então a pré-imagem $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X , mais ainda, $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.*

Demonstração. Como, para todo $x \in f^{-1}(y)$, df_x é sobrejetiva, f é uma submersão em torno de $x \in f^{-1}(y)$. Escolha sistemas de coordenadas locais em torno de x e y , respetivamente, tais que $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$, $k = \dim X$, $l = \dim Y$, e faça y corresponder a $(0, \dots, 0)$. Assim, próximo de x , o conjunto $f^{-1}(y)$ é exatamente o conjunto de pontos da forma $(0, \dots, 0, x_{l+1}, \dots, x_k)$. Mais precisamente, se V é uma vizinhança de x onde o sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_k) está definido, então $f^{-1}(y) \cap V$ é o conjunto dos pontos onde $x_1 = 0 = \dots = x_l$. As funções (x_{l+1}, \dots, x_k) formam um sistema de coordenadas no conjunto $f^{-1}(y) \cap V$ que é um aberto relativo em $f^{-1}(y)$. Logo, $f^{-1}(y)$ é subvariedade de dimensão $k - l$. Observe a Figura 1.5. \square

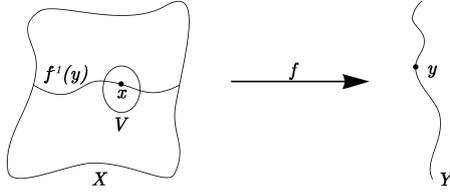


Figura 1.5: O conjunto $f^{-1}(y) \cap V$ é um aberto de $f^{-1}(y)$.

Uma aplicação interessante do Teorema da Pré-imagem é mostrar que o grupo ortogonal $\mathcal{O}(n)$ é uma variedade. Enunciamos abaixo este exemplo.

Exemplo 1.3.23. O grupo $\mathcal{O}(n)$ das matrizes ortogonais é uma subvariedade do grupo das matrizes $\mathcal{M}(n)$ e possui dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração. Primeiramente, o espaço $\mathcal{M}(n)$ das matrizes, com entradas reais, é uma variedade de dimensão n^2 ; de fato, reorganizando as entradas de cada matriz ao longo de uma única linha, obtemos o próprio \mathbb{R}^{n^2} . O grupo $\mathcal{O}(n)$ é o grupo das matrizes $A \in \mathcal{M}(n)$ tais que $AA^t = I_n$, onde A^t é a transposta da matriz A e I_n é a matriz identidade $n \times n$. Observe que para qualquer matriz A , a matriz AA^t é simétrica pois é igual a sua transposta.

Afirmamos que o espaço vetorial $\mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas é uma subvariedade de $\mathcal{M}(n)$ difeomorfo a \mathbb{R}^k , onde $k = n(n+1)/2$. De fato, observe que uma matriz simétrica $n \times n$ fica determinada pelas entradas da diagonal principal e pelas entradas acima dessa diagonal, ou seja, por $n(n+1)/2$ entradas.

Afirmamos também que a aplicação $f: \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{S}(n)$, dada por $f(A) = AA^t$ é suave. De fato, como $\dim \mathcal{S}(n) = n(n+1)/2$, a imagem $f(A) = AA^t$ pode ser identificada com um vetor do espaço euclidiano \mathbb{R}^k , com $k = n(n+1)/2$, onde cada entrada desse vetor é da forma

$$b_{ij}(A) = \sum_{k=1}^n x_{ik}x_{kj},$$

onde x_{ik} e x_{kj} denotam as entradas (i, k) e (k, j) da matriz A , respetivamente. Assim, temos que o termo b_{ij} do produto AA^t é dado por um polinômio nas entradas de A . Portanto, f é uma aplicação suave.

Dessa forma, segue que $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(I_n)$. Agora, basta provar que I_n é valor regular de f . Por definição, a derivada $df_A: T_A\mathcal{M}(n) \rightarrow T_{f(A)}\mathcal{S}(n)$ de f em A é dada por:

$$\begin{aligned} df_A(B) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A + sB) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(A + sB)(A + sB)^t - AA^t}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} BA^t + AB^t + sBB^t \\ &= BA^t + AB^t, \end{aligned}$$

onde $B \in T_A\mathcal{M}(n)$. Agora é necessário verificar que, de fato, $df_A: T_A\mathcal{M}(n) \rightarrow T_{f(A)}\mathcal{S}(n)$ é sobrejetiva quando $A \in f^{-1}(I) = O(n)$. Pelas identificações feitas de $\mathcal{M}(n)$ e $\mathcal{S}(n)$ com espaços euclidianos, tem-se $T_A\mathcal{M}(n) = \mathcal{M}(n)$ e $T_{f(A)}\mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(n)$. A matriz I_n é valor regular de f se e somente se $df_A: \mathcal{M}(n) \rightarrow \mathcal{S}(n)$ é sobrejetiva para todo $A \in O(n)$, isto é, dada $C \in \mathcal{S}(n)$, existe $B \in \mathcal{M}(n)$ tal que $df_A(B) = C$, ou seja, $BA^t + AB^t = C$. Dadas $A \in O(n)$ e $C \in \mathcal{S}(n)$, tome-se $B = 1/2CA$. Logo

$$df_A(B) = \left(\frac{1}{2}CA\right)A^t + A\left(\frac{1}{2}CA\right)^t = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t = C$$

Assim, f é uma submersão para todo $A \in f^{-1}(I_n)$ e I_n é valor regular de f . Portando $O(n)$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}(n)$, mais ainda,

$$\dim O(n) = \dim \mathcal{M}(n) - \dim \mathcal{S}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Teorema 1.3.24. [GP74, Exercício 1.4.7] *Se y é valor regular da aplicação $f: X \rightarrow Y$, onde X é variedade compacta e tem a mesma dimensão de Y , então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$. Além disso, existe uma vizinhança U de y , em Y tal que $f^{-1}(U)$ é dado pela união disjunta $V_1 \cup \dots \cup V_n$, onde V_i é uma vizinhança aberta de x_i e f aplica cada V_i difeomorficamente sobre U .*

Demonstração. Como y é valor regular de f , pelo Teorema da Pré-Imagem, temos que $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X , de dimensão 0. Logo, $f^{-1}(y)$ é um conjunto discreto de pontos. Como $f^{-1}(y)$ é fechado em X e X é compacto, temos que $f^{-1}(y)$ é compacto. Logo $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito de pontos $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Por fim, como $f: X \rightarrow Y$ é difeomorfismo local em cada $x_i \in f^{-1}(y)$, para cada $i = 1, \dots, n$, existe uma vizinhança \hat{V}_i de x_i tal que $f|_{\hat{V}_i}: \hat{V}_i \rightarrow f(\hat{V}_i)$ é difeomorfismo. Considerando $U = \bigcap_{i=1}^n f(\hat{V}_i)$ e $V_i = \hat{V}_i \cap f^{-1}(U)$, obtém-se o resultado. □

Definição 1.3.25. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. As transformações lineares $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamadas funcionais lineares.*

Proposição 1.3.26. *Seja $g = (g_1, \dots, g_l): X \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave e $x \in X$. A derivada $dg_x: T_xX \rightarrow \mathbb{R}^l$ de g em x é sobrejetiva se, e somente se, os funcionais lineares $d(g_1)_x, \dots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes em T_xX .*

Demonstração. De fato, se $dg_x: T_xX \rightarrow \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva, então uma matriz que representa dg_x tem l linhas linearmente independentes. Como a i -ésima linha dessa matriz é representação de $d(g_i)_x: T_xX \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, l$, segue que $d(g_1)_x, \dots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes. Por outro lado, sendo os funcionais lineares $d(g_1)_x, \dots, d(g_l)_x$ linearmente independentes, a matriz jacobiana de $dg_x: T_xX \rightarrow \mathbb{R}^l$ possui l linhas linearmente independentes, isto é, $\dim \text{Im} dg_x = l$, ou seja, dg_x é sobrejetiva. □

Definição 1.3.27. *Diz-se que as funções $g_1, \dots, g_l: X \rightarrow \mathbb{R}$ são independentes em x , quando os funcionais lineares $d(g_1)_x, \dots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes em T_xX , ou equivalentemente, quando $dg_x: T_xX \rightarrow \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva.*

Definição 1.3.28. A codimensão de uma subvariedade $Z \subset X$ é dada pela equação

$$\text{codim } Z = \dim X - \dim Z.$$

A definição de codimensão não depende somente de Z , mas também do ambiente onde ela se encontra, isto é, da variedade X . A próxima proposição afirma que l funções independentes em X determinam uma subvariedade de codimensão l .

Proposição 1.3.29. Seja $g: X \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave. Se as funções coordenadas $g_1, \dots, g_l: X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções independentes em cada ponto onde todas se anulam, então o conjunto

$$Z = \{x \in X: g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0\}$$

é uma subvariedade de X , com $\dim Z = \dim X - l$.

Demonstração. Como as funções coordenadas $g_1, \dots, g_l: X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções independentes em todo ponto $x \in Z$, os funcionais lineares

$$(dg_1)_x, \dots, (dg_l)_x: T_x X \rightarrow \mathbb{R}$$

são linearmente independentes, ou seja, a derivada

$$dg_x: X \rightarrow \mathbb{R}^l$$

é sobrejetiva em todo ponto $x \in Z$. Dessa forma, temos que 0 é valor regular de g , pois dg_x é sobrejetiva em todo ponto x pertencente a $Z = g^{-1}(0)$. Assim, pelo Teorema da Pré-imagem, temos que Z é uma subvariedade de X , com $\dim Z = \dim X - l$, como queríamos. \square

A recíproca da proposição anterior não vale com toda a generalidade. De fato, existe exemplo de uma subvariedade Z de uma variedade X que não é determinada por funções independentes. Veja, por exemplo, a Proposição 2.2.12. Os próximos dois resultados dirão quando é possível determinar uma subvariedade Z de X por funções independentes. Desse modo, estes resultados também garantirão (em parte) a recíproca da Proposição 1.3.29.

Teorema 1.3.30 (Recíproca Parcial 1). Se y é valor regular de uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ então a pré-imagem da subvariedade $f^{-1}(y)$ é determinada por funções independentes.

Demonstração. Sejam W uma vizinhança de $y \in Y$ e $h: W \subset Y \rightarrow h(W)$ um difeomorfismo tal que $h(W)$ é aberto de \mathbb{R}^l , onde $l = \dim Y$, e $h(y) = 0$. Considere a aplicação $g = h \circ f: f^{-1}(W) \subset X \rightarrow \mathbb{R}^l$. Afirmamos que 0 é valor regular de $g = h \circ f$. De fato, aplicando a regra da cadeia à aplicação g , obtém-se

$$dg_x = d(h \circ f)_x = dh_y \circ df_x,$$

para todo $x \in f^{-1}(y)$. Como y é valor regular de f , df_x é sobrejetiva em todo ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $h: W \rightarrow h(W) \subset \mathbb{R}^l$ é um difeomorfismo, tem-se que dh_y é um isomorfismo, logo é aplicação sobrejetiva e, além disso, $h(y) = 0$. Dessa forma, tem-se $dg_x = dh_y \circ df_x$ sobrejetiva para todo $x \in X$ tal que $g(x) = 0$. Portanto, 0 é valor regular de g , justificando assim a afirmação.

Finalmente, tomando g_1, \dots, g_l as funções coordenadas de g , tem-se pela Proposição 1.3.26 que estas funções são independentes, pois a sobrejetividade de dg_x é garantida pela afirmação feita acima. Portanto $f^{-1}(y)$ é determinado por l funções independentes. Logo, as funções coordenadas de g garantem o resultado. \square

Teorema 1.3.31 (Recíproca Parcial 2). *Toda subvariedade de X de codimensão l é localmente determinada por l funções independentes.*

Demonstração. Sejam Z uma subvariedade de X de codimensão l e z um ponto de Z . Afirmamos que existem l funções independentes g_1, \dots, g_l definidas em alguma vizinhança W de z , em X , tais que $g_1 = \dots = g_l = 0$ em $W \cap Z$. De fato, seja $i: Z \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Observe que a inclusão é, na verdade, uma imersão, e assim, pelo Teorema da Forma Local das Imersões, existem parametrizações locais $\varphi: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Z$ e $\psi: U \subset \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow X$ em torno de z e de $i(z)$, respetivamente, tais que

$$\psi^{-1} \circ i \circ \varphi: (z_1, \dots, z_k) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$$

e $i \circ \varphi(V) = \psi(U)$.

Tomando a vizinhança $W = \psi(U) \subset X$ de $i(z)$ e, para cada $j = 1, \dots, l$, a aplicação $g_j: W \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_j = \pi_{k+j} \circ \psi^{-1},$$

onde $\pi_{k+j}: \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção $\pi_{k+j}(x_1, \dots, x_{k+l}) = x_{k+j}$, temos que $W \cap i(Z) = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1, \dots, g_l)$. De fato, tomando $w \in W \cap i(Z)$, tem-se $w = \psi(u) = i \circ \varphi(v)$, com $u \in U$ e $v = (v_1, \dots, v_k) \in V$, e, para cada $j = 1, \dots, l$,

$$\begin{aligned} g_j(w) &= \pi_{k+j} \circ \psi^{-1}(w) \\ &= \pi_{k+j}(\psi^{-1} \circ i \circ \varphi(v)) \\ &= \pi_{k+j}(v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $w \in g^{-1}(0)$, então, como $i \circ \varphi(V) = \psi(U)$ e $i = \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}$, onde $\iota(z_1, \dots, z_k) = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$, tem-se

$$\begin{aligned} w &= \psi(v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0) \quad \text{onde } (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0) \in U \\ &= \psi \circ \iota(v_1, \dots, v_k) \quad \text{onde } (v_1, \dots, v_k) \in V \\ &= \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(\varphi(v)) \quad \text{onde } \varphi(v) \in \varphi(V) \subset Z. \end{aligned}$$

Além disso, como a aplicação $d(\pi_{k+j})_{\psi^{-1}(x)} = \pi_{k+j}: \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva e a aplicação $d(\psi^{-1})_x: T_x X \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$ é isomorfismo, a aplicação $dg_x: T_x X \rightarrow \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva e, portanto, g_1, \dots, g_l são funções independentes. \square

Corolário 1.3.32. *[GP74, Exercício 1.4.4] Se $Z \subset X \subset Y$ são variedades e $z \in Z$, então existem funções independentes g_1, \dots, g_l definidas numa vizinhança W de z , em Y , tais que*

$$Z \cap W = \{y \in W: g_1(y) = 0, \dots, g_l(y) = 0\}$$

e

$$X \cap W = \{y \in W : g_1(y) = 0, \dots, g_m(y) = 0\},$$

onde l é a codimensão de Z em Y e m é a codimensão de X em Y . Além disso, a codimensão de Z em X é $l - m$.

Demonstração. Consideremos parametrizações $\varphi: V \rightarrow Z$, $\phi: V' \rightarrow X$ e $\psi: U \rightarrow Y$ em torno de $z, i_Z(z)$ e $i_X \circ i_Z(z)$, respectivamente, onde $i_Z: Z \rightarrow X$ e $i_X: X \rightarrow Y$ são as inclusões naturais e $V \subset \mathbb{R}^k, V' \subset \mathbb{R}^{k'}$ e $U \subset \mathbb{R}^{k+l}$ são abertos (e $k + l = k' + m$). Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X \\ \varphi \uparrow & & \phi \uparrow \\ V & \xrightarrow{g = \phi^{-1} \circ i_Z \circ \varphi} & V' \end{array}$$

Como i_Z é imersão, pela demonstração do Teorema da Forma Local das Submersões, observa-se que, compondo a parametrização ϕ com uma aplicação conveniente, obtém-se uma parametrização $\hat{\phi}: \hat{V}' \rightarrow X$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X \\ \varphi \uparrow & & \hat{\phi} \uparrow \\ V & \xrightarrow{\iota} & \hat{V}' \end{array}$$

onde $\iota: V \rightarrow \mathbb{R}^{k'}$ é a inclusão canônica. Utilizando um argumento análogo ao agora apresentado e considerando a imersão i_X e as parametrizações $\hat{\phi}$ de X e ψ de Y , obtém-se uma parametrização $\hat{\psi}: \hat{U} \rightarrow Y$ de Y tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X & \xrightarrow{i_X} & Y \\ \varphi \uparrow & & \hat{\phi} \uparrow & & \hat{\psi} \uparrow \\ V & \xrightarrow{\iota} & \hat{V}' & \xrightarrow{j} & U \end{array}$$

onde $j: \hat{V}' \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$ é a inclusão canônica.

Seguindo a demonstração do Teorema 1.3.31 e diminuindo as vizinhanças \hat{V}' e $W := U$, se necessário, constroem-se as l funções independentes g_1, \dots, g_l pretendidas.

Como $k + l = k' + m$, obtém-se que a codimensão de Z em X é $l - m$. \square

Proposição 1.3.33. *Seja Z a pré-imagem de um valor regular $y \in Y$ por uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$. Então o núcleo da derivada $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$ em qualquer ponto $x \in Z$ é precisamente o espaço tangente a Z em x , $T_x Z$.*

Demonstração. Como f é constante em Z , então $df_x(v) = 0$, para todo $x \in Z$ e $v \in T_x Z$. Portanto $T_x Z$ é subconjunto do núcleo $\ker df_x$ de df_x , para todo $x \in Z$. Além disso, como, para $x \in Z$, df_x é sobrejetiva, tem-se

$$\dim \ker df_x = \dim T_x X - T_y Y = \dim X - \dim Y$$

Assim, $T_x Z$ é subespaço de $\ker df_x$ com mesma dimensão. Portanto, $T_x Z = \ker df_x$, para todo $x \in Z$. \square

1.4 Aplicações Transversais

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades X e Y . Na seção anterior estudamos o conjunto solução da equação $f(x) = y$ quando y é um valor regular de f . Nesse caso, esse conjunto solução é uma subvariedade de X . Estudaremos, agora, o conjunto de pontos de X cujos valores em Y estão sujeitos a uma certa condição, que não será necessariamente tomarem um valor constante. Para esse fim, considere uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$, uma subvariedade Z de Y e $y = f(x)$ com $x \in X$. Pelo Teorema 1.3.31, se $y \in Z$, então existe uma vizinhança U de y e funções $g_1, \dots, g_l: U \rightarrow \mathbb{R}$ (onde l é a codimensão de Z em Y) tais que

$$Z = \{z \in U: g_1(z) = \dots = g_l(z) = 0\}.$$

Assim,

$$f^{-1}(Z) = \{a \in X: g_1 \circ f(a) = \dots = g_l \circ f(a) = 0\} = (g \circ f)^{-1}(0),$$

onde $g = (g_1, \dots, g_l)$ é uma submersão definida em U .

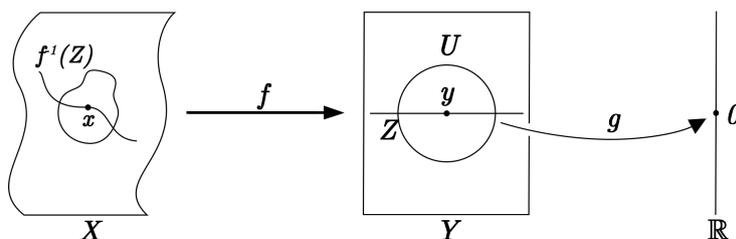


Figura 1.6: O conjunto $f^{-1}(Z)$ está localmente determinado pela composição $g \circ f(x)$.

Assim, pelo Teorema 1.3.30, $f^{-1}(Z)$ é subvariedade de X se 0 é valor regular de $g \circ f$. Iremos reescrever esta última condição em termos de f e Z . Com efeito, pela regra da cadeia, tem-se

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x,$$

donde $d(g \circ f)_x$ é sobrejetiva se, e somente se, $dg_y: T_y Y \rightarrow \mathbb{R}^l$ aplica a imagem de df_x sobre \mathbb{R}^l . Como a aplicação dg_y é sobrejetiva e tem núcleo $\ker dg_y = T_y Z$, a aplicação dg_y aplica a imagem de df_x , $Im(df_x)$, sobre \mathbb{R}^l se os subespaços $Im(df_x)$ e $T_y Z$ geram todo o espaço $T_y Y$. Conclui-se que $g \circ f$ é uma submersão no ponto $x \in f^{-1}(Z)$ se, e somente se,

$$Im(df_x) + T_y Z = T_y Y. \quad (1.1)$$

Definição 1.4.1. *Sejam X e Y variedades. Diz-se que uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é transversal a uma subvariedade Z , contida em Y , (denota-se por $f \pitchfork Z$) quando f satisfaz a equação (1.1) acima para cada ponto x da pré-imagem de Z .*

O raciocínio feito antes da definição em conjunto com o Teorema 1.3.24 permitem concluir que:

Teorema 1.4.2. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave e transversal a uma subvariedade $Z \subset Y$, então a pré-imagem $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X . Mais ainda, codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual à codimensão de Z em Y .*

Exemplo 1.4.3. *Como exemplo de uma aplicação transversal a uma subvariedade, considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, x)$ e Z o eixo x em \mathbb{R}^2 . Já um exemplo de aplicação não transversal a uma subvariedade Z é dado por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $f(x) = (x, x^2)$ e Z o eixo x .*

Quando a subvariedade Z é dada por um único ponto (i.e. $Z = \{y\}$), o espaço tangente $T_y Z$ é, na verdade, um subespaço de Y de dimensão zero. Assim, f é transversal a $\{y\}$ se $\text{Im} df_x = T_y Y$, para todo $x \in X$ tal que $f(x) = y$, onde diz-se que y é valor regular de f . Dessa forma, observa-se que regularidade é um caso particular de transversalidade.

No caso particular em que a aplicação f é a inclusão i de X em Y , onde X é subvariedade de Y , dizer que um ponto $x \in X$ pertence a $i^{-1}(Z)$, onde Z é subvariedade de Y , significa dizer que $x \in X \cap Z$. Além disso, a derivada $di_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ é meramente a aplicação de inclusão do espaço tangente $T_x X$ no espaço tangente $T_x Y$. Então, a aplicação inclusão $i: X \rightarrow Y$ é transversal à subvariedade Z ($i \pitchfork Z$) se, e somente se, para todo $x \in X \cap Z$,

$$T_x X + T_x Z = T_x Y.$$

Definição 1.4.4. *Diz-se que duas subvariedades X e Z de Y são transversais (denota-se por $X \pitchfork Z$) quando ambas satisfazem a equação acima, isto é, quando $i_X \pitchfork Z$.*

Teorema 1.4.5. *A interseção de duas subvariedades X e Z transversais em Y também é uma subvariedade de Y e $\text{codim}(X \cap Z) = \text{codim} X + \text{codim} Z$.*

Demonstração. Seja $i: X \rightarrow Y$ a aplicação inclusão de X em Y . Como $X \pitchfork Z$ tem-se $i \pitchfork Z$ e, pelo teorema anterior, segue que $i^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X onde a codimensão de $i^{-1}(Z) = X \cap Z$ em X é igual à codimensão de Z em Y . Seja $x \in X \cap Z$. Pelo Teorema 1.3.31, existe uma vizinhança W de x em Y onde X é determinada por $k = \text{codim}(X)$ funções independentes, g_1, \dots, g_k , e Z é determinada por $l = \text{codim}(Z)$ funções independentes, h_1, \dots, h_l . Então $X \cap Z$ é o conjunto onde a coleção combinada das $k + l$ funções, $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l$, se anulam. Afirmamos que essas $k + l$ funções são independentes em torno de x . Com efeito, como, para $y \in W$, as aplicações $dg_y: T_y Y \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $g = (g_1, \dots, g_k)$, e $dh_y: T_y Y \rightarrow \mathbb{R}^l$, onde $h = (h_1, \dots, h_l)$, são sobrejetivas, a aplicação $d(g, h)_y: T_y Y \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$, onde $(g, h) = (g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l)$, também é sobrejetiva; portanto, $g_1, \dots, g_k, h_1, \dots, h_l$ são funções independentes. \square

Lema 1.4.6. *[GP74, Exercício 1.5.5] Sejam $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação transversal a uma subvariedade Z de Y , $W = f^{-1}(Z)$ e $x \in W$. Então o espaço tangente $T_x W$ é a pré-imagem do espaço tangente $T_{f(x)}(Z)$, pela aplicação linear $df_x: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$, i.e. $T_x(f^{-1}(Z)) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)} Z)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.31, dado um ponto y qualquer em Z , existe uma vizinhança de y em Y tal que $Z \cap V = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1, \dots, g_l): V \rightarrow \mathbb{R}^l$ é a aplicação formada pelas l funções independentes. Pelo Teorema 1.4.2, $W = f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X e observe que

$$(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(Z \cap V) = W \cap \tilde{V},$$

onde $\tilde{V} = f^{-1}(V)$ é aberto pois f é suave e contém x tal que $f(x) = y$. Assim temos que $W \cap \tilde{V} = (g \circ f)^{-1}(0)$ e, portanto, W é localmente determinado por $g \circ f: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Agora, pela Proposição 1.3.33, temos $T_y Z = \ker dg_y$ e $T_x W = \ker d(g \circ f)_x$, onde $f(x) = y$. Basta provar que $\ker d(g \circ f)_x = (df_x)^{-1}(\ker dg_y)$. Essa igualdade segue das seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} v \in (df_x)^{-1}(\ker dg_y) &\Leftrightarrow df_x(v) \in \ker dg_y \\ &\Leftrightarrow d(g \circ f)(v) = dg_y(df_x(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \ker d(g \circ f)_x. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.7. [GP74, Exercício 1.5.7] *Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ aplicações suaves entre variedades. Suponha g transversal a uma subvariedade W contida em Z . Então $f \bar{\cap} g^{-1}(W)$ se, e somente se, $(g \circ f) \bar{\cap} W$.*

Demonstração. Fixe um ponto $x \in (g \circ f)^{-1}(W)$ qualquer. Sejam $y := f(x)$ e $z := g(y)$. Por definição, $g \bar{\cap} W$ significa que $Im(dg_y) + T_z W = T_z Z$.

$f \bar{\cap} g^{-1}(W) \Rightarrow (g \circ f) \bar{\cap} W$: Deve-se mostrar que $Im(dg_y \circ df_x) + T_z W = T_z Z$. Como os espaços $Im(dg_y \circ df_x)$ e $T_z W$ estão contidos em $T_z Z$, é suficiente provar que o espaço tangente $T_z Z$ está contido em $Im(dg_y \circ df_x) + T_z W$. Dado $w \in T_z Z$, da hipótese que $g \bar{\cap} W$, existem $u \in T_y Y$ e $v \in T_z W$ tais que $dg_y(u) + v = w$. Como f é transversal a $g^{-1}(W)$, pelo Lema 1.4.6,

$$T_y Y = Im(df_x) + T_y(g^{-1}(W)) = Im(df_x) + (dg_y)^{-1}(T_z W).$$

Portanto, existem $\tilde{u} \in T_x X$ e $\tilde{v} \in (dg_y)^{-1}(T_z W)$ tais que $df_x(\tilde{u}) + \tilde{v} = u$. Assim, tem-se

$$dg_y \circ df_x(\tilde{u}) + dg_y(\tilde{v}) + v = w,$$

onde $dg_y \circ df_x(\tilde{u}) \in Im(dg_y \circ df_x)$ e $dg_y(\tilde{v}) + v \in T_y W$ e, portanto, $w \in Im(dg_y \circ df_x) + T_z W$, como desejado.

$(g \circ f) \bar{\cap} W \Rightarrow f \bar{\cap} g^{-1}(W)$: A recíproca é análoga à primeira implicação. Deve-se mostrar que $Im(df_x) + (dg_y)^{-1}(T_z W) = T_y Y$. Novamente, fixe um vetor $\tilde{w} \in T_y Y$ e perceba que existem $u \in T_x X$ e $w \in T_z W$ tais que $(dg_y \circ df_x)(u) + w = dg_y(\tilde{w})$, garantido por $(g \circ f) \bar{\cap} W$. Além disso, tem-se $dg_y(df_x(u) - \tilde{w}) \in T_z W$, ou seja, $df_x(u) - \tilde{w} \in (dg_y)^{-1}(T_z W)$ e o resultado segue. □

As ideias de transversalidade e os conceitos que foram abordados nesta seção serão novamente abordados e estendidos na Seção 2.2.

1.5 Homotopia e Estabilidade

Até agora foram estudadas diversas propriedades das aplicações suaves. Uma pergunta que surge nesse contexto é, se a aplicação sofrer alguma *perturbação*, quais destas propriedades permanecerão. Antes de responder essa pergunta formalizaremos essa ideia de *perturbação*. A definição a seguir fará esse trabalho.

Definição 1.5.1. Sejam X, Y variedades e $I = [0, 1]$. Diz-se que duas aplicações suaves $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ são homotópicas quando existe uma aplicação suave

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação F chama-se homotopia entre f_0 e f_1 . Denota-se a homotopia entre f_0 e f_1 por $f_0 \sim f_1$ ou por $F: f_0 \simeq f_1$.

Dada a homotopia $F: f_0 \simeq f_1$, para cada $t \in I$, considere a aplicação suave $F_t: X \rightarrow Y$, dada por $F_t(x) = F(x, t)$. Dessa forma, para cada t define-se uma aplicação suave, isso equivale a definir uma família de aplicações suaves $(F_t)_{t \in I}$ de X em Y . Isto significa que $(x, t) \rightarrow F_t(x)$ é uma aplicação suave, mais ainda, $F_0 = f_0$ e $F_1 = f_1$.

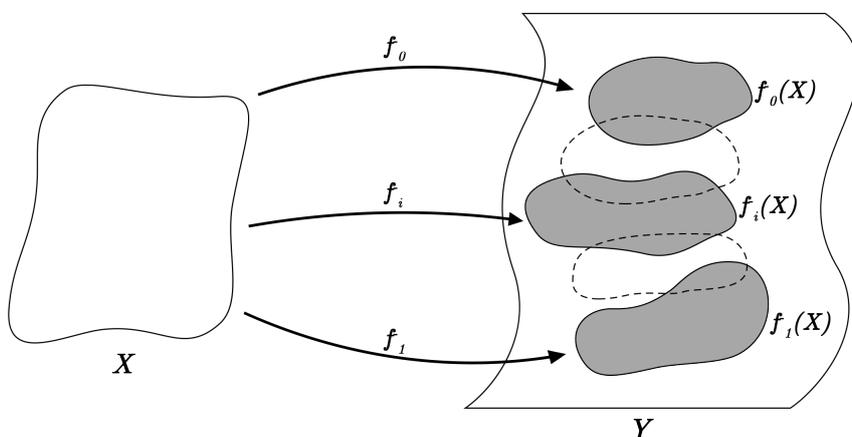


Figura 1.7: Para cada $t \in I$ define-se uma aplicação suave f_t

Exemplo 1.5.2. Se n é ímpar, então a aplicação antípoda $\alpha: S^n \rightarrow S^n$, dada por $\alpha(x) = -x$, é homotópica à identidade $id: S^n \rightarrow S^n$, onde S^n é a esfera unitária em \mathbb{R}^{n+1} . De fato, seja $n = 2k - 1$, então $S^n \subset \mathbb{R}^{2k}$. Assim pode-se considerar cada ponto

$$z = (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$$

de S^n como uma lista $z = (z_1, \dots, z_k)$ de números complexos $z_j = x_j + iy_j$ tais que

$$|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1.$$

Identificamos cada elemento em S^1 com um vetor $u \in \mathbb{C}$ unitário. A cada número complexo $u \in S^1$ e a cada vetor $z = (z_1, \dots, z_k) \in S^n$, o vetor $u \cdot z \in S^n$ é dado por $u \cdot z = (u \cdot z_1, \dots, u \cdot z_k)$. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} H: S^n \times I &\rightarrow S^n \\ (z, t) &\mapsto e^{t\pi i} \cdot z \end{aligned}$$

é uma homotopia entre a aplicação antípoda $\alpha(z) = -z$ e a aplicação identidade de S^n , onde $e^{t\pi i}$ é a exponencial complexa $\cos t\pi + i\sin t\pi$.

A título de informação, a aplicação antípoda de S^n não é homotópica à identidade de S^n , quando n é par. (Veja, por exemplo, [Lim12a, p.7]).

Proposição 1.5.3. *Sejam X, Y variedades. A relação de homotopia $f_0 \sim f_1$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração.

A relação é reflexiva: de fato, para qualquer aplicação suave $f: X \rightarrow Y$, a aplicação $F: X \times I \rightarrow Y$, dada por $F(x, t) = f(x)$, para todo $t \in I$, é uma homotopia entre f e f .

A relação é simétrica: de fato, seja $F: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1 . Definindo a aplicação $G: X \times I \rightarrow Y$, dada por $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, obtemos que G é uma homotopia entre f_1 e f_0 .

A relação é transitiva: de fato, se $F: f_0 \simeq f_1$ e $G: f_1 \simeq f_2$ são homotopias, defina $H: X \times I \rightarrow Y$, dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Observe que H é suave exceto, possivelmente, quando $t = 1/2$, entretanto, podemos “consertá-la” da seguinte forma: Fixados $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos, com $0 < \delta < \epsilon$, considere uma aplicação função $\lambda: I \rightarrow I$ tal que $\lambda(t) = 0$ se $1/2 - \delta \leq t \leq 1/2 + \delta$, $\lambda(t) = 1$ se $t \in [0, 1/2 - \epsilon] \cup (1/2 + \epsilon, 1]$ e $0 < \lambda(t) < 1$ se $t \in (1/2 - \epsilon, 1/2 - \delta) \cup (1/2 + \delta, 1/2 + \epsilon)$. Observe que uma construção semelhante à apresentada na Proposição 1.1.2 garante a existência de uma função λ nestas condições. Definindo $\tilde{H}: X \times I \rightarrow Y$ por $\tilde{H}(x, t) = H(x, t) \cdot \lambda(t)$, temos uma homotopia entre f_0 e f_2 . Dessa forma, a relação é transitiva.

Portanto, a homotopia é uma relação de equivalência, como desejado. \square

As propriedades fisicamente significativas de uma aplicação são aquelas que permanecem válidas mesmo quando a aplicação sofre pequenas deformações. Dessa forma, consideremos a seguinte definição.

Definição 1.5.4. *Diz-se que uma certa propriedade de uma aplicação $f_0: X \rightarrow Y$ é estável quando existe $\epsilon > 0$ e, para cada $t < \epsilon$, existe uma aplicação $f_t: X \rightarrow Y$ homotópica a f_0 tal que, f_t possui a mesma propriedade do que f_0 . Quando uma coleção de aplicações possui uma mesma propriedade estável, diz-se que esta coleção forma uma classe de estabilidade.*

O teorema, a seguir, provará a estabilidade de algumas classes de aplicações suaves, em domínios compactos.

Teorema 1.5.5. *[GP74, Exercício 1.6.8][Teorema da Estabilidade] As seguintes classes de aplicações suaves de uma variedade compacta X numa variedade Y são classes de estabilidade:*

- a) *Difeomorfismos locais.*
- b) *Imersões.*
- c) *Submersões.*
- d) *Aplicações transversais a qualquer subvariedade fixada $Z \subset Y$.*

e) *Mergulhos.*

f) *Difeomorfismos.*

Demonstração. A estabilidade das classes a) a d) é provada de forma muito semelhante.

Difeomorfismos locais são apenas imersões no caso especial quando $\dim X = \dim Y$, então começamos com b). Se f_t é uma homotopia da imersão f_0 , devemos produzir um $\epsilon > 0$ tal que $d(f_t)_x$ é injetiva para todos os pontos (x, t) em $X \times [0, \epsilon) \subset X \times I$. Como X é compacto, qualquer vizinhança de $X \times \{0\}$ em $X \times I$ contém $X \times [0, \epsilon)$, se ϵ for suficientemente pequeno. Com isso, para garantir que uma imersão é uma aplicação estável, é necessário apenas provar que cada ponto $(x_0, 0) \in X \times \{0\}$ possui uma vizinhança U , em $X \times I$, tal que $d(f_t)_x$ seja injetiva para todo $(x, t) \in U$. Como esta é uma afirmação local, necessitamos apenas provar isto quando X é um aberto de \mathbb{R}^k e Y é um aberto de \mathbb{R}^l . A injetividade de $d(f_0)_{x_0}$ implica que a matriz jacobiana,

$$\left[\frac{\partial(f_0)_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

de ordem $l \times k$ contém uma submatriz de ordem $k \times k$ com determinante não nulo. Entretanto, cada derivada parcial

$$\frac{\partial(f_t)_i}{\partial x_j}(x_0)$$

definida como uma função em $X \times I$ é contínua. Como a função determinante também é contínua, a submatriz de ordem $k \times k$ deve ser não singular para todos os pontos (x, t) em uma vizinhança de $(x_0, 0)$ como desejado.

A prova de c) é análoga à prova de b).

Para provar d), considere f transversal a Z . Então, para $x \in f^{-1}(Z)$, $\text{Im}df_x + T_y Z = T_y Y$ e isso significa que $g \circ f$ é submersão no ponto $x \in f^{-1}(Z)$, onde $g = (g_1, \dots, g_l)$ é dada pelas l funções independentes que determinam Z numa vizinhança de $y = f(x)$, contida em Z . Dessa forma, temos que a condição de transversalidade se resume, localmente, à existência de uma submersão. Portanto, a prova de d) também é similar às anteriores.

Para provar e), considerando o que foi visto em b), necessitamos somente mostrar que, se $f_0: X \rightarrow Y$ é imersão injetiva, então f_t também é injetiva para t suficientemente pequeno. Defina uma aplicação suave $G: X \times I \rightarrow Y \times I$ por $G(x, t) = (f_t(x), t)$. Suponha, com vista a uma contradição, que e) seja falsa, então existe uma sequência (t_i) que converge a 0 e, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem pontos distintos $x_i, y_i \in X$ tais que $G(x_i, t_i) = G(y_i, t_i)$. Como X é compacto, pode-se considerar, se necessário, subsequências e obter $\lim x_i = x_0$ e $\lim y_i = y_0$. Como

$$G(x_0, 0) = \lim G(x_i, t_i) = \lim G(y_i, t_i) = G(y_0, 0)$$

e $G(x_0, 0) = f_0(x_0)$ e $G(y_0, 0) = f_0(y_0)$, temos x_0 igual a y_0 , pois f_0 é injetiva.

Agora, podemos trabalhar localmente no espaço euclidiano. Observe que a matriz de $dG_{(x_0, 0)}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} (df_0)_{x_0} & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $(df_0)_x$ é uma submatriz não nula de posto k , pois $d(f_0)_{x_0}$ é injetiva, as coordenadas do vetor coluna $a = (a_1, \dots, a_l)$ não são de interesse e 0 é o vetor nulo de \mathbb{R}^{k-1} . Portanto, a matriz de $dG_{(x_0,0)}$ tem $k+1$ linhas independentes, assim $dG_{(x_0,0)}$ deve ser uma aplicação linear injetiva. Consequentemente, G é uma imersão em torno de $(x_0, 0)$, logo, G é injetiva em alguma vizinhança de $(x_0, 0)$. No entanto, para i suficientemente grande, (x_i, t_i) e (y_i, t_i) pertencem a esta vizinhança e obtemos uma contradição. Portanto, mergulhos são aplicações estáveis.

Por fim, para provar f) basta observar que um difeomorfismo $f_0: X \rightarrow Y$ é, na verdade, uma imersão e uma submersão simultaneamente. Sendo assim, basta seguir os mesmos passos usados em b) e achar um $\epsilon > 0$ tal que $(df_t)_x$ seja bijetiva em todos os pontos (x, t) de $X \times [0, \epsilon) \subset X \times I$ mas agora com o determinante da matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial(f_0)_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

não nulo, não sendo necessário verificar o determinante de alguma submatriz. Dessa forma, novamente usando um argumento análogo ao usado em b), temos que cada derivada parcial

$$\frac{\partial(f_t)_i}{\partial x_j}(x_0)$$

é não nula em alguma vizinhança de $(x_0, 0)$, devido à continuidade da função determinante. Assim, a matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial(f_t)_i}{\partial x_j}(x_0) \right]$$

tem determinante não nulo. Portanto, a aplicação derivada $d(f_t)_{x_0}$ é um isomorfismo, logo f_t é um difeomorfismo local. Como f_0 é difeomorfismo, temos que este também é um mergulho e, pelo item anterior, f_t é um mergulho. Dessa forma, temos que f_t é um difeomorfismo local injetivo, portanto um difeomorfismo global, como desejado. \square

1.6 O Teorema de Sard

A pré-imagem de um valor regular de uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é uma subvariedade de X . Esta ideia pode ser generalizada e, com isso, criou-se o conceito de transversalidade. No entanto, a condição de regularidade dos valores de f é uma condição forte e, por vezes, dificultosa de aplicar. Felizmente, é possível observar e tirar conclusões a respeito de f e das variedades X e Y de outro ponto de vista, olhando o conjunto de valores críticos de f .

Definição 1.6.1. *Chama-se bloco m -dimensional ao produto cartesiano*

$$A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$$

de m intervalos compactos $[a_i, b_i]$ chamados de arestas do bloco A .

Definição 1.6.2. Chama-se volume m -dimensional do bloco A ao produto

$$\text{Vol}(A) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

onde $b_i - a_i > 0$ é o comprimento da i -ésima aresta do bloco A .

Definição 1.6.3. Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula quando, dado $\epsilon > 0$ existe uma coleção enumerável de blocos B_1, B_2, \dots tal que A está contido na união destes blocos e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(B_i) < \epsilon.$$

A definição acima, embora seja eficiente, não trata exatamente de variedades. Contudo, podemos reformulá-la da seguinte forma:

Definição 1.6.4. Seja Y uma variedade de dimensão k . Diz-se que um subconjunto C de Y tem medida nula se, para toda parametrização local φ de Y , a pré-imagem $\varphi^{-1}(C)$ tem medida nula em \mathbb{R}^k .

Definição 1.6.5. Dado um conjunto X qualquer, diz-se que uma condição $P(x)$ é satisfeita para quase todo ponto x em X quando o conjunto $Y \subset X$ dos pontos x onde a condição $P(x)$ não é satisfeita tem medida nula.

Definição 1.6.6. Diz-se que um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^k$ é J -mensurável (mensurável segundo Jordan) quando, tomando-se um bloco k -dimensional $A \subset \mathbb{R}^k$ que contenha X , a função característica $\chi_X: A \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^k \setminus X \end{cases},$$

é integrável.

Teorema 1.6.7 (Teorema de Fubini). Seja $c \in \mathbb{R}^n$, qualquer, e V_c uma vizinhança de c , contida em \mathbb{R}^n . Se A é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n tal que $A \cap V_c$ tem medida nula para em V_c , então A tem medida nula em \mathbb{R}^n .

O leitor pode consultar a prova deste teorema em [GP74, p.202].

Teorema 1.6.8 (Teorema de Sard). Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave entre variedades, então quase todo ponto $y \in Y$ é valor regular de f . Equivalentemente, o conjunto de valores críticos de uma aplicação suave, entre variedades, $f: X \rightarrow Y$ é um conjunto de medida nula.

Dessa forma, é garantido que, para quase todo ponto de Y , sua pré-imagem, por f é uma subvariedade de X .

A prova do Teorema de Sard requer, do leitor, conhecimentos básicos da Análise Real em várias variáveis e, até foge um pouco do objetivo deste trabalho. Entretanto, devido a sua importância, este teorema será provado agora. No próximo capítulo, quando se tratar de variedades com bordo, uma nova demonstração, bem mais simples, será apresentada.

Demonstração. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Seja $C \subset X$ o conjunto de pontos críticos de f . Deve-se provar que o conjunto $f(C) \subset Y$, isto é, o conjunto de valores críticos de f tem medida nula. Como X e Y são variedades diferenciáveis, então X é localmente difeomorfo a algum subconjunto aberto U de \mathbb{R}^k e Y é localmente difeomorfo a algum subconjunto aberto de \mathbb{R}^l , onde k e l são as dimensões de X e Y , respectivamente. Assim, é suficiente provar que, se $f: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ é suave e C é o conjunto dos pontos críticos de f , então $f(C)$ terá medida nula em \mathbb{R}^l .

O conjunto C dos pontos críticos de f é o conjunto de todos $x \in X$ tais que posto $df_x < k$. A prova será dada por indução em k . Por definição, \mathbb{R}^0 consiste em um único ponto, por isso, o teorema é válido para $k = 0$.

Seja $C_1 \subset C$ o conjunto dos $x \in X$ tais que a primeira derivada df_x é nula. De modo geral, para cada $i \in \mathbb{N}$, considere C_i o conjunto dos $x \in X$ tais que todas as derivadas parciais de f de ordem $\leq i$ sejam nulas em x . Assim, tem-se a sequência decrescente de conjuntos fechados

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$$

A demonstração do teorema se dará ao provar as três afirmações abaixo:

- (i) O conjunto $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula.
- (ii) O conjunto $f(C_i \setminus C_{i+1})$ tem medida nula, para $i \geq 1$.
- (iii) O conjunto $f(C_k)$ tem medida nula, para k suficientemente grande.

Demonstração de (i): Pode-se assumir $i \geq 2$, pois $C = C_1$ quando $i = 1$. Para cada $\tilde{x} \in C \setminus C_1$, vamos encontrar uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^k$, de \tilde{x} , tal que $f(V \cap C)$ tem medida nula. Como $C \setminus C_1$ possui uma cobertura enumerável por vizinhanças V , isto provará que $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula. Como $\tilde{x} \notin C_1$, existe alguma derivada parcial, digamos $\partial f_1 / \partial x_1$, não nula em \tilde{x} . Considere a aplicação $h: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_k).$$

Como $dh_{\tilde{x}}$ é não singular, h aplica alguma vizinhança V de \tilde{x} difeomorficamente sobre um conjunto aberto V' , em \mathbb{R}^k . A composição $g = f \circ h^{-1}$ aplica V' injetivamente em \mathbb{R}^l . Observe que o conjunto C' de pontos críticos de g é exatamente $h(V \cap C)$; conseqüentemente, o conjunto $g(C')$ de valores críticos de g é, na verdade, o conjunto $f(V \cap C)$. Para cada $(t, x_2, \dots, x_k) \in V'$, observe que $g(t, x_2, \dots, x_k)$ pertence ao hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$. Assim, g leva hiperplanos em hiperplanos. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$g^t: (\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V' \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{l-1}$$

a restrição de g a $(\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V'$. Observe que um ponto de $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ é ponto crítico de g^t se, e somente se, é ponto crítico de g . A matriz da derivada de g tem a forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \right) \end{bmatrix}.$$

De acordo com a hipótese de indução, o conjunto de valores críticos de g^t tem medida nula em $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$. Assim, o conjunto de valores críticos de g intersecta cada hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ num conjunto de medida nula. Este conjunto $g(C')$ é J -mensurável, uma vez que pode ser expresso como uma união enumerável de subconjuntos compactos e a sua função característica é integrável pelo Teorema de Fubini. Portanto o conjunto

$$g(C') = f(V \cap C)$$

tem medida nula.

Demonstração de (ii): Para cada $\tilde{x} \in C_i \setminus C_{i+1}$ existe alguma $(i+1)$ derivada $\partial^{i+1} f_r / \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{i+1}}$ não nula. Assim existe uma função

$$w(x) = \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{i+1}}}$$

é nula em C_i , mas $\partial w / \partial x_{s_1}$ não se anula. Suponha, sem perda de generalidade, que $s_1 = 1$. Então a aplicação $h: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_k)$$

leva alguma vizinhança V de \tilde{x} difeomorficamente em algum aberto V' de \mathbb{R}^k . Observe que h aplica $C_i \cap V$ no hiperplano $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$. Considere novamente a aplicação

$$g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^l$$

e seja

$$\tilde{g}: (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^l$$

a restrição de g a $(\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V'$. Por indução, o conjunto de valores críticos de \tilde{g} tem medida nula em \mathbb{R}^l . No entanto, cada ponto de $h(C_i \cap V)$ é, certamente, ponto crítico de \tilde{g} , pois todas as derivadas de ordem $\leq i$ são nulas. Assim,

$$\tilde{g} \circ h(C_i \cap V) = f(C_i \cap V)$$

tem medida nula. Como $C_i \setminus C_{i-1}$ possui uma cobertura arbitrária enumerável de conjuntos V , segue que $f(C_i \setminus C_{i-1})$ tem medida nula.

Demonstração de (iii): Seja $I^k \subset \mathbb{R}^k$ um cubo de aresta δ . Se i é suficientemente grande, mais precisamente, se $i > k/(l-1)$ então, $f(C_i \cap I^k)$ tem medida nula. Como C_i pode ser coberto por uma união enumerável de cubos, isto provará que $f(C_i)$ tem medida nula. Pela Fórmula de Taylor (v., por exemplo, [Lim16b, p.261]), a compacidade de I^k e a definição de C_i garantem que

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h)$$

onde

- a) $|R(x, h)| \leq c|h|^{i+1}$, para $x \in C_i \cap I^k$ e $x+h \in I^k$, onde c é uma constante que depende somente de f e de I^k . Agora, subdividindo I^k em r^k cubos de aresta δ/r . Seja I_1 um cubo da subdivisão que contem um ponto x de C_i , então qualquer ponto de I_1 pode ser escrito como $x+h$, com

b) $|h| \leq \sqrt{k}(\delta/r)$. De (a), temos que $f(I_1)$ está contido num cubo de aresta a/r^{k+1} centrado em $f(x)$, onde $a = 2c(\sqrt{k}\delta)^{i+1}$ é constante. Consequentemente, $f(C \cap I^k)$ está contido na união de, no máximo, r^k cubos, cujo volume total

$$V \leq r^k(a/r^{i+1})^l = a^l r^{k-(i-1)l}.$$

Se $i+1 > k/l$, então V tende a 0 quando $r \rightarrow \infty$. Assim, $f(C_i \cap I^k)$ tem medida nula.

Assim, completa-se a prova do Teorema de Sard. □

Corolário 1.6.9. *O conjunto de valores regulares de qualquer aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é denso em Y .*

Demonstração. De fato, como o conjunto dos valores críticos $f(C)$ tem medida nula em Y , então o conjunto $Y \setminus f(C)$ de valores regulares, é denso em Y , onde C é o conjunto de pontos críticos de f , em X . □

Agora, vamos introduzir novos nomes para conceitos já conhecidos.

Definição 1.6.10. *Sejam X e Y variedades e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Diz-se que um ponto $x \in X$ é ponto regular de f se a derivada $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ é sobrejetiva. Diz-se que f é regular em x quando f é uma submersão em x . Quando df_x não é sobrejetiva, diz-se que x é um ponto crítico de f .*

Observação 1.6.11. *Para evitar confusões, observe que pontos regulares e pontos críticos pertencem ao conjunto X enquanto que valores regulares e valores críticos pertencem ao conjunto Y . Observe também que y é valor regular de f se todo ponto $x \in f^{-1}(y)$ é ponto regular e y é valor crítico de f se pelo menos um ponto $x \in f^{-1}(y)$ é ponto crítico.*

É importante ressaltar que o Teorema de Sard garante que o conjunto dos valores críticos de $f: X \rightarrow Y$ tem medida nula em Y , mas não garante que o conjunto dos pontos críticos de f , em X tem medida nula. Como contra-exemplo para ilustrar, considere uma aplicação constante qualquer $f: X \rightarrow Y$, onde $\dim X \geq 1$. Neste caso, o conjunto de pontos críticos de f é todo o conjunto X , mas X não tem medida nula em X .

1.7 Mergulhos em Espaços Euclidianos

Na Seção 1.1, definimos uma variedade X de dimensão k como sendo um conjunto localmente difeomorfo a um subconjunto de algum espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Entretanto, a dimensão de X pode ser muito menor do que n , tornando assim, \mathbb{R}^n um espaço “muito grande”, comparado à dimensão de X . Um fato que observamos é que se X é difeomorfo a algum subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, então X também é difeomorfo a algum subconjunto de $W \subset \mathbb{R}^p$, onde $p > n$, pois, neste caso, V é difeomorfo a W , mediante a imersão canônica de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p . Em verdade, o que temos é \mathbb{R}^n mergulhado em \mathbb{R}^p e, por isso, também temos uma cópia de X em \mathbb{R}^p . A pergunta norteadora (devido a Whitney) desta seção é: Para um certo $k \in \mathbb{N}$ arbitrariamente fixado, qual deve ser a ordem n para que

toda variedade de dimensão k esteja contida em \mathbb{R}^n ? Uma resposta para essa pergunta é $n = 2k + 1$, dada pelo Teorema de Whitney, provado no final desta seção.

Definição 1.7.1. *Seja X uma variedade contida em \mathbb{R}^n . Chama-se fibrado tangente de X ao subconjunto TX de $X \times \mathbb{R}^n$ dado por*

$$TX = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n : v \in T_x X\}.$$

Os espaços tangentes a X em vários pontos são subespaços vetoriais que se sobrepõem, uns sobre os outros. O fibrado tangente é uma ferramenta usada para separá-los.

Observação 1.7.2. *O fibrado tangente TX contém uma cópia X_0 da variedade X formada pelos pontos da forma $(x, 0)$ com $x \in X$. Na direção perpendicular a X_0 , o fibrado tangente TX contém uma cópia de cada espaço tangente $T_x X$, $x \in X$, mergulhado como conjunto $\{(x, v) : v \in T_x X\}$.*

Proposição 1.7.3. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. A aplicação $df: TX \rightarrow TY$ induzida nos fibrados tangentes, dada por $df(z, v) = (f(x), df_x(v))$, é uma aplicação suave.*

Demonstração. Primeiramente, observe que se $X \subset \mathbb{R}^n$, então $TX \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Assim, se $Y \subset \mathbb{R}^m$, então df aplica um subconjunto de \mathbb{R}^{2n} em \mathbb{R}^{2m} . Agora, para verificar que df é, de fato, uma aplicação suave, observe que se a aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é suave, então para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x , em \mathbb{R}^n e uma aplicação suave $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ tal que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. Dessa forma, temos que $dF: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ dada por $dF(x, v) = (F(x), dF_x(v))$ é uma extensão local de df . Agora, o conjunto TU é, na verdade, o conjunto $U \times \mathbb{R}^n$ que é um aberto de \mathbb{R}^{2n} . Assim temos que $df: X \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ pode ser estendida a uma aplicação suave, num aberto de \mathbb{R}^{2n} . Portanto df é suave. \square

Proposição 1.7.4. *Dadas aplicações suaves $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$, as aplicações $dg \circ df: TX \rightarrow TZ$ e $d(g \circ f): TX \rightarrow TZ$ são iguais. Além disso, se $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo, então $df: TX \rightarrow TY$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Com efeito, $d(g \circ f)(x, v) = ((g \circ f)(x), d(g \circ f)_x(v))$ e, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, v) &= ((g \circ f)(x), d(g \circ df)_x(v)) \\ &= (g(f(x)), dg_{f(x)} \circ df_x(v)) \\ &= dg(f(x), df_x(v)) \\ &= (dg \circ df)(x, v). \end{aligned}$$

Agora, se $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo, pelo que acabamos de provar $df^{-1} \circ df = Id_{TX}$ e $df \circ df^{-1} = Id_{TY}$. Portanto variedades difeomorfas têm fibrados tangentes difeomorfos, como queríamos. \square

Proposição 1.7.5. *O fibrado tangente TX de uma variedade X é também uma variedade, de dimensão $\dim TX = 2 \dim X$.*

Demonstração. Dado um conjunto qualquer $W \subset X$, aberto em X , temos pela Proposição 1.1.13 que W é uma subvariedade de X . Suponha agora que W é a imagem de uma parametrização local $\varphi: U \rightarrow W$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^k e $k = \dim X$. Então $d\varphi: TU \rightarrow TW$ é um difeomorfismo. Entretanto, $TU = U \times \mathbb{R}^k$ é um aberto de \mathbb{R}^{2k} e $d\varphi$ serve de parametrização do conjunto TW em TX . Dessa forma, temos que $\dim TX = \dim(U \times \mathbb{R}^k) = 2 \dim X$, como desejado. \square

Teorema 1.7.6 (Primeira Versão do Teorema de Whitney). *Toda variedade de dimensão k admite uma imersão injetiva em \mathbb{R}^{2k+1} .*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k e $n > 2k + 1$. O objetivo é proceder indutivamente e construir uma projeção linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ que possa restringir-se a uma imersão injetiva de X e provar que se $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma imersão injetiva com $m > 2k + 1$, então existe um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^m$ tal que a composição de f com a projeção de \mathbb{R}^m sobre o complemento ortogonal de a , $H = \{b \in \mathbb{R}^m: b \perp a\}$, ainda é uma imersão injetiva. Ora, o conjunto H é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m de dimensão $m - 1$, portanto isomorfo ao espaço euclidiano \mathbb{R}^{m-1} . Então feitas as construções acima, obteremos a imersão injetiva desejada.

Consideremos a aplicação $h: X \times X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $h(x, y, t) = t[f(x) - f(y)]$, e também a aplicação $g: TX \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $g(x, v) = df_x(v)$. Se $m > 2k + 1$, o Teorema de Sard garante que existe um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não pertence a nenhuma das imagens e observe que $a \neq 0$, pois 0 pertence a ambas as imagens.

Agora, considere $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow H$ a projeção linear de \mathbb{R}^m sobre o complemento ortogonal de a . A composição $\pi \circ f$ é injetiva. De fato, dados $x, y \in X$, suponha, com vista a uma contradição, que $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$, mas que $x \neq y$. Pela definição de π , temos que $f(x) - f(y) = ta$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Como $x \neq y$, então $t \neq 0$, pois f é injetiva. Entretanto, disto resulta que $h(x, y, 1/t) = a$, o que contradiz o fato de que o ponto a escolhido não pertence à imagem de h .

De modo análogo, temos que $\pi \circ f: X \rightarrow Y$ é uma imersão. Com efeito, considere $v \neq 0$ um vetor pertencente a $T_x X$ tal que $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$, onde $x \in X$. Pela linearidade de π e pela regra da cadeia, temos que $d(\pi \circ f)_x = \pi \circ df_x$. Assim, $\pi \circ df_x(v) = 0$, então $df_x(v) = ta$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Como f é imersão, $df_x(v) = 0$ se e somente se $v = 0$, mas tomamos $v \neq 0$, disto segue que $ta \neq 0$, donde temos que $t \neq 0$. Assim, temos $g(x, v/t) = a$, novamente contradizendo a escolha de a .

Portanto, temos que f é a imersão injetiva desejada. \square

Como já foi visto na Seção 1.3.1, para variedades compactas, uma imersão injetiva nada mais é do que um mergulho. Para o caso geral, o que se faz é modificar a imersão de modo que ela se torne um problema topológico e não um problema diferencial. A ideia aqui é apropriar-se do conceito de mergulho para variedades compactas e estendê-lo a variedades arbitrárias.

Definição 1.7.7. *Diz-se que uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}$ de uma variedade X é localmente finita se cada $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos V_α .*

Lema 1.7.8. *Toda variedade X se escreve como uma reunião enumerável*

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

de compactos K_j tais que $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$.

Demonstração. Dado um ponto qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança $V_x = \varphi(U_0)$ de x , onde $\overline{V_x}$ é compacto e U_0 é um aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem. Pelo Teorema de Lindelöf (veja, por exemplo, [Lim16b, p.48]), podemos extrair da cobertura

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

uma subcobertura enumerável $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. Tomando $L_j = \overline{V_j}$, cada L_j é compacto e ainda vale $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$.

Para definir os K_j , usaremos a indução em j . Tomando $K_1 = L_1$ e supondo já tenhamos obtido os conjuntos K_1, \dots, K_j , de modo que $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$, para $i = 1, \dots, j-1$, e K_j contenha a união $L_1 \cup \dots \cup L_j$, recobrimos o compacto $K_j \cup K_{j+1}$ com um número finito de conjuntos V_i e tomamos K_{j+1} como sendo a união dos L_i correspondentes. Dessa forma, segue o resultado. \square

Teorema 1.7.9 (Partição da Unidade). *Seja X um subconjunto arbitrário de \mathbb{R}^n . Para qualquer cobertura por abertos de X , formada pelos conjuntos abertos U_α , existe uma sequência de funções suaves $\{\theta_i\}$, definidas em X , chamada de partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, com as seguintes propriedades:*

- a) $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$, para todo $x \in X$ e para todo $i \in \mathbb{N}$.
- b) Cada $x \in X$ possui uma vizinhança na qual apenas uma quantidade finita de funções θ_i não é identicamente nula.
- c) Cada função θ_i é identicamente nula, exceto em algum conjunto fechado contido em algum U_α .
- d) Para cada $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$. (Observe que, por b), essa soma é finita.)

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X . Cada U_α pode ser escrito como $X \cap W_\alpha$, onde W_α é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Seja $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$, pelo Lema 1.7.8 existe uma coleção enumerável de conjuntos compactos $\{K_j\}$ tais que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = W,$$

onde $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$. Por exemplo, tome

$$K_j = \{z \in W : |z| < j \text{ e distância de } z \text{ a } \mathbb{R}^n \setminus W \geq 1/j\}.$$

Note que a coleção de todas as bolas abertas de \mathbb{R}^n cujos fechos estão contidos em pelo menos um W_α é uma cobertura aberta de W . Selecione um número finito dessas bolas que cobre K_2 . Pela Proposição 1.1.2, para cada bola selecionada,

podemos definir funções suaves não negativas, $\eta_1, \dots, \eta_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, em \mathbb{R}^n que são iguais a 1 na bola selecionada e 0 fora de algum conjunto fechado contido em W_α .

Continuando indutivamente, para cada $j \geq 3$, o compacto $K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$ está contido no interior do conjunto $W \setminus K_{j-2}$. A coleção de todas as bolas suficientemente pequenas que têm o seu fecho contido em ambos os conjuntos, $W \setminus K_{j-2}$ e W_α , forma uma cobertura de $K_j \setminus \text{int}(K_{j-1})$. Extraia uma subcobertura finita e então adicionando à nossa sequência $\{\eta_i\}$ uma função para cada bola; essa função deve ser igual a 1 na bola e 0 fora de um conjunto fechado contido em $W \setminus K_{j-2}$ e em algum W_α .

Por construção, para cada j , somente uma quantidade finita de funções η_i é não nula em K_j . Assim, pelo fato de que todo ponto de W pertence ao interior de algum K_j , a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$$

é finita numa vizinhança de cada ponto de W . Além disso, pelo menos um termo é diferente de zero em todo ponto de W . Assim, a função

$$\frac{\eta_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j}$$

está bem definida e é suave. Por fim, tomando θ_i a restrição desta função ao conjunto X , tem-se o resultado. \square

Corolário 1.7.10. *Toda variedade X possui uma função própria $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura por conjuntos abertos de X que possuem fecho compacto. Seja θ_i a partição da unidade subordinada à família $\{U_\alpha\}$. Então

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i$$

é uma função bem definida e suave. Se $\rho(x) \leq j$, então pelo menos uma das primeiras j funções $\theta_1, \dots, \theta_j$ são não nulas em x . Sendo assim, $\rho^{-1}([-j, j])$ está contido em

$$\bigcup_{i=1}^j \{x: \theta_i(x) \neq 0\},$$

um conjunto com fecho compacto. No entanto, todo conjunto compacto, em \mathbb{R} , está contido em algum intervalo da forma $[-j, j]$. Assim segue o resultado. \square

Voltando agora a discutir sobre o Teorema da Aplicação Inversa. Anteriormente, vimos na Seção 1.3 que este teorema estava condicionado a difeomorfismos locais, em torno de alguma vizinhança de algum ponto do domínio e da imagem, respetivamente. Logo em seguida, na Subseção 1.3.1, ficou provado que este difeomorfismo estende-se à vizinhança de uma variedade compacta Z de X e a uma vizinhança de sua imagem $f(Z)$ em Y . Agora, uma reformulação dessa generalização será apresentada no Teorema 1.7.12, porém retirando a hipótese de compacidade de Z . Primeiro, enunciamos o seguinte lema.

Lema 1.7.11. *[GP74, Exercício 1.8.13] Toda cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade X admite um refinamento localmente finito $\{V_\alpha\}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.7.8, temos que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, onde cada K_i é compacto e $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Todo ponto x do compacto K_2 pertence a algum aberto U_x da cobertura $\{U_\alpha\}$ e também pertence ao conjunto $\text{int}(K_3)$. Sendo assim, podemos arrumar uma vizinhança $(W_2)_x$ de x contida em $\text{int}(K_3)$ e em algum aberto de $\{U_\alpha\}$. Assim, temos

$$K_2 \subset \bigcup_{x \in K_2} (W_2)_x,$$

com $\{(W_2)_x\}$ uma cobertura de K_2 e dela extraímos uma subcobertura finita $\{(W_2)_j\}$.

Procedendo de modo análogo, temos que para cada x do compacto $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$ podemos arrumar uma vizinhança $(W_3)_x$ contida em $\text{int}(K_4)$ e também em algum aberto da cobertura $\{U_\alpha\}$ e é disjunto de K_1 , pois $K_1 \subset \text{int}(K_2)$. Assim, como $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$ é compacto e

$$K_3 \setminus \text{int}(K_2) \subset \bigcup_{x \in K_3 \setminus \text{int}(K_2)} (W_3)_x,$$

extraímos uma subcobertura finita $\{(W_3)_j\}$ da cobertura $\{(W_3)_x\}$ de $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$.

Procedendo dessa forma para cada $i \geq 3$ obtemos, para cada compacto $K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$, uma cobertura $\{(W_i)_x\}$, da qual podemos extrair uma subcobertura finita, $\{(W_i)_j\}$, onde cada um desses abertos está contido em $\text{int}(K_{i+1})$ e em algum conjunto aberto de $\{U_\alpha\}$ e é disjunto de K_{i-2} . Dessa forma, temos que

$$X \subset \bigcup_{i,j} (W_i)_j.$$

Para cada $x \in X$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_l$ e $x \notin K_{l-1}$. Assim, x pertence à união finita $\bigcup_j (W_l)_j$ e x não pertence a mais nenhum aberto $(W_i)_j$. Portanto a cobertura $\{(W_i)_j\}$ é uma cobertura localmente finita de X , como desejado. \square

Teorema 1.7.12. [GP74, Exercício 1.8.14; Teorema da Aplicação Inversa Revisitado]

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades e Z uma subvariedade de X . Suponha que a derivada $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$ seja um isomorfismo para todo $x \in Z$. Se f aplica Z em $f(Z)$ difeomorficamente, então f aplica uma vizinhança de Z , em X , numa vizinhança de $f(Z)$, em Y .

Demonstração. Por hipótese, para todo x em Z , a derivada $df_x: T_x X \rightarrow T_x Y$, onde $y = f(x)$, é um isomorfismo. Assim, temos pelo clássico Teorema da Aplicação Inversa que existem vizinhanças U_x e V_y de x e y , respetivamente, tais que $f|_{U_x}: U_x \rightarrow V_y$ é um difeomorfismo. Observe que a coleção $\{V_y\}$ das vizinhanças de cada $y \in f(Z)$ formam uma cobertura de $f(Z)$ que, pelo Lema 1.7.11, admite uma subcobertura $\{V_i\}$ localmente finita.

Considere $g_i: V_i \rightarrow X$ a inversa local de $f|_{U_i}$. Seja

$$W = \left\{ y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i : g_i(y) = g_j(y) \text{ sempre que } y \in V_i \cap V_j \right\}.$$

Defina a aplicação $g: W \rightarrow X$ por $g(y) = g_i(y)$ se $y \in V_i$. A aplicação g está bem definida pois, caso y pertença a algum outro V_j diferente de V_i , a definição do conjunto W faz garantir que $g(y) = g_i(y)$ da mesma forma.

Vejam que o conjunto $f(Z)$ está contido em W . Seja $y \in f(Z)$. Como $f|_Z: Z \rightarrow f(Z)$ é, por hipótese, um difeomorfismo, temos que existe aplicação inversa de f em Z , $f^{-1}: f(Z) \rightarrow Z$. Se $y \in V_i \cap V_j$, então $g_j(y) = f^{-1}(y) = g_i(y)$. Portanto $y \in W$. Disto, também observamos que $g: W \rightarrow X$ é a inversa de f em W .

Agora, afirmamos que W contém uma vizinhança aberta de $f(Z)$. De fato, dada uma vizinhança B de $y = f(x)$, em $f(Z)$, podemos extrair da cobertura localmente finita $\{V_i\}$ de $f(Z)$ uma subcobertura finita e escolhemos todos os abertos V_1, \dots, V_k que intersectam B e que contenham o ponto y . O conjunto

$$A_y = \bigcap_{i=1}^k V_i$$

é aberto pois é dado por uma interseção finita de abertos e $y \in A_y$. Para concluir nossa afirmação, resta-nos provar que $A_y \subset W$, para todo $y \in f(Z)$. Com efeito, dado $a \in A_y$, temos que $g_i|_{A_y}: A_y \rightarrow g_i(A_y) \subset U_i$ e $g_j|_{A_y}: A_y \rightarrow g_j(A_y) \subset U_j$ são difeomorfismos locais e $g_i(a) = g_j(a)$, para todo $i, j = 1, \dots, k$. Como a é arbitrário, segue que $g_i|_{A_y} = g_j|_{A_y}$ e, portanto temos que $A_y \subset W$. Como A_y é aberto, segue que $\bigcup_{y \in f(Z)} A_y$ é um aberto que contém $f(Z)$.

Por fim, como $g: W \rightarrow X$ define a inversa do difeomorfismo $f|_Z$ em W , temos que g aplica uma vizinhança de $f(Z)$ numa vizinhança de Z , como queríamos. \square

Após todo o caminho ter sido trilhado, podemos finalmente, enunciar e provar o Teorema de Whitney. Como já foi dito no começo desta seção, este teorema irá nos dizer qual deve ser a ordem n para que toda variedade de dimensão k esteja mergulhada em \mathbb{R}^n . Entretanto, um fato que devemos ter em mente, é que o conceito de variedade pode ser tratado de forma mais abrangente e abstrata do que a forma abordada neste texto, mas ainda assim, o Teorema de Whitney continua válido para qualquer variedade abstrata de dimensão finita.

Teorema 1.7.13 (Teorema de Whitney). *Toda variedade X de dimensão k está mergulhada em \mathbb{R}^{2k+1} .*

Demonstração. Primeiramente, pelo Teorema 1.7.6, considere uma imersão injetiva de X em \mathbb{R}^{2k+1} . Compondo essa imersão injetiva com qualquer difeomorfismo de \mathbb{R}^{2k+1} na bola aberta unitária de \mathbb{R}^{2k+1} , obtemos uma imersão injetiva $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ tal que $|f(x)| < 1$, para todo $x \in X$. Pelo Corolário 1.7.10, considere uma função própria $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ e uma nova imersão injetiva $F: X \rightarrow \mathbb{R}^{2k+2}$ definida por $F(x) = (f(x), \rho(x))$. Agora, para voltar ao espaço euclidiano \mathbb{R}^{2k+1} , usamos a composição de F com uma projeção ortogonal $\pi: \mathbb{R}^{2k+2} \rightarrow H$, onde H é espaço vetorial perpendicular a um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$ conveniente.

A aplicação $\pi \circ F: X \rightarrow H$ é uma imersão injetiva para quase todo $a \in S^{2k+1}$. De fato, observe que $d(\pi \circ F)_x = d\pi_{F(x)} \circ dF_x = \pi \circ dF_x$, pois π é linear. Dessa forma, por um raciocínio análogo ao feito no Teorema 1.7.6, temos que tanto $\pi \circ F$, quanto $d(\pi \circ F)_x$, é injetiva. Dessa forma, podemos escolher um ponto a diferente dos dois polos de S^{2k+1} . Provando que a aplicação $\pi \circ F$ é própria, provaremos, conseqüentemente, o resultado. Para isto, afirmamos

que, dada uma cota superior c , existe d tal que o conjunto de pontos $x \in X$ onde $|\pi \circ F(x)| \leq c$ está contido no conjunto dos pontos x onde $|\rho(x)| \leq d$. Como ρ é própria, o conjunto dos pontos tais que $|\rho(x)| \leq d$ é um subconjunto compacto de X . Assim, pela afirmação, a pré-imagem de toda bola fechada em H por meio de $\pi \circ F$ é um subconjunto compacto de X , assim tem-se $\pi \circ F$ uma aplicação própria. Provemos a afirmação. Se afirmação for falsa, então existe uma sequência de pontos $\{x_i\}$ em X tal que $|\pi \circ F(x_i)| < c$, mas $\lim \rho(x_i) = \infty$. Lembre que, por definição, para todo $z \in \mathbb{R}^{2k+2}$, o vetor $\pi(z)$ é um ponto de H no qual, $z - \pi(z)$ é múltiplo de a . Portanto, $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$ é um múltiplo de a para cada i , conseqüentemente o vetor

$$w_i = \frac{1}{\rho(x_i)}[F(x_i) - \pi \circ F(x_i)]$$

também é múltiplo de a . Fazendo $i \rightarrow \infty$,

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1 \right) \rightarrow (0, \dots, 0, 1)$$

pois $|f(x_i)| < 1$, para todo i . O quociente

$$\frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)}$$

tem norma menor ou igual a $c/\rho(x_i)$ que tende para zero, pois $\lim \rho(x_i) = \infty$. Assim, $\lim w_i = (0, \dots, 0, 1)$, mas cada w_i é múltiplo de a , isto implica que o limite $(0, \dots, 0, 1)$ também é múltiplo de a . Logo, o vetor unitário a é $(0, \dots, 0, 1) \in S^{2k+1}$ ou $(0, \dots, 0, -1) \in S^{2k+1}$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, a não é nenhum dos polos de S^{2k+1} . Portanto, a afirmação está provada.

Tendo provado a afirmação tem-se, portanto, que qualquer variedade X está mergulhada em \mathbb{R}^{2k+1} . \square

Capítulo 2

Transversalidade e Teoria da Interseção

2.1 Variedades Com Bordo

Até agora, em todo estudo feito sobre variedades diferenciáveis, foram consideradas apenas variedades sem bordo, entretanto, para que o objetivo final seja alcançado, que é a demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer, é preciso estender esses conceitos para “os contornos”, isto é, o bordo da variedade.

Recorde que o bordo do semi-espaço positivo $H^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$ de dimensão k é definido pelo conjunto $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k = 0\}$

Definição 2.1.1. Diz-se que um subconjunto X de \mathbb{R}^n é uma variedade com bordo de dimensão k se todo ponto x de X possui uma vizinhança V difeomorfa a algum aberto U do semi-espaço H^k . Assim, como antes, tal difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ é chamado de parametrização de X em torno de x . O bordo de X , denotado por ∂X , é o conjunto dos pontos que pertencem à imagem do bordo de H^k por meio de alguma parametrização local. Seu complementar chama-se de interior de X e é denotado por $\text{Int}(X) = X \setminus \partial X$.

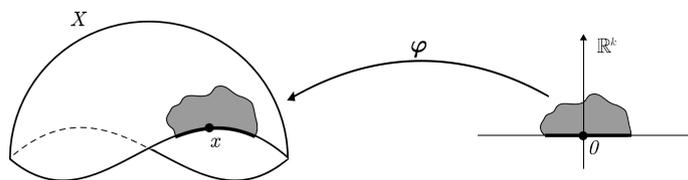


Figura 2.1: Parametrização local de uma variedade com bordo X em torno de um $x \in \partial X$.

Proposição 2.1.2. *Toda bola fechada $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$, centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio r , é uma variedade com bordo. Além disso, $\partial B[a, r] = \text{fr}(B[a, r])$, onde $\text{fr}(B[a, r])$ é a fronteira de $B[a, r]$.*

Demonstração. De fato, dado $x \in B[a, r]$, se $x \in \text{int}(B[a, r])$, então existe um $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta, $B(x, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ está totalmente contida na bola aberta $B(a, r)$. Considere a aplicação translação

$$\begin{aligned} \psi: B(0, \epsilon) &\rightarrow B(x, \epsilon) \\ z &\mapsto z + x. \end{aligned}$$

A aplicação ψ está bem definida e sua derivada $d\psi_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo, portanto pelo Teorema da Aplicação Inversa, temos que, considerando um ϵ mais pequeno, se necessário, $\psi: B(0, \epsilon) \rightarrow B(x, \epsilon)$ é um difeomorfismo, tal que $\psi(0) = x$. Assim, temos que ψ é uma parametrização de $B[a, r]$, em torno de x .

Se $x \in \text{fr}(B[a, r])$, então $(x - a)^2 = r^2$. Consideremos o caso onde $a = 0$, $r = 1$ e a última componente de x é maior do que 0. Os restantes casos serão adaptações do que segue. Mostramos que existe um difeomorfismo entre $U = \{x \in \mathbb{H}^n \mid |x| < 1\}$, onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, e $V = B[a, r] \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Primeiramente, observamos que U é aberto em \mathbb{H}^n e V é aberto em $B[a, r]$ com $x \in V$. Consideremos a aplicação $\varphi: U \rightarrow V$ definida por

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - |x|^2} - x_n).$$

Trata-se de uma aplicação bijetiva suave com inversa suave $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - |x|^2} - x_n).$$

Observe que φ aplica $U \cap \{x_n = 0\}$ em $V \cap \{x_n = \sqrt{1 - |x|^2}\}$. Portanto, φ é uma parametrização em torno do ponto x , como queríamos. \square

Vamos, agora, estender nossos conceitos de derivada e espaço tangente às variedades com bordo. Seja $g: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave, onde U é um aberto de H^k . Se u é um ponto interior de U , a derivada dg_u está bem definida, não diferindo em nada do que foi feito na Seção 1.2. Agora, se u é um ponto de ∂U , a suavidade de g garante que g pode ser estendida a uma aplicação suave \tilde{g} definida numa vizinhança aberta de u em \mathbb{R}^k . A derivada dg_u pode ser definida como sendo a derivada $d\tilde{g}_u: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$. Agora, vamos mostrar que se h é uma outra extensão local de g então $dh_u = d\tilde{g}_u$. De fato, seja $\{u_i\}$ uma sequência de pontos em $\text{Int}(U)$ que converge para u . Pelo fato de as aplicações h e \tilde{g} coincidirem com g em $\text{Int}(U)$, temos $dh_{u_i} = d\tilde{g}_{u_i}$. Fazendo $\lim u_i = u$, a continuidade das derivadas em u_i , garante que $dh_u = d\tilde{g}_u$, como queríamos. Assim, podemos definir.

Definição 2.1.3. *Seja U um aberto de H^k e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave. Define-se a derivada de f , df_x , no ponto $x \in \partial U$ como sendo a aplicação $dF_x: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, onde $F: V \rightarrow \mathbb{R}^l$ é uma aplicação suave definida numa vizinhança V de x em \mathbb{R}^k tal que $F = f$ em $U \cap V$.*

Agora que já definimos a derivada para aplicações do tipo $g: U \subset H^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, onde U é aberto, podemos definir a derivada da aplicação $f: X \rightarrow Y$, onde X e Y são variedades com bordo de dimensões k e l , respetivamente.

Definição 2.1.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade com bordo, de dimensão k . Defina-se o espaço tangente $T_x X$ ao ponto $x \in X$ como a imagem da derivada $d\varphi_x$ no ponto x de qualquer parametrização local φ em torno de x .*

Proposição 2.1.5. *[GP74, Exercício 2.1.7] Sejam X uma variedade com bordo e $x \in \partial X$. Considere $\varphi: U \rightarrow X$ uma parametrização local em torno de $x = \varphi(0)$, onde U é um aberto de H^k . Então $d\varphi_0: \mathbb{R}^k \rightarrow T_x X$ é um isomorfismo. O semi-espaço superior $H_x X$ em $T_x X$, definido como a imagem de H^k por meio da aplicação $d\varphi_0$ (ou seja, $H_x X = d\varphi_0(H^k)$) não depende da escolha da parametrização local.*

Demonstração. Seja $\varphi: U \rightarrow X$ uma parametrização local, em torno de $x = \varphi(0)$, onde U é um aberto de H^k . Pela Definição 2.1.3, temos que $d\varphi_0 = d\Phi_0$, onde $\Phi: V \rightarrow X$ é um difeomorfismo sobre a imagem, com V um aberto de \mathbb{R}^k que contém 0, tal que $\Phi|_{V \cap U} = \varphi|_{V \cap U}$. Além disso, $d\Phi_0 = d\varphi_0$, portanto, $d\varphi_0$ é um isomorfismo.

Para verificar que $H_x X$ não depende da parametrização φ escolhida, suponha, com vista a uma contradição, que existe uma outra parametrização $\psi: W \rightarrow X$, onde W é um aberto de H^k , contendo a origem, tal que $d\varphi_0(H^k) \neq d\psi_0(H^k)$. Assim, $d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \neq d\psi_0(\mathbb{R}^k)$, mas isto contraria a Proposição 1.2.6. Portanto $H_x X$ não depende da escolha da parametrização, como queríamos. \square

Definição 2.1.6. *Diz-se que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é suave se, para todo $x \in X$ e toda parametrização ψ de $f(x)$, existe uma parametrização φ de x tal que a composição $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é uma aplicação suave definida de um aberto de H^k sobre um aberto de H^l .*

Suponha que $\varphi: U \rightarrow X$ é uma parametrização local de X , com $\varphi(0) = x$ e $\psi: V \rightarrow Y$, uma parametrização de Y , em torno de $y = f(x)$. Tomando abertos contidos em U ou V , se necessário, podemos considerar o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \psi \uparrow \\ U \subset H^k & \xrightarrow{\xi = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V \subset H^l \end{array}$$

As derivadas $d\varphi_0$, $d\psi_0$ de $d\xi_0$ estão definidas, como acima e $d\varphi_0$ e $d\psi_0$ são isomorfismos. Dessa forma, podemos definir:

Definição 2.1.7. *A aplicação $df_x: T_x X \rightarrow T_y Y$, onde $y = f(x)$, e X e Y são variedades com bordo, dada por $df_x = d\psi_0 \circ d\xi_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$, diz-se a derivada da aplicação $f: X \rightarrow Y$ no ponto x .*

Assim, o diagrama acima induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{df_x} & T_{f(x)} Y \\ d\varphi_0 \uparrow & & d\psi_0 \uparrow \\ H^k & \xrightarrow{d\xi_0} & H^l \end{array}$$

Observação 2.1.8. A regra da cadeia para variedades com bordo também é válida. Dadas aplicações suaves $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$, onde X , Y e Z são variedades com bordo, e dados os pontos $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, vale $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.

Se X é uma variedade com bordo, naturalmente, $\text{Int}(X)$ é uma variedade sem bordo, mas a pergunta que surge é: em relação ao bordo de X , o que pode se dizer? A proposição abaixo dará uma resposta.

Proposição 2.1.9. Se X é uma variedade com bordo de dimensão k , então o bordo ∂X de X é uma variedade de dimensão $k - 1$.

Demonstração. Primeiramente, o bordo de H^k dado por $\partial H^k = \{(h_1, \dots, h_k) \in H^k : h_k = 0\}$ é difeomorfo ao \mathbb{R}^{k-1} . Com efeito, a aplicação ψ dada por

$$\begin{aligned} \psi: \partial H^k &\rightarrow \mathbb{R}^{k-1} \\ (h_1, \dots, h_{k-1}, 0) &\mapsto (h_1, \dots, h_{k-1}) \end{aligned}$$

é uma aplicação suave e invertível, cuja inversa

$$\begin{aligned} \psi^{-1}: \mathbb{R}^{k-1} &\rightarrow \partial H^k \\ (h_1, \dots, h_{k-1}) &\mapsto (h_1, \dots, h_{k-1}, 0) \end{aligned}$$

também é suave.

Agora, considere $\varphi: U \subset H^k \rightarrow V \subset X$, onde U e V são abertos, uma parametrização local de X . Por definição, $\varphi(\partial U) \subset \partial V$ e, com isso, temos que $\varphi|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \varphi(\partial U)$ é difeomorfismo. Assim a aplicação

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(\partial U)}: \varphi(\partial U) \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$

é um difeomorfismo local entre ∂X e \mathbb{R}^{k-1} . Portanto, ∂X é uma variedade de dimensão $k - 1$, como queríamos. \square

Observação 2.1.10. Se $x \in X$, então o espaço tangente $T_x \partial X$ é um subespaço vetorial de $T_x X$ de codimensão 1. Isto decorre imediatamente do fato de que ∂X é uma variedade de dimensão $k - 1$. Observe a Figura 2.2.

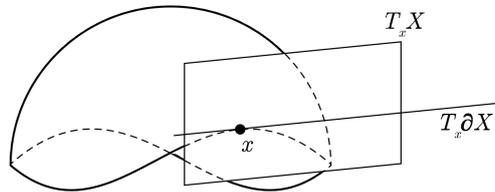


Figura 2.2: O espaço tangente ao bordo de X com codimensão 1.

Observação 2.1.11. Dada uma aplicação suave $f: X \rightarrow Y$, usaremos a notação $\partial f: \partial X \rightarrow Y$ para representar a restrição de f ao bordo ∂X de X . A derivada de ∂f no ponto x é justamente a restrição de $df_x: T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ ao subespaço $T_x \partial X$.

Proposição 2.1.12. [GP74, Exercício 2.1.2] Se $f: X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo entre variedades com bordo, então $\partial f: \partial X \rightarrow \partial Y$ aplica ∂X difeomorficamente em ∂Y .

Demonstração. Primeiramente, devemos observar que, como f é difeomorfismo, $\dim X = \dim Y =: k$.

Vejam que $f(\partial X) = \partial Y$. Seja $x \in \partial X$. Então existe uma parametrização $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$, onde U é aberto em \mathbb{H}^k e $\varphi(0) = x$. Sem perda de generalidade, suponhamos que U é da forma $\mathbb{H}^k \cap B(0, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Vejamos que $y = f(x) \in \partial Y$. Suponhamos com vista a um absurdo que $y \in \text{Int}(Y)$. Então existe uma parametrização $\psi: V \rightarrow Y$ em torno de y tal que V é aberto de \mathbb{R}^k , $\psi(0) = y$ e $\psi(V) = f(\varphi(U))$ (onde, se necessário, consideramos um $\epsilon > 0$ mais pequeno). Assim $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre $\mathbb{H}^k \cap B(0, \epsilon)$ e o aberto V de \mathbb{R}^k . Obtivemos uma contradição. Portanto $f(\partial X) \subset \partial Y$. Como f é difeomorfismo, fazendo um raciocínio análogo para f^{-1} , concluímos que $f(\partial X) = \partial Y$.

Vejam que a aplicação $\partial f: \partial X \rightarrow \partial Y$ é suave. Em torno de cada $x \in \partial X$, uma representação local de ∂f é dada por $\hat{\psi}^{-1} \circ \partial f \circ \hat{\varphi}$, onde $\hat{\varphi} = \varphi|_{U \cap \{x_k=0\}}$, $\hat{\psi} = \psi|_{V \cap \{x_k=0\}}$ e $\varphi: U \subset \mathbb{H}^k \rightarrow X$ e $\psi: V \subset \mathbb{H}^k \rightarrow Y$ são parametrizações locais em torno de x e $f(x)$, respetivamente. Como f é difeomorfismo, $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é difeomorfismo. Logo ∂f é suave, pois sua representação local $\hat{\psi}^{-1} \circ \partial f \circ \hat{\varphi}$ também é suave. Por um raciocínio análogo, a inversa de ∂f^{-1} , $\partial f: \partial Y \rightarrow \partial X$ também é suave.

Portanto, $\partial f: \partial X \rightarrow \partial Y$ é difeomorfismo. \square

Como já vimos na Seção 1.1, o produto de duas variedades sem bordo é uma variedade sem bordo, no entanto, isso não é necessariamente verdade quando considera-se duas variedades com bordo. Por exemplo, o produto cartesiano de dois semi-espacos não é difeomorfo a um semi-espaco.

Exemplo 2.1.13. O conjunto $[0, \infty)$ é uma variedade com bordo, pois é o próprio H^1 , mas o conjunto $S := [0, \infty) \times [0, \infty) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0\}$ não é uma variedade com bordo.

Se S fosse uma variedade com bordo, existiria uma parametrização local $\psi: U \rightarrow V$ em torno de $(0, 0)$, onde U é aberto em \mathbb{H}^2 , V é aberto em S e $\psi(0, 0) = (0, 0)$, tal que $U \cap \{y = 0\}$ é aplicado difeomorficamente em $V \cap (\{0\} \times [0, \infty) \cup [0, \infty) \times \{0\})$. Trata-se de uma contradição.

Apesar de não podermos aplicar o Teorema 1.1.11 da Seção 1.1 para duas variedades com bordo, temos um resultado similar quando consideramos o produto de uma variedade com bordo e uma variedade sem bordo, dado pela proposição a seguir.

Proposição 2.1.14. O produto cartesiano de uma variedade sem bordo X com uma variedade com bordo, Y , é uma variedade com bordo. Mais ainda,

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y \text{ e } \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

Demonstração. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset H^l$ são abertos, então $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times H^l$ é aberto. Observe que

$$\mathbb{R}^k \times H^l = \{(r_1, \dots, r_k, h_1, \dots, h_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l: h_l \geq 0\} = H^{k+l}.$$

Assim, temos que $U \times V$ é aberto em H^{k+l} . Além disso, se $\varphi: U \rightarrow X$ e $\psi: V \rightarrow Y$, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$ são parametrizações locais, em torno de x e y , respectivamente, então $\varphi \times \psi: U \times V \rightarrow X \times Y$ definida por $(\varphi \times \psi)(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$ é uma parametrização local em torno de (x, y) e $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y = k + l$. Finalmente, observe que se U e V são abertos de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^l , respectivamente, então $U \times V$ é aberto de H^{k+l} e

$$\partial(U \times V) = \{(r_1, \dots, r_k, h_1, \dots, h_l) \in U \times V : h_l = 0\} = U \times \partial V.$$

Dessa forma, como a aplicação $(\varphi \times \psi)(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$ aplica difeomorficamente $\partial(U \times V)$ sobre um aberto de $\partial(X \times Y)$, temos, portanto, que

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

como queríamos. □

Assim como o produto cartesiano de variedades com bordo não resulta, necessariamente, numa outra variedade com bordo, a transversalidade de uma aplicação f somente não garante que $f^{-1}(Z)$ seja uma variedade com bordo, nem que $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$ quando mudamos de “estrutura”. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.1.15. *Considere aplicação $f: H^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x_1, x_2) = x_2$ e $Z = \{0\}$. Observe que a aplicação f é transversal a Z , mas $f^{-1}(Z) = \partial H^2$ que é, na verdade, uma variedade sem bordo.*

A condição adicional necessária é que a transversalidade deve ser garantida também no bordo, como veremos no Teorema 2.1.17.

Lema 2.1.16. *Seja S uma variedade sem bordo e $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com valor regular 0. Então o subconjunto $\{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$ é uma variedade com bordo, onde o bordo é dado por $\pi^{-1}(0)$.*

Demonstração. O conjunto $S' = \{s \in S : \pi(s) > 0\} = \pi^{-1}(0, \infty)$ é aberto em S e, portanto, uma subvariedade de mesma dimensão do que S . Agora suponha que $\pi(s) = 0$. Como 0 é valor regular de π , temos que $d\pi_s$ é sobrejetiva, conseqüentemente, π é localmente equivalente à submersão canônica, em torno de s , mas este lema é trivial para a submersão canônica. □

Teorema 2.1.17. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave de uma variedade X com bordo, numa variedade Y sem bordo. Suponha que ambas $f: X \rightarrow Y$ e $\partial f: \partial X \rightarrow Y$ são transversais, com respeito a uma subvariedade sem bordo Z de Y . Então a pré-imagem $f^{-1}(Z)$ é uma variedade com bordo onde*

$$\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$$

e a codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual à codimensão de Z em Y .

Demonstração. A restrição de f à variedade sem bordo $\text{Int}(X)$ é transversal a Z . Pelo Teorema 1.4.5, a intersecção $f^{-1}(Z) \cap \text{Int}(X)$ é uma variedade sem bordo de codimensão dada por $\text{codim } f^{-1}(Z) + \text{codim } \text{Int}(X)$. Agora é preciso, somente, examinar $f^{-1}(Z)$ numa vizinhança U de um ponto $x \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Para facilitar o raciocínio, consideremos o caso em que Z é um único ponto, introduzindo uma submersão φ de uma vizinhança de $f(x)$ em Y , sobre \mathbb{R}^l , tal

que, nesta vizinhança $Z = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1 \dots, g_l): V \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^l$, as funções $g_i: V \cap Z \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$, são funções independentes e $l = \text{codim } Z$. Então $\varphi \circ f$ está definida numa vizinhança de x em X e a interseção de $f^{-1}(Z)$ com esta vizinhança é dada por $(\varphi \circ f)^{-1}(0)$. Agora, escolha uma parametrização local $h: U \rightarrow X$ em torno de x , onde U é um aberto de H^k e tome-se $g = \varphi \circ f \circ h$. Como $h: U \rightarrow h(U)$ é um difeomorfismo, o conjunto $f^{-1}(Z)$ é uma variedade com bordo numa vizinhança de x se e somente se $(f \circ h)^{-1}(Z) = g^{-1}(0)$ for uma variedade com bordo em torno de $u = h^{-1}(x) \in \partial U$.

Como no caso sem bordo, a hipótese de transversalidade

$$df_x(T_x X) + T_f(x)Z = T_{f(x)}Y$$

se traduz no fato de que x é um ponto regular de $\varphi \circ f$, ou seja, que u é ponto regular de g . Por definição de suavidade, g se estende a uma aplicação \tilde{g} , definida numa vizinhança \tilde{U} de u em \mathbb{R}^k . Como $d\tilde{g}_u = dg_u$, temos que \tilde{g} também é regular em u . Como \tilde{g} é uma aplicação entre variedades sem bordo, a pré-imagem $\tilde{g}^{-1}(0)$ intersectada com alguma vizinhança de u é uma subvariedade sem bordo S de \mathbb{R}^k .

Como $g^{-1}(0) = S \cap H^k$ numa vizinhança de u , precisamos mostrar que $S \cap H^k$ é uma variedade com bordo. Seja $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição da função $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_k$ ao conjunto S . Então

$$S \cap H^k = \{s \in S: \pi(s) \geq 0\}$$

Observe que 0 é valor regular de π , pois caso contrário, existiria um ponto $s \in S$ tal que $\pi(s) = 0$ e $d\pi_s = 0$. Claro que $\pi(s) = 0$ significa que $s \in S \cap \partial H^k$. Como $\pi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, então $d\pi_s = \pi$. Assim, o fato de $d\pi_s$ ser zero em $T_s S$ significa somente que a última coordenada de todo vetor em $T_s S$ é nula, isto é,

$$T_s S \subset T_s \partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}.$$

Como $S = \tilde{g}^{-1}(0)$ tem-se que o núcleo de $dg_s = d\tilde{g}_s: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é justamente o espaço $T_s S$.

Agora, a derivada de ∂g no ponto s é a restrição de $dg_s: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ao \mathbb{R}^{k-1} . Assim, se o núcleo de dg_s está contido em \mathbb{R}^{k-1} , então as aplicações lineares $dg_s: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $d(\partial g)_s: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ devem ter o mesmo núcleo. Entretanto, a condição de transversalidade implica que ambas aplicações são sobrejetivas; então o Teorema do Núcleo e da Imagem para Aplicações Lineares garante que o núcleo de dg_s tem dimensão $k-1$ e o núcleo de $d(\partial g)_s$ tem dimensão $k-2$. Trata-se de uma contradição, pois ambos os núcleos devem ter a mesma dimensão. Portanto, 0 é valor regular de g .

Por fim, pelo Lema 2.1.16, segue o resultado. \square

O Teorema de Sard segue mais diretamente quando o domínio da aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ é uma variedade com bordo.

Teorema 2.1.18 (Teorema de Sard). *Para qualquer aplicação suave $f: X \rightarrow Y$ de uma variedade X com bordo para uma variedade Y sem bordo, quase todo ponto de Y é um valor regular das aplicações $f: X \rightarrow Y$ e $\partial f: \partial X \rightarrow Y$.*

Demonstração. A derivada de ∂f no ponto $x \in X$ é justamente a restrição de df_x ao subespaço $T_x \partial X \subset T_x X$. É claro que se ∂f é regular em x , então f também é

regular em x . Portanto, o ponto $y \in Y$ não é valor regular de $f: X \rightarrow Y$, nem de $\partial f: \partial X \rightarrow Y$ somente quando é valor crítico de $f: \text{Int}X \rightarrow Y$ ou $\partial f: \partial X \rightarrow Y$. Como $\text{Int}X$ e ∂X são variedades sem bordo, ambos os conjuntos de valores críticos possuem medida nula. Assim, o complementar do conjunto de valores regulares comuns a f e ∂f é dado pela união de dois conjuntos de medida nula, portanto é um conjunto de medida nula. \square

2.1.1 Variedades Unidimensionais e Algumas Consequências

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades para variedades compactas de dimensão 1. Sem dúvida, um dos resultados mais importantes é a *Classificação de Variedades Unidimensionais*. Embora a ideia deste resultado pareça simples, sua demonstração não é trivial, por isso, ele será apenas enunciado e o leitor pode verificar sua demonstração em [GP74, p.208], ou em [Mil65, p.55].

Teorema 2.1.19 (Classificação de Variedades Unidimensionais). *Toda variedade unidimensional, com bordo, compacta e conexa é difeomorfa ao intervalo $[0, 1]$ ou ao círculo S^1 .*

Corolário 2.1.20. *O bordo de qualquer variedade compacta unidimensional, com bordo, consiste num número par de pontos.*

Demonstração. Como X é uma variedade com bordo de dimensão 1 compacta, X tem um número finito de componentes conexas e cada componente conexa é também uma variedade com bordo de dimensão 1 compacta e conexa. Pelo Teorema 2.1.19, cada componente conexa de X é difeomorfa ao intervalo $[0, 1]$ ou então é difeomorfa a S^1 . Como $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$ e $\partial S^1 = \emptyset$, segue que o bordo de cada componente conexa de X é vazia ou consiste em dois pontos. Portanto, o bordo de X consiste num número par de pontos, como queríamos. \square

É claro que “nem só da Classificação de Variedades Unidimensionais vive esta seção”. O primeiro uso do Corolário 2.1.20, acima, está em provar o Teorema 2.1.21, a seguir. Além disso, outro resultado importante, que será apresentado na sequência é o *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*, usado em Equações Diferenciais, sobretudo para garantir a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária.

Teorema 2.1.21. *Se X é uma variedade compacta, com bordo, então não existe uma aplicação suave $g: X \rightarrow \partial X$ tal que $\partial g: \partial X \rightarrow \partial X$ é a identidade, isto é, não existe uma retração de X em seu bordo.*

Demonstração. Suponha com vista a uma contradição que exista tal aplicação $g: X \rightarrow \partial X$. Pelo Teorema de Sard, existe $z \in \partial X$ que é valor regular de g . Então $g^{-1}(z)$ é uma subvariedade, com bordo, de X . Como a codimensão de $g^{-1}(z)$ em X é igual à codimensão de $\{z\}$ em ∂X , ou seja, $\dim X - \dim g^{-1}(z) = (\dim X - 1) - \dim\{z\}$. Dessa forma, temos que $g^{-1}(z)$ é uma variedade compacta de dimensão 1. Como $\partial g = Id_{\partial X}$,

$$\partial(g^{-1}(z)) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

mas isto contradiz o corolário anterior. Portanto, tal aplicação não existe, como queríamos. \square

Teorema 2.1.22 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Qualquer aplicação suave $f: B^n \rightarrow B^n$, onde B^n é a bola fechada, unitária, contida em \mathbb{R}^n , deve ter um ponto fixo. Isto é, $f(x) = x$, para algum $x \in B^n$.*

Demonstração. Suponha com vista a uma contradição que exista uma aplicação $f: B^n \rightarrow B^n$ que não fixa nenhum ponto. Como, para cada $x \in B^n$, $f(x) \neq x$, os dois pontos x e $f(x)$ determinam um segmento de reta. Seja $g(x)$ um ponto onde o segmento de reta começando em $f(x)$ e passando por x intersecta o bordo ∂B^n . Se $x \in \partial B^n$, temos $g(x) = x$. Portanto a restrição de $g: B^n \rightarrow B^n$ a ∂B^n é a identidade de ∂B^n .

Afirmamos que a aplicação g é suave. De fato, como x pertence ao segmento de reta e está entre $g(x)$ e $f(x)$, podemos escrever o vetor $g(x) - f(x)$ como um múltiplo do vetor $x - f(x)$, isto é,

$$g(x) - f(x) = t(x - f(x)), \quad t \geq 1,$$

e, assim, temos

$$g(x) - tx = (1 - t)f(x).$$

Agora observe que $|g(x)| = 1$, pois $g(x) \in \partial B^n$. Tomando o produto interno canônico, na expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} 1 &= \langle g(x), g(x) \rangle \\ &= \langle tx + (1 - t)f(x), tx + (1 - t)f(x) \rangle \\ &= t^2|x - f(x)|^2 + 2t \langle f(x), x - f(x) \rangle + |f(x)|^2 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos uma equação de grau dois, cuja variável é t . Dessa forma, segue que t depende suavemente de $f(x)$ e, portanto, $g(x)$ é suave. Com isso, obtivemos uma aplicação suave $g: B^n \rightarrow \partial B^n$, contradizendo o teorema anterior.

Portanto, toda aplicação suave $f: B^n \rightarrow B^n$, onde B^n é a bola fechada unitária de \mathbb{R}^n , deixa um ponto fixo. \square

2.2 Transversalidade

Na Seção 1.4 do Capítulo 1, introduzimos o conceito de transversalidade e apresentamos algumas de suas propriedades. Na Seção 1.5, o Teorema 1.5.5 garantiu que a transversalidade é uma propriedade estável desde que o domínio da aplicação em questão seja compacto. Por fim, o Teorema de Sard, garantiu que, dada uma subvariedade $Z \subset Y$, qualquer aplicação suave $f: X \rightarrow Y$, com o domínio X não necessariamente compacto, pode sofrer pequenas deformações, de modo a transformar-se numa aplicação que seja transversal a Z .

Teorema 2.2.1 (Teorema da Transversalidade). *Seja $f_s: X \rightarrow Y$ uma família de aplicações suaves, indexada por um parâmetro s que varia em alguma variedade S . Suponha que a aplicação $F: X \times S \rightarrow Y$, dada por $F(x, s) = f_s(x)$ é*

uma aplicação suave entre variedades, onde apenas X possui bordo e considere Z uma subvariedade sem bordo de Y . Se F e ∂F são transversais a Z , então, para quase todo $s \in S$, as aplicações f_s e ∂f_s também são transversais a Z .

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.17, a pré-imagem $W = F^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de $X \times S$ com bordo onde $\partial W = W \cap \partial(X \times S)$. Seja $\pi: X \times S \rightarrow S$ a projeção natural. Afirmamos que sempre que $s \in S$ for valor regular da aplicação $\pi: W \rightarrow S$, então $f_s \bar{\cap} Z$ e, sempre que $s \in S$ for valor regular de $\partial\pi: \partial W \rightarrow S$, então $\partial f_s \bar{\cap} \partial Z$. Vamos fazer o caso em que $f_s \bar{\cap} Z$, pois o outro caso é análogo.

De fato, seja $x \in X$, tal que $f_s(x) = z$ pertencente a Z . Como $F(x, s) = z$ e $F \bar{\cap} Z$, tem-se

$$dF_{(x,s)}(T_{(x,s)}(X \times S)) + T_z Z = T_z Y,$$

isto é, dado um vetor $a \in T_z Y$, existe um vetor $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ tal que

$$dF_{(x,s)}(b) - a \in T_z Z.$$

O objetivo, agora, é exibir um vetor $v \in T_x X$ tal que $df_s(v) - a \in T_z Z$. Lembre que, pela Proposição 1.2.8,

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_x X \times T_s S,$$

assim, temos que $b = (w, e)$, onde $w \in T_x X$ e $e \in T_s S$. Se $e = 0$, não há mais nada a se fazer pois a restrição de F a $X \times \{s\}$ é dada por f_s e, assim, segue que

$$dF_{(x,s)}(w, 0) = df_s(w).$$

Se $e \neq 0$, a aplicação

$$d\pi_{(x,s)}: T_x X \times T_s S \rightarrow T_s S$$

é justamente a projeção na segunda componente, a hipótese de regularidade que $d\pi_{(x,s)}$ aplica $T_{(x,s)}W$ sobre $T_s S$ diz que existe um vetor da forma (u, e) em $T_{(x,s)}W$. Como $F: W \rightarrow Z$, então $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_z Z$. Consequentemente o vetor $v = w - u \in T_x X$ é o vetor procurado pois

$$df_s(v) - a = dF_{(x,s)}[(w, e) - (u, e)] - a = [dF_{(x,s)}(w, e) - a] - dF_s(u, e)]$$

e os dois últimos vetores pertencem a $T_z Z$. Por fim, o Teorema de Sard garante a validade desse resultado para quase todo $s \in S$, como queríamos. \square

Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave qualquer. Defina a aplicação $F: X \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $F(x, s) = f(x) + s$, onde S é uma bola aberta de \mathbb{R}^n . Para todo $x \in X$ fixado, a aplicação F é uma translação, consequentemente, uma submersão de $X \times S$ em \mathbb{R}^n e, portanto, transversal a qualquer subvariedade Z de \mathbb{R}^n . O teorema acima mostra que, para quase todo $s \in S$, a aplicação $f_s(x) = f(x) + s$ é transversal a Z . Desse modo, observamos que qualquer aplicação suave f pode ser transformada numa aplicação transversal adicionando a f um pequeno valor s . Logo adiante, o *Teorema da Vizinhaça- ϵ* tratará desse assunto considerando qualquer variedade compacta, sem bordo.

Definição 2.2.2. Dada uma variedade $Y \subset \mathbb{R}^n$, para um ponto $y \in Y$ define-se o espaço normal $N_y Y$ como sendo o complemento ortogonal de $T_y Y$ em \mathbb{R}^n . Isto é,

$$N_y Y = \{v \in \mathbb{R}^n: \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_y Y\}.$$

O fibrado normal é definido pelo conjunto

$$NY = \{(y, v) \in Y \times \mathbb{R}^n : v \in N_y Y\}.$$

Observação 2.2.3. É importante ressaltar que, ao contrário de TY , o fibrado normal NY não é uma variedade intrínseca de Y , pois depende da relação entre Y e \mathbb{R}^n . Observe também que existe uma projeção natural $\sigma: NY \rightarrow Y$ definida por $\sigma(y, v) = y$.

A proposição a seguir provará o que intuitivamente já se esperava: o fibrado normal NY de uma variedade $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade com dimensão n .

Proposição 2.2.4. Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade, então NY é uma variedade de dimensão n e a projeção $\sigma: NY \rightarrow Y$ é uma submersão.

Demonstração. Defina Y localmente da seguinte forma: em torno de um ponto qualquer $y \in Y$, seja $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma submersão, onde \tilde{U} é aberto em \mathbb{R}^n e $k = \text{codim} Y$, tal que $U = Y \cap \tilde{U} = \varphi^{-1}(0)$. O conjunto NU é dado por $NY \cap (U \times \mathbb{R}^n)$, logo, é aberto em NY . Para cada $y \in U$, a aplicação $d\varphi_y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é sobrejetiva e seu núcleo é dado por $T_y Y$. Assim, a aplicação $(d\varphi_y)^t$, ou seja, a transposta da aplicação $d\varphi_y$, leva \mathbb{R}^k isomorficamente sobre $N_y Y$, pois, como $d\varphi_y$ é sobrejetiva, a aplicação $(d\varphi_y)^t: \mathbb{R}^k \rightarrow H$ é bijetiva, onde $H \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço de dimensão k , no entanto como $d\varphi_y(T_y Y) = \{0\}$, todo vetor não nulo $w \in \mathbb{R}^k$ é levado, por $(d\varphi_y)^t$ num vetor não nulo de H e como podemos escrever $\mathbb{R}^n = T_y Y + N_y Y$ (vide [Lim12b, p.143]) temos $H = N_y Y$. A aplicação $\psi: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow NU$, dada por $\psi(y, v) = (y, (d\varphi_y)^t(w))$ é bijetiva e também é um mergulho de $U \times \mathbb{R}^k$ em $Y \times \mathbb{R}^n$. Consequentemente NU é uma variedade parametrizada por ψ , com dimensão $\dim NU = \dim U + k = \dim Y + \text{codim} Y = n$. Como o ponto tomado de NY é arbitrário, logo todo ponto de NY possui uma vizinhança da forma NU e, portanto, NY é uma variedade. Como $\sigma \circ \psi: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ é a submersão canônica, então σ é submersão. \square

Embora a leitura se torne um pouco exaustiva, a sequência de resultados a seguir traz diversas informações importantes, não somente para a Topologia, como para outras áreas da Matemática, como Equações Diferenciais, ou Geometria Diferencial, onde o Teorema da Vizinhança Tubular e o Teorema da Vizinhança- ϵ são bastante aplicados.

Teorema 2.2.5 (Teorema da Vizinhança- ϵ). Para uma variedade compacta, sem bordo, $Y \subset \mathbb{R}^m$ e um número positivo ϵ , seja Y^ϵ um conjunto aberto de \mathbb{R}^m com $d(Y^\epsilon, Y) < \epsilon$. Se ϵ é suficientemente pequeno, então cada ponto $w \in Y^\epsilon$ possui um único ponto mais próximo em Y denotado por $\pi(w)$. Mais ainda, a aplicação $\pi: Y^\epsilon \rightarrow Y$ é uma submersão. Quando Y não é compacto, ainda existe uma submersão $\pi: Y^\epsilon \rightarrow Y$, mas agora ϵ pode ser admitido como uma função suave positiva em Y e Y^ϵ é dado por

$$\{w \in \mathbb{R}^n : |w - y| < \epsilon(y) \text{ para algum } y \in Y\}.$$

Demonstração. Considere a aplicação suave $h: NY \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $h(y, v) = y + v$. Observe que todo ponto de $Y \times \{0\}$ em NY é ponto regular de h , pois $(y, 0)$ pertence a duas subvariedades complementares de NY , a saber,

$$Y \times \{0\} \text{ e } \{y\} \times N_y Y.$$

A derivada de h no ponto $(y, 0)$ aplica o espaço tangente a $Y \times \{0\}$, no ponto $(y, 0)$, sobre $T_y Y$ e aplica o espaço tangente a $\{y\} \times N_y Y$, no ponto $(y, 0)$, sobre $N_y Y$. Assim, temos que $dh_{(y,0)}$ aplica o espaço tangente a NY , no ponto $(y, 0)$, sobre $T_y Y + N_y Y = \mathbb{R}^m$ e segue que $dh_{(y,0)}$ é sobrejetiva.

Como h aplica difeomorficamente $Y \times \{0\}$ sobre Y e como cada $(y, 0)$ é ponto regular de h , pelo Teorema 1.7.12, h aplica difeomorficamente uma vizinhança de $Y \times \{0\}$ numa vizinhança de Y , em \mathbb{R}^n . Agora, qualquer vizinhança de Y contém algum Y^ϵ , uma vez que Y é compacto e sem bordo. Assim, a aplicação $h^{-1}: Y^\epsilon \rightarrow Y \times \{0\}$ está bem definida e a aplicação $\pi = \sigma \circ h^{-1}: Y^\epsilon \rightarrow Y$ é uma submersão, onde $\sigma: NY \rightarrow Y$ é a projeção natural de NY sobre Y .

Para mostrar a existência e unicidade de $\pi(w)$, onde $w \in Y^\epsilon$, o trabalho é bastante simples: recorde que se $Y \subset X$ é compacto então, dado $x \in X \setminus Y$, existe pelo menos um $y \in Y$ tal que

$$d(x, y) = \inf\{d(x, y): x \in X \setminus Y, y \in Y\}.$$

Por esse resultado, segue a existência do ponto $\pi(w)$ e a unicidade vem do fato de que a aplicação $\pi = \sigma \circ h^{-1}$ é, na verdade, uma bijeção. Portanto existe um único $\pi(w)$ mais próximo de Y , como desejado. \square

Corolário 2.2.6. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave, sendo Y uma variedade sem bordo. Então existe uma bola aberta S em \mathbb{R}^m e uma aplicação suave $F: X \times S \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e, para $x \in X$ fixado arbitrariamente, a aplicação $H: S \rightarrow Y$, dada por $H(s) = F(x, s)$, é uma submersão. Em particular, F e ∂F são submersões.*

Demonstração. Seja S a bola unitária em \mathbb{R}^m . Defina a aplicação $F: X \times S \rightarrow Y$ como

$$F(x, s) = \pi(f(x) + \epsilon(f(x))s),$$

onde $\pi: Y^\epsilon \rightarrow Y$ é a aplicação do Teorema da Vizinhança- ϵ . Como π restringe-se à identidade de Y , temos $F(x, 0) = f(x)$. Para x fixado, a aplicação $h: S \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por

$$h(s) = f(x) + \epsilon(f(x))s$$

é uma submersão de S em Y . Como a composição de duas submersões é uma submersão, então $H(s) := F(x, s)$ é uma submersão. Observe que F e ∂F são submersões, pois estas são submersões mesmo quando restritas a subvariedades da forma $\{x\} \times S$, que passam por cada ponto de $X \times S$ e de $\partial X \times S$. \square

Para uma subvariedade Z de $Y \subset \mathbb{R}^m$, pode-se falar do fibrado normal a Z em Y , sem necessariamente falar ou trabalhar com o fibrado normal de toda a variedade Z , em \mathbb{R}^m . Formalmente:

Definição 2.2.7. *Define-se o fibrado normal à subvariedade Z , contida em Y , como sendo conjunto*

$$N(Z; Y) = \{(z, v): z \in Z, v \in T_z Y \text{ e } v \perp T_z Z\}$$

Aqui, $v \perp T_z Z$ significa que v é perpendicular a todo o vetor do espaço $T_z Z$.

Definição 2.2.8. Para cada $z \in Z$, define-se a fibra, $N_z(Z; Y)$, de $N(Z; Y)$, em z , como sendo o conjunto:

$$N_z(Z; Y) = \{v \in T_z Y : v \perp T_z Z\}.$$

Proposição 2.2.9. [GP74, Exercício 2.3.12] Seja Z uma subvariedade de Y , onde $Y \subset \mathbb{R}^m$. O fibrado normal à subvariedade Z de Y , $N(Z, Y)$, é uma subvariedade com a mesma dimensão de Y .

Demonstração. Sejam g_1, \dots, g_l funções independentes definidas em uma vizinhança \tilde{U} de z em \mathbb{R}^m tais que

$$U = Z \cap \tilde{U} = \{y \in \tilde{U} : g_1(y) = 0, \dots, g_l(y) = 0\}$$

e

$$Y \cap \tilde{U} = \{y \in \tilde{U} : g_{k+1}(y) = 0, \dots, g_l(y) = 0\}.$$

Estas l funções independentes existem pelo Corolário 1.3.32 do Teorema 1.3.31. Considere a imersão canônica $i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, $i(x) = (x, 0)$, e defina a aplicação

$$\begin{aligned} f: U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow U \times \mathbb{R}^l \\ (u, x) &\mapsto (u, i(x)). \end{aligned}$$

Observe que f é um difeomorfismo sobre a imagem. Considere, agora, a aplicação $g: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$, definida por $g = (g_1, \dots, g_l)$. Sabemos que, para todo ponto y , a aplicação dg_y é sobrejetiva pois as funções coordenadas de g são l funções independentes. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi: U \times \mathbb{R}^l &\rightarrow N(Z; \mathbb{R}^m) \\ (y, v) &\mapsto (y, (dg_y)^t(v)). \end{aligned}$$

Por um argumento análogo ao utilizado na Proposição 2.2.4, temos que $(dg_y)^t: \mathbb{R}^k \rightarrow N_y(Z; \mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo, e consequentemente ψ é um difeomorfismo. Agora, tomando a aplicação $(\psi \circ f)|_{U \times Y}: U \times Y \rightarrow N(Z; Y)$ é um difeomorfismo, pois é a composta de difeomorfismos portanto é uma parametrização de $N(Z; Y)$, como queríamos. \square

Teorema 2.2.10 (Teorema da Vizinhança Tubular). [GP74, Exercício 2.3.16] Se Z é uma subvariedade de Y e $N(Z; Y)$ o fibrado normal de Z em Y , então existe um difeomorfismo entre uma vizinhança aberta de Z em $N(Z; Y)$ e uma vizinhança aberta de Z em Y .

Demonstração. Primeiramente, considere o caso em que Z é uma subvariedade de Y compacta. Considere a aplicação $h: N(Z; Y) \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $h(z, v) = z + v$. Esta aplicação h é a mesma aplicação usada na demonstração do Teorema da Vizinhança- ϵ e, portanto, uma aplicação regular em todo ponto $(z, 0)$ de $Z \times \{0\}$ que, além disso, também aplica difeomorficamente $Z \times \{0\}$ em Z . Desse modo, segue, pelo Teorema 1.7.12, que h deve aplicar, difeomorficamente, uma vizinhança de $Z \times \{0\}$ numa vizinhança de Z , contida no \mathbb{R}^m . Esta última vizinhança é denotada por Z^ϵ . Agora considere a aplicação $\pi: Y^\epsilon \rightarrow Y$, do Teorema da Vizinhança- ϵ , restrita a Z^ϵ , isto é,

$$\pi|_{Z^\epsilon}: Z^\epsilon \rightarrow Z.$$

Assim, a aplicação $\pi \circ h = \sigma \circ h^{-1} \circ h : W \rightarrow Y$, onde $W = h^{-1}(Z)$, está bem definida, sendo que $\pi \circ h = Id_Z$. Portanto, novamente pelo Teorema 1.7.12, segue o resultado.

Para o caso em que Z não é compacta, usamos o $\epsilon(x)$, garantido pelo Teorema da Vizinhança- ϵ para variedades não compactas e aplicamos o mesmo raciocínio. \square

Definição 2.2.11. *Seja Z uma subvariedade de codimensão k , de Y . Diz-se que o fibrado normal $N(Z; Y)$ é trivial quando existe um difeomorfismo $\Phi : N(Z; Y) \rightarrow Z \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a cada fibra $N_z(Z; Y)$, $z \in Z$,*

$$\Phi|_{N_z(Z; Y)} : N_z(Z; Y) \rightarrow \{z\} \times \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo linear.

Proposição 2.2.12. *[GP74, Exercício 2.3.20] O fibrado normal $N(Z; Y)$ é trivial se, e somente se, existem k funções independentes, g_1, \dots, g_k , que definem Z globalmente em algum subconjunto U de Y , isto é*

$$Z = \{y \in U : g_1(y) = 0, \dots, g_k(y) = 0\}.$$

Demonstração. Suponhamos que o fibrado normal $N(Z; Y)$ é trivial.

Pelo Teorema da Vizinhança Tubular, existe um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ entre uma vizinhança U de Z , em Y e uma vizinhança V de Z , em $N(Z; Y)$. Observe que, em $N(Z; Y)$, a subvariedade Z corresponde ao conjunto $Z \times \{0\}$. Considere as aplicações $\pi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $\pi(u, y) = y$ e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$g(u) = \pi(\Phi(\varphi(u))),$$

onde $\Phi : N(Z; Y) \rightarrow Z \times \mathbb{R}^k$ é o difeomorfismo cuja existência é dada pela definição de fibrado trivial.

Vejamus que $Z = g^{-1}\{0\}$. Observe que se $u \in Z$, então $\Phi(\varphi(u)) = \Phi(u, 0) = (u, 0)$, donde,

$$g(u) = \pi(\Phi(\varphi(u))) = \pi(u, 0) = 0.$$

Reciprocamente, se $u \in g^{-1}(0)$, temos,

$$g(u) = \pi(\Phi(\varphi(u))) = 0.$$

Assim, temos $\Phi(\varphi(u))$ é da forma (\hat{z}, w) com $\hat{z} \in Z$ e $w \in \mathbb{R}^k$ com $w = 0$. Logo, $u = \hat{z} \in Z$.

Como π é submersão e Φ e φ são difeomorfismos, segue que a aplicação g é submersão. Logo, escrevendo $g = (g_1, \dots, g_k)$, tem-se que as k funções independentes g_1, \dots, g_k definem Z globalmente em U .

Reciprocamente, se existe uma submersão $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, com $g^{-1}(0) = Z$, por um argumento análogo ao usado na Proposição 2.2.4, para cada $z \in Z$ a aplicação $(dg_z)^t : \mathbb{R}^k \rightarrow T_z Y$ aplica \mathbb{R}^k isomorficamente no complemento ortogonal de $T_z Z$, em $T_z Y$. Dessa forma, temos que $\Phi^{-1} : Z \times \mathbb{R}^k \rightarrow N(Z; Y)$ fica definida por $\Phi^{-1}(z, a) = (z, (dg_z)^t(a))$. Portanto $N(Z; Y)$ é trivial, como queríamos. \square

Teorema 2.2.13. *Para toda aplicação suave $f : X \rightarrow Y$, sendo Y sem bordo e, para toda subvariedade Z sem bordo, de Y , existe uma aplicação suave $g : X \rightarrow Y$ homotópica a f tal que $g \bar{\cap} Z$ e $\partial g \bar{\cap} Z$.*

Demonstração. Para a família de aplicações F do Corolário 2.2.6, o Teorema da Transversalidade garante que $f_s \bar{\cap} Z$ e $\partial f_s \bar{\cap} Z$, para quase todo $s \in S$. Entretanto, cada f_s é homotópica a f , pela homotopia $X \times I \rightarrow Y$, dada por $(x, t) \rightarrow F(x, ts)$, assim tomando $g := f_s$, para algum s , segue o resultado. \square

Definição 2.2.14. Diz-se que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é transversal a Z , em um subconjunto C de X se a condição de transversalidade

$$\text{Im}(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y$$

é satisfeita para todo ponto $x \in C \cap f^{-1}(Z)$.

Lema 2.2.15. Se U é uma vizinhança aberta de um conjunto fechado C , em X , então existe uma função $\gamma: X \rightarrow [0, 1]$ que vale 1 fora de U , mas que é nula numa vizinhança de C .

Demonstração. Seja C' um conjunto fechado qualquer, contido em U , que contém C em seu interior e seja $\{\theta_i\}$ a partição da unidade subordinada à cobertura aberta $\{U, X \setminus C'\}$ de X . Assim, basta escolher os θ_i que se anulam em $X \setminus C'$ e tomar γ com sendo a soma destes θ_i . Assim, obtém-se a função γ desejada. \square

Observação 2.2.16. A demonstração do Teorema da Partição da Unidade continua sendo válida quando X é uma variedade com bordo.

Teorema 2.2.17 (Teorema da Extensão). Suponha que Z é uma subvariedade fechada, sem bordo, contida em Y e C um subconjunto fechado em X . Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave tal que $f \bar{\cap} Z$ em C e $\partial f \bar{\cap} Z$ em $C \cap \partial X$. Então existe uma aplicação suave $g: X \rightarrow Y$ homotópica a f , tal que $g \bar{\cap} Z$ e $\partial g \bar{\cap} Z$ e, numa vizinhança de C , tem-se $g = f$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que f é transversal a Z numa vizinhança de C . Se $x \in C$, mas $x \notin f^{-1}(Z)$, então, como Z é fechado, o conjunto $X \setminus f^{-1}(Z)$ é uma vizinhança de x , no qual temos $f \bar{\cap} Z$, automaticamente. Agora, se $x \in f^{-1}(Z)$, então existe uma vizinhança W de $f(x)$, em Y , e uma submersão $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $f \bar{\cap} Z$ num ponto $x' \in f^{-1}(Z \cap W)$ precisamente quando a restrição

$$\varphi \circ f|_{f^{-1}(Z)}: f^{-1}(Z) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

é regular em x' . A composição $\varphi \circ f$ é regular em x , logo também é regular numa vizinhança de x . Dessa forma, temos que $f \bar{\cap} Z$ numa vizinhança de cada ponto $x \in C$, assim temos $f \bar{\cap} Z$ numa vizinhança U de C .

Seja $\gamma: X \rightarrow [0, 1]$ a função dada no Lema 2.2.15 e seja $\tau := \gamma^2$. Como $d\tau_x = 2\gamma(x)d\gamma_x$, temos $d\tau_x = 0$ sempre que $\tau(x) = 0$. Agora, modificamos a aplicação $F: X \times S \rightarrow Y$, dada por $F(x, s) = f_s(x)$, já definida no Teorema 2.2.13, a fim de obter a aplicação $G: X \times S \rightarrow Y$, dada por $G(x, s) = F(x, \tau(x)s)$. Afirmamos que G é transversal a Z . De fato, suponha que $(x, s) \in G^{-1}(Z)$ e $\tau(x) \neq 0$, então a aplicação $S \rightarrow Y$, dada por $r \mapsto G(x, r)$, é uma submersão, pois é dada pela composta de um difeomorfismo $r \mapsto \tau(x)r$ com a submersão $r \mapsto F(x, r)$. Dessa forma, temos que G é regular em (x, s) , logo $dG_{(x,s)}$ é sobrejetiva em (x, s) e, com isso, temos que G é transversal a Z , em (x, s) . Quando $\tau(x) = 0$, avaliamos $dG_{(x,s)}$ em qualquer elemento

$$(v, w) \in T_x X \times T_s S = T_x X \times \mathbb{R}^m.$$

Defina a aplicação $h: X \times S \rightarrow X \times S$ por $h(x, s) = (x, \tau(x)s)$ e observe que sua derivada é dada por

$$dh_{(x,s)}(v, w) = (v, \tau(x) \cdot w + d\tau_x(v) \cdot s),$$

onde $\tau(x), d\tau_x(v) \in \mathbb{R}$ são escalares. Agora, aplicando a regra da cadeia a $G = F \circ h$ e substituindo $\tau(x) = 0$ e $d\tau_x = 0$, temos

$$dG_{(x,s)}(v, w) = dF_{(x,0)}(v, 0).$$

Quando restringimos F ao conjunto $X \times \{0\}$, temos $F = f$, devido à definição de F . Substituindo na equação acima, obtemos

$$dG_{(x,s)}(v, w) = df_x(v).$$

No entanto, se $\tau(x) = 0$, então $x \in U$, pois $\tau(x) = (\gamma(x))^2$ e, fora de U , a função γ vale 1 e, além disso, $f \bar{\cap} Z$, em x , pois x pertencente a uma vizinhança de C , em U , recai no caso particular, feito acima. Assim, o fato de df_x e $dG_{(x,s)}$ terem a mesma imagem, implica que $G \bar{\cap} Z$, em (x, s) . Completando a justificação da afirmação.

Para verificar que $\partial G \bar{\cap} Z$, o procedimento é análogo. Agora, o Teorema da Transversalidade nos permite escolher $s \in S$, de modo que a aplicação $g(x) = G(x, s)$ seja transversal a Z e $\partial G \bar{\cap} Z$. Como antes, temos g homotópica a f . Além disso, se x pertence a uma vizinhança de C , onde $\tau(x) = 0$, então

$$g(x) = G(x, s) = F(x, 0) = f(x),$$

como queríamos. □

Como o bordo ∂X de X é sempre fechado em X , segue o corolário abaixo.

Corolário 2.2.18. *Se para $f: X \rightarrow Y$, a aplicação $\partial f: \partial X \rightarrow Y$ é transversal a Z , então existe uma aplicação $g: X \rightarrow Y$, homotópica a f , tal que $\partial g = \partial f$ e $g \bar{\cap} Z$.*

2.3 Teoria da Interseção Módulo 2

Definição 2.3.1. *Diz-se que duas subvariedades X e Z , contidas em Y , têm dimensão complementar quando $\dim X + \dim Z = \dim Y$.*

Observação 2.3.2. *Se $X \bar{\cap} Z$, onde X e Z são variedades sem bordo, contidas em Y , o Teorema 1.4.5 garante que $X \cap Z$ é uma variedade. Se, além disso, X e Z têm dimensão complementar, ou seja, $\dim X + \dim Z = \dim Y$, então $\dim(X \cap Z) = 0$. Agora, assumindo que X e Z sejam ambas fechadas e que pelo menos uma delas, digamos X , é compacta, então $X \cap Z$ é um conjunto finito de pontos. Com efeito, o conjunto $X \cap Z$ é uma variedade compacta de dimensão zero, logo é um conjunto finito.*

Definição 2.3.3. *Diz-se que o número de pontos do conjunto finito $X \cap Z$ é o número de interseção de X e Z e denota-se por $\#(X \cap Z)$.*

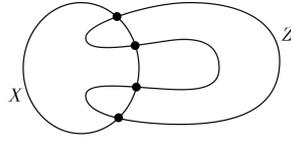


Figura 2.3: $\#(X \cap Z) = 4$.

Para generalizar essa discussão sobre número de interseção de uma variedade compacta X com uma variedade fechada Z , arbitrária, é necessário ter em mente que sem a condição de transversalidade e sem a condição de dimensão complementar, nada pode ser concluído, uma vez que, sem estas hipóteses, a interseção $X \cap Z$ pode ser qualquer conjunto. Entretanto, na Seção 1.5, vimos que podemos deformar ligeiramente o compacto X , de modo que este se torne transversal a Z . Desse modo, podemos definir o número de interseção de X e Z como sendo o número de interseção obtido após a deformação de X .

Um problema encontrado ao se deformar X de modo a obter a transversalidade, com Z , é que deformações diferentes resultam em números de interseção diferentes, mas apesar disso, essa ideia de deformação será bastante utilizada, pois como será mostrado nesta seção, deformações diferentes possuem o mesmo número de interseção, módulo 2.

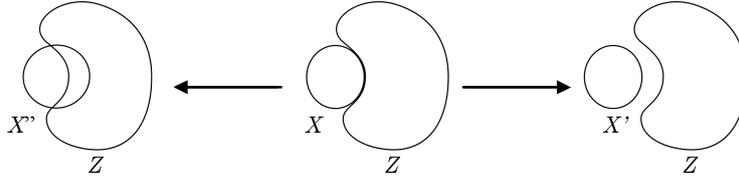


Figura 2.4: Observe que $\#(X'' \cap Z) = 2$ e $\#(X' \cap Z) = 0$

Para formalizar a ideia de deformação, considere X uma variedade qualquer contida em Y e considere também aplicação inclusão $i: X \hookrightarrow Y$, como um mergulho. Sabemos que as deformações da inclusão i podem ser dadas por homotopias. Como mergulhos formam uma classe estável de aplicações, qualquer “pequena homotopia” de i resulta num novo mergulho $X \rightarrow Y$. Assim, a imagem desses mergulhos são variedades difeomorfas a X , contidas em Y .

Agora, considere X uma variedade compacta, não necessariamente contida em Y e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave transversal à variedade fechada Z contida em Y , onde $\dim X + \dim Z = \dim Y$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade fechada de X , de dimensão zero, como X é compacto, $f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito. Agora, a definição abaixo, formaliza o conceito de número de interseção de uma aplicação.

Definição 2.3.4. *Define-se o número de interseção módulo 2 da aplicação $f: X \rightarrow Y$ com Z , como sendo o número de pontos do conjunto $f^{-1}(Z)$ módulo 2 e denota-se por $I_2(f, Z)$.*

Teorema 2.3.5. *Se $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ são homotópicas e ambas transversais a Z , então $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.*

Demonstração. Seja $F: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1 . Como F estende as aplicações f_0 e f_1 no conjunto $X \times I$, o Teorema da Extensão (Teorema 2.2.17) garante que podemos assumir $F \bar{\cap} Z$. Como

$$\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$$

e também $\partial F = f_0$ em $X \times \{0\}$, $\partial F = f_1$ em $X \times \{1\}$, segue que $\partial F \bar{\cap} Z$. Então $F^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de dimensão 1 contida em $X \times I$, com bordo dado por

$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times I) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Pelo Corolário 2.1.20 do Teorema da Classificação de Variedades Unidimensionais (Teorema 2.1.19), segue que $\partial F^{-1}(Z)$ consiste num número par de pontos, logo $\#f_0^{-1}(Z) = \#f_1^{-1}(Z) \pmod{2}$, como queríamos. \square

Como homotopia é uma relação de equivalência, segue o corolário abaixo:

Corolário 2.3.6. *Se $g_0, g_1: X \rightarrow Y$ são aplicações arbitrárias homotópicas, então $I_2(g_0, Z) = I_2(g_1, Z)$.*

Corolário 2.3.7. *[GP74, Exercício 2.4.4] Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave homotópica a uma aplicação constante. Para toda subvariedade fechada Z de Y , onde $\dim X + \dim Z = \dim Y$, tem-se $I_2(f, Z) = 0$, exceto, possivelmente, quando $\dim X = 0$.*

Demonstração. Consideremos o caso em que $\dim X \geq 1$, ou seja, $\dim Z < \dim Y$. Seja y um ponto no aberto $Y \setminus Z$ e seja $g: X \rightarrow Y$ a aplicação constante dada por $g(x) = y$, para todo $x \in X$. Esta aplicação é, diretamente ou por transitividade, homotópica a f e, como $g^{-1}(Z) = \emptyset$, temos

$$I_2(f, Z) = I_2(g, Z) = \#g^{-1}(\{z\}) = 0, \pmod{2}$$

(onde $z \in Z$), como queríamos.

Agora, se $\dim X = 0$, então X é um conjunto discreto. Observamos que se tivermos $X = \{x\}$, então $\dim f(X) = 0$, com isso, qualquer aplicação constante $g: X \rightarrow Y$ terá, sua imagem contida em Z , exceto, possivelmente quando $g(X) = \{g(x)|x \in X\}$ coincidir com $f(X)$, uma vez que $f(X)$ também é dado por um único ponto. Dessa forma, temos que se $g(X) \subset Z$, então $\#g^{-1}(Z) = 1$, pois $X = \{x\}$. Além disso, temos que f e g são transversais a Z pois, neste caso, ambas as aplicações são constantes. Dessa forma, como f e g são, por hipótese, homotópicas, segue que $I_2(f, Z) \neq 0$, como queríamos. \square

Até agora, sabemos que se X e Z são subvariedades de Y , onde X é uma subvariedade compacta e Z é uma subvariedade fechada de dimensão complementar, o número de interseção módulo 2 de X com Z é definido como $I_2(X, Z) := I_2(i, Z)$, onde $i: X \hookrightarrow Y$ é aplicação inclusão. Quando $X \bar{\cap} Z$ então $I_2(X, Z)$ é justamente $\#X \cap Z$ módulo 2. Se $I_2(X, Z) \neq 0$ então, não é possível “arrastar” X , totalmente, para “longe” de Z . Uma situação curiosa acontece quando $\dim X = \dim Y/2$, pois podemos então considerar $I_2(X, X)$, o número de auto-interseções módulo 2 de X .

Se acontecer de X ser o bordo de alguma subvariedade W de Y , então $I_2(X, Z) = 0$. De fato, se $Z \bar{\cap} X$, então podemos dizer que Z “passa fora” de W ou “entra” em W , mas de toda forma $\#(X \cap Z)$ é um número par.

Teorema 2.3.8 (Teorema do Bordo). *Suponha que X é o bordo de alguma variedade compacta W e $g: X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Se for possível estender g para todo o conjunto W , então $I_2(g, Z) = 0$ para qualquer subvariedade fechada Z , contida em Y , onde X e Z têm dimensão complementar.*

Demonstração. Seja $G: W \rightarrow Y$ uma extensão de g , tal que $\partial G = g$. Pelo Teorema 2.2.13, obtemos uma aplicação homotópica $F: W \rightarrow Y$, com $F \overline{\cap} Z$ e $\partial F \overline{\cap} Z$. Dessa forma, temos que $f = \partial F$ é homotópica a g e $I_2(g, Z) = \#f^{-1}(Z) \pmod{2}$. Como $F^{-1}(Z)$ é uma variedade compacta, unidimensional, com bordo, segue pelo Corolário 2.1.20, do Teorema 2.1.19, que $\#\partial F^{-1}(Z) = \#f^{-1}(Z)$ é um número par, assim, $I_2(g, Z) = \#f^{-1}(Z) \pmod{2} = 0$, como queríamos. \square

Teorema 2.3.9. *Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave de uma variedade compacta X numa variedade conexa Y e $\dim X = \dim Y$, então $I_2(f, \{y\})$ é o mesmo para todo ponto y de Y .*

Demonstração. Dado $y \in Y$ arbitrário, deforme f homotopicamente, se necessário, para obter a transversalidade com $\{y\}$. Agora, pelo Teorema 1.3.24, podemos encontrar uma vizinhança U de y tal que a pré-imagem $f^{-1}(U)$ é dada pela união disjunta $V_1 \cup \dots \cup V_m$ onde cada V_i é um aberto de X , aplicado difeomorficamente, por f , em U . Assim, $I_2(f, \{z\}) = m \pmod{2}$ para todo $z \in U$. Consequentemente, a função definida em Y por $y \mapsto I_2(f, \{y\})$ é localmente constante. Como Y é conexo, então essa aplicação é globalmente constante, como queríamos. \square

Definição 2.3.10. *Ao valor $I_2(f, \{y\})$, dado no teorema acima, chama-se grau módulo 2 de f e denota-se por $\text{grau}_2(f)$.*

Observe que calcular o grau módulo 2 de uma aplicação suave f é uma tarefa relativamente simples, basta conhecer um y que seja valor regular da aplicação f e contar os pontos de sua pré-imagem (i.e. $\text{grau}_2(f) = \#f^{-1}(y) \pmod{2}$). Contudo, vale enfatizar que o grau módulo 2 de $f: X \rightarrow Y$ está definido somente quando X é uma variedade compacta e Y é conexo. Sempre que falarmos de grau módulo 2 de f ou quisermos calcular $\text{grau}_2(f)$, estaremos assumindo estas duas hipóteses.

Como $\text{grau}_2(f)$ está definido como um número de interseção, então seguem imediatamente os seguintes resultados:

Teorema 2.3.11. *Aplicações homotópicas possuem o mesmo grau módulo 2.*

Teorema 2.3.12. *Se $X = \partial W$ e $f: X \rightarrow Y$ pode ser estendida a toda variedade com bordo W , então $\text{grau}_2(f) = 0$.*

Apesar de bem simples, estes dois últimos teoremas serão bastante usados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Teorema da Separação de Jordan-Brouwer

Degrau após degrau, estamos subido uma longa escada! Abordamos conceitos que envolvem Análise Real, Geometria Diferencial e Topologia, provamos diversos resultados ao longo do texto com o objetivo de construir essa escada necessária para alcançarmos nosso objetivo principal, provar o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Contudo, alguns degraus ainda faltam para chegarmos ao topo. Na próxima seção, completaremos a demonstração e chegaremos ao nosso objetivo.

3.1 Apresentação e Demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer

O clássico Teorema da Curva de Jordan diz que toda curva fechada e simples, em \mathbb{R}^2 , divide o plano em duas partes, “interior” e “exterior” da curva. Um resultado aparentemente óbvio, no entanto, conforme a complexidade da curva, percebemos que identificar essas duas regiões do plano pode ser mais difícil do que parece. (Observe a Figura 3.1.) Nesta seção, provaremos uma versão generalizada do Teorema da curva de Jordan para hiperfícies em \mathbb{R}^n . Mais precisamente, mostraremos o seguinte resultado: “O conjunto complementar de uma hiperfície X compacta em \mathbb{R}^n é constituído por duas componentes conexas abertas, D_0 e D_1 , onde o fecho $\overline{D_1}$ é variedade compacta com bordo $\partial\overline{D_1} = X$.”

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade compacta e conexa, de dimensão $n - 1$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave (em particular, f pode ser a aplicação inclusão de uma hiperfície em \mathbb{R}^n). Desejamos estudar como f “envolve” X em \mathbb{R}^n . Para isso, tomamos um ponto qualquer z , de \mathbb{R}^n , não pertencente ao conjunto $f(X)$. Para ver como $f(x)$ se “enrola” em torno de z , quando x varia em X , analisaremos quantas vezes o vetor unitário

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}, \quad (3.1)$$

que indica a direção de z para $f(x)$, aponta para uma direção dada.

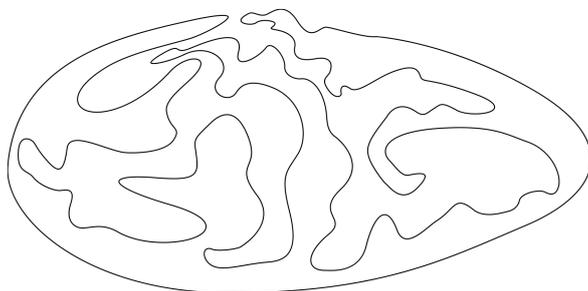


Figura 3.1: Curva plana, fechada e simples.

Sabemos, da Teoria de Interseção, que $u: X \rightarrow S^{n-1}$ atinge quase todos os vetores direcionais a mesma quantidade de vezes módulo 2, denominada $\text{grau}_2(u)$. Então aproveitando este invariante, damos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Define-se o número de voltas módulo 2 de uma aplicação suave $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, em torno de um ponto z , de \mathbb{R}^n , que não pertence a $f(X)$, como $W_2(f, z) := \text{grau}_2(u)$.*

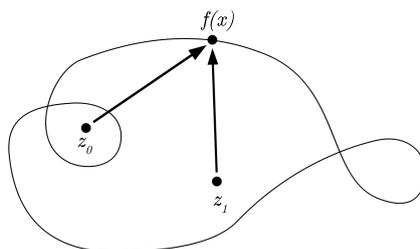


Figura 3.2: Uma curva fechada dando uma volta em torno dos pontos z_0 e z_1 .

O número de voltas módulo 2 de uma aplicação suave $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ será usado para estabelecer o Teorema 3.1.14, mas, antes, alguns lemas desenvolverão o Teorema 3.1.2, enunciado abaixo, que terá grande importância para desenvolver essa generalização do Teorema da Curva de Jordan.

Teorema 3.1.2. *Suponha que X é o bordo de uma variedade compacta D com bordo e seja $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave que estende f , isto é, $\partial F = f$. Suponha que z é um valor regular de F , que não pertence à imagem de f . Então $F^{-1}(z)$ é um conjunto finito e $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z)$ módulo 2. Em outras palavras, f envolve X em torno de z , tantas vezes quantas F atinge z , módulo 2.*

Os lemas a seguir ajudarão a construir a demonstração deste teorema.

Lema 3.1.3. *[GP74, Exercício 2.5.1] Se $z \notin F(D)$, então $W_2(f, z) = 0$.*

Demonstração. Como $z \notin F(D)$, considere a aplicação $\tilde{u}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\tilde{u}(x) = \frac{F(x) - z}{|F(x) - z|}.$$

Observe que \tilde{u} é suave, pois $F(x)$ é suave e $|F(x) - z| \neq 0$ para todo $x \in D$. Como $\partial F = f$, então $\tilde{u}|_X = u$, onde u é a aplicação definida em (3.1), e $|f(x) - z| \neq 0$, pois $z \notin F(D)$. Assim, temos uma aplicação suave u , definida em $X = \partial D$, que pode ser estendida a aplicação suave $\tilde{u}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 2.3.12, temos que $\text{grau}_2(u) = 0$, como queríamos. \square

Lema 3.1.4. [GP74, Exercício 2.5.2] *Suponha que $F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_l\}$. Para cada $i = 1, \dots, l$ e, em torno de cada y_i , seja B_i a imagem de uma bola em \mathbb{R}^n , via alguma parametrização de D (por simplicidade, também chamaremos B_i de bola). Suponha que as bolas B_i sejam disjuntas duas a duas e, também, disjuntas de $X = \partial D$. Se $f_i: \partial B_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição de F a ∂B_i , onde $i = 1, \dots, l$, então $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z)$, módulo 2.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que os conjuntos B_i , dados no enunciado, existem. Com efeito, para cada $i = 1, \dots, l$, tome-se ψ_i uma parametrização de X , em torno de y_i , tal que $\psi_i(0) = y_i$. Considere a bola aberta $B(0, \epsilon_i)$, de centro 0 e raio ϵ_i , onde ϵ_i é suficientemente pequeno, para que $\psi_i(B(0, \epsilon_i)) \subset \text{int}(D)$, para todo $i = 1, \dots, l$, e $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$, onde $B_i = \psi_i(B(0, \epsilon_i))$.

Seja

$$\hat{D} = D \setminus \bigcup_{i=1}^l B_i,$$

considere a aplicação $\hat{F} = F|_{\hat{D}}: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e observe que $z \notin \hat{F}(\hat{D})$.

Afirmamos que

$$\partial \hat{D} = X \cup \left(\bigcup_{i=1}^l \partial B_i \right).$$

Com efeito, observe, primeiramente, que $X \subset \hat{D}$ e, para todo $i = 1, \dots, l$, também temos $\text{fr}(B_i) \subset \hat{D}$, pois retiramos de D apenas as bolas abertas B_i e, pela Proposição 2.1.2, temos igualdade $\text{fr}(B_i) = \partial B_i$. Observe que se $x \in X$ ou $x \in \partial B_i$, então, por definição, $x \in \varphi(\partial U)$, onde $\varphi: U \rightarrow D$ é uma parametrização local de D , em torno de x e U é aberto de H^n . Entretanto, restringindo U a algum subconjunto aberto próprio, se necessário, contendo x , temos que φ é também uma parametrização de \hat{D} , pois é um difeomorfismo, logo leva abertos de H^n em abertos de \hat{D} . Dessa forma, temos que um dado ponto $x \in \hat{D}$, tal que $x \in X$ ou $x \in \partial B_i$, onde $i = 1, \dots, l$, este é, também, um ponto pertencente a $\partial \hat{D}$, pois continua sendo imagem, por meio de uma parametrização local φ de \hat{D} , de um ponto $y \in \partial H^n$ qualquer. Dessa forma, temos que

$$X \cup \left(\bigcup_{i=1}^l \partial B_i \right) \subset \partial \hat{D}.$$

Por outro lado, como $\hat{D} = D \setminus \bigcup_{i=1}^l B_i$, temos que pontos de ∂H^n são, por definição de variedade com bordo, aplicados, em ∂B_i , ou em X , por meio de parametrizações locais, pois estes estão contidos em \hat{D} . Dessa forma temos que

$$\partial \hat{D} \subset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^l \partial B_i \right).$$

Portanto, tendo provado as duas inclusões, provamos a afirmação.
Agora, considere a restrição de \hat{F} ao bordo de \hat{D} , dada por,

$$\hat{f} = \hat{F}|_{\partial\hat{D}} = F|_{X \cup (\cup_{i=1}^l \partial B_i)}.$$

Como $z \notin \hat{F}(\hat{D})$, pelo Lema 3.1.3, temos que $W_2(\hat{f}, z) = 0$.
Agora, considere a aplicação $u: \partial\hat{D} \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{\hat{f}(x) - z}{|\hat{f}(x) - z|}$$

e considere também, para cada $i = 1, \dots, l$, a aplicação $u_i: \partial B_i \rightarrow S^{n-1}$, dada por,

$$u_i(x) = \frac{f_i(x) - z}{|f_i(x) - z|}.$$

Observe que $u|_{\partial B_i} = u_i$ e que

$$u|_X(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

Com isso, temos

$$W_2(\hat{f}, z) = \#u^{-1}(z) = \#(u|_X)^{-1} + \#u_1^{-1}(z) + \dots + \#u_l^{-1}(z) \pmod{2}$$

e desse modo, temos

$$0 = W_2(\hat{f}, z) = W_2(f, z) + W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2}.$$

Assim,

$$-W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2}$$

donde,

$$W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2},$$

como desejado. \square

Lema 3.1.5. [GP74, Exercício 2.5.3] *Se z é valor regular de F , então é possível escolher as bolas B_i , do lema anterior, tais que $W_2(f_i, z) = 1$.*

Demonstração. Como z é valor regular de F , então, para cada $i = 1, \dots, l$, a aplicação $dF_{y_i}: T_{y_i}D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva, mas observe que $\dim D = n$, pois D é a região delimitada pelo bordo $\partial D = X$ que tem dimensão $n - 1$. Com isso, temos que $\dim T_{y_i}D = n$ e, dessa forma, temos que dF_{y_i} é um isomorfismo.

Pelo Teorema 1.3.24, existe uma vizinhança U , de z , contida em \mathbb{R}^n , tal que $f^{-1}(U) = V_1 \dots, V_l$, onde V_i é vizinhança de y_i e $f|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ é difeomorfismo. Para cada $i = 1, \dots, l$, considere uma bola fechada $A_i \subset U$, centrada em z , tal que $y_i \in F^{-1}(A_i) \subset V_i$ e $F|_{F^{-1}(A_i)}: F^{-1}(A_i) \rightarrow A_i$ é difeomorfismo.

Pela Proposição 2.1.12, a restrição $f_i := F|_{\partial(F^{-1}(A_i))}$ é um difeomorfismo sobre a fronteira de A_i , ∂A_i . Como o conjunto ∂A_i é uma esfera contida em \mathbb{R}^n e centrada em z , escrevemos $\partial A_i = rS^{n-1}(z)$, onde S^{n-1} é a esfera unitária, centrada em z e $r > 0$. Defina $B_i := F^{-1}(A_i \setminus \partial A_i)$ e observe que $\overline{B_i} = F^{-1}(A_i)$. Considere a aplicação $u_i: \partial B_i \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_i(x) = \frac{f_i(x) - z}{|f_i(x) - z|}.$$

Afirmamos que a aplicação $u_i: \partial B_i \rightarrow S^{n-1}$ é injetiva. Dados $a, b \in \partial B_i$, temos

$$f_i(a) = z + r_i v \text{ e } f_i(b) = z + r_i w,$$

com v e w são vetores da esfera unitária S^{n-1} , centrada em 0. Agora,

$$\begin{aligned} u_i(a) = u_i(b) &\Leftrightarrow \frac{f_i(a) - z}{|f_i(a) - z|} = \frac{f_i(b) - z}{|f_i(b) - z|} \Leftrightarrow \frac{v}{|v|} = \frac{w}{|w|} \\ &\Leftrightarrow v = w \Leftrightarrow z + r_i v = z + r_i w \\ &\Leftrightarrow f_i(a) = f_i(b) \Leftrightarrow a = b, \end{aligned}$$

onde a terceira equivalência segue de v e w serem vetores unitários de S^{n-1} e a última equivalência segue do fato de $f_i: \partial B_i \rightarrow \partial A_i$ ser difeomorfismo. Portanto, u_i é injetiva.

Por fim, da injetividade de u_i , segue que $\#u_i^{-1}(\{z\}) = 1 \pmod{2}$. Portanto, segue, por definição, que $W_2(f_i, z) = 1 \pmod{2}$ como desejado. \square

Finalmente, após demonstrar os três lemas, podemos dar início à demonstração do Teorema 3.1.2.

Demonstração do Teorema 3.1.2. Primeiramente, se $z \notin F(D)$, pelo Lema 3.1.3, temos $W_2(f, z) = 0$ e, obviamente, temos também que $F^{-1}(z) = \emptyset$. Logo um conjunto finito. Agora, se $F^{-1}(z) \neq \emptyset$, como z é valor regular de F e D é variedade compacta, o Teorema 1.3.24, garante que $F^{-1}(z)$ é um conjunto finito $\{y_1, \dots, y_l\}$. Tomando, para cada $i = 1, \dots, l$, uma bola B_i em torno de cada y_i , como no Lema 3.1.4, temos, por esse lema, que $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \pmod{2}$, onde $f_i: \partial B_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição de F a ∂B_i . Pelo Lema 3.1.5, temos $W_2(f_i, z) = 1$, donde $W_2(F, z) = l = \#F^{-1}(z) \pmod{2}$. Em todo caso, temos $F^{-1}(z)$ finito com $W_2(F, z) = \#F^{-1}(z) \pmod{2}$. \square

Agora, assumamos que X seja, de fato, uma hipersuperfície compacta e conexa em \mathbb{R}^n , isto é, uma variedade compacta e conexa de dimensão $n-1$. Se X realmente separa \mathbb{R}^n em “interior” e “exterior”, então X deve ser o bordo de uma variedade com bordo, compacta, n -dimensional, que chamaremos de “interior”. Neste caso, o Teorema 3.1.2 diz que se $z \in \mathbb{R}^n$ é um ponto qualquer, tal que $z \notin X$, então $W_2(X, z)$ deve ser 1 ou 0, dependendo se z está “dentro” ou “fora” de X .

Observação 3.1.6. *Aqui estamos considerando $W_2(X, z) = W_2(i_X, z)$, onde $i_X: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação inclusão.*

Os lemas 3.1.7 a 3.1.13, a seguir, ajudam a reverter o argumento para a provar o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Consideramos, então, uma hipersuperfície X , compacta, contida em \mathbb{R}^n .

Lema 3.1.7. *[GP74, Exercício 2.5.4] Seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Se x é um ponto qualquer de X e U é qualquer vizinhança de x em \mathbb{R}^n , então existe um ponto de U que pode ser conectado a z por uma curva que não intersecta X .*

Demonstração. De fato, seja S o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que, para toda vizinhança U de x , existe um ponto $y \in U$ conectado a z por um caminho que não intersecta X . Vamos verificar que S é não-vazio: Com efeito, dado $x \in X$, como X é hiperfície compacta de \mathbb{R}^n , para toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x existe um ponto $x_0 \in X$ tal que

$$d(x_0, z) = \inf\{d(x, z) : x \in X \cap U\}.$$

Para todo $t \in (0, 1)$, consideremos o caminho $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por

$$c(t) = tx_0 + (1 - t)z.$$

Se existisse $t_0 \in (0, 1)$ tal que $c(t_0) \in X \cap U$, então teríamos

$$d(x_0, z) = d(x_0, c(t_0)) + d(c(t_0), z),$$

pela definição da curva c . Donde $d(c(t_0), z) < d(x_0, z)$, mas isto contradiz o fato de que $d(x_0, z) \leq d(c(t_0), z)$, pela definição de x_0 . Como c é caminho contínuo, existe $s \in (0, 1)$ tal que $y := c(s) \in U$. Portanto, $x \in S$, logo S é não-vazio, como queríamos.

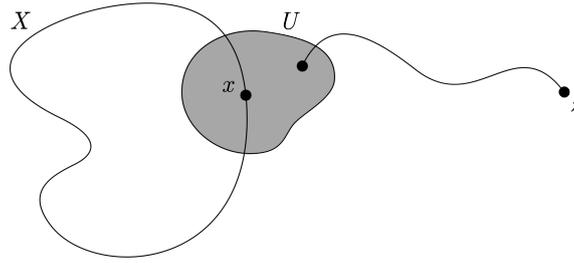


Figura 3.3: Qualquer vizinhança U de x contém um ponto que pode ser conectado a z por um caminho que não intersecta X .

□

Lema 3.1.8. [GP74, Exercício 2.5.5] O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui no máximo duas componentes conexas.

Demonstração. Dado $x \in X$, pelo Teorema da Forma Local das Imersões, existem parametrizações $\varphi: U \rightarrow X$ em torno de x , com $\varphi(0) = x$ e $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em torno de $i(x)$, com $\psi(0) = i(x)$, tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{i_{can}} & V, \end{array}$$

onde $i: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão de X em \mathbb{R}^n e $i_{can}: U \rightarrow V$ é a imersão canônica, $i_{can}(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Consideremos a bola aberta $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que se tenha $B(0, \epsilon) \subset V$. Consideremos as duas componentes conexas de $B(0, \epsilon) \setminus \{x_n = 0\}$

$$C_+ = B(0, \epsilon) \cap \{x_n > 0\} \quad \text{e} \quad C_- = B(0, \epsilon) \cap \{x_n < 0\}.$$

Definimos $B := \psi(B(0, \epsilon))$, $B_+ := \psi(C_+)$ e $B_- := \psi(C_-)$. Observamos que B_+ e B_- são conexos e $B \setminus X = B_+ \cup B_-$. Fixamos $x_0 \in B_+$ e $x_1 \in B_-$.

Agora, dado $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, pelo Lema 3.1.7, existe $y \in B$ que se conecta a z por uma curva que não intersecta X . Agora, o ponto y também conecta-se a x_0 ou a x_1 por uma curva que não intersecta X , pois o ponto y é um ponto pertencente a B_+ ou a B_- . Dessa forma temos, por justaposição de curvas que z conecta-se a x_0 , ou a x_1 , por um caminho que não intersecta X . Logo $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui, no máximo, duas componentes conexas, como queríamos. \square

Lema 3.1.9. [GP74, Exercício 2.5.6] *Se z_0 e z_1 pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus X$, então $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.*

Demonstração. Sejam z_0 e z_1 pontos da mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus X$ e seja $i_X: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, a aplicação de inclusão. Considere as aplicações $u_0: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_0(x) = \frac{i_X(x) - z_0}{|i_X(x) - z_0|} = \frac{x - z_0}{|x - z_0|}$$

e $u_1: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_1(x) = \frac{i_X(x) - z_1}{|i_X(x) - z_1|} = \frac{x - z_1}{|x - z_1|}.$$

Observe que u_0 e u_1 estão bem definidas, pois $z_0, z_1 \notin X$. Como z_0 e z_1 pertencem à mesma componente conexa C , considere uma curva

$$\begin{aligned} z: [0, 1] &\rightarrow C \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

cujas imagens pertencem a essa componente e $z(0) = z_0$ e $z(1) = z_1$. Considere $u_t: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_t(x) = \frac{x - z(t)}{|x - z(t)|}.$$

A aplicação $H: X \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$, dada por $H(x, t) = u_t(x)$ é uma homotopia entre u_0 e u_1 . Assim, temos, pelo Teorema 2.3.11, que $\text{grau}_2(u_0) = \text{grau}_2(u_1)$ e, dessa forma, segue da definição que $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$, como queríamos. \square

Lema 3.1.10. [GP74, Exercício 2.5.7] *Dado um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e um vetor direcional $\vec{v} \in S^{n-1}$, considere o raio r , partindo de z , na direção de \vec{v} , dado por*

$$r = \{z + t\vec{v} : t \geq 0\}.$$

O raio r é transversal a X se, e somente se \vec{v} é valor regular da aplicação direção $u: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{i_X(x) - z}{|i_X(x) - z|} = \frac{x - z}{|x - z|}.$$

Em particular, quase todo raio, partindo de z , intersecta X transversalmente.

Demonstração. Seja $i_X: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e considere as aplicações $u: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{i_X(x) - z}{|i_X(x) - z|} = \frac{x - z}{|x - z|},$$

onde $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e, $g: \mathbb{R}^n \setminus \{z\} \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$g(y) = \frac{y - z}{|y - z|}.$$

Observe que $g \circ i_X = u$ e, observe também que, como $g: \mathbb{R}^n \setminus \{z\} \rightarrow S^{n-1}$, podemos expressar o raio r da seguinte forma:

$$r = g^{-1}(\{\vec{v}\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \vec{v}\}.$$

O raio r ser transversal a X é equivalente a $g^{-1}(\{\vec{v}\})$ ser transversal à inclusão i_X . Pelo Teorema 1.4.7, $i_X \pitchfork g^{-1}(\{\vec{v}\})$ se, e somente se, $g \circ i_X \pitchfork \{\vec{v}\}$, ou seja, $u \pitchfork \{\vec{v}\}$.

Para provar o resultado enunciado, basta verificar que $u \pitchfork \{\vec{v}\}$ se, e somente se, \vec{v} é valor regular de $u: X \rightarrow S^{n-1}$. Como as duas afirmações são equivalentes a

$$Im(du_x) + T_w\{\vec{v}\} = T_w S^{n-1},$$

para todo $x \in X$ e $w = u(x)$, o resultado segue.

Por fim, pelo Teorema de Sard, quase todo \vec{v} é valor regular da aplicação u , portanto quase todo raio partindo de z é transversal a X , como queríamos. \square

Lema 3.1.11. [GP74, Exercício 2.5.8] *Suponha que r é o raio partindo de z_0 que intersecta X transversalmente em um conjunto não vazio, necessariamente finito. Suponha que z_1 é qualquer outro ponto de r , mas não pertence a X . Se l o número de vezes que r intersecta X entre z_0 e z_1 então, $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \pmod{2}$.*

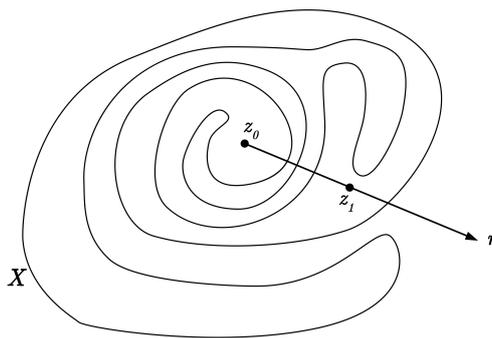


Figura 3.4: $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + 3 \pmod{2}$.

Demonstração. Seja r o raio partindo de z_0 , dado por

$$r = \{z_0 + t\vec{v} : t \geq 0\}.$$

O conjunto $r \cap X$ é um conjunto finito de pontos $\{y_1, \dots, y_m\}$.

Por hipótese z_1 é um ponto de r que não pertence a X , então $z_1 = z_0 + t_0 \vec{v}$, para algum $t_0 \geq 0$. Além disso, existem l pontos de $r \cap X$, $0 \leq l \leq m$, entre z_0 e z_1 . Considere as aplicações $u_0: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_0(x) = \frac{x - z_0}{|x - z_0|}$$

e $u_1: X \rightarrow S^{n-1}$, dada por

$$u_1(x) = \frac{x - (z_0 + t_0 \vec{v})}{|x - (z_0 + t_0 \vec{v})|}.$$

Observe que $u_0 = u_1$, se $t_0 = 0$. Como r é transversal a X temos, pelo Lema 3.1.10, que \vec{v} é valor regular de u_0 e de u_1 . Assim, temos

$$W_2(X, z_0) = \#u_0^{-1}(\{\vec{v}\}) \pmod{2} \quad \text{e} \quad W_2(X, z_1) = \#u_1^{-1}(\{\vec{v}\}) \pmod{2}.$$

O conjunto $u_1^{-1}(\{\vec{v}\})$ está contido no conjunto $u_0^{-1}(\{\vec{v}\})$, pois todos os valores regulares de u_1 , são valores regulares de u_0 , uma vez que o mesmo raio que parte de z_0 e intersecta X transversalmente, também intersecta X transversalmente a partir de z_1 , na direção de \vec{v} . Contudo, ainda estão contidos em $u_0^{-1}(\{\vec{v}\})$ os pontos, da interseção $r \cap X$, que estão entre z_0 e z_1 , pois r intersecta X transversalmente nesses pontos. Assim, temos

$$\#u_0^{-1}(\{\vec{v}\}) = \#u_1^{-1}(\{\vec{v}\}) + l$$

onde l é a quantidade de vezes que r intersecta X entre z_0 e z_1 , e como \vec{v} é valor regular de u_0 e u_1 , temos

$$W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \pmod{2},$$

como desejado. □

Lema 3.1.12. [GP74, Exercício 2.5.9] *O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui exatamente duas componentes conexas, a saber:*

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X : W_2(X, z) = 0\} \quad \text{e} \quad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X : W_2(X, z) = 1\}.$$

Demonstração. De fato, já sabemos do Lema 3.1.8 que $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui, no máximo, duas componentes conexas e sabemos do Lema 3.1.9 que dois pontos x e y pertencentes à mesma componente conexa possuem o mesmo número de voltas. Assim, se $z_0 \in D_0$ e $z_1 \in D_1$, então estes não podem estar na mesma componente conexa, pois $W_2(X, z_0) = 0$ e $W_2(X, z_1) = 1$.

Agora, vamos provar que, de fato, D_0 e D_1 são não-vazias. Com efeito, dado $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus X$, considere o raio r , partindo de z_0 e intersectando X transversalmente, cuja existência é garantida pelo Lema 3.1.10. Seja y um outro ponto de r , mas que não pertence a X , tal que entre z_0 e y exista apenas um ponto $x \in r \cap X$. Pelo Lema 3.1.11, temos que $W_2(X, z_0) = W_2(X, y) + 1 \pmod{2}$. Com isso, temos que z_0 e y estão em componentes conexas distintas e, além disso, temos que se $W_2(X, z_0)$ é par, então $W_2(X, y)$ é ímpar e vice-versa. Dessa forma, temos que D_0 e D_1 são não-vazias.

Sejam C_0 , a componente conexa de z_0 e C_1 , a componente conexa de z_1 , contidas em $\mathbb{R}^n \setminus X$. Pelo Lema 3.1.9, temos que $D_0 \subseteq C_0$ e $D_1 \subseteq C_1$. Por outro lado, considere, $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e C sua componente conexa, pelo Lema 3.1.8, temos que $C = C_0$ ou $C = C_1$, mas observe que $C_0 \subseteq D_0$ e $C_1 \subseteq D_1$. Dessa forma, temos que D_0 e D_1 são as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus X$, como queríamos.

Portanto, essas são precisamente as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus X$. \square

Lema 3.1.13. [GP74, Exercício 2.5.10] *Se $z \in \mathbb{R}^n$ é suficientemente grande, em norma, então $W_2(X, z) = 0$.*

Demonstração. Como X é compacta, X está contida numa bola fechada, centrada na origem e de raio $M > 0$. Denotaremos essa bola por $B := B[0, M]$.

Seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus B$, ou seja $|z| > M$. Aqui estamos considerando uma norma no espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Consideremos $y = z/|z|$ e vejamos que $u_z^{-1}(y) = \emptyset$, onde $u_z: X \rightarrow S^{n-1}$ é dada por

$$u_z(x) = \frac{x - z}{|x - z|}.$$

Suponhamos, com vista a uma contradição, que $u_z(x) = y$, para algum $x \in X$. Primeiro, observemos que, como $X \subset B$, então $|x| < M$. Agora observemos, também, que

$$\frac{x - z}{|x - z|} = \frac{z}{|z|},$$

ou seja,

$$x = z \left(1 + \frac{|x - z|}{z} \right).$$

Logo,

$$|x| = \left| z \left(1 + \frac{|x - z|}{|z|} \right) \right| = |z| \left(1 + \frac{|x - z|}{|z|} \right),$$

como $|z| > M$ e $1 + |x - z|/|z| > 1$, temos $|x| > M$. Disto, obtivemos uma contradição! Dessa forma, temos que $u_z^{-1}(y) = \emptyset$ e, portanto y é trivialmente valor regular de u_z . Assim, temos,

$$W_2(X, z) = \#u_z^{-1}(y) = 0 \pmod{2},$$

como queríamos. \square

Teorema 3.1.14. [GP74, Exercício 2.5.11] [Teorema da Separação de Jordan-Brouwer] *O conjunto complementar de uma hiperfície X compacta em \mathbb{R}^n é constituído por duas componentes conexas abertas, D_0 e D_1 , onde $\overline{D_1}$ é variedade compacta com bordo $\partial\overline{D_1} = X$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.12, temos que $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui exatamente duas componentes conexas, a saber:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X : W_2(X, z) = 0\} \quad \text{e} \quad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X : W_2(X, z) = 1\}.$$

Afirmamos que os conjuntos D_0 e D_1 são abertos. De fato, seja $z_0 \in D_0$, pelo Lema 3.1.7, dados $x \in X$ e uma vizinhança U , de x , contida em \mathbb{R}^n , existe $z \in U$ tal que z_0 se liga a z por uma curva que não intersecta X e, com isso, temos que z_0 e z estão na mesma componente conexa e, assim, segue pelo Lema 3.1.9, que

$$W_2(X, z) = W_2(X, z_0) = 0.$$

Como $z \notin X$ e X é compacta, a distância $d(z, X) > 0$ e tomando $0 < \epsilon < d(z, X)$, de modo que a bola $B(z, \epsilon)$, aberta em \mathbb{R}^n , esteja contida em U , temos, novamente pelo Lema 3.1.9, que todo ponto $y \in B(z, \epsilon)$ é tal que $W_2(X, y) = 0$. Dessa forma, temos que $B(z, \epsilon) \subset D_0$, logo o conjunto D_0 é aberto. Para o conjunto D_1 , um procedimento totalmente análogo, mostra que este também é aberto. Portanto, os conjuntos D_0 e D_1 são abertos.

Agora, vamos mostrar que o conjunto $D_1 \cup X$ é compacto. Com efeito, $D_1 \cup X$ é fechado, pois seu complementar, em \mathbb{R}^n , é a componente conexa D_0 e esta, é aberta, como acabamos de ver. Para mostrar que $D_1 \cup X$ é limitado, basta mostrar que D_1 é limitado, pois temos, por hipótese que X é compacto, logo limitado. Suponha com vista a uma contradição que D_1 não seja limitado. Pelo Lema 3.1.13, tome $z_1 \in D_1$, suficientemente grande, em norma, tal que $W_2(X, z_1) = 0$. Isto é uma contradição, pois todo ponto $z_1 \in D_1$ é tal que $W_2(X, z_1) = 1$. Dessa forma, temos que D_1 é limitado e $D_1 \cup X$ também é limitado, pois é a união de conjuntos limitados. Portanto $D_1 \cup X$ é compacto.

O próximo passo é mostrar que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$. Para isso, como $\overline{D_1} \subset D_1 \cup X$ e $D_1 \subset \overline{D_1}$, é suficiente mostrar que todo ponto $x \in X$ é limite de alguma sequência $\{z_k\}$ de pontos em D_1 . Com efeito, dados $z_0 \in D_1$, $x \in X$ e uma bola aberta $B(x, \epsilon_1)$, de centro x e raio ϵ_1 , contida em \mathbb{R}^n , existe, pelo Lema 3.1.7, um ponto $z_1 \in D_1 \cap B(x, \epsilon_1)$, que se conecta a z_0 por uma curva que não intersecta X . Tomando uma bola aberta $B(x, \epsilon_2)$, de centro x e raio ϵ_2 , em \mathbb{R}^n , contida em $B(x, \epsilon_1)$, o Lema 3.1.7 garante que existe $z_2 \in D_1 \cap B(x, \epsilon_2)$, tal que z_2 se conecta a z_0 , por meio de uma curva que não intersecta X . Mais geralmente, numa bola aberta $B(x, \epsilon_k)$ de x , com raio ϵ_k , estritamente contida em $B(x, \epsilon_{k-1})$, com $\lim_k \epsilon_k = 0$, existe $z_k \in D_1 \cap B(x, \epsilon_k)$, tal que z_k se conecta a z_0 , por meio de uma curva que não intersecta X . Dessa forma, temos que $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência de pontos em D_1 , cujo limite $\lim z_k = x$. Portanto $\overline{D_1} = D_1 \cup X$.

Finalmente, vamos mostrar que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$ é uma variedade com bordo $\partial \overline{D_1} = X$. Seja $x \in \overline{D_1}$. Se $x \in D_1$, sabemos, pela Proposição 1.1.13 que D_1 é uma subvariedade, sem bordo, de \mathbb{R}^n , com isso, basta tomar uma parametrização $\varphi: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset D_1$, onde W é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ e V é uma vizinhança de x , em X .

Agora, se $x \in X$, como X é hipersuperfície, temos que X é uma variedade de dimensão $n - 1$, contida em \mathbb{R}^n . Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, temos que existe uma parametrização $\psi: B \rightarrow U$, onde B é uma bola centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ e com raio $\epsilon > 0$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de x , tal que se $\psi^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$, então $\psi^{-1}|_{U \cap X} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Afirmamos que U é “separado” em dois conjuntos, um contido em D_0 e o outro contido em D_1 . Com efeito, seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Pelo Lema 3.1.7, existe $y \in U$ tal que z e y estão conectados por uma curva que não intersecta X . Logo, z e y pertencem a mesma componente conexa e, pelo Lema 3.1.9, temos que $W_2(X, z) = W_2(X, y)$. Dessa forma, temos que os dois pontos y e z pertencem a D_0 ou pertencem a D_1 . Como isto vale para qualquer $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e, provamos

no Lema 3.1.12 que D_0 e D_1 são não-vazias, temos provada a nossa afirmação. Consideremos os conjuntos

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \text{ e } \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))).$$

Como $B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))$ é conexo e ψ é contínua, o conjunto $\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})))$ é conexo e, ou está totalmente contido em D_0 , ou está totalmente contido em D_1 . Analogamente, temos que o conjunto $\psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})))$ é conexo e, ou está totalmente contido em D_0 , ou está totalmente contido em D_1 . Além disso,

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \cap \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) = \emptyset$$

caso contrário, contrariaria a sobrejetividade do difeomorfismo ψ .

Suponhamos que

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_1 \text{ e } \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_0.$$

Dessa forma, temos que $\psi|_{B \cap H^n}$ é uma parametrização de $\overline{D_1}$, em torno de x . Agora, se ocorrer o contrário, isto é,

$$\psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_1 \text{ e } \psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_0$$

temos que $\psi|_{B \cap -H^n}$ é uma parametrização local, em torno de x .

Portanto, temos que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$ é uma variedade, compacta, com bordo $\partial \overline{D_1} = X$, como queríamos. \square

3.2 Método para Determinar se um Dado Ponto de \mathbb{R}^n Está na Região Interior a uma Hipersuperfície de \mathbb{R}^n

O Teorema de Jordan-Brouwer garante que o complementar da hipersuperfície X , em \mathbb{R}^n , divide o plano em duas componentes conexas D_0 , a parte externa, e D_1 , a parte interna da região delimitada pela hipersuperfície X . Observamos, também, que essas componentes podem ser distinguidas, uma da outra, de acordo com o índice de rotação em cada um de seus pontos. (O índice de rotação é igual em todos os pontos de cada componente conexa.) Com isso, notamos que o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer oferece também, uma forma simples, porém bela, para determinar se um ponto qualquer de $\mathbb{R}^n \setminus X$ pertence a D_0 ou D_1 . O teorema abaixo apresentará esse método.

Corolário 3.2.1. *[GP74, Exercício 2.5.12] Dado um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, se r é um raio partindo de z , transversal à hipersuperfície X , então z pertence à região interior a X (isto é, z pertence a D_1) se, e somente se, r intersecta X em um número ímpar de pontos (Observe a Figura 3.5).*

Demonstração. Sejam $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e $r = \{z + t\vec{v} : t \geq 0\}$ um raio, partindo de z , transversal a X , cuja existência é garantida no Lema 3.1.10. Como r é transversal a X , temos pelo Teorema 1.4.5 que $\text{codim}(r \cap X) = \text{codim } r + \text{codim } X = n - 1 + 1 = n$ e, como X é compacto e r é fechado, temos que $r \cap X$ é

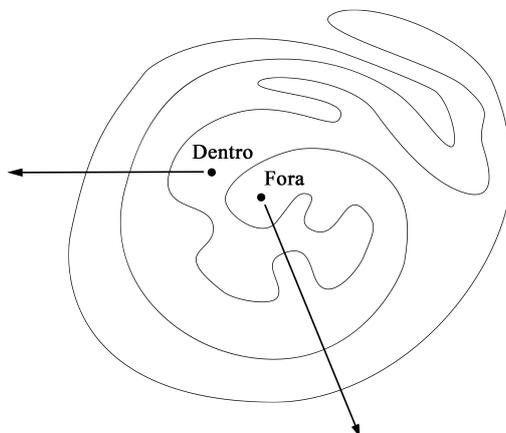


Figura 3.5: O raio partindo do ponto que está na região interior a X intersecta X três vezes e o raio que parte do ponto que está na região exterior a X intersecta X quatro vezes.

uma variedade compacta 0-dimensional e, portanto, $r \cap X$ é um conjunto finito de pontos $\{y_1, \dots, y_m\}$, onde $m := r \cap X$.

Definimos $D := \max\{d(y_i, z) : i = 1, \dots, m\}$. Consideremos $y \in r$ tal que $d(z, y) > D$ e com norma $|y|$ suficientemente grande, de modo que, pelo Lema 3.1.13, tenhamos $W_2(X, y) = 0$. Como $d(y, z) > D$, o número de pontos de $r \cap X$ entre y e z é m . Dessa forma, temos, pelo Lema 3.1.11, que

$$\begin{aligned} W_2(X, z) &= W_2(X, y) + m \pmod{2} \\ &= 0 + m \pmod{2} \\ &= m \pmod{2}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade se dá pelo fato de que $d(z, y) > D$. Portanto, temos que

$$W_2(X, z) = m \pmod{2}. \quad (3.2)$$

Dessa forma, temos que se $z \in D_1$, o Lema 3.1.12 garante que $W_2(X, z) = 1$, com isso, temos pela equação (3.2) que m é ímpar. Reciprocamente, se m é ímpar, temos que $m = W_2(X, z) \equiv 1 \pmod{2}$, e portanto $z \in D_1$, como queríamos. \square

Observação 3.2.2. *Aqui, o símbolo “ \equiv ” representa a “congruência módulo 2.”*

Observação 3.2.3. *Também temos, diretamente do Corolário 3.2.1, que se $x \in D_0$, então $m = W_2(X, z) \equiv 0 \pmod{2}$, isto é, m é par e dessa forma, temos que para sabermos se um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ pertence a D_1 , ou não, basta contar quantas vezes o raio r , partindo de z e transversal a X , intersecta X transversalmente.*

3.3 O Teorema de Borsuk-Ulam

Usaremos agora, nossa teoria e o conceito de número de voltas apresentado na Seção 3.1 para dar uma demonstração de um resultado bastante conhecido na topologia, apresentado pelos matemáticos poloneses Karol Borsuk (1905 – 1982) e Stanislaw Marcin Ulam (1909 – 1984).

Lema 3.3.1. *[GP74, Exercício 2.4.8] Se $f: S^1 \rightarrow S^1$ é uma aplicação suave, então existe uma aplicação suave $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(\cos t, \sin t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)))$ e $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$, para algum q inteiro. Além disso, $\text{grau}_2(f) = q$, mod 2.*

Demonstração. Seja $f: S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação suave. Definimos a aplicação $h: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ como $h(t) = f(\cos(t), \sin(t))$. Consideremos a aplicação de recobrimento $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Pela propriedade de levantamento único de caminhos (v., por exemplo, [Lim12a, Proposição 6, p.129]), existe uma aplicação $\hat{g}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ \hat{g} = h$ e $\hat{g}(2\pi) - \hat{g}(0) = 2\pi q$, com q inteiro. Estendemos a aplicação \hat{g} a uma aplicação $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi$.

Vejam agora que $\text{grau}_2(f) = q$, mod 2. Seja $y \in S^1$. Vamos estudar o conjunto $f^{-1}(\{y\})$. Consideremos $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(y_0 + 2k\pi) = y$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como g é extensão de \hat{g} tal que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi$ e $\hat{g}(2\pi) = \hat{g}(0) + 2\pi q$, segue que $\#g^{-1}(\{y_0 + 2\pi k\}) = q$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\pi_0(g^{-1}(\{y_0\}))$ é um conjunto com q elementos e $\pi_0(g^{-1}(y_0)) = \pi_0(g^{-1}(y_0 + 2k\pi))$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $\pi_0: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Logo, $f^{-1}(\{y\}) = \pi_0(g^{-1}(y_0))$ tem q elementos, donde $\text{grau}_2(f) = q$, mod 2. \square

Teorema 3.3.2 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Seja $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ uma aplicação suave, cuja imagem não contém a origem. Se f satisfaz a condição de simetria, isto é, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in S^k$, então $W_2(f, 0) = 1$.*

Em suma, qualquer aplicação f simétrica em torno da origem, deve envolvê-la num número ímpar de voltas.

Demonstração. Usaremos o princípio da indução sobre o expoente k .

Se $k = 1$, é suficiente mostrar que se $f: S^1 \rightarrow S^1$ é uma aplicação antípoda, então $\text{grau}_2(f) = 1$. Com efeito, seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a aplicação definida no Lema 3.3.1, dada por $g(t) = tq$, onde $q \in \mathbb{Z}$ é ímpar. Dado $s \in \mathbb{R}$, observemos que $g(s + \pi) = g(s) + \pi q$. Vimos no exemplo 1.5.2, que, como $n = 1$, ímpar, aplicação f é homotópica a aplicação i_{S^1} . Agora, aplicando o Lema 3.3.1 a i_{S^1} e considerando a aplicação g que acabamos de redefinir, temos $\text{grau}_2(i_{S^1}) = 1$, mas como f e i_{S^1} são homotópicas, pelo Teorema 2.3.11, temos que $\text{grau}_2(i_{S^1}) = \text{grau}_2(f) = 1$.

Agora, assumiremos que o Teorema é válido para $k - 1$. Seja $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$. Consideremos S^{k-1} o equador da esfera S^k , mergulhado na mesma, por uma aplicação $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0)$. A ideia para esta demonstração é usar um argumento parecido ao usado para demonstrar o Corolário 3.2.1, na Seção 3.2. Vamos calcular $W_2(f, 0)$ contando quantas vezes a aplicação f intersecta uma reta r , em \mathbb{R}^{k+1} . Escolhendo r disjunta da imagem do equador, podemos usar a hipótese de indução para mostrar que o equador “envolve” r um número ímpar de vezes. Finalmente, podemos calcular a interseção de f com r , uma vez que conhecemos o comportamento de f no equador de S^{k+1} .

Denotemos a restrição de f ao equador S^{k-1} por g . Escolhendo uma reta r adequada, podemos usar o Teorema de Sard para escolher um vetor unitário \vec{v} , tal que \vec{v} é valor regular de ambas as aplicações

$$\frac{g}{|g|} : S^{k-1} \rightarrow S^k \text{ e } \frac{f}{|f|} : S^k \rightarrow S^k$$

Da simetria, temos que $-\vec{v}$ também é valor regular de ambas as aplicações. Comparando as dimensões, vemos que a regularidade para da aplicação $g/|g|$ significa, simplesmente, que $g/|g|$ nunca atinge \vec{v} ou $-\vec{v}$. conseqüentemente, $g/|g|$ nunca intersecta a reta $r := t\vec{v}$, onde $t \in \mathbb{R}$, arbitrário. A regularidade da aplicação $f/|f|$, no vetor \vec{v} significa, pelo Teorema 1.4.7, $f \pitchfork r$.

Agora, por definição,

$$W_2(f, 0) = \text{grau}_2 \left(\frac{f}{|f|} = \# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\vec{v}) \right) \pmod{2}.$$

Além disso, $f/|f|$ atinge $+\vec{v}$ a mesma quantidade de vezes que atinge $-\vec{v}$, devido a sua simetria. Assim, temos

$$\# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\vec{v}) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(r).$$

Podemos calcular este resultado no hemisfério superior, apenas. Seja f_+ a restrição de f ao hemisfério superior $S_+^k = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^k : x_{k+1} \geq 0\}$. Pela simetria de f e pelo fato de que a imagem de do equador de S^k , por f não intersecta r , e sabemos que

$$\# f_+^{-1}(r) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(r).$$

Temos, assim, que $W_2(f, 0) = \# f_+^{-1}(r) \pmod{2}$.

A vantagem desta última expressão para $W_2(f, 0)$, é que o hemisfério superior é uma variedade com bordo $\partial S_+^k = S^{k-1}$, assim, poderemos usar a hipótese de indução. Entretanto, as dimensões não estão corretas para aplicar a hipótese de indução à aplicação $g : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$. Seja V o complemento ortogonal de r e seja $\pi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow V$ a projecção ortogonal. Como g é simétrica e π é linear, a composição $\pi \circ g : S^{k-1} \rightarrow V$ é simétrica, além disso, $\pi \circ g$ nunca se anula pois g não intersecta $\pi^{-1}(0) = r$. Identificando o espaço vetorial k -dimensional V com \mathbb{R}^k e aplicando a hipótese de indução, temos $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$.

Agora, como $f_+ \pitchfork r$,

$$\pi \circ f_+ : S_+^k \rightarrow V$$

é transversal a $\{0\}$. Assim, pelo Teorema 3.1.2, temos

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \#(\pi \circ f)^{-1}(0).$$

Entretanto,

$$(\pi \circ f)^{-1}(0).$$

Dessa forma, temos que

$$W_2(f, 0) = \# f_+^{-1}(r) = W_2(\pi \circ g, 0) = 1 \pmod{2},$$

como queríamos. \square

Uma observação geométrica muito simples resulta a partir da demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam:

Corolário 3.3.3. *Se $f: S^k \rightarrow R^{k-1} \setminus \{0\}$ em torno da origem, então f intersecta toda reta r que passa pela origem, pelo menos uma vez.*

Demonstração. Se f não atingir r , então basta que usemos esta reta na demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam e obteremos a seguinte contradição

$$W_2(f, 0) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(r) = 0.$$

□

Corolário 3.3.4. *Quaisquer k funções suaves f_1, \dots, f_k definidas em S^k que satisfazem a condição de simetria, isto é, $f_i(-x) = -f_i(x)$, com $i = 1, \dots, k$, devem possuir um zero em comum.*

Demonstração. Supondo que não exista esse valor comum onde todas as f_i se anulam, $i = 1, \dots, n$, apliquemos o corolário anterior à aplicação $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), 0)$, tomando o eixo x_{k+1} como sendo a reta r . □

Referências Bibliográficas

- [Bro12] L.E.J. Brouwer, *Beweis des jordanischen satzes für n -dimensionalen raum*, Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen, 1912.
- [dC05] M.P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superficies*, SBM, 2005.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall, 1974.
- [Jor09] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'ecole polytechnique*, Gauthier-Villars, 1909.
- [Lee05] J.M Lee, *Introduction to smooth manifolds*, University of Washington, Department of Mathematics, 2005.
- [Lim77] E.L. Lima, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.
- [Lim11] ———, *Variedades diferenciáveis*, IMPA, 2011.
- [Lim12a] ———, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, IMPA, 2012.
- [Lim12b] ———, *Álgebra linear*, IMPA, 2012.
- [Lim16a] ———, *Análise real*, vol. 2, IMPA, 2016.
- [Lim16b] ———, *Curso de análise*, vol. 2, IMPA, 2016.
- [Mar05] F.C.V. Marinho, *Teorema da separação de jordan-brouwer-alexander*, UFRJ, 2005.
- [Mil65] J.W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.
- [Veb05] O. Veblen, *Theory of plane curves in non-metrical analysis situs*, vol. 6, American Mathematics Society, 1905.