Propriedades Características das Hiperesferas Euclidianas

Weslley Marinho Lozório

Dissertação de Mestrado em Matemática

Mestrado em Matemática

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória, Junho de 2008

Folha de rosto, com termo de aprovação

Ficha catalográfica

A Deus por esta graciosa oportunidade.
Aos meus parentes e amigos pelo carinho e incentivo que me deram ao longo desses anos.

Agradecimentos

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao professor José Miguel Malacarne pela paciente orientação e esforço exaustivo para tornar possível este sonho.

Aos professores da banca: José Miguel Malacarne, Levi Lopes de Lima e Florêncio Ferreira Guimarães Filho.

Aos professores José Armínio Ferreira e Magno Branco Alves, pelas valiosas sugestões.

Ao colega Wellington Kister, por sua tão importante ajuda na preparação de minha defesa de dissertação.

Aos demais colegas de curso pelo ambiente agradável que proporcionaram.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFES, pela oportunidade de realizar este trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

O estudo das hipersuperfícies do espaço euclidiano que possuem alguma função simétrica elementar das curvaturas principais constante é um tópico clássico em Geometria Diferencial. Neste tópico o problema geométrico mais simples consiste em caracterizar as hipersuperfícies compactas, e o resultado prototípico foi obtido por H. Liebmann em 1899, no qual as esferas euclidianas são caracterizadas como as únicas superfícies compactas do espaço euclidiano tridimensional que possuem curvatura gaussiana constante.

Em 1956 A.D. Alexandrov obteve uma caracterização notável das hiperesferas euclidianas, a saber, elas são as únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano m-dimensional ($m \geq 3$) que possuem curvatura média constante. As idéias utilizadas por Alexandrov em sua demonstração tornaram-se conhecidas como o *método de reflexão de Alexandrov* e foram empregadas em vários outros problemas. Em 1977, R.C. Reilly apresentou uma nova demonstração para o Teorema de Alexandrov, cognominada o *método de Reilly*, que também revelou-se fundamental neste tópico. De fato, A. Ros, em 1987, utilizando o método de Reilly, obteve uma extensão do Teorema de Alexandrov no qual caracteriza as hiperesferas euclidianas como sendo as únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano m-dimensional que possuem alguma função simétrica elementar das curvaturas principais constante, reobtendo, em particular, o Teorema de Liebmann. Em 1988, N. Korevaar apresentou uma nova demonstração para o Teorema de Ros, utilizando o método de reflexão de Alexandrov.

Esta dissertação tem por objetivo apresentar as demonstrações de Alexandrov, Reilly, Ros, e Korevaar para os teoremas que estabelecem algumas das propriedades características das hiperesferas euclidianas.

Abstract

The study of hypersurfaces of Euclidean spaces which have a constant elementary symmetric function is a classical topic in Differential Geometry. In this topic the more simple geometric problem is to characterize the compact hypersurfaces and the prototypical result was obtained by H. Liebmann in 1899: the round spheres are the only compact surfaces in the three dimensional Euclidean space that have constant Gaussian curvature.

In 1956 A.D. Alexandrov obtained a remarkable characterization of the Euclidean round hyperspheres: they are the only compact hypersurfaces of m-dimensional Euclidean space ($m \geq 3$) that have constant mean curvature. The ideas used by Alexandrov became well-know as *Alexandrov's reflection method* and were used in several other problems. In 1977, R.C. Reilly presented a new proof of Alexandrov's theorem, the *Reilly's method*, which also become fundamental tool in this topic. In fact, A. Ros in 1987, using the Reilly's method, obtained a new extension of the Alexandrov's theorem characterizing the round hyperspheres as the only compact hypersurfaces of the m-dimensional Euclidean space that have a constant elementary symmetric function of the principal curvatures. This result implies, in particular, the Liebmann's theorem. In 1988, N. Korevaar presented a new proof of the Ros's theorem, using the Alexandrov reflection method.

The main goal of this Master thesis is to present proof's by Alexandrov, Reilly, Ros, and Korevaar of some theorems that characterizes the Euclidean round hyperspheres.

Introdução

Os estudo das superfícies do espaço euclidiano tridimensional que possuem ou curvatura média constante, ou curvatura gaussiana constante, constitui um tópico clássico em Geometria Diferencial. Nesse tópico, o problema geométrico mais simples consiste em caracterizar as superfícies *compactas*, e o resultado prototípico foi obtido por H. Liebmann em 1899, o qual caracteriza as esferas como sendo as únicas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura gaussiana constante (veja [9]).

Este tópico clássico inclui, de modo natural, o estudo das hipersuperfícies do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ de dimensão $m \geq 3$ que possuem alguma r-curvatura média H_r constante para $1 \leq r \leq m-1$. Em essência, a r-curvatura média de uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$ é, a menos de uma constante, uma função simétrica elementar das curvaturas principais de M em cada ponto. Algumas delas têm nomes especiais, por exemplo, H_1 é a curvatura média de M, H_2 é a curvatura escalar e H_{m-1} é a curvatura de Gauss-Kronecker.

O resultado notável neste tópico foi obtido em 1956 por A.D. Alexandrov [1]. Neste artigo seminal, Alexandrov caracterizou as hiperesferas do espaço euclidiano m-dimensional como sendo as únicas hipersuperfícies compactas de $\mathbb{R}^m$ que possuem curvatura média constante. As duas principais ferramentas utilizadas em [1] são o Princípio do Máximo de E. Hopf para equações elípticas [14] e o método de reflexão devido ao próprio Alexandrov. A prova de Alexandrov é hoje denominada o *método de reflexão de Alexandrov* e foi largamente utilizado em diversos problemas.

Mais geralmente, o Teorema de Alexandrov é válido para hipersuperfícies compactas mergulhadas em $\mathbb{R}^m$ e para alguns casos particulares de imersões que admitem certos tipos de interseção (para mais detalhes veja [2]). Porém, o resultado não é verdadeiro para imersões em geral. Com efeito, H. Hopf [15] estabeleceu que uma imersão de uma 2-esfera topológica de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ deve ser uma esfera, e questionou se o mesmo é verdadeiro para qualquer imersão de uma superfície compacta de curvatura média constante. Hsiang, Teng & Yu [16] foram capazes de construir exemplos de hipersuperfícies compactas não-esféricas imersas em $\mathbb{R}^m$ com curvatura média constante para $m > 3$, dando uma resposta negativa para a questão de Hopf e provando que a hipótese de a hipersuperfície ser mergulhada é essencial no Teorema de Alexandrov. Além disso, H.C. Wente [33] deu uma resposta negativa ao problema de Hopf também para o caso 2-dimensional, construindo uma infinidade de toros imersos em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante. Mais recentemente, N. Kapouleas construiu novos exemplos de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante com gênero maior do que 2 [18, 19].

Um segundo resultado deveras importante neste tópico foi obtido em 1977 por R.C. Reilly [28]. Reilly apresentou uma demonstração diferente e simples para o Teorema de Alexandrov, combinando de modo genial algumas fórmulas integrais e a solução de uma equação de Poisson. Essa demonstração passou a ser denominada o *método de Reilly*, e se revelou bastante profícua no tópico supra citado. De fato, em 1987, A. Ros combinou o método de Reilly com uma nova desigualdade integral e pôde estender o Teorema de Alexandrov para o caso de hipersuperfícies compactas com curvatura escalar constante [30], e mais geralmente, para o caso de hipersuperfícies compactas com r-curvatura média constante [29], caracterizando as hiperesferas como sendo as únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano que possuem alguma r-curvatura média constante.

Por outro lado, em 1988, N. Korevaar [20], seguindo as idéias de Caffarelli, Nirenberg & Spruck [7], estabeleceu um Princípio do Máximo para hipersuperfícies com r-curvatura média constante, obtendo assim uma nova demonstração para o Teorema de Ros utilizando o método de reflexão de Alexandrov.

Esta dissertação tem por objetivo apresentar as demonstrações dos teoremas que caracterizam as hiperesferas euclidianas como sendo as únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano que possuem alguma r-curvatura média constante. Isto será feito ao longo de três capítulos cujo conteúdo passamos a descrever.

No primeiro capítulo apresentaremos uma breve revisão sobre os principais conceitos da Geometria Diferencial de hipersuperfícies do espaço euclidiano.

No segundo capítulo descreveremos a caracterização das hiperesferas euclidianas obtida por Alexandrov (Teorema 2.1), provando-o na Seção 2.3. Na Seção 2.4 apresentaremos a nova demonstração do Teorema de Alexandrov obtida por Reilly.

No terceiro capítulo abordaremos a caracterização das hiperesferas euclidianas obtida por Ros e apresentaremos as demostrações de Korevaar e de Ros, sendo que a prova deste estará contida nas Seções 3.1 e 3.2, e a daquele na Seção 3.3.

As fontes fundamentais que inspiraram esta dissertação foram o artigo expositório de L.J. Alías & J.M. Malacarne [4], e os trabalhos de M.L. Leite [23] e L.J. Alías [3].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Hipersuperfícies do espaço euclidiano

Seja $m \geq 3$ um número natural. Denotamos por $\mathbb{R}^m$ o *espaço euclidiano* de dimensão m. Como conjunto $\mathbb{R}^m$ é simplesmente a coleção de todas as m-uplas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ formadas por números reais x_i, para $i = 1, \ldots, m$. Além disso, o espaço euclidiano tem uma estrutura natural de espaço vetorial real na qual pode-se definir o *produto interno* (canônico) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Esse produto interno, por sua vez, permite introduzir em $\mathbb{R}^m$ uma estrutura de espaço métrico por meio da *distância* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, definida a partir da *norma* $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. As transformações do espaço euclidiano que preservam a distância euclidiana entre quaisquer dois de seus pontos são denominadas *isometrias* de $\mathbb{R}^m$; dentre essas destacam-se os *movimentos rígidos* de $\mathbb{R}^m$, isto é, as transformações do tipo

$$\mathbb{R}^m \ni \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m,$$

sendo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{A} \in \mathrm{SO}(m)$ uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^m$ com determinante 1.

De um modo bastante intuitivo, podemos dizer que a geometria estuda a *forma* dos objetos. Neste trabalho estaremos interessados em estudar a forma dos subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ que sejam os análogos das curvas no plano e das superfícies no espaço. Estes objetos são denominados as hipersuperfícies de $\mathbb{R}^m$ e para estudá-los faremos uso das noções do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^m$ (para maiores detalhes veja [24]).

Definição 1.1. *Uma* hipersuperfície *de $\mathbb{R}^m$ é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ que pode ser coberto por uma coleção de abertos $V \subset \mathbb{R}^m$, tais que cada conjunto $M \cap V$ é a imagem de um homeomorfismo $\varphi : U \to M \cap V$ que é também uma imersão de classe C^∞ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$.*

Observamos que cada uma de tais aplicações φ é denominada uma *parametrização* de M, e que cada conjunto $M \cap V$ é um aberto em M, e para cada $p \in M \cap V$, diz-se que $V \cap M$ é uma *vizinhança parametrizada* de p.

O estudo da forma das hipersuperfícies pode ser tornado mais preciso se adotarmos a seguinte definição devida a F. Klein (veja p. 99 de [8]):

A geometria das hipersuperfícies do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ é o estudo das propriedades destes conjuntos que são invariantes por todos os movimentos rígidos desse espaço.

Claramente, dentre os exemplos mais simples de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^m$ encontram-se os hiperplanos e as hiperesferas euclidianas.

Exemplo 1.2.

Sejam $a_1, \dots, a_m, b$ números reais tais que ao menos um dos a_i seja não-nulo. O conjunto H de todos os pontos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tais que $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + b = 0$ é denominado um hiperplano de $\mathbb{R}^m$. Temos que H é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.3.

A hiperesfera unitária

$$\mathbb{S}^{m-1} = \left\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \; x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1\right\}$$

é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$. De fato, sejam $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1)$ o pólo norte e $\mathbf{s} = (0, \dots, 0, -1)$ o pólo sul de $\mathbb{S}^{m-1}$, respectivamente, e $\mathbb{R}^{m-1}$ o hiperplano $x_m = 0$ de $\mathbb{R}^m$. Defina a aplicação $\pi_{\mathbf{n}} : \mathbb{S}^{m-1} - \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{R}^{m-1}$ que leva o ponto $p = (x_1, \dots, x_m)$ de $\mathbb{S}^{m-1} - \{\mathbf{n}\}$ na intersecção do hiperplano $x_m = 0$ com a reta que passa por p e $\mathbf{n}$. Essa aplicação é denominada a *projeção estereográfica* de $\mathbb{S}^{m-1}$ a partir do pólo norte. Temos que

$$\pi_{\mathbf{n}}(x_1, \dots, x_m) = \left(\frac{x_1}{1 - x_m}, \dots, \frac{x_{m-1}}{1 - x_m}\right).$$

A aplicação $\pi_{\mathbf{n}}$ é diferenciável, injetiva e aplica $\mathbb{S}^{m-1} - \{\mathbf{n}\}$ sobre o hiperplano $x_m = 0$. A projeção estereográfica $\pi_{\mathbf{s}} : \mathbb{S}^{m-1} - \{\mathbf{s}\} \to \mathbb{R}^{m-1}$ a partir do pólo sul possui as mesmas propriedades. Portanto, $\pi_{\mathbf{n}}^{-1}$ e $\pi_{\mathbf{s}}^{-1}$ são parametrizações e cobrem toda a hiperesfera $\mathbb{S}^{m-1}$.

Exemplo 1.4.

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida no aberto U do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m-1}$. O subconjunto $M = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^m : \; \mathbf{x} \in U, y = f(\mathbf{x})\}$, denominado o *gráfico* da função f, é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$. De fato, $\varphi : U \to M$ definida por $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é uma parametrização de M.

Este último exemplo nos mostra que o gráfico de uma função suave é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$. A proposição a seguir fornece uma recíproca local deste fato; isto é, toda hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$ é localmente o gráfico de uma função suave.

Proposição 1.5. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ uma hipersuperfície e p um ponto de M. Então existe uma vizinhança V de p em M tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas: $x_i = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$, $i = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Sejam $\varphi : U \to M$ uma parametrização de M em $p = \varphi(q)$, e $x_j(u_1, \dots, u_{m-1})$ as suas funções coordenadas, $j = 1, \dots, m$. Como a diferencial $d\varphi_q$ é injetiva, então, renomeando os eixos, se necessário, podemos supor que o determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_{m-1})}{\partial(u_1, \dots, u_{m-1})}(q) \neq 0, \tag{1.1}$$

não se anula em q. Considere a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ definida por $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-1})$. Então $\pi \circ \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}) = (x_1(u_1, \dots, u_{m-1}), \dots, x_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}))$, e, por (1.1), o teorema da função inversa assegura a existência de vizinhanças V_1 de q e V_2 de $\pi \circ \varphi(q)$ tais que $\pi \circ \varphi$ aplica V_1 difeomórficamente sobre V_2. Decorre daí que π restrita a $\varphi(V_1) = V$ é bijetiva e tem uma inversa diferenciável $(\pi \circ \varphi)^{-1} : V_2 \to V_1$. Observe que, como φ é um homeomorfismo, V é uma vizinhança de p em M. Agora, considerando a composição da aplicação $(\pi \circ \varphi)^{-1} : (x_1, \dots, x_{m-1}) \to (u_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, u_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}))$ com a função $(u_1, \dots, u_{m-1}) \to x_m(u_1, \dots, u_{m-1})$, podemos notar que V é o gráfico de uma função diferenciável $x_m = x_m(u_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \dots, u_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1})) = f_m(x_1, \dots, x_{m-1})$, e isso encerra a demonstração. $\square$

Uma fonte de exemplos de hipersuperfícies de $\mathbb{R}^m$ é fornecida pelo Teorema da função implícita.

Teorema 1.6. *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in f(U)$ tais que se $f(\mathbf{x}) = a$ então o gradiente de f no ponto $\mathbf{x}$ é não-nulo. Então o conjunto $f^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Pelo teorema da função implícita, para cada ponto $p \in f^{-1}(a)$ existe um aberto $Z \subset \mathbb{R}^m$, contendo p, tal que $Z \cap f^{-1}(a)$ é o gráfico de uma aplicação diferenciável definida num aberto de $\mathbb{R}^{m-1}$. Logo, pela proposição 1.5, cada $Z \cap f^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$. Segue-se que $f^{-1}(a)$ também o é. $\square$

Exemplo 1.7.

A hiperesfera $\mathbb{S}^{m-1}(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m;\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = \rho^2\}$ de centro $\mathbf{x}_0$ e raio $\rho > 0$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.8.

Seja (q_{ij}) uma matriz real simétrica não-singular de ordem m. Então, para cada número real $c \neq 0$, o conjunto $M_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j = c\}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$ denominada uma *hiperquádrica.*

Exemplo 1.9.

O toro $T \subset \mathbb{R}^3$ é o conjunto gerado pela rotação de um círculo S^1 de raio r em torno de uma reta pertencente ao plano do círculo e a uma distância $a > r$ do centro do círculo.

Seja S^1 o círculo no plano yz centrado no ponto $(0, a, 0)$. Então S^1 é dado por $(y-a)^2+z^2 = r^2$ e os pontos do conjunto T, obtidos pela rotação deste círculo em torno do eixo Oz satisfazem a equação

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2.$$

Consequentemente, $T = f^{-1}(r^2)$ para $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$. Portanto, o toro T é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^3$.

A proposição a seguir mostra que se um ponto pertence a duas vizinhanças coordenadas, com parâmetros $(u_1, \ldots, u_{m-1})$ e $(v_1, \ldots, v_{m-1})$, respectivamente, é possível passar de um destes sistemas de coordenadas ao outro através de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.10 (Mudança de Parâmetros)**.** *Seja p um ponto de uma hipersuperfície M, e sejam $\varphi : U \to M$ e $\psi : V \to M$ duas parametrizações de M, tais que $p \in \varphi(U) \cap \psi(V) = W$. Então a* mudança de coordenadas *$h = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. A aplicação $h = \varphi^{-1} \circ \psi$, sendo a composição de homeomorfismos, é um homeomorfismo. Não é possível concluir , por um argumento análogo, que h é diferenciável, já que φ^{-1} está definida em um subconjunto aberto de M, e não sabemos ainda o que vem a ser uma função diferenciável definida em M. Procedemos da seguinte maneira. Seja $r \in \psi^{-1}(W)$ e defina $q = h(r)$. Como $\varphi(u_1, \ldots, u_{m-1}) = (x_1(u_1, \ldots, u_{m-1}), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_{m-1}))$ é uma parametrização, podemos supor, renomeando os eixos caso necessário, que

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})}{\partial(u_1, \ldots, u_{m-1})}(q) \neq 0. \tag{1.2}$$

Estendemos φ a uma aplicação $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(u_1, \ldots, u_{m-1}, t) = (x_1(u_1, \ldots, u_{m-1}), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_{m-1}) + t).$$

Claramente F é diferenciável e a restrição $F|_{U\times\{0\}} = \varphi$. Calculando o determinante da diferencial dF_q, obtemos

$$|dF_q| = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})}{\partial(u_1, \ldots, u_{m-1})}(q) \neq 0.$$

Podemos então aplicar o teorema da função inversa e assegurar a existência de uma vizinhança S de $\varphi(q)$ em $\mathbb{R}^m$ na qual F^{-1} existe e é diferenciável. Pela continuidade de ψ, existe uma vizinhança N de r em V tal que $\psi(N) \subset S$. Observe que, restrita a N, $h|_N = F^{-1} \circ \psi|_N$ é a composição de aplicações diferenciáveis, logo podemos concluir que h é diferenciável em r. Como r é arbitrário, h é diferenciável em $\psi^{-1}(W)$.

Aplicando exatamente o mesmo argumento, pode-se mostrar que a aplicação h^{-1} é diferenciável, e portanto h é um difeomorfismo. □

Daremos agora uma definição do que se entende por função diferenciável em uma hipersuperfície.

Definição 1.11. *Sejam $k \geq 1$ um inteiro e $f : V \subset M \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação definida no aberto V da hipersuperfície M. Então f é diferenciável em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\varphi : U \to M$, com $p \in \varphi(U) \subset V$, a composição $f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$. A aplicação f é diferenciável em V se é diferenciável em cada ponto de V.*

Como consequência imediata da proposição anterior, segue que a definição acima não depende da escolha da parametrização φ. De fato, se $\psi : V \to M$ é uma outra parametrização, com $p \in \psi(V)$, e se $h = \varphi^{-1} \circ \psi$, então $f \circ \psi = f \circ \varphi \circ h$ também é diferenciável. Daí, a independência afirmada.

A definição de diferenciabilidade pode ser facilmente estendida a aplicações entre hipersuperfícies. Diremos que uma aplicação contínua $f : V_1 \subset M_1 \to M_2$, de um aberto V_1 de uma hipersuperfície M_1 em uma hipersuperfície M_2, é *diferenciável* em $p \in V_1$ se, dadas parametrizações $\varphi : U_1 \to M_1$, e $\psi : U_2 \to M_2$, com $p \in \varphi(U_1)$ e $f(\varphi(U_1)) \subset \psi(U_2)$, a aplicação $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_1 \to U_2$ é diferenciável em $q = \varphi^{-1}(p)$. Como acima, segue que esta definição não depende das parametrizações escolhidas.

Exemplo 1.12.

Se $\varphi : U \to M$ é uma parametrização, então $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{m-1}$ é diferenciável. Com efeito, para qualquer $p \in \varphi(U)$ e qualquer parametrização $\psi : V \to M$ em p, temos que $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$, sendo que $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$, é diferenciável. Isso mostra que U e $\varphi(U)$ são difeomorfos, isto é, toda hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$ é localmente difeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^{m-1}$.

Observação 1.13.

O conceito de hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$ pode ser ampliado de modo a incluir as denominadas *hipersuperfícies com bordo*. Para isto, basta admitir que as parametrizações sejam definidas não apenas em subconjuntos abertos no espaço $\mathbb{R}^{m-1}$, mas possam também ter abertos em semi-espaços como domínios.

Vejamos alguns detalhes em [24]. Um semi-espaço $H \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto do tipo $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \alpha(\mathbf{x}) \leq 0\}$, sendo $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo. O bordo do semi-espaço H é o conjunto $\partial H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \alpha(\mathbf{x}) = 0\}$. Deste modo um semi-espaço H é uma reunião disjunta $H = \text{int}(H) \cup \partial H$ do seu interior em $\mathbb{R}^m$ com o seu bordo. Os subconjuntos $B \subset H$, abertos em H são de dois tipos: 1.º) $B_1 \subset \text{int}(H)$; neste caso, B_1 também é aberto em $\mathbb{R}^m$. 2.º) $B_2 \cap \partial H \neq \emptyset$, então B_2 não é aberto em $\mathbb{R}^m$, pois nenhuma bola com centro num ponto $\mathbf{x} \in \partial H$ pode estar contida em H.

Definição 1.14. *Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ chama-se uma* hipersuperfície com bordo *quando cada ponto $p \in M$ pertence a um aberto $V \subset M$ que é imagem de um homeomorfismo $\varphi : U \to V$ que é também uma imersão de classe C^∞ definida num aberto U de algum semi-espaço de $\mathbb{R}^{m-1}$.*

Observamos que cada uma de tais aplicações φ também é denominada uma *parametrização* de M e que os conceitos apresentados para hipersuperfícies podem ser estendidos para hipersuperfícies com bordo. Além disso, se M é uma hipersuperfície com bordo, então o *bordo* de M

é o conjunto ∂M formado pelos pontos $p \in M$ tais que, para toda parametrização $\varphi : U \to V$ de um aberto $V \subset M$, com $p = \varphi(q)$, tem-se necessariamente $q \in \partial U$. Para maiores detalhes indicamos [24].

1.2 A conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$

Recordemos agora algumas noções básicas do cálculo diferencial em $\mathbb{R}^m$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $h : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\mathbf{x} \in \Omega$ é um ponto e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor, então a derivada de h na direção de $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é definida por

$$\mathbf{v}(h)(\mathbf{x}) = dh_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} h(c(t))|_{t=0},$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ uma curva diferenciável tal que $c(0) = \mathbf{x}$ e $c'(0) = \mathbf{v}$.

Um *campo de vetores* em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação $Z : \Omega \to \mathbb{R}^m$, definida em algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. No que segue, consideraremos apenas campos locais de vetores diferenciáveis, isto é, aplicações $Z : \Omega \to \mathbb{R}^m$ que são diferenciáveis (de classe C^∞). A coleção de todos os campos diferenciáveis no aberto Ω será denotado por $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Podemos derivar uma função diferenciável $h : \Omega \to \mathbb{R}$ em relação a um campo $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e obter um novo campo de vetores, que será denotado por $Z(h) \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e definido por

$$Z(h)(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x})(h) = \frac{d}{dt} h(c(t))|_{t=0},$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ uma curva diferenciável tal que $c(0) = \mathbf{x}$ e $c'(0) = Z(\mathbf{x})$.

Vejamos agora a noção de derivada de um campo de vetores em relação a outro campo de vetores. Sejam $Z, W \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Utilizando as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^m$ podemos escrever $W(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), \ldots, w_m(\mathbf{x}))$ e $Z(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), \ldots, z_m(\mathbf{x}))$ para $\mathbf{x} \in \Omega$, sendo $w_i, z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, m$, as funções coordenadas dos campos de vetores W e Z, respectivamente. Então, a derivada (usual) do campo W em relação ao campo Z em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é dada por

$$dW_{\mathbf{x}}(Z(\mathbf{x})) = (Z(w_1)(\mathbf{x}), \ldots, Z(w_m)(\mathbf{x})) = \frac{d}{dt} W(c(t))|_{t=0},$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega$ uma curva diferenciável tal que $c(0) = \mathbf{x}$ e $c'(0) = Z(\mathbf{x})$.

Uma operação natural entre campos de vetores é o denominado *colchete de Lie*, definido do seguinte modo: dados $Z, W \in \mathfrak{X}(\Omega)$ o colchete de Lie dos campos Z e W é o campo de vetores $[Z, W] \in \mathfrak{X}(\Omega)$ dado por

$$[Z, W](\mathbf{x}) = dW_{\mathbf{x}}(Z(\mathbf{x})) - dZ_{\mathbf{x}}(W(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

A derivada usual de campos de vetores em $\mathbb{R}^m$ será doravante denominada a *conexão Riemanniana* do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ (veja [10]). Com isto queremos dizer que a cada par de campos de vetores $Z, W \in \mathfrak{X}(\Omega)$ associamos o campo $\bar{\nabla}_Z W \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definido por

$$\bar{\nabla}_Z W(\mathbf{x}) = (Z(w_1)(\mathbf{x}), \ldots, Z(w_m)(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.3}$$

É usual denominar o campo $\bar{\nabla}_Z W$ a *derivada covariante* do campo W em relação ao campo Z.

As propriedades usuais do cálculo diferencial em abertos do $\mathbb{R}^m$ podem ser descritas em termos da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$ do seguinte modo:

(i) $\bar{\nabla}_{Z_1 + hZ_2} W = \bar{\nabla}_{Z_1} W + h\bar{\nabla}_{Z_2} W$;

(ii) $\bar{\nabla}_Z (W_1 + W_2) = \bar{\nabla}_Z W_1 + \bar{\nabla}_Z W_2$;

(iii) $\bar{\nabla}_Z (hW) = Z(h)W + h\bar{\nabla}_Z W$,

(iv) $Z(\langle W_1, W_2 \rangle) = \langle \bar{\nabla}_Z W_1, W_2 \rangle + \langle W_1, \bar{\nabla}_Z W_2 \rangle$,

para cada $Z, Z_1, Z_2, W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $h \in C^\infty(\Omega)$.

Evidentemente, o colchete de Lie $[Z, W]$ pode ser expresso em termos da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$ pela fórmula

$$[Z, W] = \bar{\nabla}_Z W - \bar{\nabla}_W Z.$$

Por último, recordemos que para uma dada função $h \in C^\infty(\Omega)$ o gradiente de h no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é o vetor $\bar{\nabla} h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ definido por

$$\langle \bar{\nabla} h(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}(h)(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Evidentemente, a expressão do gradiente na base canônica $\{e_i\}_{i=1}^m$ do $\mathbb{R}^m$ é

$$\bar{\nabla} h(\mathbf{x}) = \sum_i \langle \bar{\nabla} h(\mathbf{x}), e_i \rangle e_i = \sum_i e_i(h)(\mathbf{x}) e_i = \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) e_i.$$

1.3 O espaço tangente

Seja p um ponto de uma hipersuperfície M do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Dizemos que um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ é *tangente* a M em p se pudermos encontrar uma curva diferenciável $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, (para algum $\epsilon > 0$) tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = \mathbf{v}$. A coleção de todos os vetores tangentes a M em p será representado por $T_p M$.

Proposição 1.15. *Sejam M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$, $p \in M$, e $\varphi : U \to M$ uma parametrização de M com $p = \varphi(q)$ para $q \in U$. Então,*

$$T_p M = d\varphi_q(\mathbb{R}^{m-1}).$$

Demonstração. Seja $\mathbf{v}$ um vetor tangente a M em $p = \varphi(q)$. Por definição, existe uma curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = \mathbf{v}$. Tomando ϵ suficientemente pequeno, a continuidade de c nos permite supor que seu traço está contido em $\varphi(U)$. Definimos então uma curva em U por

$\beta = \varphi^{-1} \circ c$ (veja exemplo 1.12). Temos $\beta(0) = q$ e $c = \varphi \circ \beta$. Então, $v = c'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) = d\varphi_q(\beta'(0))$, e portanto $\mathbf{v}$ está na imagem de $d\varphi_q$.

Reciprocamente, seja $\mathbf{v} = d\varphi_q(\mathbf{w})$ para algum $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m-1}$. Claramente $\mathbf{w}$ é o vetor velocidade da curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$, para ϵ pequeno, definida por $\gamma(t) = q + t\mathbf{w}$, para $|t| < \epsilon$. A curva γ verifica $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = \mathbf{w}$. Logo, se definirmos $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ pela composição $c = \varphi \circ \gamma$, teremos que $c(0) = p$ e $c'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = d\varphi_q(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ é um vetor tangente a M em p. □

A primeira conseqüência dessa proposição é que o conjunto T_pM formado por todos os vetores tangentes à hipersuperfície M no ponto p é um subespaço linear de dimensão $m-1$ de $\mathbb{R}^m$, denominado o *espaço tangente* a M no ponto p. Além disso, segue também que o subespaço $d\varphi_q(\mathbb{R}^{m-1})$ não depende da parametrização φ e que os vetores tangentes

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(q), \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

constituem uma base de T_pM, a qual é denominada *base associada* à parametrização φ.

Veremos agora que podemos introduzir em uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$ noções análogas às do cálculo diferencial do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função diferenciável sobre M e $\mathbf{v} \in T_pM$ um vetor tangente em um ponto $p \in M$. A derivada de f na direção de $\mathbf{v}$ é definida por

$$\mathbf{v}(f) = df_p(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0},$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva diferenciável arbitrária tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = \mathbf{v}$. Evidentemente, a derivação assim definida tem as seguintes propriedades:

(a) $(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{w})(f) = \lambda\mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)$;

(b) $\mathbf{v}(f + g) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(g)$;

(c) $\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g + f\mathbf{v}(g)$,

para cada $f, g \in C^\infty(M)$, $p \in M$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ e λ um número real arbitrário.

Um *campo de vetores tangentes* a M é uma aplicação $X : M \to \mathbb{R}^m$ que associa a cada $p \in M$ um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Um tal campo é dito ser diferenciável se a aplicação $X : M \to \mathbb{R}^m$ for diferenciável de acordo com a definição (1.11). Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ a coleção dos campos de vetores tangentes diferenciáveis em M.

Dados um campo de vetores tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função diferenciável $f \in C^\infty(M)$, define-se a derivada de f com respeito a X como a função diferenciável $X(f) \in C^\infty(M)$ dada por

$$X(f)(p) = X(p)(f), \qquad p \in M.$$

Evidentemente, a partir das propriedades da derivação de uma função $f \in C^\infty(M)$ em relação a um vetor $\mathbf{v} \in T_pM$ podemos deduzir propriedades análogas para a derivada de f com relação a um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $(gX+Y)(f) = gX(f) + Y(f)$;

(b) $X(f+g) = X(f) + X(g)$;

(c) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

1.4 Geometria intrínseca e conexão Riemanniana de uma hipersuperfície

O estudo das propriedades geométricas de M se inicia com a introdução de uma maneira de medir o comprimento dos vetores tangentes a M em cada um de seus pontos. Isto é feito do seguinte modo: consideramos a restrição do produto interno canônico de $\mathbb{R}^m$ a cada plano tangente a hipersuperfície M, induzindo de modo natural, um produto interno em cada plano tangente. Mais precisamente, em cada ponto $p \in M$, a aplicação $\mathcal{I}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM,$$

é bilinear, simétrica e positiva definida em T_pM. Essa forma bilinear é denominada a *primeira forma fundamental* da hipersuperfície M, e determina sua geometria intrínseca. Note que também é usual denominar a forma quadrática $\mathcal{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ de primeira forma fundamental de M em p.

A expressão da primeira forma fundamental em uma vizinhança coordenada $V \cap M$ definida pela parametrização $\varphi : U \to V \cap M$ é especialmente interessante para cálculos locais. Recordemos que os vetores tangentes $\varphi_i(q)$, $i = 1, \ldots, m-1$, formam, em cada ponto $q \in U$, uma base do plano tangente $T_{\varphi(q)}M$, e as funções diferenciáveis

$$g_{ij}(q) = \mathcal{I}_p(\varphi_i(q), \varphi_j(q)) = \langle \varphi_i(q), \varphi_j(q) \rangle \qquad 1 \leq i, j \leq m-1,$$

são denominadas os *coeficientes* da primeira forma fundamental na parametrização φ. Definindo por $(g^{ij}(q))$ a matriz inversa de $(g_{ij}(q))$ em cada ponto $q \in U$, podemos escrever a expressão de cada vetor tangente $\mathbf{v} \in T_{\varphi(q)}M$ na seguinte forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i,j} g^{ij}(q) \langle \mathbf{v}, \varphi_i(q) \rangle \varphi_j(q),$$

e conseqüentemente, a primeira forma fundamental pode ser escrita na forma

$$\mathcal{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} g^{ij}(q) \langle \mathbf{v}, \varphi_i(q) \rangle \langle \mathbf{w}, \varphi_j(q) \rangle$$

Para uma dada hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$, o *espaço vetorial normal* a M no ponto $p \in M$ é o conjunto $T_pM^\perp$ dos vetores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tais que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in T_pM$, ou seja, é o complemento ortogonal do espaço vetorial tangente a M no ponto p. Evidentemente, $T_pM^\perp$ tem dimensão 1. Os elementos $\mathbf{w} \in T_pM^\perp$ são chamados *vetores normais* a M no ponto p. Além disso, em cada ponto $p \in M$ podemos escrever a soma direta

$$\mathbb{R}^m = T_pM \oplus T_pM^\perp,$$

de modo que todo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito de modo único na forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top + \mathbf{v}^\perp$, sendo $\mathbf{v}^\top \in T_pM$ a *componente tangente* de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}^\perp \in T_pM^\perp$ a *componente normal* de $\mathbf{v}$.

Por um *campo local de vetores tangentes* a M entendemos um campo de vetores tangentes à hipersuperfície $V \cap M$ para algum aberto $V \subset \mathbb{R}^m$.

Lema 1.16. *Todo campo local de vetores tangentes a uma hipersuperfície M pode ser estendido a um campo local de vetores em $\mathbb{R}^m$. Em outras palavras, se X é um campo local de vetores tangentes a M definido em $V \cap M$, então existem um aberto $W \subset V$ de $\mathbb{R}^m$ e um campo de vetores $\bar{X} \in \mathfrak{X}(W)$ tais que $\bar{X} = X$ em $W \cap M$.*

Demonstração. Considere $p_0 \in V \cap M$. Sem perda de generalidade podemos supor que $V \cap M = \varphi(U)$ é uma vizinhança parametrizada de p_0. Da forma local das imersões [24], sabemos que existem um aberto $U_0 \subset U$ de $\mathbb{R}^{m-1}$ e um difeomorfismo $h : W \to U_0 \times (-\delta, \delta)$, sendo W um aberto de $\mathbb{R}^m$ que contém p_0 e $\delta > 0$, tais que $h(\varphi(q)) = (q, 0)$ para todo $q \in U_0$. Evidentemente, podemos admitir que $W \subset V$, e que $\varphi(U_0) = W \cap M$. Sendo $X(p) \in T_pM$ para cada $p \in W \cap M$, então $X(p) = (\varphi \circ c)'(0)$ para alguma curva diferenciável $c_p : (-\epsilon, \epsilon) \to U_0$ tal que $\varphi(c_p(0)) = p$. Portanto,

$$dh_p(X(p)) = \frac{d}{dt} h(\varphi(c_p(t)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(c_p(t), 0)|_{t=0} = (c_p'(0), 0).$$

Considere o campo de vetores $\bar{X} \in \mathfrak{X}(W)$ definido por

$$\bar{X}(\mathbf{x}) = (dh_{\mathbf{x}})^{-1}(c_p'(0), s), \qquad \mathbf{x} \in W$$

sendo $h(\mathbf{x}) = (q, s)$ e $p = \varphi(q)$. Note que se $\mathbf{x} = p \in W \cap M$ então $h(\mathbf{x}) = h(p) = h(\varphi(q)) = (q, 0)$, e logo, $\bar{X}(p) = (dh_p)^{-1}(c_p'(0), 0) = X(p)$, e terminamos a prova. □

Vamos agora definir a conexão Riemanniana de uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$, isto é, uma maneira de derivar campos locais de vetores tangentes a M que tenha propriedades análogas às da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$ listadas anteriormente. Considere X, Y campos de vetores tangentes a M definidos na vizinhança $V \cap M$, e sejam $\bar{X}, \bar{Y}$ extensões de X e Y, respectivamente, que admitiremos que estejam definidas no aberto $V \subset \mathbb{R}^m$. Temos que

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) = \frac{d}{dt} \bar{Y}(c(t))|_{t=0}$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ uma curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = \bar{X}(p)$. Agora, sendo $\bar{X}(p) = X(p) \in T_pM$ podemos tomar uma tal curva c com imagem em $V \cap M$, isto é $c : (-\epsilon, \epsilon) \to$

$V \cap M$ com $c(0) = p$ e $c'(0) = X(p)$. Portanto $\bar{Y}(c(t)) = Y(c(t))$ para todo t, e logo,

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) = \frac{d}{dt} Y(c(t))|_{t=0}$$

Isto mostra que o vetor $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p)$ depende apenas do vetor $X(p)$ e do campo Y no aberto $V \cap M$ e não das extensões $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ consideradas. Deste modo podemos definir a derivada covariante em $\mathbb{R}^m$ de campos de vetores tangentes a M por

$$\bar{\nabla}_X Y(p) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}(p) \in \mathbb{R}^m, \qquad p \in V \cap M.$$

Assim, por exemplo, se $V \cap M$ é uma vizinhança parametrizada por $\varphi : U \to V \cap M$, teremos os campos de vetores φ_i definidos em $V \cap M$, para cada $i = 1, \ldots, m-1$, e portanto

$$\bar{\nabla}_{\varphi_i} \varphi_j(p) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(q) = \varphi_{ji}(q) = \varphi_{ij}(q).$$

Agora, definiremos a conexão Riemanniana de M como sendo a componente tangente da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$. Mais precisamente,

$$\nabla_X Y(p) = \left(\bar{\nabla}_X Y(p)\right)^{\top}, \qquad p \in V \cap M. \tag{1.4}$$

Deste modo construímos uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denominada a *conexão Riemanniana* de M, que tem propriedades análogas às da conexão Riemanniana $\bar{\nabla}$ de $\mathbb{R}^m$:

(i) $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Z + f \nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$,

(iv) $X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,

(v) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Além disso, se considerarmos uma parametrização $\varphi : U \to V \cap M$ com $\varphi(q) = p$ então

$$\nabla_{\varphi_i} \varphi_j(p) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(q) \varphi_k(q), \;\; \text{sendo} \;\; \Gamma_{ij}^k(q) = \sum_s g^{ks}(q) \langle \varphi_{ij}(q), \varphi_s(q) \rangle,$$

os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana de M na parametrização φ.

1.5 O operador forma

Vejamos agora uma maneira de estudar a *geometria extrínseca* de uma hipersuperfície M, isto é, de que modo a sua forma é influenciada pelo espaço ambiente $\mathbb{R}^m$.

Um *campo local de vetores normais* é uma aplicação $\eta : V \cap M \to \mathbb{R}^m$ definido em um aberto $V \cap M$ da hipersuperfície M tal que $\eta(p) \in T_pM^\perp$ para todo $p \in V \cap M$. Se uma tal aplicação for contínua (resp. diferenciável) diremos que o campo normal é contínuo (resp. diferenciável). Note que se $V \cap M$ é uma vizinhança parametrizada de M descrita pela parametrização $\varphi : U \to V \cap M$, então um campo local de vetores normais *unitários* pode ser definido em $V \cap M$ por

$$\eta(\varphi(q)) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}(q)}}\varphi_1(q) \times \ldots \times \varphi_{m-1}(q), \; q \in U$$

sendo $\mathrm{g}(q) = \det(g_{ij}(q))$.

Seja η um campo local de vetores normais unitários a M definidos em $V \cap M$. Considere X, Y campos de vetores tangentes a M definidos em $V \cap M$ e respectivas extensões locais $\bar{X}, \bar{Y}$ definidas em $V \subset \mathbb{R}^m$. Então

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(p) - \nabla_X Y(p) \in T_pM^\perp$$

em cada ponto $p \in V \cap M$. Portanto, a expressão acima é um múltiplo de $\eta(p)$, pois a dimensão do espaço normal é 1. Deste modo podemos escrever

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(p) = \nabla_X Y(p) + \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(p), \eta(p)\rangle \eta(p), \quad p \in V \cap M. \tag{1.5}$$

De outro lado, considere $\bar{\eta}$ um campo unitário que seja uma extensão do campo η ao aberto V de $\mathbb{R}^m$ (diminuindo V se for necessário). Note que uma tal extensão pode ser obtida de modo similar ao Lema 1.16. Então utilizando as propriedades da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$ podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(p), \eta(p)\rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}(p), \bar{\eta}(p)\rangle \\
&= \bar{X}(p)(\langle \bar{Y}, \bar{\eta}\rangle) - \langle \bar{Y}(p), \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p)\rangle \\
&= X(p)(\langle \bar{Y}, \bar{\eta}\rangle) - \langle Y(p), \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p)\rangle \\
&= X(p)(\langle Y, \eta\rangle) - \langle Y(p), \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p)\rangle \\
&= -\langle Y(p), \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p)\rangle
\end{aligned}$$

Além disso, do fato de $\bar{\eta}$ ser um campo unitário em V segue que

$$0 = \bar{X}(\langle \bar{\eta}, \bar{\eta}\rangle) = 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}, \bar{\eta}\rangle,$$

e portanto, $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p) \in T_pM$ para todo $p \in V \cap M$. Ademais, argumentando como antes, concluímos que esse vetor tangente depende apenas de $X(p)$ e do campo normal unitário η em $V \cap M$, o que nos permite definir

$$\bar{\nabla}_X \eta(p) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\eta}(p) \in T_pM.$$

Deste modo, em cada $p \in V \cap M$ podemos definir um operador linear $A_p : T_pM \to T_pM$ por

$$A_p(\mathbf{v}) = -\bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\eta(p), \qquad \mathbf{v} \in T_pM.$$

Este é o denominado *operador forma* da hipersuperfície M em p associado ao campo normal unitário local η. O operador forma também é conhecido por *endomorfismo de Weingarten*.

Lema 1.17. *O operador forma $A_p : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunto com relação a primeira forma fundamental.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \to V \cap M$ uma parametrização com $\varphi(q) = p$. É suficiente mostrar que

$$\langle A_p(\varphi_i(q)), \varphi_j(q)\rangle = \langle \varphi_i(q), A_p(\varphi_j(q))\rangle$$

para todo $1 \leq i, j \leq m-1$. Observe que

$$\begin{aligned}
\langle A_p(\varphi_i(q)), \varphi_j(q)\rangle &= -\langle \bar{\nabla}_{\varphi_i(q)}\eta(p), \varphi_j(q)\rangle \\
&= -\varphi_i(q)(\langle \eta(p), \varphi_j(q)\rangle) + \langle \eta(p), \bar{\nabla}_{\varphi_i(q)}\varphi_j(q)\rangle \\
&= \langle \eta(p), \bar{\nabla}_{\varphi_i(q)}\varphi_j(q)\rangle \\
&= \langle \eta(p), \bar{\nabla}_{\varphi_j(q)}\varphi_i(q)\rangle
\end{aligned}$$

pois $\bar{\nabla}_{\varphi_i(q)}\varphi_j(q) = \varphi_{ij}(q) = \varphi_{ji}(q) = \bar{\nabla}_{\varphi_j(q)}\varphi_i(q)$. Agora é simples concluir o resultado. □

Observe que o operador forma nos permite reescrever (1.5) do seguinte modo: se X, Y são campos de vetores tangentes a M então

$$\bar{\nabla}_X Y(p) = \nabla_X Y(p) + \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle \eta(p). \tag{1.6}$$

Esta expressão é denominada a *fórmula de Gauss*.

O fato do operador forma ser auto-adjunto é de suma importância para o estudo das propriedades geométricas da hipersuperfície M. Decorre do teorema espectral que $A_p : T_pM \to T_pM$ pode ser diagonalizada, ou seja, existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$ de T_pM formada por autovetores de A_p com autovalores reais $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_{m-1}(p)$, isto é, $A_p(e_i) = \kappa_i(p)e_i$ para cada $i = 1, \ldots, m-1$. Os autovetores e_i e os números $\kappa_i(p)$ são denominados, respectivamente, as *direções principais* e as *curvaturas principais* da hipersuperfície M no ponto p associadas ao campo normal unitário local η.

Associado ao operador forma $A_p : T_pM \to T_pM$ existem $m-1$ invariantes algébricos dados por

$$S_r(p) = \sigma_r(\kappa_1(p), \ldots, \kappa_{m-1}(p)), \quad 1 \leq r \leq m-1,$$

sendo $\sigma_r : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ a função simétrica elementar definida por

$$\sigma_r(x_1, \ldots, x_{m-1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m-1} x_{i_1} \ldots x_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq m-1. \tag{1.7}$$

A *r-curvatura média* da hipersuperfície M no ponto p é definida por $\binom{n}{r}H_r(p) = S_r(p)$. Por exemplo: $H_1(p) = H(p) = \frac{1}{m-1}(\kappa_1(p) + \ldots + \kappa_{m-1}(p))$ é a curvatura média e $H_{m-1}(p) = \kappa_1(p)\cdots\kappa_{m-1}(p)$ é a curvatura de Gauss-Kronecker da hipersuperfície M no ponto p, respectivamente.

Definição 1.18. *Diremos que uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$ é* orientável *se admite um campo contínuo de vetores normais unitários η globalmente definido.*

No caso em que M é orientável podemos escolher um campo unitário normal $\mathbf{N}$ globalmente definido e então, evidentemente, todos os conceitos acima podem ser definidos em todos os pontos de M. Em particular, o operador forma pode ser definido, de modo natural, como um *campo de tensores* em $\mathfrak{X}(M)$, isto é como uma aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Além disso, o campo $\mathbf{N}$ pode ser visto como uma aplicação $\mathbf{N} : M \to \mathbb{S}^{m-1}$ denominada a *aplicação de Gauss* da hipersuperfície M, e, nesse caso, diremos que M está orientada por essa aplicação de Gauss. A aplicação de Gauss está intimamente relacionada ao operador forma. De fato

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) = -A_p(\mathbf{v})$$

para todo $p \in M$ e todo $\mathbf{v} \in T_pM$.

Observamos que é comum definir a *segunda forma fundamental* da hipersuperfície M no ponto p como sendo a forma bilinear simétrica $\mathcal{II}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ associada ao operador forma dada por

$$\mathcal{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM.$$

Agora, note que se $\varphi : U \to V \cap M$ é uma parametrização de M em torno de $p \in V \cap M$, então $\mathcal{B} = \{\varphi_i(q); i = 1, \ldots, m-1\}$ é uma base de T_pM, sendo $p = \varphi(q)$. Denotemos por $[A_p]$, $[\mathcal{I}_p]$, e por $[\mathcal{II}_p]$ as matrizes do operador forma A_p, da primeira forma fundamental $\mathcal{I}_p$ e da segunda forma fundamental $\mathcal{II}_p$ em relação à base $\mathcal{B}$, respectivamente. O lema a seguir exibe uma relação fundamental entre estas matrizes.

Lema 1.19.

$$[A_p] = [\mathcal{I}_p]^{-1}[\mathcal{II}_p] \tag{1.8}$$

Demonstração. Por conveniência omitiremos o ponto p. Temos que $[\mathcal{I}] = [g_{ij}]$, $[\mathcal{I}]^{-1} = \left[g^{ij}\right]$ e, se escrevermos $[A]_{ij} = a_{ij}$ obteremos $A\varphi_i = \sum_j a_{ij}\varphi_j$, o que implica $\langle A\varphi_i, \varphi_k\rangle = \sum_j a_{ij}g_{jk}$. Multiplicando a igualdade acima por g^{lk} e somando em k obtemos

$$\sum_k g^{lk}\langle A\varphi_i, \varphi_k\rangle = \sum_{k,j} a_{ij}g_{jk}g^{lk} = \sum_j a_{ij}\delta_{lj} = a_{il} = a_{li},$$

isto é,

$$a_{li} = \sum_k [\mathcal{I}]^{-1}_{lk}[\mathcal{II}]_{ik} = ([\mathcal{I}]^{-1}[\mathcal{II}])_{li},$$

o que prova nossa afirmação. $\square$

1.6 A geometria local de uma hipersuperfície

Já havíamos observado que o gráfico de uma função diferenciável em um aberto de $\mathbb{R}^{m-1}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^m$. Veremos agora que, numa vizinhança de qualquer um de seus pontos, a hipersuperfície também pode ser vista como gráfico sobre o espaço tangente nesse ponto.

Proposição 1.20. *Sejam p_0 um ponto de uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^m$ e P_0 o espaço tangente (afim) nesse ponto, isto é, o hiperplano de $\mathbb{R}^m$ que passa por p_0 e é paralelo ao espaço tangente $T_{p_0}M$. Então, existe uma vizinhança V de p_0 em M que é o gráfico de uma função diferenciável $h : \Omega \to \mathbb{R}$ definida na vizinhança Ω de p_0 no hiperplano afim P_0. Além disso, h se anula em p_0 e sua diferencial $dh_{p_0} : T_{p_0}P_0 \to \mathbb{R}$ é identicamente nula, isto é, $h(p_0) = 0$ e $dh_{p_0} \equiv 0$.*

Demonstração. A prova consiste em uma adaptação dos argumentos em [27]. Tome um vetor unitário $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ perpendicular ao espaço tangente $T_{p_0}M$. Represente por $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ a projeção ortogonal sobre P_0, dada por

$$f(p) = p - \langle p - p_0, \mathbf{a}\rangle\mathbf{a}, \qquad p \in M.$$

Então $f(p_0) = p_0$ e $f(p) - p_0$ é perpendicular a $\mathbf{a}$ para todo $p \in M$, isto é $f(M) \subset P_0$ e $f : M \to P_0$ é uma aplicação diferenciável entre as hipersuperfícies M e P_0. Por um cálculo direto obtemos que

$$df_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle\mathbf{a}$$

para todo $\mathbf{v} \in T_pM$. Portanto $df_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{p_0}P_0 = T_{p_0}M$ é a aplicação identidade. Logo, do teorema da função inversa obtemos uma vizinhança V de p_0 em M e uma outra, Ω, de $f(p_0) = p_0$ em P_0 tal que $f(V) = \Omega$ e $f_{|V} : V \to \Omega$ é um difeomorfismo. Definindo $h : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$h(q) = \langle f^{-1}(q) - p_0, \mathbf{a}\rangle, \qquad q \in \Omega,$$

vê-se imediatamente que h tem as propriedades desejadas. □

Considere $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sendo $n = m - 1$, uma hipersuperfície e p um ponto de M. Fixe um campo normal unitário $\mathbf{N}$ a M em uma vizinhança de p. O Lema anterior nos diz que, ao estudarmos as propriedades geométricas da hipersuperfície M na vizinhança do ponto $p \in M$, podemos considerar um movimento rígido de $\mathbb{R}^{n+1}$ que leva o ponto p na origem $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, o plano tangente T_pM no hiperplano $\mathbb{R}^n = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}); x_{n+1} = 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, e o vetor normal $\mathbf{N}(p)$ no vetor $(\mathbf{0}, 1)$, e escrever M em uma vizinhança de p como sendo o gráfico de uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u(\mathbf{0}) = 0$ e $\bar{\nabla}u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Neste contexto, a aplicação $\varphi : \Omega \to M$ definida por $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, para $\mathbf{x} \in \Omega$, é uma parametrização de $\mathrm{graf}(u)$, o gráfico de u, e para cada $z = (\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \in \mathrm{graf}(u)$, sendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, temos que $\mathcal{B} = \{\varphi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$ é uma base de T_zM, sendo $\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = (e_i, u_i(\mathbf{x}))$, e $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Deste modo, o campo normal unitário $\mathbf{N}$ à vizinhança $\mathrm{graf}(u)$

tem a expressão:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{(-\bar{\nabla}u(\mathbf{x}), 1)}{W(\mathbf{x})}, \text{ sendo } W(\mathbf{x}) = \sqrt{1 + |\bar{\nabla}u(\mathbf{x})|^2}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega.$$

A geometria local de M em torno do ponto p pode ser estudada a partir da expressão dos coeficientes da matriz do operador forma A do gráfico de u na base $\mathcal{B}$. Para isto, observamos que as matrizes da primeira e da segunda forma fundamental da hipersuperfície M em relação à base $\mathcal{B}$ são, respectivamente,

$$[\mathcal{I}]_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} + u_i u_j \qquad \text{e} \qquad [\mathcal{II}]_{ij} = \langle A(\varphi_i), \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{ij}, \mathbf{N} \rangle = \frac{u_{ij}}{W}.$$

Por outro lado, do Lema 1.19 temos que

$$[A] = [\mathcal{I}]^{-1} [\mathcal{II}],$$

logo, para calcular $[A]_{ij}$ é suficiente obter uma expressão para a inversa $[\mathcal{I}]_{ij}^{-1}$. Para isso, faremos uso do seguinte resultado de álgebra linear, que é, de fato, interessante por si só.

Lema 1.21. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear auto-adjunto, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os seus autovalores e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ uma base ortonormal de autovetores de T associados a esses autovalores, respectivamente. Seja λ um número real tal que $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então, o operador linear $T_\lambda = T - \lambda I$, sendo I a identidade em $\mathbb{R}^n$, é invertível e sua inversa é dada por*

$$T_\lambda^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle}{\lambda_i - \lambda} \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Tome $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Temos que $\mathbf{x} = \sum_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$. Daí,

$$T_\lambda \mathbf{x} = (T - \lambda I)\mathbf{x} = \sum_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle (\lambda_i - \lambda) \mathbf{v}_i.$$

Em particular, se $\mathbf{x} = \mathbf{v}_j$, $j = 1, \ldots, n$ teremos $T_\lambda \mathbf{v}_j = (\lambda_j - \lambda)\mathbf{v}_j$. Logo $\mathbf{v}_j$ é um autovetor de T_λ associado ao autovalor $\lambda_j - \lambda \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, e portanto, T_λ é invertível.

Por outro lado, se $T_\lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}$, com $\mathbf{y} = \sum_i \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$, teremos $\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle (\lambda_i - \lambda)$ e logo, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle / (\lambda_i - \lambda)$. Assim,

$$T_\lambda^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = \sum_i \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \rangle}{\lambda_i - \lambda} \mathbf{v}_i,$$

e portanto segue o resultado. □

Agora estamos aptos a apresentar uma expressão para $[\mathcal{I}]_{ij}^{-1}$.

Lema 1.22.

$$[\mathcal{I}]_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2}.$$

Demonstração. Com efeito, considere $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica $\{e_i\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$[B] = [u_i u_j]\,. \tag{1.9}$$

Então $Be_i = \sum_j u_i u_j e_j$, e logo, para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ arbitrário com $\mathbf{v} = \sum_j v_j e_j$, obtemos

$$B\mathbf{v} = \sum_j v_j B e_j = \sum_{i,j} v_j u_i u_j e_i = (\sum_j v_j u_j)\bar{\nabla} u = \left\langle \bar{\nabla} u, \mathbf{v} \right\rangle \bar{\nabla} u.$$

Em particular, $B(\bar{\nabla} u) = |\bar{\nabla} u|^2 \bar{\nabla} u$, e se $\mathbf{v} \in \mathcal{U} = \left\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mathbf{w}, \bar{\nabla} u \right\rangle = 0\right\}$, temos que $B\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$. Logo, os autovalores de B são $|\bar{\nabla} u|^2$ e 0, e, além disso, $\bar{\nabla} u$ é um autovetor de B associado ao autovalor $|\bar{\nabla} u|^2$ e cada vetor não-nulo em $\mathcal{U}$ é um autovetor de B associado ao autovalor 0.

De outro lado, tomando no Lema anterior $\lambda = -1$ e $T = B$, obtemos $[\mathcal{I}] = T_{-1}$, $\lambda_1 = |\bar{\nabla} u|^2$ e $\lambda_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$, $\mathbf{v}_1 = \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u|$, $\{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathcal{U}$ e, para cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} W^2 \left[\mathcal{I}\right]^{-1}(\mathbf{y}) &= \frac{W^2}{\lambda_1 - \lambda} \left\langle \mathbf{y}, \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u| \right\rangle \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u| + \sum_{i=2}^{n} \frac{W^2}{\lambda_i - \lambda} \left\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_i \right\rangle \mathbf{v}_i \\ &= \left\langle \mathbf{y}, \bar{\nabla} u \right\rangle \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u|^2 + W^2 \mathbf{y} - W^2 \left\langle \mathbf{y}, \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u| \right\rangle \bar{\nabla} u / |\bar{\nabla} u| \\ &= W^2 \mathbf{y} - \left\langle \bar{\nabla} u, \mathbf{y} \right\rangle \bar{\nabla} u \\ &= \left(W^2 I - B\right) \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[\mathcal{I}]_{ij}^{-1} = \frac{1}{W^2} \left(W^2 \delta_{ij} - u_i u_j\right) = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{W^2},$$

como afirmamos. $\square$

Finalmente, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.23. *As entradas $[A]_{ij}$ da matriz do operador forma A do gráfico de u na base $\mathcal{B}$ são dadas por*

$$[A]_{ij} = \frac{1}{W^3} \left(W^2 u_{ij} - u_i c_j\right), \tag{1.10}$$

sendo $c_j = \sum_k u_k u_{kj}$.

Demonstração. Temos que

$$[A]_{ij} = \sum_k [\mathcal{I}]_{ik}^{-1} [\mathcal{II}]_{kj} = \sum_k \frac{1}{W^2} \left(W^2 \delta_{ik} - u_i u_k\right) \frac{u_{kj}}{W} = \frac{1}{W^3} \left(W^2 u_{ij} - u_i c_j\right),$$

sendo $c_j = \sum_k u_k u_{kj}$. $\square$

1.7 As equações de Gauss e de Codazzi

É intuitivamente razoável esperar que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ tenha curvatura nula. Para tornar esta idéia mais precisa introduziremos a noção de *tensor curvatura* de $\mathbb{R}^m$, a qual também servirá de modelo para o conceito análogo que definiremos sobre uma hipersuperfície. Essa noção é uma das mais importantes em Geometria Riemanniana e para maiores detalhes indicamos [10].

O *tensor curvatura* de $\mathbb{R}^m$ (restrito ao aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$) é a correspondência $\bar{R}$ que associa a cada par de campos $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ a aplicação $\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}) : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega)$ definida por

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z} - \bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z}, \qquad \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\Omega). \tag{1.11}$$

Note que, de acordo com a definição da conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^m$, se escrevemos $\bar{Z} = (z_1, \ldots, z_m)$ então teremos $\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} = (\bar{Y}(z_1), \ldots, \bar{Y}(z_m))$, e portanto

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} = (\bar{X}(\bar{Y}(z_1)), \ldots, \bar{X}(\bar{Y}(z_m))),$$

e conseqüentemente

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = 0 \in \mathfrak{X}(\Omega), \tag{1.12}$$

para todos os campos $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Este fato está de acordo com a observação inicial. Além disso, podemos concluir também que a expressão que define $\bar{R}$ fornece alguma informação sobre a comutabilidade da derivada covariante de segunda ordem.

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sendo $n = m-1$, uma hipersuperfície do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, a qual, por simplicidade, admitiremos estar orientada pela aplicação de Gauss $\mathbf{N} : M \to \mathbb{S}^n$. Definiremos agora o *tensor curvatura* da hipersuperfície M, por analogia ao tensor curvatura de $\mathbb{R}^m$, como sendo a correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ a aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Veremos agora que, ao contrário do tensor curvatura de $\mathbb{R}^m$, o tensor curvatura de M não é, em geral, identicamente nulo, e sua expressão está intimamente relacionada com o operador forma. De fato, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então da fórmula de Gauss segue que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X\{\nabla_Y Z + \langle AY, Z\rangle\mathbf{N}\} \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \langle AX, \nabla_Y Z\rangle\mathbf{N} + X(\langle AY, Z\rangle)\mathbf{N} - \langle AY, Z\rangle AX,
\end{aligned}$$

donde, utilizando (1.11) podemos escrever $\bar{R}(X,Y)Z$ do seguinte modo

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{R}(X,Y)Z \\
&= R(X,Y)Z - \langle AY, Z\rangle AX + \langle AX, Z\rangle AY + \\
&+ \{\langle AX, \nabla_Y Z\rangle + X(\langle AY, Z\rangle) - \langle AY, \nabla_X Z\rangle - Y(\langle AX, Z\rangle) + \langle A([X,Y]), Z\rangle\}\mathbf{N},
\end{aligned}$$

e logo, tomando as partes tangente e normal da expressão acima obtemos duas novas equações.

A parte tangente é denominada a *Equação de Gauss*:

$$R(X,Y)Z = \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY, \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.13}$$

e a parte normal é a *Equação de Codazzi*:

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X,Y]), \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Definiremos agora o tensor curvatura de Ricci da hipersuperfície M. Para cada par de campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o *tensor curvatura de Ricci* $\mathrm{Ric}(X,Y)$ de M no ponto p é definido por

$$\mathrm{Ric}(X,Y)(p) = \mathrm{tr}(T_pM \ni Z(p) \longmapsto (R(Z(p), X(p))Y(p)) \in T_pM.$$

Em outras palavras, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM então

$$\mathrm{Ric}(X,Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, X(p))Y(p), e_i\rangle.$$

O tensor curvatura de Ricci nos permite definir duas novas noções de curvatura para a hipersuperfície M. Primeiro, tomamos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n$ um vetor unitário em T_pM e consideramos uma base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ do subespaço de T_pM ortogonal a $\mathbf{v}$ e definimos

$$\mathrm{Ric}_p(\mathbf{v}) = \mathrm{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v})(p), \quad \text{e} \quad S(p) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(\mathbf{v}_j).$$

Estas expressões são denominadas a *curvatura de Ricci* na direção de $\mathbf{v}$ e a *curvatura escalar* de M em p, respectivamente. É fácil ver que estas curvaturas não dependem das bases consideradas.

A seguir mostraremos que o tensor curvatura de Ricci dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e a curvatura escalar S de M estão relacionadas com o operador forma por meio das seguintes igualdades:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = S_1\langle AX, Y\rangle - \langle AX, AY\rangle \tag{1.14}$$

$$S = S_1^2 - |A|^2. \tag{1.15}$$

De fato, fixe um ponto $p \in M$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Da equação de Gauss 1.13 e do fato do operador forma A_p ser auto-adjunto segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \{\langle A_pe_i, e_i\rangle\langle A_pX(p), Y(p)\rangle - \langle A_pX(p), e_i\rangle\langle A_pe_i, Y(p)\rangle\} \\
&= S_1(p)\langle A_pX(p), Y(p)\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\langle A_pX(p), e_i\rangle e_i, A_pY(p)\rangle \\
&= S_1(p)\langle A_pX(p), Y(p)\rangle - \langle A_pX(p), A_pY(p)\rangle,
\end{aligned}$$

o que prova a primeira igualdade. Quanto à segunda, temos

$$S(p) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric_p}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i)(p) = \sum_i \{S_1(p)\langle A_p e_i, e_i\rangle - \langle A_p e_i, A_p e_i\rangle\} = S_1(p)^2 - |A_p|^2,$$

o que prova a afirmação feita.

Esta última igualdade para a curvatura escalar nos dá uma relação interessante entre S e H_2. De fato, veja que

$$S = (S_1)^2 - |A|^2 \quad = \quad (\kappa_1 + \ldots + \kappa_n)^2 - (\kappa_1^2 + \ldots + \kappa_n^2) = n(n-1)H_2. \tag{1.16}$$

Logo, S e H_2 diferem por uma constante, donde segue que H_2 é intrinsecamente definida. Em geral, a equação de Gauss implica que se r é ímpar, H_r é extrínseca (e seu sinal depende da escolha da orientação de M), enquanto que se r é par, H_r é intrínseca.

1.8 Divergência e laplaciano em $\mathbb{R}^m$

Seja $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$ um campo de vetores no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ com

$$Z(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), \ldots, z_m(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \Omega.$$

A *divergência* (euclidiana) do campo Z em um ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ é simplesmente o traço da aplicação linear $(\bar{\nabla} Z)_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, definida por

$$(\bar{\nabla} Z)_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} Z,$$

isto é,

$$\mathrm{Div} Z(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}(\mathbf{v} \longmapsto \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} Z) = \sum_{i=1}^{m} \langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_i\rangle,$$

sendo $\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} Z = (\bar{\nabla}_Y Z)(\mathbf{x})$, para $Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ arbitrário tal que $Y(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ e $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Em particular, se tomarmos a base canônica de $\mathbb{R}^m$ obteremos

$$\bar{\nabla}_{e_i} Z = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial z_m}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right)$$

e recuperamos a expressão clássica

$$\mathrm{Div} Z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Temos que a divergência euclidiana verifica as seguintes propriedades:

(i) $\mathrm{Div}(Z + Z') = \mathrm{Div} Z + \mathrm{Div} Z'$;

(ii) $\mathrm{Div}(FZ) = \langle \bar{\nabla} F, Z\rangle + F \mathrm{Div} Z$, para quaisquer $Z, Z' \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $F \in C^\infty(\Omega)$, sendo $\bar{\nabla}F$ o gradiente euclidiano de F.

Em particular, se $F \in C^\infty(\Omega)$ e $Z = \bar{\nabla}F \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é seu gradiente (euclidiano), então a divergência do campo $\bar{\nabla}F$ é o *laplaciano* (euclidiano) $\bar{\Delta}F$ de F; isto é, para cada $x \in \Omega$,

$$\bar{\Delta}F(\mathbf{x}) = \mathrm{Div}(\bar{\nabla}F)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \langle \bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}F, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \bar{\nabla}^2 F_{\mathbf{x}}(e_i, e_i),$$

sendo $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ e $\bar{\nabla}^2 F_x$ o Hessiano (euclidiano) de F no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, que é definido por

$$\bar{\nabla}^2 F_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\bar{\nabla}F, \mathbf{w}\rangle, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$$

Em particular, se escrevermos os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ na base canônica de $\mathbb{R}^m$ como $\mathbf{v} = \sum_i v_i e_i$, $\mathbf{w} = \sum_j w_j e_j$ então

$$\bar{\nabla}^2 F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{m} v_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}(\mathbf{x}) w_j,$$

e logo se chega à fórmula clássica,

$$\bar{\Delta}F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}).$$

Ao longo do nosso trabalho utilizaremos o *teorema da divergência* para domínios regulares de $\mathbb{R}^{n+1}$, que enunciaremos a seguir.

Teorema 1.24. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um domínio regular limitado e consideremos $M = \partial\Omega$ a hipersuperfície compacta formada pelo bordo de Ω e orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$. Então para cada campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tem-se que*

$$\int_\Omega \mathrm{Div}Z(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_M \langle Z(p), \mathbf{N}(p)\rangle dp,$$

sendo $d\mathbf{x}$ o elemento de volume euclidiano de $\mathbb{R}^{n+1}$ e dp o elemento de área da hipersuperfície M.

Como uma primeira aplicação deste resultado, temos a seguinte fórmula para o volume de um domínio limitado por uma hipersuperfície.

Lema 1.25. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio regular compacto limitado por M com $M = \partial\Omega$. Então, para qualquer ponto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tem-se que*

$$(n+1)\mathrm{Vol}(\Omega) = -\int_M \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p)\rangle dp,$$

sendo $\mathbf{N}$ o campo normal unitário interior de M.

Demonstração. Consideremos o campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definido por $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{c}$, e cuja divergência é dada por $\mathrm{Div}Z(\mathbf{x}) = n+1$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Então, pelo Teorema 1.24,

$$(n+1)\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{Div}Z(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\int_M \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p)\rangle dp,$$

e isto encerra a prova. □

1.9 Divergência e laplaciano sobre uma hipersuperfície

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Veremos agora como definir o campo de vetores gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$. Para cada ponto $p \in M$, define-se o *gradiente* de f em p como sendo o vetor $\nabla f(p) \in T_pM$ determinado pela condição

$$\langle \nabla f(p), \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}(f), \qquad \mathbf{v} \in T_pM.$$

Rapidamente vemos que $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vetores tangentes caracterizado por

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. O gradiente tem as seguintes propriedades:

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

(iii) $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$;

(iv) $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in M$ se, e somente se, f é uma função constante em M,

sendo $f, g \in C^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Note também que a expressão do campo gradiente em uma parametrização φ de M é

$$\nabla f(p) = \sum_{ij} g^{ij}(q)(f \circ \varphi)_i(q)\varphi_j(q), \qquad p = \varphi(q).$$

O *hessiano* de $f \in C^\infty(M)$ é a aplicação $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ definida por

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle,$$

para quaisquer campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

É simples verificar que o hessiano $\nabla^2 f$ tem as seguintes propriedades

(i) $\nabla^2 f(X+Y, Z) = \nabla^2 f(X, Z) + \nabla^2 f(Y, Z)$;

(ii) $\nabla^2 f(gX, Y) = g\nabla^2 f(X, Y)$;

(iii) $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^{\infty}(M)$.

Dado $p \in M$, de (1.6), temos que

$$\nabla^2 f(X,Y)(p) = \langle (\nabla_X \nabla f)(p), Y(p) \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X \nabla f)(p), Y(p) \rangle.$$

Assim, denotando $\nabla^2 f(X,Y)(p)$ por $\nabla^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $(\bar{\nabla}_X \nabla f)(p)$ por $(\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \nabla f)$, sendo $\mathbf{v} = X(p)$ e $\mathbf{w} = Y(p)$, temos que

$$\nabla^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle (\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \nabla f), \mathbf{w} \rangle,$$

para cada $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $X(p) = \mathbf{v}$ e $Y(p) = \mathbf{w}$.

A seguir definiremos a divergência de campos de vetores tangentes a uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores tangentes sobre uma hipersuperfície M. Para cada ponto $p \in M$ se define a *divergência* de X no ponto p como o traço da aplicação linear $(\nabla X)_p : T_pM \to T_pM$, definida por

$$(\nabla X)_p(\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} X,$$

isto é, $\mathrm{div} X(p) = \mathrm{tr}(\mathbf{v} \longmapsto \nabla_{\mathbf{v}} X)$, sendo $\nabla_{\mathbf{v}} X = (\nabla_Y X)(p)$, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário tal que $Y(p) = \mathbf{v}$.

Em particular, $\mathrm{div}(X) \in C^{\infty}(M)$ define uma função diferenciável sobre M e para cada ponto $p \in M$, se tem

$$\mathrm{div}(X)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

sendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM. A divergência tem as seguintes propriedades

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}(X) + \mathrm{div}(Y)$;

(ii) $\mathrm{div}(fX) = X(f) + f\mathrm{div}(X) = \langle \nabla f, X \rangle + f\mathrm{div}(X)$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^{\infty}(M)$.

Em particular, quando $X = \nabla f$ é o gradiente de uma função diferenciável $f \in C^{\infty}(M)$, a divergência de ∇f é o *laplaciano* de f, e se representa por Δf; isto é, $\Delta f \in C^{\infty}(M)$ é a função definida por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f_p(e_i, e_i) = \mathrm{tr}(\nabla^2 f_p).$$

Desta maneira, o laplaciano define um operador $\Delta : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ que tem as seguintes propriedades

(i) $\Delta(f + \lambda g) = \Delta f + \lambda \Delta g$;

(iii) $\Delta(\phi \circ f) = (\phi' \circ f)\Delta f + (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2$;

(iv) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$,

para quaisquer $f, g \in C^{\infty}(M)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função diferenciável e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O teorema seguinte é uma versão do teorema da divergência para hipersuperfícies compactas de $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, hipersuperfícies sem bordo que são subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 1.26. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores tangentes a M. Então*

$$\int_M \mathrm{div} X(p)dp = 0.$$

Em particular, $\int_M \Delta f(p)dp = 0$, para toda função $f \in C^\infty(M)$.

1.10 Algumas funções geometricamente importantes

Sejam F uma função diferenciável definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ inteiramente contida em Ω. Denotemos por f a restrição de F a M. Veremos que, para algumas funções F, o laplaciano de f fornece informações valiosas sobre a geometria de M. Temos que $f \in C^\infty(M)$ e seu gradiente é a parte tangente do gradiente euclidiano (em $\mathbb{R}^{n+1}$) de F. Isto é, para cada ponto $p \in M$ se tem

$$\nabla f(p) = \bar{\nabla} F(p) - \langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N}(p) \rangle \mathbf{N}(p). \tag{1.17}$$

De fato, fixe $p \in M$ e seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM. Então $\{e_1, \ldots, e_n, \mathbf{N}(p)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Logo

$$\bar{\nabla} F(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla} F(p), e_i \rangle e_i + \langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N}(p) \rangle \mathbf{N}(p).$$

De outro lado, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\langle \bar{\nabla} F(p), e_i \rangle = dF_p(e_i) = \frac{d}{dt} F(c(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0} = df_p(e_i) = \langle \nabla f(p), e_i \rangle,$$

sendo $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, uma curva parametrizada em M com $c(0) = p$ e $c'(0) = e_i$, o que demonstra a fórmula (1.17).

Agora, calculemos o Hessiano de f em p. Temos que $\nabla^2 f_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \nabla f, \mathbf{w} \rangle$, para cada $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$. Além disso, da expressão (1.17) obtemos

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \nabla f_p = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \bar{\nabla} F - \mathbf{v}(u) \mathbf{N}(p) + A_p(\mathbf{v}) \left\langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N}(p) \right\rangle, \tag{1.18}$$

e portanto,

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{\nabla}^2 F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \left\langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N}(p) \right\rangle. \tag{1.19}$$

Agora vejamos a relação existente entre $\bar{\Delta} F(p)$ e $\Delta f(p)$ nos pontos p de M. Considerando a base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, \mathbf{N}(p)\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, sendo $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ uma base ortonormal de direções principais de M em p, temos que

$$\bar{\Delta}F(p) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}^2 F_p(e_i, e_i) + \bar{\nabla}^2 F_p(\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)).$$

De (1.19) obtemos

$$\bar{\nabla}^2 F_p(e_i, e_i) = \nabla^2 f_p(e_i, e_i) - \kappa_i(p) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{N}}(p), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

sendo $\partial F / \partial \mathbf{N} \in C^\infty(M)$ a função dada por

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{N}}(p) = \left\langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N}(p) \right\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}F(p) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f_p(e_i, e_i) - nH(p) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{N}}(p) + \bar{\nabla}^2 F_p(\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)) \\ &= \Delta f(p) - nH(p) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{N}}(p) + \bar{\nabla}^2 F_p(\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Vejamos agora alguns casos particulares importantes desta situação.

Exemplo 1.27.

Consideremos $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função diferenciável dada por $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2$, para um ponto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixado. Temos que

$$\bar{\nabla} F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{c} \qquad \text{e} \qquad \bar{\nabla}^2 F_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \tag{1.21}$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dada uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientada pelo campo normal unitário $\mathbf{N}$, seja $f \in C^\infty(M)$ a restrição de F a M, isto é $f(p) = \frac{1}{2}|p - \mathbf{c}|^2$ para $p \in M$. A função f mede a distância (ao quadrado) dos pontos de M ao ponto $\mathbf{c}$. Temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{N}}(p) = \langle \bar{\nabla} F(p), \mathbf{N} \rangle = \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p) \rangle,$$

e também

$$\bar{\nabla}^2 F_p(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1, \quad \text{e} \quad \bar{\Delta} F(p) = n + 1.$$

Portanto, de (1.17), (1.19) e (1.20), obtemos, respectivamente, que no ponto $p \in M$ o gradiente de f é

$$\nabla f(p) = (p - \mathbf{c})^\top = p - \mathbf{c} - \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p) \rangle \mathbf{N}(p), \tag{1.22}$$

o hessiano de f é

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p) \rangle, \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M \tag{1.23}$$

e finalmente, que o laplaciano de f é

$$\Delta f(p) = n(1 + H(p)\langle p - \mathbf{c}, \mathbf{N}(p)\rangle). \tag{1.24}$$

Uma conseqüência deste exemplo é o seguinte teorema.

Teorema 1.28. *Toda hipersuperfície compacta $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem um ponto onde todas as curvaturas principais relativas ao campo normal unitário interior são positivas , isto é, existe $p_0 \in M$ tal que $\kappa_i(p_0) > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Sendo M um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^{n+1}$, o Teorema de Brouwer-Samelson nos diz que M é uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{R}^{n+1}$ (veja [25]). Além disso, da compacidade de M e do Teorema de Jordan-Brouwer segue que M é o bordo de um domínio regular limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (veja [25]). Assim, podemos supor que M está orientada pelo campo unitário normal unitário interior $\mathbf{N}$. Considere a função $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2$, e seja $f = F|_M$. Em cada ponto $p \in M$ e para $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$, segue de (1.22) e (1.23) que

$$\nabla f(p) = p - \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\mathbf{N}(p) \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 f_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle.$$

Como M é compacta, existe um ponto $p_0 \in M$ onde f alcança seu máximo (global), $f(p) \leq f(p_0)$ para todo $p \in M$, de modo que $\nabla f(p_0) = 0$ e $\nabla^2 f_{p_0}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq 0$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{p_0}M$. Temos que $p_0 \neq \mathbf{0}$. De fato, se fosse $p_0 = \mathbf{0}$ teríamos $f(p_0) = 0$ e portanto, como $f(p) \geq 0$ deveríamos ter $f \equiv 0$ o que não ocorre. De $\nabla f(p_0) = 0$ obtemos que $p_0 = \langle p_0, \mathbf{N}(p_0)\rangle\mathbf{N}(p_0)$, e portanto

$$\mathbf{N}(p_0) = -\frac{p_0}{|p_0|}.$$

Por outro lado, como $\nabla^2 f_p$ é não-positivo, obtemos

$$0 \geq \nabla^2 f_{p_0}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1 + \kappa(\mathbf{v})\langle p_0, \mathbf{N}(p_0)\rangle = 1 - \kappa(\mathbf{v})|p_0|,$$

sendo $\kappa(\mathbf{v}) = \langle A_{p_0}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ para cada vetor unitário $\mathbf{v} \in T_{p_0}M$. Assim, $\kappa(\mathbf{v}) \geq 1/|p_0|$, para cada vetor unitário $\mathbf{v} \in T_{p_0}M$. Em particular, $\kappa_1(p_0), \ldots, \kappa_n(p_0)$ são todas positivas. □

Outro exemplo interessante é o seguinte.

Exemplo 1.29.

Seja Π um hiperplano afim de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa por um ponto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e tem como direção normal o vetor unitário $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\mathbf{a}| = 1$. Se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, a função $h : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(p) = \langle p - \mathbf{c}, \mathbf{a}\rangle, \qquad p \in M,$$

mede a distância *orientada* (ou altura) dos pontos de M ao hiperplano Π. Por esta razão, a função h é chamada de *função altura*. Observe que $h \in C^\infty(M)$ é a restrição a M da função diferenciável em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por $F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle$, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$. É fácil ver que

$$\bar{\nabla} F(\mathbf{x}) = \mathbf{a}, \qquad \bar{\nabla}^2 F_{\mathbf{x}} = 0.$$

Logo, em virtude das expressões (1.17) e (1.19), teremos que

$$\nabla h(p) = \mathbf{a}^{\top} = \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}(p) \rangle \mathbf{N}(p) \tag{1.25}$$

e

$$\nabla^2 h_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}(p) \rangle, \tag{1.26}$$

para todo $p \in M$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$. Além disso, de (1.20) segue que

$$\Delta h(p) = nH(p) \langle \mathbf{a}, \mathbf{N}(p) \rangle. \tag{1.27}$$

Capítulo 2

Hipersuperfícies com curvatura média constante

2.1 Um resultado clássico: o Teorema de Alexandrov

Um dos mais importantes resultados sobre a geometria global de hipersuperfícies com curvatura média constante do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ é o Teorema de Alexandrov. Esse resultado seminal estabelece uma das mais simples e profundas propriedades que caracterizam as hiperesferas do espaço euclidiano: dentre todas as hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano, as únicas que possuem curvatura média constante são as hiperesferas. Aqui, recordamos que *compacta* significa que a hipersuperfície não tem bordo e é um subconjunto compacto do espaço euclidiano. Especificamente, Alexandrov [1] provou o seguinte resultado de unicidade.

Teorema 2.1 (Teorema de Alexandrov)**.** *As únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano com curvatura média constante são as hiperesferas.*

Em linhas gerais, a idéia de Alexandrov foi mostrar que tais hipersuperfícies possuem um hiperplano de simetria em toda direção do espaço euclidiano e daí concluir que elas são hiperesferas. Para levar a cabo tal idéia, Alexandrov toma uma direção arbitrária do espaço euclidiano, um hiperplano ortogonal a esta direção que não intersecta M e move este hiperplano paralelamente até ele tocar M pela primeira vez. A partir deste ponto de contato continua a mover o hiperplano e passa a considerar a reflexão da porção de M que ficou para trás em relação ao hiperplano. O reflexo está inicialmente no interior da região limitada por M, e portanto em algum instante a porção refletida tangencia M. Ambas tem a mesma curvatura média (constante) e mesma normal nesse ponto. Em seguida, usando uma versão do princípio do máximo para hipersuperfícies com curvatura média constante, Alexandrov mostrou que estas hipersuperfícies coincidem numa vizinhança do ponto de tangência. Além disso, usando um argumento de conexidade, ele provou que as hipersuperfícies em questão coincidem em todos os pontos da reflexão, concluindo que o hiperplano é um hiperplano de simetria de M na direção dada. Esta demonstração é hoje denominada o *método de reflexão de Alexandrov* e foi largamente utilizado em diversos problemas geométricos.

2.2 Equações elípticas e o princípio do máximo

A prova original de Alexandrov para o Teorema 2.1 é baseada essencialmente no honorável *princípio do máximo de Hopf* para equações elípticas [14] e no método de reflexão de Alexandrov. Para enunciarmos o princípio do máximo de Hopf precisamos introduzir algum material da teoria de equações diferenciais parciais. Nossa abordagem desse material seguirá o texto de M.L. Leite [23].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $u \in C^2(\Omega)$, e $\bar{\nabla} u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ o seu gradiente euclidiano. Diremos que L é um *operador diferencial parcial linear de segunda ordem* quando tem a forma

$$L[u](\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}) u_{ij}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

e os coeficientes $a_{ij} = a_{ji}$ e b_k são funções contínuas em Ω. Um tal operador L é denominado *elíptico* no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ quando a matriz simétrica $[a_{ij}(\mathbf{x})]$ for positiva definida, e diremos que ele é *elíptico em* Ω quando for elíptico em cada ponto de Ω. Além disso, L é dito ser *uniformemente elíptico em* Ω se a função $\frac{\Lambda(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})}$ é limitada em Ω, sendo $\Lambda(\mathbf{x}) > 0$ e $\lambda(\mathbf{x}) > 0$ são os autovalores máximo e mínimo da matriz positiva $[a_{ij}(\mathbf{x})]$, respectivamente.

O exemplo mais importante de um operador linear elíptico é o laplaciano $\Delta[u] = \sum_i u_{ii}$. Claramente ele é uniformemente elíptico. É fato bem conhecido que funções harmônicas, isto é, soluções da equação $\Delta[u] = 0$, não têm ponto de máximo no interior de Ω, a menos que u seja uma função constante. Uma generalização desta propriedade fundamental para operadores lineares de segunda ordem uniformemente elípticos é o famoso *Princípio do máximo de Hopf* [14], que enunciaremos abaixo. Um prova deste resultado pode ser encontrada em [12].

Teorema 2.2 (Princípio do máximo de E. Hopf)**.**

(i) Ponto interior: *Suponha que u satisfaz a desigualdade $L[u] \geq 0$, com L uniformemente elíptico em Ω. Se u atinge seu máximo em um ponto no interior de Ω, então u é constante em Ω.*

(ii) Ponto de bordo : *Suponha que u satisfaz $L[u] \geq 0$ com L uniformemente elíptico em um domínio Ω com bordo suave $\partial\Omega$. Se u atinge seu máximo num ponto do bordo de Ω no qual $\bar{\nabla} u$ existe, então alguma derivada direcional exterior de u neste ponto é positiva, a menos que u seja constante em Ω.*

Outro tipo de operador de segunda ordem que é muito importante é um *operador diferencial parcial quasilinear Q* que tenha a forma

$$Q[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\nabla} u) u_{ij} + b(\bar{\nabla} u),$$

sendo os coeficientes $a_{ij} = a_{ji}$ e b funções em $C^1(\mathbb{R}^n)$. Observe que a ação de Q é linear em $\bar{\nabla}^2 u$, mas pode ser não-linear em $\bar{\nabla} u$. O operador quasilinear Q é *elíptico com respeito a função u* no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ se a matriz simétrica $[a_{ij}(\bar{\nabla} u)(\mathbf{x})]$ é positiva definida; e é *uniformemente elíptico* *com respeito a* u se a função $\frac{\Lambda(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x})}$ é limitada em Ω, sendo $\Lambda(\mathbf{x})$ e $\lambda(\mathbf{x})$ os autovalores máximo e mínimo de $[a_{ij}(\bar{\nabla}u)(\mathbf{x})]$, respectivamente.

Observamos na Seção 1.6 que toda hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser escrita localmente como o gráfico de uma função $u \in C^2(\Omega)$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Além disso, obtivemos a expressão (1.10) para a matriz do operador forma A da hipersuperfície M restrita à vizinhança graf(u), logo, a curvatura média de M nessa vizinhança é

$$nH = \mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii} = \frac{1}{W^3}\sum_i (W^2 u_{ii} - u_i \sum_j u_j u_{ji}) = \frac{1}{W^3}\sum_{i,j}(W^2\delta_{ij} - u_i u_j)u_{ij}.$$

Definição 2.3. *Seja* $u \in C^2(\Omega)$*, sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio. O operador* $\mathcal{H}$ *associado à curvatura média* H *do gráfico de* u *é definido por*

$$\mathcal{H}[u] = \sum_{i,j}\left(W^2\delta_{ij} - u_i u_j\right)u_{ij}. \tag{2.1}$$

É imediato verificar que $\mathcal{H}$ é um operador quasilinear. Afirmamos que $\mathcal{H}$ é um operador elíptico, e uniformemente elíptico em qualquer subconjunto de Ω no qual $|\bar{\nabla}u|$ seja limitada. De fato, seja $T = W^2 I - B$ com B sendo o operador linear definido em (1.9). Temos então que $[T] = \left[W^2\delta_{ij} - u_i u_j\right]$. Além disso, se $\mathbf{v}$ for um autovetor de T associado a um autovalor λ teremos

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow W^2\mathbf{v} - B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow B\mathbf{v} = \left(W^2 - \lambda\right)\mathbf{v}.$$

Logo, $\mathbf{v}$ é um autovetor de B associado ao autovalor $W^2 - \lambda$. Como vimos os autovalores de B são 0 e $|\bar{\nabla}u|^2$. Portanto, os autovalores mínimo e máximo de T são $\lambda(\mathbf{x}) = 1$ e $\Lambda(\mathbf{x}) = W^2$, respectivamente, e isto prova a afirmação.

A primeira percepção de Alexandrov para provar o Teorema 2.1 foi notar que, apesar de o operador curvatura média (2.1) não ser linear, ele ainda obedece a um princípio do máximo. Para apresentá-lo precisamos da seguinte definição:

Definição 2.4. *Sejam* M *e* M' *hipersuperfícies de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $p \in M \cap M'$ *tal que* $T_pM = T_pM'$*, isto é,* p *é um ponto de tangência. Sejam* $U \subset T_pM$ *uma vizinhaça de* p *e* $u, u' : U \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis cujos gráficos são vizinhanças de* M *e* M'*,respectivamente. Se* $u \leq u'$ *em* U*, dizemos que* M' *está acima de* M *em* U*.*

Teorema 2.5 (Princípio do máximo para curvatura média constante)**.**

(i) Ponto interior : *Sejam* M *e* M' *hipersuperfícies orientadas de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com curvaturas médias constantes* H *e* H'*, satisfazendo* $H \leq H'$*. Se* M *e* M' *têm o mesmo vetor normal em um ponto de tangência* $p \in M \cap M'$*, então* M *não pode permanecer acima de* M' *numa vizinhança de* p*, a não ser que as hipersuperfícies coincidam localmente.*

(ii) Ponto de bordo: *Sejam* M *e* M' *hipersuperfícies orientadas de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com bordos* ∂M *e* $\partial M'$*, com curvaturas média constantes satisfazendo* $H \leq H'$*. Suponha que* M *e* M'*, bem como seus bordos, são tangentes em* $p \in \partial M \cap \partial M'$*, com o mesmo vetor normal no ponto de tangência.*

Então M não pode permanecer acima de M' em uma vizinhança de p, a não ser que as hipersuperfícies coincidam localmente.

Demonstração. Seguiremos a linha de raciocínio das notas de Leite [23]. Como em [31], esta demonstração segue do princípio de comparação para operadores quasilineares localmente uniformemente elípticos, apresentado no Teorema 10.1 de [12].

Como na Seção 1.6 podemos supor que $p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e que, localmente, M e M' são gráficos de funções u e u' sobre $\mathbb{R}^n$, com $u(\mathbf{0}) = u'(\mathbf{0}) = 0$ e $\bar{\nabla}u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla}u'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Logo $u, u' \in C^2(\Omega)$, sendo Ω uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$, se $\mathbf{0}$ for um ponto interior de M e M' e uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em um semi-espaço, se $\mathbf{0}$ for um ponto de bordo de M e M'. Mais ainda, podemos supor também que o vetor normal em $\mathbf{0}$ aponta para cima.

Suponha inicialmente que $H \leq 0 \leq H'$ e que M está acima de M' numa vizinhança de p, isto é, $u \geq u'$ em uma vizinhança U de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$ ou num semi-espaço, dependendo de p estar no interior ou ser um ponto de fronteira de M e M'. Sem perda de generalidade, suponha que $\overline{U} \subset \Omega$. Afirmamos que $\mathcal{H}[u']$ é uniformemente elíptico em U. De fato, como $\lambda(x) = 1$, $\Lambda(x) = W'^2$, sendo $W'^2 = 1 + |\bar{\nabla}u'|^2$, é suficiente mostrar que $|\bar{\nabla}u'|^2$ é limitado em U. Para ver isso, note que como $u' \in C^2(\Omega)$, então $u'_i \in C(\Omega)$, para $i = 1, \ldots, n$, e como $\overline{U} \subset \Omega$, temos que u'_i é limitada em U. Logo $|\bar{\nabla}u'|^2 = {u'_1}^2 + \ldots + {u'_n}^2$ é limitada em U.

Seja $u_t = (1-t)u + tu'$, $0 \leq t \leq 1$, um segmento de u a u'. Temos que $\frac{d}{dt}u_t = u' - u$ e $\frac{d}{dt}\bar{\nabla}u_t = \bar{\nabla}u' - \bar{\nabla}u$. A hipótese $H \leq 0 \leq H'$ implica que $\mathcal{H}[u] \leq \mathcal{H}[u']$. Então,

$$0 \leq \mathcal{H}[u'] - \mathcal{H}[u] = \sum_{i,j} a_{ij}(\bar{\nabla}u')(u'_{ij} - u_{ij}) + \sum_{i,j}\{a_{ij}(\bar{\nabla}u') - a_{ij}(\bar{\nabla}u)\}u_{ij},$$

sendo $a_{ij}(\bar{\nabla}u) = W^2\delta_{ij} - u_iu_j$. Seja $w = u' - u$ e note que a igualdade acima torna-se

$$0 \leq L[w] = \sum_{i,j} c_{ij}w_{ij} + \sum_k b_k w_k,$$

para $c_{ij} = a_{ij}(\bar{\nabla}u')$ e $b_k = \sum_{i,j}\{\int_0^1 \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k}(\bar{\nabla}u_t)dt\}u_{ij}$. Esta expressão de b_k segue de

$$a_{ij}(\bar{\nabla}u') - a_{ij}(\bar{\nabla}u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{a_{ij}(\bar{\nabla}u_t)\right\}dt = \int_0^1 \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k}(\bar{\nabla}u_t)\frac{d}{dt}\left\{(\bar{\nabla}u_t)_k\right\}dt$$

e de $\frac{d}{dt}\left\{(\bar{\nabla}u_t)_k\right\} = (\bar{\nabla}u' - \bar{\nabla}u)_k = w_k$. Claramente, os coeficientes c_{ij} e b_k são contínuos.

A hipótese $w = u' - u \leq 0$ próximo da origem implica que w alcança seu valor máximo em $\overline{U}$ no ponto $\mathbf{0}$. Por outro lado, como $\mathcal{H}$ é uniformemente elíptico com respeito a u', segue que L é um operador linear uniformemente elíptico em U, satisfazendo $L[w] \geq 0$. Se $\mathbf{0} \in U$, isto é, se $\mathbf{0}$ for um ponto interior de M e M', então, pelo princípio do máximo de Hopf, temos que $w \equiv 0$ em U. Se $\mathbf{0} \in \partial U$, isto é, se $\mathbf{0}$ for um ponto de fronteira de M e M', temos novamente pelo princípio do máximo de Hopf, que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{0}) > 0$, para alguma direção exterior ν, a não ser que w seja constante. Mas $\frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{0}) = \left\langle \bar{\nabla}w(\mathbf{0}), \nu \right\rangle = 0$. Logo $w \equiv 0$. Portanto as hipersuperfícies coincidem localmente.

Agora suponhamos que $0 < H \leq H'$. Observamos que esta situação não é considerada em [23]. Veja que, neste caso, não podemos concluir de imediato que $\mathcal{H}[u] \leq \mathcal{H}[u']$. Para contornar esta dificuldade, utilizaremos outras idéias. Observe que do fato de $H \leq H'$ segue que

$$0 \leq n(H' - H) = \frac{\mathcal{H}[u']}{W^3[u']} - \frac{\mathcal{H}[u]}{W^3[u]} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^3[u_t]}\right) dt.$$

Agora,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^3[u_t]}\right) = \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}[u_t]\right) - 3\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^4[u_t]}\frac{d}{dt}\left(W[u_t]\right),$$

e sendo $W[u_t] = \sqrt{1 + |\bar{\nabla} u + t\bar{\nabla} w|^2}$, então

$$\frac{d}{dt}\left(W[u_t]\right) = \frac{1}{W[u_t]}(\langle \bar{\nabla} u, \bar{\nabla} w\rangle + t|\bar{\nabla} w|^2),$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^3[u_t]}\right) = \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}[u_t]\right) - 3\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}\langle \bar{\nabla} u, \bar{\nabla} w\rangle - 3\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}t|\bar{\nabla} w|^2.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}[u_t]\right) = \sum_{i,j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}[u_t]w_{ij} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_k}[u_t]w_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq\ n(H' - H) \ &= \ \sum_{i,j}\left(\int_0^1 \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}[u_t]dt\right) w_{ij} + \sum_k \left(\int_0^1 \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_k}[u_t]dt\right) w_k \\ &\quad -\sum_k 3\left(\int_0^1 \frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}dt\right) u_k w_k - 3\left(\int_0^1 t\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}dt\right)|\bar{\nabla} w|^2. \end{aligned}$$

A igualdade acima pode ser reescrita na forma

$$0 \leq \sum_{i,j} c_{ij}w_{ij} + \sum_k b_k w_k - a|\bar{\nabla} w|^2 = L[w] - a|\bar{\nabla} w|^2,$$

sendo os coeficientes dados por

$$c_{ij}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}[u_t]dt, \qquad a(\mathbf{x}) = 3\left(\int_0^1 t\frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}dt\right),$$

e

$$b_k(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{1}{W^3[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_k}[u_t]dt - 3\left(\int_0^1 \frac{\mathcal{H}[u_t]}{W^5[u_t]}dt\right) u_k.$$

Afirmamos que $a(\mathbf{0}) > 0$. De fato, como $\bar{\nabla} u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla} u'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, temos $\bar{\nabla} u_t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, e logo

$$W[u_t](\mathbf{0}) = W[u](\mathbf{0}) = W[u'](\mathbf{0}) = 1.$$

Portanto,

$$\mathcal{H}[u](\mathbf{0}) = \sum_i u_{ii} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}[u'](\mathbf{0}) = \sum_i u'_{ii}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u_t](\mathbf{0}) &= \sum_i (u_t)_{ii} = \sum_i u_{ii} + t(u'_{ii} - u_{ii}) = \mathcal{H}[u](\mathbf{0}) + t(\mathcal{H}[u'](\mathbf{0}) - \mathcal{H}[u](\mathbf{0})) \\ &= nH + tn(H' - H). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $0 < H \leq H'$, obtemos que $\mathcal{H}[u_t](\mathbf{0}) > 0$ e portanto, $a(\mathbf{0}) > 0$. Como a é contínuo em $\mathbf{0}$, temos que $a \geq 0$ numa vizinhança de $\mathbf{0}$. Logo,

$$0 \leq L[w] - a|\bar{\nabla} w|^2 \leq L[w]$$

nessa vizinhança. Agora veja que L é uniformemente elíptico numa vizinhança de $\mathbf{0}$. Com efeito,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}[u_t] = W^2[u_t]\delta_{ij} - (u_t)_i(u_t)_j, \quad \text{logo} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}[u_t](\mathbf{0}) = \delta_{ij},$$

e portanto,

$$c_{ij}(\mathbf{0}) = \int_0^1 \delta_{ij} dt = \delta_{ij},$$

Como os coeficientes c_{ij} são funções contínuas temos que, numa vizinhança de $\mathbf{0}$ os autovalores de $[c_{ij}(\mathbf{x})]$ são positivos e a razão entre eles é finita, e portanto, L é uniformemente elíptico nesta vizinhança. Portanto, o raciocínio do caso anterior pode ainda ser aplicado ao operador L, fornecendo a mesma conclusão.

Por último, consideremos o caso em que $H \leq H' < 0$. Supondo, como antes, que M está acima de M' concluímos que $u \geq u'$ em uma vizinhança de $\mathbf{0}$. Nessa situação temos que $0 < -H' \leq -H$ e $-u' \geq -u$. Portanto recaímos na segunda situação considerada acima, logo, podemos repetir o argumento e concluir a demonstração do teorema. □

2.3 O método de reflexão de Alexandrov

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Teorema 2.1. Alexandrov mostrou que uma hipersuperfície compacta $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que tenha curvatura média constante possui um hiperplano de simetria em cada direção de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nestas condições, o Lema 2.6 abaixo implica que M é uma hiperesfera.

Lema 2.6. *Seja M um subconjunto conexo, compacto, com interior vazio em $\mathbb{R}^{n+1}$, que possui um hiperplano de simetria em cada direção. Então M é uma hiperesfera.*

Demonstração. A demonstração que apresentaremos é baseada na dissertação de K. R. F. Leão [21]. Sejam $P_1, \ldots, P_{n+1}$ hiperplanos de simetria de M mutuamente ortogonais e $\{p\} = P_1 \cap \ldots \cap P_{n+1}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$P_i = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = 0\right\}.$$

Seja P um outro plano de simetria e tome N um vetor unitário ortogonal a P. Suponha que $\mathbf{0} \notin P$. Como M não está contido em P, existem $Y_0 \in P$ e um número real não-nulo t_0 tais que

$$Y_0 + t_0 N \in (M \backslash P).$$

O hiperplano P é dado por $P = \left\{X \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle X - Y_0, N\rangle = 0\right\}$. Da simetria de M com relação a P, obtemos que $Y_0 - t_0 N \in M$, e como o ponto $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) \in M$ é simétrico, em relação ao plano P_i, ao ponto $(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1}) \in M$ temos que, por reflexões sucessivas de $Y_0 - t_0 N$ em $P_1, \ldots, P_{n+1}$ obtemos que $-Y_0 + t_0 N \in M$. Logo existem $Y_1 \in P$ e um número real não-nulo t_1 tais que

$$Y_1 + t_1 N = -Y_0 + t_0 N \in M.$$

Fazendo o produto interno dessa igualdade por N obtemos

$$\langle Y_1, N\rangle + t_1 = -\langle Y_0, N\rangle + t_0.$$

Como $Y_1 \in P$, isto é, $\langle Y_1 - Y_0, N\rangle = 0$, obtemos $t_1 = -2\langle Y_0, N\rangle + t_0$. Donde segue $Y_1 = -Y_0 + 2\langle Y_0, N\rangle N$, e também que $Y_1 + t_1 N \in M$. Além disso, com o mesmo argumento acima, obtemos que

$$p_1 = -Y_1 + t_1 N = Y_0 + (-4\langle Y_0, N\rangle + t_0)N \in M.$$

Agora, para cada $l \geq 2$ inteiro defina

$$p_l = Y_0 + (-4l\langle Y_0, N\rangle + t_0)N.$$

Afirmo que $p_l \in M$ para todo $l \geq 1$. De fato, já mostramos acima que $p_1 \in M$. Suponha que $p_l \in M$. Argumentando como antes, concluiremos que $-Y_0 + (-4l\langle Y_0, N\rangle + t_0)N \in M$. Logo, existe $Y_{l+1} \in P$ e um número real não-nulo t_{l+1} tal que

$$Y_{l+1} + t_{l+1} N = -Y_0 + (-4l\langle Y_0, N\rangle + t_0)N \in M.$$

Fazendo o produto interno desta igualdade com N obtemos

$$\langle Y_{l+1}, N\rangle + t_{l+1} = -\langle Y_0, N\rangle - 4l\langle Y_0, N\rangle + t_0,$$

isto é, $t_{l+1} = -(4l+2)\langle Y_0, N\rangle + t_0$, donde segue que $Y_{l+1} = -Y_0 + 2\langle Y_0, N\rangle N$, e portanto,

$$\begin{aligned} p_{l+1} &= -Y_{l+1} + t_{l+1}N \\ &= Y_0 + [(-2-(4l+2))\langle Y_0, N\rangle + t_0]\, N \\ &= Y_0 + [-4(l+1)\langle Y_0, N\rangle + t_0]\, N \in M. \end{aligned}$$

Dessa forma, o princípio da indução nos assegura que $p_l \in M$ para cada $l \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{0} \notin P$, temos que $\langle Y_0, N\rangle \neq 0$ e sendo M compacto, chegamos a uma contradição. Logo $\mathbf{0} \in P$, qualquer que seja o hiperplano de simetria P. Assim, M é invariante por reflexão através de qualquer hiperplano que passa por $\mathbf{0}$.

Agora, fixe um ponto $p \in M$ e seja S a hiperesfera centrada na origem que passa por p. Sabemos que qualquer ponto q de S pode ser obtido a partir de p por reflexões sucessivas através de hiperplanos que passam por $\mathbf{0}$. Isso mostra que S está contida em M. Esse argumento também mostra que toda hiperesfera centrada na origem que passa por um ponto de M está contida em M. Portanto, sendo M conexa, compacta, e com interior vazio em $\mathbb{R}^{n+1}$, necessariamente temos que M é uma hiperesfera. □

Demonstração do Teorema de Alexandrov. Procederemos como em [32]. Sendo M uma hipersuperfície compacta do $\mathbb{R}^{n+1}$ então o Teorema de Brouwer-Samelson nos diz que M é orientável (veja [25]). Além disso, segue do Teorema de Jordan-Brouwer que M é o bordo de um domínio regular limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (veja [25]). Portanto, podemos supor que M está orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$. Fixemos uma direção arbitrária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Utilizando um movimento rígido adequado de $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos admitir que essa direção é dada pelo eixo x_{n+1}; que a hipersuperfície M está contida no semi-espaço fechado $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq 0\right\}$, sendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$; e que M é tangente ao hiperplano $\Pi_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\right\}$ no ponto $\mathbf{0}$. Para cada $t > 0$, consideramos os conjuntos

$$M_t = \{\mathbf{x} \in M : x_{n+1} \leq t\} \quad \text{e} \quad M_t^* = \left\{(x_1, \ldots, x_n, 2t - x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in M_t\right\},$$

isto é, M_t^* é a reflexão de M_t com respeito ao hiperplano $\Pi_t = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = t\right\}$.

Como M é o gráfico de uma função diferenciável em uma vizinhança de $\mathbf{0}$, então, para t suficientemente pequeno M_t^* está contida em $\overline{\Omega}$. Além disso, todas as hipersuperfícies M_t^* têm a mesma curvatura média constante H que M. Seja s o maior número positivo tal que $M_s^* \subset \overline{\Omega}$. Então, somente uma das seguintes possibilidades pode ocorrer:

(1) Existe um ponto $p \in M \cap M_s^*$, com $p \notin \Pi_s$.

Neste caso, temos que M_s^* tangencia M em p, M_s^* e M possuem a mesma curvatura média constante H e o mesmo vetor normal em p. Como M está acima de M_s^* em uma vizinhança de p, então, o princípio do máximo para hipersuperfícies com curvatura média constante assegura que M e M_s^* coincidem numa vizinhança de p.

(2) Não existe nenhum ponto em $(M \cap M_s^*) \backslash \Pi_s$.

Nesse caso, sendo s o maior número positivo tal que $M_s^* \subset \overline{\Omega}$, então existe um ponto $p \in M \cap \Pi_s$ tal que o espaço tangente a M em p é perpendicular ao hiperplano Π_s. Portanto, em uma vizinhança de p no semi-espaço $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} \geq s\}$ temos que M e M_s^* são duas hipersuperfícies com bordo com um ponto de tangência comum $p \in \partial M \cap \partial M_s^*$, e ∂M e ∂M_s^* são também tangentes em p. Além disso, M_s^* e M possuem o mesmo vetor normal em p, a mesma curvatura média constante e M está acima de M_s^* numa vizinhança de p. Portanto, pelo Teorema 2.5, M_s^* e M coincidem numa vizinhança de p.

Em qualquer dos dois casos acima, seja $\widetilde{S}$ a componente conexa de M_s^* que contém o ponto p e seja S a parte de M_s da qual $\widetilde{S}$ é refletida, isto é, $\widetilde{S} = S^*$. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}$ de todos os pontos q em $\widetilde{S}$ tais que M e $\widetilde{S}$ coincidem numa vizinhança de q em $\widetilde{S}$.

Afirmamos que $\mathcal{A}$ é não-vazio, aberto e fechado. De fato, como $p \in \mathcal{A}$, temos que $\mathcal{A}$ é não-vazio. Mais ainda, por definição $\mathcal{A}$ é aberto, já que para cada $q \in \mathcal{A}$ existe uma vizinhança de q contida em $\mathcal{A}$. Mostremos que $\mathcal{A}$ é fechado. Tome $q \in \mathcal{A}$. Por hipótese existe uma vizinhança $V_q \subset \widetilde{S}$ de q tal que M e $\widetilde{S}$ coincidem em V_q. Como, em particular, M e $\widetilde{S}$ são hipersuperfícies contínuas, temos que elas também coincidem (em particular, são tangentes) nos pontos do bordo de V_q. Além disso, como elas possuem a mesma orientação neste conjunto, podemos aplicar o Teorema 2.5 novamente e concluir que M e $\widetilde{S}$ coincidem numa vizinhança de cada ponto do bordo de V_q, e logo, $\overline{V_q} \subset \mathcal{A}$, para cada $q \in \mathcal{A}$, sendo que $\overline{V_q}$ é o fecho de V_q. Consequentemente, $\mathcal{A}$ é fechado.

Por outro lado, sendo $\widetilde{S} = \mathcal{A} \cup (\widetilde{S} \backslash \mathcal{A})$, com $\mathcal{A}$ não-vazio e aberto e $\widetilde{S} \backslash \mathcal{A}$ aberto. Como $\widetilde{S}$ é conexo, e $\mathcal{A}$ é não-vazio temos que $\widetilde{S} \backslash \mathcal{A}$ é vazio e portanto $\widetilde{S} = \mathcal{A}$, o que implica $\widetilde{S} \subset M$. Logo $\widetilde{S}$ é fechado (pois $\widetilde{S} = \mathcal{A}$), limitado (pois $\widetilde{S} \subset M$ e M é limitada) e conexa. Isso implica que S também tem estas propriedades e portanto $\widetilde{S} \cup S$ é uma hipersuperfície compacta e conexa contida em M. Agora, se M não é igual a $S \cup \tilde{S}$ então

$$M = (S \cup \tilde{S}) \cup (M \backslash (S \cup \tilde{S}))$$

é uma reunião disjunta de subconjuntos abertos, ambos não-vazios, o que contradiz a conexidade de M. Assim, Π_s é um hiperplano de simetria de M na direção dada e do Lema 2.6 segue que M é uma hiperesfera. Isto conclui a demonstração de Alexandrov. □

2.4 O método de Reilly.

Em 1977, R.C. Reilly [28] encontrou uma prova diferente e simples do Teorema de Alexandrov combinando certas fórmulas integrais. A essência da prova de Reilly está contida no seguinte teorema.

Teorema 2.7 (Teorema de Reilly, [28]). *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientada pelo campo normal interior e Ω o domínio regular limitado por M com $M = \partial\Omega$. Se M*

tem curvatura média H *constante então*

$$H \leq \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)}, \tag{2.2}$$

sendo $V(\Omega)$ *e* $A(M)$ *o volume* $(n+1)$*-dimensional de* Ω *e a área* n*-dimensional de* M*, respectivamente. Além disso, vale a igualdade em (2.2) se, e somente se* M *é uma hiperesfera.*

De posse desse resultado, a demonstração de Reilly consiste em mostrar que vale a igualdade em (2.2). Para tanto, ele faz uso das famosas Fórmulas de Minkowski, cujos enunciados e as respectivas demonstrações são como seguem.

Teorema 2.8 (Fórmulas de Minkowski)**.** *Sejam* $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfíce compacta orientada pelo campo normal unitário interior* $\mathbf{N}$ *e* Ω *o domínio regular limitado por* M *com* $\partial\Omega = M$*. Então*

$$\begin{aligned} \int_M \{1 + H(p)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\} dp &= 0, & (2.3) \\ (n+1)V(\Omega) + \int_M \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp &= 0, & (2.4) \end{aligned}$$

sendo $V(\Omega)$ *o volume* $(n+1)$*-dimensional de* Ω*, e* H *a curvatura média de* M*.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ definida por $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $z = f|_M$. Temos que $\bar{\nabla} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $\bar{\Delta} f(\mathbf{x}) = n+1$. De (1.24) obtemos que $\Delta z(p) = n(1 + H(p)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle)$, para cada $p \in M$. Pelo teorema da divergência (veja Teorema 1.26), obtemos $\int_M \Delta z(p) dp = 0$. Isto por sua vez implica (2.3). Por outro lado, o teorema da divergência (veja teorema 1.24) nos dá

$$(n+1)V(\Omega) = \int_\Omega \bar{\Delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_M \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp,$$

o que implica (2.4). □

Vejamos agora a prova de Reilly para o Teorema de Alexandrov. Sendo M compacta, o Teorema 1.28 assegura que M possui um ponto p_0 onde todas as curvaturas principais são positivas, logo, em particular $H(p_0) > 0$. Disto segue que a constante H é necessariamente positiva. Agora, sendo H constante e positiva, segue das Fórmulas de Minkowski (2.3) e (2.4) que

$$(n+1)V(\Omega) = -\int_M \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp = -\frac{1}{H}\int_M H\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp = \frac{1}{H}A(M),$$

donde concluímos que

$$H = \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)},$$

o que prova que vale a igualdade em (2.11). Portanto, de acordo com o Teorema de Reilly, M é uma hiperesfera. Isto encerra a prova de Reilly do Teorema de Alexandrov.

Acompanhando os argumentos de [4], vejamos agora quais são as principais etapas da demonstração do Teorema de Reilly, que serão doravante denominadas o *método de Reilly*. A primeira etapa desse método consiste em obter uma nova fórmula integral a partir da bem conhecida Fórmula de Bochner [6], a qual, em nosso contexto, pode ser descrita como segue.

Teorema 2.9 (Fórmula de Bochner em $\mathbb{R}^m$)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um aberto, $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ um campo de vetores e $S : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega)$ o campo de tensores definido por $S(Y) = \bar{\nabla}_Y X$, para cada $Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Então, em cada ponto de Ω vale:*

$$\mathrm{Div}(\bar{\nabla}_X X - \mathrm{Div}(X)X) = \mathrm{tr}(S^2) - \mathrm{Div}(X)^2.$$

Demonstração. Das propriedades do divergente obtemos que

$$\mathrm{Div}(\bar{\nabla}_X X - \mathrm{Div}(X)X) = \mathrm{Div}(\bar{\nabla}_X X) - \mathrm{Div}(X)^2 - X(\mathrm{Div}(X)).$$

Se $\{e_i\}_{i=1}^m$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, então $\mathrm{Div}(\bar{\nabla}_X X) = \sum_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_X X, e_i \rangle$. Utilizando a definição (1.11) do tensor curvatura $\bar{R}$ de $\mathbb{R}^m$ obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_X X &= \bar{R}(e_i, X)X + \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_{e_i} X + \bar{\nabla}_{[e_i, X]} X \\ &= \bar{R}(e_i, X)X + \bar{\nabla}_X (S(e_i)) + S([e_i, X]). \end{aligned}$$

De outro lado, é fácil ver que $\bar{\nabla}_Y e_k = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Em particular, vale que $[e_i, X] = \bar{\nabla}_{e_i} X = S(e_i)$, e logo, $S([e_i, X]) = S^2(e_i)$, e também

$$\langle \bar{\nabla}_X (S(e_i)), e_i \rangle = X(\langle Se_i, e_i \rangle) - \langle S(e_i), \bar{\nabla}_X e_i \rangle = X(\langle S(e_i), e_i \rangle).$$

Destas observações concluímos que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}(\bar{\nabla}_X X) &= \sum_i \langle \bar{R}(e_i, X)X, e_i \rangle + X(\langle S(e_i), e_i \rangle) + \langle S^2(e_i), e_i \rangle \\ &= \overline{\mathrm{Ric}}(X, X) + X(\mathrm{tr}(S)) + \mathrm{tr}(S^2) \end{aligned}$$

Por último, observando que $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{Div}(X)$, e que a curvatura de Ricci de $\mathbb{R}^m$ na direção X verifica $\overline{\mathrm{Ric}}(X, X) = 0$, obtemos o resultado desejado. □

A aplicação da Fórmula de Bochner a um campo gradiente $X = \bar{\nabla} f$ definido no compacto $\overline{\Omega}$ cujo bordo é uma hipersuperfície compacta M, sendo $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, e o uso do teorema da divergência permitiram a Reilly obter uma nova fórmula integral.

Teorema 2.10 (Fórmula de Reilly)**.** *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio regular limitado por M com $\partial\Omega = M$. Se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ então*

$$\int_\Omega \{(\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2\} d\mathbf{x} = \int_M \{-2u\Delta z + nHu^2 + \langle A(\nabla z), \nabla z \rangle\} dp, \tag{2.5}$$

sendo $z = f|_M$, $u = \partial f / \partial \mathbf{N} = \langle \bar{\nabla} f, \mathbf{N} \rangle$ e $\bar{\nabla}^2 f$ é o hessiano de f em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Seja $X = \bar{\nabla} f$. Pela fórmula de Bochner (2.9), obtemos

$$\mathrm{Div}\left(\bar{\nabla}_{\bar{\nabla} f}\bar{\nabla} f - \bar{\Delta} f \bar{\nabla} f\right) = \mathrm{tr}(S^2) - (\bar{\Delta} f)^2.$$

Agora, observe que, neste caso, o campo de tensores S na fórmula de Bochner é o hessiano de f, isto é $S(Y) = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla} f = \bar{\nabla}^2 f(Y)$, para $Y \in \mathfrak{X}(\bar{\Omega})$, logo,

$$\langle S^2(Y), Y\rangle = \langle \bar{\nabla}^2 f(S(Y)), Y\rangle = \bar{\nabla}^2 f(S(Y), Y) = \bar{\nabla}^2 f(Y, S(Y)) = |\bar{\nabla}^2 f(Y)|^2,$$

e portanto, se $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$, então, podemos calcular

$$\mathrm{tr}(S^2) = \sum_i \langle S^2 e_i, e_i\rangle = \sum_i |\bar{\nabla}^2 f(e_i)|^2 = |\bar{\nabla}^2 f|^2.$$

Deste modo, a fórmula de Bochner pode ser reescrita na forma

$$(\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2 = \mathrm{Div}\left(\bar{\Delta} f \bar{\nabla} f - \bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f)\right).$$

Logo, pelo teorema da divergência, obtemos

$$\int_\Omega \{(\bar{\Delta} f)^2 - |\bar{\nabla}^2 f|^2\} d\mathbf{x} = \int_M \{\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) - \bar{\Delta} f \langle \bar{\nabla} f, \mathbf{N}\rangle\} dp.$$

Por outro lado, já obtivemos em (1.17) e (1.20) as seguintes expressões

$$\bar{\nabla} f = \nabla z + u\mathbf{N} \quad \text{e} \quad \bar{\Delta} f = \Delta z - nH\langle \bar{\nabla} f, \mathbf{N}\rangle + \bar{\nabla}^2 f(\mathbf{N}, \mathbf{N}),$$

válidas em cada ponto de M. Além disso, afirmamos que em cada ponto de M podemos escrever

$$\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) = \mathrm{div}(u\nabla z) - u\Delta z + \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(\mathbf{N}, \mathbf{N}).$$

De fato, utilizando as propriedades do hessiano e as fórmulas acima, obtemos

$$\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) = \bar{\nabla}^2 f(\nabla z + u\mathbf{N}, \mathbf{N}) = \bar{\nabla}^2 f(\nabla z, \mathbf{N}) + u\bar{\nabla}^2 f(\mathbf{N}, \mathbf{N}).$$

Também temos,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 f(\nabla z, \mathbf{N}) &= \langle \bar{\nabla}_{\nabla z} \nabla z, \mathbf{N}\rangle + \langle \nabla u, \nabla z\rangle + u\langle \bar{\nabla}_{\nabla z}\mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle \\ &= \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle + \langle \nabla u, \nabla z\rangle\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) &= \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle + \langle \nabla u, \nabla z\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \\ &= \mathrm{div}(u\nabla z) - u\Delta z + \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle + u\bar{\nabla}^2 f(\mathbf{N}, \mathbf{N}),\end{aligned}$$

o que prova a afirmação feita. Temos então que

$$\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) - u\bar{\Delta} f = \operatorname{div}(u\nabla z) - 2u\Delta z + nHu^2 + \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle.$$

Logo, da versão do Teorema da divergência dada no Teorema 1.26, obtemos

$$\int_M \{\bar{\nabla}^2 f(\bar{\nabla} f, \mathbf{N}) - u\bar{\Delta} f\} dp = \int_M \{-2u\Delta z + nHu^2 + \langle A(\nabla z), \nabla z\rangle\} dp,$$

e portanto segue a fórmula de Reilly. □

Antes de abordarmos a próxima etapa do método de Reilly, recordemos a *desigualdade de Schwarz*, que será de fundamental importância no que segue.

Lema 2.11 (Desigualdade de Schwarz)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f \in C^\infty(\Omega)$. Então*

$$(\bar{\Delta} f)^2 \leq m|\bar{\nabla}^2 f|^2,$$

valendo a igualdade se, e somente se, existe uma função $k : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}(\cdot,\cdot) = k(\mathbf{x})\langle\cdot,\cdot\rangle$, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$.

Demonstração. A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que

$$[\operatorname{tr}(T)]^2 \leq m \operatorname{tr}(T^2)$$

para toda aplicação linear auto-adjunta $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, valendo a igualdade se, e somente se, T é um múltiplo da identidade. Se aplicarmos isto a cada aplicação linear $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} \bar{\nabla} f$ para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ e cada $\mathbf{x} \in \Omega$, teremos que

$$[\bar{\Delta} f(\mathbf{x})]^2 = [\operatorname{Div}\bar{\nabla} f(\mathbf{x})]^2 = [\operatorname{tr}(\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})]^2 \leq m\operatorname{tr}((\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})^2),$$

valendo a igualdade se, e somente se, $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}} = k(\mathbf{x})I$ para algum $k(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, o que equivale a $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}(\cdot,\cdot) = k(\mathbf{x})\langle\cdot,\cdot\rangle$. Por outro lado, se $\{e_i\}_{i=1}^m$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ temos que

$$\operatorname{tr}((\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})^2) = \sum_i \langle(\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})^2(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle(\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})(e_i), (\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}})(e_i)\rangle = |\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}|^2,$$

o que encerra a demonstração. □

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$, e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio regular limitado por M com $\partial\Omega = M$. Observe que *não* estamos supondo que M tenha curvatura média constante. Vejamos agora a etapa crucial do método de Reilly, na qual ele utiliza de modo genial a fórmula de Reilly para estudar a geometria do bordo $\partial\Omega = M$. Consideremos $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \bar{\Delta} f = 1, & \text{em } \Omega \\ f = 0 & \text{sobre } M = \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

A existência de solução para este problema de Dirichlet desempenha no método de Reilly um papel análogo ao do Princípio do Máximo de Hopf no método de Alexandrov, e sua demonstração é não-trivial e pode ser encontrada em [12]. Reilly observa que a derivada normal de f sobre M verifica desigualdades integrais que envolvem a geometria de M. Para enunciar a primeira delas, denotemos por $u = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}} \in C^\infty(M)$ a derivada normal da solução do problema de Dirichlet (2.6). Então

$$\frac{V(\Omega)}{n+1} \geq \int_M H(p)u(p)^2 dp \tag{2.7}$$

valendo a igualdade se, e somente se, M é uma hiperesfera.

Vejamos a prova desta desigualdade. Observe inicialmente que $f = 0$ sobre M implica que $z = f|_M = 0$, e portanto $\nabla z = 0$ sobre M. Deste modo, a Fórmula de Reilly (2.5) se reduz a

$$\int_\Omega (1 - |\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}|^2) d\mathbf{x} = \int_M nH(p)u(p)^2 dp.$$

Por outro lado, integrando sobre Ω a desigualdade de Schwarz $1 = (\bar{\Delta} f(\mathbf{x}))^2 \leq (n+1)|\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}|^2$ e utilizando a igualdade acima obtemos

$$V(\Omega) = \int_\Omega (\bar{\Delta} f(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \leq (n+1)\int_\Omega |\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}|^2 d\mathbf{x} = (n+1)V(\Omega) - (n+1)\int_M nH(p)u(p)^2 dp$$

donde segue imediatamente a desigualdade (2.7).

De outro lado, vale a igualdade em (2.7) se, e somente se vale a igualdade na desigualdade de Schwarz, isto é, se, e somente se existe uma função $k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = k(\mathbf{x})\mathbf{v}$, para cada $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ e cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Vejamos que necessariamente temos $k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n+1}$ para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. De fato,

$$1 = \bar{\Delta} f(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}}) = \mathrm{tr}(k(\mathbf{x})I) = (n+1)k(\mathbf{x}).$$

Deste modo, obtemos que vale a igualdade em (2.7) se, e somente se $\bar{\nabla}^2 f_{\mathbf{x}} = \frac{1}{n+1}\mathrm{I}$ para cada $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, isto é, se, e somente se,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{n+1}\delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n+1. \tag{2.8}$$

Por integração direta em (2.8), vemos que f tem que ser da forma

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(n+1)}|\mathbf{x}|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + b,$$

com $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $b \in \mathbb{R}$. Completando quadrados, podemos escrever

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(n+1)}|\mathbf{x} + (n+1)\mathbf{a}|^2 + b - \frac{n+1}{2}|\mathbf{a}|^2.$$

Agora, observe que $M = \partial\Omega$ é não-vazio e $f(\mathbf{x}) = 0$ para cada $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Daí,

$$\frac{1}{2(n+1)}|\mathbf{x} + (n+1)\mathbf{a}|^2 = \frac{n+1}{2}|\mathbf{a}|^2 + b,$$

qualquer que seja $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Como $M = \partial\Omega$ possui mais de um ponto, o lado direito da igualdade acima deve ser necessariamente positivo e portanto M é uma hiperesfera centrada em $-(n+1)\mathbf{a}$ de raio $\sqrt{(n+1)\{(n+1)|\mathbf{a}|^2 + 2b\}}$.

Em resumo, vale a igualdade em (2.7) se, e somente se M é uma hiperesfera. Isto encerra a demonstração da primeira desigualdade.

A segunda desigualdade integral estabelecida por Reilly foi a seguinte

$$\int_M u(p)^2 dp \geq \frac{V(\Omega)^2}{A(M)}, \tag{2.9}$$

sendo A(M) a área (volume n-dimensional) de M. Para demonstrá-la, utilizamos o Teorema da divergência para obter

$$V(\Omega) = \int_\Omega 1 d\mathbf{x} = \int_\Omega \bar{\Delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_M \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}}(p) dp = -\int_M u(p) dp, \tag{2.10}$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para concluir que

$$V(\Omega)^2 = \left(\int_M u(p) dp\right)^2 \leq A(M) \left(\int_M u(p)^2 dp\right), \quad \text{ou seja,} \quad \int_M u(p)^2 dp \geq \frac{V(\Omega)^2}{A(M)},$$

o que termina a demonstração da segunda desigualdade integral verificada pela derivada normal da solução do problema de Dirichlet (2.6).

Finalizaremos este capítulo com a demonstração do Teorema de Reilly. Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta com curvatura média H constante. Admita que M está orientada pelo campo normal interior $\mathbf{N}$ e seja Ω o domínio regular limitado por M com $\partial\Omega = M$. Sendo M compacta, o Teorema 1.28 assegura que M possui um ponto p_0 onde $H(p_0) > 0$. Logo a constante H é necessariamente positiva. De (2.7) e (2.9) obtemos

$$\frac{V(\Omega)}{n+1} \geq \int_M H(p) u^2(p) dp = H \int_M u^2(p) dp \geq H \frac{V(\Omega)^2}{A(M)},$$

o que prova a primeira parte do Teorema de Reilly, isto é,

$$H \leq \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Além disso, vale a igualdade em (2.11) se, e somente se vale a igualdade em (2.7), ou seja, se, e somente se, M é uma hiperesfera. Isto termina a prova do Teorema de Reilly.

Capítulo 3

Hipersuperfícies com r-curvatura média constante

3.1 O Teorema de Alexandrov para curvatura média de ordem superior

O método de Reilly revelou-se fundamental no tópico que estuda as hipersuperfícies compactas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que possuem alguma r-curvatura média constante. De fato, em 1987, Ros [30] pôde estender o Teorema de Alexandrov para o caso de hipersuperfícies compactas com curvatura escalar H_2 constante, solucionando um problema proposto por Yau [34]. Mais geralmente, Ros [29] foi capaz de estendê-lo ao caso de hipersuperfícies compactas com alguma r-curvatura média constante, estabelecendo a seguinte caracterização das hiperesferas euclidianas.

Teorema 3.1 (Teorema de Ros, [30], [29])**.** *As únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano com alguma r-curvatura média constante são as hiperesferas.*

Como mencionado acima, esta caracterização das hiperesferas euclidianas obtida por Ros faz uso do método de Reilly. Para que este método funcione nesta situação, Ros utiliza outros teoremas de fundamental importância neste tópico. O primeiro deles é uma generalização das Fórmulas de Minkowski 2.3, já o segundo, é uma nova desigualdade integral obtida por Ros, e por último, as clássicas desigualdades de Gårding [11]. Na próxima seção descreveremos os dois primeiros (seguindo os argumentos de [4]), já que uma discussão mais profunda das desigualdades de Gårding nos levaria muito longe do nosso objetivo nesta dissertação.

Agora, recordemos que o Teorema de Alexandrov pode ser demonstrado tanto via método de reflexão de Alexandrov quanto via método de Reilly. Esta observação nos leva a uma pergunta natural. O método de reflexão de Alexandrov pode ser utilizado para demonstrar o Teorema de Ros? Claramente, a resposta a esta questão está vinculada à existência de uma versão do Princípio do máximo de Hopf para hipersuperfícies com r-curvatura média constante. Esta questão será abordada na Seção 3.3.

3.2 A. Ros e o método de Reilly.

Vejamos agora os resultados fundamentais utilizados por Ros em sua prova do Teorema 3.1 (seguindo o roteiro indicado em [4]). O primeiro deles é a generalização da Fórmula de Minkowski 2.3.

Teorema 3.2 (Fórmulas de Minkowski). *Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta. Então,*

$$\int_M \{H_r(p) + H_{r+1}(p)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\}dp = 0, \tag{3.1}$$

para cada $r = 0, \ldots, n-1$; sendo $H_0 \equiv 1$, por definição.

Demonstração. As fórmulas de Minkowski foram demonstradas primeiramente por Hsiung em [17] usando o método de hipersuperfícies paralelas. Seguiremos a mesma linha de raciocínio. Sendo M uma hipersuperfície compacta do $\mathbb{R}^{n+1}$ então o Teorema de Brouwer-Samelson nos diz que M é orientável (veja [25]). Admitiremos então que M está orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$.

Inicialmente definiremos a noção de hipersuperfície paralela (seguindo os argumentos contidos em [27]). Consideremos a aplicação diferenciável $\Phi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\Phi(p,t) = p + t\mathbf{N}(p)$ para $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. A diferencial de Φ em um ponto $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} d\Phi_{(p,t)}(\mathbf{v}, 0) &= \mathbf{v} + td\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} \in T_pM \\ d\Phi_{(p,t)}(\mathbf{0}, 1) &= \mathbf{N}(p). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, fazendo $t = 0$ concluímos que $d\Phi_{(p,0)}$ é um isomorfismo linear entre $T_pM \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. Do Teorema da função inversa segue que existem uma vizinhança V de p em M e um número $\delta > 0$ tais que Φ aplica $V \times (-\delta, \delta)$ difeomorficamente sobre sua imagem $\mathcal{N}_\delta(V) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, denominada uma *vizinhança tubular* de V em $\mathbb{R}^{n+1}$. Note que $\mathcal{N}_\delta(V) = \cup_{p \in M}\mathcal{N}_\delta(p)$, sendo $\mathcal{N}_\delta(p) = \{p + t\mathbf{N}(p); |t| < \delta\}$ o segmento aberto de comprimento δ da reta normal a M passando por p. Sendo M compacta podemos cobri-la com um número finito de tais vizinhanças V e tomar δ como sendo o menor dentre eles. Portanto, a aplicação Φ, restrita a $M \times (-\delta, \delta)$ é um difeomorfismo local. Afirmo que existe um $\epsilon \in (0, \delta)$ tal que a aplicação Φ restrita a $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ é injetiva. De fato, se não for assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ existiriam pontos $p_k, q_k \in M$ com $p_k \neq q_k$ e

$$\mathcal{N}_{1/k}(p_k) \cap \mathcal{N}_{1/k}(q_k) \neq \emptyset$$

Sendo M compacta, podemos supor que as sequências p_k e q_k convergem em M para p e q. Se tomamos $r_k \in \mathcal{N}_{1/k}(p_k) \cap \mathcal{N}_{1/k}(q_k)$ então

$$|p_k - q_k| \leq |p_k - r_k| + |r_k - q_k| < \frac{2}{k}$$

e portanto $p = q$. Agora, seja $\mathcal{N}_\rho(V)$ uma vizinhança tubular de uma vizinhança V de $p = q$ de acordo com o estabelecido acima. Sabemos que existe k_0 tal que $p_k, q_k \in V$ e $1/k < \rho$ para todo

$k \geq k_0$. Mas então teremos uma contradição, visto que

$$\mathcal{N}_{1/k}(p_k) \cap \mathcal{N}_{1/k}(q_k) \subset \mathcal{N}_\rho(p_k) \cap \mathcal{N}_\rho(q_k) = \emptyset$$

desde que $\mathcal{N}_\rho(V)$ é uma vizinhança tubular e portanto Φ restrita $V \times (-\rho, \rho)$ deve ser injetiva. Portanto, concluímos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{N}_\epsilon(M) = \Phi(M \times (-\epsilon, \epsilon))$$

é injetiva e é um difeomorfismo local. Desde que ela é obviamente sobrejetiva, deve ser um difeomorfismo. Agora, para cada $|t| < \epsilon$ defina $M_t = \{\Phi(p, -t); \quad p \in M\}$, e seja $\phi_t : M \to M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação definida por

$$\phi_t(p) = \Phi(p, -t), \qquad p \in M.$$

É claro que ϕ_t é um homeomorfismo. Por outro lado, se $p \in M$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ são as direções principais de M em p, então

$$(d\phi_t)_p(e_i) = e_i - td\mathbf{N}_p(e_i) = (1 + t\kappa_i(p))e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Note que se para algum i tivermos $(d\phi_t)_p(e_i) = \mathbf{0}$ então de (3.2) teremos $d\Phi_{(p,t)}(e_i, 0) = \mathbf{0}$ o que é impossível, tendo em vista que Φ é um difeomorfismo em $M \times (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto ϕ_t tem diferencial injetiva em cada ponto $p \in M$ e para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto, a imagem $M_t = \phi_t(M)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi_t : M \to M_t$ é um difeomorfismo para cada t, $|t| < \epsilon$. Denominaremos M_t por *hipersuperfície paralela* a M à distância orientada t. Observe que, dados $p \in M$ e $\mathbf{v} \in T_pM$, temos

$$(d\phi_t)_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + tA_p(\mathbf{v}),$$

e isto implica que, para todo $p \in M$, o espaço tangente a M em p coincide com o espaço tangente a M_t em $p_t = p - t\mathbf{N}(p)$, de maneira que $\mathbf{N}_t(p_t) = \mathbf{N}(p)$ define uma orientação para M_t. Veja também que $\mathbf{N}_t \circ \phi_t = \mathbf{N}$. Assim, para cada $p \in M$ temos, pela regra da cadeia, que

$$A_p = -d\mathbf{N}_p = -(d\mathbf{N}_t)_{\phi_t(p)}(d\phi_t)_p = (A_t)_{p_t}(d\phi_t)_p.$$

Denotaremos $(A_t)_{p_t}$ por A_t. Seja $\mathbf{v} \in T_pM$ um autovetor de A_p associado a um autovalor λ. Temos que

$$\lambda\mathbf{v} = A_p(\mathbf{v}) = A_t(d\phi_t)_p(\mathbf{v}) = A_t(\mathbf{v} + tA_p(\mathbf{v})) = (1 + \lambda t)A_t(\mathbf{v}).$$

Note que, se $1 + \lambda t = 0$ para algum $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, então $(d\phi_t)_p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ com $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, o que contradiz o fato de ϕ_t ser um difeomorfismo. Assim,

$$A_t(\mathbf{v}) = \frac{\lambda}{1 + t\lambda}\mathbf{v},$$

e portanto, $\mathbf{v}$ é um autovetor de A_t associado ao autovetor $\frac{\lambda}{1+\lambda t}$. Em particular, se $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ são direções principais de M com curvaturas principais $\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p)$, respectivamente, então $e_1, \ldots, e_n$ também são direções principais de M_t em p_t com curvaturas principais

$$\kappa_i(p_t) = \frac{\kappa_i(p)}{1 + t\kappa_i(p)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Denotando por $H(p_t)$ a curvatura média de M_t no ponto p_t obtemos

$$H(p_t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(p_t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa_i(p)}{1 + t\kappa_i(p)} = \frac{1}{n}\frac{P'(t)}{P(t)}.$$

sendo $P(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\kappa_i(p))$, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Aplicando a Fórmula de Minkowski (2.3) à hipersuperfície M_t obtemos

$$\int_{M_t} \{1 + H(p_t)\langle p_t, \mathbf{N}(p_t)\rangle\} dp_t = 0$$

Vamos expressar esta integral sobre M_t como uma integral sobre M, utilizando a mudança de variáveis dada pelo difeomorfismo ϕ_t. Como $\mathbf{N}_t \circ \phi_t = \mathbf{N}$, temos que ϕ_t preserva as orientações. Pelo teorema de mudança de variáveis

$$\int_{\phi_t(M)} f(p_t) dp_t = \int_M (f \circ \phi_t)(p) \det((d\phi_t)_p) dp,$$

para cada $f \in C^\infty(M_t)$. Observe que $M_t = \phi_t(M)$, e que, além disso, em uma base de T_pM formada por direções principais, temos que

$$(d\phi_t)_p = I + tA_p = \mathrm{diag}((1 + t\kappa_1(p), \ldots, 1 + t\kappa_n(p))).$$

Assim, sendo o determinante invariante por mudança de base, obtemos $\det((d\phi_t)_p) = P(t)$. Agora, aplicando o teorema de mudança de variáveis e usando a expressão obtida para $\mathbf{N}_t$ e $H(p_t)$ obtemos

$$0 = \int_{M_t} \{1 + H(p_t)\langle p_t, \mathbf{N}_t(p_t)\rangle\} dp_t = \int_M \left\{P(t) + \frac{1}{n}P'(t)\langle p - t\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)\rangle\right\} dp.$$

Como $\langle p - t\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)\rangle = \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle - t$ temos então que

$$\int_M \left\{P(t) - \frac{t}{n}P'(t) + \frac{1}{n}P'(t)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\right\} \mathrm{d}p = 0, \qquad |t| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Por outro lado,

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + k_i(p)) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H_i(p)t^i, \text{ e } P'(t) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} H_i(p)t^{i-1}.$$

Daí, escrevendo $H_i(p) = H_i$ obtemos que

$$P(t) - \frac{t}{n}P'(t) + \frac{1}{n}P'(t)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{n-i}{n}\binom{n}{i} H_i t^i + \frac{i}{n}\binom{n}{i} H_i \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle t^{i-1} \right\}.$$

Veja que a soma dos termos i e $i+1$ do somatório acima, com $i = 1, \ldots, n-1$, é igual a

$$\frac{i}{n}\binom{n}{i} H_i\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle t^{i-1} + \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}\{H_i + H_{i+1}\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\} t^i + \frac{n-(i+1)}{n}\binom{n}{i+1} H_{i+1} t^{i+1}.$$

Daí,

$$P(t) - \frac{t}{n}P'(t) + \frac{1}{n}P'(t)\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}\{H_i + H_{i+1}\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\} t^i.$$

Substituindo isto na igualdade (3.3), obtemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1} \int_M \{H_i + H_{i+1}\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\} dp \; t^i = 0,$$

qualquer que seja $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Logo, da igualdade de polinômios segue que

$$\int_M \{H_i + H_{i+1}\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle\} dp = 0, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

o que prova o teorema. $\square$

A Fórmula de Minkowski é um dos ingredientes básicos na prova de Ros do Teorema 3.1. Um outro é uma nova desigualdade integral para hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano. Esta desigualdade, inspirada no trabalho de Heintze & Karcher [13], fornece uma estimativa do volume do domínio limitado pela hipersuperfície em termos de sua curvatura média.

Teorema 3.3 (Desigualdade de Ros [29])**.** *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e Ω o domínio regular limitado por M com $\partial\Omega = M$. Se a curvatura média H da hipersuperfície M com relação ao campo unitário normal interior é positiva em todos os pontos, então*

$$\int_M \frac{1}{H(p)}\, dp \geq (n+1)V(\Omega). \tag{3.4}$$

e vale a igualdade se, e somente se, M é uma hiperesfera.

Demonstração. A prova de Ros para a desigualdade (3.4) utiliza o método de Reilly que descrevemos na Seção 2.4. Recordemos que Reilly começa por considerar a solução $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \bar{\Delta} f = 1, & \text{em } \Omega \\ f = 0 & \text{sobre } M = \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Então, definindo $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ como sendo a derivada normal de f, isto é, $u = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}}$, obtemos, via teorema da divergência que

$$V(\Omega) = \int_\Omega 1 d\mathbf{x} = \int_\Omega \overline{\Delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\int_M u(p)dp.$$

Agora, utilizando a hipótese de que a curvatura média H é sempre positiva (não necessariamente constante), e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz à igualdade acima, obtemos que

$$V(\Omega)^2 = \left(\int_M u dp\right)^2 = \left(\int_M \sqrt{H} u \frac{1}{\sqrt{H}} dp\right)^2 \leq \left(\int_M H u^2 dp\right)\left(\int_M \frac{1}{H} dp\right)$$

Por outro lado a desigualdade de Reilly (2.7) nos diz que

$$\int_M H u^2 dp \leq \frac{V(\Omega)}{n+1},$$

a qual combinada com a desigualdade anterior nos mostra que

$$V(\Omega)^2 \leq \frac{V(\Omega)}{n+1}\left(\int_M \frac{1}{H} dp\right),$$

o que prova (3.4). Além disso, vale a igualdade em (3.4) se, e somente se vale a igualdade em (2.7), e isto, sabemos que ocorre se, e somente se M é uma hiperesfera. $\square$

Vejamos agora a demonstração do Teorema de Ros. Suponha que a r-curvatura média H_r é constante para algum $1 \leq r \leq n$. A compacidade de M e o Teorema 1.28 asseguram que M tem um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas (estamos supondo que M está orientada pelo campo normal unitário interior $\mathbf{N}$). Portanto H_r é uma constante positiva. Logo, as desigualdades de Gårding [11] nos dizem que

$$H_{r-1}(p) \geq H_r^{(r-1)/r} > 0, \tag{3.6}$$

e também

$$H(p) \geq H_r^{1/r} > 0. \tag{3.7}$$

para todo $p \in M$. Por outro lado, de acordo com a Fórmula de Minkowski (2.4) temos

$$(n+1)V(\Omega) = -\int_M \langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp,$$

a qual, quando multiplicada pela constante H_r e combinada com a Fórmula de Minkowski (3.1), segue que

$$(n+1)H_r V(\Omega) = -\int_M H_r\langle p, \mathbf{N}(p)\rangle dp = \int_M H_{r-1}(p)dp.$$

Agora, integrando a desigualdade de Gårding (3.6) sobre M obtemos

$$\int_M H_{r-1}(p)dp \geq \int_M H_r^{1-\frac{1}{r}} dp = H_r^{1-\frac{1}{r}} A(M),$$

a qual inserida na igualdade precedente nos mostra que

$$(n+1)H_r V(\Omega) \geq H_r^{1-\frac{1}{r}} A(M)$$

isto é,

$$H_r^{1/r} \geq \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, combinando a desigualdade de Ros (3.4) e a segunda desigualdade de Gårding (3.7) obtemos,

$$(n+1)V(\Omega) \leq \int_M \frac{1}{H(p)} dp \leq \int_M \frac{1}{H_r^{1/r}} dp = \frac{1}{H_r^{1/r}} A(M)$$

ou seja,

$$H_r^{1/r} \leq \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)},$$

e vale a igualdade se, e somente se vale a igualdade na desigualdade de Ros (3.4), ou seja, se, e somente se M é uma hiperesfera. Por último combinando a desigualdade acima com a desigualdade (3.8) obtemos a igualdade

$$H_r^{1/r} = \frac{A(M)}{(n+1)V(\Omega)},$$

o que implica que M é uma hiperesfera, e termina a prova do Teorema de Ros.

Observação 3.4.

A demonstração de Ros no caso em que a curvatura escalar $S = n(n-1)H_2$ é uma constante positiva não faz uso das desigualdades de Gårding. De fato, de (1.16) concluímos que $n^2H^2 \geq n(n-1)H_2$, donde segue que $H^2 \geq H_2$, o que prova (3.7) no caso $r = 2$ (veja [30]).

3.3 N. Korevaar e o método de Alexandrov

Vimos na seção anterior que a caracterização das hiperesferas euclidianas como sendo as únicas hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano que possuem alguma r-curvatura média constante foi obtida por Ros utilizando o método de Reilly. Deste modo, é natural questionar se o método de Alexandrov também pode ser utilizado para demonstrar o Teorema de Ros. Esta questão foi resolvida por Korevaar [20]. Nesse trabalho, Korevaar utilizou as idéias de Caffarelli, Nirenberg & Spruck [7] para mostrar que a equação diferencial parcial associada à r-curvatura média constante também obedece um princípio do máximo, obtendo assim uma nova demonstração do Teorema de Ros, de modo independente e quase que simultaneamente, utilizando o método de reflexão de Alexandrov.

A fim de que possamos apresentar o Princípio do máximo para hipersuperfícies com r-curvatura média constante, é preciso que determinemos o operador $\mathcal{H}_r$ associado à r-curvatura média H_r de um gráfico, para $2 \leq r \leq n$. Para isso seguiremos as idéias contidas em [23].

Proposição 3.5. *Seja $u \in C^2(\Omega)$ uma função definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $1 \leq r \leq n$, a r-curvatura média H_r do gráfico de u satisfaz*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} W^{r+2} H_r &= \sum_{j_1<\cdots<j_r} (W^2 - u_{j_1}^2 - \ldots - u_{j_r}^2) \begin{vmatrix} u_{j_1j_1} & u_{j_1j_2} & \ldots & u_{j_1j_r} \\ u_{j_1j_2} & u_{j_2j_2} & \ldots & u_{j_2j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{j_1j_r} & u_{j_2j_r} & \ldots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix} \\
&- 2\sum_{j<k} u_j u_k \left(\sum_{i_2<\cdots<i_r, i_l \neq j,k} \begin{vmatrix} u_{jk} & u_{ji_2} & \ldots & u_{ji_r} \\ u_{i_2k} & u_{i_2i_2} & \ldots & u_{i_2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_rk} & u_{i_ri_2} & \ldots & u_{i_ri_r} \end{vmatrix} \right). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

A prova dessa proposição depende do seguinte lema.

Lema 3.6. *O polinômio $Q(t) = \det(R - tS)$, sendo R e S matrizes arbitrárias de ordem n, pode ser escrito como uma soma de determinantes. O termo livre de $Q(t)$ é $\det(R)$. O coeficiente de $(-t)^j$ é a soma dos determinantes obtidos trocando na matriz R quaisquer j colunas pelas colunas correspondentes da matriz S.*

Demonstração. Provaremos este resultado por indução sobre a ordem das matrizes. Para matrizes de ordem 1 o resultado é trivial. Suponha que o resultado é válido para matrizes quadradas de ordem $(n-1)$, para $n \geq 2$ inteiro. Mostremos que o resultado é válido para matrizes quadradas de ordem n e portanto, pelo princípio de indução, vale para qualquer n natural.

Suponha que R e S são matrizes quadradas de ordem n, com $R = [r_{ij}]$ e $S = [s_{ij}]$. Logo $R - tS = [r_{ij} - ts_{ij}]$. Daí,

$$\det(R - tS) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(r_{i1} - ts_{i1})\det(R_{i1} - tS_{i1}),$$

sendo que R_{i1} e S_{i1} são as $i-$ésimas submatrizes de R e S, respectivamente. Pela hipótese de indução,

$$\det(R_{i1} - tS_{i1}) = \sum_{j=0}^{n-1} (-t)^j |R_{i1}(s_j)|,$$

com $|R_{i1}(s_j)|$ denotando a soma dos determinantes obtidos trocando j colunas em R_{i1} pelas colunas correspondentes de S_{i1}. Assim,

$$\begin{aligned}
\det(R - tS) &= \sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} r_{i1}|R_{i1}(s_j)| + \sum_{j=0}^{n-1}(-t)^{j+1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}s_{i1}|R_{i1}(s_j)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} r_{i1}|R_{i1}(s_0)| + \\
&+ \sum_{l=1}^{n-1}(-t)^l \left\{ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} r_{i1}|R_{i1}(s_l)| + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} s_{i1}|R_{i1}(s_{l-1})| \right\} + \\
&+ (-t)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} s_{i1}|R_{i1}(s_{n-1})| \\
&= \det(R) + \sum_{l=1}^{n-1}|R(s_l)|(-t)^l + \det(S)(-t)^n,
\end{aligned}$$

o que prova o resultado para n. $\square$

Veja que, se S for a matriz identidade, teremos $|R(s_l)| = \sum_{|J|=n-l}\det(R_J)$, $l = 1, \ldots, n-1$, sendo que a notação $|J| = k$ significa que $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ é um conjunto de k índices tais que $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$, e R_J denota a submatriz principal de ordem k de R com linhas e colunas indexadas por J.

Nesse contexto, observamos que as curvaturas $H_r(p)$, para $1 \leq r \leq n$, em um ponto p de uma hipersuperfície orientada M em $\mathbb{R}^{n+1}$ com campo normal unitário $\mathbf{N}$, podem ser definidas juntamente por

$$\det(tI_p - A_p) = t^n - nH_1(p)t^{n-1} + \binom{n}{2}H_2(p)t^{n-2} - \ldots + (-1)^n H_n(p), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Já vimos que, fixada uma base de T_pM, a matriz do operador forma $[A_p]$ em p é dada pelo produto $[A_p] = [\mathcal{I}_p]^{-1}[\mathcal{II}_p]$ (Lema 1.19). Portanto, de acordo com o Lema acima, o coeficiente de $(-t)^r$ no polinômio característico $\mathcal{P}(t) = \det([A_p] - tI)$ pode ser expresso como soma de menores principais de ordem $n-r$, consequentemente a função $H_r(p)$, como mostra o coeficiente de t^{n-r} em (3.10), satisfaz

$$\binom{n}{r}H_r(p) = \sum_{|J|=r}\det([A_p]_J), \qquad r = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Evidentemente, se tomarmos uma base de T_pM que diagonaliza A_p, segue que qualquer submatriz principal $r \times r$ é diagonal com entradas $\kappa_{j_1}, \ldots, \kappa_{j_r}$, e portanto reobtemos a expressão (1.7), isto é

$$\binom{n}{r}H_r(p) = \sum_{j_1<\ldots<j_r}\kappa_{j_1}(p)\cdots\kappa_{j_r}(p) = \sigma_r(\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p)).$$

Além disso, se mudamos a orientação da hipersuperfície M trocando $\mathbf{N}$ por $-\mathbf{N}$, é fácil ver que H_r troca de sinal se r for ímpar, e não troca se r for par; isto é, quando r é ímpar, H_r é extrínseca (e seu sinal depende da escolha da orientação) e quando r é par, H_r é intrínseca (e seu sinal independe da escolha da orientação).

Demonstração da proposição 3.5. Seguiremos as idéias contidas em [23]. Já mostramos este resultado para $r = 1$ na seção 2.2. Mostremos agora para $r > 1$. Denotando A_p por A e utilizando (3.11) e (1.7) obtemos

$$\binom{n}{r} H_r(p) = \sigma_r(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \sum_{|J|=r} \det([A]_J).$$

Usaremos o Lema 3.6 para calcular $\det([A_J])$. Por (1.10) podemos escrever

$$-W^3[a_{ij}] = [u_i c_j] - W^2[u_{ij}], \tag{3.12}$$

com $t = W^2$, $R_{ij} = u_i c_j$ e $S_{ij} = u_{ij}$. Observe que todas as colunas de R são múltiplas de $[u_1 u_2 \dots u_n]$. Assim, o determinante menor obtido substituindo na submatriz R_J, com $|J| = r$, j colunas pelas colunas correspondentes da submatriz S_J, é zero quando pelo menos duas colunas de R_J não são substituídas. Disso segue que os coeficientes de $(-t)^j$ em $\det(R_J - tS_J)$ são nulos, exceto quando $j = r$ ou $j = r-1$. Apresentaremos apenas o caso $J = \{1, \dots, r\}$, pois este ilustra perfeitamente o raciocínio e nos permite evitar a notação pesada do caso geral. Segue de (3.12) que

$$(-W^3)^r \det(A_J) = \det\left(\begin{vmatrix} u_1c_1 & u_1c_2 & \dots & u_1c_r \\ u_2c_1 & u_2c_2 & \dots & u_2c_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_rc_1 & u_rc_2 & \dots & u_rc_r \end{vmatrix} - W^2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rr} \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} = \quad & (-W^2)^r \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rr} \end{vmatrix} + \\ + \quad & (-W^2)^{r-1} \left(c_1 \begin{vmatrix} u_1 & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_2 & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_r & u_{r2} & \dots & u_{rr} \end{vmatrix} + \dots + c_r \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_r \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

O j-ésimo determinante aparecendo no coeficiente de $(-W^2)^{r-1}$ é igual a $\sum_{i=1}^r u_i \Delta_{ij}$, sendo Δ_{ij} o cofator (i,j) de S_J. É conveniente separar $c_j = \sum_{k=1}^n u_k u_{kj}$ em duas somas de índices de $k \in J$

e $k \notin J$. Segue então que o coeficiente de $(-W^2)^{r-1}$ é igual a

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\sum_{k\in J} u_k u_{kj} + \sum_{k\notin J} u_k u_{kj}\right)\sum_{i=1}^{r}\Delta_{ij}\right] = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i,k\in J} u_k u_{kj} u_i \Delta_{ij} + \sum_{i\in J,\, k\notin J} u_k u_{kj} u_i \Delta_{ij}\right)$$
$$= \left(\sum_{i,k\in J} u_k u_i + \sum_{i\in J,\, k\notin J} u_k u_i\right)\sum_{j\in J} u_{kj}\Delta_{ij}.$$

Temos que o último fator acima é o determinante obtido trocando na submatriz S_J sua i-ésima linha por $[u_{k1}\dots u_{kr}]$. Quando $k \in J$, tal determinante é igual a zero ou é igual a $\det(S_J)$, dependendo se $k \neq i$ ou se $k = i$. Assim a primeira soma é reduzida a $\left(\sum_{i\in J} u_i^2\right)\det(S_J)$.

Observe que o resultado obtido até aqui vale para qualquer conjunto de índices J, com $|J| = r$. Dividindo $(-W^3)^r\det(A_J)$ em (3.13) por $(-1)^r W^{2(r-1)}$, obtemos que

$$W^{r+2}\det(A_J) = \left(W^2 - \sum_{i\in J} u_i^2\right)\det(S_J) - \sum_{i\in J,\, k\notin J}\left(u_i u_k \sum_{j\in J} u_{kj}\Delta_{ij}\right),$$

para qualquer conjunto de índices J de comprimento r. A soma sobre $|J| = r$ nos dá

$$\binom{n}{r} W^{r+2} H_r = \sum_{J}\left(W^2 - \sum_{i\in J} u_i^2\right)\det(S_J) - \sum_{J}\sum_{i\in J,\, k\notin J}\left(u_i u_k \sum_{j\in J} u_{kj}\Delta_{ij}\right). \qquad (3.14)$$

O termo $\sum_{j\in J} u_{kj}\Delta_{ij}$ aparecendo na igualdade acima é o determinante obtido trocando na submatriz S_J da matriz simétrica $[u_{ij}]$ a linha de ordem $i \in J$ pela correspondente linha indexada por $k \notin J$, que coincide com $\sum_{j'\in J'} u_{ij'}\Delta_{ij'}$, onde J' é obtida de J após trocar $i \in J$ por $k \notin J$. Permute algumas linhas de $S_{J'}$, transponha a matriz resultante e finalmente transponha o mesmo número de linhas. Obtemos então que ambas expressões do determinante acima podem ser transformadas em

$$\begin{vmatrix} u_{ik} & u_{ij_2} & \dots & u_{ij_r} \\ u_{j_2k} & u_{j_2j_2} & \dots & u_{j_2j_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{j_rk} & u_{j_rj_2} & \dots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix}$$

onde a seqüência de $r-1$ índices de $j_2 < \ldots < j_r$ juntamente com i (ou k) formam J (ou J'). Assim o segundo somando em (3.14) é duplicado, uma vez que i e k são intercambiados, o que prova (3.9). $\square$

Definição 3.7. *O operador $\mathcal{H}_r$, para $r > 1$, associado à r-curvatura média H_r do gráfico de u é* *definido por*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_r[u] &= \sum_{j_1<\cdots<j_r} (W^2 - u_{j_1}^2 - \ldots - u_{j_r}^2) \begin{vmatrix} u_{j_1j_1} & u_{j_1j_2} & \ldots & u_{j_1j_r} \\ u_{j_1j_2} & u_{j_2j_2} & \ldots & u_{j_2j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{j_1j_r} & u_{j_2j_r} & \ldots & u_{j_rj_r} \end{vmatrix} \\
&- 2\sum_{j<k} u_j u_k \left(\sum_{i_2<\cdots<i_r, i_l \neq j,k} \begin{vmatrix} u_{jk} & u_{ji_2} & \ldots & u_{ji_r} \\ u_{i_2k} & u_{i_2i_2} & \ldots & u_{i_2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_rk} & u_{i_ri_2} & \ldots & u_{i_ri_r} \end{vmatrix} \right). \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Observe que a proposição 3.5 nos dá

$$\mathcal{H}_r[u] = \binom{n}{r} W^{r+2} H_r. \qquad (3.16)$$

O operador $\mathcal{H}_r$, para $r > 1$, não é quasilinear com respeito a nenhuma função. Por definição, um operador de segunda ordem F agindo continuamente em $(\bar{\nabla}^2 u, \bar{\nabla} u)$ é chamado *totalmente não linear* se sua ação nas segundas derivadas $\{u_{ij}\}$ não é linear. Em outras palavras, quando F não é um operador quasilinear de segunda ordem.

Embora seja totalmente não linear e muito mais complicada que a equação da curvatura média (2.1), a equação da r-curvatura média (3.15), para $r > 1$, também obedece a um princípio do máximo.

Teorema 3.8 (Princípio do máximo para r-curvatura média constante, Korevaar [20])**.**

(i) <u>Ponto interior</u> : *Para um dado $2 \leq r \leq n$, sejam $M, M' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfícies orientadas com r-curvatura média constante satisfazendo $H_r \leq H_r'$. Suponha que M e M' têm o mesmo vetor normal em um ponto de tangência $p \in M \cap M'$, e também que M' tem um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas. Então M não pode permanecer acima de M' em uma vizinhança de p, a não ser que as hipersuperfícies coincidam localmente.*

(ii) <u>Ponto de bordo</u> : *Sejam $M, M' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfícies orientadas, com bordos ∂M e $\partial M'$, respectivamente, com r-curvatura média constante satisfazendo $H_r \leq H_r'$ para um dado $2 \leq r \leq n$. Assuma que M e M' bem como seus bordos são tangentes em $p \in (\partial M \cap \partial M')$, tendo o mesmo vetor normal no ponto de tangência, e também que M' tem um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas. Então M não pode permanecer acima de M' numa vizinhança de p, exceto quando as hipersuperfícies coincidem localmente.*

Veja que, em contraste ao Princípio do máximo para curvatura média constante (Teorema 2.5), o Princípio do máximo para r-curvatura média constante, para $r \geq 2$, tem uma hipótese adicional, a saber, a existência de um ponto em M' onde todas as curvaturas principais M' são positivas. Uma razão para tal hipótese pode ser encontrada no seguinte exemplo: considere M e M' duas esferas em $\mathbb{R}^3$ de raio 1 que são tangentes exteriormente em um ponto p. Orientando estas esferas de modo que elas tenham o mesmo vetor normal no ponto p, uma delas estará sobre a outra em uma vizinhança do ponto p. Além disso, como a 2-curvatura média é, nesse caso, a curvatura gaussiana, então $H_2 = H_2' \equiv 1$ quaisquer que sejam as orientações escolhidas. Entretanto, as duas esferas não coincidem em nenhuma vizinhança do ponto de tangência.

Demonstração do Teorema 3.8. Semelhantemente à prova do princípio do máximo para curvatura média constante (Teorema 2.5), a prova do Teorema 3.8 é também uma aplicação do Princípio do máximo de Hopf. A prova que apresentaremos segue as idéias contidas em [23] com algumas pequenas adaptações. Procedendo como na prova do Teorema 2.5, suponhamos que o ponto de tangência p seja a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$, e escrevamos M e M' como gráficos das funções u e u', respectivamente, definidas em uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$, se p for um ponto interior de M e M', ou em um semi-espaço, se p for um ponto de bordo de M e M', com a normal apontando para cima. Assim teremos que $u(\mathbf{0}) = u'(\mathbf{0}) = 0$ e $\bar{\nabla} u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla} u'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por (1.10), isto implica que $A_p = [u_{ij}(\mathbf{0})]$ e $A_p' = [u_{ij}'(\mathbf{0})]$. Logo os autovalores das matrizes Hessianas de u e u' na origem são as curvaturas principais de M e M' em p, respectivamente. Denotamos por $\mathbf{k}(q) = (\kappa_1(q), \ldots, \kappa_n(q))$ o vetor de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são as curvaturas principais ordenadas $\kappa_1(q) \geq \ldots \geq \kappa_n(q)$ de M em q, e o chamamos de vetor curvatura de M em q. Analogamente, denotamos por $\mathbf{k}'$ o vetor curvatura de M'.

Suponha que M está acima de M' em uma vizinhança de p, isto é, $u \geq u'$ numa vizinhança U de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$, se p for um ponto interior de M e M' ou no semi-espaço superior, se p for um ponto de bordo de M e M'. Vejamos inicialmente que $A_p = A_p'$ (e logo $\bar{\nabla}^2 u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla}^2 u'(\mathbf{0})$). Para ver isto, provemos as seguintes afirmações.

Afirmação 3.9. *As matrizes Hessianas satisfazem* $[u_{ij}(\mathbf{0})] \geq [u_{ij}'(\mathbf{0})]$.

Demonstração. De fato, seja $w = u' - u$. Temos então que $w \leq 0$ e possui um máximo em $\mathbf{0}$. Isso implica que

$$\langle \bar{\nabla}^2 w(\mathbf{0})(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j} w_{ij}(\mathbf{0}) x_i x_j \leq 0,$$

para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Tome $\mathbf{x} = e_k + e_l$, $1 \leq k, l \leq n$. Veja que

$$0 \geq \langle \bar{\nabla}^2 w(\mathbf{0})(e_k + e_l), e_k + e_l \rangle = w_{kl}(\mathbf{0}) = (u' - u)_{kl}(\mathbf{0}).$$

Portanto, $u_{kl}(\mathbf{0}) \geq u_{kl}'(\mathbf{0})$, para $1 \leq k, l \leq n$. □

Definimos o cone positivo de $\mathbb{R}^n$ como sendo

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}.$$

Afirmação 3.10. $\mathbf{k}(p) - \mathbf{k}'(p) \in \overline{\Gamma}$.

Demonstração. Seja $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ um conjunto ortonormal de direções principais de M em p, isto é, tal que $A_p(\mathbf{v}_i) = \kappa_i(p)\mathbf{v}_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Temos, pela demonstração acima, que

$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \langle A'\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sendo que $A = A_p$ e $A' = A'_p$. Por outro lado,

$$\kappa_1(p) = \max_{|\mathbf{x}|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \qquad \text{e} \qquad \kappa_i(p) = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}_i} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle,\ i = 2, \ldots, n,$$

sendo que
$\mathcal{R}_i = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1,\ \mathbf{x} \in [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}]^{\perp}\right\}$ e $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}]^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i\rangle = 0\}$. Logo,

$$\kappa_1(p) = \max_{|\mathbf{x}|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \max_{|\mathbf{x}|=1} \langle A'\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = k'_1(p)$$

e

$$\kappa_i(p) = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}_i} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{R}_i} \langle A'\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq k'_i(p),\ i = 2, \ldots, n,$$

sendo que a última desigualdade acima é dada pelo princípio min-max de Courant-Fischer (veja [5], pag. 115). □

Afirmação 3.11. $\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}'(p)$.

Demonstração. Para vermos isto, seja Γ_r a componente conexa de $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sigma_r(\mathbf{x}) > 0\}$ que contém o ponto $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, sendo que σ_r denota a r-ésima função simétrica elementar. Note que $\Gamma \subset \Gamma_r$. Alem disso, Gårding [11] provou que Γ_r é um cone convexo de $\mathbb{R}^n$, e estabeleceu uma desigualdade da qual é possível provar que

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{para cada } \mathbf{x} \in \Gamma_r,\ 1 \leq i \leq n,\ \text{e } 1 \leq j \leq r. \tag{3.17}$$

Por hipótese, existe um ponto $q_0 \in M'$ tal que $\mathbf{k}'(q_0) \in \Gamma$. Como $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_n$ são aplicações contínuas sobre a hipersuperfície conexa M', temos que $\mathbf{k}'(M')$ é conexo, já que é imagem de um conjunto conexo por uma função contínua. Como Γ_r é conexo e $\mathbf{k}'(q_0) \in \Gamma_r$ temos que $\mathbf{k}'(M') \subset \Gamma_r$, isto é, $\mathbf{k}'(q) \in \Gamma_r$, para cada $q \in M'$. Por outro lado, defina $c(t) = \mathbf{k}'(p) + t(\mathbf{k}(p) - \mathbf{k}'(p))$, para $t \geq 0$. Mostraremos que $c(t) \in \Gamma_r$, para $t \geq 0$ (veja Lema 4.1 in [22]). Com efeito, suponha que isto não vale. Como c é contínua e $c(0) = \mathbf{k}'(p) \in \Gamma_r$, temos que existe $t' > 0$ tal que $c(t) \in \Gamma_r$, para $0 \leq t < t'$. Seja $t_0 = \sup\{t' : c(t) \in \Gamma_r, 0 \leq t < t'\}$. Pelo que supomos temos que $t_0 < +\infty$. Logo $\sigma_r(c(t)) > 0$ para $0 \leq t < t_0$ e $\sigma_r(c(t_0)) = 0$. Isto implica que $\frac{d}{dt}\sigma_r(c(t))|_{t=t_1} < 0$ para algum $0 < t_1 < t_0$. Mas isto é impossível, pois,

$$\frac{d}{dt}\sigma_r(c(t))|_{t=t_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}(c(t_1))(\kappa_i(p) - \kappa'_i(p)) \geq 0,$$

por (3.17). Em particular, temos que $\mathbf{k}(p) = c(1) \in \Gamma_r$, e pela mesma razão de antes $\mathbf{k}(q) \in \Gamma_r$, para todo $q \in M$. Além disso, pela convexidade de Γ_r, segue que o segmento de $\mathbf{k}(p)$ a $\mathbf{k}'(p)$ está contido em Γ_r. Agora o teorema do valor médio e (3.17) implicam que

$$\sigma_r(\mathbf{k}(p)) - \sigma_r(\mathbf{k}'(p)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}((1-s)\mathbf{k}(p) + s\mathbf{k}'(p))(\kappa_i(p) - \kappa'_i(p)) \geq 0$$

para algum $0 < s < 1$. Mas o lado esquerdo desta igualdade é igual a $\binom{n}{r}(H_r - H_r') \leq 0$. Assim teremos que a soma acima é igual a zero, e como cada termo desta soma é não negativo, temos que todos eles são iguais a zero. Mas por (3.17)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}((1-s)\mathbf{k}(p) + s\mathbf{k}'(p)) > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Isto implica que $\kappa_i(p) - \kappa_i'(p) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Logo $\mathbf{k}(p) = \mathbf{k}'(p)$, o que prova a afirmação. □

Mostremos agora que $A = A'$ (e logo $\bar{\nabla}^2 u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla}^2 u'(\mathbf{0})$). Com efeito, suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{R}^n$ é uma base ortonormal de direções principais de A', tal que $\langle A'\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \kappa_i'(p)$, $i = 1, \ldots, n$. Como mostramos acima, $\langle A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \geq \langle A'\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \kappa_1'(p) = \kappa_1(p)$. Mas $\kappa_1(p) = \max\limits_{|\mathbf{x}|=1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Logo, $\mathbf{v}_1$ é uma direção de máximo de $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ na hiperesfera unitária. Portanto, $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\kappa_1(p)$. De maneira análoga mostraremos que $\mathbf{v}_i$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\kappa_i(p)$, para cada $i = 2, \ldots, n$. Seja $\mathcal{R}_i$ como na demonstração da afirmação 3.10. Temos que $\mathbf{v}_i \in \mathcal{R}_i$ e $\langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \geq \langle A'\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \kappa_i'(p) = \kappa_i(p)$. Como $\kappa_i(p) = \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}_i} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, temos que $\mathbf{v}_i$ é uma direção de máximo de $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ em $\mathcal{R}_i$. Logo $\mathbf{v}_i$ é um autovetor de A associado a κ_i, $i = 2, \ldots, n$, e portanto $A = A'$, como desejávamos.

Agora explicaremos o processo de linearização. Seja $u_t = (1-t)u + tu'$, um segmento de u a u'. Seja $w = u' - u$ e observe que $\frac{d}{dt}u_t = w$, $\frac{d}{dt}\bar{\nabla} u_t = \bar{\nabla} w$ e que $\frac{d}{dt}\bar{\nabla}^2 u_t = \bar{\nabla}^2 w$, com matriz Hessiana $[w_{ij}]$. Por hipótese, $H_r \leq H_r'$. Isto juntamente com (3.16) implica

$$0 \leq \binom{n}{r}(H_r' - H_r) = \frac{\mathcal{H}_r[u']}{W^{r+2}[u']} - \frac{\mathcal{H}_r[u]}{W^{r+2}[u]} = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+2}[u_t]}\right) dt.$$

Mas

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+2}[u_t]}\right) = \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}_r[u_t]\right) - (r+2)\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+3}[u_t]}\frac{d}{dt}\left(W[u_t]\right).$$

Como $W[u_t] = \sqrt{1 + |\bar{\nabla} u + t\bar{\nabla} w|^2}$, então

$$\frac{d}{dt}\left(W[u_t]\right) = \frac{1}{W[u_t]}(\langle \bar{\nabla} u, \bar{\nabla} w \rangle + t|\bar{\nabla} w|^2),$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+2}[u_t]}\right) = \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}_r[u_t]\right) - (r+2)\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}\langle \bar{\nabla} u, \bar{\nabla} w \rangle - (r+2)\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}t|\bar{\nabla} w|^2.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \binom{n}{r}(H_r' - H_r) &= \sum_{i,j}\left(\int_0^1 \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u_t]dt\right) w_{ij} + \sum_k \left(\int_0^1 \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_k}[u_t]dt\right) w_k \\
&- \sum_k (r+2)\left(\int_0^1 \frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}dt\right) u_k w_k - (r+2)\left(\int_0^1 t\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}dt\right)|\bar{\nabla} w|^2.
\end{aligned}
$$

A igualdade acima pode ser escrita na forma

$$
0 \leq \sum_{i,j} c_{ij} w_{ij} + \sum_k b_k w_k - a|\bar{\nabla} w|^2 = L[w] - a|\bar{\nabla} w|^2,
$$

sendo os coeficientes são dados por

$$
c_{ij}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u_t]dt, \qquad a(\mathbf{x}) = (r+2)\left(\int_0^1 t\frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}dt\right).
$$

e

$$
b_k(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{1}{W^{r+2}[u_t]}\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_k}[u_t]dt - (r+2)\left(\int_0^1 \frac{\mathcal{H}_r[u_t]}{W^{r+4}[u_t]}dt\right) u_k.
$$

Evidentemente os coeficientes de L são contínuos. Como $\bar{\nabla} u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\bar{\nabla} u'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então $\bar{\nabla} u_t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Logo, segue que $W[u_t](\mathbf{0}) = 1$. Além disso, também já vimos que $\bar{\nabla}^2 u(\mathbf{0}) = \bar{\nabla}^2 u'(\mathbf{0}) = A_p$. Isto implica que $\bar{\nabla}^2 u_t(\mathbf{0}) = A_p$. Logo de (3.15) e (3.16), segue que

$$
\mathcal{H}_r[u_t](\mathbf{0}) = \mathcal{H}_r[u](\mathbf{0}) = \binom{n}{r} H_r = \sigma_r(\mathbf{k}(p)) > 0.
$$

Disto obtemos que $a(\mathbf{0}) = (r+2)\sigma_r(\mathbf{k}(p))/2 > 0$. Assim $a \geq 0$ numa vizinhança da origem $\mathbf{0}$, o que nos dá

$$
0 \leq L[w] - a|\bar{\nabla} w|^2 \leq L[w],
$$

nessa vizinhança.

Agora veremos que L é uniformemente elíptico numa vizinhança de $\mathbf{0}$. Com efeito, para todo $t \in [0,1]$, temos que $u_t(\mathbf{0}) = 0$, $\bar{\nabla} u_t(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, e $\bar{\nabla}^2 u_t(\mathbf{0}) = A$. Este fato, juntamente com (3.15), implica que

$$
\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u_t]\right](\mathbf{0})
$$

é uma matriz que depende somente de A, e portanto é independente de t. Portanto

$$
[c_{ij}(\mathbf{0})] = \left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u]\right](\mathbf{0})
$$

é uma matriz que depende apenas de A, e afirmamos que todos os seus autovalores são positivos. Para ver isto, nós primeiro observamos que a partir de (3.15) segue que $\mathcal{H}_r[u](\mathbf{0}) = \sum_{|J|=r} \det(A_J)$, e como antes $|J| = r$ significa que $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ é um conjunto de r índices tais que $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, e A_J denota a submatriz principal $r \times r$ de A com linhas e colunas indexadas por J. Agora, seja P uma matriz ortogonal tal que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\kappa_1(p), \ldots, \kappa_n(p))$. Então, a partir da expressão acima para $\mathcal{H}_r[u](\mathbf{0})$ concluímos que $\mathcal{H}_r[u](\mathbf{0}) = \sigma_r(\mathbf{k}(p))$. Desde que $\kappa_s = \sum_{i,j} p_{is}u_{ij}p_{js}$, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u](\mathbf{0}) = \sum_s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_s}(\mathbf{k}(p))p_{is}p_{js},$$

o que implica que

$$P^{-1}\left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial u_{ij}}[u](\mathbf{0})\right]P = \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_1}(\mathbf{k}(p)), \ldots, \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_n}(\mathbf{k}(p))\right).$$

Portanto, os autovalores da matriz $[c_{ij}(\mathbf{0})]$ são $\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}(\mathbf{k}(p))$, $1 \leq i \leq n$, os quais são positivos tendo em vista que $\mathbf{k}(p) \in \Gamma_r$ e portanto (3.17) é válida nesse ponto. Portanto L é elíptico em $\mathbf{0}$, e podemos assumir que ele seja uniformemente elíptico em uma vizinhança U of $\mathbf{0}$, desde que seus coeficientes são contínuos. A hipótese $w = u' - u \leq 0$ numa vizinhança da origem implica que w atinge seu valor máximo 0 no ponto $\mathbf{0}$. O Princípio do máximo de E. Hopf aplicado a $L[w] \geq 0$ implica que $w \equiv 0$ em U, no caso em que $\mathbf{0}$ é um ponto interior ou um ponto de bordo. Portanto, as hipersuperfícies coincidem localmente, o que prova o Teorema 3.8. □

Uma vez que temos o princípio do máximo, o método de reflexão de Alexandrov pode ser aplicado sem mudança, como no caso da curvatura média constante, para provar o Teorema de Ros, e isto encerra a demonstração de Korevaar.

Referências Bibliográficas

[1] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, **13**, 5–8, 1958; English translation: *AMS Transl.*, **21**, 412–416, 1962.

[2] A.D. Alexandrov, A characteristic property of spheres, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **58**, 303–315, 1962.

[3] L.J. Alías, *Análisis Geométrico y Geometría Global de Superficies: Una Introducción Elemental*, XIV Escola de Geometria Diferencial, Brasil, 2006.

[4] L.J. Alías and J.M. Malacarne, Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space, *Differential Geometry, Valencia, 2001*, 28–58, Proceedings of the Intenational Conference held to honour the 60th Birthday of A M Naveira, Eds. Olga Gil-Medrano, Vicente Miquel, World Sci. Publishing, River Edge, NJ., 2002.

[5] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, California, 1974.

[6] S. Bochner, Vector fields and Ricci curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 776–797, 1946.

[7] L. Caffarelli, L. Nirenberg and J. Spruck, The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian, *Acta Math.*, **155**, 261–301, 1985.

[8] L.L. de Lima e F. Montenegro, *Evolução de curvas planas pela curvatura*, X Escola de Geometria Diferencial, Brasil, 1998.

[9] M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[10] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1988.

[11] L. Gårding, An inequality for hyperbolic polynomials, *J. Math. Mech.*, **8**, 957–965, 1959.

[12] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[13] E. Heintze and H. Karcher, A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **11**, 451–470, 1978.

[14] E. Hopf, Elementare Bemerkunge über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissensch. Berlin. *Math.-Phys. Kl.*, **19**, 147–152, 1927.

[15] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, **1000**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[16] W.Y. Hsiang, Z.H. Teng and W.C.Yu, New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$-spheres into Euclidean $2k$-space. *Ann. of Math.*, **117**, 609–625, 1983.

[17] C.C. Hsiung, Some integral formulas for closed hypersurfaces, *Math. Scand.*, **2**, 286–294, 1954.

[18] N. Kapouleas, Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space, *J. Differential Geom.*, **33**, 683–715, 1991.

[19] N. Kapouleas, Constant mean curvature surfaces constructed by fusing Wente tori, *Invent. Math.*, **119**, 443–518, 1995.

[20] N.J. Korevaar, Sphere theorems via Alexandrov for constant Weingarten curvature hypersurfaces: Appendix to a note of A. Ros, *J. Differential Geom.*, **27**, 221–223, 1988.

[21] K. R. F. Leão, *O princípio da tangência e aplicações*, Dissertação de Mestrado, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[22] F. Fontenele and S.L. Silva, A tangency principle and applications, *Illinois J. Math.*, **45**, 213–228, 2001.

[23] M.L. Leite, *The tangency principle for hypersurfaces with a null intermediate curvature*, XI Escola de Geometria Diferencial, Brasil, 2000.

[24] E.L. Lima, *Curso de Análise*, Volume 2. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1981.

[25] E.L. Lima, Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável, *Matemática Universitária*, **4**, 89–105, 1986.

[26] S. Montiel and A. Ros, Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures, in *Differential geometry*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **52**, 279–296, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

[27] S.Montiel and A. Ros, *Curves and surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **69**. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2005.

[28] R.C. Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold, *Indiana Univ. Math. J.*, **26**, 459–472, 1977.

[29] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **3**, 447–453, 1987.

[30] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem, *J. Differential Geom.*, **27**, 215–220, 1988.

[31] R.M. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, *J. Differential Geom.*, **18**, 791–809, 1983.

[32] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, **Vol IV**, 2nd ed., Publish or Perish Inc., 1979.

[33] H.C. Wente, Counterexample to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.*, **121**, 193–243, 1986.

[34] S.T. Yau, Problem section, in *Seminar on Differential Geometry, Annals Math. Studies No. 102.* Princeton University Press, Princeton NJ, 1982.