UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Yargo Pezzin Souza

Introdução à Teoria da Estabilidade com Implementação Numérica

Vitória
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Yargo Pezzin Souza

Introdução à Teoria da Estabilidade com Implementação Numérica

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Silveira Camargo

Vitória
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial Tecnológica,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)
Sandra Mara Borges Campos – CRB-6 ES-000593/O

S729i

Souza, Yargo Pezzin, 1991-
Introdução à teoria da estabilidade com implementação numérica / Yargo Pezzin Souza. – 2018.
154 f. : il.

Orientador: Walnório Graça Ferreira.
Coorientador: Rodrigo Silveira Camargo.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Estabilidade estrutural. 2. Método de Newton-Raphson. 3. Sistemas não-lineares. I. Ferreira, Walnório Graça. II. Camargo, Rodrigo Silveira. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 624

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

INTRODUÇÃO À TEORIA DA ESTABILIDADE COM IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Yargo Pezzin Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Aprovada no dia **27 de fevereiro de 2018** por:

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira
Doutor em Engenharia Civil
Orientador - UFES

Rodrigo Silveira Camargo.

Prof. Dr. Rodrigo Silveira Camargo
Doutor em Engenharia Civil
Coorientador - UFES

Fernando C. Meira Menandro

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro
Doutor em Engenharia Mecânica
Examinador Externo - UFES

p/ Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Doutor em Engenharia Civil
Examinador Externo – UFES
Por meio de vídeo conferência

Vitória – ES, fevereiro de 2018

RESUMO

Um dos principais objetivos da engenharia estrutural tem sido tornar as estruturas mais esbeltas e econômicas diminuindo seu peso e o consumo de materiais sem, contudo, comprometer sua estabilidade. O aumento da esbeltez dos elementos estruturais torna-os mais susceptíveis a grandes deflexões laterais antes de ocorrer sua ruptura física. A análise da estabilidade de sistemas estruturais esbeltos normalmente envolve a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF). Como consequência, um sistema de equações algébricas não lineares é gerado e sua solução é obtida, em geral, por meio de procedimento incremental-iterativo. Este trabalho se propõe a fazer uma apresentação moderna e prática sobre esse importante tema da engenharia estrutural. Procedimentos numérico-computacionais são apresentados para a análise da estabilidade de sistemas não lineares com um e dois graus de liberdade de forma a facilitar o entendimento para os que pretendem estudar o tema, visto que carregam consigo os conceitos e as implementações numéricas necessárias para a solução de problemas mais complexos com vários graus de liberdade. Todos os exemplos são resolvidos analiticamente pelo Princípio da Energia Potencial Total Estacionária e numericamente pelo método de Newton-Raphson. É deduzido o método do comprimento de arco e aplicado no sistema de um grau de liberdade que apresenta ponto limite de carga. São introduzidos detalhes da implementação computacional, conceitos de estabilidade, solução analítica de um sistema geometricamente e fisicamente não linear. São apresentados exemplos numéricos e disponibilizados os códigos das implementações numéricas em linguagem computacional.

Palavras-chave: estabilidade, análise não-linear, newton-raphson, comprimento de arco

ABSTRACT

One of the main structural engineering goals has been to make the slenderest and cheapest structure by reducing its weight and material consumption without compromising their stability. Increasing the elements slenderness makes them even more susceptible to large side deflections before they break. Stability analysis of slender structural systems usually involves the use of Finite Element Method (FEM). As a result, a non-linear algebraic system is obtained and its solution, in most of cases, can be found by iterative incremental procedures. This work aims to present in a modern way this important theme for structural engineering. Computational numerical procedures for analysis of non-linear systems stability with one and two degrees of freedom are shown, aiming to facilitate the understanding, since they bring the basic concepts and the necessary numerical implementations for the solution of more complex problems with many degrees of freedom. All examples are solved analytically by the Principle of Stationary Total Potential Energy and numerically by the Newton-Raphson method. The method of arc length is deduced and applied in the system of one degree of freedom which presents a load limit point Details of the computational implementation, stability concepts, and analytical solution of a material and geometric non-linear system will be introduced. Numeric examples and their implementations codes in computational language are made available.

Keywords: stability, nonlinear analysis, newton-raphson, arc-length

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Massas cilíndricas em equilíbrio estático 18
Figura 2.2 - Perturbação de grande magnitude 19
Figura 2.3 - Exemplo de comportamento de arco abatido 19
Figura 2.4 - Equilíbrio de barra rígida vertical solicitada à tração 20
Figura 2.5 - Equilíbrio de barra rígida vertical solicitada à compressão 21
Figura 2.6 – Exemplo de trajetória de equilíbrio com identificação de seus pontos críticos 23
Figura 2.7 – Exemplo de trajetória de equilíbrio encontrada quando se utiliza controle de carga 24
Figura 2.8 – Exemplo de trajetória de equilíbrio encontrada quando se utiliza controle de deslocamento 24
Figura 3.1 - Ilustração gráfica do método de Newton-Raphson 27
Figura 3.2 - Representação gráfica da solução predita 29
Figura 3.3 – Aproximação da função com três passos de cargas utilizando apenas a solução predita 30
Figura 3.4 – Representação gráfica da solução Corretiva 31
Figura 3.5 – Fases predita e corretiva para um passo de carga 32
Figura 3.6 – Fases predita e corretiva para 3 passos de carga 33
Figura 3.7 - Método de Newton-Raphson padrão 35
Figura 3.8 - Método de Newton-Raphson modificado 35
Figura 3.9 – Representação gráfica da solução inicial tangente (solução incremental predita) no método do Comprimento de Arco 37
Figura 3.10 – Representação gráfica da solução corretiva (solução iterativa) no método do Comprimento de Arco 38
Figura 3.11 – Ilustração gráfica de um ciclo iterativo no método do Comprimento de Arco (solução predita e soluções corretivas) 38
Figura 3.12 – Representação geométrica do vetor $\mathbf{w} = (\Delta\boldsymbol{u}, \Delta\lambda)$ (obtido a partir da solução incremental) 41
Figura 3.13 – Representação geométrica dos vetores $\mathbf{v}1 = (\Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}1, \Delta\lambda + \delta\lambda1)$ e $\mathbf{v}2 = (\Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}2, \Delta\lambda + \delta\lambda2)$ (obtidos a partir da solução iterativa) 41
Figura 3.14 – Representação gráfica das projeções $DOT1$ e $DOT2$ $u$tilizadas para a escolha da raiz desejada de $\delta\lambda$ 42
Figura 4.1 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso e mola circular 44

Figura 4.2 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.1 48
Figura 4.3 - Gráfico da energia potencial para 1 kN de força aplicada 49
Figura 4.4 - Gráfico da energia potencial para 3 kN de força aplicada 49
Figura 4.5 - Gráfico da energia potencial para 5 kN de força aplicada 50
Figura 4.6 - Gráfico da energia potencial para 7 kN de força aplicada 50
Figura 4.7- Gráfico da energia potencial para 9 kN de força aplicada 51
Figura 4.8 - Variação da energia potencial total e analogia com a massa esférica 52
Figura 4.9 – Pilar submetido a uma carga de compressão F e caminho secundário de equilíbrio 53
Figura 4.10 – Placa submetida a tensão de compressão crítica e caminho secundário de equilíbrio 53
Figura 4.11 – Comportamento pós-crítico de PFF 54
Figura 4.12 – Solução gráfica do sistema com aproximação pela expansão da série de Taylor com dois termos 55
Figura 4.13 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso com imperfeição e mola circular 55
Figura 4.14 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.13 58
Figura 4.15 - Comparação entre o resultado analítico e numérico da Figura 4.1 com $k = 30\ \text{kNm}$ e $L = 6\ \text{m}$ 60
Figura 4.16 - Comparação entre o resultado analítico e numérico para o sistema da Figura 4.13 com $k = 30\ \text{kNm}$, $L = 6\ \text{m}$ e $\varphi_0 = 5°$ 62
Figura 4.17 – Representação gráfica da estratégia numérica de Newton-Raphson 71
Figura 4.18 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo elasto-plástico com encruamento linear 72
Figura 4.19 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo elástico-perfeitamente plástico 73
Figura 4.20 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo não linear elástico 73
Figura 4.21 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo I com $\alpha L = 2\ \text{rad}$ 76
Figura 4.22 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha L = 2\ \text{rad}$ 77

Figura 4.23 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo III 77
Figura 4.24 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo I com $\alpha L = 1{,}5$ rad 77
Figura 4.25 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha L = 1{,}5$ rad...78
Figura 4.26 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha L = 0{,}5$ rad...78
Figura 4.27 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso e mola linear 79
Figura 4.28 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.27 81
Figura 4.29 - Variação de energia potencial total e analogia com massa esférica 82
Figura 4.30 - Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema com $k = 30$ kNm e $L = 6$ m..83
Figura 4.31 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso com imperfeição inicial e mola linear 84
Figura 4.32 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.31 85
Figura 4.33 - Variação da carga-limite com as imperfeições 86
Figura 4.34 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 5°$ pelo método de Newton-Raphson padrão......................89
Figura 4.35 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $L = 6$ m, $\varphi_0 = 5°$ e modelo NLF III pelo método de Newton-Raphson padrão....................89
Figura 4.36 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $L = 6$ m, $\varphi_0 = 5°$ pelo método do Comprimento de Arco..90
Figura 4.37 - Sistema com bifurcação assimétrica..90
Figura 4.38 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.37 92
Figura 4.39 - Variação de energia potencial total e analogia com massa esférica 92
.Figura 4.40 - Solução gráfica numérica para o sistema da Figura 4.37 com $k = 30$ kNm e $L = 6$ m...94
Figura 4.41 - Solução gráfica numérica para o sistema da Figura 4.37 com $L = 6$ m e rigidez da mola segundo o modelo NLF III..95

Figura 4.42 - Sistema sem bifurcação 95
Figura 4.43 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.42 97
Figura 4.44 - Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema da Figura 4.42 com $k = 30$ kNm, $L =$ 6 m e $\varphi_0 = 80°$.. 98
Figura 5.1 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade.. 99
Figura 5.2 – Modo de flambagem correspondente a F_1 (primeiro modo)............................. 103
Figura 5.3 - Modo de flambagem correspondente a F_2 (segundo modo).............................. 103
Figura 5.4 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 1$ kN 106
Figura 5.5 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 30$ kN 107
Figura 5.6 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 60$ kN 107
Figura 5.7 - Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 90$ kN............................... 108
Figura 5.8 - Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 120$ kN 108
Figura 5.9 - Gráfico da energia potencial total e derivadas primeiras para carga de $F = 15$ kN 109
Figura 5.10 - Gráfico da energia potencial total e derivadas segundas para carga de $F = 15$ kN 110
Figura 5.11 - Posições de equilíbrio para diferentes carregamentos 111
Figura 5.12 - Caminho de equilíbrio para as duas soluções encontradas.............................. 112
Figura 5.13 – Gráfico obtido pela solução numérica do sistema da Figura 5.1 capturando parte do caminho de equilíbrio do eixo $\varphi1 = \varphi2$ (código numérico na Tabela B.15, Apêndice B) 112
Figura 5.14 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade a) em sua posição com imperfeição geométrica inicial b) em sua posição deslocada.. 113
Figura 5.15 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade a) geometria do sistema em sua posição com imperfeição geométrica inicial b) geometria do sistema em sua posição deslocada 114
Figura 5.16 – Ilustração gráfica das superfície das funções geradas quando cada componente do vetor de equações estáticas $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ é nula ($k = 30kNm$; $L = 6m$; $\varphi01 = \varphi02 =$ 0,05 rad; $\varepsilon = 0$).. 120
Figura 5.17 – Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema da Figura 5.14 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 0{,}05$ rad 121
Figura A.1- Sistema barra-mola submetido ao momento fletor M.. 127
Figura A.2 – Sistema barra-mola submetido a uma força F.. 128

Figura A.3 – Convenção de deslocamentos positivos para a barra de pórtico plano 129
Figura A.4 – (a) Problema de autovalor segundo Vaz (2011) (b) Ilustração da obtenção da carga crítica ($\Delta F = 0$) para 1GL 131

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Estratégia de solução por Newton-Raphson 34
Tabela 3.2 – Estratégia de solução pelo método do Comprimento de Arco 42
Tabela 4.1 - Estudo da Estabilidade 47
Tabela 4.2- Energia potencial total do sistema com imperfeições 57
Tabela 4.3 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica estável sem imperfeição inicial 59
Tabela 4.4 - Método de Newton-Raphson modificado para bifurcação simétrica estável sem imperfeição inicial 59
Tabela 4.5 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial 61
Tabela 4.6 - Método de Newton-Raphson modificado para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial 61
Tabela 4.7 – Solução analítica do sistema sem imperfeição geométrica para cada modelo de NLF 74
Tabela 4.8 – Solução analítica do sistema com imperfeição geométrica para cada modelo de NLF 75
Tabela 4.9 – Estratégia numérica de Newton-Raphson para sistemas com NLF 76
Tabela 4.10 - Método de Newton-Raphson padrão para sistema com bifurcação simétrica instável 82
Tabela 4.11 - Método de Newton-Raphson modificado para sistema com bifurcação simétrica instável 83
Tabela 4.12 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial 87
Tabela 4.13 - Método de Newton-Raphson modificado para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial 87
Tabela 4.14 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e rigidez não linear da mola segundo o modelo NLF III 88
Tabela 4.15 - Método do Comprimento de Arco para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial 88
Tabela 4.16 - Método de Newton Raphson padrão para sistema com bifurcação assimétrica. 93

Tabela 4.17 - Método de Newton Raphson modificado para sistema com bifurcação assimétrica 93
Tabela 4.18 - Método de Newton Raphson padrão para o sistema com bifurcação assimétrica e NLF 94
Tabela 4.19 - Método Newton-Raphson padrão para sistema sem bifurcação 98
Tabela 4.20 - Método Newton-Raphson modificado para sistema sem bifurcação 98
Tabela 5.1 - Método Newton-Raphson Padrão para sistema sem bifurcação 121
Tabela 6.1 – Resumo dos sistemas mecânicos 124
Tabela B.1 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear 133
Tabela B.2 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF I........ 134
Tabela B.3 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF II 135
Tabela B.4 - Método de Newton-Raphson padrão, com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF III 136
Tabela B.5 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear........ 137
Tabela B.6 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF I 138
Tabela B.7 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF II 139
Tabela B.8 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de deslocamento para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF II 140
Tabela B.9 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear........ 141
Tabela B.10 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear 142
Tabela B.11 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e com modelo NLF III ... 143
Tabela B.12 - Método do comprimento de arco para o sistema de bifurcação simétrica instável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear........ 144

Tabela B.13 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação assimétrica sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear 145
Tabela B.14 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação assimétrica sem imperfeição geométrica inicial e com modelo NLF III 146
Tabela B.15 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema com dois graus de liberdade sem imperfeição geométrica inicial 147
Tabela B.16 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema com dois graus de liberdade com imperfeição geométrica inicial 148

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Força
F_{cr}	Força crítica
F_{ext}	Força externa
F_{int}	Força interna
u	Deslocamento
u_0	Imperfeição inicial
L	Comprimento da barra
p	Momento angular
R	Reação
U	Energia potencial elástica
V	Energia potencial de uma força
W	Peso
Π	Energia potencial total

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 15
1.1. Considerações Iniciais e Objetivos 15
1.2. Histórico 16
1.3. Organização da Dissertação 17
2. CONCEITOS E TERMINOLOGIAS 18
2.1. O Fenômeno da Estabilidade 18
2.2. Sistemas Não Lineares 21
2.2.1. Não Linearidade Física (NLF) 21
2.2.2. Não Linearidade Geométrica (NLG) 21
2.3. Caminhos de Equilíbrio 22
2.4. Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE) 25
3. MÉTODOS NUMÉRICOS 26
3.1. O Método de Newton-Raphson 27
3.1.1. Solução Incremental Iterativa – Controle de carga 28
3.1.1.1. Fase Predita ($\Delta\boldsymbol{u}$) 28
3.1.1.2. Fase Corretiva ($\delta\boldsymbol{u}$) 30
3.1.2. Formas Padrão e Modificada 34
3.1.3. Limitações do Método 36
3.2. O Método do Comprimento de Arco 36
4. SISTEMAS MECÂNICOS COM UM GRAU DE LIBERDADE 44
4.1. Sistema Mecânico com Bifurcação Simétrica Estável 44
4.1.1. Solução Analítica 44
4.1.1.1. Análise Não Linear sem Aproximações 44
4.1.1.2. Análise Não Linear com Aproximações 54
4.2. Análise com Imperfeição Geométrica Inicial 55
4.2.1. Solução Analítica 55
4.2.2. Solução Numérica 58
4.2.2.1. Solução Numérica Detalhada 62
4.3. Análise com Não Linearidade Física 72
4.3.1. Resposta Não Linear da Mola 72

4.3.2. Solução Analítica 74
4.3.3. Solução Numérica 75
4.4. Sistema Mecânico com Bifurcação Simétrica Instável 78
4.4.1. Solução Analítica 79
4.4.2. Solução Numérica 82
4.5. Análise com Imperfeição Geométrica Inicial 84
4.5.1. Solução Analítica 84
4.5.2. Solução Numérica 86
4.6. Sistema Mecânico com Bifurcação Assimétrica 90
4.6.1. Solução Analítica 90
4.6.2. Solução Numérica 93
4.7. Sistema Mecânico sem Bifurcação 95
4.7.1. Solução Analítica 95
4.7.2. Solução Numérica 97

5. SISTEMA MECÂNICO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE 99

5.1. Análise do Equilíbrio 99
5.2. Análise da Estabilidade 104
5.3. Sistema com Imperfeição Geométrica Inicial 113
5.3.1. Solução Numérica 119

6. CONCLUSÕES 123

6.1. Sobre o trabalho realizado 123
6.2. Sugestões para trabalhos futuros 126

A. APÊNDICE– SOBRE RIGIDEZ ELÁSTICA E GEOMÉTRICA 127

Sistema de Um Grau de Liberdade (1GL) 127
Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade 129
Análise Linear da Estabilidade de Pilares 130

B. APÊNDICE – CÓDIGOS FONTE 132

REFERÊNCIAS 149

ÍNDICE REMISSIVO 151

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS E OBJETIVOS

O objetivo da análise estrutural é obter esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos das estruturas, quando elas são submetidas às ações externas, para, com essas informações, avaliar o seu comportamento. Busca-se sempre a melhor solução, seja em termos econômicos, de segurança ou de rapidez, que leva à execução de estruturas cada vez mais leves. Essa redução de peso tem sido conseguida com o aumento da resistência dos materiais estruturais, com concretos de alta resistência (com resistência característica à compressão acima de 50 MPa) e aços, com resistências a partir de 250 MPa. A consequência é a elaboração de projetos cada vez mais arrojados e com elementos mais esbeltos, fazendo com que seu mecanismo de colapso sofra mudanças qualitativas. À medida que os elementos estruturais vão se tornando mais esbeltos, a estrutura se torna mais suscetível às ações laterais e pode colapsar devido ao efeito de grandes deslocamentos laterais, associados ou não à perda de estabilidade. As estruturas de aço são mais sensíveis a esse fenômeno, uma vez que a resistência mecânica do aço é consideravelmente mais alta do que a do concreto, proporcionando estruturas mais esbeltas.

Apesar da maioria das estruturas projetadas exibirem um comportamento linear elástico sob cargas de serviço, existem casos em que as deformações geradas por incrementos de carga não assumem comportamentos lineares. Arcos abaulados, edifícios altos e pilares esbeltos são alguns exemplos passíveis de ocorrência de não linearidade geométrica importante. Enquanto sistemas lineares têm apenas uma configuração de equilíbrio, sistemas não-lineares podem exibir mais de uma, sendo algumas estáveis e outras instáveis. Em virtude disso, surge a necessidade de se fazer uma análise mais precisa e obter uma previsão segura do comportamento da estrutura.

No contexto da análise não linear geométrica estática de estruturas, o presente trabalho tem como objetivo apresentar rigorosamente os complexos conceitos envolvidos com o tema, aplicando-os em diversos sistemas mecânicos. Além disso, contempla a elaboração de ferramentas computacionais capazes de determinar o comportamento de estruturas sujeitas a perda de estabilidade. Assim, prepara o leitor para entender trabalhos e métodos avançados voltados ao tema.

1.2. HISTÓRICO

A estabilidade estrutural é um objeto de estudo desde o século XVIII, quando Euler (1744) obteve para uma coluna biapoiada sob a ação de uma carga concentrada de compressão aplicada em seu topo, sem a consideração do peso próprio, a carga crítica de flambagem. Após isso, diversos autores tentaram abordar esse tema de maneira mais abrangente possível, mas os trabalhos mais notáveis foram publicados por Timoshenko, no final do ano de 1930, e Bleich, no começo do ano de 1950, apresentando diversos tipos de estruturas, com diferentes condições de contorno e carregamento, no intuito de avaliar a sua estabilidade, por meio da determinação das cargas críticas de flambagem e do caminho pós-crítico de equilíbrio, que são de grande importância no desenvolvimento de um projeto estrutural.

O estudo da estabilidade é muito dinâmico, sendo um desafio o seu acompanhamento pelos pesquisadores. Problemas de flambagem de placas associadas a viga caixão, por exemplo, tem despertado a atenção dos pesquisadores por anos, com a publicação de diversos artigos. Assim como problemas de flambagem de cascas em aeronaves tem despertado o interesse de eminentes engenheiros e matemáticos (ALLEN & BULSON, 1980).

Surovek-Maleck et al., (2004) e Wong (2009) concordam que ferramentais computacionais que consideram o modelo não linear físico e geométrico estão evoluindo. Apesar da complexidade envolvida em uma análise não linear, programas computacionais com essas funcionalidades são requisitados devido a importância dos efeitos não lineares nas estruturas. Rocha (2000) estudou estratégias de solução não linear para traçar o caminho de equilíbrio de uma estrutura. Pinheiro (2003) estudou e implementou formulações não lineares para análise de sistemas treliçados. A maioria dos métodos de solução para esses problemas são baseados no método de Newton-Raphson, que na sua formulação clássica não é capaz de ultrapassar os pontos limites de carga ou deslocamento, que surgem frequentemente em uma análise não linear. O método de Newton-Raphson modificado é, também, bastante popular e vem sendo usado em muitas aplicações (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1991). Porém, assim como a técnica padrão, é incapaz de capturar tais pontos. O método do comprimento de arco (RIKS, 1979), entre muitas outras técnicas que foram propostas, é capaz de capturar pontos limites. Sua estratégia consiste em usar um parâmetro especial com o objetivo de controlar o progresso dos cálculos.

1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho é composto por seis capítulos e dois apêndices. No Capítulo 2 (p. 18) apresentam-se os principais conceitos e terminologias relacionadas ao fenômeno da estabilidade. Em especial, são apresentados os tipos de não linearidades inerentes a problemas de estabilidade e o Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, que servirá de base para todo o trabalho.

No Capítulo 3 (p. 26) métodos numéricos são apresentados. Apresenta-se as vantagens e limitações de cada método.

No Capítulo 4 (p. 44) coloca-se em prática os métodos estudados nos capítulos anteriores em sistemas mecânicos com um grau de liberdade (1GL). Estuda-se analiticamente, pelo Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, o comportamento em modelos perfeitos e modelos com imperfeições físicas e/ou geométricas. Os métodos numéricos são aplicados a cada um dos sistemas mecânicos.

No Capítulo 5 (p.99) todos os conceitos são revistos para um sistema com dois graus de liberdade (2GL) com e sem imperfeição geométrica inicial e a análise numérica se torna essencial, uma vez que as equações de equilíbrio se tornam relativamente complexas para uma solução analítica prática.

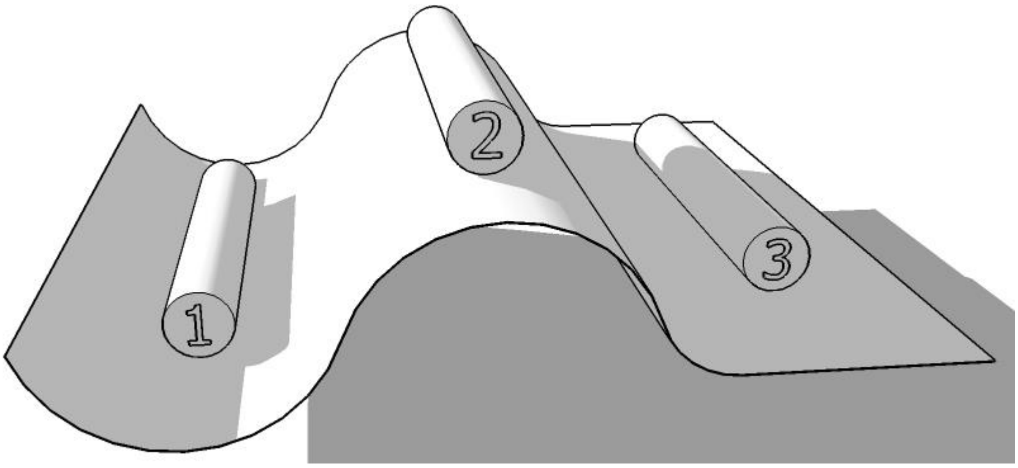
No Capítulo 6 (p. 123) são estabelecidas as conclusões e observações relevantes do trabalho. No Apêndice A (p.127) é explicado sobre matriz de rigidez de um sistema mecânico e no Apêndice B (p.132) são fornecidos os códigos fontes das análises numéricas.

2. CONCEITOS E TERMINOLOGIAS

2.1. O FENÔMENO DA ESTABILIDADE

O conceito de estabilidade pode ser facilmente visualizado por meio do problema clássico da massa cilíndrica repousando em superfícies curvas ou retas, ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 - Massas cilíndricas em equilíbrio estático

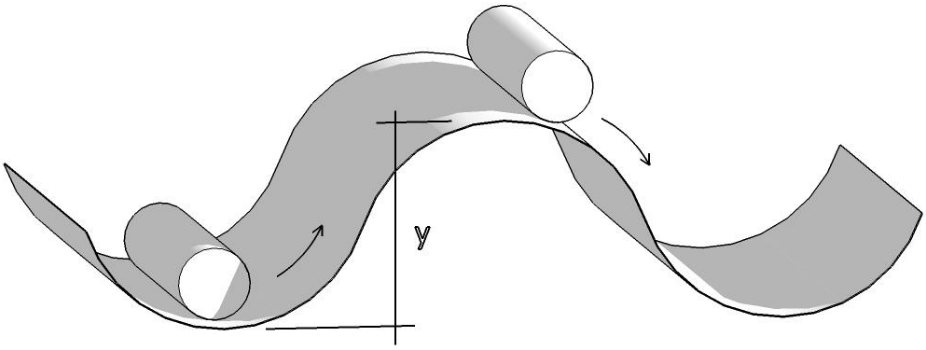


Fonte: O autor

As três massas cilíndricas repousam em pontos de inclinação nula, motivo pelo qual podem ser consideradas em equilíbrio estático. Porém, a estabilidade de cada uma é diferente. Se a massa cilíndrica 1 sofre uma pequena perturbação, ela volta à sua posição de equilíbrio inicial. Diz-se, então, que sua posição de equilíbrio é *estável*. Se a massa cilíndrica 2 sofre uma pequena perturbação, ela se afasta da posição de equilíbrio. Diz-se, então, que seu equilíbrio é *instável*. Entretanto, qualquer perturbação aplicada à massa cilíndrica 3, não mudará sua condição de estabilidade, ela estará sempre em equilíbrio. Diz-se, então, que seu equilíbrio é *neutro*.

Uma observação importante diz respeito à ordem das perturbações sofridas pelos sistemas estruturais sujeitos à perda da estabilidade. Se o cilindro 1 sofrer uma pequena perturbação, o seu equilíbrio será estável. Porém, se a magnitude da perturbação for grande, o cilindro 1 pode não voltar mais para sua posição original de equilíbrio. Essa magnitude, no exemplo ilustrado na Figura 2.2, está associada ao valor de y. A energia da perturbação foi suficiente para vencer a altura y.

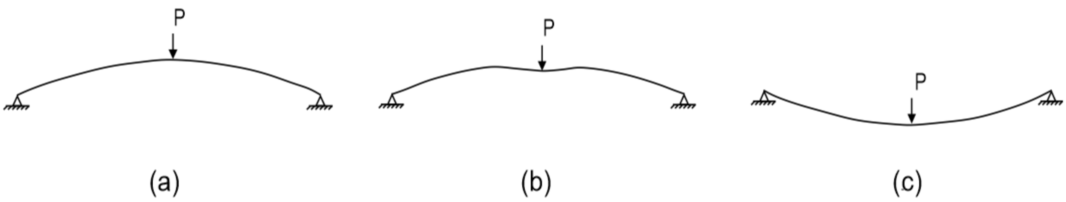
Figura 2.2 - Perturbação de grande magnitude



Fonte: O autor

Um interessante exemplo real de perda de estabilidade ocorre quando se aplica uma carga em arco abatido, como ilustrado na Figura 2.3, onde a magnitude da perturbação é importante.

Figura 2.3 - Exemplo de comportamento de arco abatido



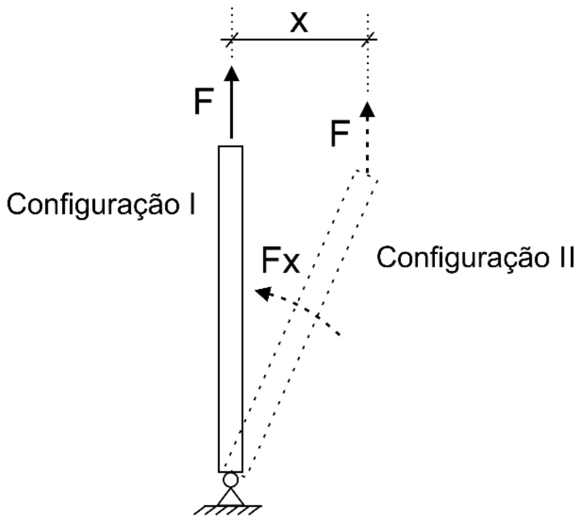
Fonte: O autor

Imaginando-se um comportamento elástico linear, se a magnitude das perturbações for pequena (Figura 2.3 (b)), ao retirar-se a carga P, o arco recupera sua forma inicial. Porém, se a magnitude das perturbações for grande, a perda da estabilidade leva-o para a forma invertida ilustrada na Figura 2.3 (c), não retornando para a sua configuração inicial, mesmo com a retirada da carga P. Esse fenômeno é de mesma natureza daquela ilustrada na Figura 2.2, quando a magnitude da perturbação foi de tal ordem que venceu a barreira de energia para atingir o segundo vale.

Portanto, ao se analisar um dado sistema estrutural, deve-se não só verificar se o mesmo está em equilíbrio, mas também deve-se estudar se o equilíbrio é *estável*, *instável* ou *neutro*. Em engenharia civil, deve-se projetar as estruturas de tal modo que elas tenham equilíbrio estável. Com isto garante-se que pequenas perturbações na configuração original de equilíbrio não modificarão o comportamento estrutural. Isto é, após se retirar a causa da perturbação, a estrutura voltará a ter a forma e ocupar a posição especificada em projeto. Um dos problemas enfrentados pelo projetista é que ao se modificar o sistema incrementando-se, por exemplo, as forças externas, o equilíbrio pode mudar de estável para instável. Nesse caso, diz-se que o sistema perde a estabilidade, sendo este processo usualmente denominado em língua portuguesa flambagem. Ao valor do parâmetro que está sendo modificado, correspondente ao ponto de mudança do equilíbrio de estável para instável, dá-se o nome de valor crítico (GONÇALVES, 1994)

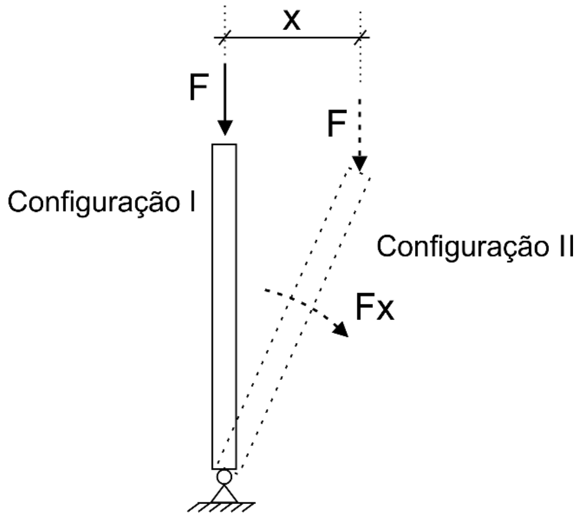
Um ilustrativo exemplo de estabilidade (GONÇALVES, 1994) é obtido pelo estudo do equilíbrio de uma barra rígida vertical, sem peso, com um apoio de primeiro gênero em sua extremidade inferior. A força vertical F aplicada em seu topo pode ser de tração (Figura 2.4) ou de compressão (Figura 2.5). Para se fazer o estudo da estabilidade é necessário avaliar o equilíbrio em uma *configuração ligeiramente perturbada* (Configuração II nas figuras 2.4 e 2.5), em relação à configuração vertical original (Configuração I nas Figuras 2.4 e 2.5). Na *configuração perturbada* a força de tração F é restauradora, portanto o equilíbrio é estável. O momento Fx tende a trazer a barra rígida para a configuração vertical original (Figura 2.4, configuração I).

Figura 2.4 - Equilíbrio de barra rígida vertical solicitada à tração



Fonte: O autor

Figura 2.5 - Equilíbrio de barra rígida vertical solicitada à compressão



Fonte: O autor

De outra maneira, quando a força F de compressão atua na *configuração perturbada*, o momento Fx faz com que a barra rígida se afaste cada vez mais da posição vertical original, portanto o equilíbrio é *instável* (Figura 2.5, configuração II). Como a força $F = 0$ é a transição entre a situação *estável* e *instável*, diz-se que $F = 0$ é a *carga crítica*.

2.2. SISTEMAS NÃO LINEARES

A perda de estabilidade é um fenômeno não linear. Portanto, para se capturar, com rigor, o comportamento do sistema sob esse efeito, deve-se usar uma análise não linear, embora em muitos casos seja possível uma linearização das equações que regem o sistema em torno de uma configuração perturbada, para facilitar a análise. Com grandes deslocamentos, a relação carga deslocamento das estruturas não são mais proporcionais devido aos fenômenos apresentados a seguir.

2.2.1. Não Linearidade Física (NLF)

A não linearidade física caracteriza-se por relações não lineares entre tensão e deformação dos materiais. A conhecida lei de Hooke não é mais obedecida. Por exemplo, ocorrerá não linearidade física quando as deformações ultrapassarem o limite de elasticidade do material.

2.2.2. Não Linearidade Geométrica (NLG)

Quando os deslocamentos da estrutura introduzem esforços adicionais (esforços de segunda ordem) diz-se que ela está sujeita à não linearidade geométrica. Na análise linear, as estruturas estão sujeitas, relativamente, a pequenos deslocamentos, ao contrário do que ocorre na análise não linear geométrica, quando elas estão sujeitas, relativamente, a grandes deslocamentos. Em uma análise linear as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração indeformada da estrutura. Essas equações geram um sistema de equações lineares que são resolvidas diretamente usando-se procedimentos usuais da álgebra matricial. A estrutura indeformada é analisada com as cargas com seus valores finais. Ao contrário, em uma análise não linear, as equações de equilíbrio são estabelecidas na configuração deformada da estrutura. Essas equações geram um sistema de equações não lineares, que só podem ser resolvidas usando-se processos iterativos, como a técnica de Newton-Raphson, por exemplo, para a busca de equilíbrio. As cargas são aplicadas paulatinamente até a estrutura atingir um estado limite último, em um processo incremental iterativo (BADKE-NETO & FERREIRA, 2016).

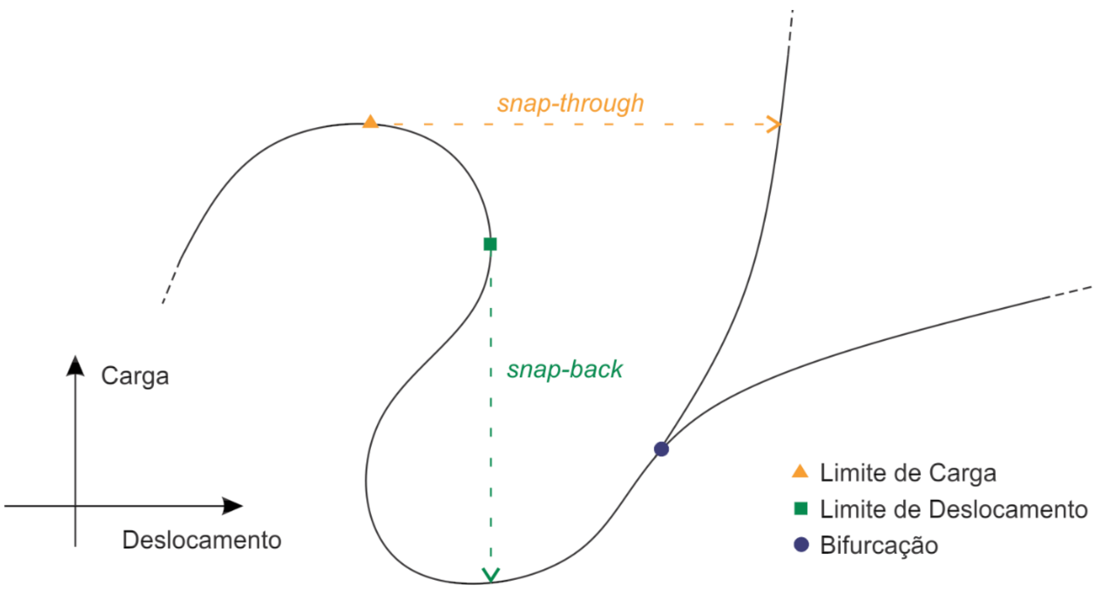
2.3. CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

Ao se analisar a estabilidade de um sistema estrutural, tem-se um conjunto de parâmetros de controle (por exemplo, o carregamento externo) e, para se conhecer o comportamento global do sistema e identificar os possíveis fenômenos de instabilidade, deve-se estudar como as configurações de equilíbrio variam à medida que se varia cada parâmetro de controle. Obtém-se assim, os chamados caminhos ou trajetórias de equilíbrio (curva carga × deslocamento modelo mostrado na Figura 2.6). Cada ponto no caminho de equilíbrio representa uma configuração de equilíbrio admissível para o sistema. Quando o caminho cruza a origem (posição indeslocada) é chamado de caminho fundamental de equilíbrio (em estruturas idealizadas sem imperfeições). Qualquer caminho que não é o fundamental, mas se liga a ele, é chamado de caminho secundário. Normalmente esse caminho é suave, ou seja, tem uma tangente contínua, com exceções apenas em alguns pontos especiais.

Os pontos críticos na trajetória podem ser de dois tipos: pontos de bifurcação e pontos limites (GONÇALVES, 1994) (Figura 2.6). Pontos de bifurcação são pontos a partir dos quais mais de uma configuração de equilíbrio é possível. Os pontos limites podem ser de carga ou de deslocamento, correspondendo, respectivamente, a valores de máximos ou mínimos relativos (valores máximos ou mínimos locais) de carga e valores máximos ou mínimos relativos (valores máximos ou mínimos locais) de deslocamentos na trajetória de equilíbrio. Os pontos limites de carga estão associados ao fenômeno de *snap-through*, porque, nesses pontos, quando o controle de carga é utilizado, a rigidez do sistema se torna muito pequena para uma dada componente de deslocamento e o sistema sofre um grande deslocamento, caracterizado por um salto dinâmico (Figura 2.6 e Figura 2.7). Os pontos limites de deslocamento estão associados ao fenômeno de snap-back, porque, nesses pontos, quando o controle de deslocamento é utilizado, a rigidez do sistema se torna muito grande para uma dada componente de deslocamento e o sistema sofre uma variação instantânea na carga aplicada, caracterizada também por um salto dinâmico (Figura 2.6 e Figura 2.8) (SANTANA, 2015).

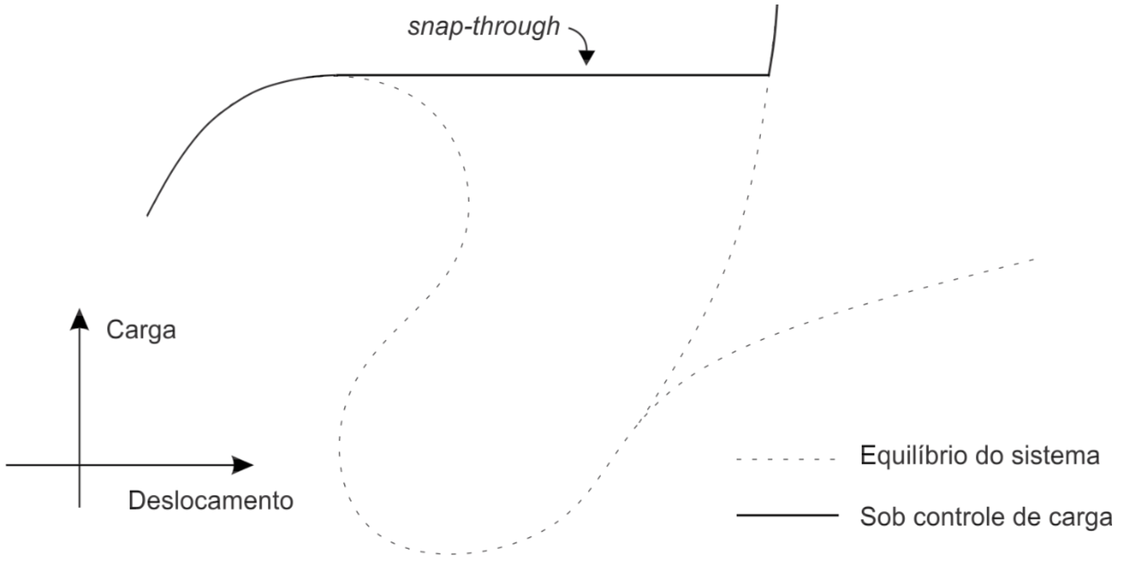
O caminho ilustrado na Figura 2.6 é uma trajetória não linear de equilíbrio associada a grandes deslocamento do seu sistema estrutural. O aparecimento de pontos críticos na resposta carga-deslocamento de um sistema estrutural é frequente quando trata-se de uma análise não linear. Tais pontos não são capturados facilmente por métodos numéricos tradicionais sem uma abordagem mais sofisticada.

Figura 2.6 – Exemplo de trajetória de equilíbrio com identificação de seus pontos críticos



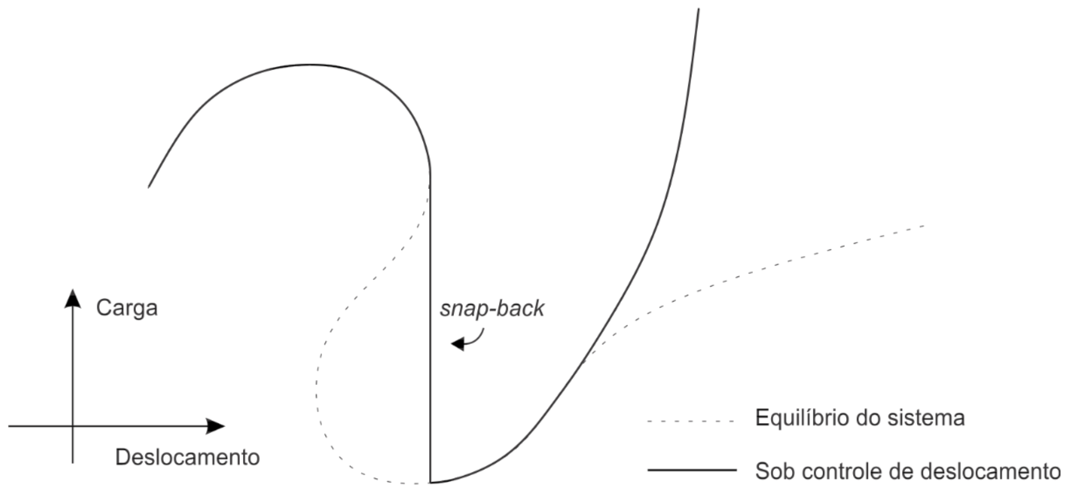
Fonte: O autor

Figura 2.7 – Exemplo de trajetória de equilíbrio encontrada quando se utiliza controle de carga



Fonte: O autor

Figura 2.8 – Exemplo de trajetória de equilíbrio encontrada quando se utiliza controle de deslocamento



Fonte: O autor

2.4. PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA (PEPTE)

A título de curiosidade, antes de apresentar o Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, apresentam-se dois teoremas que envolvem conceitos energéticos relacionados a equilíbrio de partículas (MAIA, 1984). O primeiro, conhecido como Teorema de Lagrange, diz que se partículas estiverem submetidas a forças conservativas, as suas posições de equilíbrio serão aquelas nas quais a sua energia potencial seja estacionária. O segundo, conhecido como Teorema de Lagrange-Dirichlet, diz que uma partícula livre, ou possuindo vínculo independente do tempo, estará em equilíbrio estável quando estiver em uma configuração que corresponda a um mínimo da energia potencial. Estará em equilíbrio instável quando estiver em uma configuração que corresponda a um máximo da energia potencial. Segundo Maia (1984), Dirichlet melhorou e tornou mais rigorosa a demonstração do teorema de Lagrange. Lembra-se que, em matemática, um mínimo local ocorre num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é positiva. Um máximo local ocorre num ponto onde a derivada de primeira ordem é nula e a próxima derivada não nula é negativa. A seguir, apresenta-se o princípio da energia potencial total estacionária.

Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE)

Para um sistema estrutural contendo apenas forças conservativas, no qual a energia potencial total é uma função contínua de seu deslocamento, entre todas as configurações admissíveis de deslocamentos desse sistema, aquela que satisfaz as equações de equilíbrio faz a energia potencial total estacionária, com respeito a uma pequena variação admissível desses deslocamentos. Se à configuração de equilíbrio corresponder uma energia potencial total mínima, o equilíbrio será estável. Se à configuração de equilíbrio corresponder uma energia potencial total máxima, o equilíbrio será instável.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS

A partir do próximo capítulo será encontrada analiticamente a resposta de equilíbrio exata de diversos sistemas mecânicos com 1GL por meio do PEPTE enunciado no capítulo anterior. Isso só será possível. Porque se tratam de sistemas mecânicos extremamente simples, usados de forma didática para iniciar ao leitor à aplicação e aos conceitos que foram expostos no Capítulo 2. Em geral, sistemas que consistem em mais de duas componentes dimensionais, como placas, membranas, sólidos e cascas, são complicados de modo que raramente existe solução exata aplicável para as equações diferenciais (MCGUIRE et al., 2000). A abordagem para tais estruturas só poderá ser feita por métodos numéricos. Neste capítulo serão demonstrados alguns dos principais métodos numéricos utilizados para encontrar a solução de equilíbrio de estruturas.

Enunciando o problema

Do sistema mecânico pressupõe-se que é conhecido:

i) o vetor de equações estáticas do sistema $\mathbf{g}$,dado por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{F_{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F_{ext}} \tag{3.1}$$

Onde $\mathbf{u}$ é o deslocamento do sistema,$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u})$ é a força interna do sistema e $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ é a força externa. Considerando que a força externa se mantém constante durante a análise em termos de direção (força conservativa), pode-se escrever $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{q}$, apenas para simplificar o sistema de equações. Agora introduz-se o escalar λ, chamado de parâmetro de carga, para controlar o acréscimo ou decréscimo de carga durante a análise. De forma que, reescrevendo (3.1), tem-se:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F_{int}}(\mathbf{u}) - \lambda\, \mathbf{q} \tag{3.2}$$

ii) uma solução inicial de equilíbrio $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ e:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0}, \lambda_0) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) - \lambda_0\, \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

O objetivo do método numérico é encontrar a trajetória de equilíbrio do sistema. Pelo PEPTE, sabe-se que a estrutura estará em equilíbrio quando a equação estática for nula, então objetiva-se encontrar uma sequência de pontos $(\mathbf{u}, \lambda)$, tal que*:*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \lambda) = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

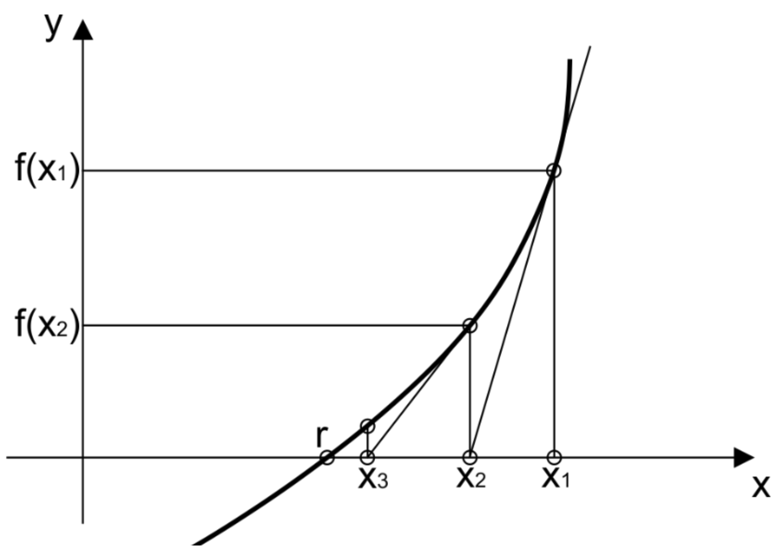
3.1. O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Métodos aproximados já eram conhecidos desde a antiguidade, como, por exemplo, o método babilônico para aproximar raízes quadradas. O método de Newton-Raphson faz uso do Cálculo Diferencial para encontrar raízes ou "zeros" de uma equação arbitrária:

$$f(x) = 0$$

O método de Newton-Raphson pode ser deduzido por meio de interpretação geométrica (Chapra & Canale, 1985), como ilustrado na Figura 3.1. Seja r a raiz (ou "zero") de $f(x)$, isto é, $f(r) = 0$. Seja x_1 um número próximo de r (que pode ser obtido observando o gráfico de $f(x)$). A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $[x_1; f(x_1)]$, intercepta o eixo x em x_2.

Figura 3.1 - Ilustração gráfica do método de Newton-Raphson



Fonte: O autor

Do gráfico acima percebe-se que x_2 se aproximou do ponto r. Facilmente se determina que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

assumindo-se que $f'(x_1) \neq 0$. Caso x_2 não esteja tão próximo de r, pode-se fazer outra tentativa por meio de equação similar:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

que tende a se aproximar de r, assumindo-se que $f'(x_2) \neq 0$. Genericamente a expressão anterior pode assumir a forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.5}$$

assumindo-se que $f'(x_n) \neq 0$.

Esse processo irá gerar uma sequência de números x_n que se aproximará de r.

O método de Newton-Raphson é aplicado ao problema físico na teoria da estabilidade da forma que se segue.

3.1.1. Solução Incremental Iterativa – Controle de carga

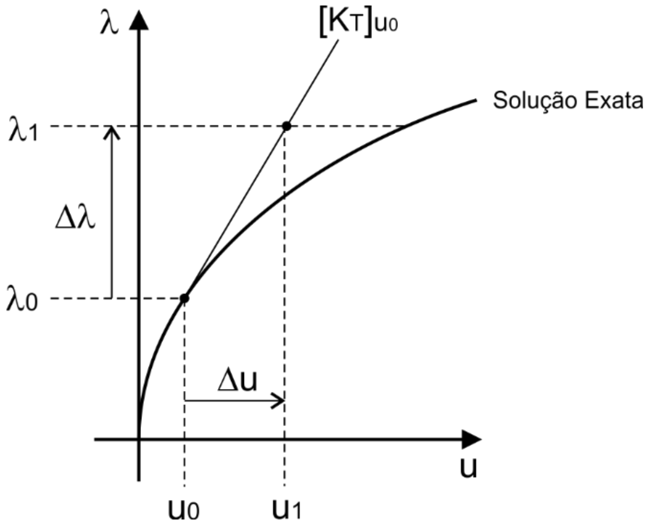
De modo geral os métodos vão partir da solução inicial de equilíbrio dada em (3.3), e buscar uma próxima solução$(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_1)$ que torne a equação estática nula, dentro de certa tolerância. Duas fases podem ser identificadas para a obtenção desta solução. A primeira delas, denominada fase predita, quando empregado a estratégia do controle de carga, envolve a obtenção dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A segunda fase, denominada corretiva, tem por objetivo a correção das forças generalizadas internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos generalizados pela utilização de um processo iterativo. Tais forças generalizadas internas são então comparadas com o carregamento externo, obtendo-se a quantificação do desequilíbrio existente entre forças generalizadas internas e externas. O processo corretivo é refeito até que, por intermédio de um critério de convergência, a estrutura esteja em equilíbrio, ou seja, até que (3.4) seja atendida (MAXIMIANO, 2012)

3.1.1.1. Fase Predita ($\Delta\mathbf{u}$)

A partir da solução inicial em (3.3), aplica-se um incremento de carga $\Delta\lambda$. Para que a equação de equilíbrio seja atendida novamente corrige-se o deslocamento com o incremento $\Delta\mathbf{u}_0$**.** Assim a equação estática assume a seguinte forma:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\,\boldsymbol{q} \tag{3.6}$$

Figura 3.2 - Representação gráfica da solução predita



Fonte: O autor

Aproximando $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u})$ pela série de Taylor ao redor de $\mathbf{u}_0$, tem-se:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right]_{\boldsymbol{u_0}} \boldsymbol{\Delta u} \tag{3.7}$$

ou ainda:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}} \boldsymbol{\Delta u} \tag{3.8}$$

Onde $[\mathbf{K_T}] = [\partial\mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial\mathbf{u}]$ é o Jacobiano da matriz do sistema de equações, trata-se da matriz de rigidez.

Agora combinando as equações (3.8) e (3.6):

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}} \boldsymbol{\Delta u} - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\, \boldsymbol{q} \tag{3.9}$$

Desenvolvendo a equação anterior e reorganizando:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}, \boldsymbol{\lambda_0} + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) - \lambda_0 \boldsymbol{q} + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}} \boldsymbol{\Delta u} - \Delta\lambda\, \boldsymbol{q} \tag{3.10}$$

Substituindo a solução inicial de equilíbrio, expressa na Equação (3.3), na equação anterior, tem-se:

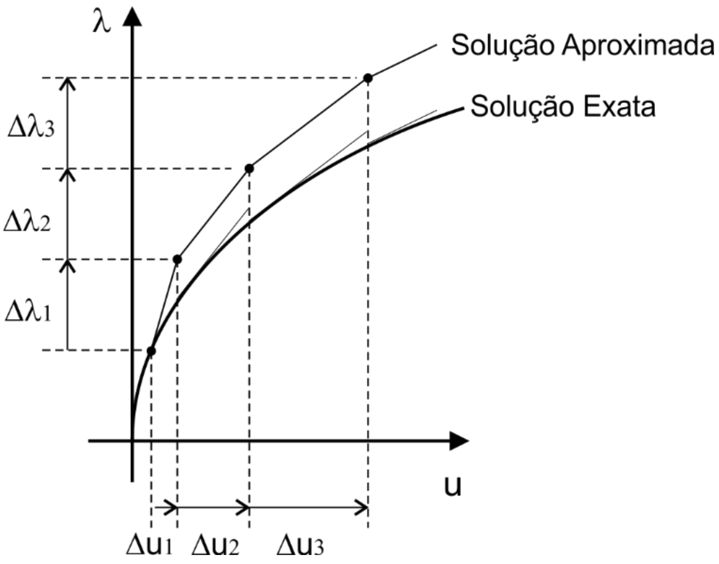
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}} \boldsymbol{\Delta u} - \Delta\lambda\, \boldsymbol{q} \tag{3.11}$$

Resolvendo esse sistema em $\Delta\mathbf{u}$ para o estado de equilíbrio, definido na equação (3.4):

$$\boldsymbol{\Delta u} = [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}}^{\boldsymbol{-1}} \Delta\lambda\, \boldsymbol{q} \tag{3.12}$$

A solução encontrada em (3.12) pode ser geometricamente visualizada na Figura 3.2, no qual, para um dado incremento de carga $\Delta\lambda$ a equação fornece uma correção de deslocamento $\mathbf{\Delta u}$ inversamente proporcional à matriz de rigidez tangente $\mathbf{K_T}$. Uma solução aproximada do caminho de equilíbrio do sistema pode ser encontrado utilizando uma sequência de pontos obtidos por este método, mas o erro para cada iteração é cumulativo (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Aproximação da função com três passos de cargas utilizando apenas a solução predita



Fonte: O autor

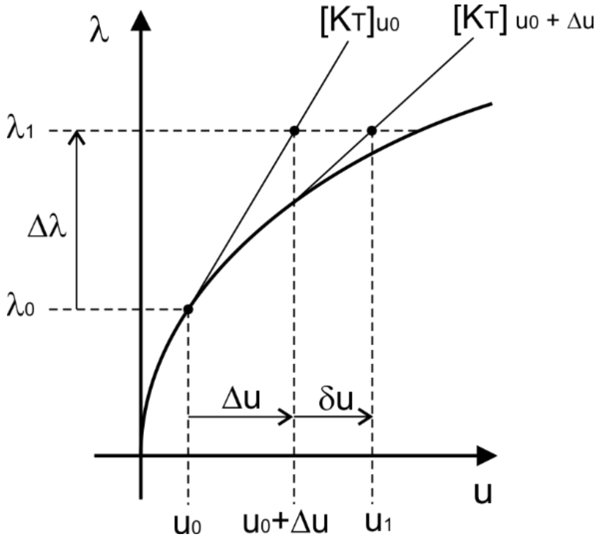
3.1.1.2. Fase Corretiva ($\delta\mathbf{u}$)

Apesar de ter-se arbitrado a correção do deslocamento $\mathbf{\Delta u}$ de modo que equilibre a equação estática, a aproximação por Taylor impede que seja alcançado o equilíbrio de imediato. Então, prossegue-se com uma segunda etapa na correção do deslocamento, chamada de fase corretiva, na qual em cada iteração será aplicada uma correção $\delta\mathbf{u}$ até que a equação estática esteja equilibrada dentro de uma determinada tolerância.

Assim a equação estática assume a forma:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\,\boldsymbol{q} \qquad (3.13)$$

Figura 3.4 – Representação gráfica da solução Corretiva



Fonte: O autor

Aproximando $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})$ pela série de Taylor ao redor de $\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$, tem-se:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}) + \left[\frac{\boldsymbol{\partial F(u)}}{\boldsymbol{\partial u}}\right]_{\boldsymbol{u_0+\Delta u}} \boldsymbol{\delta u} \tag{3.14}$$

Ou ainda:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\delta u}) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{\Delta u}) + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0+\Delta u}}\, \boldsymbol{\delta u} \tag{3.15}$$

Agora combinando as equações (3.15) e (3.13):

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F}_{int}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u}) + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\Delta u}}\, \boldsymbol{\delta u} - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\, \boldsymbol{q} \tag{3.16}$$

Desenvolvendo-se a equação anterior e reorganizando:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{F}_{int}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\boldsymbol{q} + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\Delta u}}\, \boldsymbol{\delta u} \tag{3.17}$$

Substituindo-se a solução incremental, expressa na Equação (3.6), em (3.17):

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{\delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\Delta u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) + [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{\Delta u}}\boldsymbol{\delta u} \tag{3.18}$$

Resolvendo esse sistema em $\delta\mathbf{u}$ para o estado de equilíbrio (Equação (3.4)), obtém-se a correção para o deslocamento:

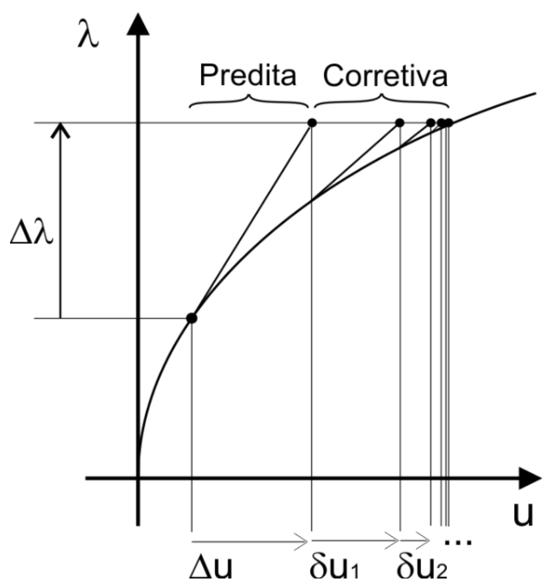
$$\delta \boldsymbol{u} = -[\boldsymbol{K_T}]^{-\mathbf{1}}_{\boldsymbol{u_0}+\boldsymbol{\Delta u}} \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0} + \Delta \boldsymbol{u}, \lambda_0 + \Delta\lambda) \tag{3.19}$$

Se $\Pi(\mathbf{u})$ é a energia potencial total, então suas derivadas de primeira e segunda ordem são $\Pi'(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ e $\Pi"(\mathbf{u}) = [\mathbf{K_T}]_{\mathbf{u_0}+\Delta\mathbf{u}}$ respectivamente. Se o subíndice n denota a iteração atual e $n-1$ a anterior, então o deslocamento será atualizado conforme $\mathbf{u_n} = \mathbf{u_{n-1}} + \delta\mathbf{u}$. Logo pode-se escrever a equação para a correção do deslocamento na forma similar à da Equação (3.5) da aplicação do método para um problema matemático genérico:

$$\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_{n-1}} - \frac{\Pi'(\boldsymbol{u})}{\Pi"(\boldsymbol{u})} \tag{3.20}$$

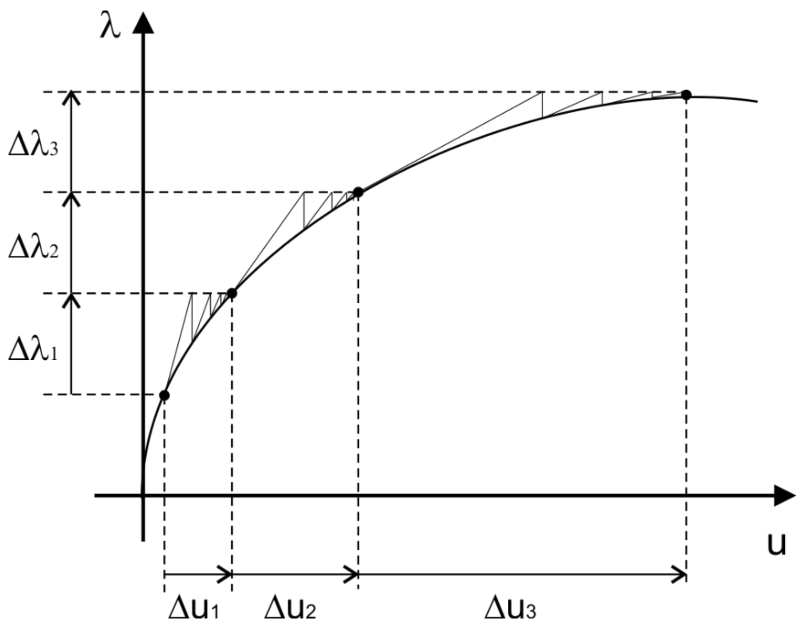
A solução encontrada em (3.19) pode ser geometricamente visualizada na Figura 3.4, no qual, para uma dada solução predita $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)$ a equação fornece uma correção de deslocamento $\delta\mathbf{u}$ inversamente proporcional à matriz de rigidez tangente $\mathbf{K_T}$ do sistema neste ponto, que aproxima a solução do caminho de equilíbrio exato. Cada vez que este processo é repetido a diferença entre a solução numérica e a solução exata se torna menor. De forma geral, repete-se até que a equação de equilíbrio estático esteja obedecida dentro de uma certa tolerância (Figura 3.5). Então, finaliza-se a etapa corretiva de Newton-Raphson e incia-se o próximo incremento de carga. A Figura 3.6 resume graficamente a estratégia final do método numérico, intercalando as etapas de solução incremental tangente e do ciclo iterativo de correção.

Figura 3.5 – Fases predita e corretiva para um passo de carga



Fonte: O autor

Figura 3.6 – Fases predita e corretiva para 3 passos de carga



Fonte: O autor

O método pode ser implementado com o acréscimo do parâmetro de carga constante ($\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_3 = \cdots$) ou automático. Neste último, a magnitude do incremento de carga para cada iteração considera o grau de não linearidade da função na região, sendo inversamente proporcional a este.

A equação a seguir será usada para implementar o acréscimo automático do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_{pa}\left(\frac{I_d}{I_{pa}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

Onde I_d é o número desejado de iterações para que se alcance o equilíbrio em um passo de carga, I_{pa}é o número de iterações que foram necessárias para o passo de carga anterior convergir e λ_{pa} é o acréscimo do passo de carga anterior.

A tabela Tabela 3.1 resume o método numérico apresentado nesta seção.

Tabela 3.1 – Estratégia de solução por Newton-Raphson

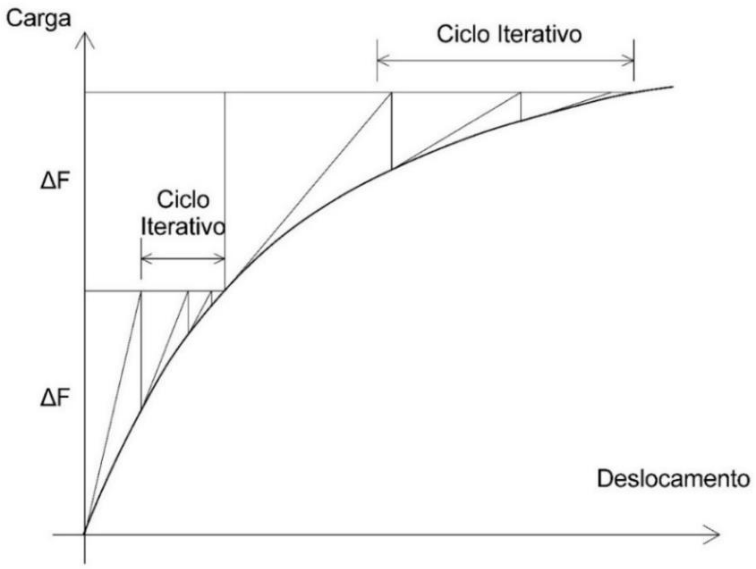
1. Configurações iniciais
2. Ciclo Incremental Iterativo (Loop Externo)
Incrementa carga $\Delta\lambda = \Delta\lambda \left(\frac{\mathrm{I_d}}{\mathrm{I_{pa}}}\right)^{\frac{1}{2}}$
Atualiza a matriz de rigidez $\mathbf{K_T}$
Solução predita $\Delta\mathbf{u} = [\mathbf{K_T}]^{-1}_{\boldsymbol{u}_0} \cdot \Delta\lambda\, \boldsymbol{q}$
Atualiza o deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}_0$
3. Ciclo Iterativo de Newton-Raphson (Loop Interno)
Verifica a convergência: $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) \leq$ *tolerância*
Se SIM,
Atribui o ponto $(\mathbf{u}, \lambda)$a uma matriz resposta
Retorna ao item 2
Se *NÃO*,
Atualiza a matriz de rigidez $\mathbf{K_T}$ (apenas na estratégia padrão)
Solução corretiva $\delta\mathbf{u} = -[\mathbf{K_T}]^{-1}_{\boldsymbol{u}_0+\Delta\boldsymbol{u}}\, \mathbf{g}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta\lambda)$
Atualiza deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$
Retorna ao item 3

3.1.2. Formas Padrão e Modificada

O método de Newton-Raphson pode ser implementado na sua forma padrão ou modificada. Na forma padrão, a 2ª derivada (matriz de rigidez para sistemas de múltiplos graus de liberdade) é atualizada a cada ciclo iterativo (loop interno), sendo interpretada geometricamente pela tangente à curva (Figura 3.7). Na forma modificada, sua atualização não é realizada no ciclo iterativo, apenas na atualização da carga (loop externo), como ilustrado na Figura 3.8. Comparando a forma modificada com a padrão, observa-se que a forma padrão converge mais rápido (requer menos iterações para mesma precisão), porém necessita de um maior esforço computacional por iteração (pois recalcula a inclinação em cada iteração).

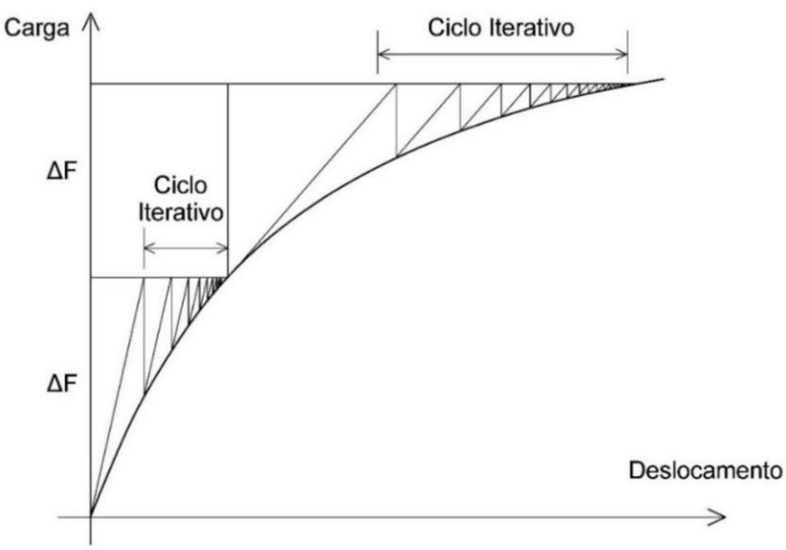
A Tabela 3.1 mostra a estratégia de solução baseada no método de Newton-Raphson padrão. Para alterá-la para o método de Newton-Raphson modificado deve-se eliminar a linha correspondente à atualização da 2ª. derivada do loop interno.

Figura 3.7 - Método de Newton-Raphson padrão



Fonte: O autor

Figura 3.8 - Método de Newton-Raphson modificado



Fonte: O autor

3.1.3. Limitações do Método

Como visto no capítulo anterior, a *trajetória de equilíbrio* é uma função formada por pares de carga generalizada e deslocamento generalizado que fazem a energia potencial total estacionária. O aparecimento de pontos críticos na função resposta carga-deslocamento de um sistema estrutural é frequente quando se trata de uma análise não linear. De acordo com Owen e Hinton (1980), de forma geral, todos os métodos de solução que se baseiam no método de Newton-Raphson não podem capturar pontos limites e pontos de bifurcação, uma vez que a matriz de rigidez se torna singular nesses pontos. Quando um algoritmo baseado no método do controle de carga é utilizado em um sistema que apresenta ponto limite de carga, ele não será capaz de capturar toda a *trajetória de equilíbrio* do sistema (Figura 2.7), assim como um algoritmo baseado no método do controle de deslocamento terá limitações para encontrar a trajetória de equilíbrio em um sistema que possui ponto limite de deslocamento (Figura 2.8).

O Método da restrição do comprimento de arco (Riks, 1979) é capaz de capturar tais pontos e traçar o caminho de equilíbrio. Sua estratégia consiste em introduzir um parâmetro especial, o comprimento do arco da trajetória a ser computada, que controla o progresso dos cálculos ao longo da trajetória de equilíbrio. A dedução do método é dada na seção a seguir.

3.2. O MÉTODO DO COMPRIMENTO DE ARCO

Em um sistema não linear com deslocamento $\mathbf{u}$, em geral, deseja-se resolver:

$$\mathbf{F_{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F_{ext}} = \mathbf{0} \tag{3.22}$$

De forma a simplificar o sistema de equações, escreve-se a força externa como:

$$\mathbf{F_{ext}} = \lambda\, \mathbf{q} \tag{3.23}$$

onde, λ é o parâmetro usado para modificar o módulo da força externa e $\mathbf{q}$ é usado para determinar sua direção, a equação de equilíbrio pode ser reescrita na forma:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u}) - \lambda\, \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \tag{3.24}$$

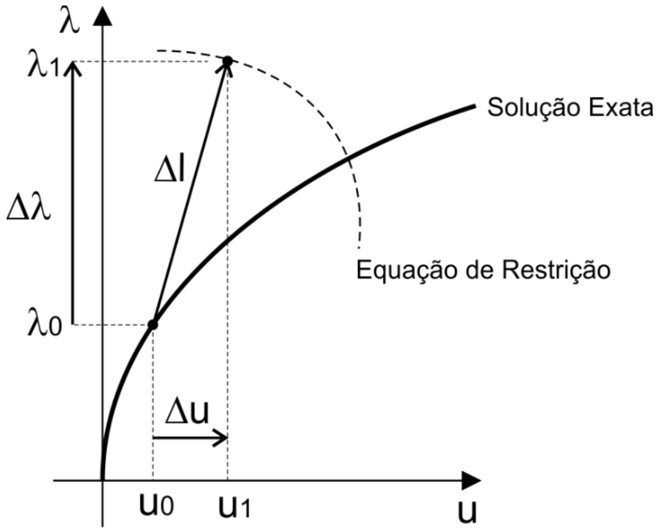
Admitindo-se que se conhece o ponto $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ que satisfaz a equação de equilíbrio e, portanto, pertence à *trajetória de equilíbrio* que objetiva-se encontrar:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_0}, \lambda_0) = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0}) - \lambda_0\, \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \tag{3.25}$$

A ideia inicial do comprimento de arco consiste, a partir da solução inicial de equilíbrio (Equação (3.25), no incremento simultâneo do parâmetro de carga ($\Delta\lambda$) e deslocamento ($\Delta\mathbf{u}$), restringidos por um determinado comprimento de arco (Δl) (Figura 3.9). Assim, tem-se:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}', \lambda') = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_{\boldsymbol{0}} + \Delta\lambda)\boldsymbol{q} \tag{3.26}$$

Figura 3.9 – Representação gráfica da solução inicial tangente (solução incremental predita) no método do Comprimento de Arco

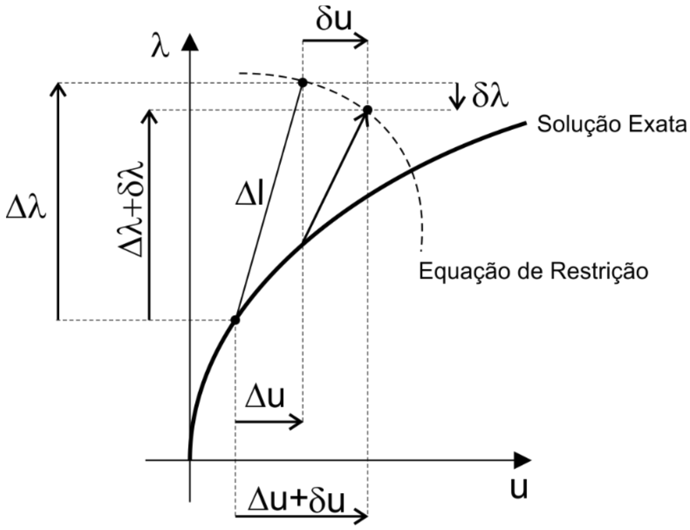


Fonte: O autor

Entretanto, após esse incremento, o resíduo $\mathbf{g}(\mathbf{u}', \lambda')$ não necessariamente será nulo. Com o objetivo de alcançar novamente o equilíbrio, incrementa-se a correção $\delta\lambda$ no parâmetro de carga e a correção $\delta\boldsymbol{u}$ no parâmetro de deslocamento (Figura 3.10):

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}'', \lambda'') = \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda + \delta\lambda)\,\boldsymbol{q} = \mathbf{0} \tag{3.27}$$

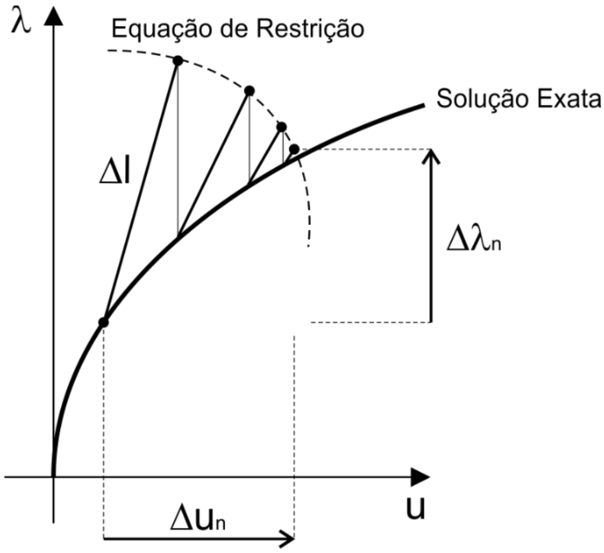
Figura 3.10 – Representação gráfica da solução corretiva (solução iterativa) no método do Comprimento de Arco



Fonte: O autor

O processo corretivo pode ser refeito até que se obtenha uma solução suficientemente próxima a solução exata (Figura 3.11).

Figura 3.11 – Ilustração gráfica de um ciclo iterativo no método do Comprimento de Arco (solução predita e soluções corretivas)



Fonte: O autor

Agora, expandindo a equação anterior pela série de Taylor e mantendo apenas os termos lineares, tem-se a aproximação:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{F_{int}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]_{\boldsymbol{u_0}+\Delta\boldsymbol{u}} \delta\boldsymbol{u} - (\lambda_0 + \Delta\lambda + \delta\lambda)\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3.28}$$

Reorganizando a Equação (3.28) e escrevendo a matriz Jacobiana $\partial\mathbf{F_{int}}/\partial\mathbf{u}$ como $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\,\boldsymbol{q} + [\,\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}+\Delta\boldsymbol{u}}\,\delta\boldsymbol{u} - \delta\lambda\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3.29}$$

Substituindo (3.26) em (3.29) e reorganizando:

$$[\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}+\Delta\boldsymbol{u}}\,\delta\boldsymbol{u} - \delta\lambda\,\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}',\lambda') \tag{3.30}$$

As variáveis do sistema são $\delta\mathbf{u}$ e $\delta\lambda$. Então, se $\mathbf{u}$ possui N dimensões, o sistema possui $N+1$ variáveis (N variáveis $\delta\mathbf{u}$ e 1 variável $\delta\lambda$). O sistema de equações (3.30) fornece N equações. A equação suplementar vem da equação do comprimento de arco:

$$(\Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})^{\boldsymbol{T}}\,(\,\Delta\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) + \psi^2(\Delta\lambda + \delta\lambda)^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{q}) = \Delta l^2 \tag{3.31}$$

A equação do comprimento de arco pode ser geometricamente interpretada como uma hiper-elipse no espaço multidimensional carga-deslocamento. O valores de ψ e Δl podem ser arbitrários. Eles determinam qual será o hiper-raio e os pontos de convergência serão buscados na interseção do caminho de equilíbrio com a hiper-elipse. Quando $\psi = 1$, o método é chamado de Método do Comprimento de Arco Esférico, porque a Equação do Comprimento de Arco sugere que os pontos $(\Delta\mathbf{u},\Delta\lambda)$ pertecem a um círculo de raio Δl.

Assim, o sistema a ser resolvido, para a obtenção das variáveis $\delta\boldsymbol{u}$ e $\delta\lambda$, pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{K_T}]_{\boldsymbol{u_0}+\Delta\boldsymbol{u}} & -\boldsymbol{q} \\ 2\Delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}} & 2\psi^{\boldsymbol{2}}\Delta\lambda\,(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{u} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \boldsymbol{F_{int}}(\boldsymbol{u_0} + \Delta\boldsymbol{u}) - (\lambda_{\boldsymbol{0}} + \Delta\lambda)\,\boldsymbol{q} \\ \Delta l^2 - \Delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{u} - \psi^{\boldsymbol{2}}\Delta\lambda^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{q}) \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

Crisfield (1983) propôs uma formulação alternativa, que pode ser implementada facilmente, conforme apresenta-se a seguir:

Reescreve-se a Equação (3.30) na forma:

$$\delta\boldsymbol{u} = [\,\boldsymbol{K_T}]^{-\boldsymbol{1}}_{\boldsymbol{u_0}+\Delta\boldsymbol{u}}[-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}',\lambda') + \delta\lambda\,\boldsymbol{q}] \tag{3.33}$$

Ou ainda:

$$\delta\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u_g} + \delta\lambda\,\delta\boldsymbol{u_q} \tag{3.34}$$

onde,

$$\delta \boldsymbol{u_g} = -\boldsymbol{K_T}^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}', \lambda') \tag{3.35}$$

e

$$\delta \boldsymbol{u_q} = \boldsymbol{K_T}^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{q} \tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) em (3.31) chega-se a uma simples equação quadrática em $\delta\lambda$:

$$a\,\delta\lambda^2 + b\,\delta\lambda + c = 0 \tag{3.37}$$

onde os coeficientes são dados por:

$$a = \delta \boldsymbol{u}_q{}^T \delta \boldsymbol{u}_q + \psi^2 (\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q})$$
$$b = 2\left(\Delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u_g}\right)^T \delta \boldsymbol{u}_q + 2\psi^2 \Delta\lambda (\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q})$$
$$c = \left(\Delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u_g}\right)^T \left(\Delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u}_g\right) + \psi^2 \Delta\lambda^2 (\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q}) - \Delta l^2$$

Uma vez que $\delta\lambda$ é conhecido, pode ser substituído em (3.34) para atualizar a correção do deslocamento e completar a iteração. Com esta formulação em particular, a cada iteração, o programa deve encontrar $\delta\mathbf{u}_{\mathrm{g}}$ e $\delta\mathbf{u_q}$ para resolver a equação quadrática e atualizar os incrementos $\Delta\mathbf{u}$ e $\Delta\lambda$, verificando a convergência, até que um valor dentro da tolerância seja alcançado e completar o passo incremental.

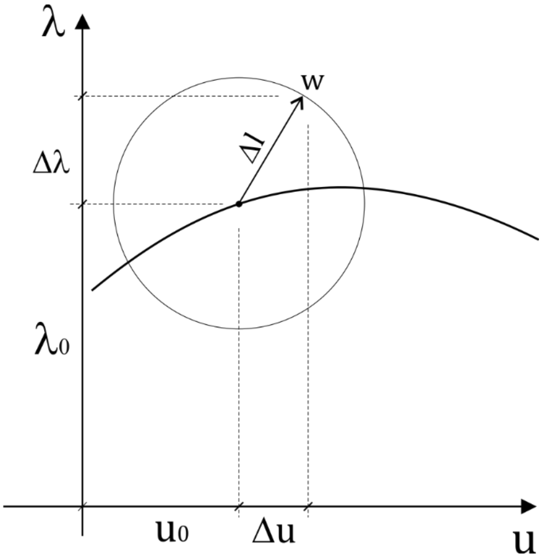
Um desafio no método é selecionar, entre as duas soluções da equação quadrática, aquela que traça o caminho de equilíbrio na direção desejada. Vasios (2015) propôs um método para a escolha da raiz desejada. Escolhe-se o $\delta\lambda$ que corresponda ao maior valor da projeção (produto interno) entre o vetor de correção de ambos os deslocamentos $\delta\mathbf{u_1}$ e $\delta\mathbf{u}_2$ (correspondentes às duas soluções, $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$, da equação quadrática), ou seja, $(\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u_1}, \Delta\lambda + \delta\lambda_1)$ e $(\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u_2}, \Delta\lambda + \delta\lambda_2)$ *r*espectivamente (vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ na Figura 3.13), com o vetor de correção anterior $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)$ (vetor $\mathbf{w}$ na Figura 3.12). Os produtos internos desses vetores podem ser vistos na Figura 3.14. Matematicamente:

$$DOT_{\boldsymbol{i}} = (\Delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u_i}, \Delta\lambda + \delta\lambda_{\boldsymbol{i}})(\Delta \boldsymbol{u}, \Delta\lambda) \qquad i = 1, 2 \ldots \tag{3.38}$$

ou ainda:

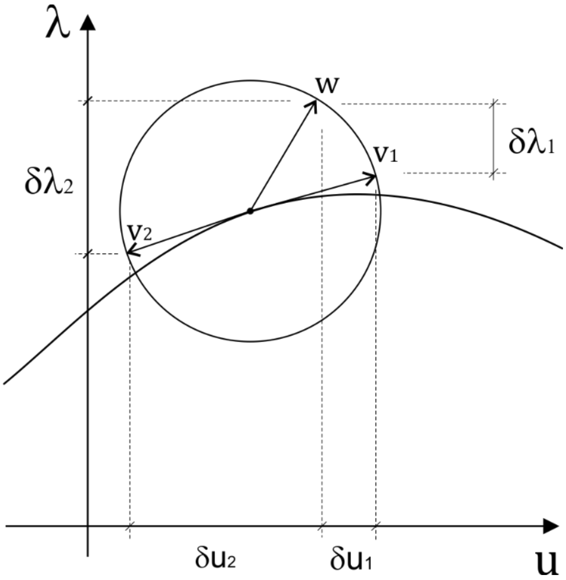
$$DOT_i = (\Delta \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u_i})^T \Delta \boldsymbol{u} + \psi^2 \Delta\lambda (\Delta\lambda + \delta\lambda_i)\,(\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q}) \tag{3.39}$$

Figura 3.12 – Representação geométrica do vetor $\mathbf{w} = (\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)$ (obtido a partir da solução incremental)



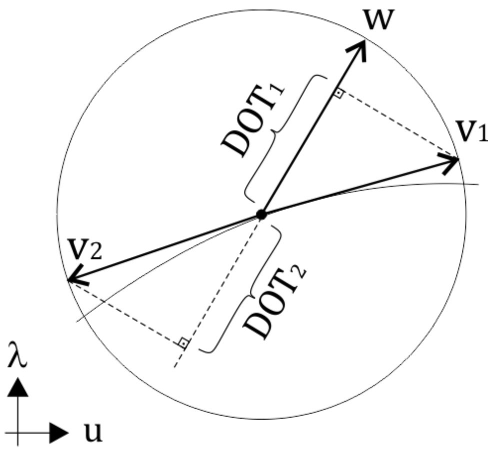
Fonte: O autor

Figura 3.13 – Representação geométrica dos vetores $\mathbf{v}_1 = (\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}_1, \Delta\lambda + \delta\lambda_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}_2, \Delta\lambda + \delta\lambda_2)$ (obtidos a partir da solução iterativa)



Fonte: O autor

Figura 3.14 – Representação gráfica das projeções DOT_1 e DOT_2 utilizadas para a escolha da raiz desejada de $\delta\lambda$



Fonte: O autor

Para o começo do ciclo iterativo não é possível determinar a solução adequada usando o método anterior, pois ambos produtos internos serão nulos. Uma possível maneira de contornar o problema é escolher a solução que possui o mesmo sinal do incremento do parâmetro de carga do sinal do determinante da matriz de rigidez. A Tabela 3.2 a seguir resume as estratégias apresentadas nesta seção.

Tabela 3.2 – Estratégia de solução pelo método do Comprimento de Arco

1. Configurações iniciais
2. Ciclo Incremental Iterativo (Loop Externo)
Define $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\Delta\lambda = 0$
Solução predita $(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)$:
Correção do parâmetro de carga (resolve: $a\ \Delta\lambda^2 + b\ \Delta\lambda + c = 0$)
Parcela de correção do resíduo $\Delta\mathbf{u_g} = -\mathbf{K_T}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda)$
Parcela de correção da força fixa $\Delta\mathbf{u_q} = \mathbf{K_T}^{-1}\mathbf{q}$
Correção do parâmetro de deslocamento $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_\mathrm{g} + \Delta\lambda\ \Delta\mathbf{u_q}$
Entre as soluções $(\Delta\mathbf{u}_\mathrm{i}, \Delta\lambda_\mathrm{i})$ com $i = 1, 2$ escolhe-se a solução i tal que: Sinal $[\Delta\lambda_i]$ = Sinal $[\det[\mathbf{K_T}]]$

Atualiza-se os parâmetros: $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$ e $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$

3. Ciclo Iterativo de Newton-Raphson (Loop Interno)

Verifica a convergência: $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) \leq$ *tolerância*

Se SIM,

Atribui o ponto $(\mathbf{u}, \lambda)$a uma matriz resposta

Retorna ao item 2

Se *NÃO*,

Solução corretiva $(\delta\boldsymbol{u}, \delta\lambda)$:

Correção do parâmetro de carga (resolve: $a\ \delta\lambda^2 + b\ \delta\lambda + c = 0$)

Correção do resíduo $\delta\mathbf{u}_{\mathrm{g}} = -\mathbf{K_T}^{-\mathbf{1}}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda)$

Correção da força fixa $\delta\mathbf{u}_{\mathrm{q}} = \mathbf{K_T}^{-\mathbf{1}}\mathbf{q}$

Correção do parâmetro de deslocamento $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_{\mathrm{g}} + \Delta\lambda\ \Delta\mathbf{u}_{\mathrm{q}}$

Entre as soluções $(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{i}}, \delta\lambda_i)\ com\ i = 1, 2$ escolhe-se a com menor DOT_i (produto interno com a solução anterior)

Atualiza-se os parâmetros: $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ e $\lambda = \lambda + \Delta\lambda + \delta\lambda$

Retorna ao item 3

4. SISTEMAS MECÂNICOS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Neste capítulo são apresentados sistemas mecânicos com um grau de liberdade (1GL) com o intuito de continuar com a apresentação de conceitos básicos da estabilidade (comportamento geometricamente e fisicamente não linear). Todos os sistemas abordados neste trabalho são compostos de barra rígida, sem peso, associada a molas rotacionais ou lineares.

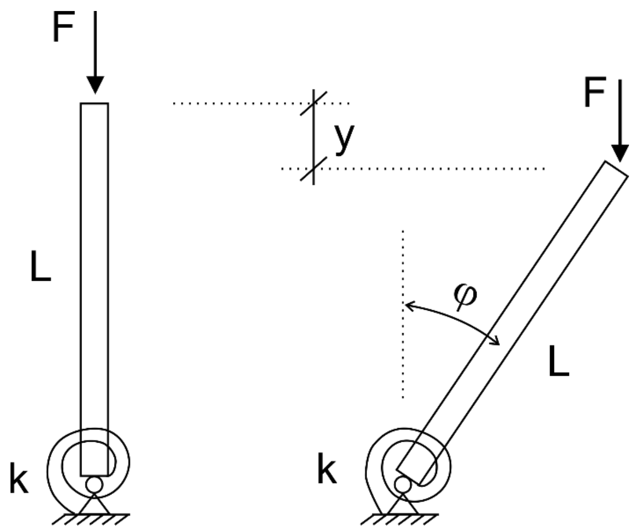
4.1. SISTEMA MECÂNICO COM BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA ESTÁVEL

4.1.1. Solução Analítica

4.1.1.1. Análise Não Linear sem Aproximações

Seja o sistema composto de uma barra vertical, sem peso, de comprimento L, com uma carga livre e vertical F aplicada em sua extremidade superior e com extremidade inferior rotulada, porém com uma mola acoplada de rigidez rotacional k, como ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso e mola circular



Fonte: O autor

Se a barra estiver na vertical, o sistema estará em equilíbrio, independentemente do valor da carga F, sendo equilibrada pela reação R, com $R = F$. Entretanto, nessa situação, a mola estará livre de tensões. Para se estudar a estabilidade é necessário analisar esse sistema submetido a *pequena perturbação* e utilizar o PEPTE. Percebe-se que a aplicação de *pequena perturbação* é um procedimento que sempre irá acompanhar uma análise de estabilidade. Somente com a aplicação de uma pequena perturbação se consegue estabelecer as equações que regem o problema e obter informações mais precisas da análise, pois se trata de comportamento não linear.

A energia potencial elástica da mola (U) é dada por:

$$U = \frac{k\varphi^2}{2} \tag{4.1}$$

O potencial da carga externa (V) é dado por:

$$V = -Fy \tag{4.2}$$

onde y é o deslocamento vertical da extremidade da barra perturbada. O deslocamento y é função do ângulo φ e é dado por $L - L\cos\varphi$ ou $-L(\cos\varphi - 1)$. Assim, o potencial da carga externa será:

$$V = FL(cos\,\varphi - 1) \tag{4.3}$$

A energia potencial total do sistema (Π) é dada pela soma da energia potencial elástica da mola e do potencial da carga externa F. Assim, tem-se que:

$$\Pi = U + V \tag{4.4}$$

Pode-se observar que a energia potencial elástica (U) é positiva, pois é a energia acumulada internamente pelo sistema mecânico sob carga, ou seja, é a energia de deformação. O potencial da carga (V) é negativo, pois é o trabalho que seria realizado pela carga externa caso o sistema mecânico fosse movido de sua configuração com carga, com seu valor final, para a sua configuração inicial, na posição vertical, considerada a posição de referência (Timoshenko & Gere, 1984)

Substituindo as Equações (4.1) e (4.3) na Equação (4.4) chega-se à energia potencial total:

$$\Pi = \frac{k\varphi^2}{2} + FL(cos\,\varphi - 1) \tag{4.5}$$

E sua derivada é:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = k\varphi - FL\,sen\,\varphi \tag{4.6}$$

Como se pode ver, a energia potencial total (Π) depende do deslocamento angular φ. Pelo Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE), quando o sistema estiver em situação de equilíbrio (*estável*, *instável* ou *neutro)*, a sua energia potencial total terá valor extremo relativo (máximo ou mínimo).

Nessa condição tem-se:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0 \tag{4.7}$$

ou:

$$k\varphi - FL\,sen\,\varphi = 0 \tag{4.8}$$

que fornece duas soluções:

i. $\varphi = 0$ (4.9)

Que corresponde à barra vertical (posição original de equilíbrio). Essa solução é chamada de solução fundamental de equilíbrio, sendo seu gráfico nas coordenadas $FL/k \times \varphi$ chamado de *caminho fundamental* ou *primário* (Figura 4.2).

ii. $F = \frac{k\,\varphi}{L\,sen\,\varphi}$ (4.10)

Que corresponde à condição de equilíbrio na posição de equilíbrio perturbada (barra inclinada). Essa solução é chamada de *solução pós-crítica*, sendo seu gráfico nas coordenadas $FL/k \times \varphi$, chamado de *caminho secundário de equilíbrio* ou *caminho pós*-crítico (Figura 4.2). Observa-se que a Equação (4.10) é uma função não linear de φ, oriundo do fato do problema ser inerentemente não linear devido à geometria do sistema. Em virtude disso, diz-se que ocorreu *não linearidade geométrica*.

A Equação (4.10) pode também ser facilmente deduzida pelo critério estático de equilíbrio, visto que o momento que a força F aplica na barra vale $FL\,\mathrm{sen}\,\varphi$ e o esforço na mola vale $k\varphi$, consequentemente a equação de equilíbrio será $k\varphi = FL\,\mathrm{sen}\,\varphi$.

Percebe-se na Figura 4.2 que o *caminho fundamental* e o *caminho pós-crítico* se cruzam em $FL/k = 1$ (ou $F = k/L$). Esse ponto é chamado de *ponto de bifurcação* e a carga neste ponto é chamada de carga de bifurcação ou *carga crítica* ($F_{cr} = k/L$).

Para saber se as duas soluções da Equação (4.8) representam sistema estável ou instável, será necessário verificar o sinal da segunda derivada da função $\Pi = \Pi(\varphi)$. Essa segunda derivada vale:

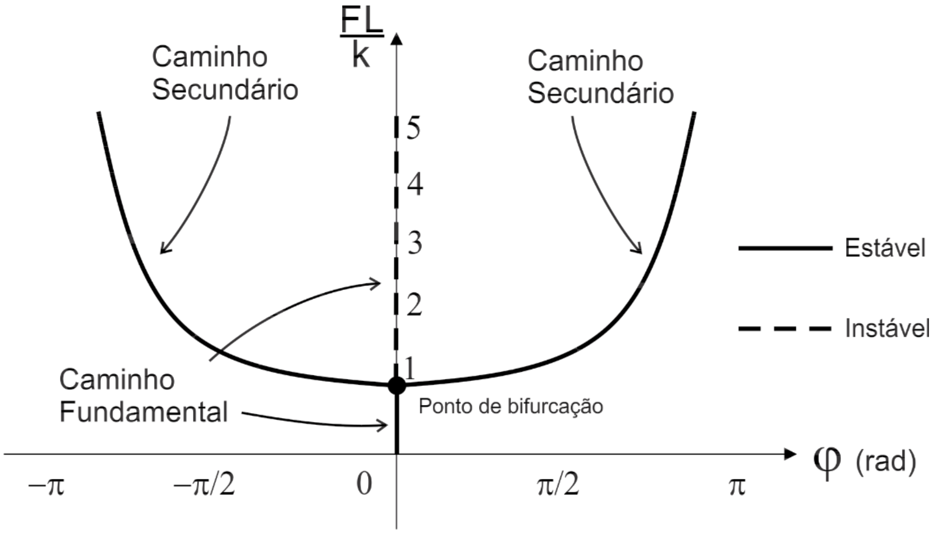
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - FL\cos\varphi \tag{4.11}$$

Tabela 4.1 - Estudo da Estabilidade

Solução $\varphi = 0$ $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - FL$		Solução $F = \frac{k\,\varphi}{L\,sen\,\varphi}$ $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k(1 - \varphi\ \text{cotg}\ \varphi)$
$k - FL > 0$ ou $F < k/L$ *Equilíbrio **estável*** *Caminho fundamental*	$k - FL < 0$ ou $F > k/L$ *Equilíbrio **instável*** *Caminho fundamental*	Para $\lvert\varphi\rvert < \pi$, $\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \geq 0$ *Equilíbrio **estável*** *Caminho pós-crítico*

Do estudo da estabilidade desse sistema mecânico conclui-se que se a carga é menor do que a *carga crítica* ($F < F_{cr}$, onde $F_{cr} = k/L$), o sistema é *estável* (barra na posição vertical, ou φ = 0, *caminho fundamental*, linha vertical cheia na Figura 4.2), caso contrário o caminho fundamental será *instável* (barra na vertical, ou $\varphi = 0$, linha vertical tracejada na Figura 4.2). Nesse caso, $F > k/L$, a energia potencial total assume um valor máximo local e qualquer perturbação na barra vertical a levará à posição inclinada, à procura de situação estável, situando-se no *caminho pós-crítico*, que é *estável* para $|\varphi| < \pi$. Esses resultados estão descritos na Tabela 4.1.

Figura 4.2 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.1



Fonte: O autor

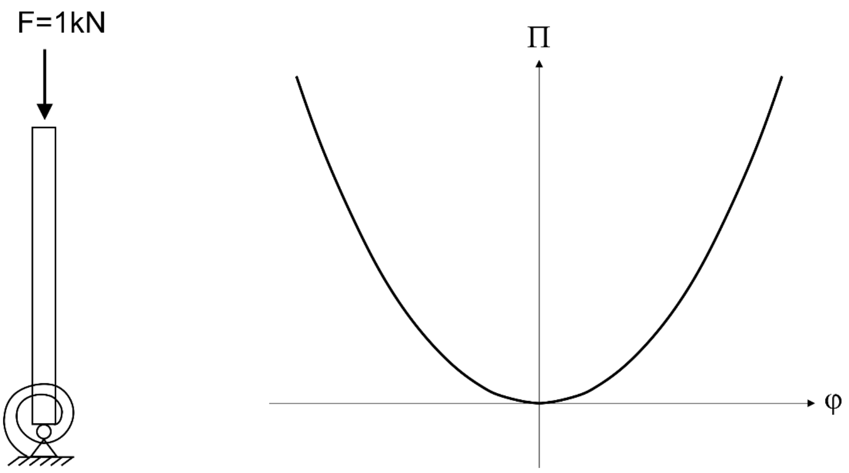
Resta estudar a estabilidade no ponto de bifurcação quando $F = k/L$. Nesse caso $\varphi = 0$ e a Equação (4.11) resulta igual a zero. Avaliando-se as derivadas superiores descobre-se que a derivada terceira de Π é zero, em $\varphi = 0$, e a derivada quarta é positiva e vale FL, em $\varphi = 0$. Logo, no ponto de bifurcação o sistema será *estável*.

A energia potencial total apresentada pela Equação (4.5) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Pi = k\left[\frac{\varphi^2}{2} - \chi(1 - cos\,\varphi)\right] \tag{4.12}$$

onde $\chi = FL/k$ ou $\chi = F/F_{cr}$, pois $F_{cr} = k/L$. A seguir se apresentam os gráficos de $\Pi \times \varphi$ para o sistema barra mola em estudo, com $k = 30$ kN e $L = 6$ m para diversos valores de F (Figura 4.3 a Figura 4.9).

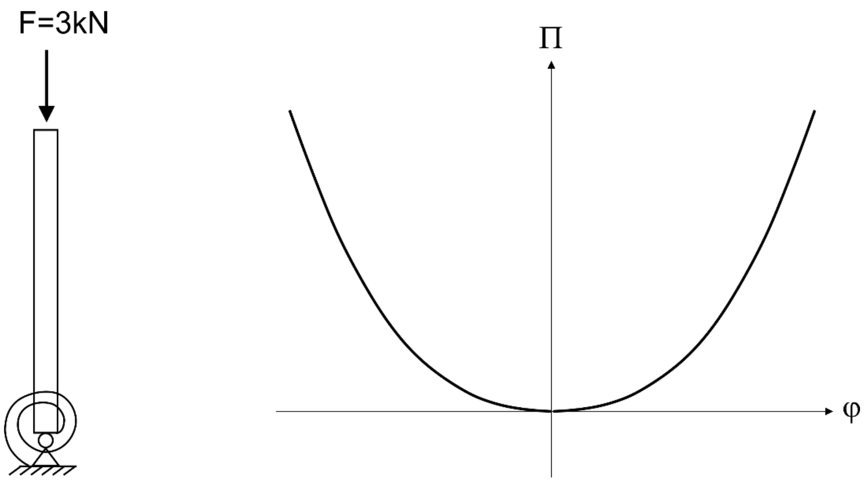
Figura 4.3 - Gráfico da energia potencial para 1 kN de força aplicada



Fonte: O autor

Quando a carga F ($F = 1$ kN) é muito menor do que F_{cr} ($F_{cr} = 5$ kN), a curva tem concavidade positiva, com grande curvatura (Figura 4.3), em $\varphi = 0$. Isso indica carga F com valor distante da carga crítica. Poder-se-ia afirmar que há um *equilíbrio fortemente estável*.

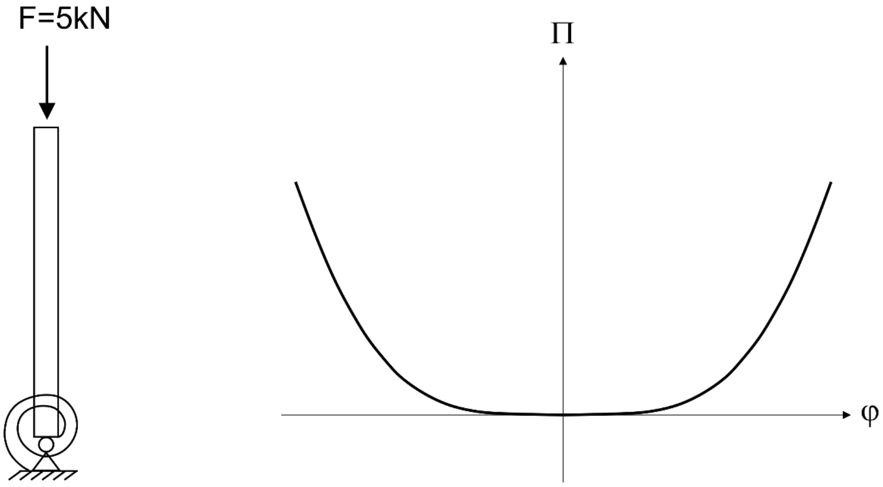
Figura 4.4 - Gráfico da energia potencial para 3 kN de força aplicada



Fonte: O autor

Quando a carga F ($F = 3$ kN) é menor do que F_{cr} ($F_{cr} = 5$ kN), a curva tem concavidade positiva, mas com curvatura moderada (Figura 4.4), em $\varphi = 0$. Isso indica carga F com valor mais próximo da carga crítica. Poder-se-ia afirmar que há um *equilíbrio moderadamente estável*.

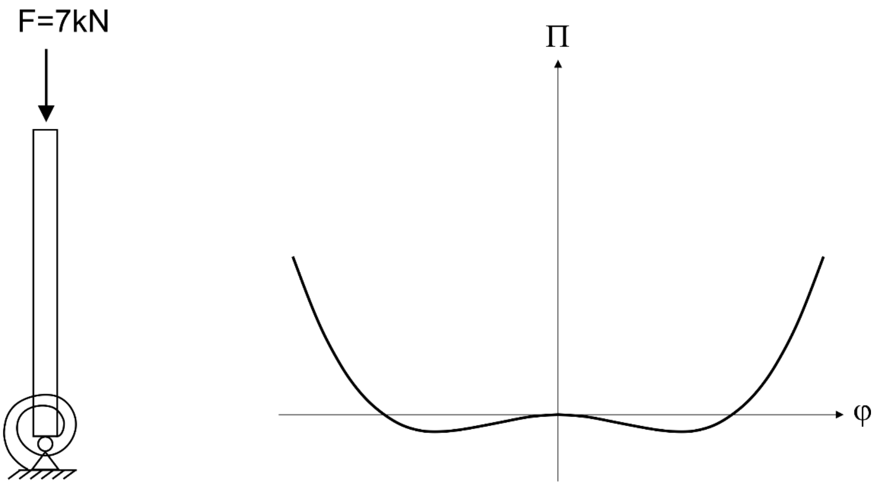
Figura 4.5 - Gráfico da energia potencial para 5 kN de força aplicada



Fonte: O autor

Quando a carga F ($F = 5$ kN) se iguala à carga crítica F_{cr} ($F_{cr} = 5$ kN), a curva de Π em $\varphi = 0$ tem concavidade positiva, porém com curvatura próxima de zero (Figura 4.5). Poder-se-ia afirmar que há um *equilíbrio no limiar da estabilidade*. É interessante chamar atenção, que, nas proximidades de $\varphi = 0$, pode-se admitir que Π não sofre variação (a energia potencial total é estacionária).

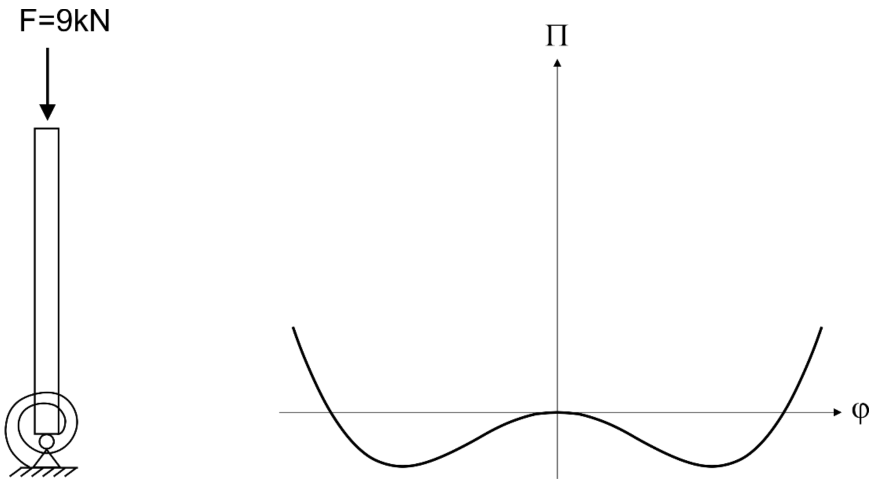
Figura 4.6 - Gráfico da energia potencial para 7 kN de força aplicada



Fonte: O autor

Quando a carga F ($F = 7$ kN) é um pouco maior do que F_{cr} ($F_{cr} = 5$ kN), a curva Π, em $\varphi = 0$, tem concavidade negativa, indicando equilíbrio instável (Figura 4.6). Porém, percebe-se que aparecem, próximos de $\varphi = 0$, dois trechos do gráfico de Π com concavidades positivas, podendo ser interpretado como a existência de equilíbrio estável, em duas posições fora do caminho fundamental, conforme φ seja positivo ou negativo. Os três pontos extremos locais de Π nas proximidades de $\varphi = 0$ indicam posições de equilíbrio. Em $\varphi = 0$ ele é instável e em $\varphi \neq 0$ eles são estáveis.

Figura 4.7- Gráfico da energia potencial para 9 kN de força aplicada

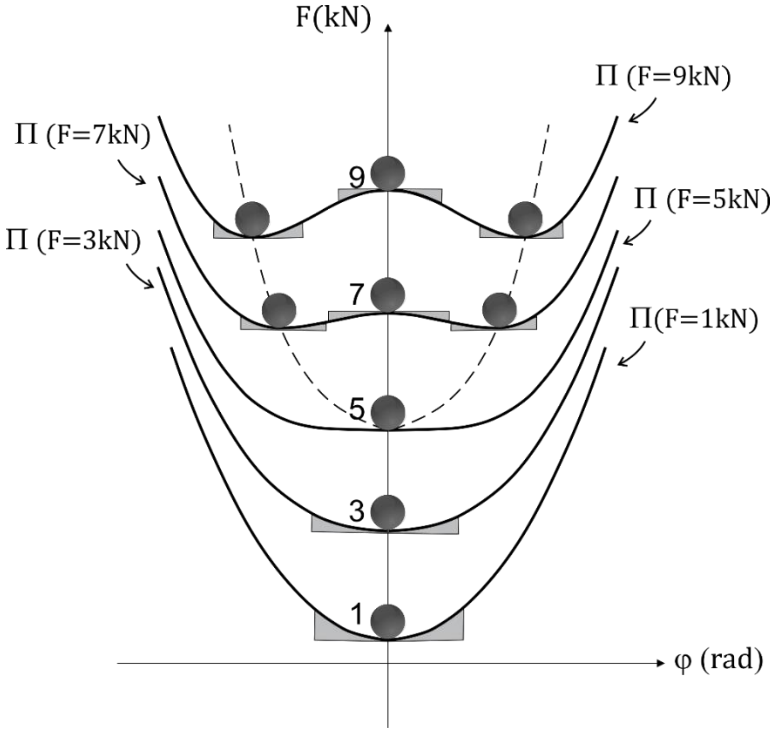


Fonte: O autor

Quando a carga F ($F = 9$ kN) é consideravelmente maior do que F_{cr} ($F_{cr} = 5$ kN), a curva Π, em $\varphi = 0$, tem forte concavidade negativa, indicando equilíbrio instável (Figura 4.7). Nesse caso também aparecem, mais distantes de $\varphi = 0$, dois trechos do gráfico de Π com concavidades positivas. Também indiciando a presença de equilíbrio estável em duas posições ($\varphi \neq 0$). A curva Π possui três pontos com alta curvatura.

A seguir, faz-se uma representação qualitativa da variação da energia potencial total Π (Figura 4.8) no gráfico carga × deslocamento angular ($F \times \varphi$), fazendo-se analogia com o conceito de estabilidade da massa cilíndrica repousando em superfícies curvas.

Figura 4.8 - Variação da energia potencial total e analogia com a massa esférica



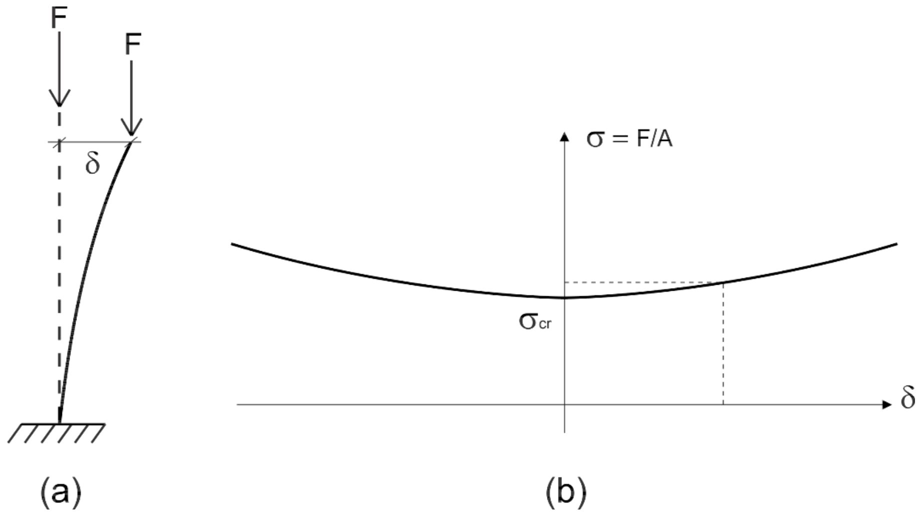
Fonte: O autor

Notar os extremos relativos (locais) apresentados no gráfico. Nas proximidades dos equilíbrios estáveis, a variação da energia potencial total Π é positiva. Nas proximidades dos equilíbrios instáveis, a variação da energia potencial total Π é negativa. A variação da energia potencial total está destacada pela área cinza do gráfico.

A Figura 4.9 apresenta o caminho pós-crítico de pilares (engastado-livre) e a Figura 4.10 apresenta o caminho pós-crítico de placas (apoios rotulados). A Figura 4.9 (b) mostra que para o nível de tensão pouco acima da tensão crítica, ocorre grande deslocamento lateral do topo do pilar, podendo levar o material ao escoamento ou à ruptura, traduzindo-se em pouca reserva de resistência. Não apresentando um comportamento pós-crítico significativo. A curva $\sigma \times \delta$ possui curvatura próxima de zero.

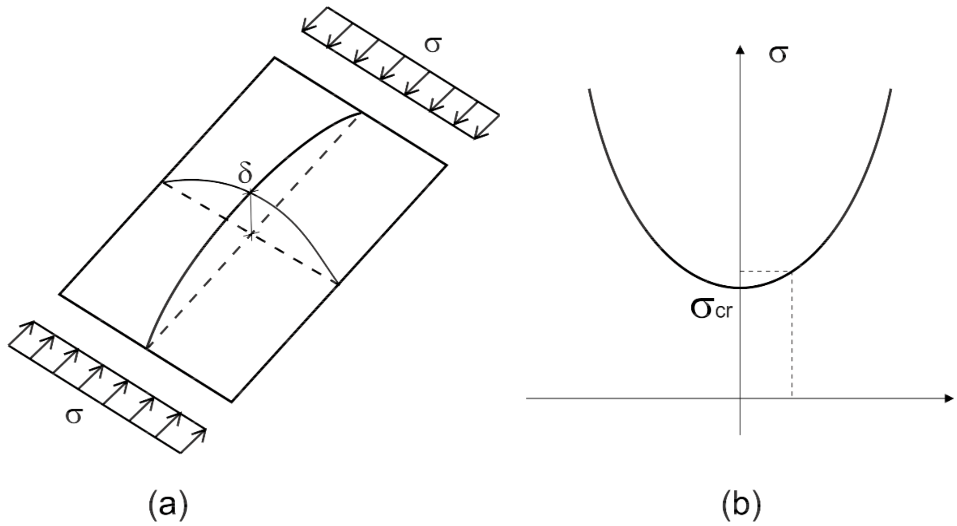
A Figura 4.10 (b) mostra que para um nível de tensão pouco acima da tensão crítica, há deslocamento relativamente moderado do ponto central da placa em relação à sua configuração inicial livre de tensões, permitindo que o material possa suportar esse nível de tensão sem atingir o escoamento ou a ruptura. Diz-se que apresenta um comportamento pós-crítico apreciável. Há reserva de resistência. A curva $\sigma \times \delta$ possui elevada curvatura.

Figura 4.9 – Pilar submetido a uma carga de compressão F e caminho secundário de equilíbrio



Fonte: O autor

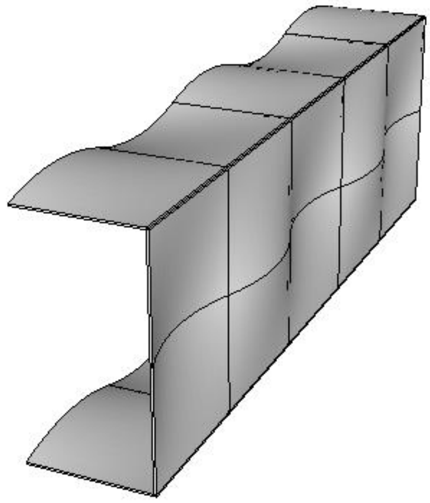
Figura 4.10 – Placa submetida a tensão de compressão crítica e caminho secundário de equilíbrio



Fonte: O autor

A formulação da ABNT NBR 14762:2010 para perfil formado a frio (PFF) leva em consideração o uso do comportamento pós-crítico de placas, que compõem o perfil de aço (Figura 4.11), para o cálculo da capacidade resistente do pilar.

Figura 4.11 – Comportamento pós-crítico de PFF



Fonte: O autor

4.1.1.2. Análise Não Linear com Aproximações

A análise na seção anterior foi feita de maneira exata, sem aproximações. Agora serão mostrados os efeitos na solução quando se utiliza aproximações. Para isso faz-se a expansão em série de Taylor do cosseno, nas proximidades de φ = 0, como a seguir:

$$cos\,\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \cdots \tag{4.13}$$

Adotando-se somente os dois primeiros termos e substituindo-se na equação da energia potencial total (Equação (4.5)), encontra-se:

$$\Pi = \frac{k\varphi^2}{2} - \frac{FL\varphi^2}{2} \tag{4.14}$$

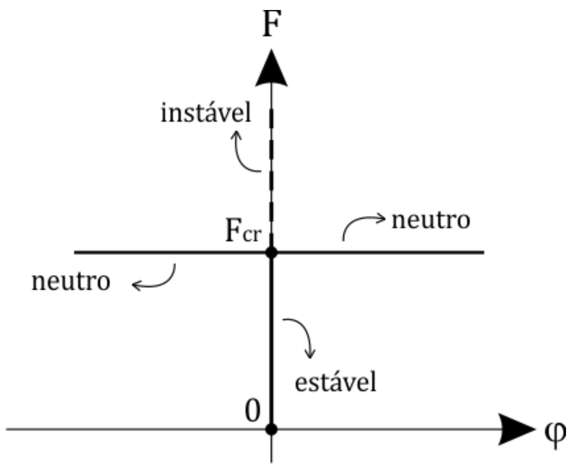
Usando-se o critério energético de equilíbrio, obtém-se:

$$(k - FL)\varphi = 0 \tag{4.15}$$

A Equação (4.15) tem semelhança com a Equação (A.12) (problema de autovalor). Essa equação possui duas soluções. A primeira, solução trivial, é dada por $\varphi = 0$, que representa a barra na vertical, sem interesse, pois procura-se outra configuração de equilíbrio diferente dessa posição.

A segunda solução, solução não trivial, ocorre quando o fator $k - FL$ da Equação (4.15) for nulo. Isso só será possível quando $F = F_{cr} = k/L$. Nesse caso, φ será não nulo, porém, seu valor é indeterminado. A Figura 4.12 ilustra a representação gráfica dessa segunda solução.

Figura 4.12 – Solução gráfica do sistema com aproximação pela expansão da série de Taylor com dois termos



Fonte: O autor

A segunda derivada do potencial total vale:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - FL \tag{4.16}$$

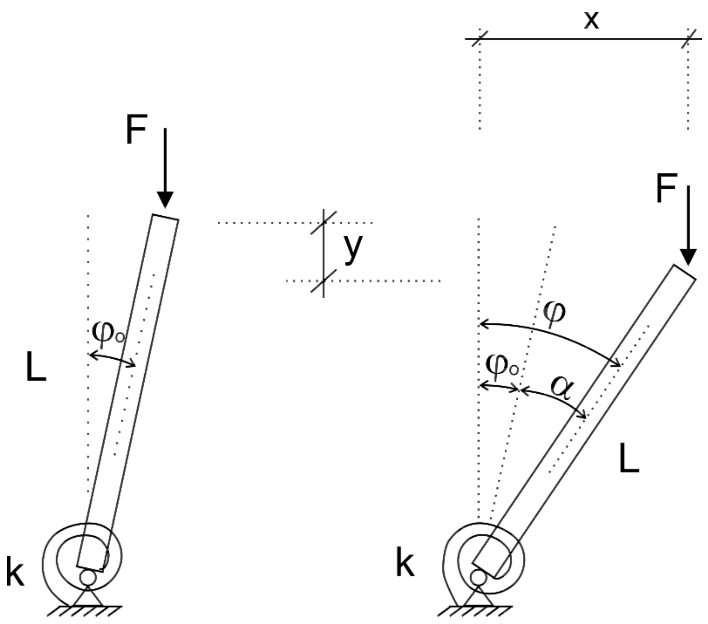
que para solução fundamental ($\varphi = 0$), fornece as mesmas informações da análise não linear anterior. Entretanto para a segunda solução ($F = k/L$), verifica-se que a segunda derivada e demais derivadas superiores são nulas, ou seja, o *equilíbrio é neutro*. Isso correntemente acontece na teoria da estabilidade, quando se usa uma solução linearizada: determina-se apenas a carga crítica e se perdem informações sobre os caminhos pós-críticos.

4.2. ANÁLISE COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL

4.2.1. Solução Analítica

Nos casos reais, as estruturas sempre vêm acompanhadas de imperfeições. Não há barras perfeitamente retas. Assim, uma maneira de levar em conta essas imperfeições é admitir, para o caso do modelo da Figura 4.1, que a barra está inicialmente com uma inclinação φ_0, em relação à sua posição vertical, como ilustrado na Figura 4.13.

Figura 4.13 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso com imperfeição e mola circular



Fonte: O autor

A energia potencial elástica da mola (U) é dada por:

$$U = \frac{k\,\alpha^2}{2} = \frac{k\,(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \tag{4.17}$$

pois $\alpha = \varphi - \varphi_0$. O potencial V da carga externa F é dado por:

$$V = -Fy \tag{4.18}$$

onde y é o deslocamento vertical da extremidade da barra perturbada. O deslocamento y é função dos ângulos φ e φ_0 e é dado por $L\cos\varphi_0 - L\cos\varphi$ ou $-L(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$. Assim, o potencial da carga externa será:

$$V = FL(cos\,\varphi - cos\,\varphi_0) \tag{4.19}$$

A energia potencial total do sistema (Π) é dada pela soma da energia potencial elástica da mola e do potencial da carga externa F. Assim, tem-se que:

$$\Pi = U + V \tag{4.20}$$

Substituindo as Equações (4.17) e (4.19) na Equação (4.20) chega-se à energia potencial total:

$$\Pi = \frac{k(\varphi - \varphi_0)^2}{2} + FL(cos\,\varphi - cos\,\varphi_0) \tag{4.21}$$

Esses valores são reapresentados na Tabela 4.2. A derivada da energia potencial total (Π) vale:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = k(\varphi - \varphi_0) - FL\,sen\,\varphi \tag{4.22}$$

Tabela 4.2- Energia potencial total do sistema com imperfeições

Energia potencial elástica da mola	Potencial da carga F	Energia potencial total
$U = \frac{k(\varphi - \varphi_0)^2}{2}$	$V = FL(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$	$\Pi = \frac{k(\varphi - \varphi_0)^2}{2} + FL(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

Pelo critério energético de estabilidade o sistema estará em equilíbrio (*estável*, *instável* ou neutro) quando a derivada da energia potencial total for nula (PEPTE), isto é:

$$k(\varphi - \varphi_0) - FL\,sen\,\varphi = 0 \tag{4.23}$$

Essa equação mostra que $\varphi = 0$ não é mais solução do problema.

Explicitando-se F na Equação (4.23), obtém-se:

$$F = \frac{k(\varphi - \varphi_0)}{L\,sen\,\varphi} \tag{4.24}$$

Para se avaliar as estabilidades das soluções, deve-se encontrar a segunda de derivada de Π, que vale:

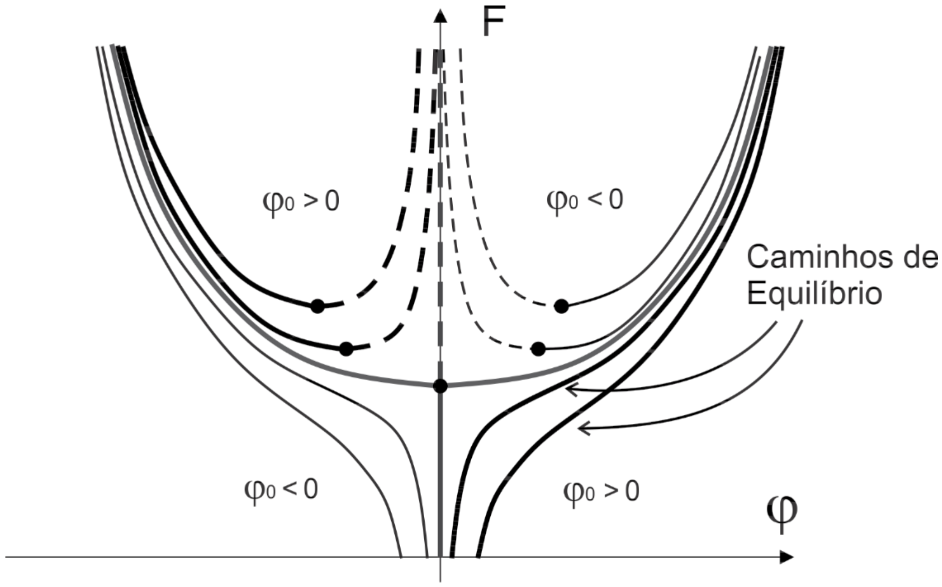
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k - FL\,cos\,\varphi \tag{4.25}$$

Substituindo-se F da Equação (4.24), na Equação (4.25), encontra-se:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k[1 - (\varphi - \varphi_0)\,cotg\,\varphi] \tag{4.26}$$

Esta equação permite estudar a estabilidade dos diversos trechos dos caminhos de equilíbrio. A figura a seguir apresenta os caminhos de equilíbrio para o sistema mecânico da Figura 4.13.

Figura 4.14 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.13



Fonte: O autor

A Figura 4.14 mostra os caminhos de equilíbrio do sistema imperfeito ilustrado na Figura 4.13, juntamente com aqueles do sistema perfeito ilustrado na Figura 4.1.

Observa-se que não há mais bifurcação, as soluções não lineares do sistema imperfeito margeiam as soluções do sistema perfeito (há uma aproximação assintótica). Os caminhos acima da curva do sistema perfeito são chamados de caminhos complementares de equilíbrio.

4.2.2. Solução Numérica

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 4.1 (sistema sem imperfeição inicial). Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k = 30$ kNm e $L = 6$ m. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi = 0{,}5$ e $F = 5{,}22$ (solução analítica). A Tabela 4.3 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.4 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado.

Tabela 4.3 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica estável sem imperfeição inicial

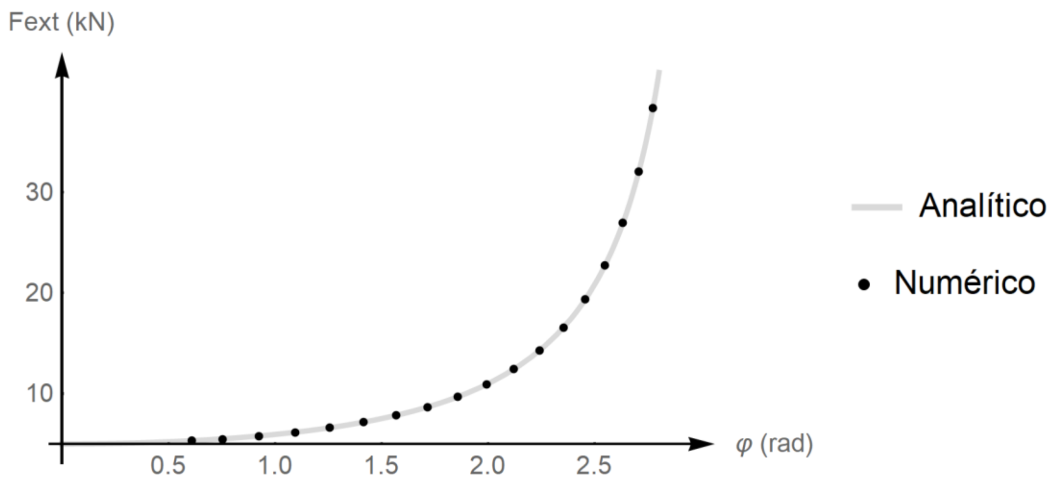
```
1. Dados Iniciais e SOLUÇÃO INICIAL
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; fi=0.5; k=30; L=6; F=5.22
2. Ciclo incremental iterativo (Loop Externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot)(SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a força generalizada desequilibrada (fdeseq=k*fi-F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.4 - Método de Newton-Raphson modificado para bifurcação simétrica estável sem imperfeição inicial

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; fi=0.5; k=30; L=6; F=5.22
2. Ciclo incremental iterativo (Loop Externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a força generalizada desequilibrada (fdeseq=k*fi-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

A Figura 4.15 mostra a solução numérica obtida pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.3 e a solução analítica. Em razão da simplicidade do sistema mecânico usado, os gráficos são coincidentes e as diferenças são imperceptíveis.

Figura 4.15 - Comparação entre o resultado analítico e numérico da Figura 4.1 com $k = 30$ kNm e $L = 6$ m



Fonte: O autor

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 4.13 (sistema com imperfeição inicial). Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k = 30$ kNm e $L = 6$ m. Para que a solução numérica capture o caminho de equilíbrio, inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi = 0{,}1$ rad e $F = 0{,}64$ kN (solução analítica). A Tabela 4.5 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.6 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado.

Tabela 4.5 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial

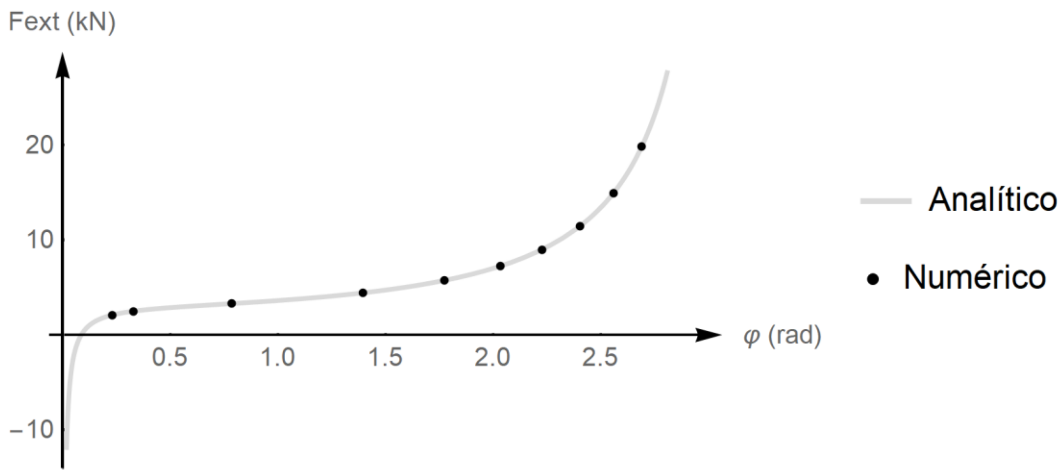
```
1. Configurações iniciais e SOLUÇÃO INICIAL
n=1000; tol=0.1; dF=0.1; fi=0.1; k=30; L=6; F=0.64; Fi0=5*pi/180
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*(fi-fi0)-F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.6 - Método de Newton-Raphson modificado para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial

```
1. Configurações iniciais e SOLUÇÃO INICIAL
n=1000; tol=0.1; dF=0.1; fi=0.1; k=30; L=6; F=0.64; Fi0=5*pi/180
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*(fi-fi0)-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

A Figura 4.16, para efeito de comparação, mostra as soluções numérica, obtida pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.5, e a solução analítica. Em razão da simplicidade do sistema mecânico usado, os gráficos são coincidentes e as diferenças são imperceptíveis.

Figura 4.16 - Comparação entre o resultado analítico e numérico para o sistema da Figura 4.13 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 5°$



Fonte: O autor

4.2.2.1. Solução Numérica Detalhada

Com o objetivo de melhor esclarecer ao leitor quanto à estratégia do método numérico utilizado para determinar a resposta carga × deslocamento dos sistemas mecânicos até agora estudados, procede-se aos cálculos do método de forma detalhada, iteração a iteração, destacando-se, em cada passo de carga, a solução predita e as soluções iterativas de forma análoga ao algoritmo da Tabela 4.5 (algoritmo com o método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial).

I. Configurações Iniciais do Sistema Mecânico:

Rigidez da mola:

$$k = 30 \text{ kNm}$$

Comprimento da barra:

$$L = 6 \text{ m}$$

Imperfeição geométrica inicial da barra:

$$\varphi_0 = 5° = 0{,}087 \text{ rad}$$

Ponto conhecido de equilíbrio:

$$F\ (\varphi = 0{,}1 \text{ rad}) = 0{,}64 \text{ kN}$$

II. Parâmetros arbitrários do algoritmo:

Incremento constante de carga:

$$\Delta F = 1 \text{ kN}$$

Tolerância para a equação estática desequilibrada:

$$tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Número de pontos da curva a serem capturados:

$$n_{max} = 3$$

III. Ciclos incrementais iterativos

[1] Busca do ponto $(\boldsymbol{\varphi_1}; \boldsymbol{F_1})$ de equilíbrio $(\boldsymbol{n} = \mathbf{1})$

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\,L\cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 0{,}64 \times 6 \times \cos 0{,}1$$

$$K_T = 26{,}17918 \text{ kN m}$$

Incremento de carga 1:

$$F_1 = F + \Delta F$$

$$F_1 = 0{,}64 + 1$$

$$F_1 = 1{,}64 \text{ kN}$$

Solução Incremental 1 (Solução Predita)

$$\Delta\varphi = K_T^{-1}\Delta F$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{26{,}17918}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0381983 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1 + 0{,}0381983$$

$$\varphi = 0{,}1381983 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1381983\ - 0{,}087) - 1{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}1381983$$

$$F_{deseq} = 0{,}1724081 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$\left|F_{deseq}\right| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância, prossegue-se com a primeira correção do ciclo iterativo:

Solução Iterativa 1 (Iterações de Newton-Raphson)

Iteração 1.1

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos \varphi$$

$$K_T = 30 - 1{,}64 \times 6 \cos 0{,}1381983$$

$$K_T = 20{,}25382 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{0{,}1724081}{20{,}25382}$$

$$\Delta\varphi = -0{,}0085124 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1381983 - 0{,}0085124$$

$$\varphi = 0{,}1296859 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1296859\ - 0{,}087) - 1{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}1296859$$

$$F_{deseq} = 0{,}0000481 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$|F_{deseq}| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância, prossegue-se com a segunda correção do ciclo iterativo:

Iteração 1.2

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\,L\cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 1{,}64 \times 6\cos 0{,}1296859$$

$$K_T = 20{,}24263 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{0{,}0000481}{20{,}24263}$$

$$\Delta\varphi = -0{,}0000024 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1296859 - 0{,}0000024$$

$$\varphi = 0{,}1296835 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\,L\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1296835 - 0{,}087) - 1{,}64 \times 6 \times \mathrm{sen}\,0{,}1296835$$

$$F_{deseq} = 3{,}594236 \times 10^{-12} \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$|F_{deseq}| < tol = 10^{-5} \text{ kN m} \therefore \varphi_1 = 0{,}1296835 \text{ rad}$$

Como atende à tolerância, salva o ponto $(\varphi_1; F_1) = (0{,}1296835; 1{,}64)$

[2] Busca do ponto $(\boldsymbol{\varphi_2}; \boldsymbol{F_2})$ de equilíbrio $(\boldsymbol{n} = \mathbf{2})$

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 1{,}64 \times 6 \times \cos 0{,}1296835$$

$$K_T = 20{,}24263 \text{ kN m}$$

Incremento de carga 2:

$$F_2 = F_1 + \Delta F$$

$$F_2 = 1{,}64 + 1$$

$$F_2 = 2{,}64 \text{ kN}$$

Solução Incremental 2 (Solução Predita)

$$\Delta\varphi = K_T^{-1} \Delta F$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{20{,}24263}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0494007 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1296835\ + 0{,}0494007$$

$$\varphi = 0{,}1790842 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen}\varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1790842 - 0{,}087) - 2{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}1790842$$

$$F_{deseq} = -0{,}0670227 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$\left|F_{deseq}\right| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância prossegue-se com a primeira correção do ciclo iterativo:

Solução Iterativa 2 (Iterações de Newton-Raphson)

Iteração 2.1

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 2{,}64 \times 6 \cos 0{,}1790842$$

$$K_T = 14{,}41333 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{-0{,}0670227}{14{,}41333}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0046501 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1790842 + 0{,}0046501$$

$$\varphi = 0{,}1837343 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen}\varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1837343 - 0{,}087) - 2{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}1837343$$

$$F_{deseq} = 0{,}0000308 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$\left|F_{deseq}\right| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância prossegue-se com a segunda correção do ciclo iterativo:

Iteração 2.2

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 2{,}64 \times 6 \cos 0{,}1837343$$

$$K_T = 14{,}42661 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{0{,}0000308}{14{,}42661}$$

$$\Delta\varphi = -0{,}0000021 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1837343 - 0{,}0000021$$

$$\varphi = 0{,}1837322 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}1837322 - 0{,}087) - 2{,}64 \times 6 \times \sin 0{,}1837322$$

$$F_{deseq} = 6 \times 10^{-12} \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$|F_{deseq}| < tol = 10^{-5} \text{ kN m} \therefore \varphi_2 = 0{,}1837322 \text{ rad}$$

Como atende a tolerância, salva o ponto $(\varphi_2; F_2) = (0{,}1837322; 2{,}64)$

[3] Busca do ponto $(\boldsymbol{\varphi_3}; \boldsymbol{F_3})$ de equilíbrio $(\boldsymbol{n} = \mathbf{3})$

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos \varphi$$

$$K_T = 30 - 2{,}64 \times 6 \times \cos 0{,}1837322$$

$$K_T = 14{,}42661 \text{ kN m}$$

Incremento de carga 3:

$$F_3 = F_1 + \Delta F$$

$$F_3 = 2{,}64 + 1$$

$$F_3 = 3{,}64 \text{ kN}$$

Solução Incremental 3 (Solução Predita)

$$\Delta\varphi = K_T^{-1}\Delta F$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{14{,}42661}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0693164 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}1837322 + 0{,}0693164$$

$$\varphi = 0{,}2530485 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen}\varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}2530485 - 0{,}087) - 3{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}2530485$$

$$F_{deseq} = -0{,}4943254 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$\left|F_{deseq}\right| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância prossegue-se com a primeira correção do ciclo iterativo:

Solução Iterativa 3 (Iterações de Newton-Raphson)

Iteração 3.1

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos\varphi$$

$$K_T = 30 - 3{,}64 \times 6 \cos 0{,}2530485$$

$$K_T = 8{,}85552 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{-0{,}4943254}{8{,}85552}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0558211 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}2530485 + 0{,}0558211$$

$$\varphi = 0{,}3088697 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}3088697 - 0{,}087) - 3{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}3088697$$

$$F_{deseq} = 0{,}0091295 \text{ kN m}$$

Verifica se atende à tolerância:

$$\left|F_{deseq}\right| > tol = 10^{-5} \text{ kN m}$$

Como não atende à tolerância prossegue-se com a segunda correção do ciclo iterativo:

Iteração 3.2

Atualiza a rigidez total do sistema:

$$K_T = k - F\ L \cos \varphi$$

$$K_T = 30 - 3{,}64 \times 6 \cos 0{,}3088697$$

$$K_T = 9{,}19352 \text{ kN m}$$

Corrige o deslocamento:

$$\Delta\varphi = -K_T^{-1} F_{deseq}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{0{,}0091295}{9{,}19352}$$

$$\Delta\varphi = -0{,}0009930 \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi = 0{,}3088697 - 0{,}0009930$$

$$\varphi = 0{,}3078766 \text{ rad}$$

Calcula a equação estática desequilibrada:

$$F_{deseq} = k(\varphi - \varphi_0) - F\ L \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_{deseq} = 30 \times (0{,}3078766\ - 0{,}087) - 3{,}64 \times 6 \times \operatorname{sen} 0{,}3078766$$

$$F_{deseq} = 0{,}0000033 \text{ kN m}$$

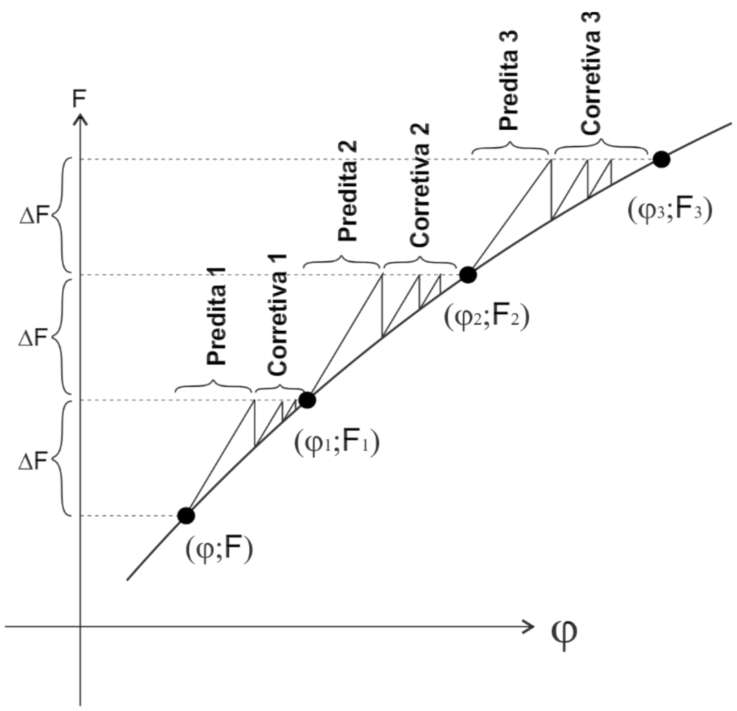
Verifica se atende à tolerância:

$$|F_{deseq}| < tol = 10^{-5} \text{ kN m} \therefore \varphi_3 = 0{,}3078766$$

Como atende à tolerância, salva o ponto $(\varphi_3; F_3) = (0{,}3078766; 3{,}64)$

A Figura 4.17 ilustra o procedimento numérico detalhado apresentado nesta subseção.

Figura 4.17 – Representação gráfica da estratégia numérica de Newton-Raphson



Fonte: O autor

4.3. ANÁLISE COM NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Além da não linearidade geométrica (NLG), na qual se analisa o equilíbrio do sistema em sua posição deslocada, outro aspecto a ser considerado para uma análise mais realista diz respeito à não-linearidade do material constituinte da estrutura, a chamada não linearidade física (NLF). Nesta seção será apresentada o procedimento para se encontrar a resposta de sistemas cuja relação carga e deformação não é linear. Para isso ainda algumas simplificações serão adotadas.

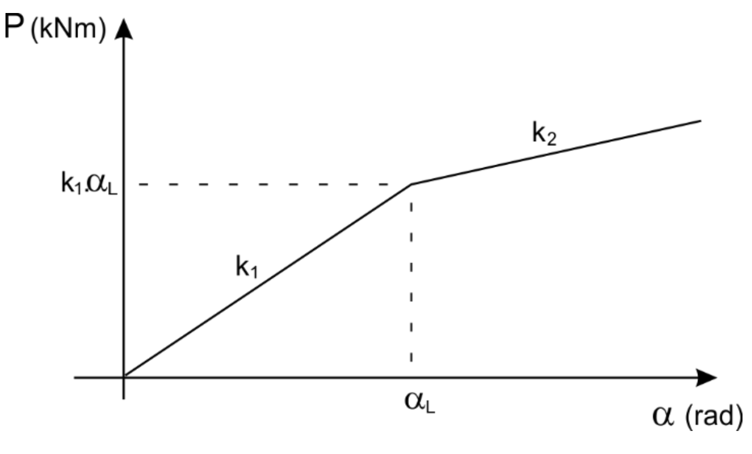
4.3.1. Resposta Não Linear da Mola

Nos modelos anteriores se considerou que a relação entre carga momento e deformação angular da mola α era sempre proporcional à rigidez k constante, independente de quanto a mola se deforma. Este modelo é chamado de elástico linear. Para pequenos deslocamentos é aceitável que a mola obedeça à lei de Hooke, mas quando os deslocamentos se tornam significantes é esperado uma resposta não linear do material. Existem vários modelos para definir essa não linearidade. Os seguintes modelos serão usados neste trabalho:

Modelo I: Comportamento elasto-plástico com encruamento linear

Neste modelo a rigidez se inicia com o valor de k_1 e após a deformação alcançar $\alpha = \alpha_L$ diminui para k_2 (Figura 4.18).

Figura 4.18 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo elasto-plástico com encruamento linear

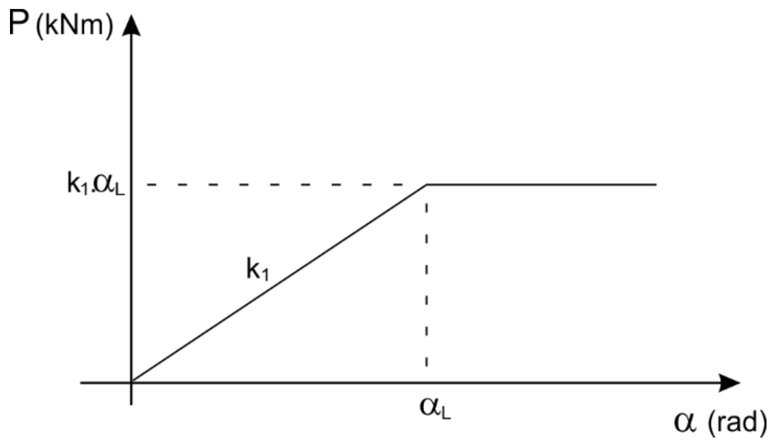


Fonte: O autor

Modelo II: Comportamento elástico-perfeitamente plástico

Nese modelo a rigidez se inicia com o valor de k_1. Após a deformação alcançar $\alpha = \alpha_L$ a mola entra em escoamento e a partir de então o momento P não varia mais com o aumento da deformação (Figura 4.19). O momento de plastificação, portanto, é dado por $P_p = k_1 \times \alpha_L$.

Figura 4.19 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo elástico-perfeitamente plástico

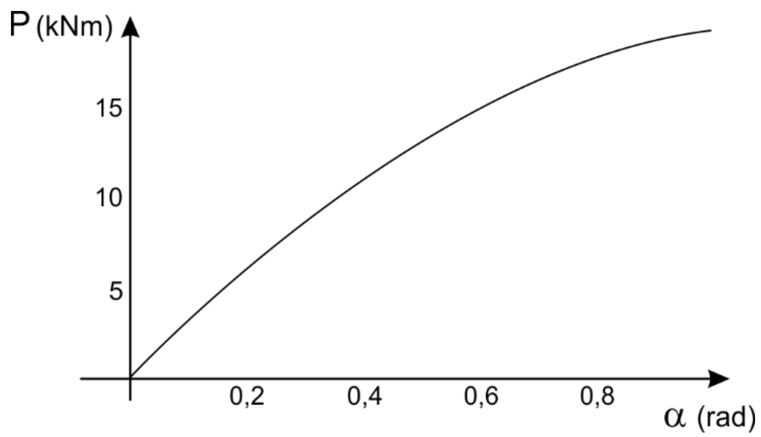


Fonte: O autor

Modelo III: Comportamento não linear elástico

Nesse modelo o momento varia segundo $P(\alpha) = 30\ \alpha/\cosh\alpha$ (Figura 4.20).

Figura 4.20 - Resposta do momento P pela deformação angular α no modelo não linear elástico



Fonte: O autor

4.3.2. Solução Analítica

Na subseção 4.1.1 obteve-se a solução analítica para o sistema com bifurcação simétrica estável sem imperfeições geométricas iniciais. O caminho de equilíbrio que correspondente a posição perturbada da estrutura está expresso na Equação (4.10):

$$F = \frac{k\ \varphi}{L\ sen\ \varphi} \tag{4.10}$$

(repetida)

Esse sistema foi analisado para o caso de linearidade física, com a mola de rigidez constante $k = 30\ kNm$ e a barra com comprimento constante $L = 6m$. Uma forma de se considerar a não linearidade física seria permitir a deformabilidade da barra e aplicar uma relação não linear entre carga e deformação da barra. A forma que faz-se aqui será manter-se a hipótese da indeformabilidade da barra, logo seu comprimento $L = 6m$ permanece constante, e assumir que a mola se comporta de acordo com um dos 3 modelos apresentados anteriormente. A partir de agora adota-se para o Modelo I $k_1 = 30$ kNm e $k_2 = 12$ kNm e para o Modelo II $k_1 = 30$ kNm. Substituindo-se a rigidez não linear de cada modelo na Equação (4.10) obtém-se o novo caminho de equilíbrio em sua configuração perturbada (Tabela 4.7).

Tabela 4.7 – Solução analítica do sistema sem imperfeição geométrica para cada modelo de NLF

DEFORMAÇÃO	MODELO I	MODELO II	MODELO III
$\alpha < \alpha_L$	$5\varphi\ csc\ \varphi$	$5\varphi\ csc\ \varphi$	$5\varphi\ csc\ \varphi\ sech\ \varphi$
$\alpha \geq \alpha_L$	$2\varphi\ csc\ \varphi$	$5\ \alpha_L\ \ csc\ \varphi$	

De forma análoga obtém-se o caminho de equilíbrio da configuração perturbada para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física.

Notar que para o sistema sem imperfeição geométrica a deformação da mola α é igual ao deslocamento do sistema φ, mas para o sistema com imperfeição geométrica a deformação da mola α é igual a diferença entre o deslocamento do sistema φ e a imperfeição angular inicial φ_0.

Na subseção 4.2.1 obteve-se a seguinte a seguinte resposta do sistema:

$$F = \frac{k(\varphi - \varphi_0)}{L\, sen\, \varphi} \quad (4.24) \text{ (repetida)}$$

Assim o caminho de equilíbrio da estrutura em sua configuração perturbada em cada um dos 3 modelos para o sistema com imperfeição geométrica inicial deve ser conforme Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Solução analítica do sistema com imperfeição geométrica para cada modelo de NLF

DEFORMAÇÃO	MODELO I	MODELO II	MODELO III
$\alpha < \alpha_L$	$5(\varphi - \varphi_0)\, csc\, \varphi$	$5(\varphi - \varphi_0)\, csc\, u$	$5(\varphi - \varphi_0)\, sech(\varphi - \varphi_0)\, csc\, \varphi$
$\alpha \geq \alpha_L$	$2(\varphi - \varphi_0)\, csc\, \varphi$	$5\alpha_L\ csc\, \varphi$	

4.3.3. Solução Numérica

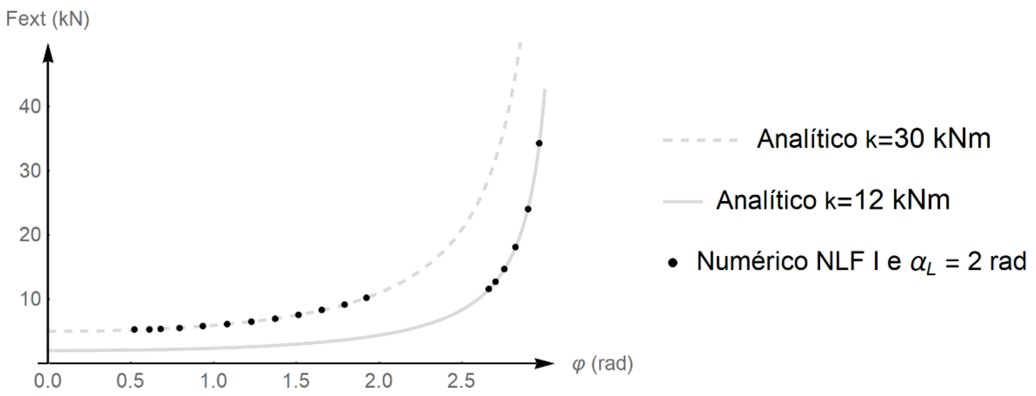
A algoritmo é semelhante ao do sistema linear físico, porém agora é necessário atualizar a rigidez da mola de acordo com o modelo de não linearidade física adotado cada vez que o deslocamento for atualizado. O algoritmo genérico para a solução numérica de sistemas com não linearidade física de 1GL é apresentada na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Estratégia numérica de Newton-Raphson para sistemas com NLF

1. Configurações iniciais 2. Ciclo incremental iterativo (loop externo) Calcula a rigidez total do sistema (${d^2\Pi}/{d\varphi^2}$) Incrementa carga ΔF Atualiza o deslocamento $\varphi = \varphi + \frac{\Delta F}{{d^2\Pi}/{d\varphi^2}}$ Atualiza a rigidez da mola k 3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson) Calcula a equação estática desequilibrada (${d\Pi}/{d\varphi}$) Verifica a convergência: ${d\Pi}/{d\varphi} \leq tolerância$ Se *SIM*, Salva os valores de φ e F Retorna ao item 2 Se *NÃO*, Calcula a rigidez total do sistema (${d^2\Pi}/{d\varphi^2}$) Atualiza deslocamento $\varphi = \varphi - \frac{{d\Pi}/{d\varphi}}{{d^2\Pi}/{d\varphi^2}}$ Atualiza a rigidez da mola k Retorna ao item 3

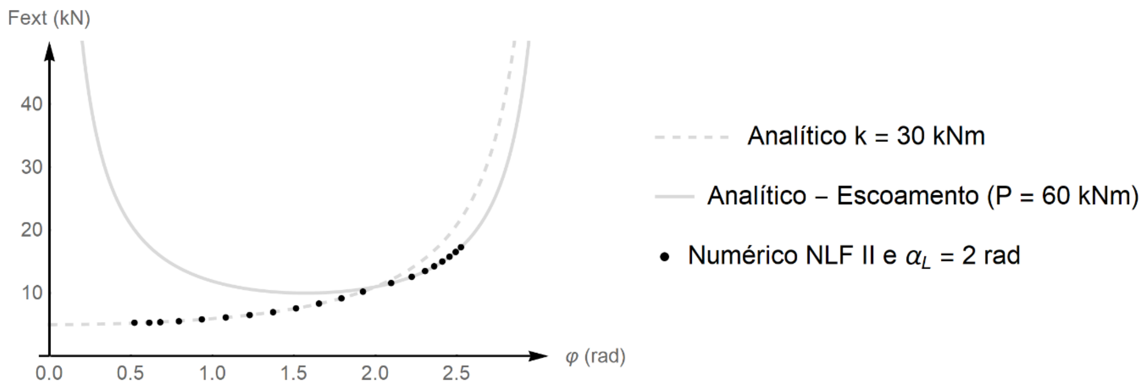
As figuras a seguir apresentam a solução gráfica numérica para cada um dos modelos de NLF introduzidos nesta seção para o sistema com bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e com imperfeição geométrica inicial (Figura 4.21 a Figura 4.26).

Figura 4.21 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo I com $\alpha_L = 2$ rad



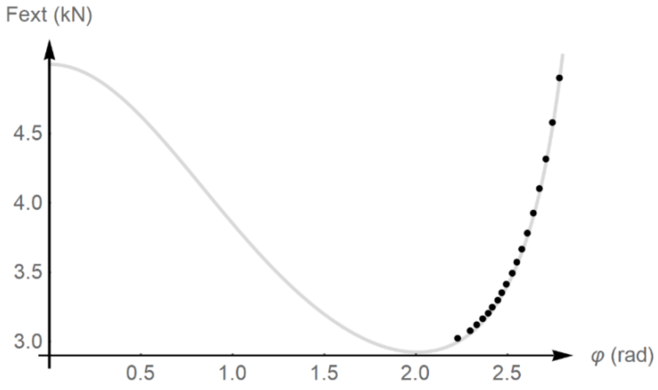
Fonte: O autor

Figura 4.22 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha_L = 2$ rad



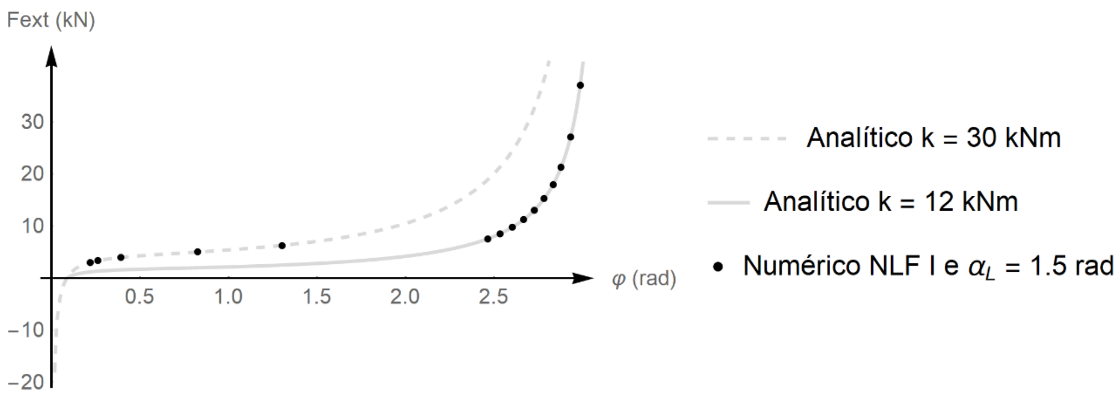
Fonte: O autor

Figura 4.23 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável e não linearidade física da mola segundo o modelo III



Fonte: O autor

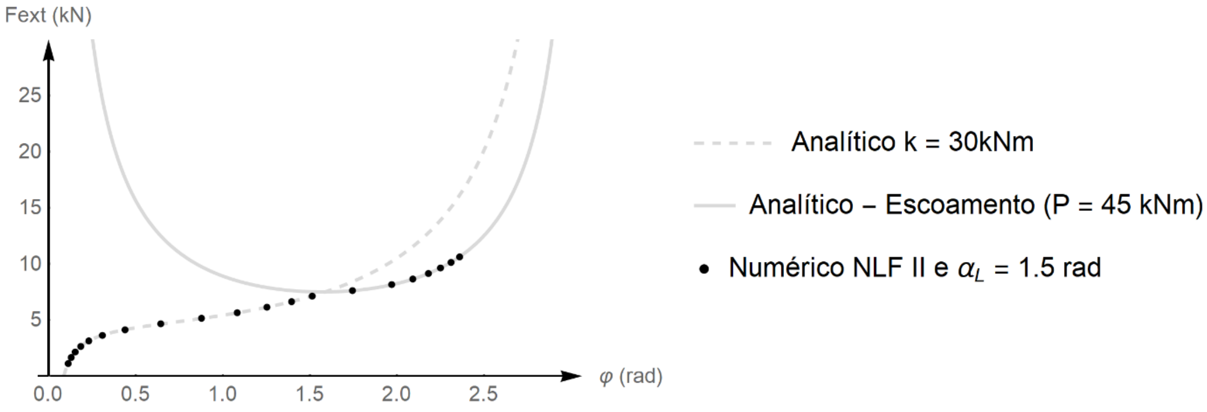
Figura 4.24 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo I com $\alpha_L = 1{,}5$ rad



Fonte:

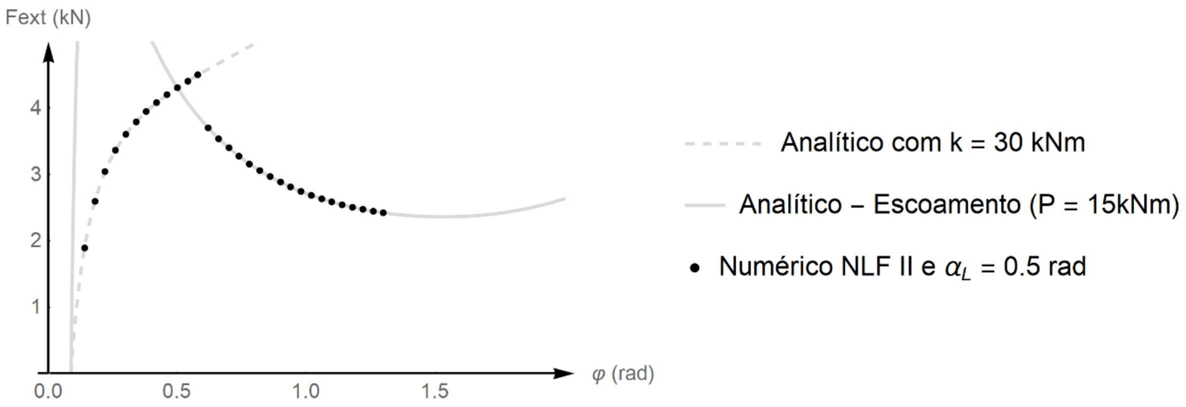
O autor

Figura 4.25 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha_L = 1{,}5$ rad



Fonte: O autor

Figura 4.26 - Comparação da solução analítica e numérica para o sistema com bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e não linearidade física da mola segundo o modelo II com $\alpha_L = 0{,}5$ rad



Fonte: O autor

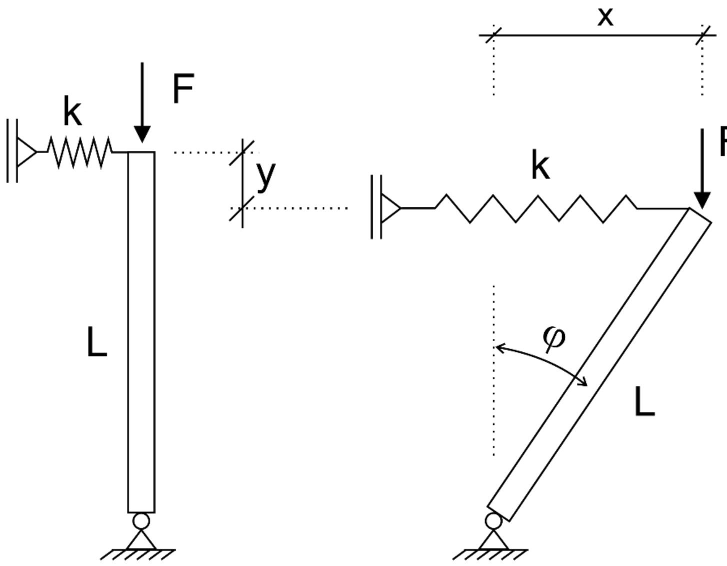
4.4. SISTEMA MECÂNICO COM BIFURCAÇÃO SIMÉTRICA INSTÁVEL

Nos exemplos anteriores se apresentaram o estudo da estabilidade de um sistema mecânico composto por barra rígida sem peso, sob força de compressão vertical submetido na extremidade livre superior e mola circular na extremidade rotulada inferior. Tratar-se-á nos exemplos seguintes de apresentar o estudo de estabilidade de outros sistemas mecânicos de um grau de liberdade (1GL), compostos de barra rígida sem peso, porém, submetidos a outras condições de vínculos nas extremidades.

4.4.1. Solução Analítica

A Figura 4.27 apresenta um sistema composto de barra vertical com carga F de compressão associado na extremidade superior a uma mola linear de rigidez k. Em (a) tem-se o sistema em seu estado inicial e em (b) o estado perturbado.

Figura 4.27 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso e mola linear



(a) (b)

Fonte: O autor

A energia potencial do sistema consiste na soma da energia potencial da mola e da potencial da carga, portanto:

$$\Pi = U + V \tag{4.27}$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} - Fy \tag{4.28}$$

Onde x e y são os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente, após a perturbação:

$$x = L\,sen\,\varphi \tag{4.29}$$

$$y = L(1 - cos\,\varphi) \tag{4.30}$$

Substituindo os deslocamentos na energia potencial total tem-se:

$$\Pi = \frac{kL^2 sen^2\varphi}{2} + FL(cos\,\varphi - 1) \tag{4.31}$$

E sua derivada é:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = sen\,\varphi\,(kL^2\,cos\,\varphi - FL) \tag{4.32}$$

As posições de equilíbrio desse sistema serão encontradas nas regiões onde não há variação de energia potencial para um pequeno incremento no deslocamento angular (PEPTE), ou seja, nos pontos críticos:

$$sen\,\varphi\,(kL^2\,cos\,\varphi - FL) = 0 \tag{4.33}$$

Que ocorre em dois casos:

i. $\varphi = 0$ (4.34)

ii. $F = kL\,cos\,\varphi$ (4.35)

A Equação (4.34) representa a barra na posição vertical e a Equação (4.35) representa a barra inclinada. Essas posições de equilíbrio serão estáveis se representarem um ponto de mínimo na energia potencial total do sistema e instáveis se representarem um ponto máximo. Portanto, para análise da estabilidade, estudaremos o comportamento da segunda derivada da energia potencial total:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(cos^2\,\varphi - sen^2\,\varphi) - FL\,cos\,\varphi \tag{4.36}$$

será estável se:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} > 0 \tag{4.37}$$

e será instável se:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0 \tag{4.38}$$

Para a primeira solução (barra na posição vertical):

$$\left.\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = kL^2 - FL \tag{4.39}$$

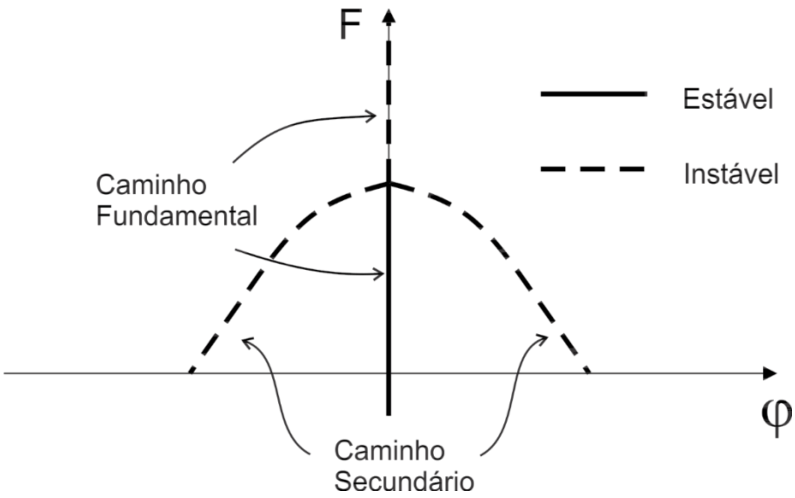
Portanto, para $F < kL$ e $\varphi = 0$, o equilíbrio é estável e para $F > kL$ e $\varphi = 0$ é instável. Ambos são caminhos fundamentais ou primários. A transição se dará em $F = kL$, que é a carga crítica, e corresponde ao ponto de bifurcação.

Para a segunda solução (barra inclinada):

$$\left.\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2}\right|_{F=kLcos\varphi} = -kL^2\, sen^2\, \varphi \tag{4.40}$$

Como k e L são constantes positivas e o quadrado do seno também é sempre positivo, tem-se que a derivada segunda sempre será negativa. Logo, o equilíbrio no caminho secundário é instável. A Figura 4.28 mostra seu comportamento.

Figura 4.28 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.27

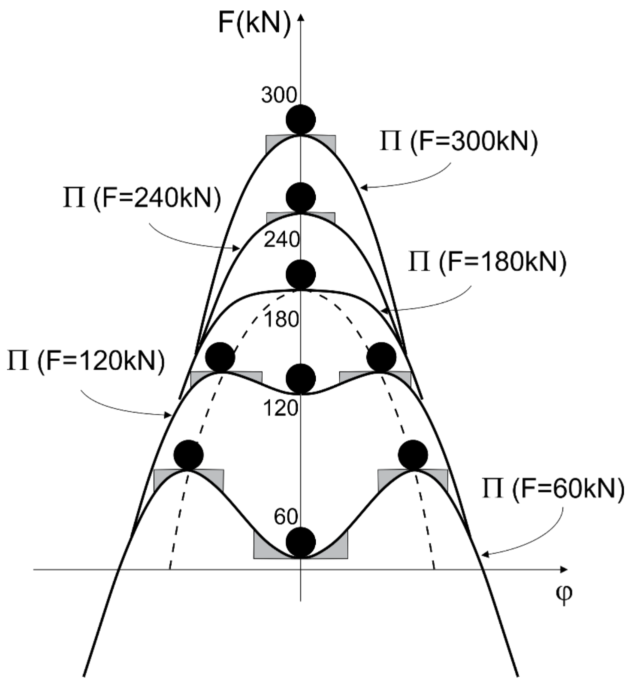


Fonte: O autor

A seguir, faz-se uma representação qualitativa da variação da energia potencial total Π (Figura 4.29) no gráfico carga × deslocamento angular ($F \times \varphi$), fazendo-se analogia com o conceito de estabilidade da massa cilíndrica repousando em superfícies curvas.

Notar os extremos relativos (locais) apresentados no gráfico. Nas proximidades dos equilíbrios estáveis, a variação da energia potencial total Π é positiva. Nas proximidades dos equilíbrios instáveis, a variação da energia potencial total Π é negativa. A variação da energia potencial total está destacada pela área cinza do gráfico. No que diz respeito aos valores das curvaturas nos pontos de extremos relativos da energia potencial total podem ser feitas as mesmas observações realizadas no exemplo anterior.

Figura 4.29 - Variação de energia potencial total e analogia com massa esférica



Fonte: O autor

4.4.2. Solução Numérica

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 4.27. Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k = 30$ kNm e $L = 6$ m. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi = 2$ rad e $F = -74{,}9$ kN (solução analítica). A Tabela 4.10 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.11 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado.

Tabela 4.10 - Método de Newton-Raphson padrão para sistema com bifurcação simétrica instável

```
1. Dados Iniciais e SOLUÇÃO INICIAL
n=1000; tol=0.1; dF=0.03; fi=2; k=30; L=6; F=-74.9
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2)-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*cos(fi)*sin(fi)-
F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
```

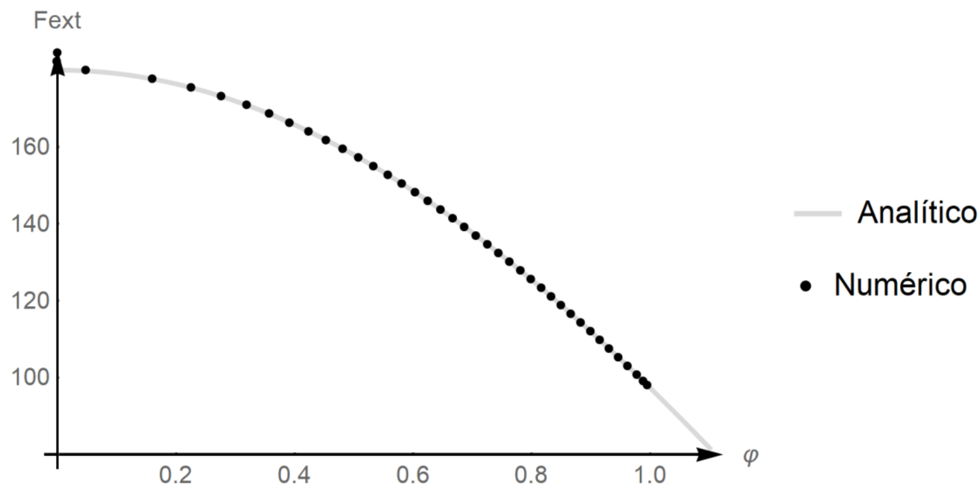
```
      Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k*L^2*(1-2*(sin(fi))^2)-
F*L*cos(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.11 - Método de Newton-Raphson modificado para sistema com bifurcação simétrica instável

```
1. Dados Iniciais e SOLUÇÃO INICIAL
n=1000; tol=0.1; dF=0.03; fi=2; k=30; L=6; F=-74.9
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2)-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*cos(fi)*sin(fi)-
F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot=k*L^2*(1-2*(sin(fi))^2)-
F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

A Figura 4.30 mostra a solução numérica obtida pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.10 e a solução analítica. Em razão da simplicidade do sistema mecânico usado, os gráficos são coincidentes e as diferenças são imperceptíveis.

Figura 4.30 - Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema com $k = 30$ kNm e $L = 6$ m



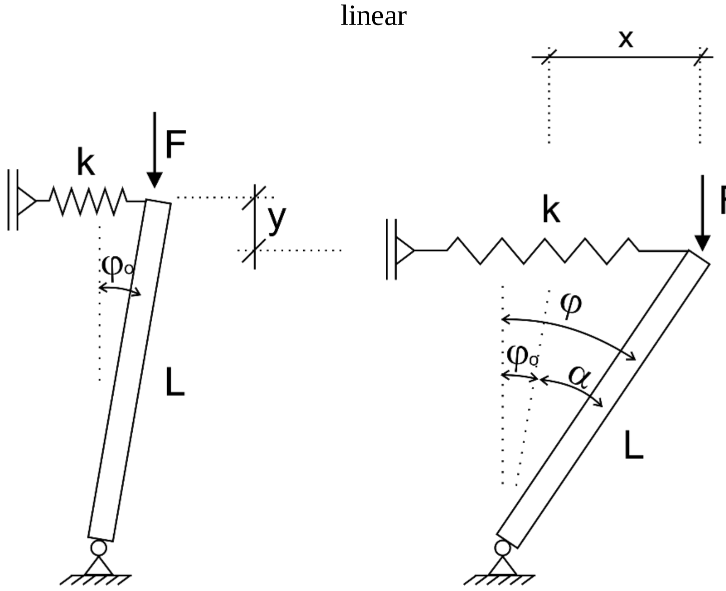
Fonte: O autor

4.5. ANÁLISE COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL

4.5.1. Solução Analítica

A Figura 4.31 representa um sistema similar ao anterior com uma imperfeição inicial. As imperfeições nesse sistema são levadas em consideração de maneira análoga ao caso do sistema da Figura 4.13.

Figura 4.31 - Sistema mecânico composto por barra rígida sem peso com imperfeição inicial e mola linear



Fonte: O autor

A energia potencial do sistema é originada da mola e da carga, portanto:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} - Fy \tag{4.41}$$

A Equação (4.41) expressa a energia potencial total em função dos deslocamentos horizontais e verticais, entretanto ambos são função do deslocamento angular e podem ser determinados geometricamente:

$$x = L(sen\,\varphi - sen\,\varphi_0) \tag{4.42}$$

$$y = L(cos\,\varphi_0 - cos\,\varphi) \tag{4.43}$$

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.41), obtém-se a energia potencial em função do deslocamento angular:

$$\Pi = \frac{kL^2(sen\,\varphi - sen\,\varphi_0)^2}{2} + FL(cos\,\varphi - cos\,\varphi_0) \tag{4.44}$$

E sua derivada é:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = kL^2(sen\,\varphi - sen\,\varphi_0)\,cos\,\varphi - FL\,sen\,\varphi \tag{4.45}$$

As posições de equilíbrio do sistema acontecerão quando a derivada da energia potencial total for nula (PEPTE):

$$kL^2(sen\,\varphi - sen\,\varphi_0)\,cos\,\varphi - FL\,sen\,\varphi = 0 \tag{4.46}$$

Ou em:

$$F = kL(sen\,\varphi - sen\,\varphi_0)\,cotg\,\varphi \tag{4.47}$$

A segunda derivada da energia potencial total do sistema vale:

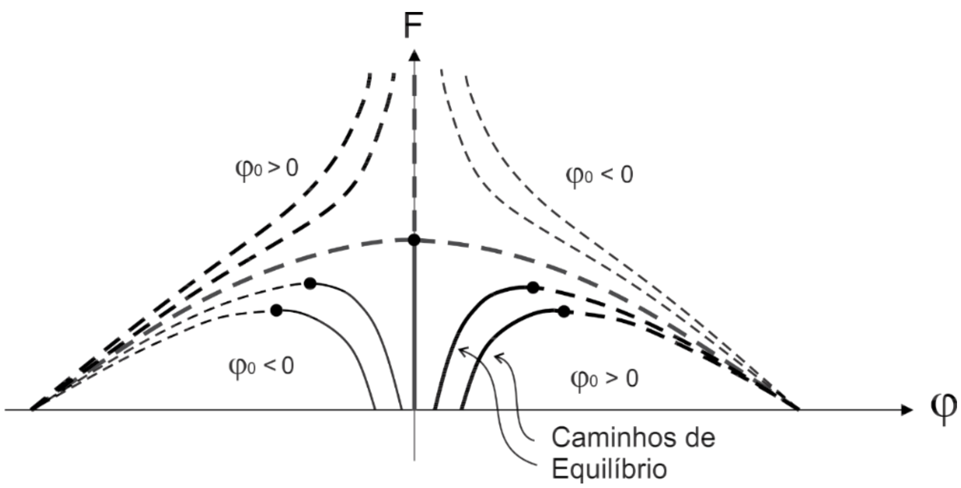
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2(1 + sen\,\varphi\,sen\,\varphi_0 - 2\,sen^2\,\varphi) - FL\,cos\,\varphi \tag{4.48}$$

As posições de estabilidade do sistema acontecerão quando a Inequação (4.49) for atendida:

$$kL^2(1 + sen\,\varphi\,sen\,\varphi_0 - 2\,sen^2\,\varphi) - FL\,cos\,\varphi > 0 \tag{4.49}$$

A Figura 4.32 ilustra a solução deste sistema (Equação (4.47)). As linhas contínuas representam condições estáveis (Equação (4.49)) e as linhas tracejadas condições instáveis (valores negativos da Equação (4.48)).

Figura 4.32 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.31



Fonte: O autor

A partir da Equação (4.47) e da Inequação (4.49) obtém-se o ângulo em que ocorre a perda de estabilidade:

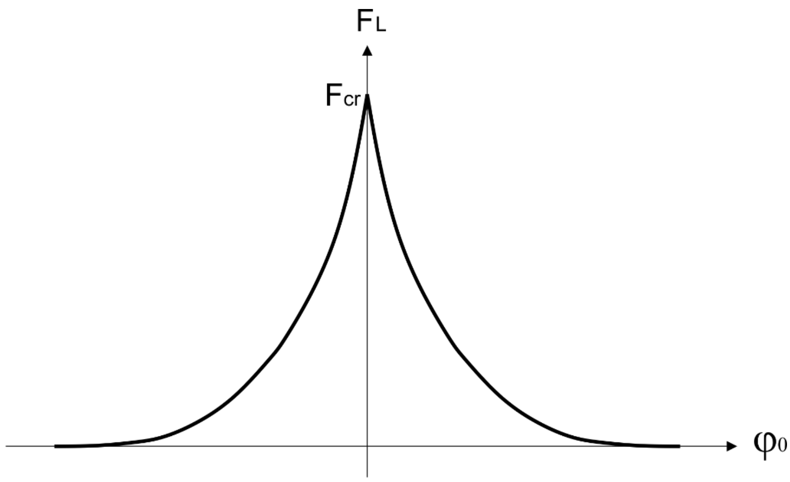
$$\varphi_L = arcsen\sqrt[3]{sen\,\varphi_0} \tag{4.50}$$

Substituindo (4.50) em (4.47) obtém-se a carga limite da estrutura imperfeita que define o ponto de transição entre o caminho estável e o instável:

$$F_L = kL\frac{\left(\sqrt[3]{sen\varphi_0} - sen\,\varphi_0\right)}{tan(arcsen\sqrt[3]{sen\varphi_0})} \tag{4.51}$$

O seu gráfico está representado na figura abaixo:

Figura 4.33 - Variação da carga-limite com as imperfeições



Fonte: O autor

Verifica-se nesse sistema que, partindo-se de $F = 0$, o caminho de equilíbrio se mantém estável até atingir um valor máximo, representado por F_L, a partir do qual ele se torna instável. O ponto correspondente a essa carga é chamado de *ponto limite* (*ponto limite de carga*). A partir do ponto limite o sistema torna-se instável, com deslocamentos angulares crescentes, até o limite do material (Figura 4.32). Esse processo de perda de estabilidade é chamado de salto dinâmico. À medida que se aumenta a imperfeição φ_0 do sistema a carga-limite se torna cada vez menor (Figura 4.33).

4.5.2. Solução Numérica

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 4.31. Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k = 30\,kNm\ e\ L = 6\,m$. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi =$

$0,4\,rad\ e\ F = 0,1\,kN$ (solução analítica). A Tabela 4.12 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.13 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado e a Tabela 4.15 pelo método do Comprimento de Arco . A Tabela 4.14 apresenta a solução para o sistema com NLF pelo método de Newton-Raphson padrão.

Tabela 4.12 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; k=30; L=6; F=0.1; fi=0.4; Fi0=5*pi/180
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
          Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
          Incrementa carga dF
          Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*(sin(fi)-
sin(fi0))*cos(fi)-F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.13 - Método de Newton-Raphson modificado para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; k=30; L=6; F=0.1; fi=0.4; Fi0=5*pi/180
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
          Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
          Incrementa carga dF
          Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*(sin(fi)-
sin(fi0))*cos(fi)-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.14 - Método de Newton-Raphson padrão para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e rigidez não linear da mola segundo o modelo NLF III

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; L=6; F=0.1; fi=0.4; Fi0=5*pi/180
Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
           Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*(sin(fi)-
sin(fi0))*cos(fi)-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(fi))^2+sin(fi)*sin(fi0))-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF
      Retorna ao item 3
```

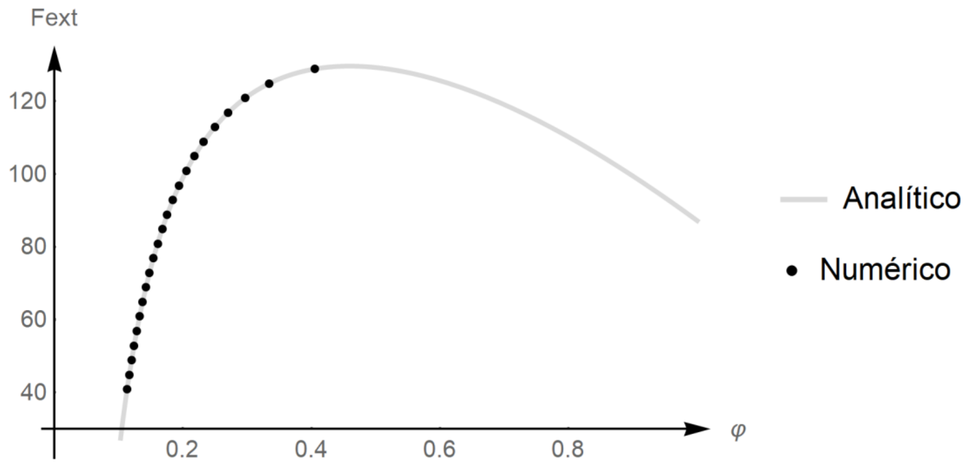
Tabela 4.15 - Método do Comprimento de Arco para o sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; k=30; L=6; F=0.1; fi=0.4; φ0=5*pi/180
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Define Dφ =0 DF=0
           Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(φ))^2+sin(φ)*sin(φ0))-F*L*cos(φ))
           Resolve a equação do parâmetro de carga (a*DF^2+b*DF+c=0)
           Escolhe-se a solução tal que: sinal(DF)=sinal(ktot)
           Calcula Dφ=Dφg+DF*Dφq
           Incrementa carga e deslocamento: φ=φ+Dφ e F=F+DF
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*(sin(φ)-
sin(φ0))*cos(φ)-F*L*sin(φ))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot= k*L^2*(1-
2*(sin(φ))^2+sin(φ)*sin(φ0))-F*L*cos(φ))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Resolve a equação do parâmetro de carga (a*dF^2+b*dF+c=0)
      Escolhe-se a solução com menor DOT
      Calcula du=dug+dF*duq
      Corrige carga e deslocamento: φ=φ+Dφ+dφ e F=F+DF+dF
      Retorna ao item 3
```

A Figura 4.34 mostra a solução numérica obtida pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.12, a Figura 4.35 a obtida pelo programa da

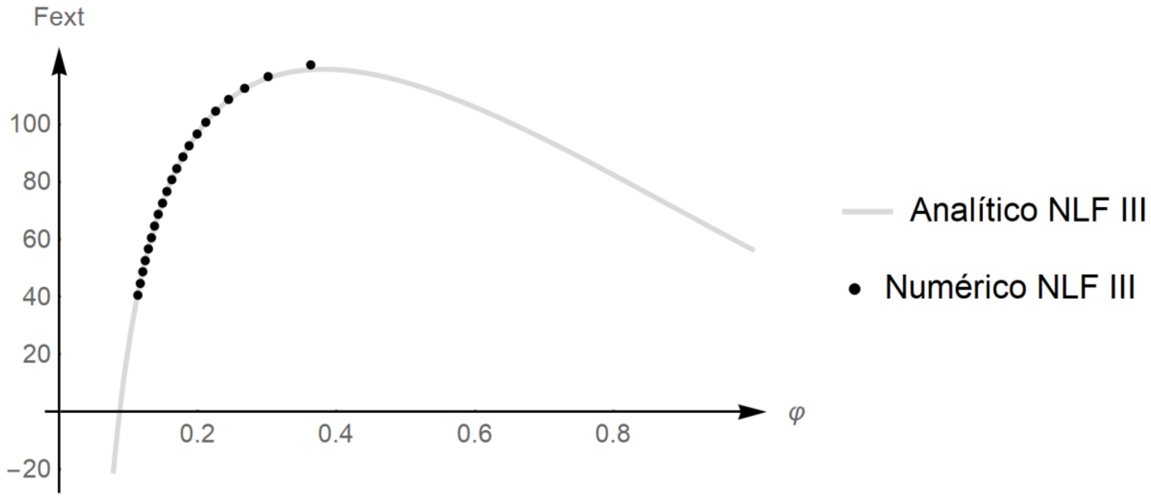
Tabela 4.14 e a Figura 4.36 a solução obtida pelo programa da Tabela 4.15.

Figura 4.34 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 5°$ pelo método de Newton-Raphson padrão



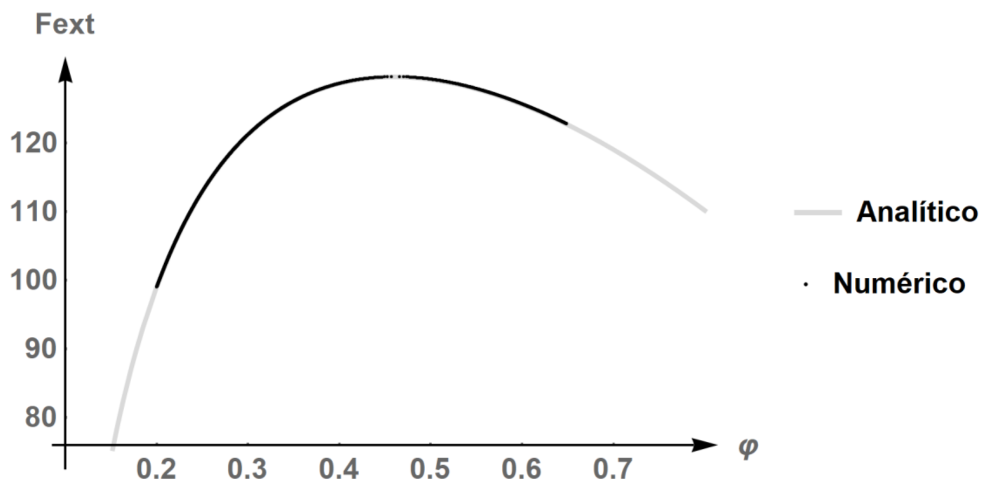
Fonte: O autor

Figura 4.35 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $L = 6$ m, $\varphi_0 = 5°$ e modelo NLF III pelo método de Newton-Raphson padrão



Fonte: O autor

Figura 4.36 - Comparação entre o resultado analítico e numérico sistema da Figura 4.31 com $L = 6$ m, $\varphi_0 = 5°$ pelo método do Comprimento de Arco



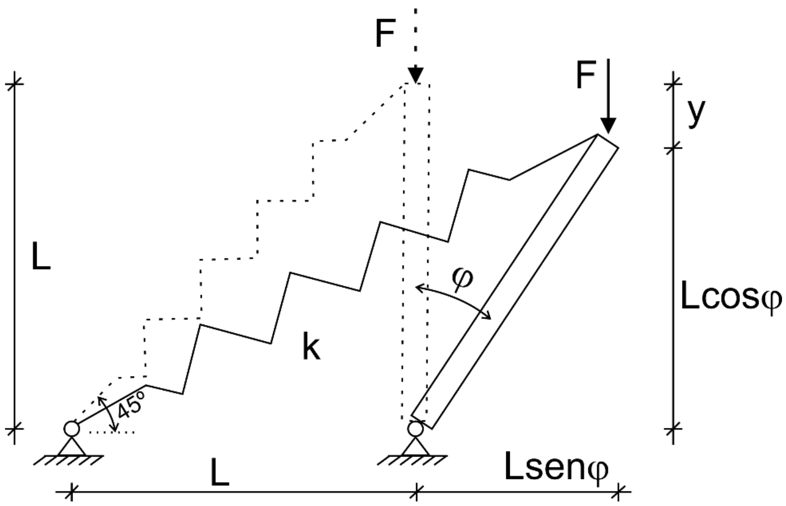
Fonte: O autor

4.6. SISTEMA MECÂNICO COM BIFURCAÇÃO ASSIMÉTRICA

4.6.1. Solução Analítica

Trata-se do sistema ilustrado na Figura 4.37, uma barra rígida, sem peso, inicialmente vertical, com mola linear inclinada a 45° quando descarregada.

Figura 4.37 - Sistema com bifurcação assimétrica



Fonte: O autor

O deslocamento sofrido pela mola será:

$$x = L\sqrt{2}(\sqrt{1 + sen\,\varphi} - 1) \tag{4.52}$$

O deslocamento do ponto de aplicação da força na sua própria direção é:

$$y = L(1 - cos\,\varphi) \tag{4.53}$$

A energia potencial do sistema é originada da mola e da carga, portanto:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} - Fy \tag{4.54}$$

Substituindo os deslocamentos:

$$\Pi = kL^2(2 + sen\,\varphi - 2\sqrt{1 + sen\,\varphi}) - FL(1 - cos\,\varphi) \tag{4.55}$$

E sua derivada é:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = kL^2\,cos\,\varphi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + sen\,\varphi}}\right) - FL\,sen\,\varphi \tag{4.56}$$

As posições de equilíbrio do sistema acontecerão quando a energia potencial total for estacionária (PEPTE):

$$kL^2\,cos\,\varphi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + sen\,\varphi}}\right) - FL\,sen\,\varphi = 0 \tag{4.57}$$

do qual resulta:

$$F_{eq} = \frac{kL}{tan\,\varphi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + sen\,\varphi}}\right) \tag{4.58}$$

A segunda derivada da energia potencial total vale:

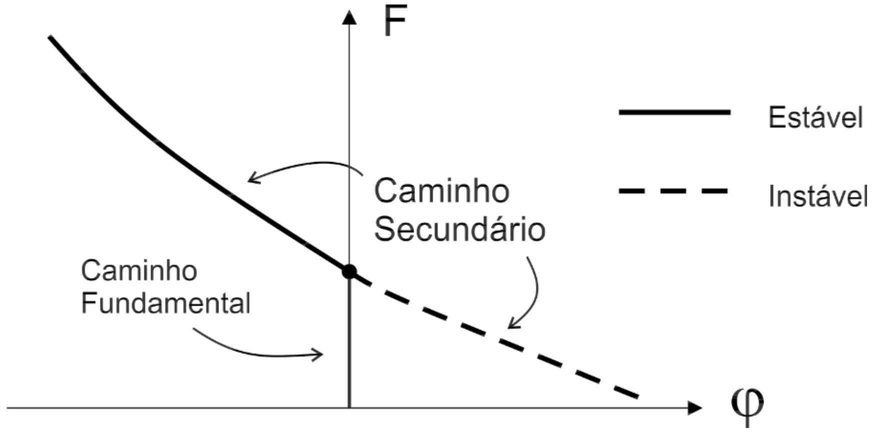
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = kL^2\left\{\frac{1}{2}cos\,\varphi\,(1 + sen\,\varphi)^{-\frac{3}{2}} - sen\,\varphi\left[1 - (1 + sen\,\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\} - FL\,cos\,\varphi \tag{4.59}$$

As posições de estabilidade do sistema acontecerão quando a Equação (4.59) for positiva:

$$kL^2\left\{\frac{1}{2}cos\,\varphi\,(1 + sen\,\varphi)^{-\frac{3}{2}} - sen\,\varphi\left[1 - (1 + sen\,\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\} - FL\,cos\,\varphi > 0 \tag{4.60}$$

A Figura 4.38 e a Figura 4.39 foram construídas a partir da Equação (4.58) e (4.60). Perturbações negativas ($\varphi < 0$) levam o sistema perfeito a equilíbrio *estável*. Perturbações positivas ($\varphi > 0$) levam o sistema perfeito a um equilíbrio instável.

Figura 4.38 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.37

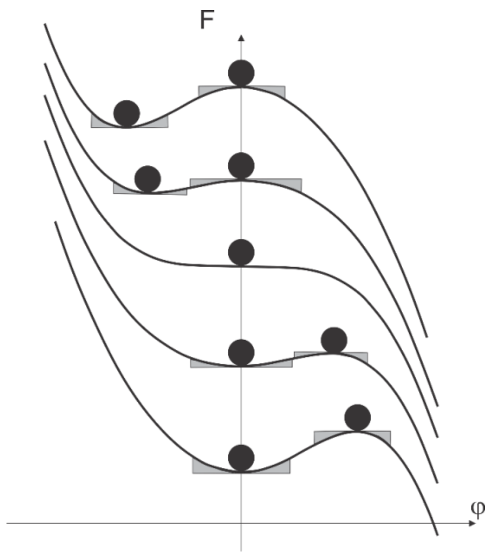


Fonte: O autor

A seguir, faz-se uma representação qualitativa da variação da energia potencial total Π (Figura 4.39) no gráfico carga × deslocamento angular ($F \times \varphi$), fazendo-se analogia com o conceito de estabilidade da massa cilíndrica repousando em superfícies curvas.

Notar os extremos relativos (locais) apresentados no gráfico. Nas proximidades dos equilíbrios estáveis, a variação da energia potencial total Π é positiva. Nas proximidades dos equilíbrios instáveis, a variação da energia potencial total Π é negativa. A variação da energia potencial total está destacada pela área cinza do gráfico. No que diz respeito aos valores das curvaturas nos pontos de extremos relativos da energia potencial total, podem ser feitas as mesmas observações do primeiro exemplo.

Figura 4.39 - Variação de energia potencial total e analogia com massa esférica



Fonte: O autor

4.6.2. Solução Numérica

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas desse sistema mecânico. Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k = 30$ kNm e $L = 6$ m. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi = -0{,}1$ rad e $F = 96{,}9$ kN (solução analítica). A Tabela 4.16 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.17 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado. A Tabela 4.18 apresenta a solução com NLF pelo método de Newton-Raphson padrão.

Tabela 4.16 - Método de Newton Raphson padrão para sistema com bifurcação assimétrica

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0.01; fi=-0.1; k=30; L=6; F=96,9
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*cos(fi)*(1-
1/sqrt(1+sin(fi)))-F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.17 - Método de Newton Raphson modificado para sistema com bifurcação assimétrica

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0,01; fi=-0.1; k=30; L=6; F=96,9
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*cos(fi)*(1-
1/sqrt(1+sin(fi)))-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

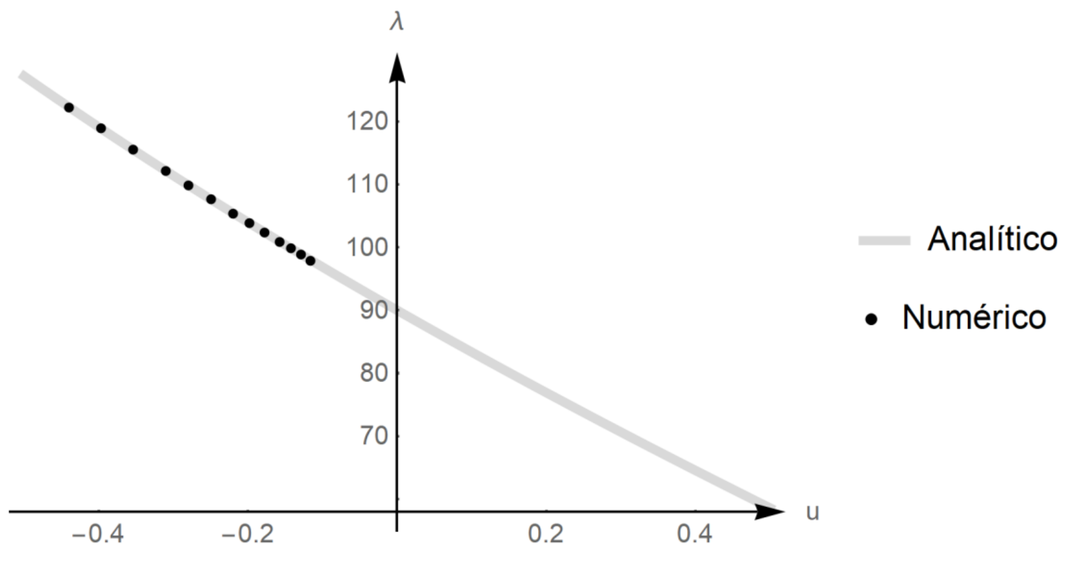
Tabela 4.18 - Método de Newton Raphson padrão para o sistema com bifurcação assimétrica e NLF

```
1. Dados Iniciais e Solução Inicial
n=10000; tol=0.1; dF=0,01; fi=-0.1; L=6; F=96,9
Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
           Incrementa carga dF
           Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
           Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=k*L^2*cos(fi)*(1-
1/sqrt(1+sin(fi)))-F*L*sin(fi))
Calcula a rigidez total do sistema
(ktot=k*L^2*(0.5*cos(fi)*(1+sin(fi))^(-3/2)-sin(fi)*(1-(1+sin(fi))^(-
1/2)))-F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Atualiza a rigidez da mola segundo um modelo NLF

Retorna ao item 3
```

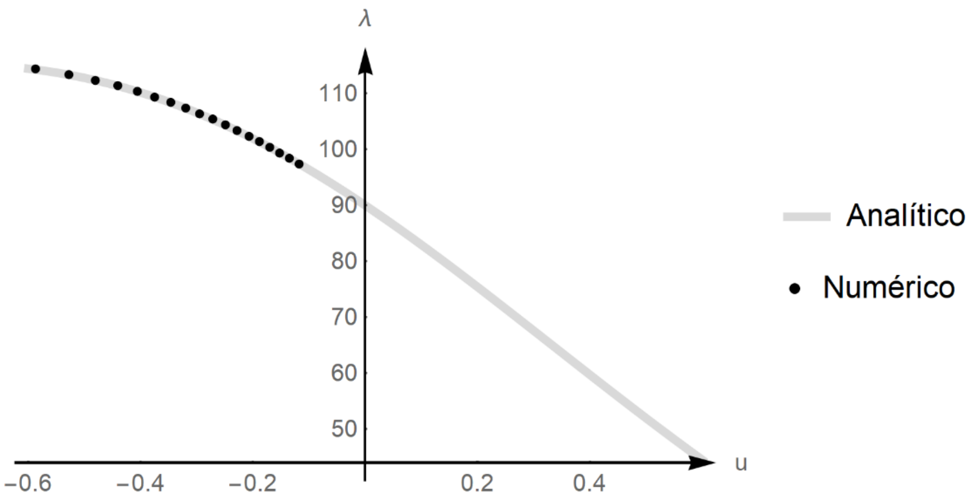
A Figura 4.40 mostra a solução numérica obtida pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.16 e a Figura 4.41 a solução obtida pelo programa da Tabela 4.18.

.Figura 4.40 - Solução gráfica numérica para o sistema da Figura 4.37 com $k = 30$ kNm e $L = 6$ m



Fonte: O autor

Figura 4.41 - Solução gráfica numérica para o sistema da Figura 4.37 com $L = 6$ m e rigidez da mola segundo o modelo NLF III



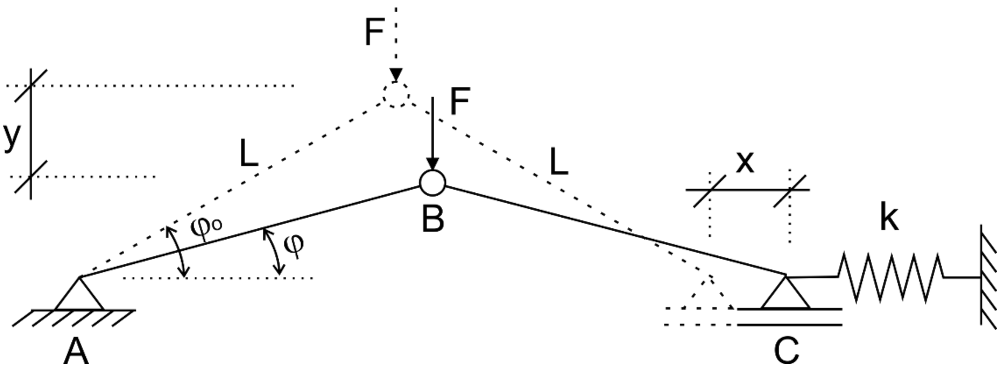
Fonte: O autor

4.7. SISTEMA MECÂNICO SEM BIFURCAÇÃO

4.7.1. Solução Analítica

Seja agora a estrutura mostrada na Figura 4.42, constituída por duas barras rígidas rotuladas entre si, com dois apoios, sendo o apoio C acoplado a uma mola linear de rigidez k. Ambas as barras quando descarregadas possuem inclinação φ_0.

Figura 4.42 - Sistema sem bifurcação



Fonte: O autor

A deformação sofrida pela mola será:

$$x = 2L(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \tag{4.61}$$

O deslocamento da força no sentido de sua aplicação será:

$$y = L(\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi) \tag{4.62}$$

A energia potencial do sistema é originada da mola e da carga, portanto:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} - Fy \tag{4.63}$$

Substituindo os deslocamentos:

$$\Pi = 2kL^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2 - FL(\operatorname{sen}\varphi_0 - \operatorname{sen}\varphi) \tag{4.64}$$

E sua derivada é:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = -4kL^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\operatorname{sen}\varphi + FL\cos\varphi$$

As posições de equilíbrio do sistema acontecerão quando a derivada da energia potencial total se anular (PEPTE):

$$-4kL^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\operatorname{sen}\varphi + FL\cos\varphi = 0 \tag{4.65}$$

Ou em:

$$F_{eq} = 4kL\operatorname{sen}\varphi\left(1 - \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right) \tag{4.66}$$

A segunda derivada da energia potencial total vale:

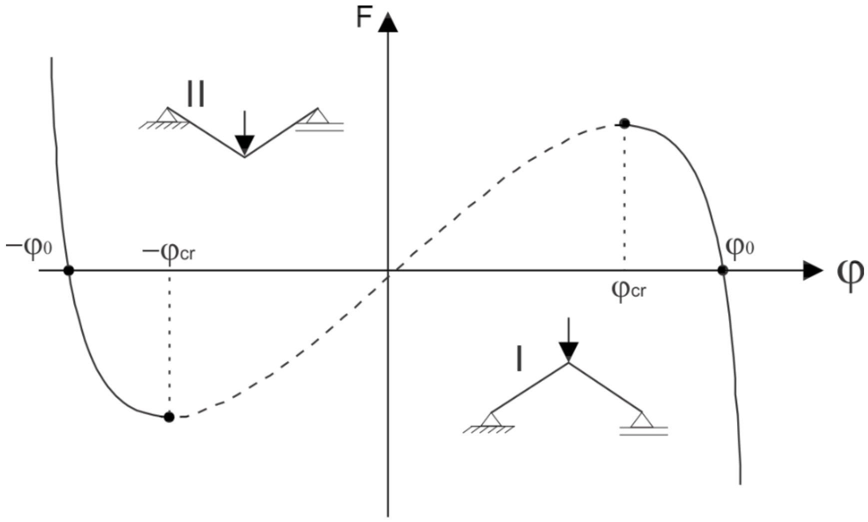
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = 4kL^2 \operatorname{sen}^2\varphi\left[-\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)\cos\varphi\right] - FL\operatorname{sen}\varphi \tag{4.67}$$

As posições de estabilidade do sistema acontecerão quando a derivada segunda da energia potencial total for positiva:

$$4kL^2\operatorname{sen}^2\varphi[-(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\cos\varphi] - FL\operatorname{sen}\varphi > 0 \tag{4.68}$$

Assim, é possível traçar o gráfico com o comportamento do sistema em questão.

Figura 4.43 - Gráfico com comportamento e solução do sistema da Figura 4.42



Fonte: O autor

Serão tecidos comentários somente para $\varphi > 0$. Ao se incrementar a carga F, a partir de zero, o ângulo φ, que para o sistema descarregado tem valor φ_0, vai decrescendo até que atinge o ponto crítico em φ'_{cr}. Com um infinitésimo de incremento além desse valor ocorrerá uma mudança brusca na configuração do sistema, passando da configuração I, para a configuração II (Figura 4.43). Essa mudança brusca de configuração é chamada de *salto dinâmico*. Em engenharia civil, arcos e cascas abatidas estão sujeitos à perda de estabilidade por saltos dinâmicos, com inversão de concavidade, similar à inversão ilustrada em I e II (Figura 4.43).

4.7.2. Solução Numérica

A seguir se apresentam os algoritmos computacionais das soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 4.42. Os dados geométricos do sistema mecânico são: $k =$ 30 kNm e $L = 6$ m. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi = \varphi_0$ e $F = 0$ (solução analítica). A Tabela 4.19 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão. A Tabela 4.20 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson modificado. As Figura 4.44 mostra o gráfico obtido pelo programa computacional apresentado na Tabela 4.19.

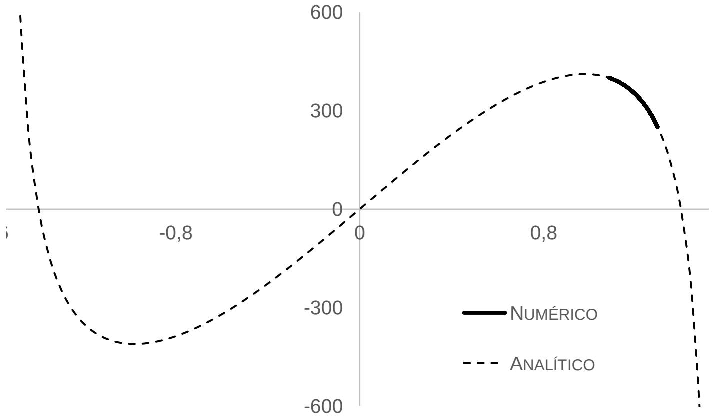
Tabela 4.19 - Método Newton-Raphson padrão para sistema sem bifurcação

```
1. Configurações iniciais e Solução Inicial
n=1000; tol=0.1; dF=0.04; fi0=80*pi/180; fi=fi0; k=30; L=6; F=0
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
          Calcula a rigidez total do sistema (ktot=4*k*L^2*((sin(fi))^2-
(cos(fi)-cos(fi0))*cos(fi))-F*L*sin(fi))
          Incrementa carga dF
          Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=-4*k*L^2*(cos(fi)-
cos(fi0))*sin(fi)+F*L*cos(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema (ktot=4*k*L^2*((sin(fi))^2-
(cos(fi)-cos(fi0))*cos(fi))-F*L*sin(fi))
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Tabela 4.20 - Método Newton-Raphson modificado para sistema sem bifurcação

```
1. Configurações iniciais e Solução Inicial
n=1000; tol=0.1; dF=0.04; fi0=80*pi/180; fi=fi0; k=30; L=6; F=0
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
          Incrementa carga dF
          Calcula a rigidez total do sistema (ktot=4*k*L^2*((sin(fi))^2-
(cos(fi)-cos(fi0))*cos(fi))-F*L*sin(fi))
          Atualiza deslocamento (fi=fi+dF/ktot) (SOLUÇÃO PREDITA)
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada (fdeseq=-4*k*L^2*(cos(fi)-
cos(fi0))*sin(fi)+F*L*cos(fi))
Calcula a rigidez total do sistema (ktot=4*k*L^2*((sin(fi))^2-(cos(fi)-
cos(fi0))*cos(fi))-F*L*sin(fi))
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de φ e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Atualiza deslocamento (fi=fi-fdeseq/ktot)
      Retorna ao item 3
```

Figura 4.44 - Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema da Figura 4.42 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 80°$

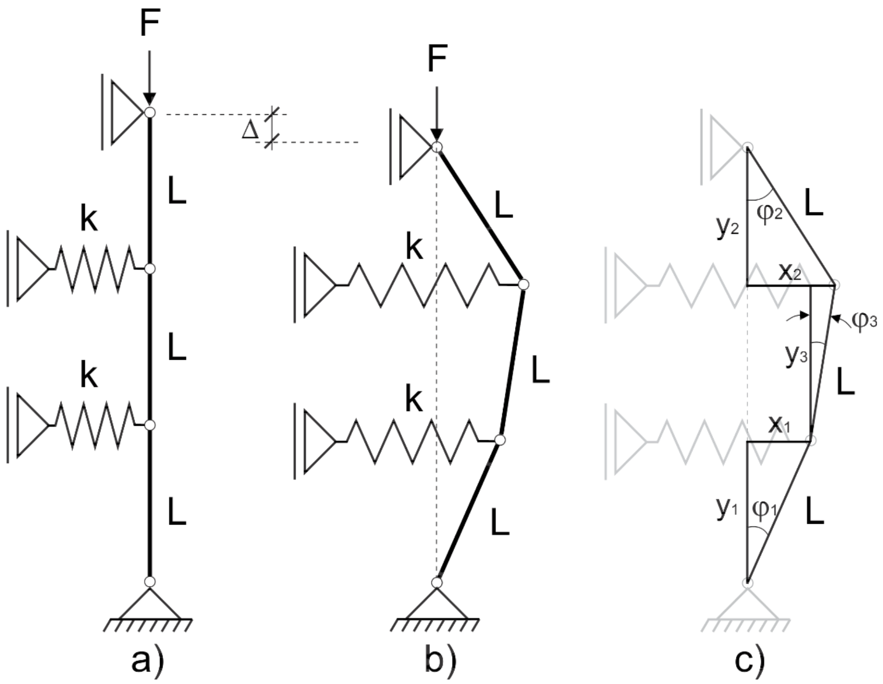


Fonte: O autor

5. SISTEMA MECÂNICO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

A Figura 5.1 apresenta um sistema mecânico constituído de três barra rígidas sem peso de comprimento L, rotuladas entre si, com um apoio de segundo gênero na base e um apoio de primeiro gênero no topo, onde é aplicada uma força vertical conservativa F. Duas molas de rigidez k suportam a estrutura lateralmente. A diferença desse sistema para os anteriores consiste principalmente no fato de que as diversas configurações possíveis para o sistema não podem mais ser descritas por apenas uma variável, mas por duas variáveis, como os ângulos φ_1 e φ_2 na Figura 5.1c.

Figura 5.1 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade



Fonte: O autor

5.1. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO

Na Figura 5.1a tem-se o sistema na posição vertical. Pode-se verificar que esta é uma posição de equilíbrio, onde toda a carga F é resistida pelo apoio inferior da estrutura e as molas não são solicitadas. Para a análise da estabilidade é inserida uma pequena perturbação no sistema. A configuração do sistema perturbado pode ser vista na Figura 5.1b. Se existirem outras configurações de equilíbrio, além da posição vertical, o sistema caminhará para uma delas.

Na Figura 5.1c estão ilustrados os deslocamentos horizontais sofridos pelas extremidades das duas molas (x_1 e x_2) e o deslocamento do ponto de aplicação da força F (Δ):

Dos três triângulos ilustrados na Figura 5.1c, obtém-se que:

$$cos\,\varphi_1 = \frac{y_1}{L} \tag{5.1}$$

$$cos\,\varphi_2 = \frac{y_2}{L} \tag{5.2}$$

$$cos\,\varphi_3 = \frac{y_3}{L} \tag{5.3}$$

e que:

$$sen\,\varphi_1 = \frac{x_1}{L} \tag{5.4}$$

$$sen\,\varphi_2 = \frac{x_2}{L} \tag{5.5}$$

$$sen\,\varphi_3 = \frac{x_2 - x_1}{L} = \; sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2 \tag{5.6}$$

A relação fundamental da trigonometria estabelece que:

$$(sen\,\varphi_3)^2 + (cos\,\varphi_3)^2 = 1 \tag{5.7}$$

Substituindo-se (5.3) e (5.6) em (5.7), resulta:

$$(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2 + \left(\frac{y_3}{L}\right)^2 = 1 \tag{5.8}$$

Explicitando-se y_3 da equação anterior, tem-se:

$$y_3 = L\sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - \; sen\,\varphi_2)^2} \tag{5.9}$$

O deslocamento do ponto de aplicação da força é a diferença entre a altura do sistema na posição vertical e a altura do sistema perturbado, ou:

$$\Delta = 3L - (y_1 + y_2 + y_3) \tag{5.10}$$

Substituindo-se os valores de y_1, y_2 e y_3 na equação acima, resulta:

$$\Delta \; = L\left[3 - cos\,\varphi_1 - cos\,\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - \; sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.11}$$

Portanto, a energia potencial da carga será:

$$V \; = -F\Delta = -FL\left[3 - cos\,\varphi_1 - cos\,\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - \; sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.12}$$

E a energia potencial elástica será:

$$U = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{kL^2}{2}(sen^2\,\varphi_1 + sen^2\,\varphi_2) \tag{5.13}$$

A energia potencial total do sistema é a soma da energia potencial da carga com a energia potencial elástica, ou:

$$\Pi = U + V \tag{5.14}$$

Substituindo-se (5.12) e (5.13) em (5.14), resulta:

$$\Pi = \frac{kL^2}{2}(sen^2\,\varphi_1 + sen^2\,\varphi_2) - FL\left[3 - cos\,\varphi_1 - cos\,\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - \ sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.15}$$

Pelo PEPTE sabe-se que, se a estrutura estiver em equilíbrio, a energia potencial total assumirá um valor extremo. No caso do sistema com dois graus de liberdade, esse princípio deve ser aplicado a cada um dos dois deslocamentos possíveis, fornecendo as seguintes equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = kL^2\,sen\,\varphi_1\,cos\,\varphi_1 - FL\left[sen\,\varphi_1 + \frac{(sen\,\varphi_1 - \ sen\,\varphi_2)\,cos\,\varphi_1}{\sqrt{1\ - (sen\,\varphi_1 - \ sen\,\varphi_2)^2}}\right] = 0 \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = kL^2\,sen\,\varphi_2\,cos\,\varphi_2 - FL\left[sen\,\varphi_2 + \frac{(sen\,\varphi_2 - \ sen\,\varphi_1)\,cos\,\varphi_2}{\sqrt{1\ - (sen\,\varphi_2 - \ sen\,\varphi_1)^2}}\right] = 0 \tag{5.17}$$

Para pequenos deslocamentos são aceitáveis as aproximações:

$$sen\,\varphi_1 = \varphi_1 \tag{5.18}$$

$$sen\,\varphi_2 = \varphi_2 \tag{5.19}$$

$$cos\,\varphi_1 = cos\,\varphi_2 = 1 \tag{5.20}$$

Substituindo-se (5.18), (5.19) e (5.20) em (5.16) e (5.17) e desprezando-se os termos que consideram o quadrado da diferença entre os ângulos (se $\varphi_1 - \varphi_2$ tem pequena magnitude, $(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ tem magnitude muito menor), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$kL^2\varphi_1 - FL(2\varphi_1 - \ \varphi_2) = 0 \tag{5.21}$$

$$kL^2\varphi_2\ - FL(2\varphi_2 - \ \varphi_1) = 0 \tag{5.22}$$

Reescrevendo-se matricialmente, resulta:

$$\begin{bmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{k}_t \, \boldsymbol{u} = 0 \tag{5.24}$$

onde:

$$\boldsymbol{k}_t = \begin{bmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

e

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

A Equação (5.24) só tem solução não nula em $\mathbf{u}$ se o determinante de $\mathbf{k}_\mathrm{t}$ for nulo, ou:

$$\begin{vmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{vmatrix} = 0 \tag{5.27}$$

que leva à seguinte equação do segundo grau em F:

$$3F^2 - 4kLF + (kL)^2 = 0 \tag{5.28}$$

cujas raízes são:

$$F_1 = \frac{kL}{3} \tag{5.29}$$

$$F_2 = kL \tag{5.30}$$

F_1 e F_2 são os autovalores da Equação (5.23). Substituindo-se esses valores, separadamente, na Equação (5.23), encontram-se os autovetores associados a cada um desses autovalores.

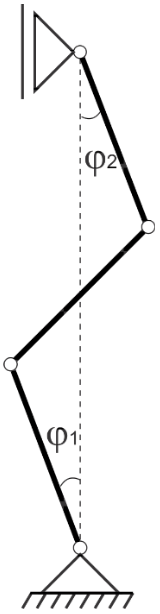
Substituindo o primeiro autovalor em (5.23), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{kL^2}{3} & \dfrac{kL^2}{3} \\ \dfrac{kL^2}{3} & \dfrac{kL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.31}$$

que fornece a seguinte solução:

$$\varphi_1 = -\varphi_2 \tag{5.32}$$

Figura 5.2 – Modo de flambagem correspondente a F_1 (primeiro modo)



Fonte: O autor

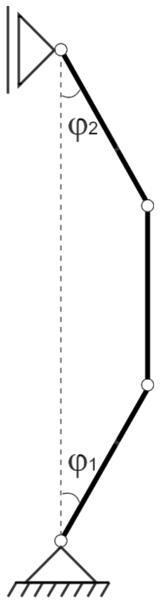
Substituindo o segundo autovalor em (5.23), tem-se:

$$\begin{bmatrix} -kL^2 & kL^2 \\ kL^2 & -kL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.33}$$

que fornece a seguinte solução:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{5.34}$$

Figura 5.3 - Modo de flambagem correspondente a F_2 (segundo modo)



Fonte: O autor

5.2. ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Para a análise da estabilidade faz-se necessário estudar as segundas derivadas da energia potencial total:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = kL^2(\cos^2\varphi_1 - sen^2\varphi_1) - FL\left[\cos\varphi_1 + \frac{\cos^2\varphi_1}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos^2\varphi_1\,(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}{A^{\frac{3}{2}}} - \frac{sen\,\varphi_1\,(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)}{A^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = kL^2(\cos^2\varphi_2 - sen^2\varphi_2) - FL\left[\cos\varphi_2 + \frac{\cos^2\varphi_2}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos^2\varphi_2\,(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{sen\,\varphi_2\,(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)}{A^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = FL\left\{\frac{[(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2]}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{A^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{5.37}$$

onde,

$$A = 1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2$$

assim, pode-se obter a matriz de rigidez do sistema, que é dada por:

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Dado à complexidade das equações, optou-se por analisar os resultados graficamente, utilizando um *software* de modelagem gráfica. Gráficos da energia potencial total e de suas derivadas primeiras e segundas em φ_1 e φ_2 foram traçados para diferentes valores de carga.

Adotando-se, arbitrariamente, rigidez (k) de 30 kN/m para as molas e comprimentos lineares (L) de 3 metros para cada trecho de barra, pode-se encontrar as cargas críticas do sistema a partir das equações (5.29) e (5.30). Tem-se, então:

$$F_1 = \frac{kL}{3} = \frac{30 \times 3}{3} = 30\ kN \tag{5.39}$$

para a solução $\varphi_1 = -\varphi_2$, e:

$$F_2 = kL = 30 \times 3 = 90\ kN \tag{5.40}$$

para a solução $\varphi_1 = \varphi_2$.

Fazendo-se uma analogia com a massa cilíndrica, usado também nos modelos com um grau de liberdade, e analisando-se segundo os eixos de interesse $\varphi_1 = \varphi_2$ e $\varphi_1 = -\varphi_2$, é possível notar que:

Na Figura 5.4, tem-se o gráfico da energia potencial total para uma carga $F = 1\,kN$ abaixo das duas cargas críticas encontradas nas Equações (5.39) e (5.40). O sistema possui um ponto de equilíbrio no ponto (0,0) (solução trivial) para qualquer um dos eixos de interesse.

Na Figura 5.5, tem-se o gráfico da energia potencial total para uma carga $F = 30\,kN$, igual a primeira carga crítica e abaixo da segunda carga crítica. Nota-se que, na direção do eixo $\varphi_1 = \varphi_2$, o ponto (0,0) da solução trivial ainda é estável.

Na Figura 5.6, tem-se o gráfico da energia potencial total para uma carga, $F = 60\,kN$ com valor intermediário entre as cargas críticas encontradas nas Equações (5.39) e (5.40). Nota-se que, na direção do eixo $\varphi_1 = -\varphi_2$, o ponto (0,0) da solução trivial passa a ser um ponto de equilíbrio instável (Π assume um valor máximo local), enquanto que, na outra direção, os pontos de máximo começam a se aproximar do ponto de equilíbrio da solução trivial, mas ainda configurando equilíbrio *estável* nessa direção.

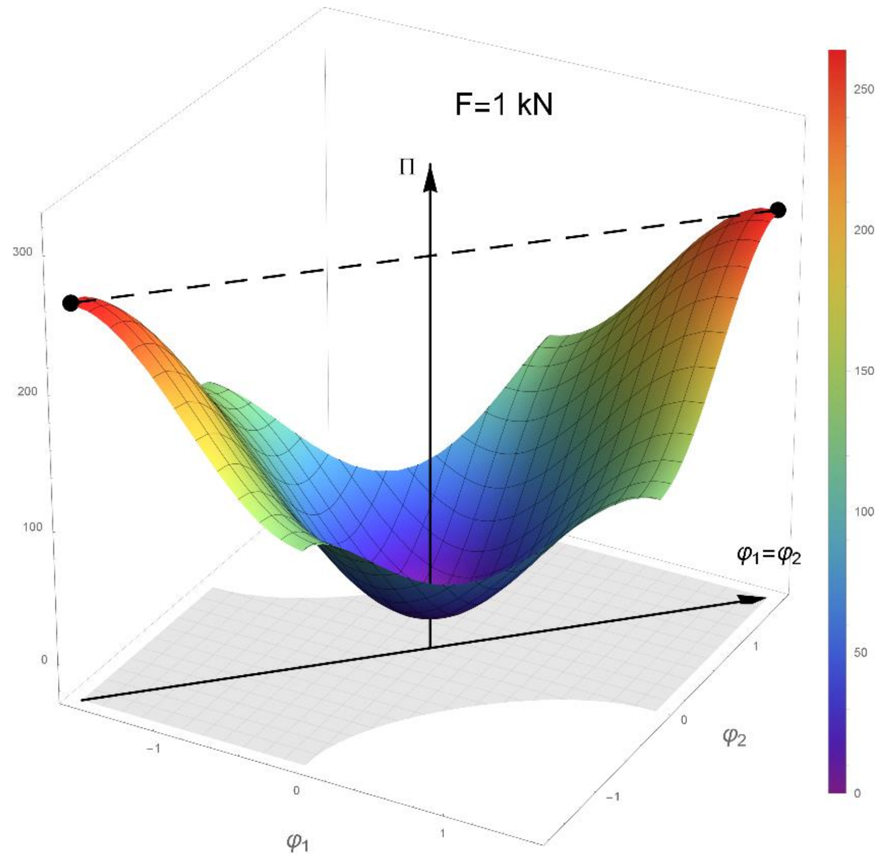
Figura 5.7 tem-se o gráfico da energia potencial total para uma carga $F = 90\,kN$, igual a segunda carga crítica. O sistema possui um ponto de equilíbrio no ponto (0,0) (solução trivial) para qualquer um dos eixos de interesse. Nota-se que, na direção do eixo $\varphi_1 = \varphi_2$, o ponto (0,0) é instável.

Na Figura 5.8, tem-se o gráfico da energia potencial total para uma carga $F = 120\,kN$, cujo valor está acima das cargas críticas encontradas. O sistema não possui mais nenhuma posição de equilíbrio *estável* na direção dos eixos de interesse, apenas uma posição de equilíbrio *instável* no ponto (0,0).

Na Figura 5.9, tem-se o gráfico das primeiras derivadas em φ_1 e φ_2, interceptadas pelo plano $\Pi = 0$ para a carga de $F = 15\,\mathrm{kN}$. Nos três pontos, nos quais ambas as derivadas se encontram simultaneamente com o plano $\Pi = 0$, tem-se um ponto de equilíbrio (atende o sistema de equações estáticas de equilíbrio $\frac{\partial \Pi(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$). As retas r_1, r_2 e r_3 fazem a projeção destes pontos na curva da energia potencial total e, como esperado, interceptam os pontos de extremos da energia potencial total (ponto de mínimo para r_2, portanto estável no caminho fundamental, e ponto de máximo para r_1 e r_3, portanto, instável no caminho secundário).

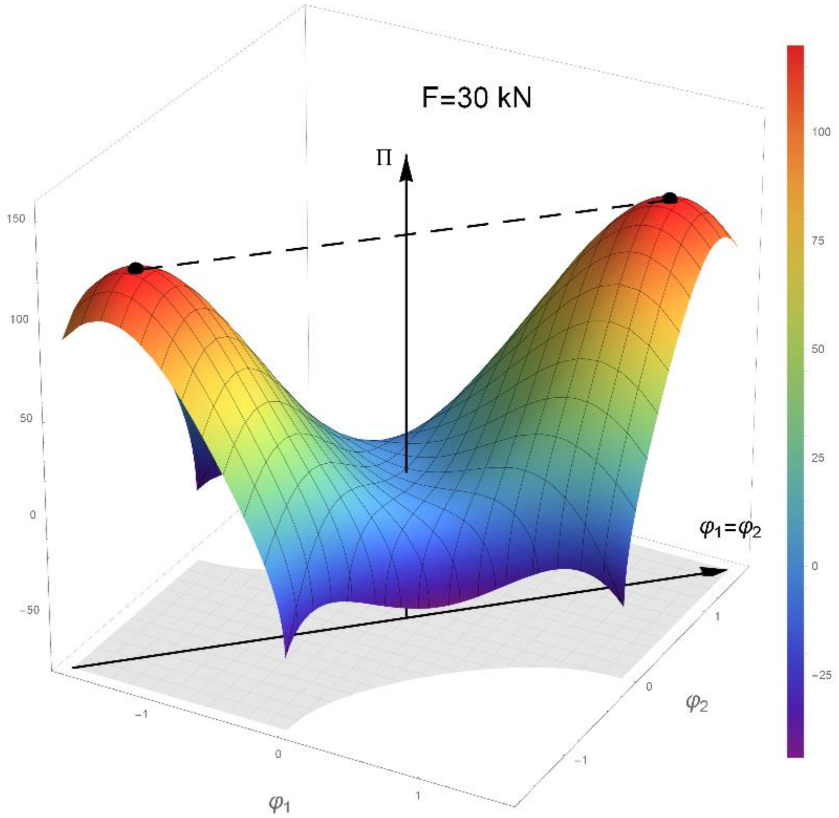
Na Figura 5.10, tem-se o gráfico das segundas derivadas em φ_1 e φ_2, interceptadas pelo plano $\Pi = 0$ para a carga de $F = 15$ kN. As retas r_1, r_2 e r_3 fazem a projeção dos pontos de extremos da energia potencial total para as derivadas segundas. O ponto de mínimo (em r_2) leva a um ponto positivo da derivada segunda (acima do plano $\Pi = 0$), portanto estável no caminho fundamental. Os pontos de máximo da energia potencial total (em r_1 e r_3) levam a pontos negativos nas derivadas segundas (abaixo do plano $\Pi = 0$), portanto estável no caminho instável no caminho secundário.

Figura 5.4 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 1$ kN



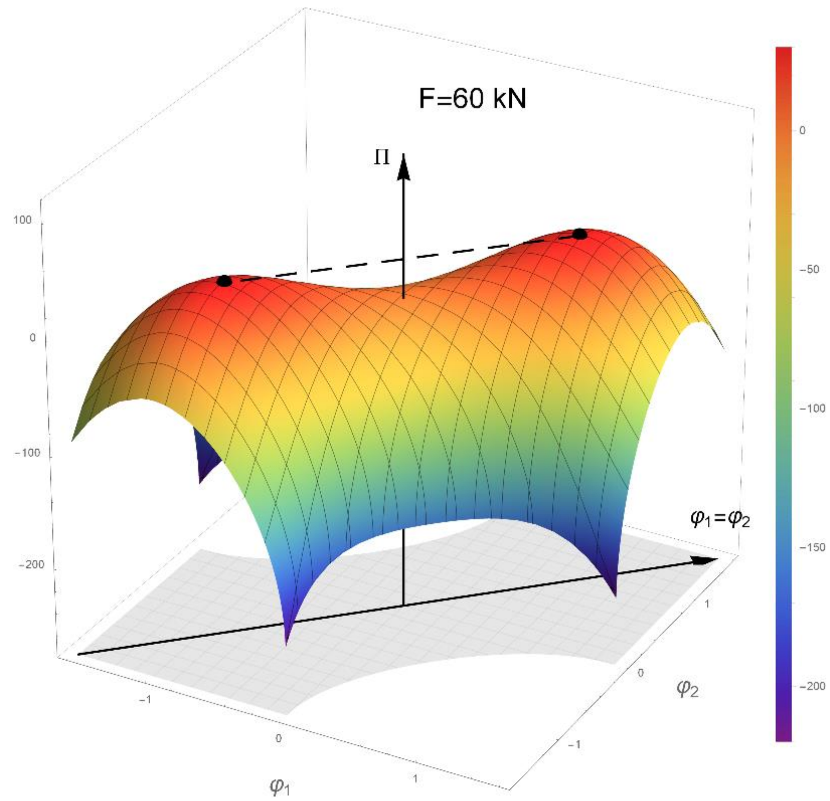
Fonte: Ferreira, et al., 2017

Figura 5.5 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 30$ kN



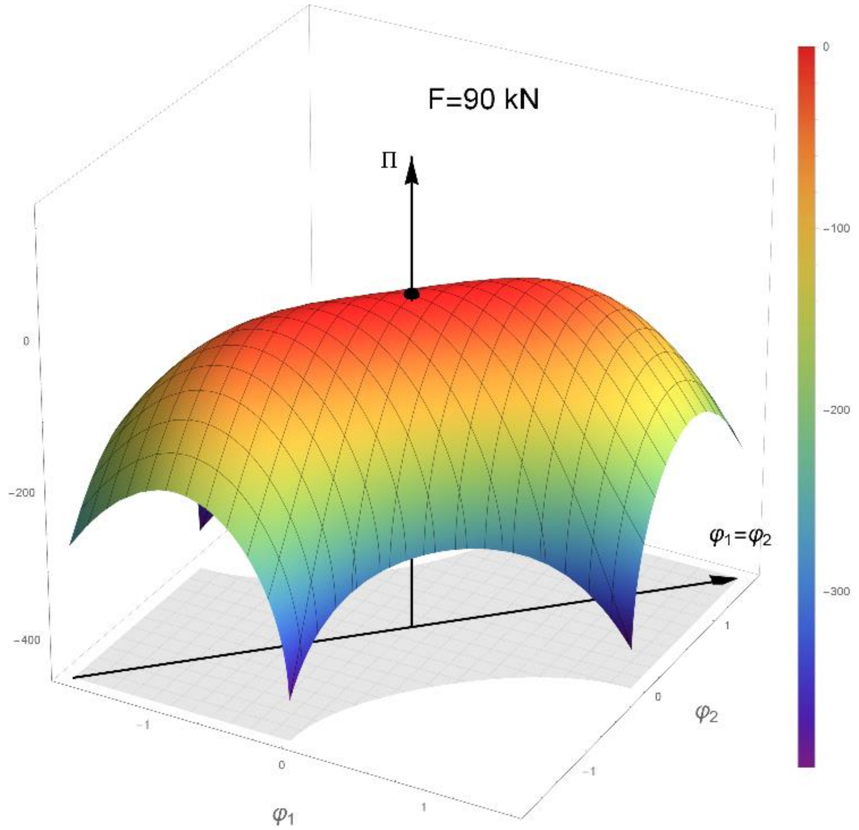
Fonte: Ferreira, et al., 2017

Figura 5.6 – Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 60$ kN



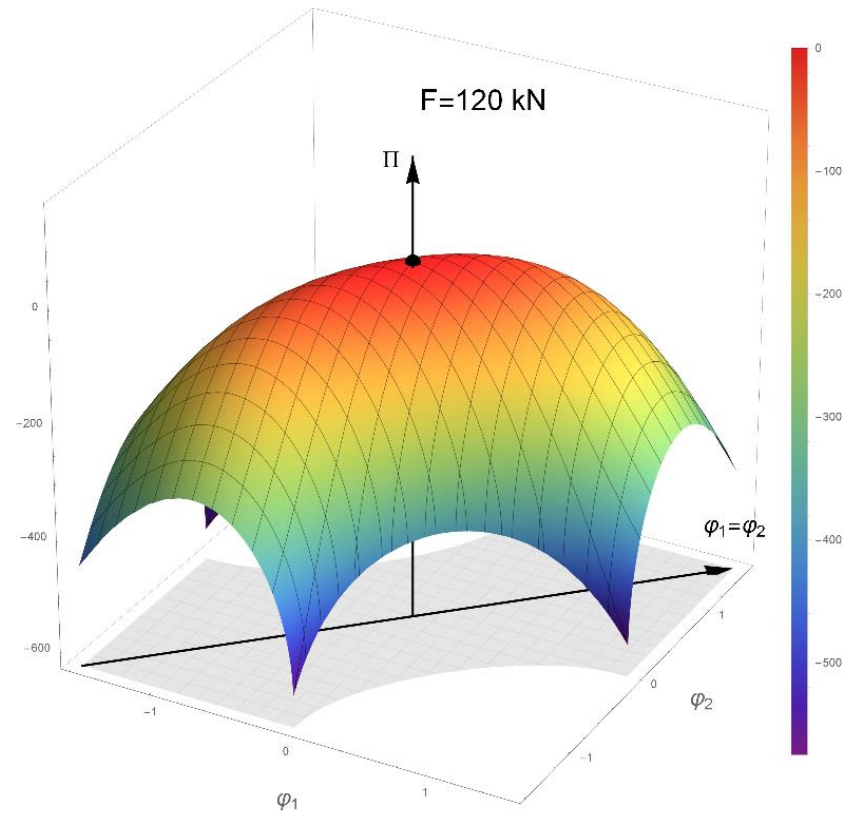
Fonte: Ferreira, et al., 2017

Figura 5.7 - Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 90$ kN



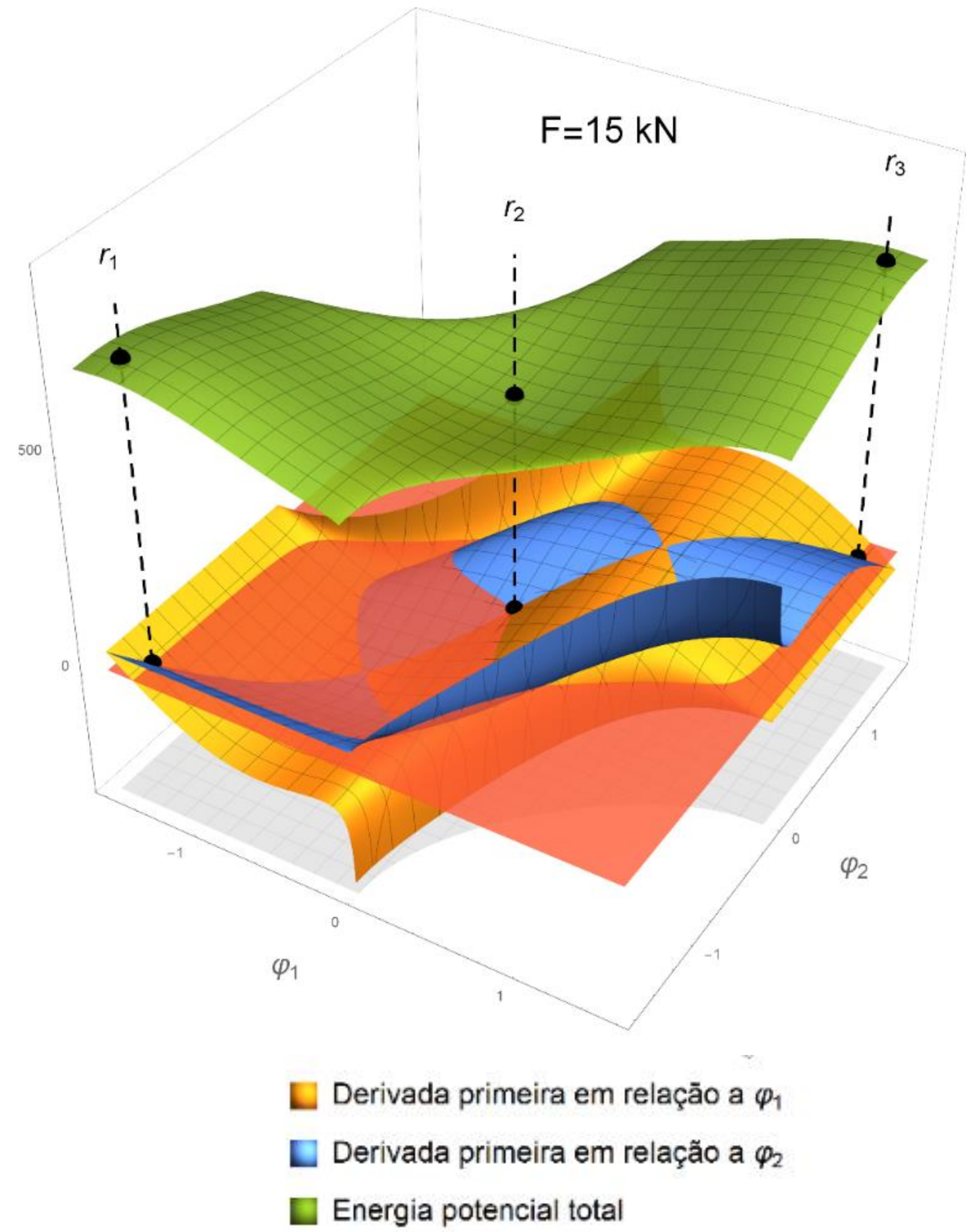
Fonte: Ferreira, et al., 2017

Figura 5.8 - Gráfico da energia potencial total para a carga $F = 120$ kN



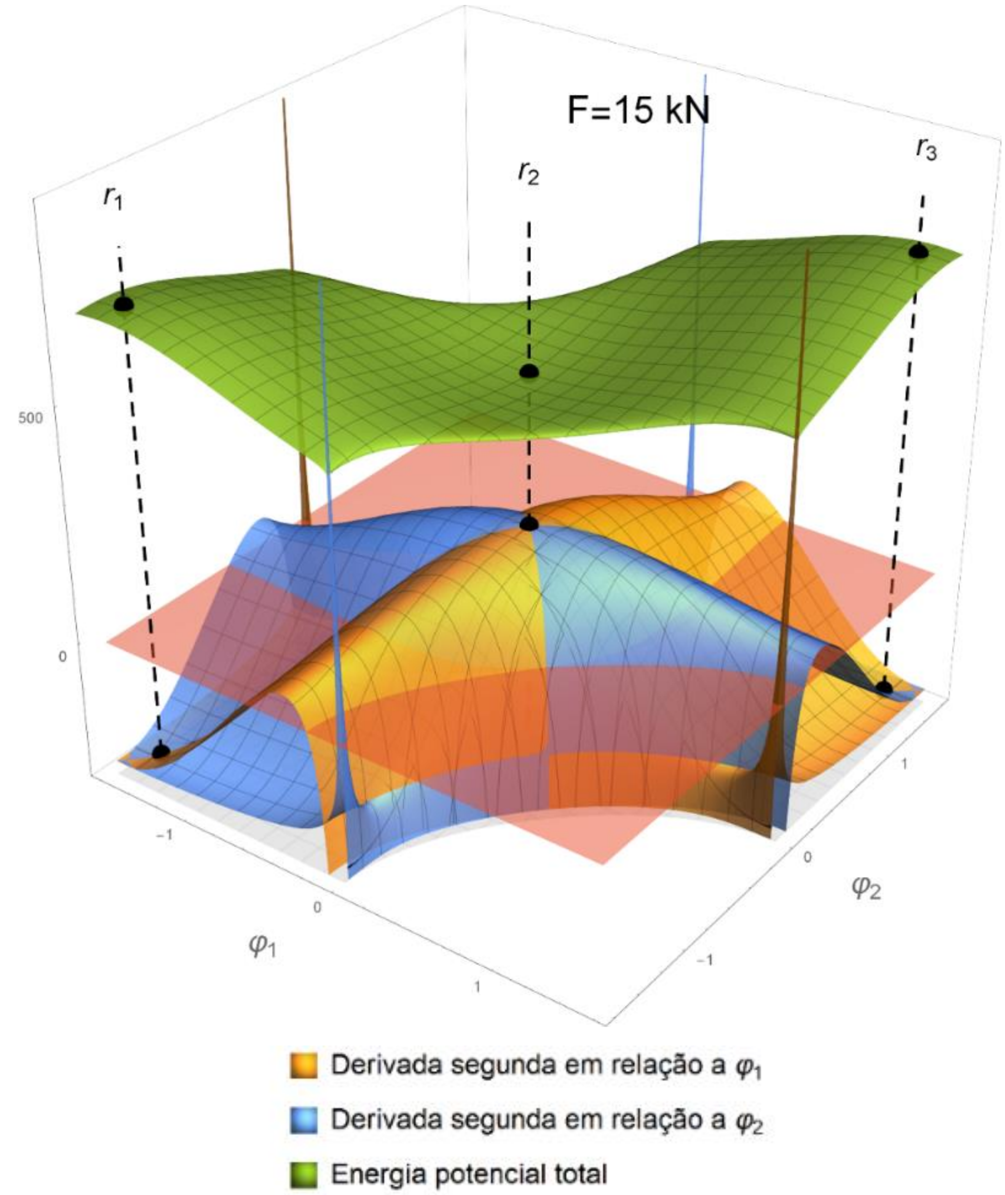
Fonte: Ferreira, et al., 2017

Figura 5.9 - Gráfico da energia potencial total e derivadas primeiras para carga de $F = 15$ kN



Fonte: Camargo, 2017

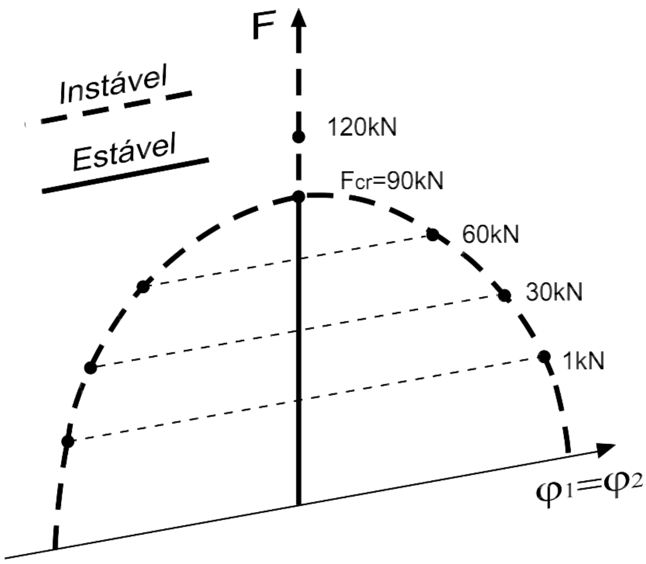
Figura 5.10 - Gráfico da energia potencial total e derivadas segundas para carga de $F = 15$ kN



Fonte: Camargo, 2017

É possível notar que para o eixo $\varphi_1 = \varphi_2$, para cada carregamento, o sistema possui duas soluções não triviais com carregamentos de até $F_{cr} = 90$ kN (segunda carga crítica). A partir de então, o sistema só possui a solução trivial. É possível notar que no eixo $\varphi_1 = \varphi_2$, conforme ilustra a Figura 5.11, o sistema se assemelha à solução do sistema de 1GL com bifurcação simétrica instável sem imperfeições iniciais (Figura 4.28).

Figura 5.11 - Posições de equilíbrio para diferentes carregamentos



Fonte: O autor

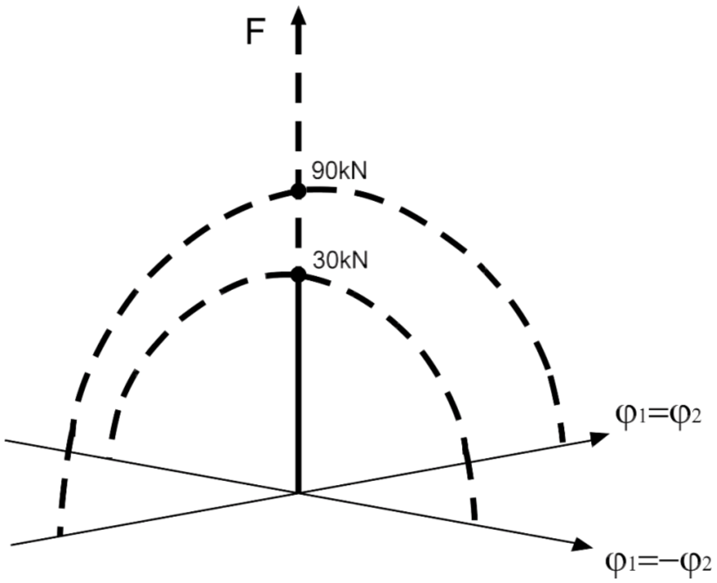
O que confirma o valor da carga crítica para a solução $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$F_2 = 90\ kN \tag{5.41}$$

Semelhantemente ao que foi feito para a solução de $\varphi_1 = \varphi_2$, pode ser feito para $\varphi_1 = -\varphi_2$, porém, com uma carga crítica menor (Figura 5.12), cujo valor é:

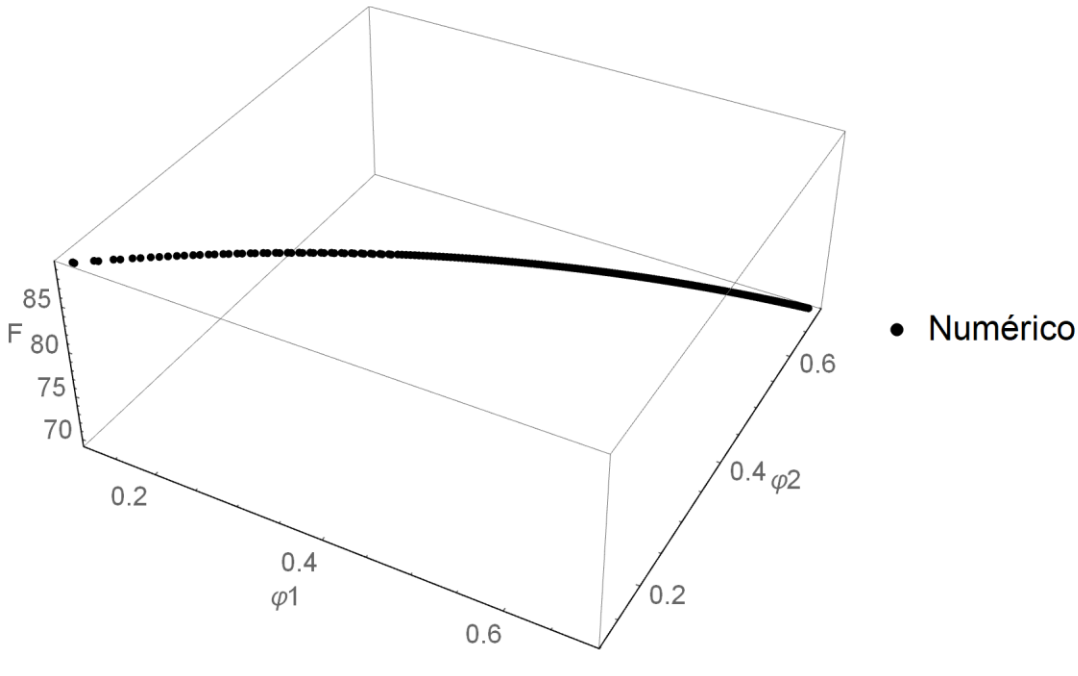
$$F_1 = 30\ kN \tag{5.42}$$

Figura 5.12 - Caminho de equilíbrio para as duas soluções encontradas



Fonte: O autor

Figura 5.13 – Gráfico obtido pela solução numérica do sistema da Figura 5.1 capturando parte do caminho de equilíbrio do eixo $\varphi_1 = \varphi_2$ (código numérico na Tabela B.15, Apêndice B)

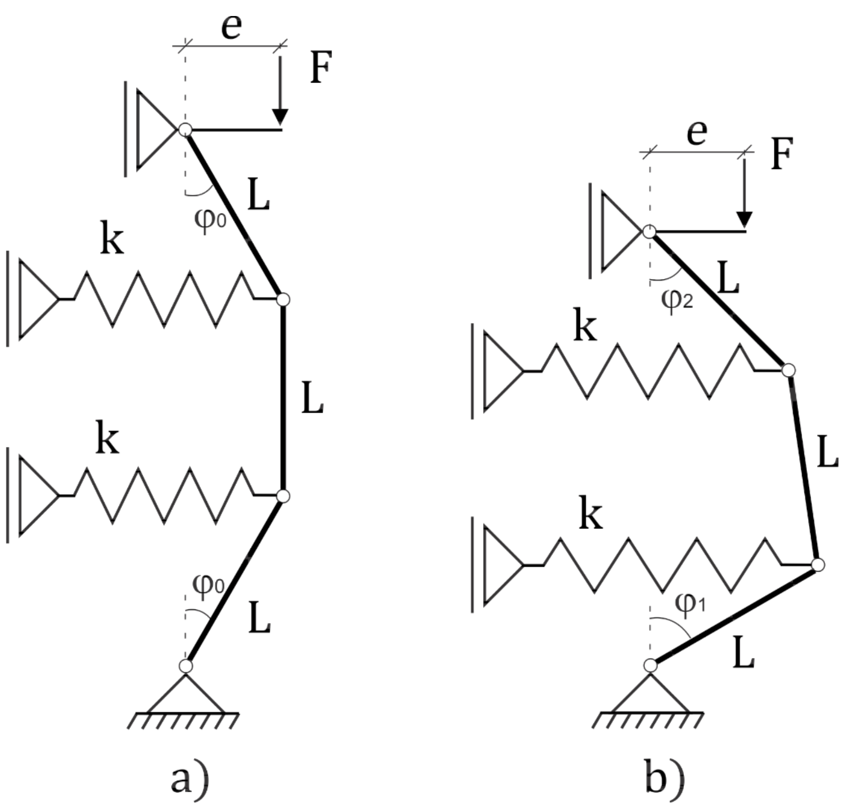


Fonte: O autor

5.3. SISTEMA COM IMPERFEIÇÃO GEOMÉTRICA INICIAL

Analisa-se agora o sistema com imperfeição geométrica inicial. De maneira análoga ao que foi feito nos sistemas mecânicos de 1GL, a imperfeição geométrica inicial será introduzida como uma inclinação inicial φ_0 nas barras diretamente ligadas aos apoios de primeiro gênero. Outra forma de se considerar a imperfeição inicial, também introduzida aqui, será uma excentricidade e na aplicação da carga. Na Figura 5.14 a) tem-se o sistema na posição com a imperfeição inicial. Desta vez esta não é mais uma configuração de equilíbrio. A partir dessa posição sistema buscará uma nova configuração até que encontre equilíbrio, sem a necessidade de uma perturbação inicial. A configuração em uma posição genérica qualquer, compatível com os deslocamentos possíveis do sistema, a partir de sua posição inicial, pode ser vista na Figura 5.14 b). Se existir alguma configuração de equilíbrio, o sistema caminhará para ela.

Figura 5.14 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade a) em sua posição com imperfeição geométrica inicial b) em sua posição deslocada

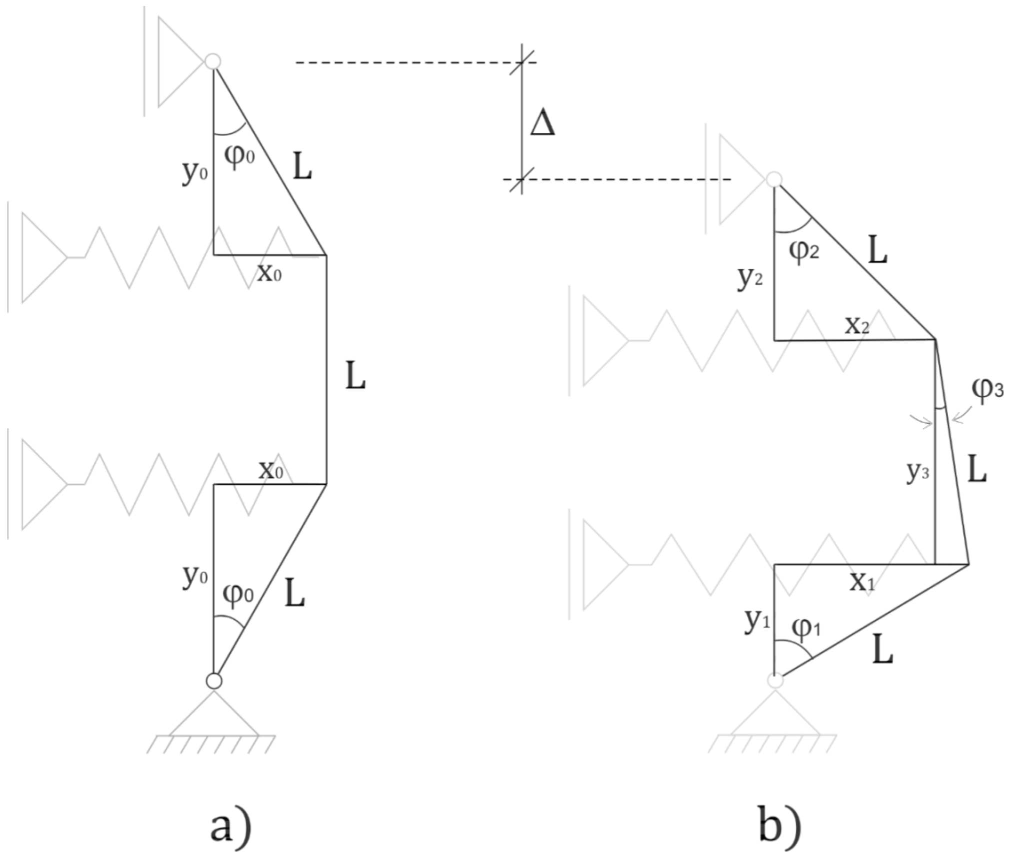


Fonte: O autor

Na Figura 5.15 está ilustrado a geometria do sistema com as variáveis de interesse para estudo: na Figura 5.15 a) a inclinação inicial da barra (φ_0), o deslocamento inicial das molas

(x_0) em relação ao sistema perfeito e na Figura 5.15 b) a inclinação das barras $(\varphi_1 \; e \; \varphi_2)$ e a deformação das molas $(x_1 e \; x_2)$ numa posição qualquer. O deslocamento do ponto de aplicação da força F é representado por Δ.

Figura 5.15 - Sistema mecânico com dois graus de liberdade a) geometria do sistema em sua posição com imperfeição geométrica inicial b) geometria do sistema em sua posição deslocada



Fonte: O autor

Dos triângulos ilustrados na Figura 5.15 a), obtém-se que:

$$cos\,\varphi_0 = \frac{y_0}{L} \tag{5.43}$$

$$sen\,\varphi_0 = \frac{x_0}{L} \tag{5.44}$$

$${x_0}^2 + {y_0}^2 = L^2 \tag{5.45}$$

Dos três triângulos ilustrados na Figura 5.15 b), obtém-se que:

$$cos\, \varphi_1 = \frac{y_1}{L} \tag{5.46}$$

$$cos\, \varphi_2 = \frac{y_2}{L} \tag{5.47}$$

$$cos\, \varphi_3 = \frac{y_3}{L} \tag{5.48}$$

e que:

$$sen\, \varphi_1 \ = \ \frac{x_1}{L} \tag{5.49}$$

$$sen\, \varphi_2 \ = \ \frac{x_2}{L} \tag{5.50}$$

$$sen\, \varphi_3 = \frac{x_1 - x_2}{L} = \ sen\, \varphi_1 - sen\, \varphi_2 \tag{5.51}$$

A relação fundamental da trigonometria estabelece que:

$$(sen\, \varphi_3)^2 + (cos\, \varphi_3)^2 = 1 \tag{5.52}$$

Substituindo-se (5.48) e (5.51) em (5.52), resulta:

$$(sen\, \varphi_1 - sen\, \varphi_2)^2 + \left(\frac{y_3}{L}\right)^2 = 1 \tag{5.53}$$

Explicitando-se y_3 da equação anterior, tem-se:

$$y_3 = L\sqrt{1 - (sen\, \varphi_1 - \ sen\, \varphi_2)^2} \tag{5.54}$$

O deslocamento do ponto de aplicação da força é a diferença entre a altura entre o sistema em suas diferentes configurações:

$$\Delta = (L + 2y_0) - (y_1 + y_2 + y_3) \tag{5.55}$$

Substituindo-se os valores de $y_0,\ y_1,\ y_2\ e\ y_3$ na equação acima, resulta:

$$\Delta = L\left[1 + 2\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.56}$$

Portanto, a energia potencial da carga, ainda sem levar em conta a excentricidade da carga, será:

$$V = -F\Delta = -FL\left[1 + 2\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.57}$$

A carga F com excentricidade e pode ser convertida numa carga F aplicada no eixo juntamente com um momento $F \times e$. Para simplificar o sistema de equações a excentricidade pode ser reescrita como sendo relativa ao comprimento da barra, na forma $e = \varepsilon \times L$. Então a energia potencial gerada por este momento será dada por $-F\,\varepsilon\,L\,(\varphi_2 - \varphi_0)$, de forma que a energia potencial total produzida pela carga pode ser escrita como:

$$V = -FL\left[1 + 2\cos\varphi_0 - \varepsilon\,(\varphi_2 - \varphi_0) - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.58}$$

E a energia potencial elástica será:

$$U = \frac{k(x_1 - x_0)^2}{2} + \frac{k(x_2 - x_0)^2}{2} = \frac{kL^2}{2}\left[(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_0)^2 + (sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_0)^2\right] \tag{5.59}$$

A energia potencial total do sistema é a soma da energia potencial da carga com a energia potencial elástica, ou:

$$\Pi = U + V \tag{5.60}$$

Substituindo-se (5.56) e (5.59) em (5.60), resulta:

$$\Pi = \frac{kL^2}{2}\left[(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_0)^2 + (sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_0)^2\right] - FL\left[1 + 2\cos\varphi_0 - \varepsilon\,(\varphi_2 - \varphi_0) - \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}\right] \tag{5.61}$$

Considerando que as inclinações iniciais das barras sejam diferentes e com valores φ_{01} e φ_{02}, pode-se reescrever a energia potencial para este sistema mais genericamente, na forma:

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = U(\boldsymbol{u}) + V(\boldsymbol{u}) \tag{5.62}$$

onde, **u** é o vetor do grau de liberdade de deslocamento do sistema:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$U(\boldsymbol{u})$ é a parcela da energia potencial referente a energia interna da mola:

$$U(\boldsymbol{u}) = \frac{kL^2}{2}[(sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_{01})^2 + (sen\,\varphi_2 - sen\,\varphi_{02})^2]$$

e V($\mathbf{u}$) a parcela da energia potencial referente a energia externa da carga:

$$V(\boldsymbol{u}) = -FL\left[1 + cos\,\varphi_{01} + cos\,\varphi_{02} - \varepsilon\,(\varphi_2 - \varphi_{02}) - cos\,\varphi_1 - cos\,\varphi_2 - \sqrt{1 - (sen\,\varphi_1 - sen\,\varphi_2)^2}\right]$$

Agora pode-se obter o sistema de equações estáticas do sistema:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Pi(\boldsymbol{u})}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{\partial \Pi(\boldsymbol{u})}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

Calculando as derivadas obtém-se:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} A(1{,}2) \\ A(2{,}1) \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

onde:

$$A(i,j) = kL^2\,cos\,\varphi_i\,(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_{0i}) - FL\left[sen\,\varphi_i + \frac{(sen\,\varphi_i - \ sen\,\varphi_j)\,cos\,\varphi_i}{\sqrt{1\ - (sen\,\varphi_i - \ sen\,\varphi_j)^2}} - \varepsilon_j\right]$$

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon$ e $\varepsilon_2 = 0$

É interessante notar as semelhanças das equações com as do sistema mecânico sem imperfeições iniciais. Em comparação com este sistema, as imperfeições iniciais da barra alteram a parcela referente aos esforços internos do sistema (termo $\text{sen}\,\varphi_\text{i}$ substituido por $\text{sen}\,\varphi_\text{i} - \text{sen}\,\varphi_{0\text{i}}$) e a excentricidade da carga altera a parcela referente aos esforços externos e apenas quando analisado em relação ao grau de liberdade φ_1 (acrescentando o termo ε).

A solução analítica exata não é tão simples como os sistemas de 1GL. Então faz-se aqui as aproximações, aceitáveis para pequenos deslocamentos:

$$sen\,\varphi_i = \varphi_i \tag{5.65}$$

$$cos\,\varphi_i = 1$$
(5.66)

Substituindo-se (5.65) e (5.66) em (5.64) e desprezando-se os termos que consideram o quadrado da diferença entre os ângulos, uma vez que, se $\varphi_1 - \varphi_2$ tem pequena magnitude, então $|\varphi_1 - \varphi_2| \gg (\varphi_1 - \varphi_2)^2$, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$A(i,j) = kL^2(\varphi_i - \varphi_{0i}) - FL\big(2\varphi_i - \varphi_j - \varepsilon_j\big)$$
(5.67)

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon$ e $\varepsilon_2 = 0$

Reescrevendo-se matricialmente, resulta:

$$\begin{bmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kL^2\varphi_{01} - FL\varepsilon \\ kL^2\varphi_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
(5.68)

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = kL^2 \begin{Bmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Fe \\ 0 \end{Bmatrix}$$
(5.69)

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{k}_t\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_0} - \boldsymbol{p}$$
(5.70)

onde $\mathbf{k}_t$ é a matriz de rigidez:

$$\boldsymbol{k}_t = \begin{bmatrix} kL^2 - 2FL & FL \\ FL & kL^2 - 2FL \end{bmatrix}$$
(5.71)

$\mathbf{u}$ é o vetor com o grau de deslocamento do sistema:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$
(5.72)

$\boldsymbol{u_0}$ é o vetor de imperfeições geométricas iniciais internas do sistema:

$$\boldsymbol{u}_0 = kL^2 \begin{Bmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \end{Bmatrix}$$
(5.73)

e **p** é o vetor de imperfeições geométricas iniciais externas do sistema:

$$\boldsymbol{p} = \begin{Bmatrix} Fe \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.74}$$

A análise com simplificações tem o propósito apenas de encontrar as cargas críticas do sistema. Como esperado os valores das cargas críticas são os mesmos (Equações (5.29) e (5.30)), uma vez que a matriz de rigidez permanece a mesma (Equações (5.25) e (5.71)).

5.3.1. Solução Numérica

Pelo PEPTE sabe-se que a estrutura está em equilíbrio quando o sistema de equações estáticas, obtido na Equação (5.64), for nulo:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \begin{Bmatrix} A(1,2) \\ A(2,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.75}$$

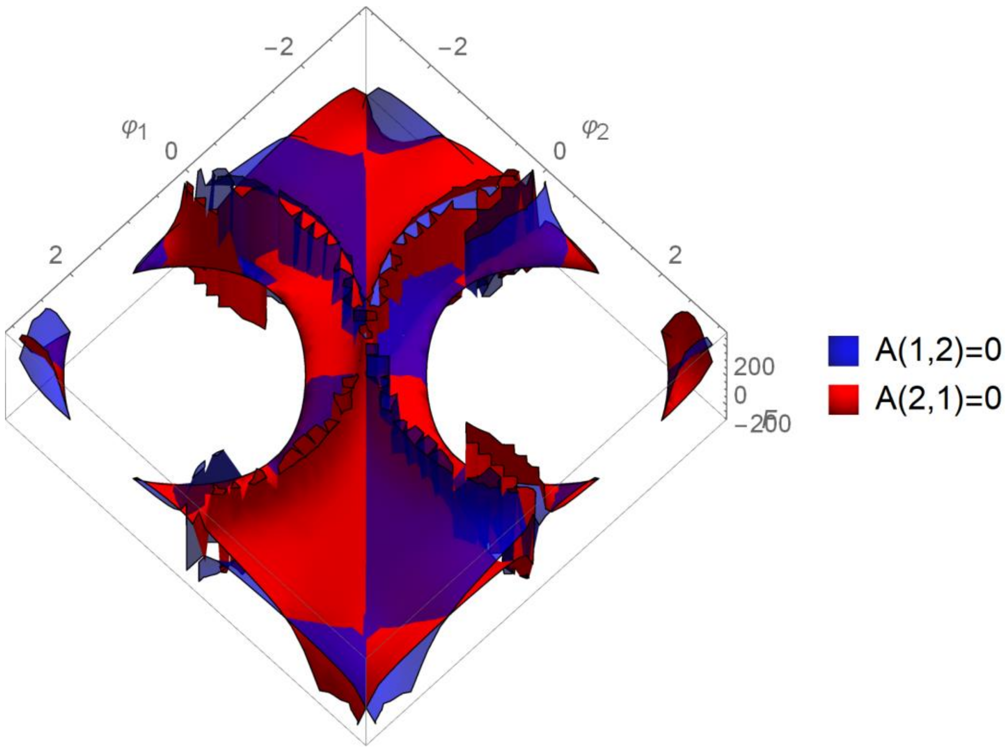
onde:

$$A(i,j) = kL^2 \cos\varphi_i \,(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_{0i}) - FL\left[sen\,\varphi_i + \frac{(sen\,\varphi_i - \; sen\,\varphi_j)\cos\varphi_i}{\sqrt{1 \; - (sen\,\varphi_i - \; sen\,\varphi_j)^2}} - \varepsilon_j\right]$$

onde $\varepsilon_1 = \varepsilon$ e $\varepsilon_2 = 0$

Como é complicado de resolver analiticamente o sistema de equações, será usada a abordagem numérica. Porém, antes disso, busca-se uma solução exata para comparação com a resposta numérica. Plotando-se os gráficos de $A(1,2) = 0$ e $A(2,1) = 0$, percebe-se que em $\varphi_1 = \varphi_2$, ambas as equações de equilíbrio estático podem ser atendidas (Figura 5.16), com a condição de que ε seja pequeno.

Figura 5.16 – Ilustração gráfica das superfície das funções geradas quando cada componente do vetor de equações estáticas $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ é nula ($\mathrm{k} = 30\mathrm{kNm};\ \mathrm{L} = 6\mathrm{m};\ \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0{,}05\ \mathrm{rad};\ \varepsilon = 0$)



Fonte: O autor

Como busca-se uma solução exata para efeito de comparação, adota-se a partir de agora $\varepsilon = 0$ para que $\varphi_1 = \varphi_2$ seja uma solução válida. Substituindo a solução $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ na Equação (5.75) e isolando a carga F tem-se:

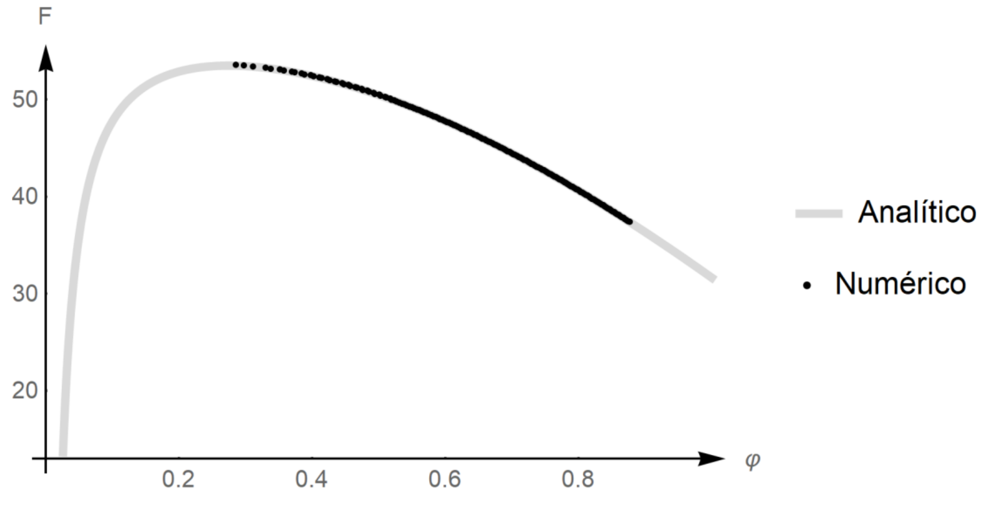
$$F = kL\cot\varphi\ \ (sen\,\varphi - sen\,\varphi_0) \tag{5.76}$$

A seguir se apresenta o algoritmo computacional com a soluções numéricas do sistema mecânico ilustrado na Figura 5.14. Os dados geométricos do sistema mecânico são: $\mathrm{k} = 30\,\mathrm{kNm};\ \mathrm{L} = 2\mathrm{m};\ \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0{,}05\,\mathrm{rad}$. Inicia-se o processo a partir de um ponto de equilíbrio, a saber: $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0{,}9\,\mathrm{rad}$ e $F = 36{,}3\mathrm{kN}$. A Tabela 5.1 apresenta essa solução pelo método de Newton-Raphson padrão com controle de carga constante. A Figura 5.17 mostra o gráfico obtido pelo programa computacional apresentado na Tabela 5.1 e sua comparação com a resposta analítica da Equação (5.76).

Tabela 5.1 - Método Newton-Raphson Padrão para sistema sem bifurcação

```
1. Configurações iniciais e Solução Inicial
n=270; tol=0.00001; dF=0.08; fi0=0.02; u={0.9,0.9}; k=30; L=2; F=36.3
2. Ciclo incremental iterativo (loop externo)
           Calcula a rigidez total Kt do sistema
           Incrementa carga F=F+dF
           Atualiza deslocamento u=u+Inversa[Kt].dF
3. Ciclo iterativo (loop interno, iteração Newton-Raphson)
Calcula a equação estática desequilibrada g
Verifica a convergência: (fdeseq<tolerância)
Se SIM,
      Salva os valores de u e F
      Retorna ao item 2
Se NÃO,
      Calcula a rigidez total do sistema Kt
      Atualiza deslocamento (u=u-Inversa[Kt].g)
      Retorna ao item 3
```

Figura 5.17 – Comparação entre o resultado analítico e numérico do sistema da Figura 5.14 com $k = 30$ kNm, $L = 6$ m e $\varphi_0 = 0{,}05$ rad



Fonte: O autor.

O vetor de carga desequilibrada $\mathbf{g(u)}$ foi omitido do código porque é grande. Sua equação pode ser vista na Equação (5.64). A matriz de rigidez do sistema $\mathbf{K_T(u)}$ foi omitida pelo mesmo motivo. Sua equação completa é mostrada aqui:

$$\boldsymbol{K_T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} & \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \end{bmatrix} \tag{5.77}$$

ou ainda

$$\boldsymbol{K_T} = \begin{bmatrix} B(1,2) & C(1,2) \\ C(2,1) & B(2,1) \end{bmatrix}$$

(5.78)

onde

$$\begin{aligned} B(i,j) = kL^2[cos^2\,\varphi_i + sen\,\varphi_i\,(sen\,\varphi_0 - sen\,\varphi_i)] \\ - FL\left[sen\,\varphi_i + \frac{cos^2\,\varphi_i}{\sqrt{1-(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j)^2}} - \frac{sen\,u_i\,(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j)}{\sqrt{1-(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j)^2}}\right. \\ \left. + \frac{cos^2\,\varphi_i\,(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_i)^2}{(1-(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j)^2)^{3/2}}\right] \end{aligned}$$

e

$$C(i,j) = FL\left[\frac{cos\,\varphi_i\;\;cos\,\varphi_j}{\sqrt{1-\left(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j\right)^2}} + \frac{cos\,\varphi_i\,cos\,\varphi_i\,(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_i)^2}{(1-(sen\,\varphi_i - sen\,\varphi_j)^2)^{3/2}}\right]$$

6. CONCLUSÕES

6.1. SOBRE O TRABALHO REALIZADO

Este trabalho abordou os principais aspectos do tema *estabilidade estrutura*l de forma organizada a fim de facilitar a compreensão do assunto. Além de apresentar os conceitos e terminologias básicas pertinentes à *teoria da estabilidade estrutural,* foi possível aplicá-los em sistemas mecânicos compostos de barras rígidas sem peso indeformáveis associadas a molas circulares ou lineares com diferentes modelos de rigidez.

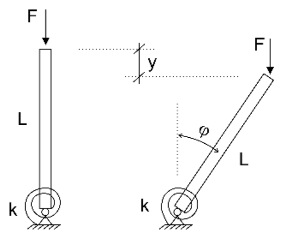
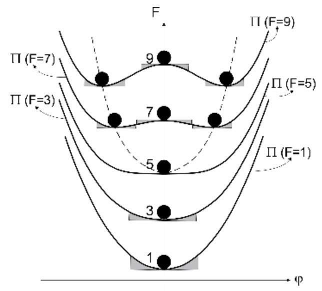
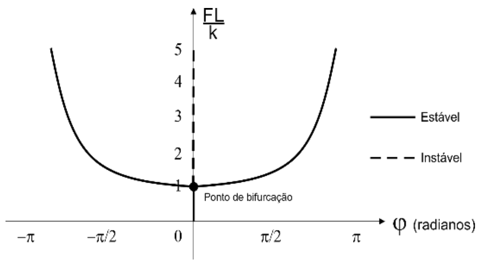
Foram estudados sistemas com 1GL, o sistema com bifurcação simétrica estável com e sem imperfeição geométrica inicial, o sistema com bifurcação simétrica instável com e sem imperfeição geométrica inicial, o sistema com bifurcação assimétrica e o sistema com perda de estabilidade por ponto limite (Tabela 6.1) . Também foi estudado um sistema mecânico com 2GL com e sem imperfeição geométrica inicial da barra e da carga. Duas estratégias de solução numérica foram discutidas: o método de Newton-Raphson e do Comprimento de Arco. Todos os modelos foram resolvidos analiticamente pelo PEPTE e numericamente pelo método de Newton-Raphson padrão e modificado. A resposta do sistema com bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial apresentou um ponto limite de carga, então parte do caminho de equilíbrio não pôde ser capturado pelo método de Newton-Raphson. Neste modelo foi usado o método do Comprimento de Arco.

A partir do estudo dos sistemas mecânicos e da criação de rotinas computacionais pôde-se prever, analítica e numericamente, o comportamento não linear das estruturas. Estes resultados servem de base para o estudo de sistemas mais complexos (com mais graus de liberdade) e em sistemas com aplicação em engenharia civil ou mecânica, como vigas e pórticos, por exemplo.

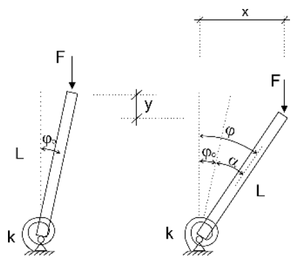
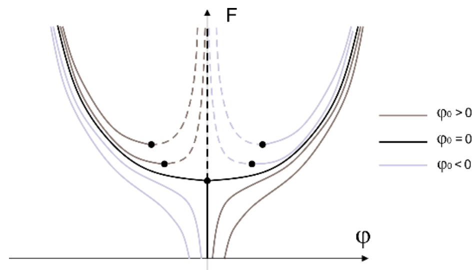
Tabela 6.1 – Resumo dos sistemas mecânicos

(Continua)

Bifurcação Simétrica Estável sem Imperfeição Geométrica Inicial

Sistema Mecânico	$\Pi \times \varphi$ e $F \times \varphi$	$F \times \varphi$
		

Bifurcação Simétrica Estável com Imperfeição Geométrica Inicial

Sistema Mecânico	$\Pi \times \varphi$ e $F \times \varphi$	$F \times \varphi$
		

Bifurcação Simétrica Instável sem Imperfeição Geométrica Inicial

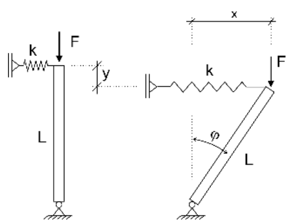
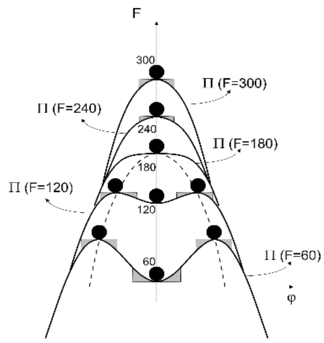
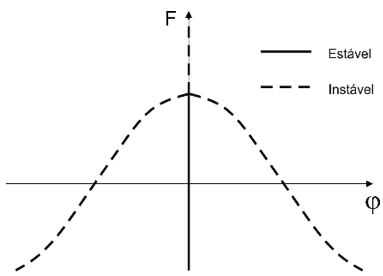
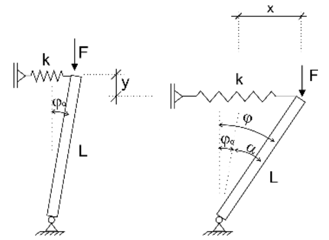
Sistema Mecânico	$\Pi \times \varphi$ e $F \times \varphi$	$F \times \varphi$
		

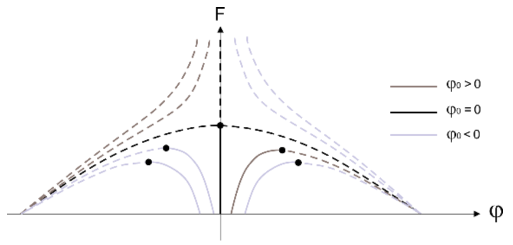
Tabela 6.1 – Resumo dos sistemas mecânicos

(Conclusão)

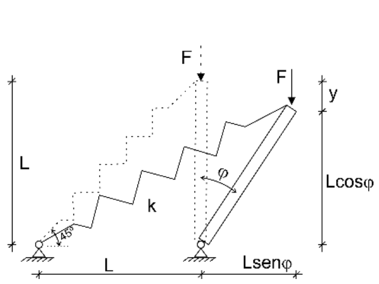
Bifurcação Simétrica Instável com Imperfeição Geométrica Inicial

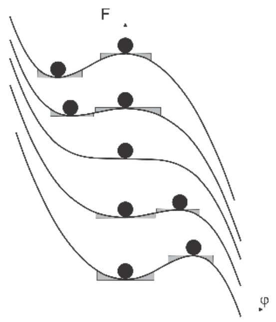
Sistema Mecânico	$\Pi \times \varphi$ e $F \times \varphi$	$F \times \varphi$

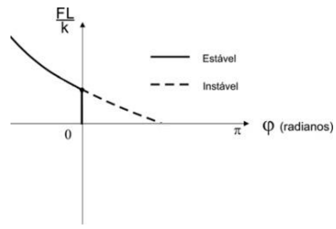




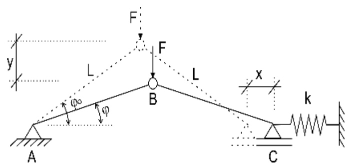
Bifurcação Assimétrica

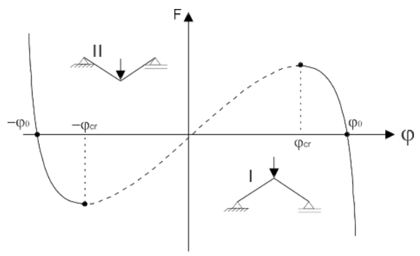






Sem Bifurcação





6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base no que foi analisado e concluído ao longo desta dissertação, podem ser feitas algumas sugestões de desenvolvimentos futuros relacionados ao tema, as quais são apresentadas no decorrer deste item.

- Estudar os sistemas com bifurcação assimétrica e com perda de estabilidade por ponto limite com imperfeição geométrica inicial
- Implementar o código numérico do comprimento de arco para sistemas não lineares com mais graus de liberdade
- Introduzir plasticidade nos modelos mecânicos
- Fazer o estudo da estabilidade em pórticos

APÊNDICE A - SOBRE RIGIDEZ ELÁSTICA E GEOMÉTRICA

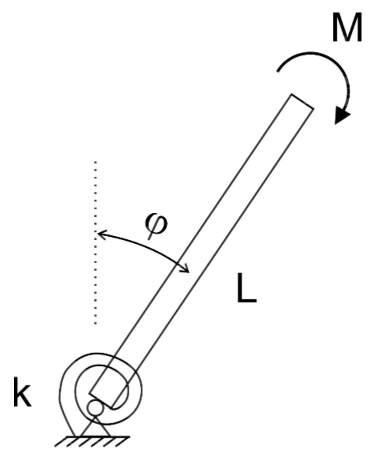
Neste apêndice será feita a apresentação das rigidezes elástica e geométrica de sistemas mecânicos de um grau de liberdade, motivo pelo qual assumem forma escalar. Serão apresentadas suas definições e características, e em virtude disso, serão visualizadas suas diferenças. No final, serão apresentadas as rigidezes elástica e geométrica de pilares, as quais se apresentam em sua forma matricial. Trata-se de uma abordagem pedagógica, no sentido de facilitar o entendimento dessas rigidezes por estudantes e engenheiros que pretendem se iniciar na análise não linear.

Sistema de Um Grau de Liberdade (1GL)

Rigidez elástica

Seja o sistema mecânico ilustrado na Figura A.1 abaixo.

Figura A.1- Sistema barra-mola submetido ao momento fletor M



Fonte: O autor

Sua energia potencial total ($\Pi = U + V$) vale:

$$\Pi = \frac{1}{2}k\varphi^2 - M\varphi \tag{A.1}$$

Sua primeira derivada vale:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = k\varphi - M \tag{A.2}$$

Sua segunda derivada vale:

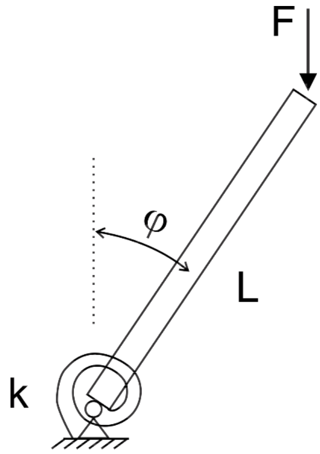
$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = k = k_e = k_t \tag{A.3}$$

onde k é rigidez da mola, que é linear ou elástica (k_e), que por sua vez é a rigidez total do sistema (k_t).

Rigidez geométrica

Seja o sistema mecânico ilustrado na Figura A.2 abaixo.

Figura A.2 – Sistema barra-mola submetido a uma força F



Fonte: O autor

Sua energia potencial total ($\Pi = U + V$) vale:

$$\Pi = \frac{1}{2}k\varphi^2 - FL(1 - cos\,\varphi) \tag{A.4}$$

Uma particularidade deste exemplo é que só é possível iniciar a análise aplicando-se uma pequena perturbação inicial, caso contrário a barra ficará na vertical e a força não provocará deslocamento angular na mola.

Sua primeira derivada vale:

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = k\varphi - FL\,sen\,\varphi \tag{A.5}$$

Sua segunda derivada vale:

$$\frac{d^2\Pi}{d\,\varphi^2} = k - FL\,cos\,\varphi = k_e + k_g = k_t \tag{A.6}$$

onde, k_t é a rigidez total, dada por:

$$k_t = k_e + k_g \tag{A.7}$$

sendo,

$$k_e = k \tag{A.8}$$

a rigidez elástica e

$$k_g = FL\, cos\, \varphi \tag{A.9}$$

a rigidez geométrica.

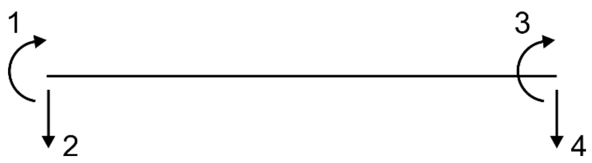
Agora a rigidez total (k_t) terá duas parcelas, a rigidez linear ou elástica (k_e) que é a rigidez da mola e a rigidez geométrica (k_g).

Neste momento é possível apresentar a diferença entre essas rigidezes. A rigidez elástica (k_e) independe da força generalizada (momento) aplicada no sistema mecânico, enquanto a rigidez geométrica depende da força aplicada e do deslocamento generalizado (φ), conforme a Equação(4.10). Isso caracteriza a não linearidade desse sistema mecânico.

Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade

Apresentam-se a seguir as rigidezes elástica e geométrica de uma barra prismática (Figura A.3). Essas rigidezes são obtidas em conformidade com os graus de liberdade apresentados na Figura A.3, (REIS & CAMOTIM, 2000).

Figura A.3 – Convenção de deslocamentos positivos para a barra de pórtico plano



Fonte: O autor

Matriz de rigidez elástica

A seguir se apresenta a matriz de rigidez elástica (Equação(A.10)) da barra ilustrada na Figura A.3

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{3EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

Nessa matriz, EI é a rigidez à flexão e L é o comprimento da barra. As rigidezes dessa matriz independem do esforço normal de compressão na barra aplicada na barra.

Matriz geométrica aproximada

De a acordo Reis e Camotim (2000), ao se incorporarem os efeitos de um esforço de compressão (N) na barra da Figura A.3, encontra-se a seguinte matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{k}_g = N \begin{bmatrix} \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{-L}{30} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} \\ \frac{-L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5L} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

As rigidezes da matriz geométrica sofrem influência do esforço normal de compressão atuante na barra.

Análise Linear da Estabilidade de Pilares

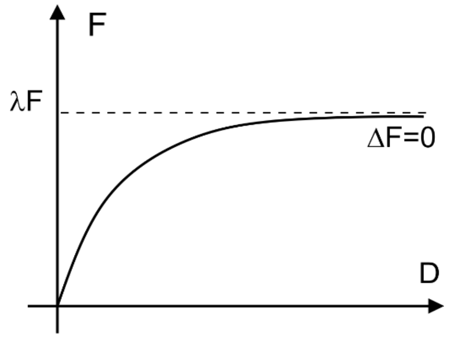
Segundo Reis e Camotim (2000), ao se conhecerem as forças de compressão em todas as barras de uma estrutura, o problema de autovalor pode ser apresentado na forma:

$$[\mathbf{k}_e - \lambda \mathbf{k}_g]\mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{A.12}$$

Vaz (2011) usa procedimento incremental para chegar ao problema de autovalor, admitindo que, nas proximidades da carga crítica, não há acréscimo de carga para acréscimo de deslocamento, resultando na equação:

Figura A.4 – (a) Problema de autovalor segundo Vaz (2011) (b) Ilustração da obtenção da carga crítica ($\Delta F = 0$) para 1GL

$$\left[\mathbf{k}_{\boldsymbol{e}} - \lambda\mathbf{k}_{\boldsymbol{g}}\right]\Delta\mathbf{D} = \mathbf{0}$$



(a) (b)

Fonte: O autor

A Equação (A.12) só tem solução não nula em $\mathbf{D}$ se $\det\left(\mathbf{k}_e - \lambda\mathbf{k}_g\right)$ for nulo.

Por meio de λ se obtêm as cargas críticas (autovalores) e, para cada λ, ter-se-á o modo de flambagem (autovetor) para a carga crítica diretamente associado a esse λ.

APÊNDICE B – CÓDIGOS FONTE

Este trabalho apresenta sistemas mecânicos de comportamento não linear geométrico e físico compostos de barras rígidas sem peso e molas lineares ou circulares sujeitas a cargas verticais que comprimem as barras desses sistemas. São apresentadas suas soluções analíticas e numéricas em termos de forças generalizadas *versus* deslocamentos generalizados. As soluções numéricas foram elaboradas com o uso do método de Newton-Raphson com controle de carga e deslocamento e o método do Comprimento de Arco.

A seguir, apresentam-se os códigos-fonte, em linguagem do Mathematica, das soluções numéricas não lineares desses sistemas mecânicos. São apresentados, inclusive, códigos de algoritmos que não foram fornecidos no corpo do texto, como o algoritmo do sistema com 2GL sem imperfeições iniciais.

Tabela B.1 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=1/2 k u^2+λ L(Cos[u]-1);
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
k=30;L=6;u={{0.5}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO----------------------------------*)
n=20;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=20;Δλ={{0.1}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2);λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA-----------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[(k u Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.008]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.2 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF I

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=1/2 k u^2+λ L(Cos[u]-1) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
L=6;u={{0.5}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];k=If[Norm[u]<2,30,12];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-----------------------------------*)
n=20;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=20;Δλ={{0.05}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA-------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2)
;;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;k=If[Norm[u]<2,30,12];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=If[Norm[u]<2,30,12];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->Placed[{"Numérico NLF I e α_L = 2
rad"},Right]];
G2=Plot[(12 u Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray},PlotLegends-
>Placed[{"Analítico k=12 kNm"},Right],PlotRange->{0,50}];
G3=Plot[(30 u Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Dashed},PlotLegends->Placed[{"Analítico k=30
kNm"},Right],PlotRange->{0,50}];
Show[G3,G2,G1]
```

Tabela B.3 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF II

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=1/2 k u^2+λ L(Cos[u]-1) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
L=6;u={{0.5}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];k=If[Norm[u]<2,30,(30 2)/u];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-----------------------------------*)
n=20;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=20;Δλ={{0.05}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA-------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2)
;;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;k=If[Norm[u]<2,30,(30 2)/u];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=If[Norm[u]<2,30,(30 2)/u];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF II e αL = 2 rad"}];
G2=Plot[((30 2)/u u Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray},PlotLegends-
>{"Analítico - Escoamento (P = 60 kNm)"},PlotRange->{0,50}];
G3=Plot[(30 u Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Dashed},PlotLegends->{"Analítico k = 30 kNM"},PlotRange-
>{0,50}];
Show[G3,G2,G1]
```

Tabela B.4 - Método de Newton-Raphson padrão, com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável sem imperfeição geométrica inicial e NLF III

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=1/2 k u^2+λ L(Cos[u]-1) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
L=6;u={{2}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-----------------------------------*)
n=20;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=10;Δλ={{0.1}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA-------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2) ;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;k=(30
/Cosh[u])[[1,1]];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF III"}];
G2=Plot[(30 /Cosh[u] u Csc[u])/L,{u,0,2.8},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray},PlotLegends-
>{"Analítico NLF III"},PlotRange->Automatic];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.5 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ,uo]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO---------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k (u-uo)^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo])
;g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO------------------------------
-----------------------------------------------*)
k=20;L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.2}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-------------------------------------
-----------------------------------------------*)
n=10;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.01;Id=4;Imax=10;Δλ={{0.2}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA---------------------------------
-----------------------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2);λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA--------------------------------
-------------------------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[-((k (-u+uo) Csc[u])/L),{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.007]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.6 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF I

```
Clear[uo,k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k (u-uo)^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo])
;g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,u]]
Print[Π[u,λ,uo],"g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u],"
λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO---------------------------*)
L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.2}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];k=If[Norm[u-
uo]<1.5,30,12];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO----------------------------------*)
n=30;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.01;Id=3;Imax=6;Δλ={{0.2}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2) ;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;k=If[Norm[u-
uo]<1.5,30,12];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=If[Norm[u-uo]<1.5,30,12];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA-----------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF I e αL = 1.5
rad"}];
G2=Plot[-((12(-u+uo) Csc[u])/L),{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray},PlotLegends-
>{"Analítico k = 12 kNm"},PlotRange->{0,50}];
G3=Plot[-((30 (-u+uo) Csc[u])/L),{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Dashed},PlotLegends->{"Analítico k = 30 kNm"},PlotRange-
>Automatic];
Show[G3,G2,G1]
```

Tabela B.7 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF II

```
Clear[uo,k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-------------------------------------
-----------------------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k (u-uo)^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo]) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO-------------------------------
------------------------------------------------*)
L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.1}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];k=If[Norm[u-
uo]<1.5,30,(30 1.5)/(u-uo)];Ip=0;
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-------------------------------------
------------------------------------------------*)
n=20;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.01;Id=3;Imax=10;Δλ={{0.5}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA---------------------------------
------------------------------------------------*)
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;k=If[Norm[u-uo]<1.5,30,(30
1.5)/(u-uo)];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=If[Norm[u-uo]<1.5,30,(30 1.5)/(u-uo)];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA--------------------------------
-------------------------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF II e α_L = 1.5
rad"}];
G2=Plot[((30 1.5)/(u-uo) (u-uo) Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel-
>{"φ","λ"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray},PlotLegends->{"Analítico - Escoamento (P = 45
kNm)"},PlotRange->{0,30}];
G3=Plot[(30(u-uo) Csc[u])/L,{u,0,3},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Dashed},PlotLegends->{"Analítico k = 30kNm"},PlotRange-
>{0,30}];
Show[G3,G2,G1]
```

Tabela B.8 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de deslocamento para o sistema de bifurcação simétrica estável com imperfeição geométrica inicial e modelo NLF II

```
Clear[uo,k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO---------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k (u-uo)^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo]) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,λ]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO---------------------------*)
L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.1}};k=If[Norm[u-uo]<0.5,30,(30
0.5)/u];λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];Ip=0;
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO---------------------------------*)
n=30;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.0001;Id=1;Imax=10;Δu={{0.04}};Ipa=I
d;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δu=Δu (Id/Ipa)^(1/2) ;u+=Δu;λ+=Inverse[Kt[u]].Δu;k=If[Norm[u-
uo]<0.5,30,(30 0.5)/u];Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},λ-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=If[Norm[u-uo]<0.5,30,(30 0.5)/u];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA----------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->Automatic,AxesLabel->{"φ","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF II e αL = 0.5 rad"}];
G2=Plot[((30 (0.5))/u (u-uo) Csc[u])/L,{u,0,2},AxesLabel-
>{"φ","λ"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray},PlotLegends->{"Analítico - Escoamento (P = 15kNm)"},PlotRange-
>{0,5}];
G3=Plot[(30(u-uo) Csc[u])/L,{u,0,2},AxesLabel->{"φ (rad)","Fext
(kN)"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Dashed},PlotLegends->{"Analítico com k = 30 kNm"},PlotRange-
>{0,5}];
Show[G3,G2,G1]
```

Tabela B.9 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=1/2 k L^2 Sin[u]^2+λ L(Cos[u]-1) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO------------------------------
----------------------------------------------------*)
k=30;L=6;u={{1}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO------------------------------------
----------------------------------------------------*)
n=40;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=2;Imax=20;Δλ={{0.8}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA--------------------------------
----------------------------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^(1/2);λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA-------------------------------
-----------------------------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[k L Cos[u],{u,0,1.1},AxesLabel->{"φ","Fext"},AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray,Thickness[0.007]},PlotLegends-
>{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.10 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ,uo]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-------------------------------------
-------------------------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k L^2 (Sin[u]-Sin[uo])^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo])
;g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO------------------------------
--------------------------------------------------*)
k=30;L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.11}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-------------------------------------
--------------------------------------------------*)
n=23;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=10;Δλ={{4}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA--------------------------------
--------------------------------------------------*)
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA-------------------------------
---------------------------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[-k L Cot[u] (-Sin[u]+Sin[uo]),{u,0,1},AxesLabel-
>{"φ","Fext"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.007]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.11 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação simétrica instável com imperfeição geométrica inicial e com modelo NLF III

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ,uo]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-----------------------------------*)
Π[u_,λ_,uo_]:=1/2 k L^2 (Sin[u]-Sin[uo])^2+λ L(Cos[u]-Cos[uo]) ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ,uo],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
L=6;uo={{(5 π)/180}};u={{0.11}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]];k=(30
/Cosh[u])[[1,1]];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-----------------------------------*)
n=23;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=10;Δλ={{4}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA-------------------------------*)
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];
 While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
  If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico NLF III"}];
G2=Plot[-(30 /Cosh[u]) L Cot[u] (-Sin[u]+Sin[uo]),{u,0,1},AxesLabel-
>{"φ","Fext"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.007]},PlotLegends->{"Analítico NLF III"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.12 - Método do comprimento de arco para o sistema de bifurcação simétrica instável sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[M,n,i,q,a,Δu,Δu2,Δu3,δu,δu1,δu2,λ,Δλ,Δλ2,Δλ3,Δl,Kt,fkT,fR,fδλ,DOT1,DOT2,u0,k,L]
fλ[u_]:=k L Cot[u](Sin[u]-Sin[u0])
fg[u_,λ_]:=k L Cot[u](Sin[u]-Sin[u0])-λ
fg[u_,λ_]:=-λ Sin[u]+k L Cos[u] (Sin[u]-Sin[u0])
fkT[u_]:=k L (Cos[u] Cot[u]+Csc[u] (-1+Csc[u] Sin[u0]))
fδλ[δur_,δuq_,q_,Δu_,Δλ_,Δl_]:=Module[{a=δuq^2+q^2,b=2δuq(Δu+δur)+2Δλ q^2,c=(Δu+δur)^2+Δλ^2 q^2-Δl^2,S,δλ1x,δλ2x,x},
   If[b^2-4a c>0,S=NSolve[a x^2+b x+c==0,x];δλ1x=x/.S[[1]];δλ2x=x/.S[[2]],δλ1x=-(b/(2c));δλ2x=-(b/(2c));"I"];
   Return[{δλ1x,δλ2x}]];
k=30;L=6;u0=(5 π)/180;
i=0;n=2500;M=ConstantArray[0,{n,2}];u=0.2;λ=fλ[u];tol=10^-1;q=1;Δl=1.5 10^-2;
While [i!=n,
 Δu=0;δur=0;δuq=0;δu1=0;δu2=0;δu=0;Δu2=0;Δλ=0;
 Kt=fkT[u+Δu];δuq=Kt^-1 q;
 {δλ1,δλ2}=fδλ[δur,δuq,q,Δu,Δλ,Δl];
 δu1=δur+δλ1 δuq;δu2=δur+δλ2 δuq;
 If[Sign[Kt]==Sign[δλ1],δu=δu1;δλ=δλ1,δu=δu2;δλ=δλ2];
 Δu2=Δu+δu;Δλ2=Δλ+δλ;
 i++;
 While[M[[i]]=={0,0},g=fg[u+Δu2,λ+Δλ2];
  If
[Abs[g]<tol,u+=Δu2;λ+=Δλ2;M[[i]]={u,λ};Δu3=Δu2;Δλ3=Δλ2,g=fg[u+Δu2,λ+Δλ2];
   Δu=Δu2;Δλ=Δλ2;g=fg[u+Δu,λ+Δλ];Kt=fkT[u+Δu,λ+Δλ];
   δur=-Kt^-1g;δuq=Kt^-1 q;
   {δλ1,δλ2}=fδλ[δur,δuq,q,Δu,Δλ,Δl];
   δu1=δur+δλ1 δuq;δu2=δur+δλ2 δuq;
   If[Δu3^2==0,If[Sign[Δλ+δλ1]==Sign[Kt],δu=δu1;δλ=δλ1,δu=δu2;δλ=δλ2],
     DOT1=(Δu+δu1)Δu3+Δλ2(Δλ+δλ1)q^2;DOT2=(Δu+δu2)Δu3+Δλ2(Δλ+δλ2)q^2;]
    If[DOT1>DOT2,δu=δu1;δλ=δλ1,δu=δu2;δλ=δλ2];
   If[δλ1==δλ2,δu=δu1;δλ=δλ1];
   Δu2=Δu+δu;Δλ2=Δλ+δλ;g=fg[u+Δu2,λ+Δλ2;u+=Δu2;λ+=Δλ2;Δu3=Δu2;Δλ3=Δλ2]]]]
G1=ListPlot[M,Joined->False,AxesLabel->{"u","λ"},(*AxesStyleArrowheads[{0.04}],*)LabelStyle->Directive[Bold,Medium],PlotStyle->{Black,Thickness[0.005]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[-k L Cot[u] (-Sin[u]+Sin[uo]),{u,0.1,0.8},AxesLabel->{"φ","Fext"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],LabelStyle->Directive[Bold,Medium],PlotStyle->{LightGray,Thickness[0.007]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.13 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação assimétrica sem imperfeição geométrica inicial e fisicamente linear

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO-----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=k L^2 (2+Sin[u]-2√(1+Sin[u])+λ L(Cos[u]-1)  ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO-----------------------------*)
k=30;L=6;u={{-0.1}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO-----------------------------------*)
n=13;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=10;Δλ={{1}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA-------------------------------*)
While[i!=n,i++;Δλ=Δλ (Id/Ipa)^1;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA------------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[(k L Cot[u] (-1+√(1+Sin[u]))/ √(1+Sin[u],{u,-0.5,0.5},AxesLabel-
>{"u","λ"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.012]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.14 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema de bifurcação assimétrica sem imperfeição geométrica inicial e com modelo NLF III

```
Clear[k,L,u,λ,Π,g,Kt,g,M,i,n,tol,Δλ]
(*CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------------*)
Π[u_,λ_]:=k L² (2+Sin[u]-2√(1+Sin[u])+λ L(Cos[u]-1)  ;
g[u_,λ_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u]];
Kt[u_]:=Evaluate[D[Π[u,λ],u,u]]
Print["g=",g[u,λ]," Kt=",Kt[u]," λ=",λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ][[1]]];
(*CONFIGURAÇÕES INICIAIS DO SISTEMA MECÂNICO----------------------------*)
L=6;u={{-0.1}};λ=λ/.Solve[g[u,λ]==0,λ];k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];
(*PARÂMETROS ARBITRÁRIOS DO ALGORITMO----------------------------------*)
n=30;M=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Id=3;Imax=10;Δλ={{1}};Ipa=Id;
(*CÓDIGO PRINCIPAL COM A SOLUÇÃO NUMÉRICA------------------------------*)
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;u+=Inverse[Kt[u]].Δλ;Ip=0;k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];
  While[M[[i]]=={0,0},Ip++;
   If[Norm[g[u,λ]]<tol∨Ip>Imax,M[[i]]={u[[1,1]],λ[[1,1]]},u-
=Inverse[Kt[u]].g[u,λ];k=(30 /Cosh[u])[[1,1]];Ipa=Ip]]];
(*PLOTAGEM DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA-----------------------------*)
G1=ListPlot[M,Joined->False,PlotRange->All,AxesLabel->{"u","λ"},
AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends->{"Numérico"}];
G2=Plot[(30 /Cosh[u] L Cot[u] (-1+√(1+Sin[u]))/√(1+Sin[u],{u,-
0.6,0.6},AxesLabel->{"u","λ"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.012]},PlotLegends->{"Analítico"}];
Show[G2,G1]
```

Tabela B.15 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema com dois graus de liberdade sem imperfeição geométrica inicial

```
Clear[k,L,u,λ,ƒΠ,ƒg,ƒKt,g,Kt,M,i,n,tol,Δλ,ƒu1,ƒu2,u1,u2]
ƒΠ[ƒu1_,ƒu2_,λ_]:=1/2 k L² (Sin[ƒu1]²+Sin[ƒu2]²)+λ L(Cos[ƒu1]+Cos[ƒu2]+
√(1-(Sin[ƒu1]-Sin[ƒu2])²) ) ;
ƒg[ƒu1_,ƒu2_,λ_]:={D[ƒΠ[ƒu1,ƒu2,λ],ƒu1],D[ƒΠ[ƒu1,ƒu2,λ],ƒu2]}
ƒKt[ƒu1_,ƒu2_,λ_]:={D[ƒg[ƒu1,ƒu2,λ],ƒu1],D[ƒg[ƒu1,ƒu2,λ],ƒu2]}
Print["g=",ƒg[u1,u2,λ]];
Print[ "Kt=",MatrixForm[ƒKt[u1,u2,λ]]];
Print[ "λ=",k L Cos[u1]];(*Solve[ƒg[ƒu1,ƒu2,λ]ƒ{0,0},λ]*)
n=200;M=ConstantArray[0,{n,3}];M2=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Δλ=-
0.1;k=30;L=2;u={0.1,0.1};λ=k L Cos[u[[1]]];
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;Kt=ƒKt[ƒu1,ƒu2,λ]/.{ƒu1->u[[1]],ƒu2-
>u[[2]]};u+=Inverse[Kt].(Δλ{0,1});
  While[M[[i]]=={0,0,0},g=ƒg[ƒu1,ƒu2,λ]/.{ƒu1->u[[1]],ƒu2->u[[2]]};

If[Norm[g]<tol,M[[i]]={u[[1]],u[[2]],λ};M2[[i]]={u[[1]],λ},Kt=ƒKt[ƒu1,ƒu2,λ
]/.{ƒu1->u[[1]],ƒu2->u[[2]]};u-=Inverse[Kt].g]]];
G1=ListPlot[M2,PlotRange->All,AxesLabel->{"u1","u2","λ"}, AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends-
>{"Numérico"}];
G2=Plot[k L Cos[u],{u,0,1},AxesLabel->{"u1=u2","λ"},AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{LightGray,Thickness[0.012]},PlotLegends-
>{"Analítico"}];
ListPointPlot3D[M,PlotRange->All,AxesLabel->{"u1","u2","λ"}, AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends-
>{"Numérico"}]
Show[G2,G1]
```

Tabela B.16 - Método de Newton-Raphson padrão com controle de carga para o sistema com dois graus de liberdade com imperfeição geométrica inicial

```
Clear[k,L,u,λ,∯Π,∯g,∯Kt,g,Kt,M,i,n,tol,∯λ,∯u1,∯u2,u1,u2]
∯Π[∯u1_,∯u2_,λ_]:=1/2 k L^2 ((Sin[∯u1]-Sin[ui])^2+(Sin[∯u2]-Sin[ui])^2)+λ
L(Cos[∯u1]+Cos[∯u2]+ √(1-(Sin[∯u1]-Sin[∯u2])^2 ) -1-2 Cos[ui]) ;
∯g[∯u1_,∯u2_,λ_]:={D[∯Π[∯u1,∯u2,λ],∯u1],D[∯Π[∯u1,∯u2,λ],∯u2]}
∯Kt[∯u1_,∯u2_,λ_]:={D[∯g[∯u1,∯u2,λ],∯u1],D[∯g[∯u1,∯u2,λ],∯u2]}
Print["g=",∯g[u1,u2,λ]];
Print[ "Kt=",MatrixForm[∯Kt[u1,u2,λ]]];
Print[ "λ=",k L Cot[u] (Sin[u]-Sin[ui])];(*Solve[D[∯Π[u,u,λ],u]∯0,λ]*)
n=200;M=ConstantArray[0,{n,3}];M2=ConstantArray[0,{n,2}];i=0;tol=0.1;Δλ=0.1
;k=30;L=2;u={0.9,0.9};ui=0.02;
λ=k L Cos[u[[1]]]
While[i!=n,i++;λ+=Δλ;Kt=∯Kt[∯u1,∯u2,λ]/.{∯u1->u[[1]],∯u2-
>u[[2]]};u+=Inverse[Kt].(Δλ{0,1});
  While[M[[i]]=={0,0,0},g=∯g[∯u1,∯u2,λ]/.{∯u1->u[[1]],∯u2->u[[2]]};

If[Norm[g]<tol,M[[i]]={u[[1]],u[[2]],λ};M2[[i]]={u[[1]],λ},Kt=∯Kt[∯u1,∯u2,λ
]/.{∯u1->u[[1]],∯u2->u[[2]]};u-=Inverse[Kt].g]]];
G1=ListPlot[M2,PlotRange->All,AxesLabel->{"u1","u2","λ"}, AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends-
>{"Numérico"}];
G2=Plot[k L Cot[u] (Sin[u]-Sin[ui]),{u,0,1},AxesLabel-
>{"u1=u2","λ"},AxesStyle->Arrowheads[{0.04}],PlotStyle-
>{LightGray,Thickness[0.012]},PlotLegends->{"Analítico"}];
ListPointPlot3D[M,PlotRange->All,AxesLabel->{"u1","u2","λ"}, AxesStyle-
>Arrowheads[{0.04}],PlotStyle->{Black,Thickness[0.002]},PlotLegends-
>{"Numérico"}]
Show[G2,G1]
```

REFERÊNCIAS

Allen, H. G. & Bulson, P. S., 1980. *Background to Buckling.* s.l.:McGraw-Hill.

Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), NBR 14762:2010. *Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituidas de Perfis Formados a Frio.* Rio de Janeiro: s.n.

Badke-Neto, A. & Ferreira, W. G., 2016. *Dimensionamento de elementos de perfis de aço laminados soldados: Com exemplos numéricos 3ª Edição.* s.l., Vitória.

Bardi, J. S., 2006. *A Guerra do Cálculo.* Rio de Janeiro: Record.

Bruce, G. J., 1983. *Column Buckling Theory: Historic Highlights.* s.l.:s.n.

Camargo, R. S., 2017. Figuras recebidas por fonte eletrônica: s.n.

Chapra, S. C. & Canale, R. P., 1985. *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications.* Singapore: McGraw-Hill.

Crisfield, M. A., 1983. A fast incremental / iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, Volume 13, pp. 55-62.

Ferreira, W. G., Silveira, R. A. M. & Badke-Neto, A., Anais... 09 a 12 de Setembro de 2008. *Conceitos e terminologias da estabilidade estrutural.* XXXVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE, São Paulo.

Ferreira, W. G. et al., 2017. *Introdução à Teoria da Estabilidade Elástica.* 2ª ed. ed. Vitória: LBF.

Galvão, A. S., 2000. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos.* Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Gonçalves, P. B., 1994. *Uma Introdução à Instabilidade das Estruturas.* Departamento de Engenharia Civil, Curso de Mestrado em Estruturas, PUC, Rio de Janeiro.

Maia, L. P., 1984. *Mecânica Vetorial.* Rio de Janeiro: s.n.

Maximiano, D. P., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas.* Dissertação de Mestrado. Ouro Preto: s.n.

McGuire, W., Gallagher, R. H. & Ziemiean, R. D., 2000. *Matrix Structural Analysis.* 2nd ed. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc..

Owen, D. R. J. & Hinton, E., 1980. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice..* s.l.:Pineridge Press Limited.

Pinheiro, L., 2003. *Análises Não-lineares de Sistemas Estruturais Metálicos Rotulados e Semi-rígidos.* Ouro Preto(MG): Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP,.

Reis, A. J. & Camotim, D., 2000. *Estabilidade Estrutural.* Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura (DECivil), Instituto Superior Técnico, Universicade Técnica de Lisboa, McGraw-Hill.

Riks, E., 1979. *An incremental approach to the solution to the solution of buckling ans.* s.l.:International Journal of Solids and Structures.

Rocha, G., 2000. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos.* Ouro Preto(MG): Dissertação de Mestrado, Deciv/EM/UFOP.

Santana, M. V. B., 2015. *Sistema computacional gráfico Interativo para problemas de instabilidade em treliças e pórticos planos.* Ouro Preto: Dissertação (Mestrado).

Surovek-Maleck, A., White, D. W. & Leon, R. T., 2004. Direct analysis for design of partially restrained steel framing system. *Journal of Structural Engineering,* Volume 131(9), pp. 1376-1389.

Timoshenko, S. P. & Gere, J. E., 1984. *Mecânica dos Sólidos.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Vasios, N., 2015. *Nonlinear Analysis of Structures.* Cambridge: Harvard.

Vaz, L. E., 2011. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas.* Rio de Janeiro: Elsevier.

Wong, M. B., 2009. *Plastic Analysis and Design of Steel Structures.* s.l.:Elsevier.

Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1991. *The Finite Element Method.* 2nd ed. UK: McGraw-Hill Book Company.

ÍNDICE REMISSIVO

A

abordagem pedagógica, 136
análise não linear, 21, 22, 23, 37, 59, 136
análise não linear geométrica, 22
aproximação assintótica, 62
Aproximações, 48, 58
arco abatido, 19
autovetor, 109, 140

C

Cálculo Diferencial, 27
caminho fundamental, 50, 51, 55
caminho pós-crítico, 50, 51
caminho primário, 50
caminho secundário, 50, 57, 85, 86
carga crítica, 21, 50, 51, 53, 54, 59, 85, 120, 139, 140
carga-limite, 90, 91
Ciclo iterativo, 35, 47, 63, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130
configuração de equilíbrio, 15, 25, 58
configuração perturbada, 20, 21
corretiva, 28
critério estático, 50
curvatura, 53, 54, 55, 56

D

deslocamento angular, 49, 55, 84, 85, 88, 97, 137
deslocamento generalizado, 138
deslocamento vertical, 49, 60

E

energia potencial, 25, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 96, 97, 102, 103, 107, 108, 113, 114, 125, 136, 137
energia potencial elástica, 49, 60, 108, 125
energia potencial total, 25, 49, 51, 52, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 96, 97, 102, 103, 108, 113, 114, 125, 136, 137
equação estática desequilibrada, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130
equilíbrio, 18, 20, 21, 22, 25, 48, 50, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 64, 84, 85, 89, 91, 96, 102, 106, 108, 114, 120, 121, 122, 128
equilíbrio estável, 25, 55, 96, 114
equilíbrio instável, 25, 54, 55, 96, 114
escoamento, 56
estabilidade, 18, 19, 20, 21, 22, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 59, 61, 82, 84, 85, 89, 91, 96, 97, 103, 113
Estabilidade, 51, 113
estável, 18, 20, 21, 25, 50, 51, 52, 53, 61, 84, 85, 90, 91
estratégia de solução, 36
estrutura indeformada, 22
expansão, 58, 59

F

fase predita, 28
fenômenos de instabilidade, 22
força generalizada desequilibrada, 63
forças generalizadas, 28
forças generalizadas internas incrementais, 28

G

grandes deslocamentos, 21, 22
grau de liberdade, 48, 82, 106, 114, 136
graus de liberdade, 106, 108, 122, 123

I

Imperfeição Geométrica, 59, 65, 88, 92, 93, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155
incremento de carga, 15
instável, 18, 21, 25, 50, 51, 55, 61, 84, 85, 90, 91, 120
iterações, 36

L

loop externo, 35, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130
loop interno, 35, 63, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130

M

método de Newton-Raphson, 27, 35, 36, 62, 64, 86, 91, 98, 104, 129
mola circular, 48, 59, 82
mola linear, 83, 88, 95, 102

N

Não linearidade Física, 21
não linearidade geométrica, 15, 21, 50
neutro, 18, 50, 59, 61
Newton-Raphson, 22, 35, 36, 47, 62, 63, 64, 65, 80, 86, 87, 91, 92, 93, 98, 99, 100, 104, 105, 130, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157

P

parâmetros de controle, 22
pequenos deslocamentos, 22, 108
perfil formado a frio, 57
perturbação, 18, 19, 48, 51, 83, 106, 137
pilares, 15, 56, 136, 139
placas, 56, 57
pontos de bifurcação, 22
potencial da carga, 49, 60, 83, 107, 108, 125
primeira derivada, 136, 137
Princípio da Energia Potencial Total Estacionária, 25, 49
problema de autovalor, 58, 139
procedimento incremental, 139
processo corretivo, 28
programa computacional, 63, 65, 87, 94, 100, 105, 129

R

reserva de resistência, 56
Rigidez elástica, 136
Rigidez geométrica, 137
rigidez rotacional, 48
rigidez total, 63, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130, 137, 138
ruptura, 56

S

salto dinâmico, 91, 103
segunda derivada, 50, 59, 84, 85, 89, 96, 103, 136, 137
série de Taylor, 58, 59
sistema imperfeito, 62
sistema mecânico, 49, 51, 61, 62, 63, 64, 65, 82, 86, 87, 91, 98, 104, 106, 129, 136, 137, 138
sistema perfeito, 62, 96
solução fundamental, 50, 59
solução numérica, 63, 64, 87, 94, 100
solução trivial, 58, 114, 120

T

tangente, 27, 35
tensão crítica, 56
Teorema de Lagrange, 25
tolerância, 35, 47, 63, 65, 80, 86, 87, 92, 93, 99, 100, 104, 105, 130
trajetória de equilíbrio, 22