



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

AQUILA DE JESUS DOS SANTOS

**ESTUDO DE DUAS TÉCNICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
DINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO: A SUPERPOSIÇÃO MODAL E A TRANSFORMADA DE  
LAPLACE**

Vitória, ES  
2024



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

Aquila de Jesus dos Santos

**ESTUDO DE DUAS TÉCNICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
DINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO: A SUPERPOSIÇÃO MODAL E A TRANSFORMADA DE  
LAPLACE**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Coorientador: Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara

Vitória, ES  
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

D278e de Jesus dos Santos, Aquila, 1995-  
Estudo de duas técnicas para a solução de problemas dinâmicos utilizando o Método dos Elementos de Contorno: a Superposição Modal e a Transformada de Laplace / Aquila de Jesus dos Santos. - 2024.  
247 p. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Coorientador: Luciano de Oliveira Castro Lara.  
Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Técnica de Interpolação Direta. 3. Superposição Modal. 4. Transformada de Laplace. 5. Equação da Onda. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Lara, Luciano de Oliveira Castro. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

---



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

# ESTUDO DE DUAS TÉCNICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DINÂMICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: A SUPERPOSIÇÃO MODAL E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

**AQUILA DE JESUS DOS SANTOS**

## **COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
Orientador – PPGEM/UFES

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara  
Coorientador – PPGEM/UFES

Prof. Dr. Juan Sérgio Romero Saenz  
Examinador Interno – PPGEM/UFES

Prof. Dr. Lucas Silveira Campos  
Examinador Interno – DEM/UFES

Prof. Dr. André Bulcão  
Examinador Externo – CENPES/PETROBRAS

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque  
Examinador Externo – PCMEC/UnB

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Vitória/ES, 20 de dezembro de





## Documentos TESE Aquila de Jesus dos Santos

Data e Hora de Criação: 28/01/2025 às 14:30:12

Documentos que originaram esse envelope:

- Documentos TESE Aquila de Jesus dos Santos.pdf (Arquivo PDF) - 3 página(s)



## Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: c11319941943c7fc4afed9cc821b6256a2a2858fd92ff83b460a69916a16ed2b

[SHA512]: 76fdf609396990a935d9c2aa380ff8d1dcc1550bbe7e505230704b9ac34f5a76a30088dd7cbde4638c025364da690d4a4bfeda7fd5d342de196246ec663f9e84

## Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



### ASSINADO - André Bulcão (bulcao@petrobras.com.br)

Data/Hora: 29/01/2025 - 07:43:28, IP: 200.217.29.155, Geolocalização: [-22.941180, -43.037518]

[SHA256]: 3ab86e713ddf31fc5a416000feaae8b56907230421ef13510473cf2a3a371f12



### ASSINADO - Éder Lima de Albuquerque (eder@unb.br)

Data/Hora: 28/01/2025 - 15:09:16, IP: 164.41.22.181, Geolocalização: [-15.764684, -47.874048]

[SHA256]: 256ae1a7ec61d65a81f6c4a75539c41377112b05d76cafe4908bfa9ad3f8c92d



### ASSINADO - Juan Sérgio Romero Saenz (juan.saenz@ufes.br)

Data/Hora: 28/01/2025 - 14:47:56, IP: 200.137.65.102

[SHA256]: 62e1a8a29c51d5796ba493421acec8b327d7c1e6b3108754dd47a0bf48e4a582



### ASSINADO - Carlos Friedrich Loeffler Neto (loefflercarlos@gmail.com)

Data/Hora: 28/01/2025 - 14:53:49, IP: 200.137.65.109, Geolocalização: [-20.279675, -40.304385]

[SHA256]: 1edb4c79f0b1722c98a33070907fd12b2ebaba91348e7b44150843c1bc648bab



### ASSINADO - Lucas Silveira Campos (lucas.s.campos@ufes.br)

Data/Hora: 28/01/2025 - 15:11:04, IP: 200.137.65.102

[SHA256]: 3ab61638f49316f01ce4aa76f8318918d3420bce978c1e31512598ed2fe85573



### ASSINADO - Luciano de Oliveira Castro Lara (luciano.lara@ufes.br)

Data/Hora: 28/01/2025 - 14:46:22, IP: 200.137.65.106, Geolocalização: [-20.281172, -40.306938]

[SHA256]: 8e78cbc1b5dc582ab1cbcf9d9c28e9583c1789f4473dba5cd55eeba2b6408c91

## Histórico de eventos registrados neste envelope

29/01/2025 07:43:28 - Envelope finalizado por bulcao@petrobras.com.br, IP 200.217.29.155

29/01/2025 07:43:28 - Assinatura realizada por bulcao@petrobras.com.br, IP 200.217.29.155

29/01/2025 07:41:35 - Envelope visualizado por bulcao@petrobras.com.br, IP 200.217.29.155

28/01/2025 15:11:04 - Assinatura realizada por lucas.s.campos@ufes.br, IP 200.137.65.102

28/01/2025 15:09:16 - Assinatura realizada por eder@unb.br, IP 164.41.22.181

28/01/2025 14:53:49 - Assinatura realizada por loefflercarlos@gmail.com, IP 200.137.65.109

28/01/2025 14:53:31 - Envelope visualizado por loefflercarlos@gmail.com, IP 200.137.65.109

28/01/2025 14:47:56 - Assinatura realizada por juan.saenz@ufes.br, IP 200.137.65.102

28/01/2025 14:46:22 - Assinatura realizada por luciano.lara@ufes.br, IP 200.137.65.106

28/01/2025 14:44:45 - Envelope visualizado por luciano.lara@ufes.br, IP 200.137.65.106

28/01/2025 14:33:08 - Envelope registrado na Blockchain por andreia.eyng@ufes.br, IP 200.137.65.107

28/01/2025 14:33:07 - Envelope encaminhado para assinaturas por andreia.eyng@ufes.br, IP 200.137.65.107

28/01/2025 14:30:14 - Envelope criado por andreia.eyng@ufes.br, IP 200.137.65.107

*À minha amada irmã Natália (in memoriam).*

# Agradecimentos

A Deus, cuja infinita sabedoria e amor incondicional foram as luzes que guiaram cada passo desta jornada. Sua presença constante me ofereceu força nos momentos de fraqueza, clareza nas decisões difíceis e paz diante dos desafios.

À minha esposa Rayanne, por sua paciência, companheirismo e amparo inabaláveis, que foram fundamentais em cada momento dessa trajetória. Seu apoio constante e compreensão tornaram essa conquista ainda mais significativa.

Aos meus pais, Sr. Adimael e Sra. Irene, e às minhas irmãs, Priscilla, Natália e Jéssica, pelo amor incondicional, incentivo constante e apoio indispensável, que tornaram possível esta realização.

Ao Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, bem como a todo o corpo docente e administrativo.

Aos meus orientadores, Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto e Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara, expresse minha mais sincera gratidão pela orientação atenciosa, pela dedicação incansável e pela paciência ao longo da elaboração deste trabalho.

Aos companhas da Turma H do Programa de Formação de Operadores Licenciáveis da Marinha do Brasil, pelo apoio moral, companheirismo e pelas experiências compartilhadas. E a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que esta conquista se tornasse realidade.

Meu sincero agradecimento a todos.

*“Soli Deo Gloria”*

Bach

# Resumo

A busca por um método confiável e preciso para converter integrais de domínio envolvendo operadores não autoadjuntos em integrais de contorno, de acordo com a filosofia do Método dos Elementos de Contorno, continua sendo um desafio significativo. Uma das propostas mais recentes para alcançar esse objetivo é a técnica de Interpolação Direta do Método dos Elementos de Contorno (MECID). Já tendo sido empregada com sucesso na resolução de problemas escalares governados pelas equações de Poisson, Helmholtz e Advecção-Difusão, este trabalho apresenta os resultados do uso do MECID na análise de problemas de propagação de ondas em meios homogêneos. O objetivo principal é avaliar a integração do MECID com duas técnicas distintas de tratamento do termo dependente do tempo: a Superposição Modal e a Transformada de Laplace, duas estratégias consolidadas. Na primeira formulação, aplica-se a superposição modal modificada, que utiliza um problema de autovalor correlato, associado à transposta da matriz dinâmica, para realizar o desacoplamento das equações dinâmicas. O avanço no tempo é realizado através do algoritmo de Houbolt, cujo amortecimento fictício elimina conteúdos modais espúrios, produzindo maior estabilidade. Já na segunda formulação, a transformada de Laplace é utilizada para eliminar a dependência do tempo; utiliza-se o MECID para resolver o problema estacionário resultante, em termos da variável de transformação, e um método de inversão é utilizado para retornar ao domínio do tempo. Alguns problemas típicos de propagação de ondas foram resolvidos, usando elementos de contorno lineares.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno, Técnica de Interpolação Direta, Equação da Onda, Superposição Modal, Transformada de Laplace.

# Abstract

The search for a reliable and accurate method to convert domain integrals involving non-self-adjoint operators into boundary integrals, in accordance with the philosophy of the Boundary Element Method, remains a significant challenge. One of the most recent proposals to achieve this goal is the Direct Interpolation Technique of the Boundary Element Method (DIBEM). Already successfully employed in solving scalar problems governed by the Poisson, Helmholtz, and Advection-Diffusion equations, this work presents the results of using DIBEM in the analysis of wave propagation problems in homogeneous media. The main objective is to evaluate the integration of DIBEM with two distinct techniques for handling the time-dependent term: Modal Superposition and the Laplace Transform, two well-established strategies. In the first formulation, a modified modal superposition, which uses a correlated eigenvalue problem associated with the transpose of the dynamic matrix, is applied to decouple the dynamic equations. Time advancement is performed using the Houbolt algorithm, whose fictitious damping eliminates spurious modal contents, producing greater stability. In the second formulation, the Laplace transform is used to eliminate time dependence; DIBEM is used to solve the resulting stationary problem in terms of the transformation variable, and an inversion method is used to return to the time domain. Several typical wave propagation problems were solved using linear boundary elements.

**Keywords:** Boundary Element Method, Direct Interpolation Technique, Wave Equation, Modal Superposition, Laplace Transform.

## Lista de Figuras

2.1	Onda longitudinal . . . . .	45
2.2	Onda transversal . . . . .	45
2.3	Definições geométricas do problema . . . . .	47
3.1	Círculo de raio $r$ . . . . .	51
3.2	Círculo de Contorno $S$ . . . . .	52
3.3	Contorno Aproximado . . . . .	52
3.4	Gráfico das Funções de Forma do Elemento Linear . . . . .	54
3.5	Contorno curvo . . . . .	54
3.6	Ângulo interno do contorno . . . . .	60
4.1	Resposta temporal do segundo nó considerando um modo . . . . .	83
4.2	Resposta temporal do segundo nó considerando dois modos . . . . .	83
4.3	Resposta temporal do segundo nó considerando três modos . . . . .	83
4.4	Resposta temporal do segundo nó considerando seis modos . . . . .	84
4.5	Geometria e Condições de contorno do Exemplo I . . . . .	92
4.6	Erro na determinação dos primeiros autovalores em função do NPI . . . . .	93
4.7	Erro médio na determinação dos primeiros autovalores em função do NPI . . . . .	94
4.8	Distribuição dos pontos na malha $NEL NPI = 160 144$ . . . . .	95
4.9	Amplitude relativa percentual dos modos 2 a 80 . . . . .	95
4.10	Deslocamento dos modos 1, 2 e 3 no ponto $\mathbf{P}_1$ . . . . .	101
4.11	Deslocamento dos modos 1, 3 e 7 no ponto $\mathbf{P}_1$ . . . . .	102
4.12	Deslocamento no ponto $\mathbf{P}_1$ considerando modos um, dois e três . . . . .	102
4.13	Deslocamento no ponto $\mathbf{P}_1$ considerando modos um, três e sete . . . . .	103

4.14	Erro percentual ao longo do tempo . . . . .	103
4.15	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando três modos . . . . .	104
4.16	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando seis modos . . . . .	104
4.17	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando nove modos . . . . .	105
4.18	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando doze modos . . . . .	105
4.19	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 30 modos . . . . .	105
4.20	Erro médio na determinação do deslocamento em $\mathbf{P}_1$ . . . . .	106
4.21	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando dez modos (entre 160) . . . . .	107
4.22	Tensão em $\mathbf{P}_2$ considerando três modos . . . . .	107
4.23	Tensão em $\mathbf{P}_2$ considerando seis modos . . . . .	108
4.24	Tensão em $\mathbf{P}_2$ considerando nove modos . . . . .	108
4.25	Tensão em $\mathbf{P}_2$ considerando doze modos . . . . .	108
4.26	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	109
4.27	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-2}$ . . . . .	109
4.28	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-3}$ . . . . .	110
4.29	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-4}$ . . . . .	110
4.30	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	110
4.31	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ para $\Delta t = 10^{-6}$ . . . . .	111
4.32	33 <sup>o</sup> e 34 <sup>o</sup> ciclos do deslocamento em $\mathbf{P}_1$ . . . . .	112
4.33	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando três modos (MMC) . . . . .	113
4.34	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando nove modos (MMC) . . . . .	113
4.35	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 27 modos (MMC) . . . . .	113
4.36	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 81 modos (MMC) . . . . .	114
4.37	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 9 modos (MMC - 240) . . . . .	114
4.38	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 21 modos (MMC - 240) . . . . .	115
4.39	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando 245 modos (MMC) . . . . .	115
4.40	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando três modos (MMC) - Malha II . . . . .	116
4.41	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando seis modos (MMC) - Malha II . . . . .	116
4.42	Deslocamento em $\mathbf{P}_1$ considerando doze modos (MMC) - Malha II . . . . .	116
4.43	Geometria e Condições de contorno do Exemplo II . . . . .	117
4.44	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 160 357 . . . . .	118
4.45	Amplitude dos 100 primeiros modos . . . . .	118

4.46	Contribuição percentual relativa . . . . .	119
4.47	Amplitude dos cem primeiros modos . . . . .	119
4.48	Deslocamento no ponto $P_3$ considerando três modos . . . . .	120
4.49	Deslocamento no ponto $P_3$ considerando seis modos . . . . .	120
4.50	Deslocamento no ponto $P_3$ considerando nove modos . . . . .	121
4.51	Deslocamento no ponto $P_3$ considerando dezoito modos . . . . .	121
4.52	Deslocamento no ponto $P_3$ considerando quarenta modos . . . . .	121
4.53	Erro médio na determinação do deslocamento em $P_3$ . . . . .	122
4.54	Tensão no ponto $P_4$ considerando três modos . . . . .	122
4.55	Tensão no ponto $P_4$ considerando seis modos . . . . .	123
4.56	Tensão no ponto $P_4$ considerando nove modos . . . . .	123
4.57	Tensão no ponto $P_4$ considerando doze modos . . . . .	123
4.58	Tensão no ponto $P_4$ considerando dezoito modos . . . . .	124
4.59	Tensão no ponto $P_4$ considerando quarenta modos . . . . .	124
4.60	Erro médio na determinação da tensão em $P_4$ . . . . .	125
4.61	Tensão no ponto $P_4$ considerando 400 modos ( $\Delta t = 10^{-4}$ s) . . . . .	125
4.62	Geometria e Condições de contorno do Exemplo III . . . . .	126
4.63	Distribuição dos pontos na malha $NEL NPI = 320 361$ . . . . .	127
4.64	Amplitudes relativas para $\omega = 1$ rad/s . . . . .	127
4.65	Amplitudes relativas para $\omega = 10$ rad/s . . . . .	128
4.66	Amplitudes relativas para $\omega = 20$ rad/s . . . . .	128
4.67	Amplitudes relativas para $\omega = 30$ rad/s . . . . .	128
4.68	Amplitudes relativas para $\omega = 40$ rad/s . . . . .	129
4.69	Deslocamento em $P_6$ considerando cinco modos . . . . .	130
4.70	Deslocamento em $P_6$ considerando dez modos . . . . .	130
4.71	Deslocamento em $P_6$ considerando vinte modos . . . . .	130
4.72	Deslocamento em $P_6$ considerando quarenta modos . . . . .	131
4.73	Erro médio na determinação do deslocamento em $P_6$ . . . . .	131
4.74	Deslocamento em $P_6$ considerando $\omega = 2$ rad/s . . . . .	132
4.75	Deslocamento em $P_6$ considerando $\omega = 2$ rad/s . . . . .	132
4.76	Deslocamento em $P_6$ considerando $\omega = 4$ rad/s . . . . .	133
4.77	Deslocamento em $P_6$ considerando $\omega = 4$ rad/s . . . . .	133

4.78	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 5 \text{ rad/s}$ . . . . .	134
4.79	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 5 \text{ rad/s}$ . . . . .	134
4.80	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 8 \text{ rad/s}$ . . . . .	135
4.81	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 8 \text{ rad/s}$ . . . . .	135
4.82	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 8 \text{ rad/s}$ ( $t \in [0, 45]$ ) . . . . .	136
4.83	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ( $t \in [0, 1]$ ) . . . . .	137
4.84	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ( $t \in [0, 1]$ ) . . . . .	137
4.85	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ( $t \in [0, 1]$ ) - $\Delta t = 10^{-4}$ . . . . .	138
4.86	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ nos primeiros 100 segundos para $\Delta t = 10^{-3}$ . . . . .	138
4.87	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ nos primeiros 100 segundos para $\Delta t = 10^{-4}$ . . . . .	139
4.88	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ considerando $\omega = 20 \text{ rad/s}$ (NEL NPI = 640 625) . . . . .	139
4.89	Geometria e Condições de contorno do Exemplo IV . . . . .	141
4.90	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 160 144 . . . . .	142
4.91	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ considerando três modos . . . . .	142
4.92	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ considerando seis modos . . . . .	143
4.93	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ considerando doze modos . . . . .	143
4.94	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ considerando 24 modos . . . . .	143
4.95	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ considerando 48 modos . . . . .	144
4.96	Erro médio na determinação da temperatura em $\mathbf{P}$ . . . . .	144
5.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor . . . . .	149
5.2	Resultados do Método de Stehfest para a função $f_1$ . . . . .	153
5.3	Resultados do Método de Stehfest para a função $f_2$ . . . . .	154
5.4	Resultados do Método de Stehfest para a função $f_3$ . . . . .	155
5.5	Resultados do Método PLD para a função $f_1$ . . . . .	158
5.6	Resultados do Método PLD para a função $f_2$ . . . . .	159
5.7	Resultados do Método PLD para a função $f_2$ em função de $\tau$ . . . . .	160
5.8	Resultados do Método PLD para a função $f_2$ em função de $\tau$ . . . . .	160
5.9	Resultados do Método PLD para a função $f_3$ . . . . .	161
5.10	Resultados do Método de Durbin para a função $f_1$ . . . . .	163
5.11	Resultado do Método de Durbin para a função $f_1$ considerando $M = 1000$ . . . . .	164
5.12	Resultados do Método de Durbin para a função $f_2$ . . . . .	164

5.13	Resultados do Método de Durbin para a função $f_3$ . . . . .	165
5.14	Fluxograma do MECID-TL . . . . .	167
5.15	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 160 144 . . . . .	176
5.16	Deslocamento em $P_1$ para $M = 10$ . . . . .	176
5.17	Deslocamento em $P_1$ para $M = 20$ . . . . .	177
5.18	Deslocamento em $P_1$ para $M = 40$ . . . . .	177
5.19	Deslocamento em $P_1$ para $M = 80$ . . . . .	177
5.20	Deslocamento em $P_1$ para $M = 200$ . . . . .	178
5.21	Deslocamento em $P_1$ para $M = 400$ . . . . .	178
5.22	Erro médio na determinação do deslocamento em $P_1$ . . . . .	179
5.23	Tensão em $P_2$ para $M = 10$ . . . . .	179
5.24	Tensão em $P_2$ para $M = 20$ . . . . .	180
5.25	Tensão em $P_2$ para $M = 40$ . . . . .	180
5.26	Tensão em $P_2$ para $M = 80$ . . . . .	180
5.27	Tensão em $P_2$ para $M = 200$ . . . . .	181
5.28	Tensão em $P_2$ para $M = 400$ . . . . .	181
5.29	Erro médio na determinação da tensão em $P_2$ . . . . .	182
5.30	Deslocamento em $P_1$ nos primeiros 4 segundos . . . . .	182
5.31	Deslocamento em $P_1$ nos primeiros 8 segundos . . . . .	183
5.32	Deslocamento em $P_1$ nos primeiros 12 segundos . . . . .	183
5.33	Deslocamento em $P_1$ nos primeiros 16 segundos . . . . .	183
5.34	Deslocamento em $P_1$ nos primeiros 20 segundos . . . . .	184
5.35	Erro médio ( $\bar{E}$ ) em cada intervalo . . . . .	184
5.36	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 160 357 . . . . .	185
5.37	Deslocamento em $P_3$ para $M = 10$ . . . . .	186
5.38	Deslocamento em $P_3$ para $M = 20$ . . . . .	186
5.39	Deslocamento em $P_3$ para $M = 40$ . . . . .	187
5.40	Deslocamento em $P_3$ para $M = 80$ . . . . .	187
5.41	Deslocamento em $P_3$ para $M = 200$ . . . . .	187
5.42	Erro médio na determinação do deslocamento em $P_3$ . . . . .	188
5.43	Tensão em $P_3$ para $M = 10$ . . . . .	188
5.44	Tensão em $P_3$ para $M = 20$ . . . . .	189

5.45	Tensão em $\mathbf{P}_3$ para $M = 40$ . . . . .	189
5.46	Tensão em $\mathbf{P}_3$ para $M = 80$ . . . . .	189
5.47	Tensão em $\mathbf{P}_3$ para $M = 200$ . . . . .	190
5.48	Erro médio na determinação da tensão em $\mathbf{P}_4$ . . . . .	190
5.49	Tensão em $\mathbf{P}_3$ para $M = 1000$ . . . . .	191
5.50	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 320 1471 . . . . .	191
5.51	Tensão em $\mathbf{P}_3$ para $M = 200$ com malha mais refinada . . . . .	192
5.52	Distribuição dos pontos na malha NEL NPI = 320 361 . . . . .	193
5.53	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $M = 25$ . . . . .	193
5.54	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $M = 50$ . . . . .	194
5.55	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $M = 100$ . . . . .	194
5.56	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $M = 200$ . . . . .	194
5.57	Erro médio na determinação do deslocamento em $\mathbf{P}_6$ . . . . .	195
5.58	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 2$ rad/s . . . . .	195
5.59	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 4$ rad/s . . . . .	196
5.60	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 8$ rad/s . . . . .	196
5.61	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 8$ rad/s . . . . .	197
5.62	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 8$ rad/s (Instantes iniciais) . . . . .	197
5.63	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 20$ rad/s e $M = 200$ . . . . .	198
5.64	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 20$ rad/s e $M = 400$ . . . . .	198
5.65	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 20$ rad/s e $M = 800$ . . . . .	198
5.66	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 20$ rad/s e $M = 1200$ . . . . .	199
5.67	Deslocamento em $\mathbf{P}_6$ para $\omega = 20$ rad/s e NEL NPI = 640 625 . . . . .	199
5.68	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ para $M = 5$ . . . . .	205
5.69	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ para $M = 25$ . . . . .	206
5.70	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ para $M = 50$ . . . . .	206
5.71	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ para $M = 100$ . . . . .	206
5.72	Temperatura no ponto $\mathbf{P}$ para $M = 200$ . . . . .	207
5.73	Erro médio na determinação da temperatura em $\mathbf{P}_6$ . . . . .	207
A.1	Geometria e Condições de contorno do Exemplo I . . . . .	229
A.2	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_1$ com $N = 10$ . . . . .	230

A.3	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_1$ com $N = 100$ . . . . .	230
A.4	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_1$ com $N = 1000$ . . . . .	231
A.5	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_2$ com $N = 10$ . . . . .	232
A.6	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_2$ com $N = 100$ . . . . .	232
A.7	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_2$ com $N = 1000$ . . . . .	232
A.8	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_2$ com $N = 10000$ . . . . .	233
A.9	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_2$ com $N = 100000$ . . . . .	233
A.10	Geometria e Condições de contorno do Exemplo II . . . . .	234
A.11	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_3$ com $N = 10$ . . . . .	235
A.12	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_3$ com $N = 100$ . . . . .	236
A.13	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_3$ com $N = 1000$ . . . . .	236
A.14	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_4$ com $N = 10$ . . . . .	237
A.15	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_4$ com $N = 100$ . . . . .	237
A.16	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_4$ com $N = 1000$ . . . . .	237
A.17	Resposta analítica da tensão $\mathbf{P}_4$ com $N = 10000$ . . . . .	238
A.18	Geometria e Condições de contorno do Exemplo III . . . . .	239
A.19	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_5$ com $N = 10$ . . . . .	240
A.20	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_5$ $N = 100$ . . . . .	240
A.21	Resposta analítica do deslocamento em $\mathbf{P}_5$ $N = 1000$ . . . . .	240
A.22	Geometria e Condições de contorno do Exemplo IV . . . . .	241
A.23	Resposta analítica da temperatura em $\mathbf{P}$ com $N = 10$ . . . . .	242
A.24	Resposta analítica da temperatura em $\mathbf{P}$ com $N = 100$ . . . . .	242
A.25	Resposta analítica da temperatura em $\mathbf{P}$ com $N = 1000$ . . . . .	243
A.26	Resposta analítica da temperatura em $\mathbf{P}$ com $N = 10000$ . . . . .	243
A.27	Resposta analítica da temperatura em $\mathbf{P}$ com $N = 100000$ . . . . .	243

## Lista de Tabelas

3.1	Valores nodais de $\varphi_i$ para o elemento linear . . . . .	54
4.1	Modos organizados em função das frequências (Parte 1) . . . . .	97
4.2	Modos organizados em função das frequências (Parte 2) . . . . .	98
4.3	Modos organizados em função das amplitudes (Parte 1) . . . . .	99
4.4	Modos organizados em função das amplitudes (Parte 2) . . . . .	100
5.1	Funções utilizadas para teste dos Métodos de Inversão . . . . .	151
5.2	Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função $f_1$ . . . . .	154
5.3	Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função $f_2$ . . . . .	155
5.4	Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função $f_3$ . . . . .	156
5.5	Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função $f_1$ . . . . .	158
5.6	Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função $f_2$ . . . . .	159
5.7	Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função $f_3$ . . . . .	161
5.8	Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função $f_1$ . . . . .	163
5.9	Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função $f_2$ . . . . .	165
5.10	Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função $f_3$ . . . . .	166
5.11	Tempo de execução dos métodos para $\bar{E} = 1.0 \times 10^{-1} \%$ . . . . .	202
5.12	Tempo de execução dos métodos para $\bar{E} = 10^{-2} \%$ . . . . .	203
5.13	Tempo de execução MECID-IT para $NEL NPI = 640 900$ e $\Delta t = 0.01$ . . . . .	203
A.1	Valores de $D_{\text{máx}}$ para o deslocamento em $\mathbf{P}_1$ . . . . .	230
A.2	Valores de $D_{\text{máx}}$ para a tensão em $\mathbf{P}_2$ . . . . .	231
A.3	Valores de $D_{\text{máx}}$ para o deslocamento em $\mathbf{P}_3$ . . . . .	235
A.4	Valores de $D_{\text{máx}}$ para a tensão em $\mathbf{P}_4$ . . . . .	236

A.5	Valores de $D_{\text{máx}}$ para o deslocamento em $\mathbf{P}_5$ . . . . .	239
A.6	Valores de $D_{\text{máx}}$ para a temperatura em $\mathbf{P}$ . . . . .	242

# Lista de Siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
FBR	Função de Base Radial
GDL	Graus de Liberdade
IT	Integração Passo a Passo
MDF	Método das Diferenças Finitas
MECDR	Métodos dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade
MEC	Métodos dos Elementos de Contorno
MECID	Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta
MECMR	Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMC	Método Modal Clássico
MMM	Método Modal Modificado
MVF	Métodos dos Volumes Finitos
NEL	Número de Elementos de Contorno
NPI	Número de Pontos Internos
$N_m$	Número de Modos
PLD	Polinômios de Legendre Deslocados
SM	Superposição Modal
TL	Transformada de Laplace

# Sumário

1. <i>INTRODUÇÃO</i> . . . . .	24
1.1 Contextualização . . . . .	24
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	29
1.3 Objetivos . . . . .	37
1.4 Metodologia . . . . .	37
1.5 Organização do Trabalho . . . . .	37
2. <i>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</i> . . . . .	39
2.1 Notação das Variáveis . . . . .	39
2.2 Tópicos de Elastodinâmica . . . . .	40
2.3 A Equação da Onda Plana . . . . .	44
2.4 Aplicações . . . . .	48
3. <i>O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</i> . . . . .	50
3.1 Conceitos Fundamentais . . . . .	50
3.1.1 O Teorema de Green . . . . .	50
3.1.2 Elementos de Contorno . . . . .	51
3.1.3 Funções de Base Radial . . . . .	55
3.1.4 Solução Fundamental de Poisson . . . . .	57
3.1.5 Operador Auto-Adjunto . . . . .	58
3.2 Equação Integral de Governo . . . . .	58
3.3 Técnica de Interpolação Direta . . . . .	61
3.3.1 Tratamento do Termo Regularizado . . . . .	61
3.3.2 Tratamento do Termo Excedente . . . . .	62

3.4	Discretização via MEC . . . . .	63
3.4.1	Matriz $[\mathbf{H}]$ . . . . .	64
3.4.2	Matriz $[\mathbf{G}]$ . . . . .	65
3.4.3	Matriz $[\mathbf{M}]$ . . . . .	66
3.4.4	Sistema Final . . . . .	68
3.4.5	Integração Passo a Passo . . . . .	68
4.	<i>O MEC E A SUPERPOSIÇÃO MODAL</i> . . . . .	70
4.1	O Problema de Autovalor . . . . .	71
4.2	Superposição Modal . . . . .	73
4.3	O Método Modal Clássico . . . . .	74
4.3.1	Propriedades dos Modos . . . . .	74
4.3.2	O Desacoplamento . . . . .	76
4.3.3	Resolução das Equações Modais . . . . .	77
4.4	O Método Modal Clássico aplicado à Matrizes Não Simétricas . . . . .	78
4.5	O Método Modal Modificado (MMM) . . . . .	80
4.5.1	Comparação MMC x MMM . . . . .	82
4.6	Seleção dos Modos na Composição da Resposta . . . . .	84
4.7	Cálculo das Tensões . . . . .	87
4.8	Simulações Numéricas . . . . .	88
4.8.1	Objetivos . . . . .	88
4.8.2	Metodologia . . . . .	89
4.8.3	Exemplo I . . . . .	92
4.8.4	Exemplo II . . . . .	117
4.8.5	Exemplo III . . . . .	126
4.8.6	Exemplo VI . . . . .	140
5.	<i>O MEC E A TRANSFORMADA DE LAPLACE</i> . . . . .	145
5.1	A Transformada de Laplace . . . . .	145
5.1.1	Aplicação da TL na solução de EDOs . . . . .	148
5.2	Determinação Numérica da Transformada Inversa . . . . .	150
5.2.1	Inversão de Stehfest . . . . .	152
5.2.2	Inversão por Polinômios de Legendre Deslocados . . . . .	156

5.2.3	Método de Durbin . . . . .	162
5.3	A transformada de Laplace no contexto do MEC . . . . .	166
5.4	Etapa 1: Aplicação da transformada de Laplace . . . . .	167
5.5	Etapa 2: O MEC no Domínio Transformado de Laplace . . . . .	168
5.5.1	Tratamento do Termo Regularizado . . . . .	169
5.5.2	Tratamento do Termo Excedente . . . . .	169
5.5.3	Discretização via MEC . . . . .	170
5.5.4	Cálculo do Potencial em Pontos Internos . . . . .	172
5.5.5	Etapa 3: Procedimento de Inversão . . . . .	173
5.6	Simulações Numéricas . . . . .	173
5.6.1	Objetivos . . . . .	173
5.6.2	Metodologia . . . . .	174
5.6.3	Exemplo I . . . . .	175
5.6.4	Exemplo II . . . . .	185
5.6.5	Exemplo III . . . . .	192
5.6.6	Exemplo IV . . . . .	204
6.	CONCLUSÃO . . . . .	208
	Referências . . . . .	213
	Apêndice . . . . .	227
A.	SOLUÇÕES ANALÍTICAS . . . . .	228
A.1	Exemplo I . . . . .	229
A.2	Exemplo II . . . . .	234
A.3	Exemplo III . . . . .	239
A.4	Exemplo IV . . . . .	241
B.	ALGORÍTIMO DE HOUBOLT . . . . .	244
C.	DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES . . . . .	247

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Contextualização

A construção de modelos matemáticos que representem o comportamento dos sistemas físicos sujeitos a ações externas diversas requer a adoção de princípios e leis físicas, além de hipóteses aproximadoras consistentes. Uma vez construídos, estes modelos são experimentados, retificados e, por fim, ratificados, passando a ter validade dentro das condições impostas por esses princípios, leis e hipóteses. Estes modelos devem ser aplicados de acordo com os recursos computacionais disponíveis, encontrando um equilíbrio entre simplicidade e precisão. A Dinâmica, parte da Mecânica que trata do movimento de partículas, sistemas de partículas e corpos sob a ação de forças, é regida por diversos destes princípios estabelecidos por Galileu ([GALILEI, 1638](#)), Newton ([NEWTON, 1687](#)), Leibniz ([LEIBNIZ, 1682](#)), Euler ([EULER, 1736](#)), d'Alembert ([D'ALEMBERT, 1743](#)), Lagrange ([LAGRANGE, 1788](#)), Hamilton ([HAMILTON, 1834](#)), entre outros.

Convenientemente, divide-se a mecânica clássica no estudo dos corpos rígidos e dos corpos sólidos deformáveis. Na primeira categoria, admite-se que os corpos não tem flexibilidade, mas obedecem aos princípios do equilíbrio das forças que atuam em sua estrutura. Se há movimento, há obediência de suas partes constituintes às leis de Newton e sua descrição é feita por equações diferenciais ordinárias, envolvendo a variável tempo. A existência de movimento relativo entre as partes rígidas do corpo resulta num sistema de equações diferenciais no tempo, e comumente se estabelece que o corpo é uma máquina.

Num corpo deformável, há movimento relativo entre o que se pode chamar de partículas constituintes do corpo; ou seja, há deformação, gerada por um campo de forças, que também atuam internamente. Por conseguinte, as equações diferenciais que governam

o movimento independente das infinitas partículas que constituem o corpo flexível são parciais. A dinâmica de um corpo flexível importa em equações diferenciais tanto no tempo quanto nas coordenadas, que especificam o domínio geométrico correspondente ao corpo. Tais equações podem apresentar características lineares ou não lineares e, por serem diferenciais parciais, suas soluções analíticas são viáveis apenas em casos muito específicos.

Anteriormente ao advento do computador, e conseqüentemente, dos métodos numéricos mais sofisticados, a resolução de problemas dinâmicos dependia principalmente de métodos analíticos e técnicas manuais. Os métodos analíticos se destacavam em contextos limitados, fornecendo soluções exatas para problemas simples e/ou com geometria regular ao resolver diretamente as equações diferenciais através de técnicas como separação de variáveis (LAGRANGE, 1813), transformada de Laplace (LAPLACE, 1820) e transformada de Fourier (FOURIER, 1888).

No século XIX e início do século XX, os métodos gráficos eram também utilizados para obter soluções aproximadas de problemas complexos, com a construção de diagramas e gráficos. Por exemplo, o método de Mohr<sup>1</sup> era empregado para análise de tensões e deformações em materiais. Ao se construir círculos de Mohr para diferentes instantes de tempo, era possível visualizar como as cargas atuavam nas estruturas e prever suas respostas.

Além disso, técnicas variacionais como o método de Ritz (RITZ, 1909) e o método de Galerkin (GALERKIN, 1915) permitiam obter soluções aproximadas em casos simples, comumente unidimensionais, minimizando um funcional de energia. Esses métodos foram precursores dos métodos de elementos finitos, fornecendo aproximações úteis em situações onde soluções exatas eram difíceis de obter.

Com o avanço das ciências exatas e engenharia, os problemas a serem resolvidos se tornaram cada vez mais complexos, e as situações onde os métodos descritos anteriormente eram incapazes de resolver, mais frequentes. Em virtude dessa limitação, que seria uma restrição crucial no status tecnológico atual, dada a crescente complexidade dos problemas, a adoção de modelos aproximados se tornou fundamental.

O procedimento mais importante neste contexto é a ideia de discretização do contínuo, ou seja, a substituição das infinitas partículas que compõem um corpo deformável por um número finito de pontos, que sejam representativos do todo. Isto é possível de se

---

<sup>1</sup> O artigo original de Mohr sobre o assunto foi publicado em *Zivilingenieur*, p. 113, (1882).

fazer mediante a adoção de métodos numéricos que obedecem a princípios matemáticos rigorosos, como a ideia de diferença finita e de resíduos ponderados. A discretização do domínio geométrico consiste em transformar o modelo contínuo em um modelo discreto, substituindo as equações diferenciais parciais originais por um sistema de equações algébricas.

Quando essas equações diferenciais parciais são transformadas em sistemas de equações algébricas, o número de cálculos envolvidos pode ser elevado, especialmente em problemas com muitos graus de liberdade. Resolver manualmente esses sistemas seria inviável, dado o grande volume de operações necessárias. É nesse ponto que a importância do computador se torna evidente, pois ele é capaz de realizar essas operações de forma rápida e precisa, permitindo a análise de problemas que, de outra forma, seriam intratáveis. Em suma, o uso dos métodos numéricos discretos que transformou a engenharia somente foi possível devido ao advento do computador.

São muitos os problemas de engenharia mecânica, civil, naval, aeroespacial, oceânica e elétrica, entre outros, que são descritos e resolvidos com precisão, não obstante sua complexidade. Entre eles, os problemas estacionários são muitos mais simples de tratar, pois o comportamento da variável tempo difere bastante da atuação das variáveis espaciais. Já a abordagem de problemas dinâmicos representa alguns dos desafios mais substanciais na engenharia, destacando a importância dos métodos numéricos robustos atualmente empregados para abordá-los.

Entre os métodos mais conhecidos, destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MDF utiliza uma malha sobre o domínio físico do problema, no qual pontos nodais são usados para aproximar as derivadas das equações diferenciais por meio de uma expansão truncada da série de Taylor ([ZIENKIEWICZ; MORGAN, 2006](#)). O sistema de equações algébricas resultante é então resolvido com as condições de contorno/iniciais. Embora o MDF seja robusto e relativamente simples de implementar, ele enfrenta dificuldades com domínios físicos complexos e na imposição de condições de contorno, que podem exigir a introdução de pontos nodais fictícios.

O Método dos Volumes Finitos aprimora a abordagem do MDF, discretizando o domínio físico em volumes elementares, onde as integrais das equações são avaliadas,

garantindo a continuidade das incógnitas e a conservação do fluxo. Essa metodologia é especialmente eficaz em problemas com fluxos complexos e geometrias irregulares (EYMARD; GALLOUËT; HERBIN, 2000). Devido a facilidade apresentada pelo MVF para implementação de metodologias iterativas de solução, este método tem alcançado grande inserção na abordagem de problemas não-lineares, especialmente os casos governados pela equação de Navier Stokes.

O MEF, por sua vez, é o método mais utilizado atualmente. Neste método, o domínio contínuo é discretizado em um conjunto finito de subdomínios chamados elementos finitos, sobre os quais as equações são resolvidas de forma aproximada utilizando funções de interpolação e uma sentença de Resíduos Ponderados. A flexibilidade ao lidar com geometrias complexas e aplicação de diferentes tipos de condições de contorno torna-o amplamente utilizado em diversas áreas. Apesar de sua popularidade, o MEF exige uma grande quantidade de dados e pode apresentar imprecisões em situações de descontinuidades (HUGHES, 1987; REDDY, 1993)

O Método dos Elementos de Contorno, ao contrário dos métodos de domínio, como o MEF, discretiza apenas o contorno do domínio do problema, reduzindo significativamente a complexidade computacional. No MEC, a equação diferencial governante é transformada em uma integral sobre o contorno, onde as incógnitas são as variáveis de contorno. Isso simplifica a modelagem de problemas com geometrias complexas, tornando o MEC uma ferramenta poderosa para a análise estrutural, térmica e de fluxo ou escoamento (BREBBIA; WALKER, 1980; BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984; PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1991; DOMINGUEZ, 1993; KYTHE, 1995).

O MEC pode ser formulado de duas maneiras. A formulação direta caracteriza-se por tratar como incógnitas a variável básica e sua derivada no contorno. Essa abordagem fornece a solução de maneira mais objetiva, mas pode exigir maior esforço computacional devido à complexidade das matrizes geradas, que geralmente são assimétricas e densas. Por outro lado, a formulação indireta não fornece diretamente os deslocamentos e forças normais ao contorno, mas utiliza variáveis auxiliares, como fontes ou cargas no contorno; e, partindo da premissa de que funções harmônicas podem ser representadas por uma distribuição destas fontes no contorno, obtêm equações integrais em termos da densidade de fonte (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

Como todo método numérico, o MEC possui vantagens e limitações. Uma das principais

vantagens do MEC é a capacidade de lidar com domínios infinitos e semi-infinitos de forma simples, sem a necessidade de artifícios especiais, como a utilização de elementos específicos ou condições de contorno não refletivas. Isso facilita a modelagem de situações onde o domínio se estende indefinidamente.

Outra vantagem é a habilidade do MEC em capturar efeitos concentrados. Devido à natureza singular da solução fundamental utilizada na formulação, o método consegue identificar e resolver com precisão fenômenos que ocorrem em regiões localizadas. Adicionalmente, o cálculo das variáveis internas ao contorno é feito a partir dos valores obtidos no contorno, reaplicando-os nas expressões integrais do método. Esse procedimento melhora a qualidade dos resultados para as variáveis internas, promovendo uma nova minimização dos resíduos na solução, o que resulta em maior precisão (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

No entanto, o MEC apresenta algumas limitações. A primeira delas é que as matrizes geradas pelo método tendem a ser assimétricas e cheias, o que dificulta a utilização de algoritmos especialmente otimizados para a solução de sistemas lineares de equações algébricas, além da obtenção de autovalores e autovetores. Para contornar essa desvantagem, são utilizados algoritmos numéricos mais genéricos, que, embora mais complexos, podem lidar com as matrizes características do método.

Outra limitação do MEC é sua versatilidade reduzida em problemas setorialmente não homogêneos. Embora seja possível abordar esses casos utilizando o recurso de sub-regiões (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), onde cada setor homogêneo é discretizado, essa abordagem pode complicar a implementação e análise do modelo.

Por fim, uma dificuldade importante do MEC é o tratamento das ações de domínio, que incluem forças de corpo, fontes ou sorvedouros. Em situações onde essas ações estão presentes, a formulação clássica do MEC, não permite transformar facilmente as integrais de domínio das condições iniciais em integrais que envolvam apenas variáveis no contorno. Tal limitação tem sido suplantada especialmente com o desenvolvimento de formulações que empregam funções de base radial e soluções fundamentais mais simples, como a formulação com interpolação direta, desenvolvida neste trabalho.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

A proposição de uma técnica que pode ser considerada como a pioneira do MEC pode ser atribuída a [Jaswon \(1963\)](#) e [Symm \(1963\)](#), que formularam uma equação integral de contorno para problemas de potencial e a resolveram numericamente. As equações integrais de contorno resolvidas eram do tipo de Fredholm. O contorno dos problemas foi discretizado em vários segmentos ou elementos, nos quais uma densidade de fonte constante foi assumida. A técnica de colocação foi empregada para gerar uma série de equações integrais, e os coeficientes de influência foram computados usando a fórmula de Simpson, com exceção dos coeficientes singulares que foram computados analiticamente ou pela soma dos termos fora da diagonal. Em seu trabalho pioneiro, propuseram ainda uma formulação mais geral usando potenciais e derivadas como desconhecidos e os resultados foram relatados para algumas aplicações ([JASWON, 1963](#); [SYMM, 1963](#); [JASWON; PONTER, 1963](#)). Todas as bases para essa formulação vieram, provavelmente, devido ao surgimento do Método dos Elementos Finitos naquela época.

Desde os anos 70, a popularidade do MEC tem aumentado. A interpretação do método, em termos de princípios de resíduos ponderados, ajudou a esclarecer sua relação com outras técnicas numéricas, como Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos. Ao mesmo tempo, elementos de ordem superior começaram a ser desenvolvidos seguindo o trabalho de transformações do tipo jacobiano, usadas primeiramente em elementos finitos ([BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984](#)). A conscientização da importância de técnicas precisas de integração numérica levou à investigação e conseqüente desenvolvimento de abordagens adequadas para integrandos singulares e quasi-singulares ([TELLES, 1987](#)).

Adicionalmente, diversas pesquisas têm se voltado para técnicas que visam reduzir o custo computacional, aprimorando estratégias como a técnica de subdomínio ou sub-regiões ([RAMŠAK; ŠKERGET, 2007](#); [CHAI et al., 2022](#)). Estas abordagens tornam-se atrativas, pois não apenas diminuem significativamente a demanda de memória, mas também viabilizam a aplicação de solucionadores eficientes. A economia no tempo de processamento impulsiona esquemas iterativos de solução, como a Aproximação Cruzada Adaptativa ([BEBENDORF; GRZHIBOVSKIS, 2006](#)) e Multipolos Rápidos ([LIU; NISHIMURA, 2006](#)), ou ainda, estratégias alternativas na modelagem dos sistemas lineares ([CAMPOS; LOEFFLER, 2024](#)). Além disso, no campo de programação out-of-core, há

desenvolvimentos significativos (SCHIARA; PASCHOALINI, 2023).

Entretanto, é essencial que a redução do custo computacional seja acompanhada pelo desenvolvimento de formulações mais precisas e confiáveis. Assim, o aprimoramento de formulações do MEC que possam lidar com problemas nos quais há operadores diferenciais não auto-adjuntos (como os problemas transientes, ao se utilizar solução fundamental independente do tempo) é uma vertente importante de pesquisa. Além disso, quando se trata de problemas dinâmicos, além do procedimento de discretização do contorno, o tratamento do termo temporal representa um desafio adicional na aplicação do MEC.

Artigos de revisão como Beskos (1987), Beskos (1997) e Manolis e Dineva (2015), juntamente com algumas das principais referências do MEC (BREBBIA; WALKER, 1980; BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984; MANOLIS; BESKOS, 1988; DOMINGUEZ, 1993), ajudam a entender que a solução de problemas transientes no contexto do MEC é tipicamente realizada através das três metodologias a seguir.

1. No domínio do Tempo: Utiliza-se uma solução fundamental dependente do tempo (MANSUR, 1983). Desta forma, ambos os tipos de integrações, espacial e temporal, estão presentes. A discretização do espaço e tempo pode ser realizada através de funções de interpolação espacial independentes ou através de formas que lidam com variáveis espaciais e temporais de maneira acoplada (FRANGI, 2000).
2. Em um domínio transformado: Neste tipo de abordagem, a dependência do tempo é removida utilizando-se a transformada de Fourier ou de Laplace com respeito à variável temporal. Uma formulação do MEC é utilizada para tratar a equação resultante e uma técnica de transformada inversa é utilizada para retornar ao domínio do tempo.
3. No domínio do espaço: utiliza-se uma solução fundamental estacionária de um problema correlato, após o procedimento clássico de aplicação da integração por partes e teorema da divergência, as integrais excedentes são tratadas através de uma técnica adicional, notadamente procedimentos análogos à interpolação utilizando Funções de Base Radial (FBR). A resposta no tempo pode ser obtida através de um esquema de avanço incremental passo-a-passo (Newmark, Wilson- $\theta$ , Houbolt) ou superposição modal.

No âmbito do **domínio do tempo**, os trabalhos de Mansur e Brebbia (1982), Mansur e Brebbia (1982), Manolis e Beskos (1983), Mansur e Brebbia (1985), Mansur e Brebbia

(1985) e Antes (1985) foram a base para a formulação do MEC aplicada a problemas de propagação de onda e elastodinâmica.

Trabalhos mais recentes utilizando esta abordagem incluem:

O artigo de Carrer, Pereira e Mansur (2012), no qual utilizam um esquema de truncamento temporal baseado no polinômio de interpolação de Lagrange para a solução de problemas de elastodinâmica bidimensional.

Lei et al. (2012), que estudaram a propagação dinâmica de trincas em compósitos por meio do método dos elementos de contorno no domínio do tempo em conjunto com a técnica de sub-regiões.

Takahashi (2023), que em seu artigo propõe um método rápido de elementos de contorno no domínio do tempo para resolver problemas de espalhamento eletromagnético transiente tridimensionais relacionados a condutores elétricos.

Gao, Li e Liu (2024), que aplicaram a formulação no estudo de problemas transientes de ondas acústicas, especialmente na solução de problemas exteriores.

Já para o procedimento que utiliza a **transformada de Fourier**, as primeiras soluções de problemas transientes foram obtidas por Niwa, Kobayashi e Azuma (1975) e Niwa, Kobayashi e Fukui (1976) enquanto os trabalhos de Dominguez e Roesset (1978) e Dominguez (1978) representam a primeira tentativa de estudar, no domínio da frequência, a resposta dinâmica de fundações rígidas utilizando o Método dos Elementos de Contorno.

Mais recentemente, Perez-Gavilan e Aliabadi (2001) propuseram uma formulação de elementos de contorno no domínio da frequência para a solução de problemas viscoelásticos dinâmicos bidimensionais sujeitos a cargas harmônicas e Simoes et al. (2012) utilizaram uma formulação do método dos elementos de contorno com transformada de Fourier para resolver a equação de difusão sob condições iniciais não nulas.

Já a primeira formulação combinando o MEC e a **transformada de Laplace** para solução do problema elastodinâmico transiente deve-se a Cruse e Rizzo (1968) e Cruse (1968), que aplicaram esta abordagem para resolver um problema de propagação de ondas semi-planas. A este trabalho é creditado o pioneirismo no uso do MEC para resolver problemas elastodinâmicos.

Manolis e Beskos (1981) estenderam os trabalhos de Cruse e utilizaram uma formulação do MEC com transformada de Laplace para determinar o campo de tensão dinâmica e suas concentrações ao redor de cavidades em material linearmente elástico ou viscoelástico,

submetidos a cargas dinâmicas que consistiam em ondas de compressão plana de natureza harmônica ou transitória geral.

O principal desafio desta formulação é o retorno ao domínio do tempo, que é realizado através de inversão numérica da resposta transformada. Esta dificuldade é amplamente conhecida e torna a escolha do método de inversão um elemento crucial para a obtenção de bons resultados. [Narayanan e Beskos \(1982\)](#) apresentaram uma discussão geral e sistemática sobre o uso do método operacional da transformada de Laplace para resolver numericamente problemas lineares dependentes do tempo. Em seu trabalho, oito métodos existentes de inversão numérica da transformada de Laplace foram discutidos com relação a indicação do seu uso, faixa de aplicabilidade, precisão e eficiência computacional com base em alguns problemas de dinâmica estrutural. Ademais, os autores realizaram uma comparação do método operacional numérico da transformada de Laplace com análise modal, séries de Fourier e técnicas de integração numérica passo a passo. Em seu trabalho, a formulação de inversão proposta por [Durbin \(1974\)](#) se destacou devido à sua versatilidade.

[Gaul e Schanz \(1999\)](#) conduziram um estudo numérico de problemas de propagação de ondas em meios viscoelásticos 3D comparando três formulações do MEC, duas abordagens do MEC no domínio do tempo e uma abordagem no domínio de Laplace. Neste trabalho, o método de inversão proposto por [Durbin \(1974\)](#) foi um dos testados e mais uma vez apresentou performance satisfatória.

A abordagem combinada do MEC com a transformada de Laplace foi também aplicada com sucesso a problemas bidimensionais de difusão de calor transiente por [Moridis e Reddel \(1991\)](#), inclusive simulando domínios anisotrópicos e não homogêneos. [Sutradhar, Paulino e Gray \(2002\)](#) utilizaram uma formulação do MEC com transformada de Laplace para resolver problemas tridimensionais de condução de calor transiente para materiais funcionalmente graduados, e [Davies et al. \(2007\)](#) realizaram uma abordagem para a solução numérica do problema de difusão, em que a variação espacial é desenvolvida usando uma abordagem de elementos de contorno e o desenvolvimento temporal foi realizado de maneira híbrida por meio da transformada de Laplace e Diferenças Finitas.

[Guo et al. \(2017\)](#) apresentaram um método de elementos de contorno, com uma formulação de tripla reciprocidade e uso da transformada de Laplace, para resolver problemas de condução de calor transiente em 3D.

[Li, Khodaei e Aliabadi \(2020\)](#) utilizaram uma formulação de elementos de contorno

com transformada de Laplace para modelar ondas de Lamb em placas, com foco em monitoramento estrutural. A formulação permite a análise tridimensional da propagação das ondas e interação com fissuras, e um algoritmo é usado para localizar danos. A inversão para voltar ao domínio do tempo é realizada através do método proposto por [Durbin \(1974\)](#).

[Azis et al. \(2021\)](#) combinaram a transformada de Laplace e o Método de Elementos de Contorno para encontrar soluções numéricas para problemas de valor inicial e de contorno em domínios anisotrópicos funcionalmente graduados regidos pela Equação Laplace.

[Markov et al. \(2022\)](#) utilizam a formulação para resolver problemas dinâmicos em meios sólidos tridimensionais, homogêneos, anisotrópicos e linearmente elásticos. O procedimento de Durbin foi utilizado para inversão da transformada de Laplace.

[Lei, Shao e Dong \(2023\)](#) também utilizam a combinação da transformada de Laplace com o MEC para resolver problemas elastodinâmicos bidimensionais. Uma vez resolvido no domínio transformado, a resposta no domínio do tempo é obtida pelo método de inversão de Durbin.

No que se refere ao Método dos Elementos de Contorno, são escassos os trabalhos que empregam a **superposição modal**. O trabalho pioneiro foi feito por [Nardini e Brebbia \(1986\)](#). Outro trabalho foi realizado na sequência, mas provavelmente devido ao custo computacional da análise modal e suas limitações aos casos lineares, poucas referências são encontradas.

[Kontoni \(1993\)](#) associou a superposição modal com a Dupla Reciprocidade para resolver problemas de dinâmica inelástica submetidos a carregamentos dinâmicos.

[Kopuz e Lalor \(1995\)](#) utilizou o MEC e o MEF para prever o campo acústico interno de uma cavidade fechada retangular, causado pela vibração de uma das paredes. Diferentes técnicas de cada método foram comparadas com a superposição modal e resultados semelhantes foram obtidos, desde que modos suficientes sejam incluídos neste último caso.

[Sheng \(2008\)](#) combinou o MEC com a superposição modal para avaliar a propagação de ondas em dutos abertos retilíneos.

[Chen e Hwu \(2014\)](#) utilizaram uma solução fundamental elastostática anisotrópica, que satisfaz as condições de contorno de tração livre de furos ou fissuras para análise elastodinâmica. A integral de domínio contendo os termos de inércia foi tratada através do MECDR. O sistema de equações resultante do procedimento padrão no MEC foi resolvido utilizando o algoritmo de Houbolt e o método de superposição modal. Cinco exemplos

numéricos foram apresentados, e, os resultados obtidos, estavam em conformidade aqueles calculados pelo software de elementos finitos ANSYS.

Lu e Legrand (2020) examinaram e discutiram a análise modal para casos não lineares utilizando duas formulações do MEC: a primeira que utiliza uma solução fundamental dependente do tempo e discretiza a equação integral no tempo e no espaço; e, uma segunda que utiliza-se da transformada de Fourier para levar o problema para o domínio da frequência.

No escopo das aplicações práticas, Citarella, Federico e Cicatiello (2007) utilizaram uma abordagem integrada do MEC com MEF para realizar uma análise vibroacústica de automóveis. O MEF foi utilizado para abordar a dinâmica estrutural e o MEC para a resolução do problema acústico, sendo ambas as abordagens feitas com base na composição modal.

No âmbito dos métodos no **domínio do espaço**, a literatura apresenta constantes inovações na formulação de modelos, com o intuito de transformar, de maneira eficaz, as integrais de domínio geradas pelo operador não auto-adjunto em integrais de contorno. Exemplos desses modelos incluem o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) (NARDINI; BREBBIA, 1983a), Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade (MECMR) (NOWAK; BREBBIA, 1989a), Aproximação Geral de Base Radial (WEN; ALIABADI; ROOKE, 1998), Método de Integração Radial (MIR) (GAO, 2002), Método dos Elementos de Contorno – Método Integral de Rayleigh (KIRKUP et al., 2013), Método de Interpolação Direta (MECID) (LOEFFLER; CRUZ; BULCÃO, 2015) e Método de Integração Baseado em Malha (RBIM) (NARVAEZ; USECHE, 2022).

A criação de formulações baseadas na utilização de Funções de Base Radial, iniciou-se com a formulações de Dupla Reciprocidade. Inicialmente proposta para lidar com problemas de autovalores na análise de vibração livre linear, sendo rapidamente estendida para outras classes de problemas, como difusão transiente (LOEFFLER; MANSUR, 1986; WROBEL; BREBBIA; NARDINI, 1986), difusão transiente não-linear (WROBEL; BREBBIA, 1987), problemas de forças de corpo (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1991), problemas advectivo-difusivos (WROBEL; DEFIGUEIREDO, 1991), problemas acústicos (LOEFFLER; MANSUR, 1987), problemas elastodinâmicos (NARDINI; BREBBIA, 1983b) e alguns casos de análises não lineares (PARTRIDGE; BREBBIA;

WROBEL, 1991). Mais recentemente, Gomes et al. (2019) utilizaram a técnica para resolver problemas elasto-plásticos, Yu et al. (2021) resolveram problemas de difusão transiente com fontes e Naga, Elsheikh e Rashed (2022) utilizaram a MECDR para resolver problemas elastodinâmicos bidimensionais.

Outra abordagem do MEC para transformar integrais de domínio em integrais de contorno é o Método dos Elementos de Contorno com Múltipla Reciprocidade (MECMR), apresentado por Nowak e Brebbia (1989a), inicialmente para resolver problemas de Poisson. Este método adota estrategicamente uma sequência de soluções fundamentais de ordem superior, na qual a identidade de Green é aplicada várias vezes. Uma comparação entre o MECDR e o MECMR foi apresentada por Nowak e Partridge (1992). O MECMR foi aplicado com sucesso a problemas de condução de calor transiente (NOWAK, 1989b) e problemas de Helmholtz (KAMIYA; ANDOH, 1993; KAMIYA; ANDOH; NOGAE, 1996; YEIH et al., 1998), entre outros.

O procedimento de integração radial proposto por Gao (2002) também já foi acoplado ao MEC e utilizado para resolver problemas dinâmicos de placas anisotrópicas (ALBUQUERQUE; SOLLERO; PAIVA, 2007), problemas de condução de calor (YANG; GAO, 2010; AL-JAWARY; WROBEL, 2012; CUI et al., 2018) análise de fratura de materiais com gradiente funcional (GAO et al., 2008) problemas dinâmicos de termo-elasticidade acoplada (GAO et al., 2015) e problemas de solidificação em fase única (YU et al., 2014).

A formulação do MECID, assim como a MECDR e a MECMR, foi desenvolvida fundamentando-se na solução fundamental de problemas estacionários, sejam escalares ou vetoriais. No caso de problemas de campo escalares, usa-se a solução fundamental de Poisson acompanhada de funções de base radial, substituindo o núcleo não auto-adjunto das integrais de domínio. O núcleo das integrais de domínio pode ser associado à inércia acústica, ao termo de transporte em problemas advectivo-difusivos ou simplesmente a ações de domínio ou termos forçantes. A técnica MECID aproxima todo o núcleo das integrais de domínio, incluindo a solução fundamental, por meio de funções de base radial. Ainda que compartilhe semelhanças com a MECDR, a formulação do MECID não exige a construção de duas matrizes auxiliares que multiplicam as matrizes clássicas de elementos de contorno  $[H]$  e  $[G]$ . Isso se deve ao fato de abordar diretamente o domínio integral, de maneira análoga a um procedimento de interpolação.

O procedimento MECID foi aplicado com sucesso na resolução de problemas de Poisson (LOEFFLE et al., 2017a), problemas de Laplace não homogêneos (BARCELOS; LOEFFLER, 2019), Helmholtz (LOEFFLER et al., 2017b), Advecção-Difusão (PINHEIRO; LOEFFLER; MANSUR, 2022; LOEFFLER; PINHEIRO; LARA, 2024) e Advecção-Difusão-Reação (LOEFFLER et al., 2024). No contexto de problemas escalares envolvendo ondas estacionárias (os problemas de Helmholtz), a robustez e a precisão superiores do MECID foram demonstradas por meio da comparação com os resultados obtidos pela MECDR (BALISTA et al., 2023). O modelo MECID também pode ser aplicado com sucesso em conjunto com MIR, uma vez que este método requer uma técnica auxiliar para resolver problemas nos quais o núcleo é composto por uma variável desconhecida (CAMPOS et al., 2020).

Um ponto que merece destaque nestas formulações, é a instabilidade numérica ao usar passos de integração temporal muito pequenos. Em métodos discretos de domínio, problemas de instabilidade ocorrem para incrementos de tempo grandes, e, portanto, esquemas de integração incondicionalmente estáveis são adotados. Entretanto, no contexto do MEC, mesmo estes esquemas incondicionalmente estáveis, como é o caso do esquema de Houbolt, apresentam instabilidade para incrementos de tempo diminutos. Esse comportamento distinto está associado ao fato de que os critérios de estabilidade destes esquemas, que são bem-sucedidos no Método dos Elementos Finitos e no Método das Diferenças Finitas, foram gerados para técnicas de domínio, não sendo rigorosamente válidas para o MEC, cuja discretização é restrita ao contorno (CASTILLO; LOEFFLER, 2003).

No entanto, a causa exata dessa instabilidade no MEC ainda não é totalmente compreendida. Uma hipótese sugere imprecisões na constituição da matriz de massa, construída por aproximações com funções de base radial. Outra hipótese está relacionada aos critérios de estabilidade dos esquemas incrementais, estudados em métodos discretos de domínio, que podem não ser adequados para o MEC. Uma possibilidade adicional é que a assimetria da matriz de massa gere autovalores complexos, que desestabilizam o avanço temporal.

### 1.3 *Objetivos*

Este trabalho propõe adaptações inovadoras da formulação do MEC denominada Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID). A abordagem MECID é ajustada para se amoldar a duas técnicas distintas de tratamento de problemas dinâmicos: a Superposição Modal e a transformada de Laplace, dois procedimentos consolidados matematicamente. Além da análise das peculiaridades, vantagens e desvantagens que tais técnicas impõem à modelagem calcada nos fundamentos do MEC, esta pesquisa tem um importante propósito específico, relacionado à investigação da instabilidade observada ao se utilizar de reduzidos incrementos de tempo nos esquemas de integração passo a passo, que é estratégia predominante na maior parte dos trabalhos afins (SANTOS *et al.*, 2025).

Os pormenores destas formulações serão meticulosamente elucidados em etapas subsequentes, conferindo uma análise mais minuciosa e abrangente a este trabalho, que possui originalidade no contexto da MECID. Este enfoque visa não apenas solucionar o problema identificado, mas também aprofundar a compreensão sobre a eficácia dessas técnicas dentro do contexto do MEC, avaliando precisão e custo computacional, ampliando assim o conhecimento no campo em questão.

### 1.4 *Metodologia*

O desenvolvimento do modelo numérico será feito em etapas que incluem a análise da equação integral do MEC e o tratamento das integrais resultantes seguindo a filosofia da MECID, a discretização do domínio físico com elementos de contorno lineares e a implementação de algoritmos para a solução dos problemas de potencial. As simulações numéricas servirão para verificar a precisão e a convergência das técnicas propostas. Os resultados serão comparados com formulações alternativas, e as formulações serão validadas com dados da literatura.

### 1.5 *Organização do Trabalho*

Além deste capítulo introdutório, a tese está organizada em seis capítulos e dois apêndices, que detalham alguns conceitos e metodologias essenciais para o desenvolvimento

e validação das formulações propostas.

No Capítulo 2, são apresentadas as equações clássicas da elastodinâmica bidimensional. Esse capítulo inclui a dedução da equação da onda, que é fundamental para a análise do comportamento elástico.

No Capítulo 3, são introduzidos os conceitos fundamentais que permeiam o MEC e sua metodologia. O foco principal deste capítulo é a aplicação da formulação do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta à equação da onda.

O Capítulo 4 apresenta a formulação do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta e Superposição Modal (MECID-SM). Inicialmente, é mostrado o problema de autovalor utilizado para identificar os modos de vibração e suas respectivas frequências. A seguir, são discutidas tanto a formulação clássica de superposição modal, baseada em matrizes simétricas, quanto sua alternativa para matrizes não simétricas. Além disso, uma formulação modificada aplicável a matrizes não simétricas é introduzida. Experimentos são conduzidos para investigar aspectos próprios e verificar a precisão dessas formulações.

No Capítulo 5, é apresentada a formulação da MECID com Transformada de Laplace (MECID-TL). Os conceitos iniciais sobre transformada de Laplace são revisados e métodos de inversão são testados. A formulação final é discutida, utilizando o método de inversão de Durbin. Experimentos adicionais são realizados para validar a eficácia da abordagem no contexto do trabalho.

Por fim, o Capítulo 6, traz as considerações finais e conclusões da tese, onde os resultados obtidos são discutidos e sugestões para trabalhos futuros são propostas.

A tese inclui ainda três apêndices:

- Apêndice A: Soluções Analíticas, no qual são apresentadas as soluções analíticas dos problemas abordados e uma discussão sobre o número de termos a ser utilizados nas expansões em série.
- Apêndice B: O Algoritmo de Houbolt, que apresenta a aplicação do método à equação de movimento para determinação do deslocamento em um esquema passo a passo.
- Apêndice C: Determinação Numérica de Autovalores e Autovetores, no qual são abordadas técnicas e algoritmos utilizados para a resolução de problemas de autovalor e autovetor, fundamentais para a compreensão e aplicação da superposição modal.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas as equações clássicas da elasticidade bidimensional, e, a partir destas, será derivada a equação escalar da onda, demonstrando que esta, também conhecida como equação da onda acústica, é um caso particular da equação da elastodinâmica. Serão abordadas suas aplicações em alguns campos científicos, destacando a amplitude de sua influência e relevância.

### 2.1 Notação das Variáveis

A menos que especificado explicitamente, ao longo do texto utilizar-se-á a convenção que se segue na representação dos entes matemáticos.

- **Escalares:** Valores escalares serão representados por letras em itálico.

$$a = 1$$

- **Pontos Ordenados:** Pontos ordenados representando posições no domínio bidimensional serão representados por letras em negrito.

$$\mathbf{X} = (1, 4)$$

- **Vetores:** Variáveis vetoriais serão representados por letras em negrito encimadas por

uma seta ou, por uma letras, em negrito, envolvidas por colchetes.

$$\vec{v} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \{\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\}$$

- **Matrizes:** Entidades matriciais serão representadas por uma letra maiúscula, em negrito, envolvida por colchetes.

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Tensores:** Tensores serão representados por letras em negrito encimadas por barras. Uma barra para tensores de primeira ordem e 2 barras para tensores de segunda ordem (diádicos).

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Tópicos de Elastodinâmica

Inicialmente, serão apresentados alguns conceitos e relações fundamentais da elastodinâmica de forma a facilitar o entendimento dos desenvolvimentos subsequentes.

### *Ponto Material*

Um ponto material é uma posição específica dentro de um corpo à qual são endereçadas propriedades do material. Em um modelo contínuo, um corpo é considerado uma coleção infinita de pontos materiais. Para um espaço bidimensional, cada ponto material possui duas coordenadas espaciais. Considerando as coordenadas cartesianas, cada ponto material do plano pode ser representado por:

$$\mathbf{X} = (x, y) \tag{2.1}$$

onde  $x, y$  são as direções cartesianas.

### Deslocamento de um Ponto Material

O vetor deslocamento  $\vec{u}$  descreve a mudança na posição de um ponto material em um meio físico. Ele indica a magnitude e a direção do deslocamento de um ponto em relação à sua posição inicial. Para um ponto  $\mathbf{X}$  no corpo, o vetor deslocamento pode ser representado por:

$$\vec{u} = \vec{u}(\mathbf{X}, t)$$

O vetor deslocamento  $\vec{u}$  pode ser decomposto em duas componentes: a dilatacional (irrotacional) e a cisalhante (rotacional), utilizando o teorema de Helmholtz. A decomposição é dada por (ERINGER, 1974; ACHENBACH, 2012):

$$\vec{u} = \nabla u + \nabla \times \vec{a} \quad (2.2)$$

Na equação (2.2)  $\nabla u$  é a componente dilatacional, associada ao gradiente de um potencial escalar  $u$  e  $\nabla \times \vec{a}$  é a componente cisalhante, associada ao rotacional de um potencial vetorial  $\vec{a}$ , onde  $\nabla \cdot \vec{a} = 0$  para garantir a unicidade da decomposição.

A componente dilatacional está associada às variações volumétricas no meio, e sua divergência é:

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u \quad (2.3)$$

A componente cisalhante está associada às rotações e deformações por cisalhamento (distorções), sendo que sua divergência é nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \quad (2.4)$$

Essa decomposição permite separar a deformação em duas partes distintas: a dilatação (variação de volume) e o cisalhamento (deformação sem mudança de volume).

### Vetor Rotação

Na elastodinâmica, o vetor rotação  $\vec{w}$  descreve a rotação local de elementos materiais em um corpo deformável. Ele pode ser definido em função do rotacional do vetor deslocamento  $\vec{u}$  (GRAFF, 1975):

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} \quad (2.5)$$

Quando  $\vec{w} = 0$ , a deformação é irrotacional, o que ocorre em ondas dilatacionais (ou longitudinais), onde as partículas se movem na direção da propagação da onda sem girar. Por outro lado, as ondas de cisalhamento (ou transversais) estão associadas a um vetor rotação não nulo, indicando que ocorrem rotações locais no meio material (GRAFF, 1975).

### *Deformação de um Ponto Material*

O tensor de deformações bidimensional,  $\bar{\epsilon}$ , é uma representação matemática que descreve a deformação de um corpo em duas dimensões. Ele é utilizado para quantificar as mudanças nas dimensões e na forma de um material quando sujeito a forças externas e é geralmente representado por uma matriz 2x2 que relaciona as componentes das deformações normais e cisalhantes em duas direções ortogonais (x e y):

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Aqui,  $\epsilon_{xx}$  e  $\epsilon_{yy}$  representam as deformações normais nas direções x e y, respectivamente, enquanto  $\epsilon_{xy}$  e  $\epsilon_{yx}$  representam as deformações cisalhantes. Fisicamente, as deformações normais representam a dilatação ou contração do material ao longo das direções principais, enquanto as deformações cisalhantes refletem a mudança de forma, ou seja, a tendência do material a distorcer sem mudança de volume.

As deformações são relacionadas com o deslocamento através das chamadas "relações deformação deslocamento", que são podem ser expressas através da seguinte equação matricial (FUNG, 1965):

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) \quad (2.6)$$

### *Tensões em um Ponto Material*

O tensor de tensões bidimensional,  $\bar{\sigma}$ , é uma representação matemática que descreve o estado de tensões em um corpo em duas dimensões. É geralmente representado por uma matriz 2x2 que relaciona as componentes das tensões normais e cisalhantes em duas

direções ortogonais:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Aqui,  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  representam as tensões normais nas direções x e y, respectivamente, enquanto  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yx}$  representam as tensões cisalhantes. Similarmente às deformações, as tensões normais refletem as forças internas que agem perpendicularmente às superfícies do material nas direções principais. Já as tensões cisalhantes refletem as forças internas que agem paralelamente às superfícies do material, resultando em uma possível distorção do material.

O tensor de tensões está relacionado ao vetor deslocamento e ao tensor de deformações através das equações constitutivas. Para materiais elásticos, isotrópicos e lineares, as equações constitutivas para um problema de deformação plana bidimensional podem ser expressas através da Lei de Hooke (FUNG, 1965):

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})\bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$  é o tensor identidade e  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes elásticas para o material, conhecidas como constantes de Lamé, e podem ser expressas em termos de outras constantes elásticas como o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , e o módulo de Young,  $E$ :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### *Equações do Movimento*

As equações diferenciais de movimento que expressam o equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal do meio podem ser derivadas da teoria da elasticidade estática. Para um meio elástico bidimensional, considerando novamente a teoria de pequenos deslocamentos, as equações de movimento podem ser expressas na forma vetorial a seguir (GRAFF, 1975; ERINGER, 1974).

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \rho \bar{\mathbf{f}} = \rho \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

onde  $\rho$  é a massa específica por unidade de volume do material e  $t$  indica o tempo.

### 2.3 A Equação da Onda Plana

Substituindo a expressão constitutiva, equação (2.7), na equação do movimento, equação (2.8):

$$\nabla \cdot \left[ \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right] + \rho\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Utilizando o tensor de deformação, equação (2.6), e aplicando princípios operacionais do cálculo vetorial e propriedades como a simetria do tensor deformação, obtém-se os desenvolvimentos a seguir.

$$\nabla \cdot \left[ \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T) \right] + \rho\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

$$(\lambda + \mu)\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2 \vec{u} + \rho\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Uma forma alternativa pode ser obtida usando a identidade vetorial expressa na equação (2.12).

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (2.12)$$

A substituição da identidade expressa pela equação (2.12) na equação (2.11) leva ao seguinte resultado:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \rho\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Utilizando a definição do vetor de rotação, equação (2.5), pode-se expressar o último resultado como:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - 2\mu\nabla \times \vec{w} + \rho\vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.14) está relacionado a ondas longitudinais, nas quais as partículas do meio se movimentam na mesma direção da propagação da onda (conforme figura [2.1]). Esse tipo de onda está associado à compressão e dilatação do material, onde as forças restauradoras agem ao longo da direção de

deslocamento.

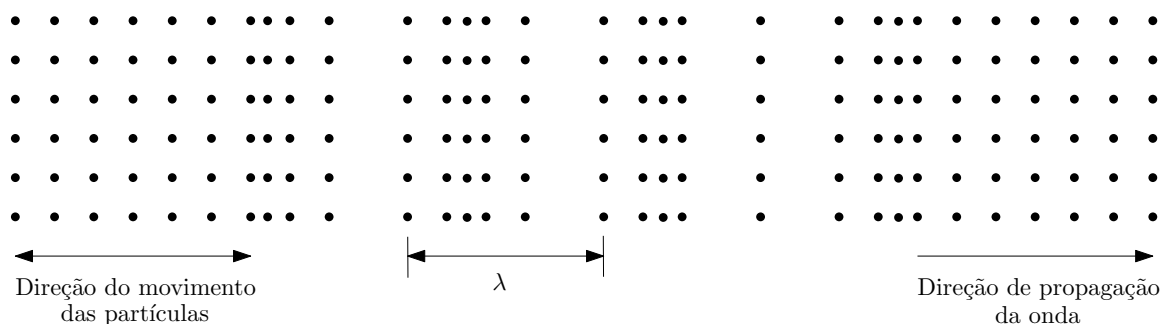


Figura 2.1: Onda longitudinal  
Fonte: Adaptado de Graff (1975)

Estas ondas são denominadas ondas P (primárias), e representam a forma de propagação mais rápida em meios sólidos. Elas compreendem os conteúdos esféricos de deformação, já que as compressões e expansões ocorrem de maneira simétrica em torno do ponto de origem.

Já o segundo termo do lado esquerdo da equação (2.14) está relacionado a ondas transversais. Nestas, as partículas do meio se movimentam perpendicularmente à direção de propagação da onda (vide figura [2.2]). Essas ondas são comumente associadas a deformações de cisalhamento, nas quais as partículas do material sofrem deslocamentos laterais. Essas ondas são chamadas de ondas S (secundárias) e propagam-se mais lentamente do que as ondas longitudinais em meios sólidos.

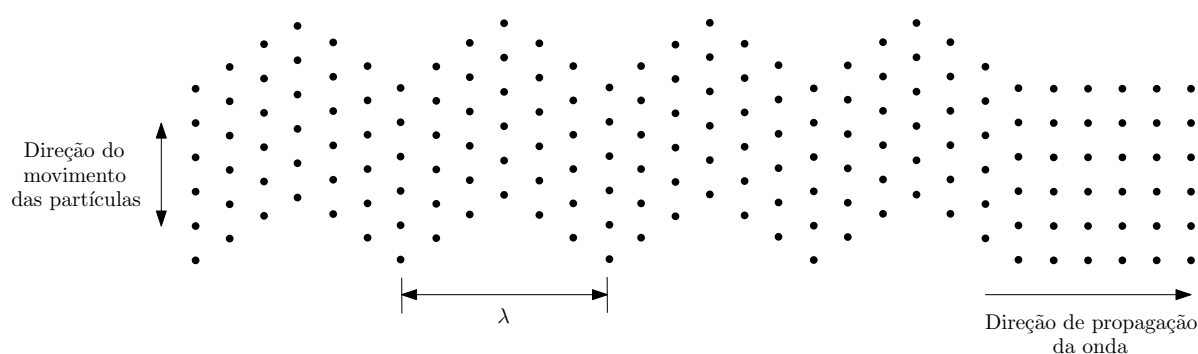


Figura 2.2: Onda transversal  
Fonte: Adaptado de Graff (1975)

Em contrapartida às ondas longitudinais, as ondas transversais não se propagam em fluidos da mesma forma que os sólidos, pois os líquidos e gases não suportam tensões de cisalhamento.

Este trabalho aborda o estudo de ondas longitudinais; assim, o vetor rotação é nulo. Considerando também a condição de ausência de forças de corpo, a equação (2.14) pode ser simplificada para a forma a seguir.

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

Para obter a forma escalar da equação da onda longitudinal, utiliza-se os resultados expressos nas equações (2.2), (2.3) e (2.4), tornando possível escrever a equação em termos do potencial escalar  $u$ :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 u) = \rho \frac{\partial^2 (\nabla u)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

Como o operador  $\nabla$  age sobre ambos os lados da equação, pode-se eliminá-lo de forma a obter a forma a seguir.

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Reorganizando os termos, obtém-se a equação da onda escalar longitudinal, que descreve a propagação de uma onda em um meio contínuo, como uma corda, uma membrana ou um campo escalar:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

onde  $k = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  é a velocidade de propagação da onda no meio.

Para facilitar a compreensão das equações matemáticas a seguir, a partir deste ponto, será utilizada a notação de Newton para a derivada temporal, ou seja, utilizar-se-á  $\dot{u}$  para representar a primeira derivada (velocidade) e  $\ddot{u}$  para representar a segunda derivada (aceleração), de forma que a equação da onda pode ser escrita novamente como se segue.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k^2} \ddot{u} \quad (2.19)$$

Sendo uma equação escalar, os efeitos de inércia e rigidez contribuem para estabelecer um equilíbrio dinâmico dado apenas pelos conteúdos esféricos do estado de tensão, o que pode ser entendido como um potencial fornecido por  $u(\mathbf{X}, t)$ . Essa equação é fundamental na modelagem de vários fenômenos ondulatórios, incluindo ondas sonoras, ondas em cordas

esticadas, ondas em membranas vibrantes e muitos outros casos (GRAFF, 1975).

Ela reflete a ideia de que a aceleração da onda é proporcional à curvatura espacial da amplitude, e a constante de proporcionalidade é a velocidade de propagação  $k$ . A curvatura espacial da amplitude refere-se à forma como a amplitude da onda muda com relação ao espaço. Em outras palavras, observa-se como a altura (ou profundidade) da onda varia em diferentes pontos do espaço. Quando essa curvatura espacial da amplitude muda ao longo do tempo, pode ocorrer uma aceleração na onda. Isso geralmente está relacionado a fenômenos de dispersão ou refração, nos quais a forma da onda se modifica devido à interação com o meio ou com outras ondas.

A partir deste ponto, sempre que no texto for utilizado o termo “equação da onda” ele refere-se à equação escalar da onda.

Para que o problema seja bem posto é preciso que sejam imputadas condições iniciais e de contorno, que descrevem o estado inicial e como a onda interage com as fronteiras do meio físico (vide figura [2.3]). No contexto deste trabalho, considera-se a solução da equação da onda em um domínio bidimensional  $\Omega(\mathbf{X})$ :

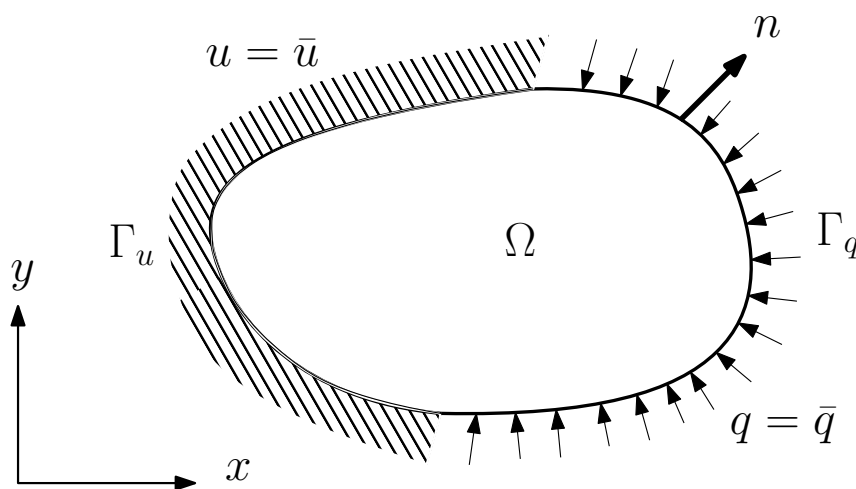


Figura 2.3: Definições geométricas do problema

No instante inicial,  $t = 0$ , são impostas condições iniciais:

$$u(\mathbf{X}, 0) = u_o \quad (2.20)$$

$$\dot{u}(\mathbf{X}, 0) = \dot{u}_o \quad (2.21)$$

No contorno, são aplicadas condições que expressam o comportamento dos

deslocamentos e das tensões no contorno, sendo estas:

$$\text{Essenciais (Dirichlet): } u(\mathbf{X}, t) = \bar{u}, \quad \text{em } \Gamma_u, \quad e \quad (2.22)$$

$$\text{Naturais (Neumann): } q(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \bar{q}, \quad \text{em } \Gamma_q. \quad (2.23)$$

O vetor  $\vec{n}$  é o vetor normal externo ao contorno,  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$  e as barras sobrepostas apresentadas nas variáveis das equações (2.22) e (2.23) indicam valores conhecidos. Condições de contorno mais complexas, tais como combinações lineares das anteriores, isto é:

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (2.24)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros conhecidos, podem ser facilmente incluídos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), mas eles não serão considerados aqui por extrapolarem o escopo deste trabalho.

## 2.4 Aplicações

Ainda que este trabalho se situe no contexto da mecânica dos sólidos, a equação da onda surge também em outros campos da ciência nos quais estuda-se o comportamento ondulatório de diferentes grandezas. Uma das principais razões para essa adaptabilidade é a possibilidade de interpretar o potencial de maneiras diversas, conforme o campo de aplicação. Na mecânica dos sólidos, ele pode indicar deslocamento, como aqui trabalhado, ou a dilatação, facilitando a análise de vibrações estruturais e ondas sísmicas. Em acústica, o potencial pode representar a pressão acústica em determinado ponto. No contexto eletromagnético, o potencial pode se relacionar com a intensidade de um campo elétrico ou magnético, enquanto em hidrodinâmica ele pode representar uma variação de altura ou pressão. A seguir explora-se algumas das suas aplicações mais significativas nestes diferentes campos.

Começando pela acústica, a equação da onda é fundamental para modelar a propagação de ondas sonoras no ar, líquidos e também nos sólidos. Em ambientes fechados, como salas de concerto, teatros e estúdios de gravação ou até mesmo em meios de transporte como

automóveis e aeronaves, a compreensão da equação da onda é essencial para otimizar a qualidade acústica (KUTTRUFF, 2016). O design de salas e a disposição de elementos arquitetônicos são influenciados diretamente pela capacidade de controlar a propagação das ondas sonoras, minimizando reflexões indesejadas e garantindo uma experiência auditiva aprimorada (ZHANG et al., 2018).

Na engenharia sísmica, a equação da onda é uma ferramenta crítica para a compreensão do comportamento das ondas sísmicas que se propagam através da crosta terrestre. Essa aplicação é vital para o projeto de estruturas que resistam a terremotos, contribuindo para a segurança de edifícios, pontes e outras infraestruturas. A interpretação dos dados sísmicos também desempenha um papel fundamental na exploração de recursos naturais, como identificação de depósitos minerais e estudos geotécnicos (XIE; JIN; WU, 2006).

Em geofísica, a equação da onda é uma ferramenta essencial na prospecção sísmica. Ao analisar as ondas sísmicas geradas por fontes controladas, os geofísicos podem mapear a subsuperfície terrestre, identificando estruturas geológicas, camadas de solo e potenciais reservatórios de recursos naturais, como petróleo e gás.

Em contextos eletromagnéticos, a equação da onda descreve a propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos. Isso inclui a transmissão de sinais de rádio, micro-ondas e luz visível. Embora as equações da onda plana longitudinal e eletromagnética tenham diferenças fundamentais em termos das grandezas físicas que descrevem e das propriedades (pressão versus campos elétricos e magnéticos) dos meios onde ocorrem (meios acústicos versus meios eletromagnéticos), ambas são fundamentais para a compreensão e a modelagem da propagação de ondas em diferentes contextos físicos e engenharia (GRIFFITHS, 2023).

## O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo, o foco central reside na apresentação do Método dos Elementos de Contorno (MEC), com ênfase na formulação com interpolação direta (MECID). O principal propósito é explorar detalhadamente essa abordagem e sua aplicação específica à equação da onda.

### 3.1 *Conceitos Fundamentais*

Faz-se necessário, antes de apresentar a formulação MECID para problemas governados pela equação da onda, oferecer uma visão dos principais conceitos que permeiam o MEC com a finalidade de estabelecer as bases conceituais essenciais, proporcionando aos leitores uma compreensão sólida do método.

#### 3.1.1 *O Teorema de Green*

Também conhecido como Teorema da Divergência, o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Gauss em duas dimensões. Ele estabelece uma relação entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada no plano e uma integral dupla sobre a região delimitada por essa curva.

Seja  $D$  uma região no plano  $\mathbb{R}^2$  delimitada por uma curva simples, fechada e derivável onde esteja definida uma função  $\vec{F} : \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , em que  $P$  e  $Q$  são funções reais de variável real com derivadas parciais contínuas numa região contendo  $D$  e  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são os vetores canônicos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Então ([APOSTOL, 1967](#)):

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (3.1)$$

Na equação (3.1),  $\vec{n}$  é o vetor tangente unitário à curva  $\partial D$ ,  $ds$  é o elemento de comprimento ao longo da curva,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  é a derivada parcial de  $P$  em relação a  $y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  é a derivada parcial de  $Q$  em relação a  $x$ , e  $dA$  é o elemento de área na região  $D$ .

No contexto do MEC o Teorema de Green é uma ferramenta essencial, pois possibilita a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno.

### 3.1.2 Elementos de Contorno

Considere o problema de calcular o perímetro  $s$  de uma curva plana que delimita um domínio  $\Gamma$  qualquer. Para casos simples, como domínios circulares e retangulares, há expressões analíticas. Nas situações onde é possível determinar uma expressão matemática para a curva delimitadora, é possível utilizar as técnicas do cálculo integral para determinar seu comprimento. Entretanto, em diversos casos, a integral ao longo do contorno  $S$  pode ser bastante difícil, ou mesmo impossível, de se calcular analiticamente. Uma estratégia alternativa para o cálculo do perímetro é descrita a seguir, através de um exemplo no qual o objetivo é determinar o perímetro de um círculo de raio  $r$  qualquer, figura [3.1].

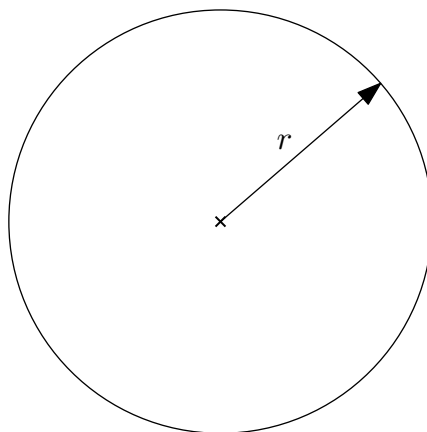


Figura 3.1: Círculo de raio  $r$   
Fonte: Próprio Autor

O primeiro passo consiste em particionar o contorno  $S$  em uma soma de pequenos pedaços  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , vide figura 3.2 ou seja:

$$S = \sum_{i=1}^n s_i \quad (3.2)$$

onde  $n$  é o número de fragmentos em que o contorno foi dividido.

Após particionar o contorno, a etapa seguinte é aproximar cada pedaço através de uma forma conhecida. Por simplicidade, esta forma é quase sempre dada por um polinômio (linha reta, parábola, etc).

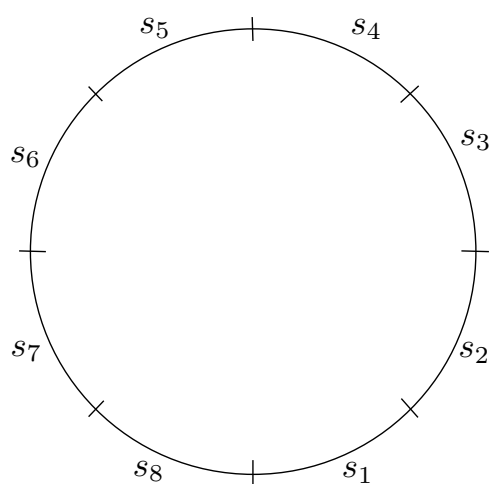


Figura 3.2: Círculo de Contorno S  
Fonte: Próprio Autor

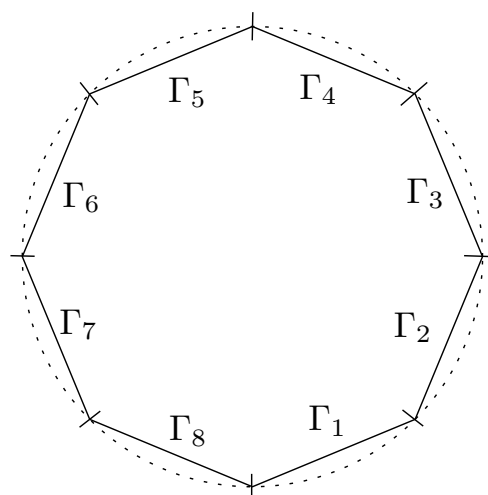


Figura 3.3: Contorno Aproximado  
Fonte: Próprio Autor

Dessa maneira, cada segmento  $s_1, s_2, \dots, s_n$  é aproximado por formas conhecidas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , chamados **Elementos de Contorno** (figura 3.3). Assim, o contorno  $\Gamma$  aproximado é:

$$S \approx \Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (3.3)$$

Tomando o limite para infinitos elementos:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (3.4)$$

No MEC, o objetivo não é o cálculo do perímetro, e sim o cálculo, ao longo do contorno, das integrais e derivadas que surgem da formulação. Assim, além de escolher funções para aproximar a forma, funções também devem ser elencadas para aproximar a variável primal e sua derivada.

Há diversos tipos de elementos de contorno, aplicados aos mais diversos problemas (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984). No presente trabalho foram utilizados elemento lineares contínuos com formulação isoparamétrica; ou seja, as mesmas funções de forma usadas para interpolar a geometria são também usadas para interpolar as variáveis físicas (deslocamento ou potencial escalar e tensão ou derivada normal do potencial escalar).

A opção pelo elemento linear em detrimento de elementos de ordem superior se justifica pela simplicidade da geometria dos domínios testados e das condições de contorno impostas. Com uma discretização adequada, o elemento linear é capaz de fornecer resultados satisfatórios, tornando desnecessária a utilização de elementos de ordem superior.

Na discretização por elementos lineares isoparamétricos, a geometria e as variáveis físicas são aproximadas por um mesmo polinômio de grau um, necessitando de dois nós, um em cada extremidade do elemento, vide figura [3.4].

As variáveis  $u$  ou  $q$  podem ser escritas em termos de funções de interpolação que dependem da coordenada local adimensional  $\eta$ , ou seja:

$$u(\eta) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$q(\eta) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

As funções de interpolação são funções lineares em  $\eta$  (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

A variação linear de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  ao longo de um elemento é representada na figura [3.4].

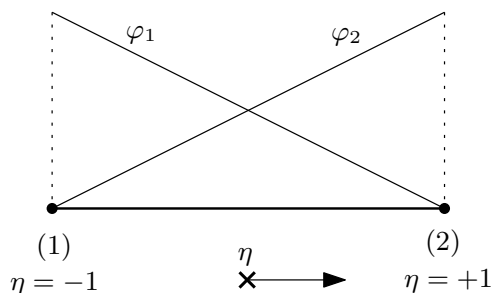


Figura 3.4: Gráfico das Funções de Forma do Elemento Linear  
Fonte: Próprio Autor

As expressões (3.5) e (3.6) fornecem os valores nodais das variáveis  $u$  ou  $q$  quando aplicadas aos nós:

Nó	$\eta$	$\varphi_1$	$\varphi_2$
1	-1	1	0
2	+1	0	1

Tabela 3.1 - Valores nodais de  $\varphi_i$  para o elemento linear  
Fonte: Próprio Autor

O desenvolvimento matemático posterior, para avaliação de integrais, requer o uso de um Jacobiano que relacione a variável local  $\eta$  com o contorno  $\Gamma$ . Para uma curva suave, como a dada na figura [3.5], a transformação é simples (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} d\eta = |J|d\eta \quad (3.8)$$

onde  $|J|$  é o Jacobiano.

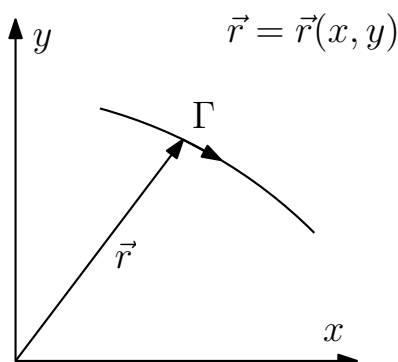


Figura 3.5: Contorno curvo  
Fonte: Adaptado de Partridge, Brebbia e Wrobel (1991)

Observe que, para calcular os valores do Jacobiano na equação (3.8), é necessário conhecer a variação das coordenadas  $x$  e  $y$  em termos de  $\eta$ . Isto pode ser feito definindo a forma geométrica do elemento da mesma maneira que as variáveis  $u$  e  $q$  são definidas, isto é, usando interpolação linear:

$$\begin{aligned}x &= \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 \\y &= \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2\end{aligned}\tag{3.9}$$

onde o subscrito indica o número do nó. Este é um conceito semelhante ao dos elementos isoparamétricos comumente usados na análise de elementos finitos (BATHE, 1996).

Aplicando as definições de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  da equação (3.7), pode-se escrever:

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{2}(1 - \eta)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta)x_2 \right] = \frac{x_2 - x_1}{2}\tag{3.10}$$

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{2}(1 - \eta)y_1 + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_2 \right] = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

O Jacobiano no caso dos elementos lineares pode ser então calculado:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2} = \frac{L}{2}\tag{3.11}$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento.

### 3.1.3 Funções de Base Radial

O uso de aproximações baseadas em sequências de funções de base radial é uma ferramenta numérica comum e de reconhecida eficiência no contexto do MEC. Esta abordagem permite transformar integrais de domínio em integrais de contorno, sendo aplicada em formulações no domínio do espaço, como a Técnica da Dupla Reciprocidade (NARDINI; BREBBIA, 1983a), a Técnica da Integração Radial (GAO, 2002) e a Técnica da Interpolação Direta (LOEFFLER; CRUZ; BULCÃO, 2015).

Segundo Fasshauer (2007), uma função  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita radial desde que exista uma função, de um único argumento,  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \psi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\|\tag{3.12}$$

A norma usualmente utilizada é a distância euclidiana, embora outras funções de distância também sejam possíveis.

Tipos de funções de base radial usados comumente incluem:

- Multi-quadrática:

$$\psi(r) = \sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$$

- Splines poli-harmônicas:

$$\psi(r) = r^k, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

- *Thin plate spline*:

$$\psi(r) = r^2 \ln(r)$$

No presente trabalho, funções de base radial do tipo "*Thin plate spline*" são utilizadas para realizar aproximações, visando possibilitar a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno. O procedimento generalizado para tal aplicação é ilustrado a seguir.

Considere uma aproximação  $h(\mathbf{X})$  de uma função  $f(\mathbf{X})$ , tal que:

$$f(\mathbf{X}) \simeq h(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi(r_j) \quad (3.13)$$

onde  $r_j = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|$  é a norma euclidiana, de forma que  $\psi(r_j)$  é uma função de base radial. Os valores  $\alpha_j$  são coeficientes desconhecidos, que podem ser determinados impondo-se:

$$h(\mathbf{X}_j) = f(\mathbf{X}_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.14)$$

A combinação das equações (3.13) e (3.14) resulta em um sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \psi(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1) & \psi(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) & \cdots & \psi(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_N) \\ \psi(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) & \psi(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2) & \cdots & \psi(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_1) & \psi(\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_2) & \cdots & \psi(\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(\mathbf{X}_1) \\ f(\mathbf{X}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{X}_N) \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Ou, em forma compacta:

$$[\Psi]\{\alpha\} = \{f\} \quad (3.16)$$

onde  $[\Psi]$  é a matriz simétrica chamada matriz de interpolação,  $\{\alpha\}$  e  $\{f\}$  são vetores. O problema será bem posto, isto é, a solução existirá e será única, se e somente se a matriz for não-singular. No entanto, para que a matriz de interpolação tenha esta característica, a função deverá ser definida como positiva. Como não é objetivo deste trabalho se aprofundar no tema, maiores detalhes sobre funções radiais e suas aplicações podem ser encontradas em [Fasshauer \(2007\)](#) ou [Buhmann \(2003\)](#).

#### 3.1.4 Solução Fundamental de Poisson

A solução fundamental de Poisson,  $u^*$ , representa o campo gerado por uma fonte unitária concentrada atuando em um ponto  $\xi$ , denominado ponto fonte. A solução  $u^*$  satisfaz a seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{X}, \xi) + \delta(\mathbf{X} - \xi) = 0 \quad (3.17)$$

Na equação (3.17),  $\delta(\mathbf{X} - \xi)$  representa uma função de delta de Dirac que tende ao infinito no ponto  $\xi$  e é igual a zero nos demais pontos. A integral de  $\delta(\mathbf{X} - \xi)$  sobre o domínio é igual à unidade. O uso da função delta de Dirac é uma maneira de representar fontes concentradas e forças unitárias ao lidar com equações diferenciais.

Para um meio bidimensional homogêneo e isotrópico, a solução fundamental da equação (3.17) é ([BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984](#)):

$$u^*(\mathbf{X}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\mathbf{X}, \xi)} \quad (3.18)$$

com derivada normal:

$$q^*(\mathbf{X}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(\mathbf{X}, \xi)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.19)$$

onde  $r(\mathbf{X}, \xi)$  é a distância euclidiana do ponto  $\xi$  de aplicação da fonte concentrada a qualquer outro ponto campo  $\mathbf{X}$  em consideração.

### 3.1.5 Operador Auto-Adjunto

Considere um operador diferencial  $L$ , de forma que  $L(u) = 0$  representa uma equação diferencial homogênea. A função  $u$  pode ser uma função qualquer, como, por exemplo, um potencial escalar.

Utilizando uma função de ponderação  $w$ , pode-se definir um produto interno na forma da equação (3.20).

$$\int_{\Omega} L(u)w \, d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

A equação (3.20) pode ser integrada por partes até que todas as derivadas em  $u$  tenham sido eliminadas, levando à forma "transposta" do produto interno e produzindo uma série de termos de contorno (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984):

$$\int_{\Omega} L(u)w \, d\Omega = \int_{\Omega} uL^*(w) \, d\Omega + \int_{\Gamma} [S^*(w)G(u) - G^*(w)S(u)] \, d\Gamma \quad (3.21)$$

Aqui,  $\Gamma$  é a superfície externa do domínio  $\Omega$  e  $S$  e  $G$  são operadores diferenciais devido à integração por partes. Por definição,  $S^*(w)$  contém os termos  $w$  resultantes da fase inicial da integração e  $S(u)$  contém os termos correspondentes a  $u$ .

O operador  $L^*$  é chamado de adjunto de  $L$ . Se  $L^* = L$ , diz-se que  $L$  é auto-adjunto. Nesse caso,  $G = G^*$  e  $S = S^*$  também. A auto-adjuntividade de um operador é análoga à simetria de uma matriz (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984). Um exemplo clássico de um operador auto-adjunto é o operador Laplaciano.

A formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno (MEC) baseia-se em utilizar a auto-adjuntividade, na forma da equação (3.21), para transformar integrais de domínio em integrais de contorno. No caso de um operador não possuir essas propriedades, ele é dito não auto-adjunto, e este procedimento não é possível.

## 3.2 Equação Integral de Governo

Uma vez expostos os principais conceitos que serão utilizados, volta-se a atenção à aplicação do MEC à equação da onda.

Integrando a equação da onda, equação (2.19), sobre o domínio físico  $\Omega(\mathbf{X})$ , usando uma função auxiliar para ponderação dos termos da integral, solução fundamental de um

problema correlato,  $u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})$ , resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega = \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.22)$$

Na Equação (3.22) o termo  $\mathbf{X}$  representa o ponto campo, um ponto qualquer relacionado ao domínio  $\Omega$ , limitado pelo contorno  $\Gamma$ . O ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$  é o ponto base das integrações. Aplicando a integração por partes e o Teorema da Divergência ao lado esquerdo da equação (3.22), é possível organizar os termos de forma a obter a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.23)$$

Aplicando novamente a integração por partes e o Teorema da Divergência no termo da integral de domínio existente no lado direito da equação (3.23):

$$- \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega = - \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}, t) q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma + \int_{\Omega} u(\mathbf{X}, t) \nabla^2 u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.24)$$

Substituindo o resultado da equação (3.24) na equação (3.23), obtém-se a forma a seguir.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega &= \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}, t) q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} u(\mathbf{X}, t) \nabla^2 u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando o equacionamento da solução fundamental e as propriedades do delta de Dirac explicitadas na secção 3.1.4, a integral de domínio existente no lado direito da equação (3.25) pode ser resolvida na forma que se segue:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{X}, t) \nabla^2 u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega = -c(\boldsymbol{\xi}) u(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (3.26)$$

O coeficiente  $c(\boldsymbol{\xi})$  considera as possibilidades de posicionamento do ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$  em relação ao domínio  $\Omega$  e ao contorno  $\Gamma$ .

$$c(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\xi} \in \Omega - \Gamma \\ \frac{\theta_i}{2\pi}, & \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \\ 0, & \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.27)$$

O procedimento detalhado de definição de  $c(\boldsymbol{\xi})$  pode ser encontrado em Brebbia, Telles e Wrobel (1984). A variável  $\theta_i$  é o ângulo interno do contorno como demonstrado na figura [3.6] a seguir.

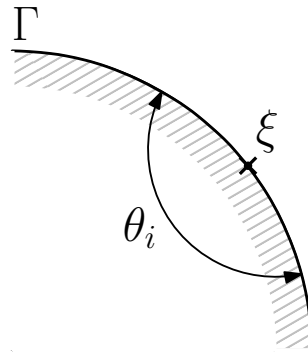


Figura 3.6: Ângulo interno do contorno

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$c(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\theta_i}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (3.28)$$

Substituindo os resultados das equações (3.25) e (3.26) na equação (3.22):

$$c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}, t)q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}, t)u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Gamma = -\frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{X}, t)u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Omega \quad (3.29)$$

A integral de domínio na equação (3.29) tem um núcleo não auto-adjunto; assim, o procedimento clássico do MEC de utilizar a integração por partes e o teorema da divergência para transportar a integral do domínio para o contorno não pode ser aplicado. Esta integral será tratada através da técnica de interpolação direta.

### 3.3 Técnica de Interpolação Direta

Através da MECID todo o núcleo da integral de domínio será interpolado utilizando uma função de base radial e sua primitiva. Entretanto, observe que, durante a varredura de integração no contorno, quando o ponto campo se aproxima do ponto fonte, o valor da solução fundamental cresce, tendendo ao infinito quando estes pontos são coincidentes. Assim, um procedimento anterior à aproximação é realizado visando regularizar esta singularidade. Tal procedimento consiste em somar e subtrair na equação integral um termo apropriado, como explicitado a seguir (LOEFFLER; MANSUR, 2017c):

$$I_D = -\frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.30)$$

Um termo adequado é subtraído e somado:

$$I_D = -\frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega - \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega + \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.31)$$

Rearranjando os termos:

$$I_D = -\frac{1}{k^2} \left\{ \int_{\Omega} [\ddot{u}(\mathbf{X}, t) - \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t)] u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega + \int_{\Omega} \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \right\} \quad (3.32)$$

Ao observar a equação (3.32) nota-se que há agora duas integrais no domínio. A primeira, aqui referenciada como termo regularizado será tratado utilizando funções radiais; a segunda, gerada pela regularização, é nomeada termo excedente, e tratado via Tensor de Galerkin. As secções subsequentes expõe o tratamento de cada um destes dois termos.

#### 3.3.1 Tratamento do Termo Regularizado

O termo regularizado,  $T_R$ , é exposto a seguir.

$$T_R = \int_{\Omega} [\ddot{u}(\mathbf{X}, t) - \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t)] u^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.33)$$

Aproxima-se o núcleo desta integral de domínio utilizando funções de base radial  $F_j(\mathbf{X})$  ponderadas por coeficientes  $\ddot{\alpha}_j^{\boldsymbol{\xi}}$  por hora indeterminados.

$$[\ddot{u}(\mathbf{X}, t) - \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t)]u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) = z(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \approx \ddot{\alpha}_j^\xi F_j(\mathbf{X}) \quad (3.34)$$

As funções de interpolação  $F_j$  utilizadas foram discutidas brevemente na seção 3.1.3, seu o argumento é a distância euclidiana  $r(\mathbf{X}_j, \mathbf{X})$  entre os pontos base  $\mathbf{X}_j$  e os pontos do domínio  $\mathbf{X}$ , chamados por [Loeffler, Cruz e Bulcão \(2015\)](#) de pontos de informação. Para cada ponto-fonte  $\boldsymbol{\xi}$  a interpolação dada pela equação (3.34) é feita considerando cada um dos pontos base  $\mathbf{X}_j$  em relação aos pontos do domínio  $\mathbf{X}$ , ponderados pelos coeficientes  $\ddot{\alpha}_j^\xi$ . A quantidade de pontos base  $\mathbf{X}_j$  deve ser igual aos valores conhecidos de  $z(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ .

Feitas estas observações, considerando que é possível encontrar funções primitivas  $\psi_j$  das funções radiais utilizadas, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \ddot{\alpha}_j^\xi F_j d\Omega = \int_{\Omega} \ddot{\alpha}_j^\xi (\psi_{ii})^j d\Omega = \int_{\Gamma} \ddot{\alpha}_j^\xi (\psi_i n_i)^j d\Gamma \quad (3.35)$$

Considerando que:

$$\eta_j = (\psi_{,i} n_i)^j$$

onde  $n_i(\mathbf{X})$  são os cossenos diretores definidos pela conformação geométrica do corpo, a equação (3.33) é então reescrita.

$$T_R \approx \ddot{\alpha}_j^\xi \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (3.36)$$

A integral presente na equação (3.36) pode ser condensada em uma notação mais simples.

$$N_j = \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (3.37)$$

Desta forma, o termo regularizado pode escrito em função dos coeficientes a determinar  $\ddot{\alpha}_j^\xi$  e das quantidades  $N_j$ , resultando em:

$$T_R \approx \ddot{\alpha}_j^\xi N_j \quad (3.38)$$

### 3.3.2 Tratamento do Termo Excedente

Uma vez tratado o termo regularizado, o outro termo que demanda tratamento algébrico é o termo de domínio inserido na formulação devido ao artifício da regularização:

$$T_E = \int_{\Omega} \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.39)$$

Este termo é tratado matematicamente via Tensor de Galerkin (KYTHE, 1995) e assim transformado numa integral de contorno. Toma-se inicialmente:

$$G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = u^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \quad (3.40)$$

Substituindo a expressão da equação (3.40) na equação (3.39), escreve-se:

$$T_E = \int_{\Omega} \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.41)$$

Ou ainda, retirando da integral o termo independente do domínio:

$$T_E = \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (3.42)$$

Aplicando o Teorema da Divergência, o termo excedente é reescrito:

$$T_E = \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.43)$$

A derivada direcional de  $G^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  é:

$$G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi} \{0.5 - \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})]\} r_i n_i \quad (3.44)$$

### 3.4 Discretização via MEC

Uma vez que todos os termos de domínio foram tratados, é possível escrever a equação integral de contorno.

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\xi}) u(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}, t) q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma = \\ = -\frac{1}{k^2} \left[ \ddot{\alpha}_j^{\boldsymbol{\xi}} N_j + \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Neste ponto, é importante ressaltar que, apesar de a técnica de interpolação direta utilizar pontos no domínio interior, as integrais resultantes são integrais de contorno. Após a aplicação em todos os nós do contorno usando a técnica de colocação (BREBBIA;

(WALKER, 1980), a equação (3.45) pode ser expressa na forma matricial que correlaciona os valores nodais prescritos com os valores incógnitos.

Nas subseções seguintes, detalha-se a discretização de cada termo da equação, fornecendo uma compreensão abrangente das estratégias utilizadas para transformar o contínuo em representações discretas. Este enfoque visa esclarecer as nuances e considerações específicas de cada componente.

### 3.4.1 Matriz $[H]$

O primeiro termo a ter o processo de discretização explicitado é:

$$T_1 = c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}, t) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}, t)q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Gamma \quad (3.46)$$

A aplicação da equação aos  $N$  pontos fontes, em que  $N$  contabiliza os pontos de contorno e os pontos internos, leva à seguinte forma discretizada:

$$T_1 = c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}, t) + \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} u(\mathbf{X}, t)q^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})d\Gamma \right] \quad (3.47)$$

Utilizando os conceitos expostos na secção 3.1.2 e omitindo propositalmente os argumentos para facilitar a compreensão, pode-se escrever:

$$T_1 = c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}, t) + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} q^* d\Gamma \right\} \quad (3.48)$$

Uma escrita alternativa é apresentada a seguir:

$$T_1 = c(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.49)$$

Os coeficientes  $h_i$  são dados pela equação (3.50).

$$h_i = \int \varphi_i q^* d\Gamma \quad (3.50)$$

Ressalta-se que o cálculo destes coeficientes é de grande importância dentro do método, uma vez que a precisão do MEC está fortemente relacionada à obtenção correta de tais coeficientes (BREBBIA; WALKER, 1980). Uma atenção maior ao cálculo destes é

requerida quando as integrais envolvidas são singulares ou quasi-singulares. Neste trabalho a proposta de Telles (1987) é utilizada para aumentar a precisão neste cálculos.

Lembrando a definição do valor do parâmetro  $c(\boldsymbol{\xi})$ , equação (3.27), pode-se escrever o termo  $T_1$  como a seguinte sentença matricial:

$$T_1 = [\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} \quad (3.51)$$

Para contornos suaves, cada entrada da matriz  $[H]$  é dada por:

$$H_{ij} = h_i + \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (3.52)$$

onde  $\delta$  é o delta de Kronecker, de tal maneira que o valor de  $c(\boldsymbol{\xi}) = 1/2$  é somado à  $[H]$  quando  $i = j$ .

### 3.4.2 Matriz $[\mathbf{G}]$

O próximo termo a ser tratado é:

$$T_2 = - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}, t) u^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.53)$$

Da mesma forma que o termo anterior, considerando os pontos fontes no contorno e no domínio interior:

$$T_2 = - \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q(\mathbf{X}) u^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] \quad (3.54)$$

Utilizando os conceitos expostos na secção 3.1.2 e omitindo propositalmente os argumentos para facilitar a compreensão, pode-se escrever:

$$T_2 = - \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} u^* d\Gamma \right\} \quad (3.55)$$

Ou ainda:

$$T_2 = - \sum_{j=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.56)$$

Os coeficientes  $g_i$  são dados por:

$$g_i = \int \varphi_i u^* d\Gamma \quad (3.57)$$

Desta forma o termo  $T_2$  pode ser reescrito em notação matricial:

$$T_2 = -[\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} \quad (3.58)$$

### 3.4.3 Matriz $[\mathbf{M}]$

O ultimo termo é o termo resultante do tratamento da integral de domínio:

$$T_3 = -\frac{1}{k^2} \left[ \ddot{\alpha}_j^\xi N_j + \ddot{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (3.59)$$

A aplicação do procedimento de discretização leva a:

$$T_3 = -\frac{1}{k^2} \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{c} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (3.60)$$

O vetor  $\{A_\xi\}$  é relativo ao termo regularizado, subsecção 3.3.1, e cada coeficiente  $A_\xi$  é dado explicitamente por:

$$A_\xi = \left[ N_1 \quad \dots \quad N_N \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi \ddot{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \xi \ddot{\alpha}_N \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

onde cada termo  $N_j$  é definido pela equação (3.37). Por sua vez, cada coeficiente  $\xi \ddot{\alpha}$  pode ser calculado pela equação de interpolação:

$$[\xi \ddot{\alpha}] = [\mathbf{F}]^{-1} [\xi \boldsymbol{\Lambda}] [\mathbf{F}] \{\ddot{\alpha}\} = [\mathbf{F}]^{-1} [\xi \boldsymbol{\Lambda}] \{z(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})\} \quad (3.62)$$

A matriz diagonal  $[\xi \boldsymbol{\Lambda}]$  computa os termos relacionados à solução fundamental. Utilizando esta expressão, a equação (3.61) pode ser então reescrita:

$$A_{\xi} = [N_1 \ \cdots \ N_n] [\mathbf{F}]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1\ddot{u}_{\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N\ddot{u}_{\xi} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.63)$$

$$A_{\xi} = [S_1 \ \cdots \ S_N] \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda_1\ddot{u}_{\xi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi\Lambda_N\ddot{u}_{\xi} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.64)$$

Note que o índice  $N$  representa o número total de pontos fonte, incluindo nós de contorno e pontos internos. Uma forma sintética para o vetor  $\{A_{\xi}\}$  pode ser encontrada:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (-S_2^1\Lambda_2 - S_3^1\Lambda_3 \cdots - S_N^1\Lambda_N) & S_2^1\Lambda_2 & \cdots & S_N^1\Lambda_N \\ S_1^2\Lambda_1 & (-S_1^2\Lambda_1 - S_3^2\Lambda_3 \cdots - S_N^2\Lambda_N) & \cdots & S_N^2\Lambda_N \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_1^N\Lambda_1 & S_2^N\Lambda_2 & \cdots & (-S_1^N\Lambda_1 - S_2^N\Lambda_2 \cdots - S_{N-1}^N\Lambda_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Já o vetor  $\{\mathbf{Z}\}$ , é relativo ao termo excedente, subsecção 3.3.2, e suas entradas são como explicitado a seguir.

$$\begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\int P_{1,1}d\Gamma_1 + \int P_{1,2}d\Gamma_2 + \cdots + \int P_{1,N}d\Gamma_N) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\int P_{2,1}d\Gamma_1 + \int P_{2,2}d\Gamma_2 + \cdots + \int P_{2,N}d\Gamma_N) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\int P_{N,1}d\Gamma_1 + \int P_{N,2}d\Gamma_2 + \cdots + \int P_{N,N}d\Gamma_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Explicitadas as composições dos vetores  $\{\mathbf{A}\}$  e  $\{\mathbf{Z}\}$ , o termo  $T_3$  pode ser reescrito:

$$T_3 = -[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} \quad (3.67)$$

Maiores detalhes sobre o processo de aplicação do MEC, discretização e construção das matrizes finais via MECID podem ser encontrados nas referências: (BREBBIA; TELLES;

WROBEL, 1984), para as matrizes  $[\mathbf{H}]$  e  $[\mathbf{G}]$ ; e (LOEFFLER et al., 2015), para a matriz  $[\mathbf{M}]$ .

#### 3.4.4 Sistema Final

Uma vez executado com sucesso o procedimento de discretização da equação integral de governo, é possível gerar o sistema linear responsável por calcular as incógnitas em cada elemento do contorno.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = -[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} \quad (3.68)$$

Resta, contudo, a eliminação das derivadas temporais do potencial. Conforme mencionado anteriormente, as técnicas usuais como a MECDR e a MECID utilizam esquemas incrementais de avanço no tempo para expressar a aceleração em termos dos valores do potencial em instantes próximos.

#### 3.4.5 Integração Passo a Passo

Usualmente utiliza-se algoritmos baseados no modelo de diferença finita, amplamente empregados em problemas transientes. Entre eles, destaca-se o Método de Integração Houbolt, devido à sua estabilidade incondicional e capacidade de dissipar ruídos de altos modos vibracionais por seu forte amortecimento numérico inerente.

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\}_{t+1} = \frac{1}{\Delta t^2} \left( 2\{\mathbf{u}\}_{t+1} - 5\{\mathbf{u}\}_t - 4\{\mathbf{u}\}_{t-1} - \{\mathbf{u}\}_{t-2} \right) \quad (3.69)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de integração temporal e os subscritos indicam diferentes instantes de tempo. A substituição da equação (3.69) na equação (3.68) resulta em:

$$(2[\mathbf{M}] + \Delta t^2[\mathbf{H}]) \{\mathbf{u}\}_{t+1} - \Delta t^2[\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\}_{t+1} = 5[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}_t - 4[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}_{t-1} + [\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\}_{t-2} \quad (3.70)$$

Este é o procedimento comumente utilizado para determinação da resposta ao longo do tempo, doravante referido através da sigla MECID-IT. No entanto, além das técnicas baseadas em diferenças finitas, amplamente utilizadas em problemas que envolvem derivadas temporais, existem outras técnicas menos comuns. Entre essas técnicas estão a superposição modal, que é aplicada diretamente à equação (3.68), e a transformada de

Laplace, que é aplicada anteriormente ao procedimento do MEC. Estas metodologias serão apresentadas nos próximos capítulos.

## O MEC E A SUPERPOSIÇÃO MODAL

A superposição modal fundamenta-se na capacidade de expressar a resposta de um sistema dinâmico linear como a combinação linear de movimentos harmônicos simples, chamados modos naturais de vibração. Estes modos representam padrões únicos de movimento associados a frequências específicas e podem ser combinados linearmente para gerar toda e qualquer configuração geométrica do sistema. A representação matricial desses modos, conhecida como matriz modal, é fundamental na técnica de superposição modal, fornecendo informações sobre a forma de cada modo (BLEVINS, 1979).

O processo de superposição modal envolve a decomposição de um carregamento dinâmico complexo em contribuições individuais referentes a cada modo. As equações de movimento modal descrevem o comportamento de cada modo separadamente, e a combinação linear dessas equações forma a resposta total da estrutura.

Essa técnica é aplicada em uma variedade de contextos (FU; HE, 2001). Em estruturas como edifícios e pontes, e também sistemas mecânicos complexos, onde diversos modos de vibração podem influenciar o comportamento dinâmico, a técnica de superposição modal é particularmente útil. Além disso, essa abordagem encontra relevância no projeto de sistemas com componentes móveis, permitindo uma análise eficiente do comportamento dinâmico de máquinas e equipamentos. No entanto, a técnica de superposição modal possui algumas limitações. Ela assume que a resposta do sistema é linear, o que pode ser desafiador e altamente custoso em sistemas altamente não lineares (FU; HE, 2001). Isto porque mudanças significativas nas propriedades constitutivas das estruturas ou na sua configuração de equilíbrio exigem a atualização das matrizes modais, pois as frequências e modos naturais se alteram sensivelmente.

## 4.1 O Problema de Autovalor

A utilização da superposição modal para caracterização do campo de deslocamentos ao longo do tempo requer, a priori, uma análise modal do sistema de forma a identificar seus modos e frequências naturais.

Para isso, busca-se a resposta produzida no sistema por uma variável de excitação cuja frequência  $\omega$  é conhecida, recaindo em um caso especial da equação da Onda, a equação de Helmholtz (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2013). Nesta condição, o potencial  $u(\mathbf{X}, t)$  equivale a uma resposta periódica, composta por conteúdo temporal específico.

$$u(\mathbf{X}, t) = u(\mathbf{X})e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), "i" é a unidade imaginária e  $u(\mathbf{X})$  é a amplitude espacial da resposta estacionária do sistema à excitação harmônica, com frequência  $\omega$ . Admitindo a condição de vibração livre, uma expressão para a segunda derivada parcial com relação ao tempo pode ser encontrada:

$$\ddot{u}(\mathbf{X}, t) = -\omega^2 u(\mathbf{X}, t) \quad (4.2)$$

Substituindo as expressões do potencial e sua derivada explicitadas nas equações (4.1) e (4.2) na equação matricial resultante do MEC, equação (3.68), obtém-se:

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = \omega^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}\} \quad (4.3)$$

O passo seguinte é evidenciar novas submatrizes nas quais os valores nodais de  $u$  e  $q$  prescritos são destacados como  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{u\bar{u}} & \mathbf{H}_{uq} \\ \mathbf{H}_{qu} & \mathbf{H}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu} & \mathbf{G}_{uq} \\ \mathbf{G}_{qu} & \mathbf{G}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \bar{q} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{M}_{uq} \\ \mathbf{M}_{qu} & \mathbf{M}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Impondo a condição de vibração livre, na qual os componentes de inércia e rigidez do sistema se equilibraram na ausência de forças externas ( $\bar{q} = 0$ ) e que os deslocamentos conhecidos são nulos ( $\bar{u} = 0$ ), resulta:

$$[\mathbf{H}_{uq}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}_{uu}]\{\mathbf{q}\} = \omega^2[\mathbf{M}_{uq}]\{\mathbf{u}\} \quad (4.5a)$$

$$[\mathbf{H}_{qq}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}_{qu}]\{\mathbf{q}\} = \omega^2[\mathbf{M}_{qq}]\{\mathbf{u}\} \quad (4.5b)$$

Combinando estas duas últimas equações de modo a eliminar a derivada do potencial  $q$ , encontra-se a expressão a seguir.

$$[\bar{\mathbf{H}}]\{\mathbf{u}\} - \omega^2[\bar{\mathbf{M}}]\{\mathbf{u}\} = 0 \quad (4.6)$$

onde:

$$[\bar{\mathbf{H}}] = [\mathbf{H}_{qq}] - [\mathbf{G}_{qu}][\mathbf{G}_{uu}]^{-1}[\mathbf{H}_{uq}] \quad (4.7)$$

$$[\bar{\mathbf{M}}] = [\mathbf{M}_{qq}] - [\mathbf{G}_{qu}][\mathbf{G}_{uu}]^{-1}[\mathbf{M}_{uq}] \quad (4.8)$$

A Equação (4.6) caracteriza um problema de autovalor no qual as raízes do polinômio característico (autovalores) fornecem os valores dos quadrados das frequências naturais de vibração do sistema  $\omega_i^2$ , sendo a menor delas a chamada frequência natural fundamental. Cada autovetor  $\{\phi_i\}$ , associado a um destes autovalores, representa um modo de vibração do sistema, ou seja, a configuração dos deslocamentos dos nós quando o sistema é excitado pela frequência  $\omega_i$ .

Isto é, o sistema pode vibrar em sincronia com a frequência e a vibração forma um certo padrão de deslocamento, cuja forma não muda ao longo do movimento; apenas a amplitude da configuração muda. Pode-se observar que existem tantos valores de  $\omega$  quanto de  $\phi$ , equivalentes ao número de Graus de Liberdade (GDL) do sistema.

Os  $n$  autovalores podem ser agrupados em uma matriz diagonal  $[\mathbf{\Lambda}]$  conhecida como matriz espectral (SORIANO, 2014):

$$[\mathbf{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Já os  $n$  autovetores podem ser agrupados nas colunas de uma matriz  $[\mathbf{\Phi}]$  conhecida

como matriz modal:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Como os modos naturais são soluções oriundas de sistemas singulares, as amplitudes destes são arbitrárias, pois cada modo de vibração define apenas uma forma. É imperativo então que se defina uma referencia a partir da qual os modos possam ser normalizados, procedimento que será explicitado mais adiante no texto.

As novas matrizes  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{H}]$  podem ser interpretadas como matrizes de massa e rigidez, que geralmente são, no contexto do MEC, assimétricas e totalmente preenchidas (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984). Portanto, a eficácia da determinação dos autovalores e autovetores a partir das matrizes do MEC depende da disponibilidade de um método eficiente de extração de autovalores. Em relação aos autovalores, a assimetria das matrizes do MEC pode gerar frequências complexas associadas a imprecisões no modelo numérico. Tais autovalores não reais, no entanto, estão relacionados à aproximação de frequências mais altas no espectro (LOEFFLER; MANSUR, 1987). A melhoria do modelo MEC, por meio do refinamento da malha e inserção de polos, minimiza esse problema, mas não o elimina (BARBOSA; LOEFFLER; LARA, 2019). Comparativos realizados com o MECD mostraram que os resultados do modelo MECID são significativamente superiores, melhorando a qualidade da solução direta do problema regidos pela equação da onda e produzindo cálculos de autovalores com maior precisão (BALISTA et al., 2023).

## 4.2 Superposição Modal

A obtenção da resposta dinâmica por meio da superposição modal requer o desacoplamento do sistema matricial descrito pela equação (3.68), utilizando uma transformação de coordenadas. Voltando à equação (4.4), pode-se combinar as expressões resultantes de forma a eliminar o termo referente à derivada do potencial,  $q$ , e obter a equação do movimento.

$$[\bar{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\bar{H}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.11)$$

onde:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}\} = & ([\mathbf{G}_{qq}] - [\mathbf{G}_{qu}][\mathbf{G}_{uu}]^{-1}[\mathbf{G}_{uq}])\{\bar{\mathbf{q}}\} + ([\mathbf{G}_{qu}][\mathbf{G}_{uu}]^{-1}[\mathbf{M}_{uu}] - [\mathbf{M}_{qu}])\{\bar{\mathbf{u}}\} + \\ & + ([\mathbf{G}_{qu}][\mathbf{G}_{uu}]^{-1}[\mathbf{H}_{uu}] - [\mathbf{H}_{qu}])\{\bar{\mathbf{u}}\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 4.3 O Método Modal Clássico

O Método Modal tradicional assume que as matrizes de massa ( $[\mathbf{M}] = [\bar{\mathbf{M}}]$ ) e rigidez ( $[\mathbf{K}] = [\bar{\mathbf{H}}]$ ) são simétricas, fato que não é verdade para as matrizes geradas pelo MEC, mas que, por ora, será ignorado. Diagonaliza-se as matrizes do sistema de equações de movimento desacoplando as 'n' equações acopladas em 'n' equações independentes (FU; HE, 2001). Isto significa transformar um sistema de múltiplos graus de liberdade em um conjunto de sistemas de um grau de liberdade. Para tanto, faz-se uso de algumas propriedades dos modos que serão discutidas na subseção a seguir.

#### 4.3.1 Propriedades dos Modos

Considere dois modos de vibração distintos  $\{\phi_r\}$  e  $\{\phi_s\}$  e suas respectivas frequências naturais  $\omega_r$  e  $\omega_s$ :

$$[\mathbf{K}]\{\phi_r\} = \omega_r^2[\mathbf{M}]\{\phi_r\} \quad (4.13a)$$

$$[\mathbf{K}]\{\phi_s\} = \omega_s^2[\mathbf{M}]\{\phi_s\} \quad (4.13b)$$

Pré-multiplicando as equações (4.13a) e (4.13b) respectivamente por  $\{\phi_s\}^T$  e  $\{\phi_r\}^T$ :

$$\{\phi_s\}^T[\mathbf{K}]\{\phi_r\} = \omega_r^2\{\phi_s\}^T[\mathbf{M}]\{\phi_r\} \quad (4.14a)$$

$$\{\phi_r\}^T[\mathbf{K}]\{\phi_s\} = \omega_s^2\{\phi_r\}^T[\mathbf{M}]\{\phi_s\} \quad (4.14b)$$

Da álgebra linear, há a garantia de que, uma vez que as matrizes  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{K}]$  são simétricas:

$$\{\phi_s\}^T[\mathbf{K}]\{\phi_r\} = \{\phi_r\}^T[\mathbf{K}]\{\phi_s\} \quad (4.15a)$$

$$\{\phi_s\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_r\} = \{\phi_r\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_s\} \quad (4.15b)$$

Aplicando (4.15a), (4.15b) às equações (4.14a), (4.14b) e subtraindo o resultado:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\phi_s\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_r\} = 0 \quad (4.16)$$

Para  $\omega_r \neq \omega_s$ :

$$\{\phi_s\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_r\} = 0 \quad (4.17)$$

Substituindo a equação (4.17) na equação (4.14a), obtém-se:

$$\{\phi_s\}^T [\mathbf{K}] \{\phi_r\} = 0 \quad (4.18)$$

As Equações (4.17) e (4.18) apresentam a propriedade conhecida como ortogonalidade dos modos com relação as matrizes de massa e rigidez, respectivamente. Pode-se demonstrar também as seguintes propriedades (SORIANO, 2014):

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_i\} = m_i \quad (4.19a)$$

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{K}] \{\phi_i\} = k_i \quad (4.19b)$$

A quantidades  $m_i$  e  $k_i$  são definidos, respectivamente, como massa modal e rigidez modal do  $i$ -ésimo modo.

Sabe-se que qualquer múltiplo de um dos autovetores  $\{\phi_i\}$  também irá satisfazer o problema de autovalor da equação. Desta forma, para se desacoplar as equações da dinâmica, deve-se utilizar uma representação para os modos de vibração que seja única. Para isso, define-se os modos massa normalizados, dados por:

$$\{\phi_i\} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \{\phi_i\} \quad (4.20)$$

Uma vez normalizados em relação à massa, as propriedades descritas no conjunto de equações (4.19) assumem a forma a seguir:

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{M}] \{\phi_i\} = 1$$

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{K}] \{\phi_i\} = \omega_i^2$$

Que, quando aplicadas a todos os modos, levam às seguintes equações matriciais:

$$[\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] = [\mathbf{I}] \quad (4.21a)$$

$$[\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi] = [\Lambda] \quad (4.21b)$$

#### 4.3.2 O Desacoplamento

Os modos naturais de vibração formam um conjunto linearmente independentes em número igual aos graus de liberdade do modelo discreto. O conjunto de todos os modos é, portanto, uma base completa para o espaço n-dimensional no qual o sistema está inserido. Logo, qualquer configuração do sistema pode ser escrita como uma superposição de modos de vibração (SORIANO, 2014):

$$\{\mathbf{u}\} = \sum_{j=0}^n y_j \{\phi_j\} = [\Phi] \{\mathbf{y}\} \quad (4.22)$$

onde  $y_j$  são coordenadas generalizadas, funções do tempo, denominadas coordenadas modais.

A equação (4.22) configura uma transformação de coordenadas que possibilita escrever a posição, a velocidade e a aceleração do sistema na base modal. Utilizando este conceito, pode-se então rescrever a equação (4.11):

$$[\mathbf{M}] [\Phi] \{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{K}] [\Phi] \{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.23)$$

Pré multiplicando por  $[\Phi]^T$ :

$$[\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi] \{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi] \{\mathbf{y}\} = [\Phi]^T \{\mathbf{f}\} \quad (4.24)$$

Os termos de massa e rigidez podem ser tratados utilizando as expressões desenvolvidas

anteriormente nas equações (4.21a) e (4.21b).

$$[\mathbf{I}]\{\dot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{\Lambda}]\{\mathbf{y}\} = \{\bar{\mathbf{f}}\} \quad (4.25)$$

onde  $\{\bar{\mathbf{f}}\}$  é o vetor forçante em coordenadas modais.

Com isso, o sistema está desacoplado. Têm-se agora  $n$  equações diferenciais ordinárias lineares modais independentes que representam as configurações modais do sistema.

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \bar{f}_i \quad (4.26)$$

A particularização da solução se dá com a inclusão das condições iniciais, o que requer a transformação dessas condições ao espaço das coordenadas modais.

$$\{\mathbf{u}_0\} = [\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{y}_0\} \quad (4.27a)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_0\} = [\mathbf{\Phi}]\{\dot{\mathbf{y}}_0\} \quad (4.27b)$$

Pré-multiplicando as equações (4.27a) e (4.27b) por  $[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}]$ :

$$[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}_0\} = [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}][\mathbf{\Phi}]\{\mathbf{y}_0\} \quad (4.28a)$$

$$[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{u}}_0\} = [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}][\mathbf{\Phi}]\{\dot{\mathbf{y}}_0\} \quad (4.28b)$$

Aplicando a propriedade expressa na equação (4.21a) e rearrumando os termos:

$$\{\mathbf{y}_0\} = [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}_0\} \quad (4.29a)$$

$$\{\dot{\mathbf{y}}_0\} = [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{u}}_0\} \quad (4.29b)$$

### 4.3.3 Resolução das Equações Modais

A resolução das equações modais pode ser feita analiticamente via Integral de Duhamel (RAO; YAP, 1995), Transformada de Laplace (RAMSEY, 1975; RICHARDSON;

POTTER, 1974) ou numericamente através de esquemas como Newmark (NEWMARK, 1959) ou Houbolt (HOUBOLT, 1950), e fornece o vetor posição em coordenadas modais:

$$\{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

As coordenadas geométricas podem então ser recuperadas através da transformação indicada anteriormente na equação (4.22).

#### 4.4 O Método Modal Clássico aplicado à Matrizes Não Simétricas

Na secção anterior foi apresentado o método modal clássico, no qual considera-se a simetria das matrizes de inércia e rigidez. Entretanto, as matrizes obtidas através do MEC não são simétricas, portanto, algumas alterações são necessárias ao se aplicar o procedimento de superposição modal clássico utilizando as matrizes do MEC.

A não simetria das matrizes implica dizer que não é possível encontrar uma base ortonormal de autovetores para o espaço  $\mathbb{R}^n$ ; assim, não é possível escrever:  $[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T$ . Não há, também, garantia de ortogonalidade dos autovetores com relação às matrizes de massa e rigidez. Portanto, o processo de desacoplamento das equações de movimento segue o roteiro alternativo descrito a seguir.

Um preâmbulo necessário é a definição da matriz dinâmica.

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] \quad (4.31)$$

Utilizando esta definição, a equação de movimento é reescrita como se segue.

$$[\mathbf{I}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad (4.32)$$

Escreve-se o deslocamento em função das coordenadas generalizadas:

$$\{\mathbf{u}\} = [\Phi]\{\mathbf{y}\} \quad (4.33)$$

Substituindo a equação (4.33) na equação (4.32), a equação do movimento toma a

forma a seguir.

$$[\mathbf{I}][\Phi]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{D}][\Phi]\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad (4.34)$$

Pré-multiplicando por  $[\Phi]^{-1}$ :

$$[\Phi]^{-1}[\mathbf{I}][\Phi]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\Phi]^{-1}[\mathbf{D}][\Phi]\{\mathbf{y}\} = [\Phi]^{-1}[\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad (4.35)$$

Utilizando propriedades conhecidas da álgebra linear concernentes à matrizes inversas e processo de diagonalização de matrizes, a equação (4.35) é transformada no molde a seguir.

$$[\mathbf{I}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\Lambda]\{\mathbf{y}\} = \{\bar{\mathbf{f}}\} \quad (4.36)$$

Na equação (4.36),  $\{\bar{\mathbf{f}}\}$  é o vetor forçante modificado:

$$\{\bar{\mathbf{f}}\} = [\Phi]^{-1}[\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad (4.37)$$

Com isso o sistema está desacoplado e têm-se agora n EDOs modais independentes.

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \bar{f}_i \quad (4.38)$$

A particularização da solução se dá com a inclusão das condições iniciais, o que requer a transformação dessas condições ao espaço das coordenadas modais.

$$\{\mathbf{u}_o\} = [\Phi]\{\mathbf{y}_o\} \quad (4.39a)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_o\} = [\Phi]\{\dot{\mathbf{y}}_o\} \quad (4.39b)$$

Pré-multiplicando o conjunto de equações (4.39) por  $[\Phi]^{-1}$ :

$$\{\mathbf{y}_o\} = [\Phi]^{-1}\{\mathbf{u}_o\} \quad (4.40a)$$

$$\{\dot{\mathbf{y}}_o\} = [\Phi]^{-1}\{\dot{\mathbf{u}}_o\} \quad (4.40b)$$

O procedimento de resolução das EDOs e retorno às coordenadas geométricas iniciais

é idêntico ao Método Modal Clássico para matrizes simétricas.

A partir deste ponto, sempre que for citado o método modal clássico no texto, refere-se à modelagem descrita nesta secção, referente à aplicação do método modal clássico à matrizes não simétricas.

#### 4.5 O Método Modal Modificado (MMM)

Prodonoff e Zepka (1983) apresentaram em seu trabalho uma variação da superposição modal a ser aplicada em problemas dinâmicos quando as matrizes de massa e rigidez não são simétricas. Utilizando a definição anterior de matriz dinâmica, equação (4.31), são escritos dois problemas de autovalor:

$$([\mathbf{D}] - \omega^2[\mathbf{I}])\{\boldsymbol{\phi}\} = 0 \quad (4.41)$$

$$([\mathbf{D}]^T - \omega^2[\mathbf{I}])\{\tilde{\boldsymbol{\phi}}\} = 0 \quad (4.42)$$

A matriz  $[\mathbf{D}]$  é, via de regra, não-simétrica, ou seja  $[\mathbf{D}]^T \neq [\mathbf{D}]$ . Logo, as equações (4.41) e (4.42) representam problemas correlatos, mas distintos. Ambos os problemas possuem os mesmos autovalores  $\omega^2$ , mas autovetores diferentes.

Prodonoff e Zepka (1983) demonstram que devido à natureza não simétrica destas matrizes, não há ortogonalidade entre os modos de cada problema isolado, isto é:

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \{\boldsymbol{\phi}_j\} \neq 0, \quad i \neq j \quad (4.43)$$

$$\{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_i\}^T \{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j\} \neq 0, \quad i \neq j \quad (4.44)$$

Outrossim, é possível observar uma relação de ortogonalidade cruzada. Isto é, cada modo, em cada problema, é ortogonal apenas aos modos do outro problema relativos aos outros autovalores.

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T \{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j\} = \{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j\}^T \{\boldsymbol{\phi}_i\} = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (4.45)$$

$$\{\phi_i\}^T \{\tilde{\phi}_j\} \neq 0 \quad \text{para } i = j \quad (4.46)$$

A propriedade explicitada na equação (4.46) é utilizada então para definir o seguinte processo de normalização:

$$\{\phi_i\}^T \{\tilde{\phi}_i\} = \{\tilde{\phi}_i\}^T \{\phi_i\} = 1 \quad (4.47)$$

Uma vez normalizados desta forma, Prodonoff e Zepka (1983) demonstram matematicamente que os modos passam a exibir a propriedade que se segue:

$$\{\phi_i\}^T [\mathbf{D}]^T \{\tilde{\phi}_i\} = \{\tilde{\phi}_i\}^T [\mathbf{D}] \{\phi_i\} = \omega_i^2 \quad (4.48)$$

Quando considerando todo o conjunto de autovetores, estas relações levam às seguintes expressões matriciais:

$$[\Phi]^T [\tilde{\Phi}] = [\tilde{\Phi}]^T [\Phi] = [\mathbf{I}] \quad (4.49a)$$

$$[\tilde{\Phi}]^T [\mathbf{D}] [\Phi] = [\Phi]^T [\mathbf{D}] [\tilde{\Phi}] = [\Lambda] \quad (4.49b)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz modal associada à  $[\mathbf{D}]$ ,  $[\tilde{\Phi}]$  é a matriz modal associada à  $[\mathbf{D}]^T$  e  $[\Lambda]$  a matriz dos autovalores.

Uma vez de posse de tais relações, volta-se a atenção à aplicação do Método de Superposição Modal modificado. Analogamente ao método clássico, é considerada inicialmente a transformação linear:

$$\{\mathbf{u}\} = [\Phi] \{\mathbf{y}\} \quad (4.50)$$

Reproduzindo a equação do movimento:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}$$

Substituindo  $[\mathbf{D}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$  e aplicando a transformação de coordenadas:

$$[\Phi]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{D}][\Phi]\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \quad (4.51)$$

Pré-multiplicando por  $[\widetilde{\Phi}]^T$ :

$$[\widetilde{\Phi}]^T [\Phi] \{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\widetilde{\Phi}]^T [\mathbf{D}] [\Phi] \{\mathbf{y}\} = [\widetilde{\Phi}]^T [\mathbf{M}]^{-1} \{\mathbf{f}\} \quad (4.52)$$

Substituindo as relações das equações (4.49a) e (4.49b):

$$[\mathbf{I}] \{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{\Lambda}] \{\mathbf{y}\} = \{\bar{\mathbf{f}}\} \quad (4.53)$$

onde  $\{\bar{\mathbf{f}}\} = [\widetilde{\Phi}]^T [\mathbf{M}]^{-1} \{\mathbf{f}\}$ .

Com isso o sistema está desacoplado e têm-se as  $n$  EDOs modais independentes.

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \bar{f}_i \quad (4.54)$$

O tratamento das condições iniciais, a resolução das EDOs e o retorno às coordenadas geométricas iniciais são idênticos ao Método Modal Clássico.

#### 4.5.1 Comparação MMC x MMM

Esta secção tem o propósito de ilustrar qualitativamente as diferenças entre as diferentes abordagens modais: MMC e MMM. Considera-se uma matriz dinâmica hipotética, assimétrica, cuja composição é dada a seguir:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1.94 & -0.90 & 0.08 & 0.65 & 0.77 & 0.00 \\ -0.95 & 1.79 & -0.84 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.89 & 1.67 & -0.78 & 0.00 & 0.00 \\ -0.35 & 0.00 & -0.82 & 1.53 & -0.71 & 0.00 \\ 0.13 & 0.00 & 0.00 & -0.75 & 1.38 & -0.63 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.67 & 0.67 \end{bmatrix};$$

O sistema é submetido a uma perturbação (equivalente a um deslocamento) inicial:

$$\{\mathbf{u}_o\} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

As formulações envolvendo os métodos MMC e MMM são utilizadas para calcular frequências e obter a resposta no segundo nó ao longo do tempo, considerando diferentes conteúdos modais, conforme pode ser visto nas figuras [4.1 - 4.4]:

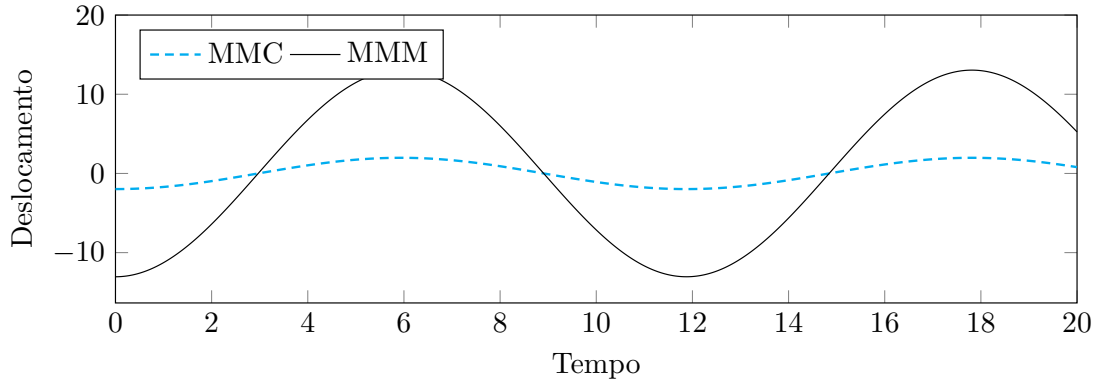


Figura 4.1: Resposta temporal do segundo nó considerando um modo  
Fonte: Próprio Autor

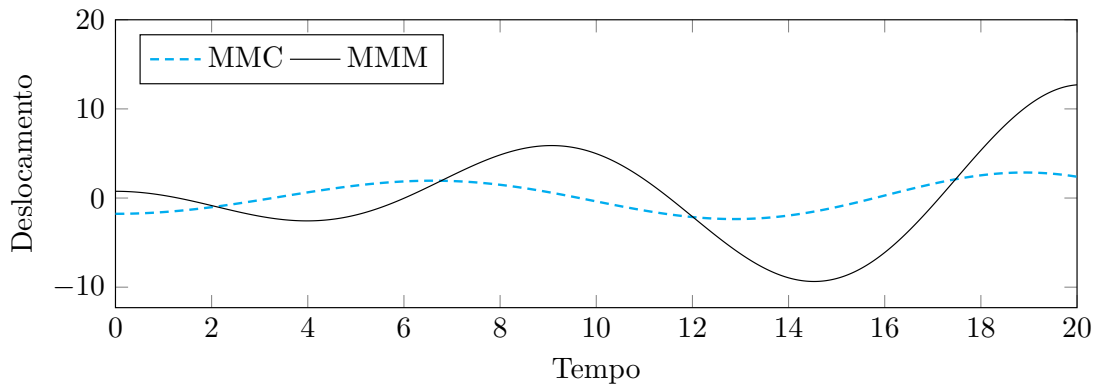


Figura 4.2: Resposta temporal do segundo nó considerando dois modos  
Fonte: Próprio Autor

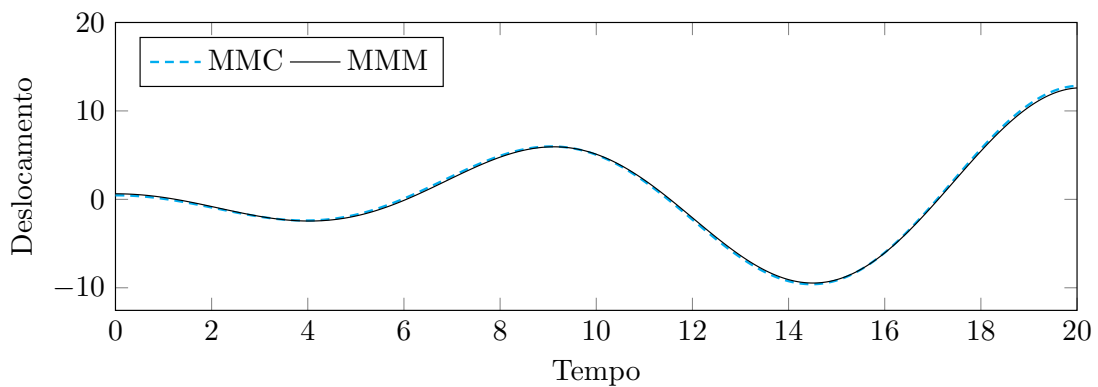


Figura 4.3: Resposta temporal do segundo nó considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

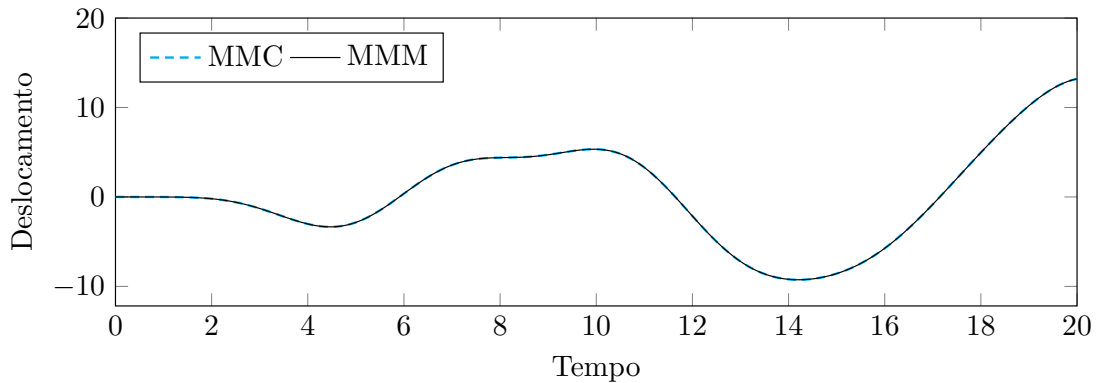


Figura 4.4: Resposta temporal do segundo nó considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

É visível que as respostas obtidas convergem para a mesma solução. Entretanto, mesmo que o resultado final seja o mesmo, há diferenças na forma de compor a resposta, indicando que a ponderação dos modos é realizada de maneira diferente no MMC para matrizes assimétricas. Esse padrão distinto de comportamento se deve à multiplicação do termo forçante pelo inverso da matriz composta pelos autovetores, conforme a equação (4.37). No primeiro exemplo da seção de Simulações Numéricas esta questão será abordada mais profundamente.

#### 4.6 Seleção dos Modos na Composição da Resposta

Uma das vantagens do emprego da superposição modal é a possibilidade de se desprezar as equações de movimento relacionadas a modos de vibração não participativos. Embora os modos participativos sejam determinados pelas condições de contorno e iniciais, não é possível determinar o grau de participação individual de cada modo anteriormente à solução do problema de autovalor. Portanto, não há um procedimento padrão para a seleção de quais modos considerar na composição da resposta dinâmica do sistema.

No presente trabalho, propõe-se um método baseado na amplitude dos modos, pois assim como no Método de Separação de Variáveis (KREYSZIG, 2015), o procedimento de superposição modal permite avaliar a importância de cada modo vibracional na resposta dinâmica. Ainda que as amplitudes dos modos de vibração sejam arbitrárias, para um conjunto de condições iniciais e tipologia do termo forçante, a razão entre as amplitudes está diretamente relacionada ao nível de influência de cada modo. Os modos mais excitados apresentam maiores amplitudes e sua contribuição para a configuração final do movimento

do sistema é mais significativa. Portanto, pode-se utilizar a amplitude como métrica da relevância de cada modo na composição da resposta do sistema. A determinação da amplitude de cada modo,  $A_i$ , depende da distribuição espacial da ação externa e da correlação entre o conteúdo de frequências dessa ação (se harmônica) e as frequências naturais do sistema (SORIANO, 2014). A amplitude pode ser determinada seguindo o procedimento delineado a seguir.

- **Termo forçante constante:** Neste caso, a força modal é também constante,  $\bar{f}_i(t) = F_i$ , e a Amplitude de cada modo é dada pela equação (4.55) a seguir (RAO; YAP, 1995):

$$A_i = \left| \frac{F_i}{\omega_i^2} \right| \quad (4.55)$$

- **Termo forçante harmônico de uma única frequência  $\omega$ :** A força modal é também harmônica nessa frequência,  $\bar{f}_i(t) = F_i \text{sen}(\omega t)$  ou  $\bar{f}_i(t) = F_i \text{cos}(\omega t)$ ; e, a Amplitude modal é dada por (RAO; YAP, 1995):

$$A_i = \left| \frac{\bar{F}_i}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \right| \quad (4.56)$$

Observe que, quando mais próxima da frequência de excitação ( $\omega$ ) a frequência do modo ( $\omega_i$ ) estiver, mais a razão  $\omega/\omega_1$  se aproxima da unidade, levando a amplitude para valores elevados.

- **Forças nodais periódicas não harmônicas:** Em tal situação, os componentes harmônicos mais significativos dessas forças podem ser identificados através de série de Fourier. Com isso, o critério do caso anterior pode ser aplicado.
- **Forças nodais aperiódicas:** É possível determinar a composição de frequências utilizando a transformada de Fourier. Através desse processo, é viável identificar os componentes harmônicos mais relevantes, permitindo a aplicação da metodologia previamente descrita (SORIANO, 2014).

Uma vez determinada a amplitude dos modos, os mais participativos são selecionados de acordo com o seguinte procedimento: Suponha que se deseja caracterizar a resposta dinâmica compondo as contribuições de  $N$  modos em um sistema discreto que possui um total de graus de liberdade igual a  $GDL$ .

- Passo 1: O problema do autovalor será resolvido considerando todos os graus de liberdade. Ou ainda, uma quantidade significativa, caso se deseje reduzir o custo computacional.
- Passo 2: Os modos são classificados da maior para menor amplitude.
- Passo 3: As equações referentes aos  $N$  modos com maior amplitude são resolvidas e seu resultado é superposto, caracterizando a resposta dinâmica do sistema.

Quanto ao passo 1, neste trabalho, o problema será resolvido inicialmente com um terço do total de graus de liberdade. Esta escolha se deve a dois fatores. Em primeiro lugar, no algoritmo QR, as frequências são determinadas antes do cálculo dos autovetores, conforme explicado no Apêndice C. Portanto, é possível calcular apenas os autovetores dos modos selecionados, reduzindo o custo computacional do procedimento. Além disso, ao retirar os modos de maior amplitude, considerando a totalidade dos graus de liberdade, modos elevados mal representados podem ter amplitude suficiente para serem considerados. No entanto, devido à má representação, esses modos podem perturbar a resposta, como será visto nos exemplos a seguir.

Nas simulações conduzidas neste capítulo, além da amplitude definida nas equações (4.55) e (4.56), foram utilizadas duas outras métricas para avaliar e discutir a participação de cada modo na composição da resposta dinâmica. A primeira métrica é obtida normalizando as amplitudes dos modos em relação à maior amplitude, que geralmente é a do modo fundamental. Desta forma, há de se obter um valor adimensional aqui nomeado “amplitude relativa percentual” que relaciona os modos 1, 2, 3, ...,  $N$  com o modo mais excitado:

$$a_i = \frac{A_i}{A_{\text{máx}}} \times 100\% \quad (4.57)$$

A outra métrica, denominada “contribuição percentual relativa”,  $c_i$ , é calculada dividindo a amplitude de um determinado modo pela somatória das amplitudes de um conjunto de  $N$  modos considerados.

$$c_i = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^N A_i} \times 100\% \quad (4.58)$$

## 4.7 Cálculo das Tensões

Em suas formulações ortodoxas, o Método dos Elementos de Contorno é uma técnica numérica mista na qual a variável primal e sua derivada normal são calculadas simultaneamente. Por sua vez, quando se utiliza a Superposição Modal, o sistema matricial é estruturado exclusivamente em função dos deslocamentos. Assim, torna-se necessário adaptar as matrizes do MEC para aproveitar os valores de deslocamento já calculados para se determinar as tensões. Esse ajuste é realizado por meio de uma nova condensação das matrizes do MEC, visando tornar as tensões explícitas. Retorna-se à equação (4.4) impondo os valores prescritos no contorno,  $\{\bar{\mathbf{u}}\}$  e  $\{\bar{\ddot{\mathbf{u}}}\}$ ; os deslocamentos  $\{\mathbf{u}\}$  já calculados; e, eliminando as acelerações  $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$ , de forma a obter:

$$[\mathbf{M}_1]\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{M}_2]\{\bar{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{M}_3]\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{M}_4]\{\bar{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{M}_5]\{\bar{\ddot{\mathbf{u}}}\} = \{\mathbf{h}\} \quad (4.59)$$

Resolvendo para  $\{\mathbf{q}\}$ :

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{M}]^{-1}\{\mathbf{h}\} \quad (4.60)$$

onde:

$$[\mathbf{M}_1] = [\mathbf{G}_{uu}] - [\mathbf{M}_{uq}][\mathbf{M}_{qq}]^{-1}[\mathbf{G}_{qu}] \quad (4.61a)$$

$$[\mathbf{M}_2] = [\mathbf{M}_{uq}][\mathbf{M}_{qq}]^{-1}[\mathbf{G}_{qq}] - [\mathbf{G}_{uq}] \quad (4.61b)$$

$$[\mathbf{M}_3] = [\mathbf{H}_{uq}] - [\mathbf{M}_{uq}][\mathbf{M}_{qq}]^{-1}[\mathbf{H}_{qq}] \quad (4.61c)$$

$$[\mathbf{M}_4] = [\mathbf{H}_{uu}] - [\mathbf{M}_{uq}][\mathbf{M}_{qq}]^{-1}[\mathbf{H}_{qu}] \quad (4.61d)$$

$$[\mathbf{M}_5] = [\mathbf{M}_{uu}] - [\mathbf{M}_{uq}][\mathbf{M}_{qq}]^{-1}[\mathbf{H}_{qu}] \quad (4.61e)$$

Deve-se notar que os valores de “ $\{\mathbf{q}\}$ ” são obtidos nas partes do contorno onde o potencial foi prescrito; portanto, o número de graus de liberdade envolvidos na

determinação das tensões pode ser muito menor do que aquele utilizado na caracterização dos deslocamentos.

Outro ponto que merece destaque é que as tensões são fortemente influenciadas pelas altas frequências naturais (CLOUGH; PENZIEN, 1975; LOEFFLER; MANSUR, 1987), que são mal representadas por qualquer sistema de matriz discreta. Isto leva a imprecisões na resposta das tensões que aparecem como flutuações espúrias de pequena amplitude ao longo do tempo.

## 4.8 Simulações Numéricas

Nesta seção são descritos os testes numéricos conduzidos no estudo da formulação descrita neste capítulo. A seção se subdivide em duas partes; na primeira, compreendida pelo exemplo I, é realizada a reprodução e são explorados novos detalhes da comparação entre os dois métodos de superposição modal para sistemas assimétricos, MMC e MMM, realizada em artigo anteriormente publicado, (SANTOS; LOEFFLER; LARA, 2024).

A segunda parte, compreendendo os demais exemplos, é dedicada a expor a resposta da formulação MECID-MMM a diversos tipos de simulações no intuito de avaliar sua performance nos problemas dinâmicos regidos pela equação da onda.

### 4.8.1 Objetivos

Os experimentos conduzidos a seguir, utilizando a formulação do Método de Elementos de Contorno com Interpolação Direta e Superposição Modal (MECID-SM), têm quatro objetivos específicos:

1. Investigar a instabilidade numérica observada na formulação MECID quando o avanço no tempo é realizado utilizando reduzidos passos de tempo;
2. Verificar o motivo da utilização massiva do MMM na literatura, sem qualquer justificativa ou apresentação de resultados comparativos, quando há uma alternativa matematicamente viável do MMC aplicável a matrizes não simétricas;
3. Estudar a contribuição dos modos na composição da resposta dinâmica do sistema;
4. Comparar os resultados da formulação MECID com Superposição Modal com os resultados da MECID com integração passo a passo.

### 4.8.2 Metodologia

A definição clara de uma metodologia e sua minuciosa descrição são elementos cruciais para conferir credibilidade e reprodutibilidade aos resultados científicos. Portanto, é fundamental estabelecer o algoritmo de teste adotado, juntamente com as análises executadas em cada caso proposto, apresentando sua motivação e fundamentação correspondentes. As principais considerações físicas e estratégias matemáticas e computacionais empregadas nos testes deste capítulo são descritas a seguir.

#### *Métricas de Erro*

Seja  $\hat{u}_i$  o valor analítico correspondente ao valor  $u_i$  da solução numérica encontrada. Na condução de análises comparativas entre resultados distintos, serão utilizadas três métricas de erro. Quando examinando distribuições onde a resposta analítica não possui valores nulos, o erro para cada elemento do conjunto será calculado utilizando o erro percentual:

$$e_i = \left| \frac{u_i - \hat{u}_i}{\hat{u}_i} \right| \times 100\% \quad (4.62)$$

Para distribuições onde a resposta analítica possui valores nulos, o erro para cada elemento da distribuição será calculado com relação ao máximo absoluto da resposta analítica:

$$e_i = \frac{|\hat{u}_i|}{\mathring{m}\acute{a}x(|\hat{u}_i|)} \times 100\% \quad (4.63)$$

Por último, para comparar distribuições distintas, ou seja diferentes conjuntos de respostas numéricas obtidas, será utilizado o erro médio que é a média dos erros em cada elemento:

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad (4.64)$$

#### *Propriedades Físicas*

A menos que indicado o contrário, os meios simulados são considerados homogêneos, isotrópicos com propriedades mecânicas unitárias.

### *Construção das Malhas*

As malhas utilizadas no presente estudo são malhas estruturadas regulares, com discretização baseada em elementos de contorno lineares isoparamétricos. Quando em vértices, utiliza-se o chamado elemento com ponto de colocação não nodal, no qual o ponto fonte é deslocado de 5% para o interior do elemento, mantendo o nó geométrico de forma que o ponto fonte das integrais do MEC esteja sempre situado em um contorno suave (PEREIRA, 2014).

### *Cálculo dos Autovalores e Autovalores*

Os autovalores são calculados numericamente seguindo a metodologia da decomposição QR com matrizes de Hessenberg. Maiores detalhes podem ser encontrados no Apêndice C.

### *Resolução dos Sistemas Lineares*

Os sistemas lineares são resolvidos utilizando o Método de Eliminação de Gauss (STOER et al., 1980).

### *Cálculo das Integrais*

As integrais do MEC foram calculadas utilizando 20 pontos de Gauss distribuídos segundo o esquema autoadaptativo de Telles (1987).

### *Solução das EDOs*

A solução das equações diferenciais desacopladas referentes a cada modo é realizada através Algoritmo de Houbolt (HOUBOLT, 1950), conforme apêndice B.

### *Soluções Analíticas*

As soluções analíticas foram obtidas segundo o procedimento apresentado no apêndice A.

### Outros tópicos

Considerando a formulação sob teste, destacam-se quatro parâmetros de interesse nos testes subsequentes:

- Número de elementos de contorno (NEL), responsáveis pela discretização do contorno;
- Número de pontos internos (NPI), essenciais para a precisão das interpolações e representação correta das características inerciais dos domínios simulados;
- Número de modos considerados ( $N_m$ ); e,
- Passo de integração temporal no esquema de Houbolt ( $\Delta t$ ).

A convergência em relação aos parâmetros NEL e NPI, foi investigada por outros autores ([BARBOSA; LOEFFLER; LARA, 2019](#); [SANTOS et al., 2025](#)). Assim, aqui apenas será realizada uma análise simples de convergência com relação ao número de pontos interpolantes. Espera-se observar uma redução do erro médio à medida que a expansão da nuvem de pontos internos aumenta. Esta análise visa inferir sobre a robustez e a tendência convergente da formulação proposta.

Uma atenção especial será empregada nas análises relativas ao número de modos ( $N_m$ ) considerados para gerar a resposta do domínio ao longo do tempo. Serão conduzidos experimentos com diferentes malhas de contorno e distribuições de pontos internos. O intuito é examinar o impacto do número de pontos interpolantes na caracterização dos modos, especialmente nos modos mais altos, e, posteriormente, avaliar a influência desses modos na composição da resposta dinâmica do sistema.

Investigações do passo de integração mínimo para evitar a instabilidade do método também serão conduzidas. Para tanto fixa-se os demais parâmetros e busca-se a resposta dinâmica para intervalos de tempo cada vez menores, de forma a encontrar, caso haja, o valor para o qual a formulação torna-se instável.

O esquema Houbolt é considerado incondicionalmente estável para os métodos discretos de domínio, que não é o caso do MEC. Na MECID, a precisão do processo de integração mostrou-se dependente de valores adequados de intervalo de tempo ([SANTOS et al., 2025](#)). De forma a estabelecer um passo de integração temporal máximo apropriado, é utilizada uma adaptação da condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), no qual o espaço

percorrido pela onda em um intervalo de tempo não pode ser maior que o comprimento de um elemento de contorno. Para as simulações deste trabalho, onde o comprimento dos elementos de contorno é o mesmo nas duas dimensões, o critério adaptado estabelece a seguinte restrição sobre o passo de integração:

$$\Delta t \leq \frac{3}{2} \frac{\Delta L}{k} \quad (4.65)$$

onde  $\Delta t$  é o tamanho do passo de tempo,  $\Delta L$  é o tamanho do elemento de contorno e  $k$  é a velocidade da onda. O coeficiente  $3/2$  é empírico, pois o modelo MECID não é uma técnica discreta de domínio como o Método dos Elementos Finitos e outros (SANTOS et al., 2025).

#### 4.8.3 Exemplo I

O primeiro exemplo resolvido representa uma barra engastada submetida à carga repentina (Função degrau unitário). É um problema conhecido, no qual apenas os modos vibracionais ímpares contribuem com a resposta dinâmica. A Figura [4.5] apresenta uma descrição das características geométricas e as condições de contorno do problema. Os lados do quadrado têm dimensões unitárias e a velocidade de propagação de onda é também unitária. As condições iniciais são nulas.

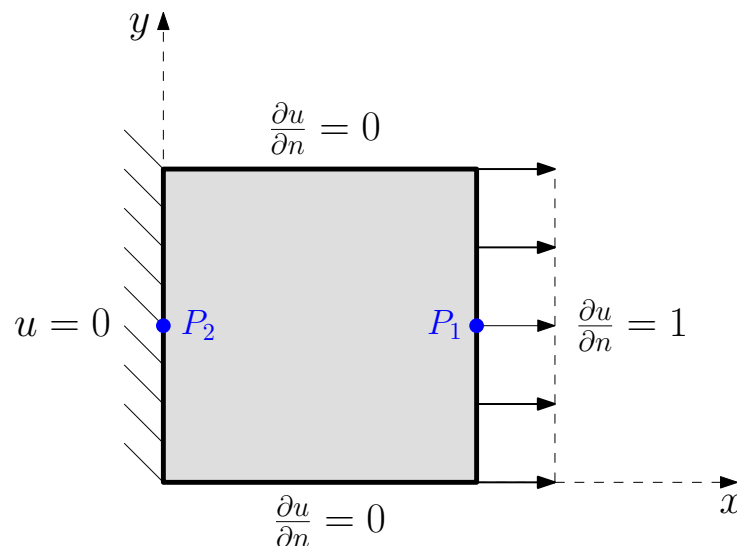


Figura 4.5: Geometria e Condições de contorno do Exemplo I  
Fonte: Próprio Autor

### Análise com o MMM

Para este exemplo, o primeiro teste realizado é a análise de convergência em relação a NPI, de forma a observar a influência dos pontos interpolantes na obtenção dos vinte primeiros autovalores. A solução analítica para as frequências pode ser encontrada através do método da separação das variáveis:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

É importante ressaltar que as condições de contorno impostas excitam apenas modos longitudinais da barra, direção  $x$ . Ainda assim, o método numérico encontra também os modos transversais, direção  $y$ , que não são excitados para esta configuração de condições de contorno. Frequências fictícias, de ordem elevada, oriundas das aproximações inerentes ao método também podem surgir.

Fixando o número de elementos no contorno,  $NEL = 160$  e variando a nuvem de pontos internos interpolantes, os autovalores são obtidos. As Figuras [4.6] e [4.7] apresentam os resultados do erro percentual no cálculo de cada autovalor e do erro percentual médio para  $NPI = 9, 64, 169$  e  $256$ .

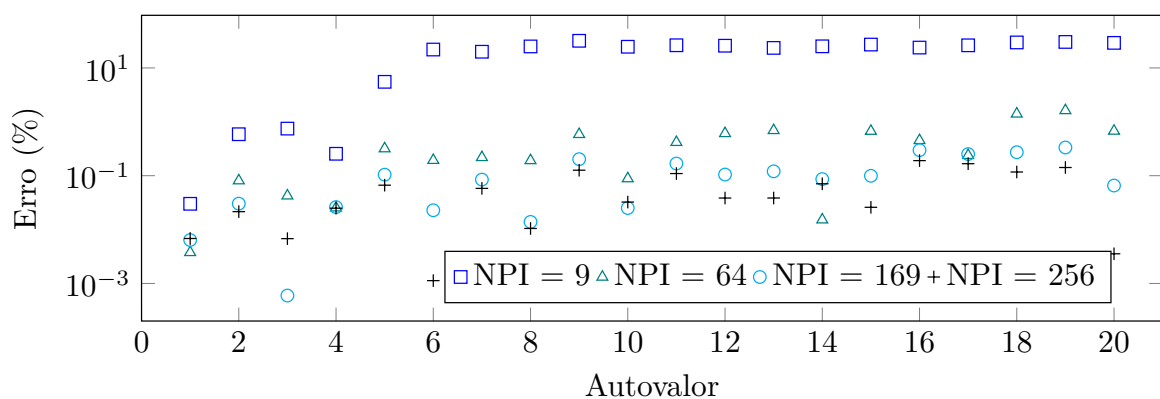


Figura 4.6: Erro na determinação dos primeiros autovalores em função do NPI  
Fonte: Próprio Autor

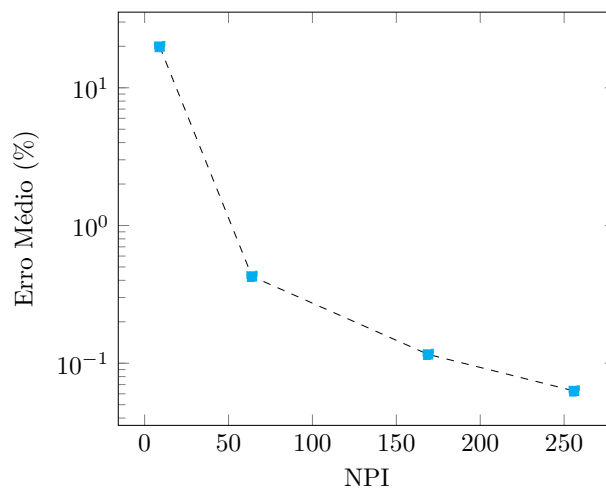


Figura 4.7: Erro médio na determinação dos primeiros autovalores em função do NPI  
Fonte: Próprio Autor

Os resultados mostram que a formulação apresenta um comportamento esperado, com redução dos erros à medida que são adicionados pólos internos. Observa-se também, para cada nuvem de pontos internos, uma tendência de aumento do erro com a frequência, comportamento também esperado, pois, como citado anteriormente, os modos mais elevados são representados pelos métodos numéricos com dificuldade.

Feita a análise de convergência, fixa-se uma malha  $NEL|NPI = 160|144$  para a realização dos testes subsequentes. Os pontos internos e os pontos que delimitam os elementos de contorno que compõem esta malha são apresentados na figura [4.8].

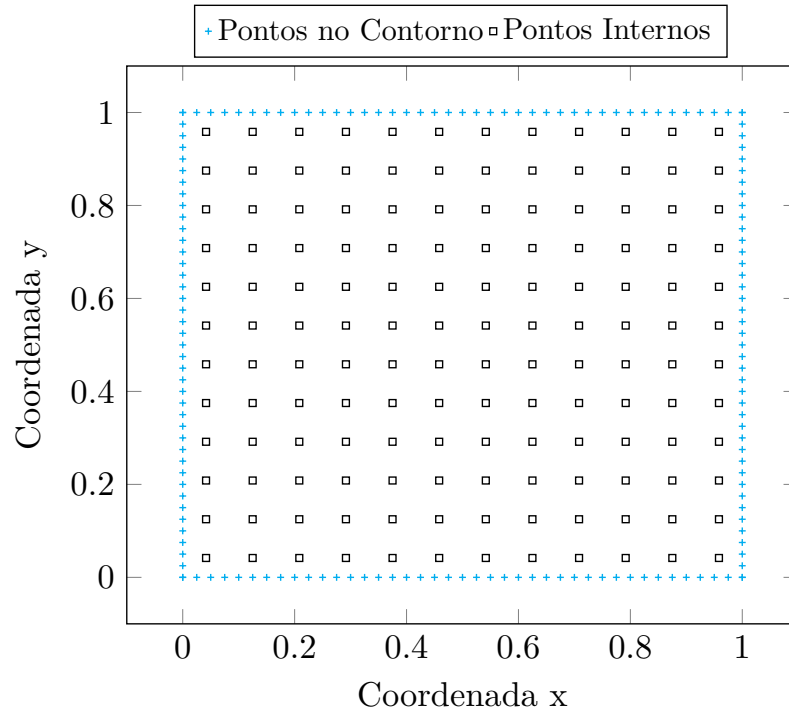


Figura 4.8: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 160|144$   
 Fonte: Próprio Autor

Com esta malha definida e considerando que, neste exemplo, o primeiro modo é o mais excitado, a experiência a seguir calcula a amplitude relativa dos modos 2, 3,  $\dots$ , 80 através da equação (4.57). O objetivo desta experiência é compreender melhor a hierarquia de contribuição entre os modos. Os resultados são apresentados na figura [4.9].

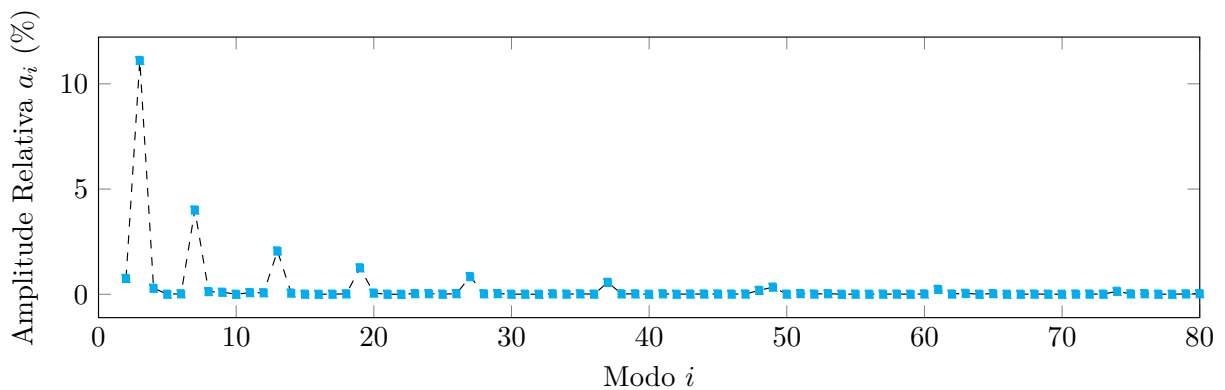


Figura 4.9: Amplitude relativa percentual dos modos 2 a 80  
 Fonte: Próprio Autor

Os resultados apresentados na figura [4.9] evidenciam claramente a predominância dos modos de baixa frequência em relação àqueles associados a frequências mais elevadas. É notável que a amplitude do primeiro modo supera de forma significativa as demais, com

a maior amplitude relativa observada, correspondente ao terceiro modo, sendo inferior a 12%. Nota-se, também, que muitas frequências de ordem menos elevada estão presentes no eixo das abcissas e não são excitadas; estas são aquelas associadas aos movimentos vibratórios transversais, anteriormente mencionados.

As Tabelas [4.1] e [4.2] apresentam as primeiras oitenta frequências para a malhas  $NEL|NPI = 160|144$ , suas respectivas amplitudes e contribuições relativas (considerando  $N_m = 80$ ). As linhas referentes às dez maiores amplitudes são destacadas em azul. Adicionalmente, nestas tabelas é possível verificar, mais uma vez, a dificuldade do método numérico em representar as altas frequências. Uma vez que o procedimento descrito na secção 4.6 é realizado e os modos são reorganizados em função de suas amplitudes conforme indicado nas tabelas [4.3] e [4.4].

$i$	$\omega_{\text{analítico}}$	$\omega_{\text{numérico}}$	$A_i$	$c_i$
1	1.571220	1.570906	8.480701	81.27%
2	3.515122	3.512968	0.063956	0.61%
3	4.713651	4.712675	0.942342	9.03%
4	5.668795	5.664573	0.024406	0.23%
5	6.491518	6.478346	0.000328	0.00%
6	7.852406	7.852569	0.001845	0.02%
7	7.869230	7.854947	0.339574	3.25%
8	8.460457	8.458057	0.010829	0.10%
9	9.594659	9.552815	0.008292	0.08%
10	10.064209	10.054306	0.000122	0.00%
11	10.572695	10.531739	0.006657	0.06%
12	10.968029	10.983297	0.005912	0.06%
13	11.402091	11.422821	0.174401	1.67%
14	12.283786	12.252291	0.004873	0.05%
15	12.624875	12.634537	0.000380	0.00%
16	12.732763	12.643878	0.000137	0.00%
17	13.477310	13.382992	0.000511	0.00%
18	14.023396	14.089698	0.001638	0.02%
19	14.329719	14.430621	0.106559	1.02%
20	14.431943	14.440690	0.004751	0.05%
21	14.832280	14.759841	0.000287	0.00%
22	15.296323	15.404902	0.000047	0.00%
23	15.828271	15.666196	0.002706	0.03%
24	16.411385	16.263434	0.002498	0.02%
25	16.562025	16.595593	0.000474	0.00%
26	16.738750	16.887818	0.002577	0.02%
27	16.974809	17.142538	0.071050	0.68%
28	17.198002	17.387931	0.001772	0.02%
29	17.503004	17.422965	0.002705	0.03%
30	17.950557	18.217405	0.000377	0.00%
31	18.594262	18.601664	0.000448	0.00%
32	18.730229	18.729500	0.000187	0.00%
33	18.963663	18.933615	0.001874	0.02%
34	19.191935	19.091750	0.000738	0.01%
35	19.662829	19.455757	0.001722	0.02%
36	19.960496	20.025159	0.000696	0.01%
37	20.073516	20.100757	0.047900	0.46%
38	20.448010	20.335261	0.001545	0.01%
39	20.757903	20.775694	0.001551	0.01%
40	20.861627	20.978290	0.000161	0.00%

Tabela 4.1 - Modos organizados em função das frequências (Parte 1)

Fonte: Próprio Autor

$i$	$\omega_{\text{analítico}}$	$\omega_{\text{numérico}}$	$A_i$	$c_i$
41	21.278971	21.043598	0.00188	0.02%
42	21.287668	21.331149	0.00038	0.00%
43	21.561783	21.441093	0.00096	0.01%
44	21.630255	21.847255	0.00101	0.01%
45	22.152164	22.037688	0.00108	0.01%
46	22.335563	22.626152	0.00085	0.01%
47	22.468245	22.804165	0.00114	0.01%
48	22.630003	22.878610	0.01578	0.15%
49	22.708705	22.926433	0.02885	0.28%
50	22.964713	23.098860	0.00059	0.01%
51	23.141267	23.369196	0.00288	0.03%
52	23.359566	23.658453	0.00094	0.01%
53	23.450868	23.733247	0.00241	0.02%
54	23.665570	24.142736	0.00018	0.00%
55	23.790607	24.483243	0.00063	0.01%
56	24.196367	24.522728	0.00033	0.00%
57	24.269017	24.674150	0.00069	0.01%
58	24.409663	24.901390	0.00085	0.01%
59	24.541239	25.092006	0.00031	0.00%
60	24.591764	25.140458	0.00128	0.01%
61	24.687853	25.409225	0.01992	0.19%
62	24.892038	25.590905	0.00104	0.01%
63	24.979163	25.662997	0.00379	0.04%
64	25.620823	26.033514	0.00024	0.00%
65	25.771184	26.104187	0.00271	0.03%
66	25.984181	26.523653	0.00018	0.00%
67	26.026002	26.555097	0.00027	0.00%
68	26.102038	26.601806	0.00079	0.01%
69	26.194008	26.791180	0.00047	0.00%
70	26.243101	26.852487	0.00020	0.00%
71	26.347072	26.974144	0.00090	0.01%
72	26.449620	27.222504	0.00087	0.01%
73	26.611625	27.399794	0.00059	0.01%
74	26.652744	27.505612	0.01198	0.11%
75	26.710151	27.671327	0.00155	0.01%
76	26.760633	27.763551	0.00233	0.02%
77	27.093799	28.089583	0.00032	0.00%
78	27.161675	28.172765	0.00032	0.00%
79	27.203607	28.225670	0.00145	0.01%
80	27.241522	28.349242	0.00234	0.02%

Tabela 4.2 - Modos organizados em função das frequências (Parte 2)

Fonte: Próprio Autor

$i$	$\omega_{\text{analítico}}$	$\omega_{\text{numérico}}$	$A_i$	$c_i$
1	1.571220	1.570906	8.480701	81.27%
3	4.713651	4.712675	0.942342	9.03%
7	7.869230	7.854947	0.339574	3.25%
13	11.402091	11.422821	0.174401	1.67%
19	14.329719	14.430621	0.106559	1.02%
27	16.974809	17.142538	0.071050	0.68%
2	3.515122	3.512968	0.063956	0.61%
37	20.073516	20.100757	0.047900	0.46%
49	22.708705	22.926433	0.028849	0.28%
4	5.668795	5.664573	0.024406	0.23%
61	24.687853	25.409225	0.019920	0.19%
48	22.630003	22.878610	0.015776	0.15%
74	26.652744	27.505612	0.011983	0.11%
8	8.460457	8.458057	0.010829	0.10%
9	9.594659	9.552815	0.008292	0.08%
11	10.572695	10.531739	0.006657	0.06%
12	10.968029	10.983297	0.005912	0.06%
14	12.283786	12.252291	0.004873	0.05%
20	14.431943	14.440690	0.004751	0.05%
63	24.979163	25.662997	0.003791	0.04%
51	23.141267	23.369196	0.002882	0.03%
65	25.771184	26.104187	0.002709	0.03%
23	15.828271	15.666196	0.002706	0.03%
29	17.503004	17.422965	0.002705	0.03%
26	16.738750	16.887818	0.002577	0.02%
24	16.411385	16.263434	0.002498	0.02%
53	23.450868	23.733247	0.002410	0.02%
80	27.241522	28.349242	0.002336	0.02%
76	26.760633	27.763551	0.002335	0.02%
41	21.278971	21.043598	0.001885	0.02%
33	18.963663	18.933615	0.001874	0.02%
6	7.852406	7.852569	0.001845	0.02%
28	17.198002	17.387931	0.001772	0.02%
35	19.662829	19.455757	0.001722	0.02%
18	14.023396	14.089698	0.001638	0.02%
39	20.757903	20.775694	0.001551	0.01%
75	26.710151	27.671327	0.001549	0.01%
38	20.448010	20.335261	0.001545	0.01%
79	27.203607	28.225670	0.001449	0.01%
60	24.591764	25.140458	0.001283	0.01%

Tabela 4.3 - Modos organizados em função das amplitudes (Parte 1)

Fonte: Próprio Autor

$i$	$\omega_{\text{analítico}}$	$\omega_{\text{numérico}}$	$A_i$	$c_i$
47	22.468245	22.804165	0.001142	0.01%
45	22.152164	22.037688	0.001081	0.01%
62	24.892038	25.590905	0.001039	0.01%
44	21.630255	21.847255	0.001012	0.01%
43	21.561783	21.441093	0.000960	0.01%
52	23.359566	23.658453	0.000941	0.01%
71	26.347072	26.974144	0.000897	0.01%
72	26.449620	27.222504	0.000871	0.01%
46	22.335563	22.626152	0.000855	0.01%
58	24.409663	24.901390	0.000846	0.01%
68	26.102038	26.601806	0.000793	0.01%
34	19.191935	19.091750	0.000738	0.01%
36	19.960496	20.025159	0.000696	0.01%
57	24.269017	24.674150	0.000690	0.01%
55	23.790607	24.483243	0.000632	0.01%
50	22.964713	23.098860	0.000593	0.01%
73	26.611625	27.399794	0.000585	0.01%
17	13.477310	13.382992	0.000511	0.00%
25	16.562025	16.595593	0.000474	0.00%
69	26.194008	26.791180	0.000465	0.00%
31	18.594262	18.601664	0.000448	0.00%
15	12.624875	12.634537	0.000380	0.00%
42	21.287668	21.331149	0.000378	0.00%
30	17.950557	18.217405	0.000377	0.00%
56	24.196367	24.522728	0.000332	0.00%
5	6.491518	6.478346	0.000328	0.00%
77	27.093799	28.089583	0.000318	0.00%
78	27.161675	28.172765	0.000317	0.00%
59	24.541239	25.092006	0.000307	0.00%
21	14.832280	14.759841	0.000287	0.00%
67	26.026002	26.555097	0.000272	0.00%
64	25.620823	26.033514	0.000243	0.00%
70	26.243101	26.852487	0.000200	0.00%
32	18.730229	18.729500	0.000187	0.00%
66	25.984181	26.523653	0.000184	0.00%
54	23.665570	24.142736	0.000176	0.00%
40	20.861627	20.978290	0.000161	0.00%
16	12.732763	12.643878	0.000137	0.00%
10	10.064209	10.054306	0.000122	0.00%
22	15.296323	15.404902	0.000047	0.00%

Tabela 4.4 - Modos organizados em função das amplitudes (Parte 2)

Fonte: Próprio Autor

Para ilustrar a diferença entre os resultados obtidos quando se utiliza a matriz modal

típica, com os modos organizados em função dos autovalores, e quando a matriz modal é montada em função das amplitudes, propõe-se o experimento a seguir.

Busca-se o deslocamento no ponto  $P_1$  localizando no centro da aresta direita. O passo de integração utilizado foi igual a  $10^{-3}$  s, e o tamanho de cada elemento de contorno é de 0.025 unidades de comprimento. De acordo com o critério adotado na equação (4.65), este valor é suficiente para uma boa integração sem perder estabilidade em um processo de integração direta. Mais adiante a questão do passo de integração será abordada com mais detalhes.

As Figura [4.10] e [4.11] mostram as amplitudes dos três primeiros modos no ponto  $P_1$  considerando as duas diferentes abordagens para a construção da matriz modal. Fica evidente que é preferível compor os modos um, três e sete em detrimento dos modos um, dois e três. Isto porquê o modo sete foi mais excitado que o modo dois e será considerado.

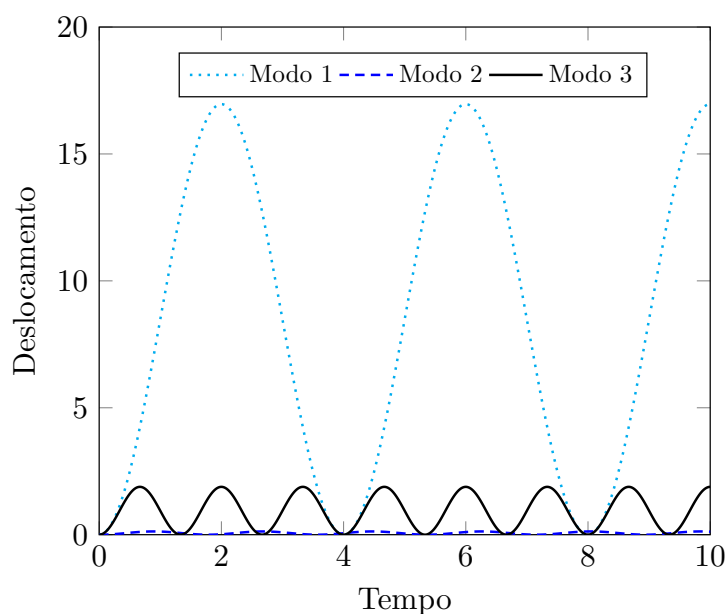


Figura 4.10: Deslocamento dos modos 1, 2 e 3 no ponto  $P_1$

Fonte: Próprio Autor

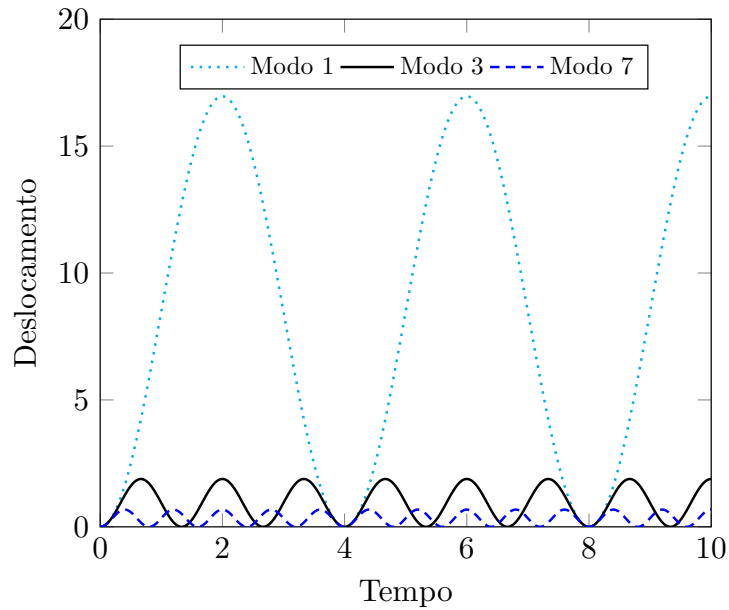


Figura 4.11: Deslocamento dos modos 1, 3 e 7 no ponto  $P_1$   
Fonte: Próprio Autor

Os resultados da superposição modal utilizando estes dois diferentes tipos de organização dos modos (organizados pela frequência ou em função da amplitude) são apresentados nas figuras [4.12] e [4.13], que apresentam o deslocamento no ponto  $P_1$  considerando três modos. O erro para os dois resultados é apresentado na figura [4.14].

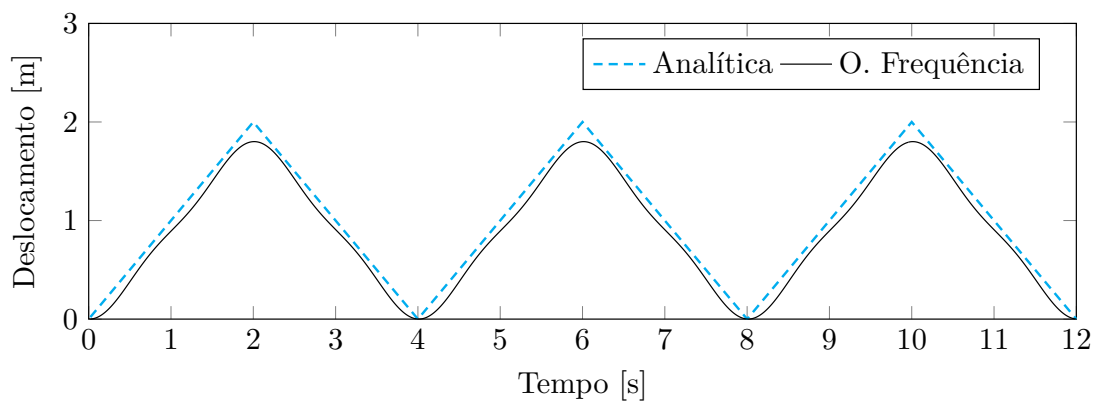


Figura 4.12: Deslocamento no ponto  $P_1$  considerando modos um, dois e três  
Fonte: Próprio Autor

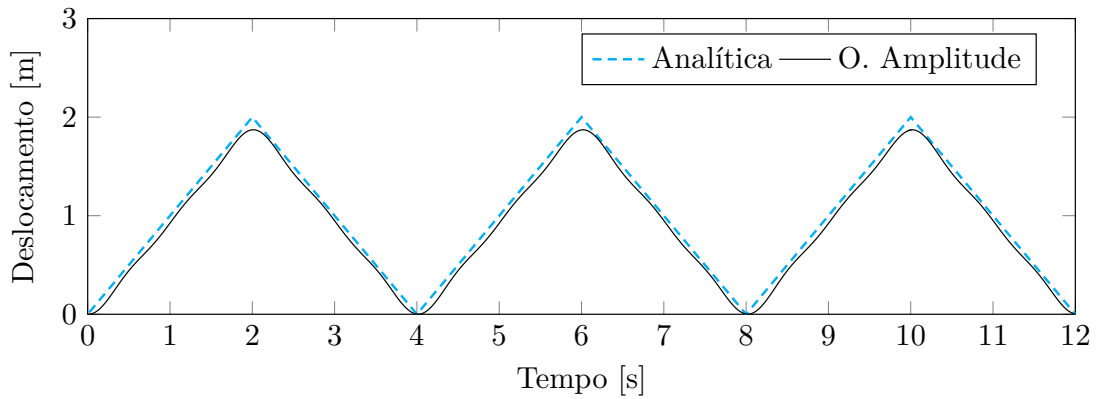


Figura 4.13: Deslocamento no ponto  $P_1$  considerando modos um, três e sete  
Fonte: Próprio Autor

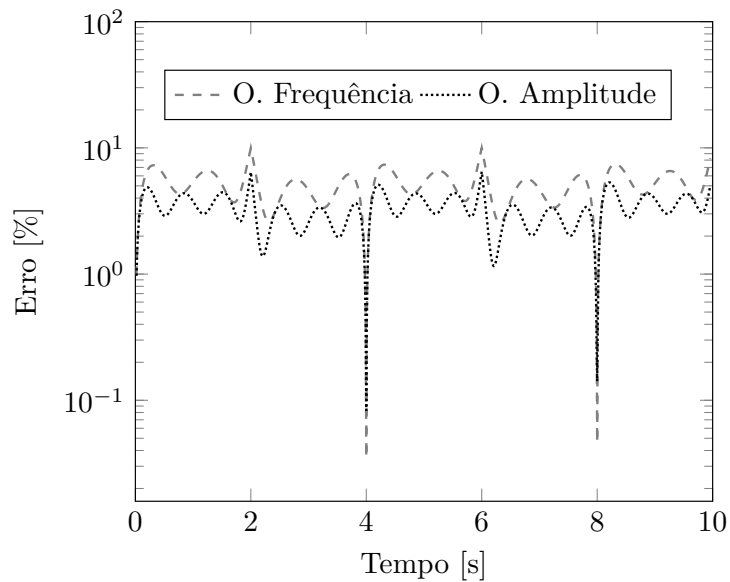


Figura 4.14: Erro percentual ao longo do tempo  
Fonte: Próprio Autor

É visível pelo exposto nas figuras [4.12], [4.13] e [4.14] que a superposição modal utilizando a matriz modal construída com base na amplitude gera resultados superiores. Tal fato justifica a adoção do procedimento de seleção dos modos proposto, dado que ao se organizar os modos em função da amplitude, prioriza-se os modos mais excitados pelo carregamento imposto.

Quanto ao comportamento dinâmico do sistema, as figuras [4.15 - 4.19] mostram a resposta de deslocamento no ponto  $P_1$  em função de um número crescente de modos de vibração. Este procedimento é análogo à construção de uma base de vetores cada vez maior em um espaço vetorial na álgebra linear. À medida que mais vetores são incluídos na base,

a dimensão do subespaço que pode ser representado aumenta. No problema em questão, esse comportamento se traduz em uma melhor representação da resposta à medida que os modos são adicionados, conforme demonstrado pelo gráfico do erro percentual médio em função no número de modos considerados, apresentado na figura [4.20].

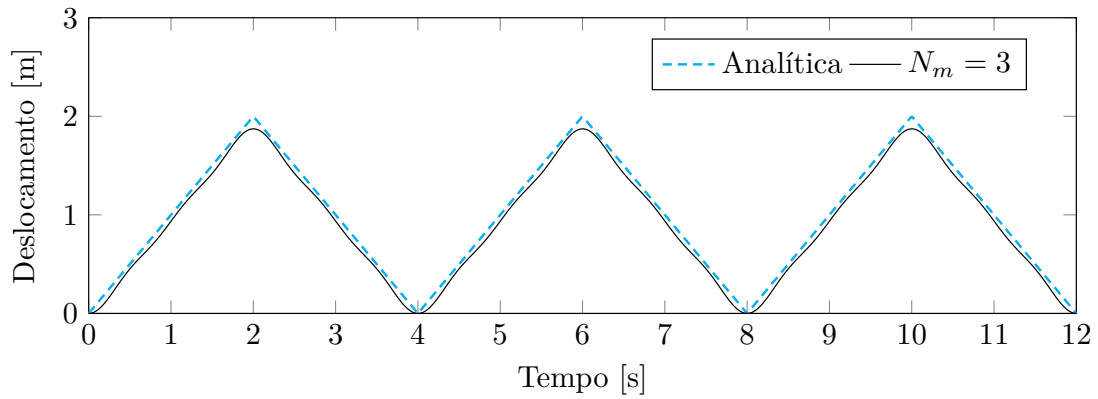


Figura 4.15: Deslocamento em  $P_1$  considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

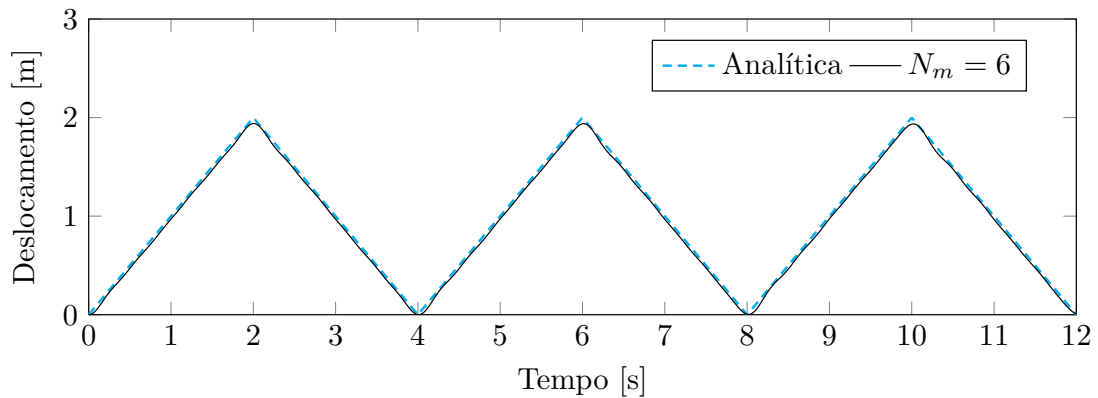


Figura 4.16: Deslocamento em  $P_1$  considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

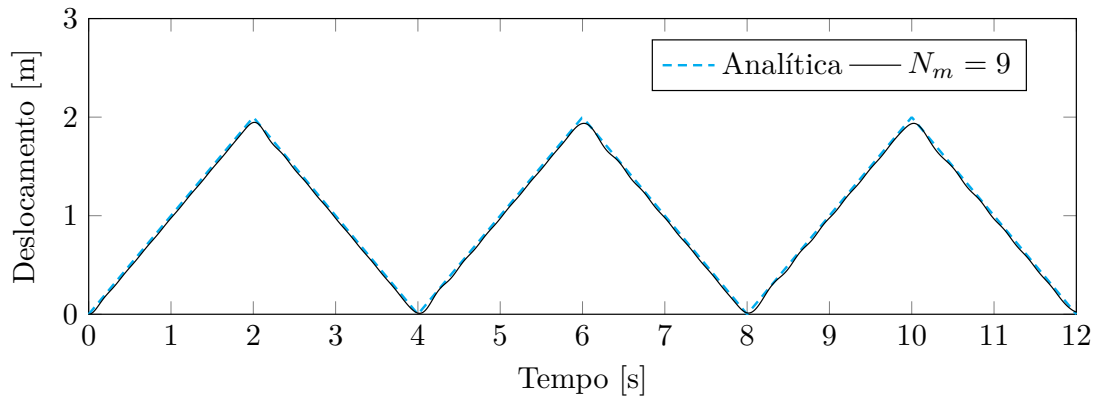


Figura 4.17: Deslocamento em  $P_1$  considerando nove modos  
Fonte: Próprio Autor

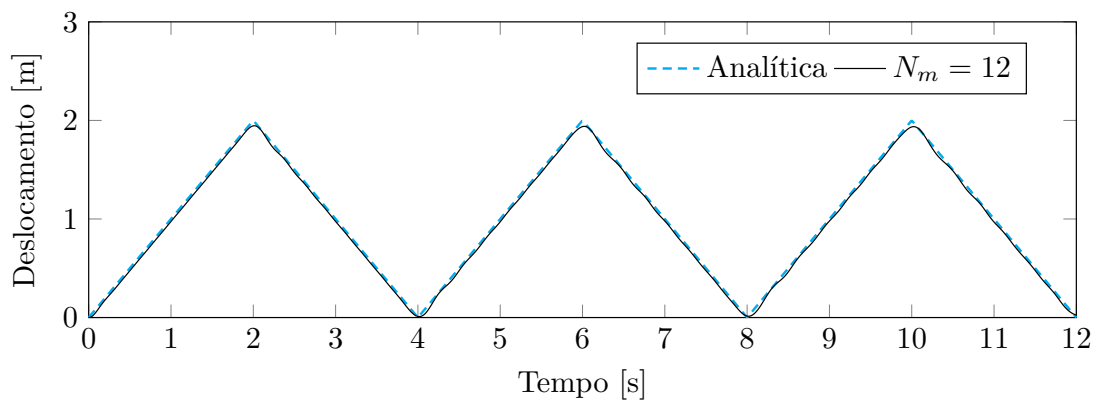


Figura 4.18: Deslocamento em  $P_1$  considerando doze modos  
Fonte: Próprio Autor

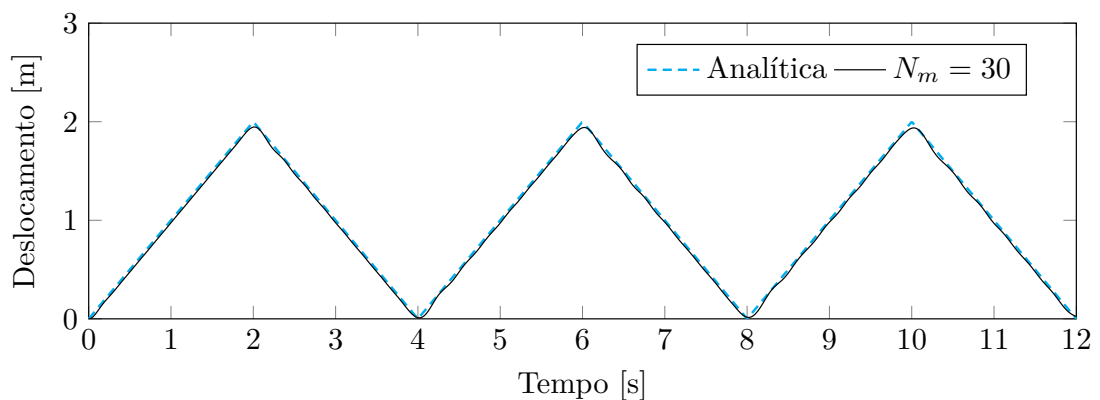


Figura 4.19: Deslocamento em  $P_1$  considerando 30 modos  
Fonte: Próprio Autor

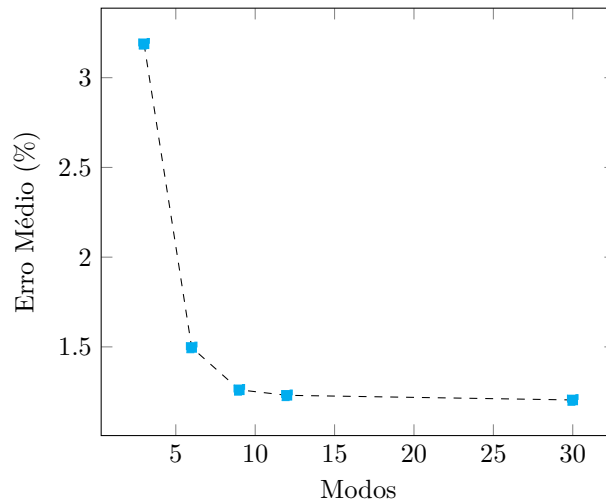


Figura 4.20: Erro médio na determinação do deslocamento em  $P_1$

Fonte: Próprio Autor

Observa-se que, a partir do nono modo, não há melhoria significativa na resposta numérica, que praticamente coincide com a resposta analítica. A obtenção de resultados satisfatórios com uma malha relativamente grosseira e uma quantidade reduzida de modos deve-se ao baixo grau de complexidade deste problema. Nos próximos exemplos resolvidos, ao se determinar os deslocamentos e tensões, ficará mais evidente a necessidade de um refinamento adequado da malha e da inclusão dos modos mais elevados.

Quando utilizando esta malha, o modelo numérico tem um total de 268 graus de liberdade. Utilizando o procedimento de seleção de modos descrito na seção 4.6, os modos são selecionados entre os 94 primeiros. Assim, uma outra experiência relacionada à determinação do deslocamento é a análise da resposta quando a seleção é realizada dentro de um conjunto maior de modos. A resposta considerando os 10 modos excitados entre os 160 primeiros é apresentada na figura [4.21] a seguir.

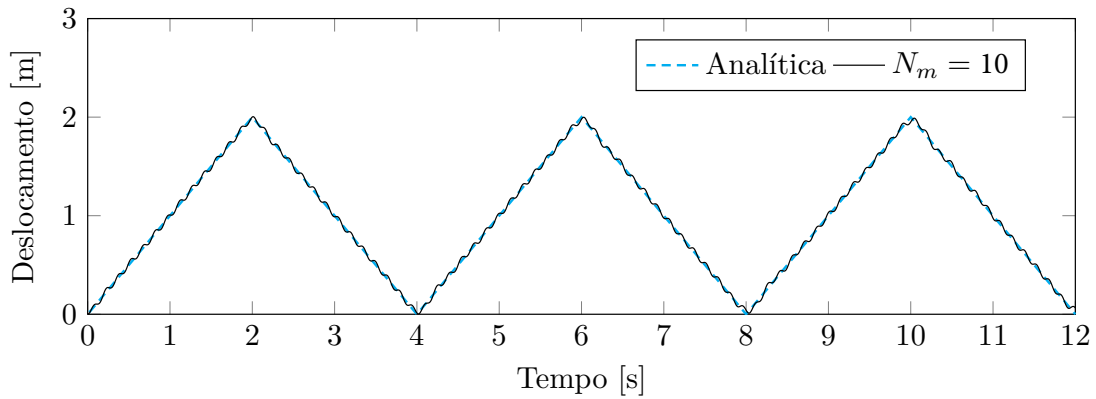


Figura 4.21: Deslocamento em  $P_1$  considerando dez modos (entre 160)  
Fonte: Próprio Autor

As tremulações observadas devem-se à inclusão de modos elevado, mais excitados que os que anteriormente considerados, especialmente os modos 145 e 149, na resposta. Esses modos, mal representados para o duo NEL|NPI atual, perturbam a resposta conforme explicado na secção 4.6, justificando a escolha de considerar apenas o primeiro terço do total de modos do modelo numérico como adequados para compor a resposta dinâmica. O refino da malha e a inclusão de mais pontos internos pode melhorar a representação destes modos, como será apresentado em outros exemplos.

Os resultados numéricos das tensões no ponto  $P_2$  situado no centro da aresta esquerda são apresentados nas figuras [4.22], [4.23] e [4.24] para um crescente número de modos.

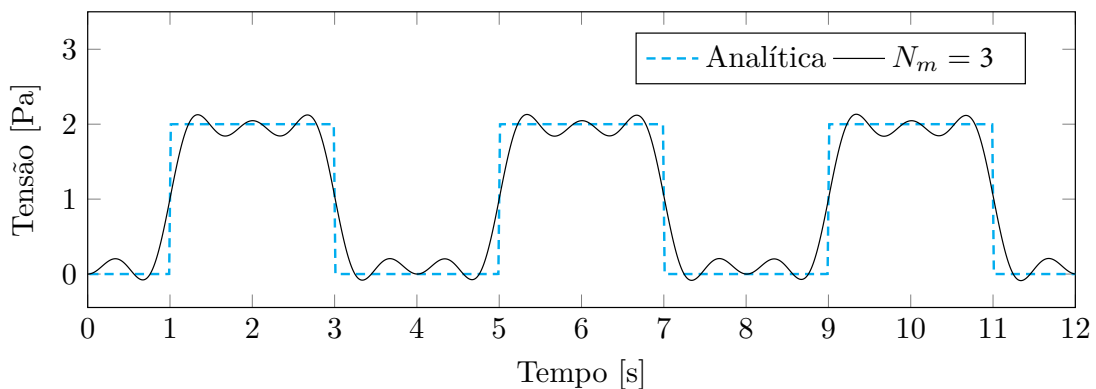


Figura 4.22: Tensão em  $P_2$  considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

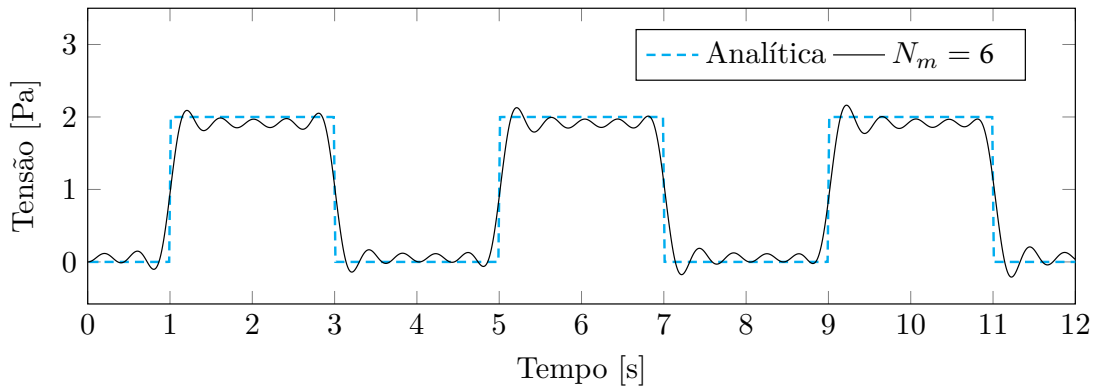


Figura 4.23: Tensão em  $P_2$  considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

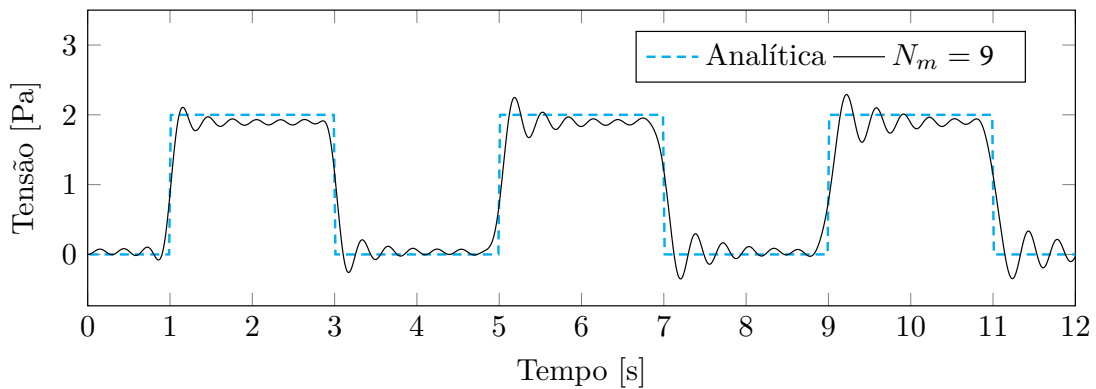


Figura 4.24: Tensão em  $P_2$  considerando nove modos  
Fonte: Próprio Autor

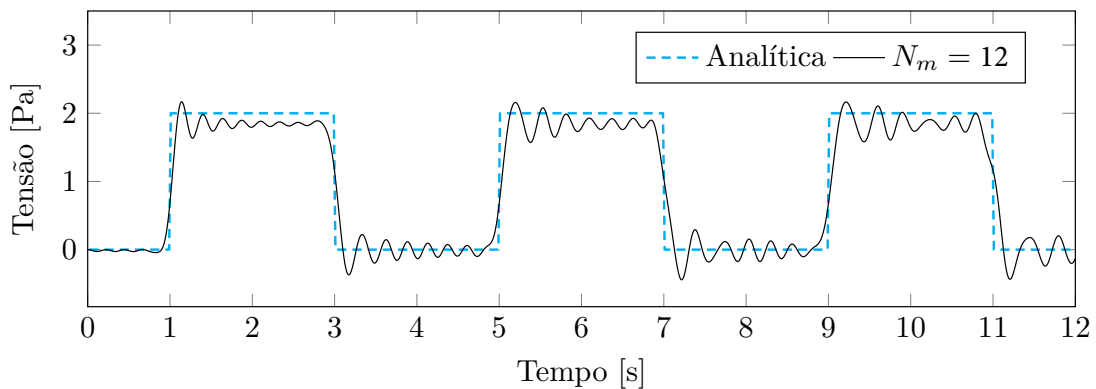


Figura 4.25: Tensão em  $P_2$  considerando doze modos  
Fonte: Próprio Autor

Em relação ao comportamento da tensão, são esperadas flutuações espúrias devido à influência de modos superiores. No entanto, o fenômeno de Gibbs também está presente na resposta, e seu efeito permanece indefinidamente ao longo do tempo. Além disso, como

citado anteriormente, o cálculo das tensões também é menos preciso por utilizar menos graus de liberdade para sua solução, pois a superposição modal é uma técnica voltada para cálculos de deslocamentos.

O próximo teste foi realizado para investigar se, assim como na MECID-IT, a formulação com superposição modal apresenta um passo de tempo limite, a partir do qual a resposta começa a apresentar instabilidade numérica (SANTOS et al., 2025). O problema do deslocamento em  $P_1$  foi resolvido fixando  $N_m = 30$  e reduzindo o valor do incremento de tempo, atingindo um valor igual a  $10^{-6}$  segundos sem qualquer problema de instabilidade numérica conforme demonstrado nas figuras [4.26 - 4.31] a seguir:

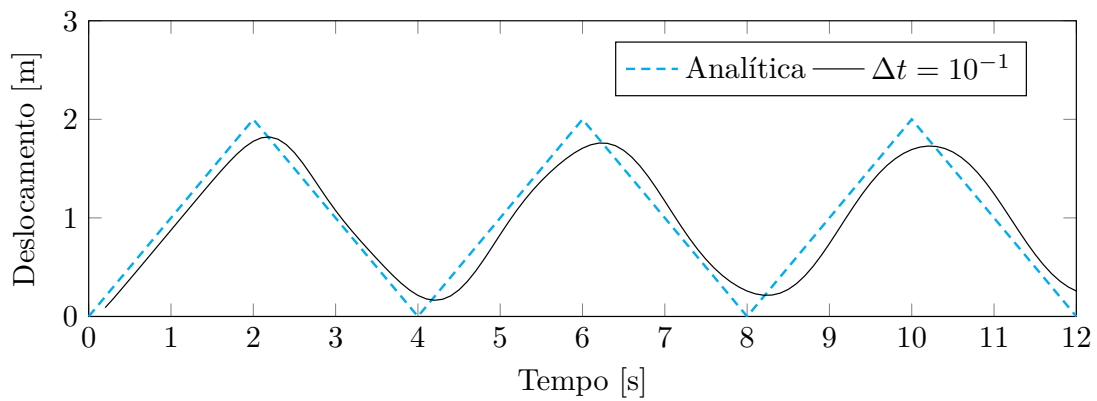


Figura 4.26: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-1}$

Fonte: Próprio Autor

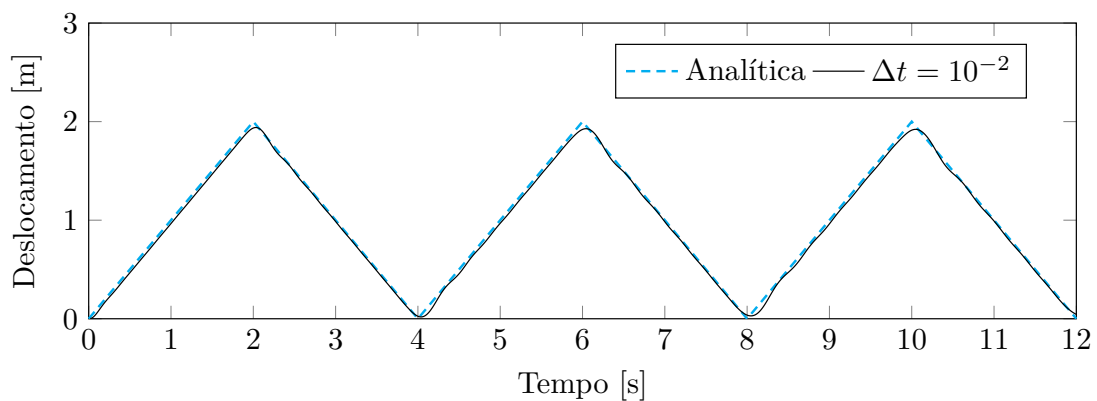


Figura 4.27: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-2}$

Fonte: Próprio Autor

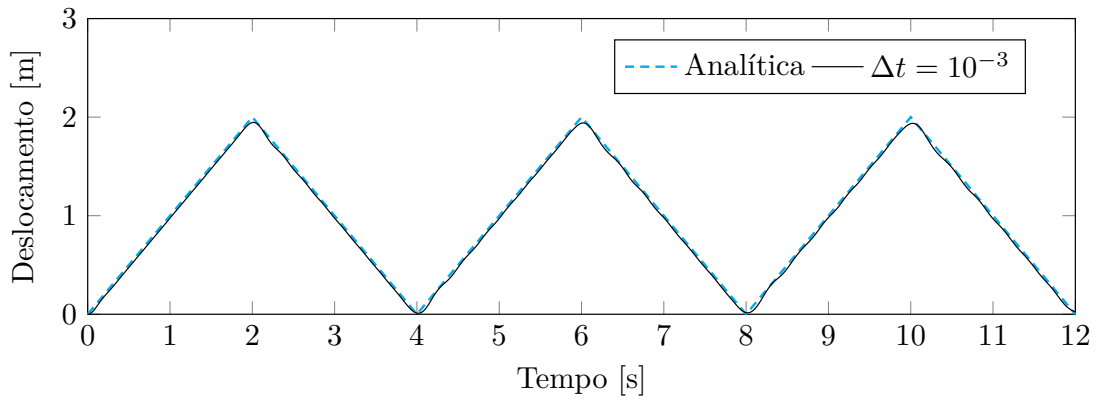


Figura 4.28: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-3}$   
Fonte: Próprio Autor

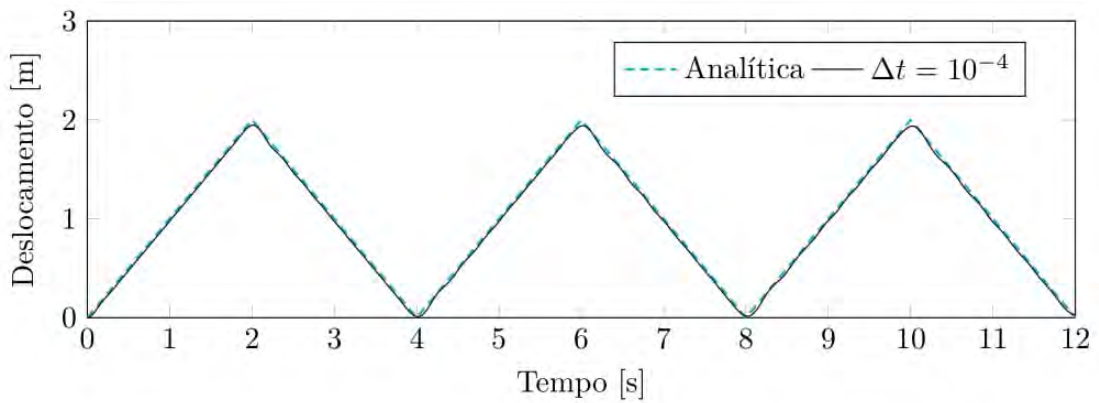


Figura 4.29: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-4}$   
Fonte: Próprio Autor

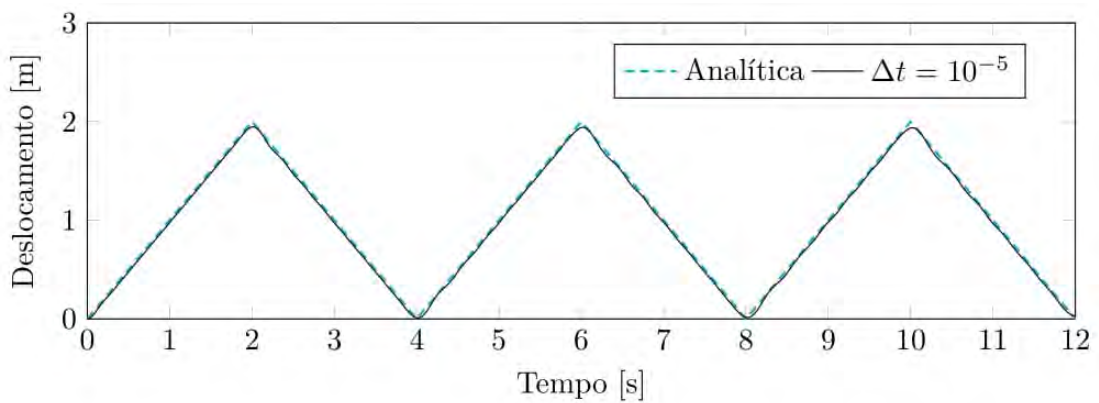


Figura 4.30: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-5}$   
Fonte: Próprio Autor

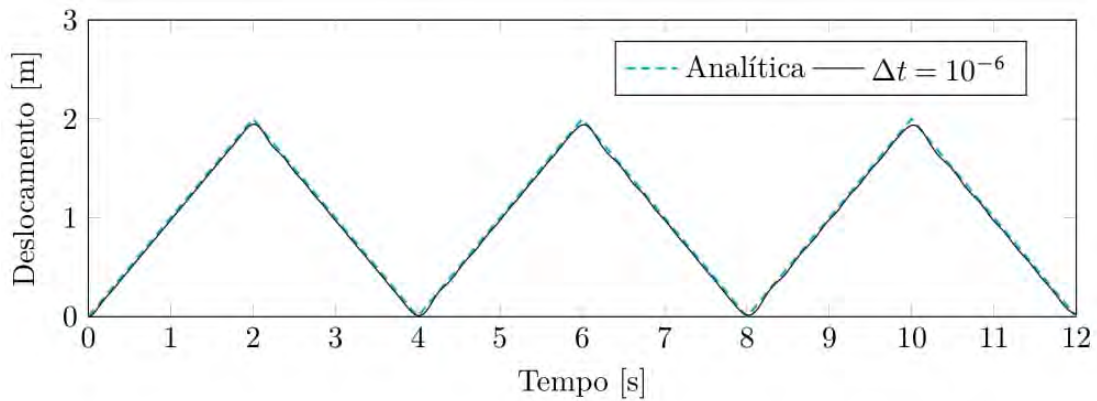


Figura 4.31: Deslocamento em  $P_1$  para  $\Delta t = 10^{-6}$   
 Fonte: Próprio Autor

Observa-se uma melhora expressiva nos resultados com a redução do incremento temporal até  $\Delta t = 10^{-3}$  s. Para valores menores, não é possível visualizar enriquecimento da solução (mesmo que seja fácil verificar numericamente que há redução dos erros), indicando que  $\Delta t = 10^{-3}$  s é um valor adequado para estes testes. Destaca-se também a redução na amplitude e o alongamento do período na solução numérica com  $\Delta t = 10^{-1}$  s. Tais fenômenos são característicos do esquema de Houbolt devido ao amortecimento fictício e à dispersão numérica inerentes ao método, e são minimizados com a redução do passo de tempo.

Em comparação, ao utilizar a mesma malha e a mesma função de base radial empregando o método de integração passo a passo, em que não é realizado o desacoplamento modal, o menor passo de integração possível para obter uma resposta estável foi de superior a  $10^{-2}$  segundos (SANTOS et al., 2024; SANTOS et al., 2025). Este fato é uma evidência robusta de que a assimetria das matrizes dinâmicas do MECID produz os problemas de instabilidade. Isso significa que, frequências não reais, que estão implicitamente presentes na matriz dinâmica do MECID, restringem o passo de tempo mínimo de integração para integração.

Ressalta-se também que, caso haja interesse em armazenar as configurações do sistema em cada instante de tempo, à medida que o passo de integração é diminuído, o tempo de processamento e a demanda por memória para armazenamento aumentam de forma significativa.

Outro teste relevante no contexto aqui abordado é a avaliação da dispersão numérica. Para tanto, determina-se o perfil da curva de resposta após um longo tempo, utilizando

a mesma malha,  $N_m = 30$  e um passo de tempo  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos para minimizar o amortecimento fictício e o alongamento do período.

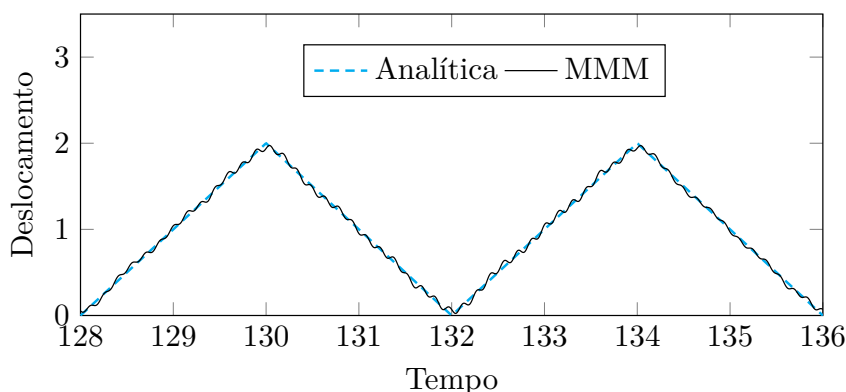


Figura 4.32: 33<sup>o</sup> e 34<sup>o</sup> ciclos do deslocamento em  $P_1$   
Fonte: Próprio Autor

A dispersão numérica refere-se à deterioração da forma do sinal de propagação causada por pequenos erros nas velocidades de propagação de diferentes componentes do sinal, sendo uma imprecisão inerente a todos os modelos discretos de propagação de ondas, não relacionada a qualquer fenômeno físico.

Na figura [4.32] observa-se um comportamento diferente da resposta neste intervalo de tempo avançado correspondente aos 33<sup>o</sup> e 34<sup>o</sup> ciclo da resposta. Entretanto, isto se deve, mais provavelmente, a acúmulo de erros inerente ao esquema de avanço no tempo.

#### *Análise com o Método Modal Clássico*

Dando prosseguimento aos testes comparativos, busca-se a solução para o mesmo problema (deslocamento no ponto  $P_1$  da barra engastada), mas examinando a resposta obtida pelo MECID-MMC. A seguir, a resposta dinâmica é apresentada em função do número de modos. As respostas com três modos, nove modos, 27 modos e 81 modos são apresentadas respectivamente nas figuras [4.33 - 4.36].

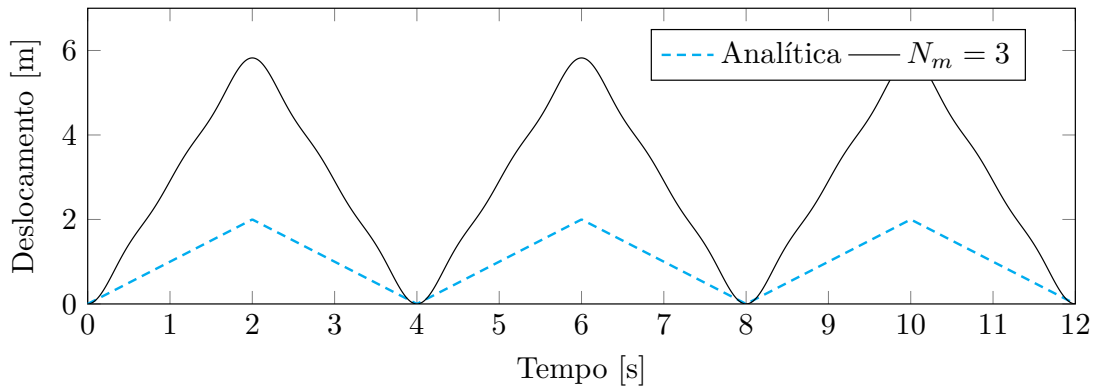


Figura 4.33: Deslocamento em  $P_1$  considerando três modos (MMC)  
Fonte: Próprio Autor

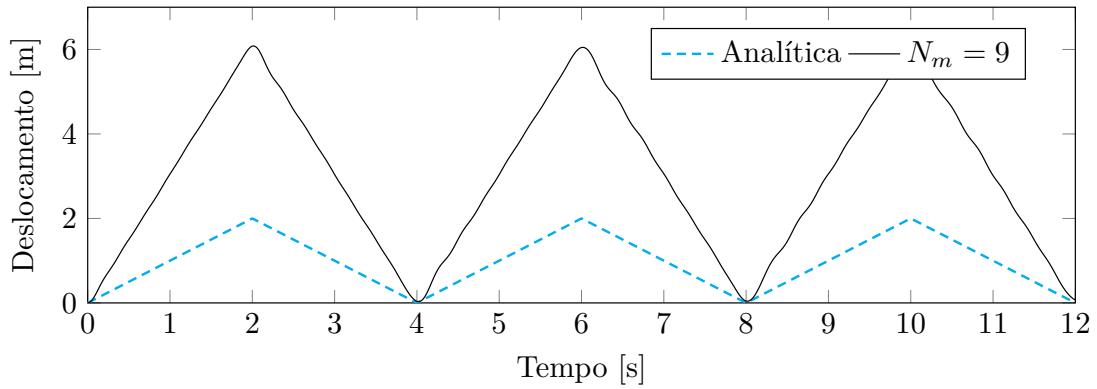


Figura 4.34: Deslocamento em  $P_1$  considerando nove modos (MMC)  
Fonte: Próprio Autor

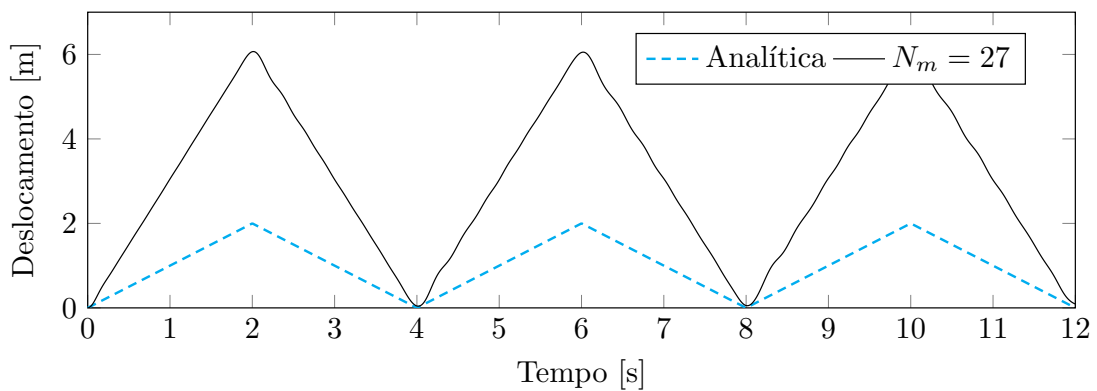


Figura 4.35: Deslocamento em  $P_1$  considerando 27 modos (MMC)  
Fonte: Próprio Autor

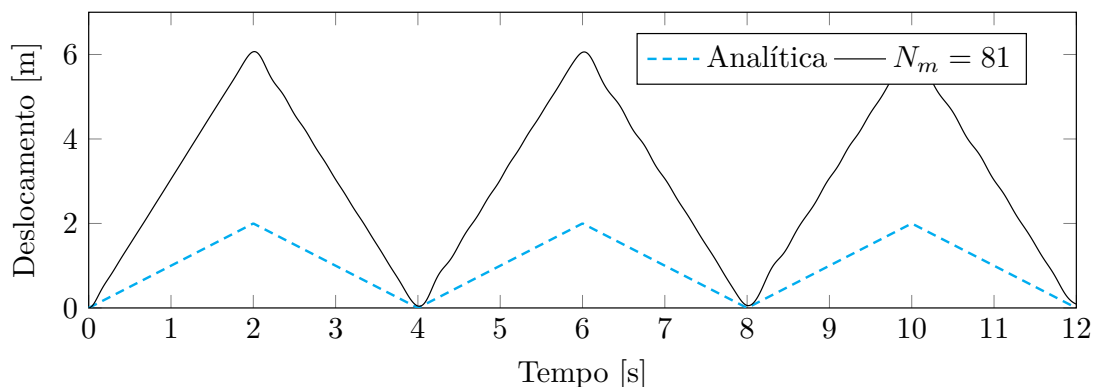


Figura 4.36: Deslocamento em  $P_1$  considerando 81 modos (MMC)  
Fonte: Próprio Autor

Ao contrário do MMM, o MMC aparenta superestimar os valores quando o número de modos é reduzido. Além disso, apesar de em fase com a resposta analítica, a resposta numérica apresenta amplitudes muito diferentes. Visando observar obteve-se a resposta considerando agora no primeiro passo da seleção de modos um total de 245 termos. As respostas considerando 9 modos, 21 modos são apresentadas nas figuras [4.37 - 4.39] a seguir.

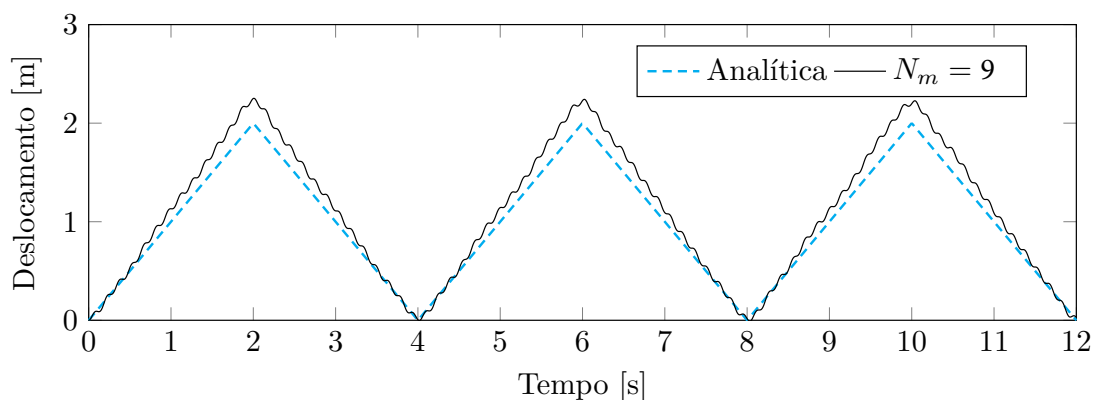


Figura 4.37: Deslocamento em  $P_1$  considerando 9 modos (MMC - 240)  
Fonte: Próprio Autor

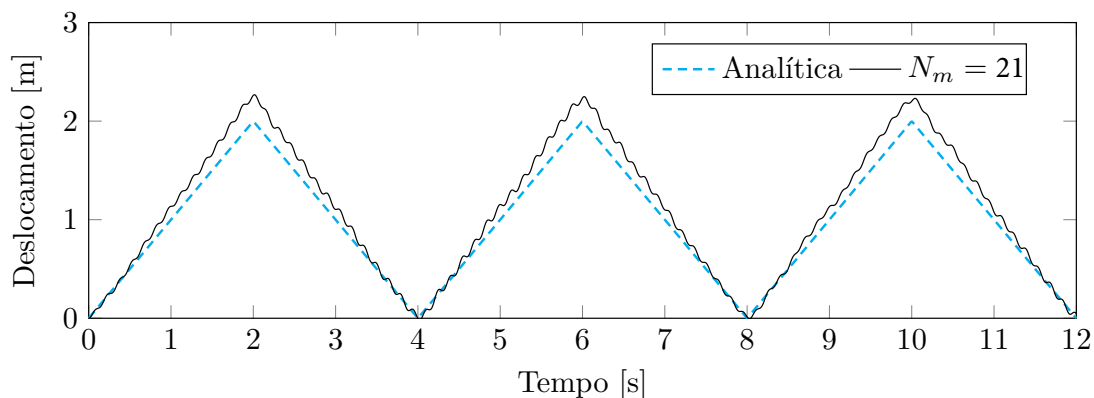


Figura 4.38: Deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  considerando 21 modos (MMC - 240)  
Fonte: Próprio Autor

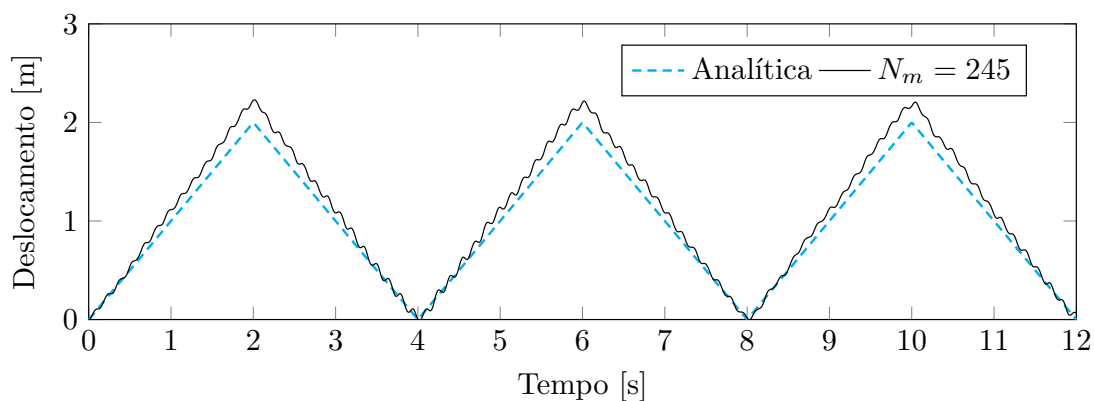


Figura 4.39: Deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  considerando 245 modos (MMC)  
Fonte: Próprio Autor

A resposta torna-se mais próxima da analítica apenas quando se utiliza a quase totalidade dos modos naturais presentes ( sistema tem um total de 268 graus de liberdade). Contudo, esta resposta não pôde ser melhorada a partir deste valor, provavelmente devido à imprecisão numérica.

Um experimento final com a formulação MMC foi realizado utilizando uma discretização menos refinada, com  $NEL|NPI = 40|64$ . Os deslocamentos no ponto  $\mathbf{P}_1$  para três conteúdos modais diferentes são mostrados nas figuras [4.40 - 4.42]. O passo de integração foi o mesmo, igual a  $10^{-3}$  segundos.

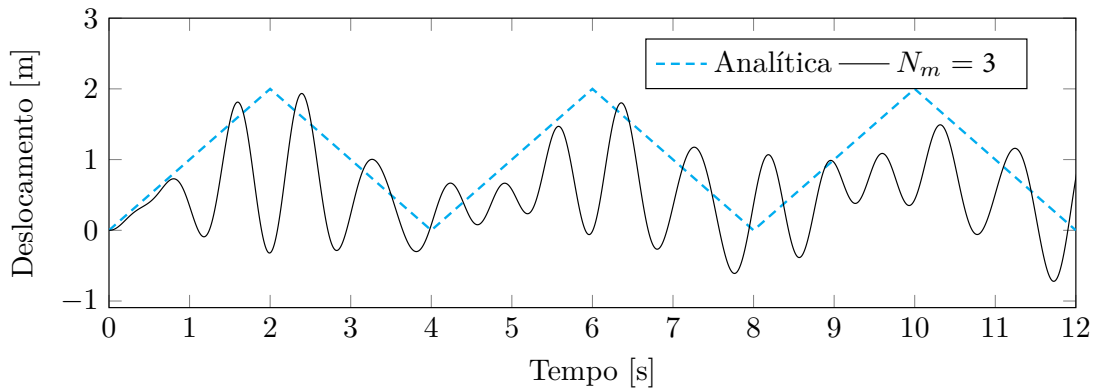


Figura 4.40: Deslocamento em  $P_1$  considerando três modos (MMC) - Malha II  
Fonte: Próprio Autor

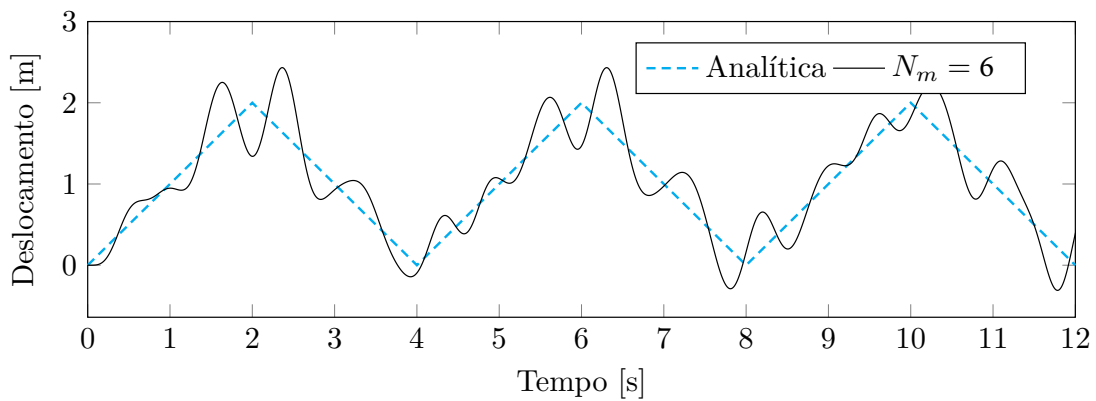


Figura 4.41: Deslocamento em  $P_1$  considerando seis modos (MMC) - Malha II  
Fonte: Próprio Autor

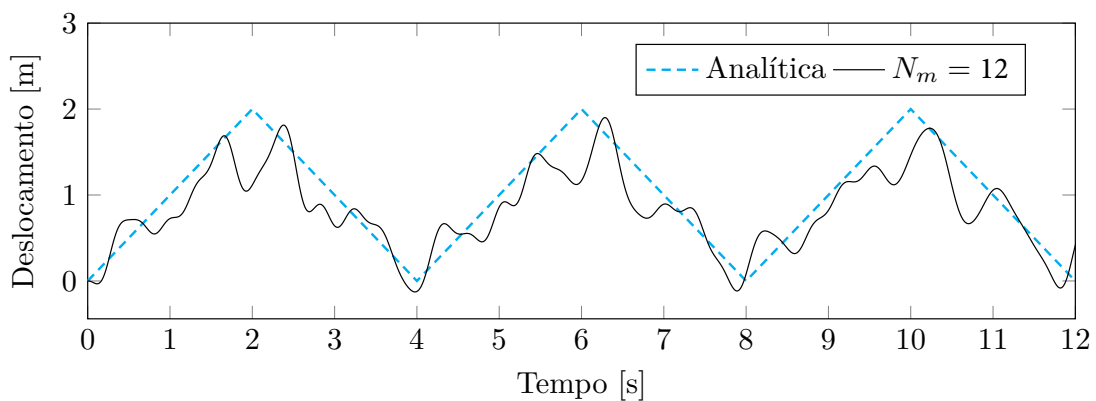


Figura 4.42: Deslocamento em  $P_1$  considerando doze modos (MMC) - Malha II  
Fonte: Próprio Autor

Embora a amplitude da resposta numérica obtida tenha melhorado, as curvas tornaram-se mais ruidosas devido à menor qualidade dos modos superiores. Isto sugere

uma conclusão adicional no sentido de que o MMC é muito sensível aos parâmetros da malha utilizada.

Neste ponto, já se pode inferir algumas conclusões importantes. Embora o método clássico para matrizes não simétricas seja simples, ele envolve a multiplicação do vetor de forças aplicadas pelo inverso da matriz de autovetores, equação (4.37). Daí resulta em um comportamento físico totalmente oposto ao esperado, pois há uma valorização de modos vibracionais elevados, numericamente mal representados, que prejudicam a resposta dinâmica, como mostrado neste exemplo.

#### 4.8.4 Exemplo II

Este segundo exemplo simula uma membrana curva com simetria circunferencial. Trata-se de um problema difícil, sob o ponto de vista numérico, pois não é periódico, envolve contornos não retilíneos e, nele, ocorre o fenômeno da dispersão física, pois a área varia ao longo da direção de propagação da onda radial.

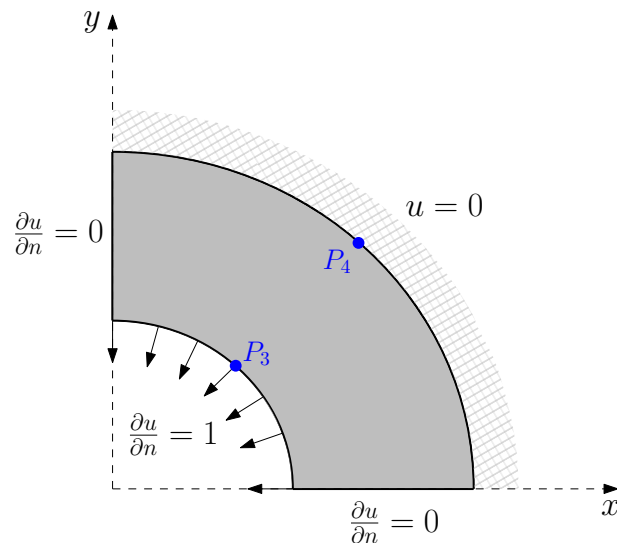


Figura 4.43: Geometria e Condições de contorno do Exemplo II  
Fonte: Próprio Autor

O raio menor é  $a = 1 \text{ m}$  e o raio maior é  $b = 5 \text{ m}$ .

Utilizando uma abordagem de integração direta no tempo, (CASTILLO, 2001) resolveu-o usando a MECDR e (SANTOS et al., 2025) utilizando a MECID. Aqui, há de se contribuir para o debate resolvendo-o através da formulação MECID-SM.

Os experimentos a seguir serão realizados utilizando uma malha fixa  $NEL|NPI = 160|357$ , os pontos que compõem esta malha são apresentados na figura [4.44].

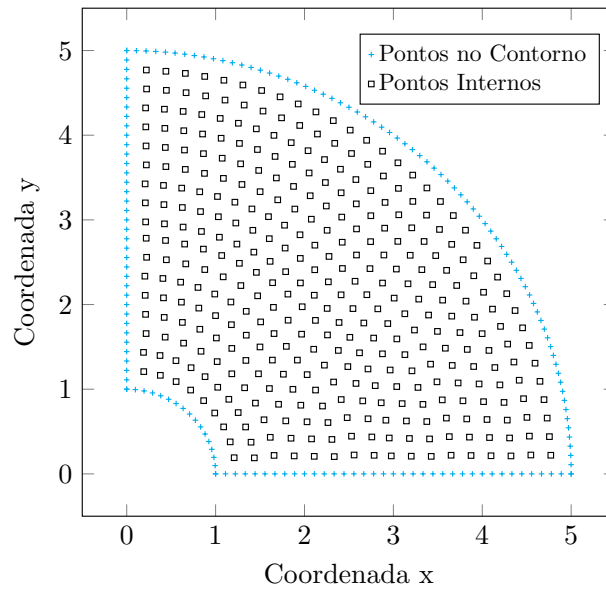


Figura 4.44: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 160|357$   
Fonte: Próprio Autor

Inicialmente, assim como no exemplo anterior, busca-se explorar a relação entre as amplitudes dos modos e a contribuição destes para a dinâmica do sistema. A figura [4.45] apresenta a amplitude dos cem primeiros modos.

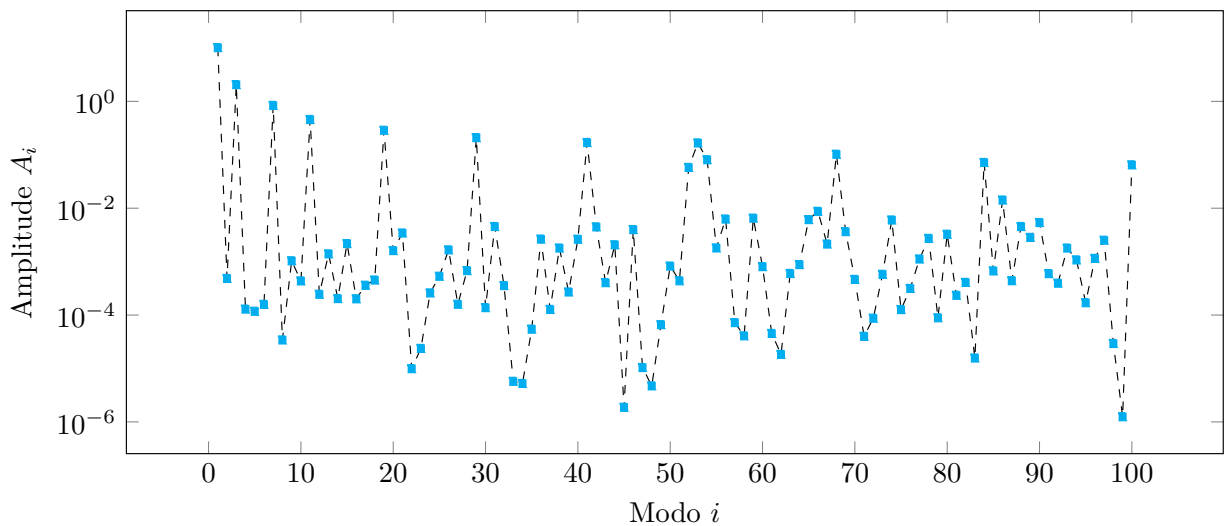


Figura 4.45: Amplitude dos 100 primeiros modos  
Fonte: Próprio Autor

A figura [4.46] a seguir apresenta um gráfico de barras com a contribuição relativa percentual dos 400 primeiros modos.

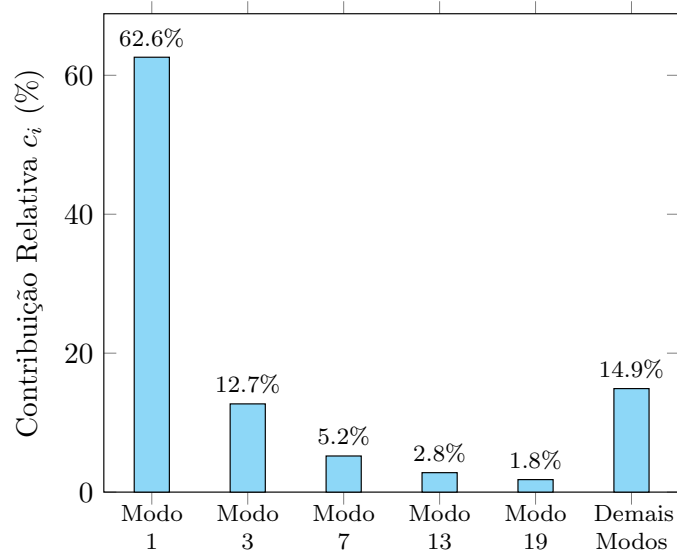


Figura 4.46: Contribuição percentual relativa  
Fonte: Próprio Autor

Nota-se, em conformidade com o exemplo anterior, a predominância do primeiro modo com relação aos demais e dos modos mais baixos em relação aos mais elevados. Uma última figura, figura [4.47], é destacada, mostrando a distribuição dos cem primeiros modos após a realização do procedimento de organização em função da amplitude relativa.

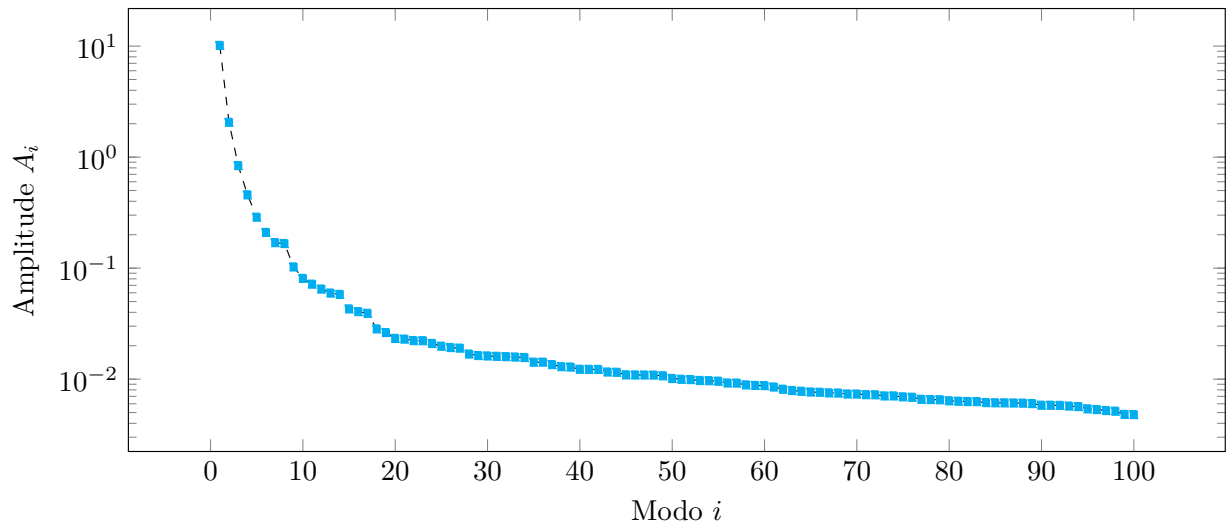


Figura 4.47: Amplitude dos cem primeiros modos  
Fonte: Próprio Autor

Em comparação com a organização típica, baseada apenas nos autovalores, a abordagem proposta prioriza os modos com amplitudes mais significativas. Isso resulta em uma

representação do movimento que inclui uma parcela maior da energia do sistema, o que é crucial para uma descrição mais precisa do comportamento dinâmico. Ao reorganizar os modos em função da amplitude, todos os cem primeiros modos têm amplitudes superiores a  $10^{-3}$ , garantindo que os modos mais relevantes em termos energéticos sejam considerados primeiramente. É claro que, conforme o número de modos considerados aumenta, a diferença entre as abordagens diminui.

O teste a seguir consiste em determinar os deslocamentos no ponto  $\mathbf{P}_3$  situado posição central do arco menor, enquanto aumenta-se o número de modos considerados. Utiliza-se de um passo de tempo  $\Delta t = 10^{-3}$  segundos e as condições iniciais são consideradas nulas. Os resultados numéricos de deslocamento foram obtidos para  $N_m = 3, 6, 9, 18$  e 40 são apresentados nas figuras [4.48 - 4.52] a seguir.

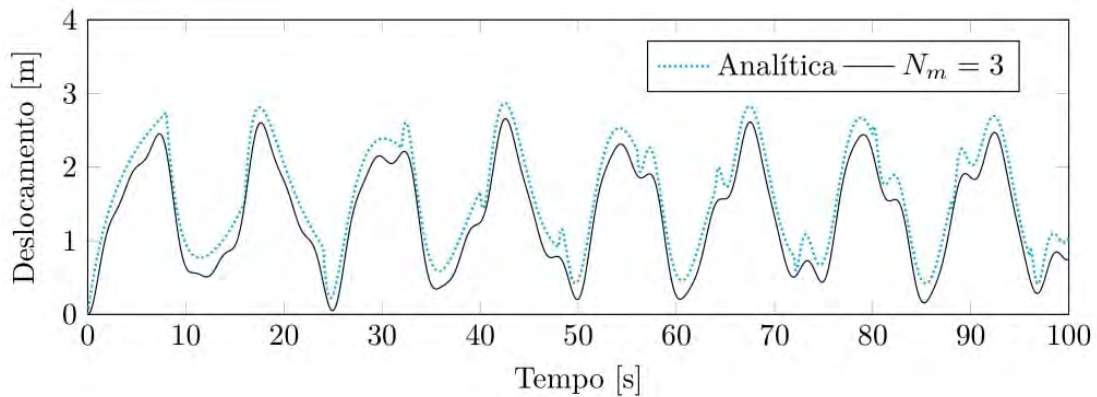


Figura 4.48: Deslocamento no ponto  $\mathbf{P}_3$  considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

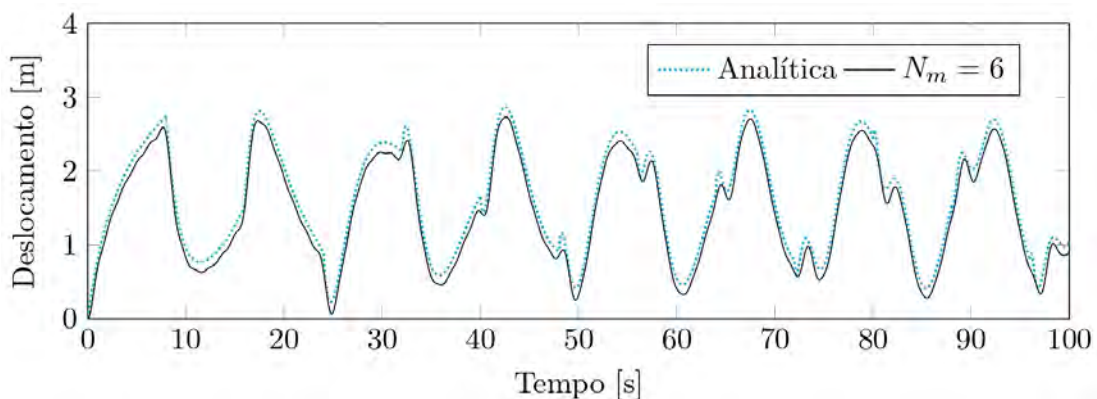


Figura 4.49: Deslocamento no ponto  $\mathbf{P}_3$  considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

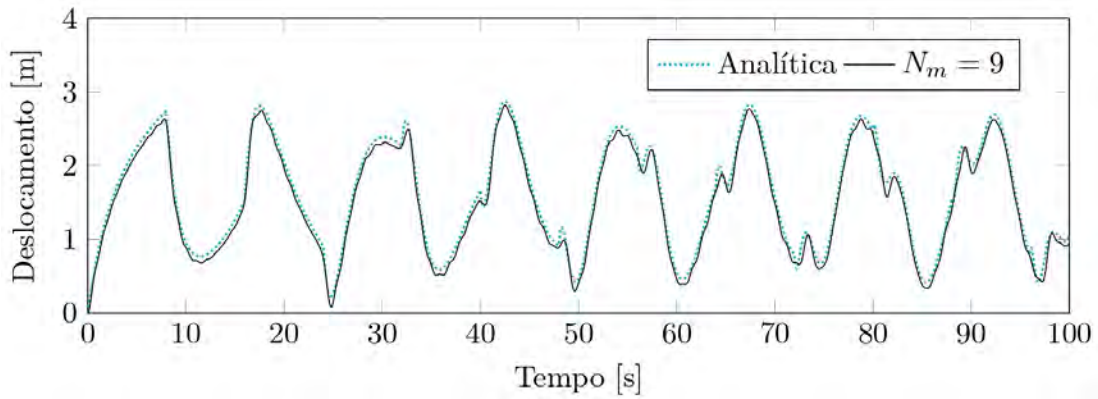


Figura 4.50: Deslocamento no ponto  $P_3$  considerando nove modos  
Fonte: Próprio Autor

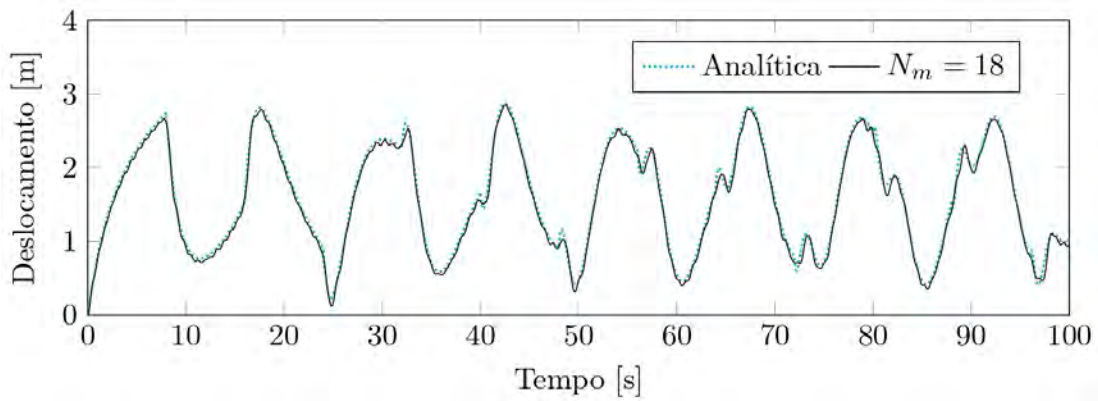


Figura 4.51: Deslocamento no ponto  $P_3$  considerando dezoito modos  
Fonte: Próprio Autor

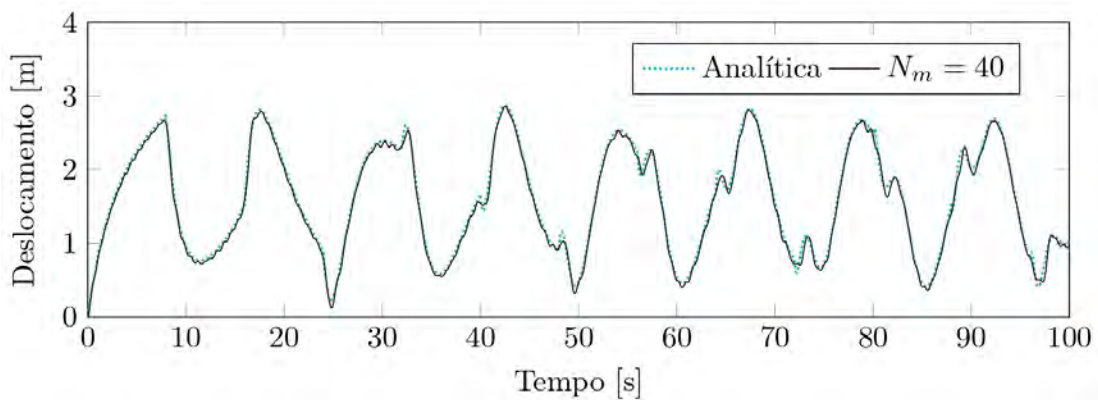


Figura 4.52: Deslocamento no ponto  $P_3$  considerando quarenta modos  
Fonte: Próprio Autor

Ao analisar as figuras [4.48 - 4.52], observa-se uma visível melhora na solução numérica conforme são adicionados modos na resposta dinâmica. Isto pode ser verificado

adicionalmente na curva de erro apresentada na figura [4.53].

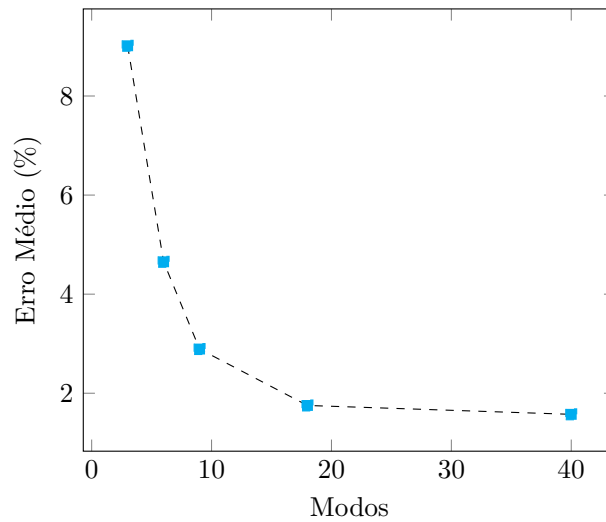


Figura 4.53: Erro médio na determinação do deslocamento em  $P_3$   
Fonte: Próprio Autor

A seguir, buscam-se os valores de tensão no ponto  $P_4$  localizado no centro do arco maior utilizando os mesmos parâmetros do teste anterior,  $NEL|NPI = 160|357$  e  $\Delta t = 10^{-3}$  s, para um número de modos crescente.

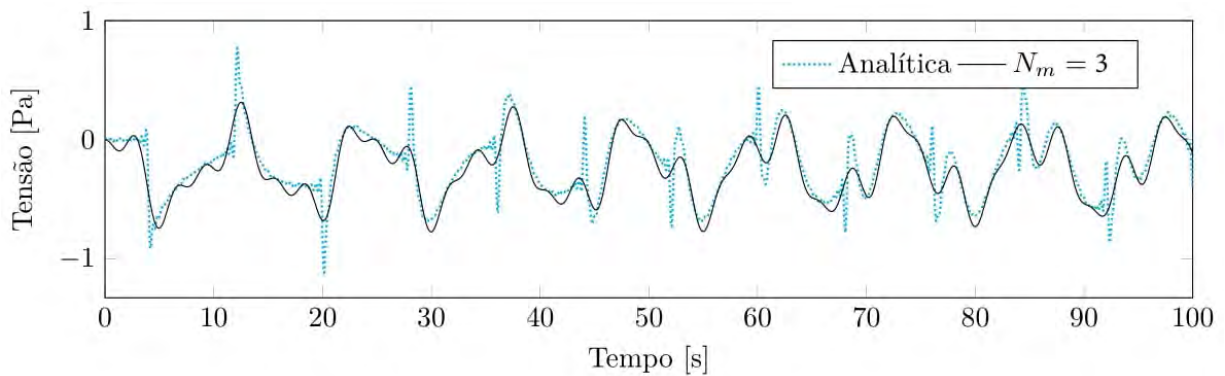


Figura 4.54: Tensão no ponto  $P_4$  considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

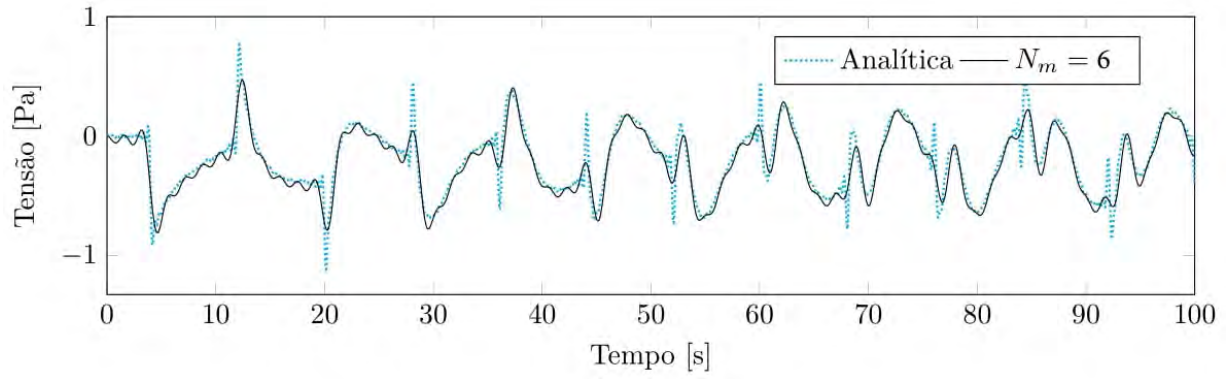


Figura 4.55: Tensão no ponto  $P_4$  considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

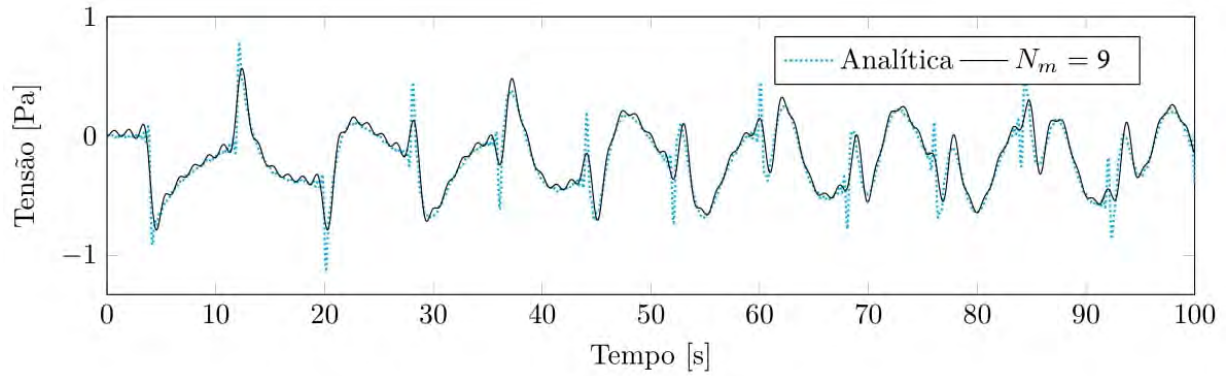


Figura 4.56: Tensão no ponto  $P_4$  considerando nove modos  
Fonte: Próprio Autor

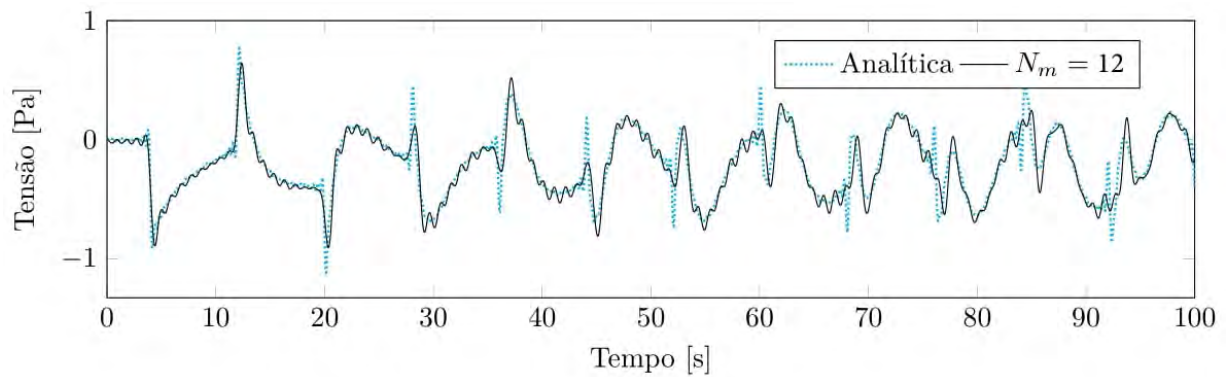


Figura 4.57: Tensão no ponto  $P_4$  considerando doze modos  
Fonte: Próprio Autor

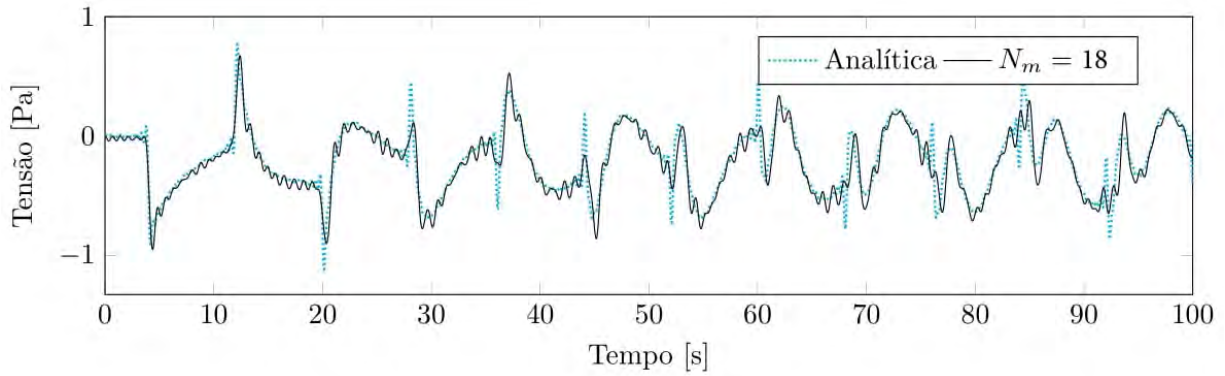


Figura 4.58: Tensão no ponto  $P_4$  considerando dezoito modos  
Fonte: Próprio Autor

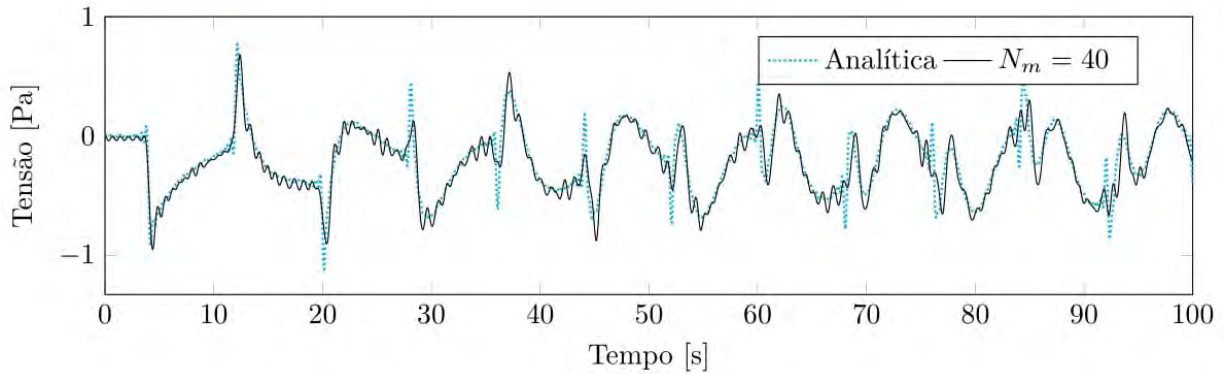


Figura 4.59: Tensão no ponto  $P_4$  considerando quarenta modos  
Fonte: Próprio Autor

Deve-se ressaltar que há uma diferença muito destacada na qualidade dos resultados obtidos para o potencial (ou deslocamento) na extremidade livre e as derivadas do potencial ou tensões normais no engaste. Os ruídos observados no cálculo das tensões não podem ser creditados à menor quantidade de graus de liberdade para o cálculo das tensões, mas sim à influência dos altos modos no cálculo destas grandezas, que conforme apontado anteriormente, são afetados pelas frequências mais altas excitadas pelo carregamento. Isto é confirmado na figura 4.60 que mostra um aumento do erro para  $N_m$  maior que 9.

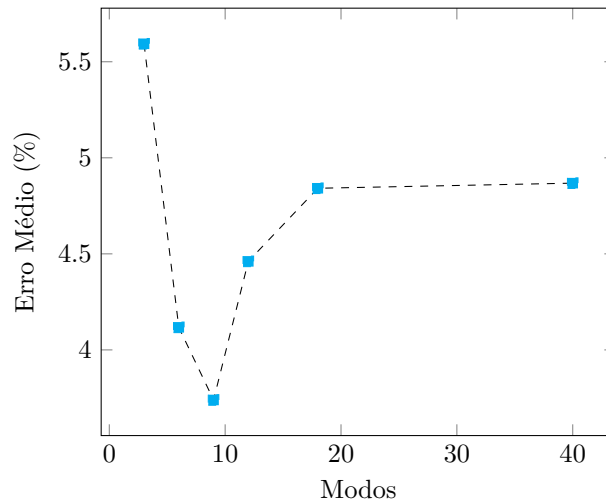


Figura 4.60: Erro médio na determinação da tensão em  $P_4$

Fonte: Próprio Autor

Visando verificar se é possível obter melhores resultados com um passo de tempo menor, um teste adicional é realizado. Considerando a mesma malha e  $N_m = 40$ , as tensões no ponto  $P_4$  são calculadas utilizando  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos. O resultado é apresentado na figura [4.61] a seguir.

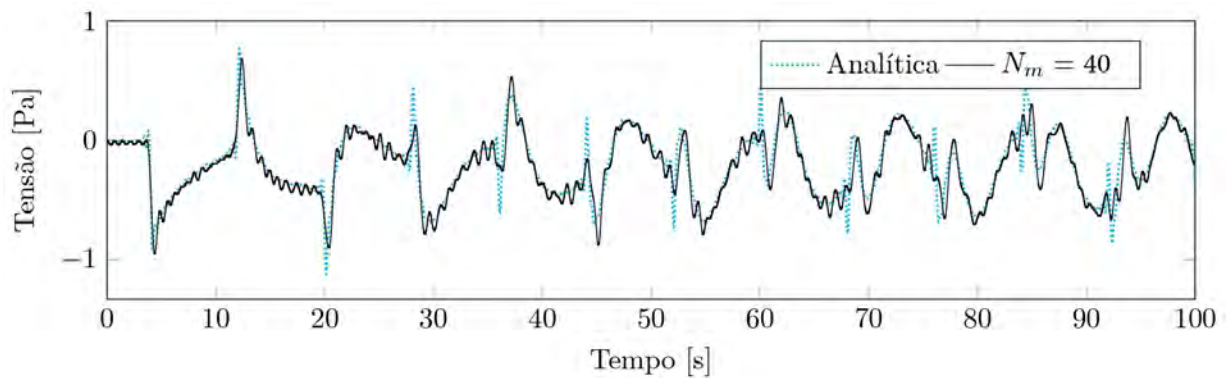


Figura 4.61: Tensão no ponto  $P_4$  considerando 400 modos ( $\Delta t = 10^{-4}$  s)

Fonte: Próprio Autor

Nota-se que não há alteração visível nos resultados se comparados com  $N_m = 40$  e  $\Delta t = 10^{-3}$  segundos. Uma melhoria pode ser possível com a adoção de uma malha mais refinada e com a inclusão de mais pontos internos, o que geraria uma melhor representação numérica do problema, aumentando a precisão no cálculo das altas frequências e, por consequência, dos deslocamentos e, principalmente, das tensões.

## 4.8.5 Exemplo III

No terceiro exemplo, resolve-se uma barra submetida a um carregamento periódico, em que a frequência de excitação é uma variável arbitrária e assumirá diversos valores de forma a analisar sua influência no comportamento da domínio. A geometria e as condições de contorno para este exemplo são expostas na figura [4.62].

As forças harmônicas, expressas em termos de funções seno ou cosseno, são de grande importância na Dinâmica das Estruturas. Isso se deve ao fato de que, não só as ações externas são frequentemente idealizadas como harmônicas, mas também porque uma força periódica arbitrária pode ser decomposta em uma série de funções harmônicas. Além disso, uma força aperiódica pode ser decomposta em uma distribuição contínua de componentes harmônicos (SORIANO, 2014).

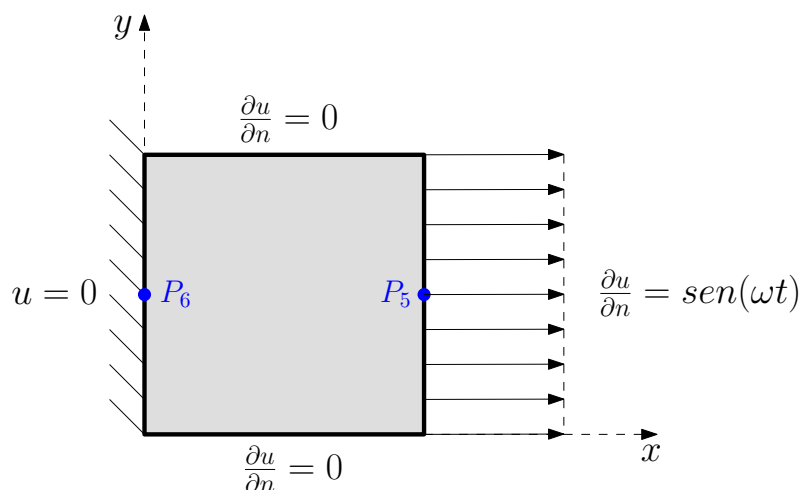


Figura 4.62: Geometria e Condições de contorno do Exemplo III  
Fonte: Próprio Autor

As condições iniciais são:

$$u(\mathbf{X}, 0) = 0; \quad \dot{u}(\mathbf{X}, 0) = 0.$$

Este exemplo foi também resolvido por Loeffler, Santos e Lara (2024), utilizando uma malha com  $NEL|NPI = 640|625$ , através da MECID com esquema de integração temporal (MECID-IT) baseado no algoritmo de Houbolt ( $\Delta t = 0.025$  segundos). Esta é então uma boa oportunidade de comparar a resposta aqui obtida, por meio da MECID com Superposição Modal, com o esquema tradicionalmente utilizado de integração passo a passo.

A priori, nos experimentos apresentados a seguir, utiliza-se uma malha composta por 320 elementos de contorno e 361 pontos interpolantes interiores distribuídos conforme a figura [4.63].

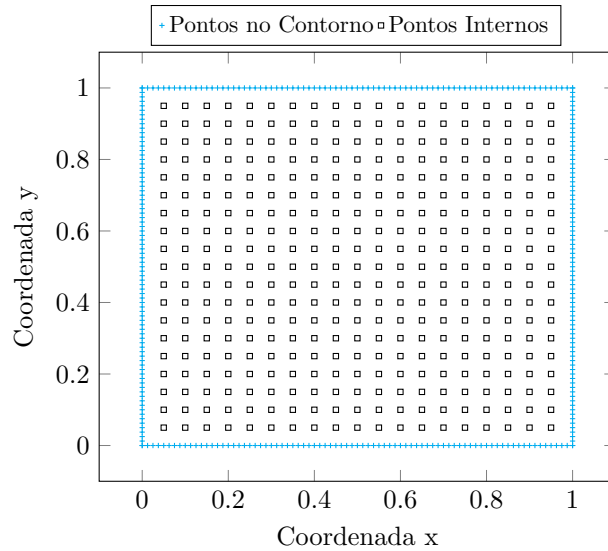


Figura 4.63: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 320|361$   
Fonte: Próprio Autor

Como neste exemplo a força de excitação é harmônica de frequência variável, a dinâmica de participação modal difere dos exemplos anteriores, com os modos mais excitados variando dependendo da frequência de excitação. Para demonstrar este fenômeno, foram calculadas as Amplitudes Relativas (equação 4.57) para os 200 (aproximadamente um terço do total de GDL do sistema, 605) primeiros modos deste exemplo. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras [4.64 - 4.68] a seguir.

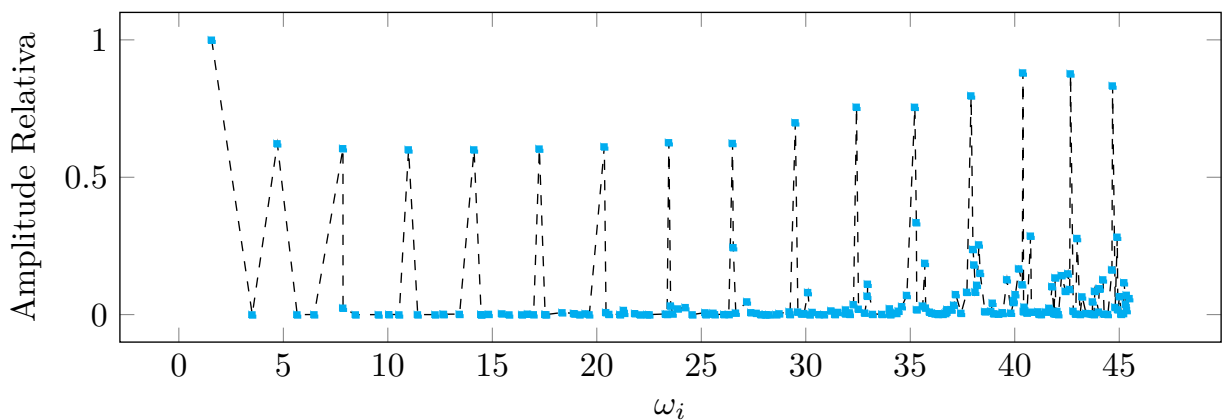


Figura 4.64: Amplitudes relativas para  $\omega = 1 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

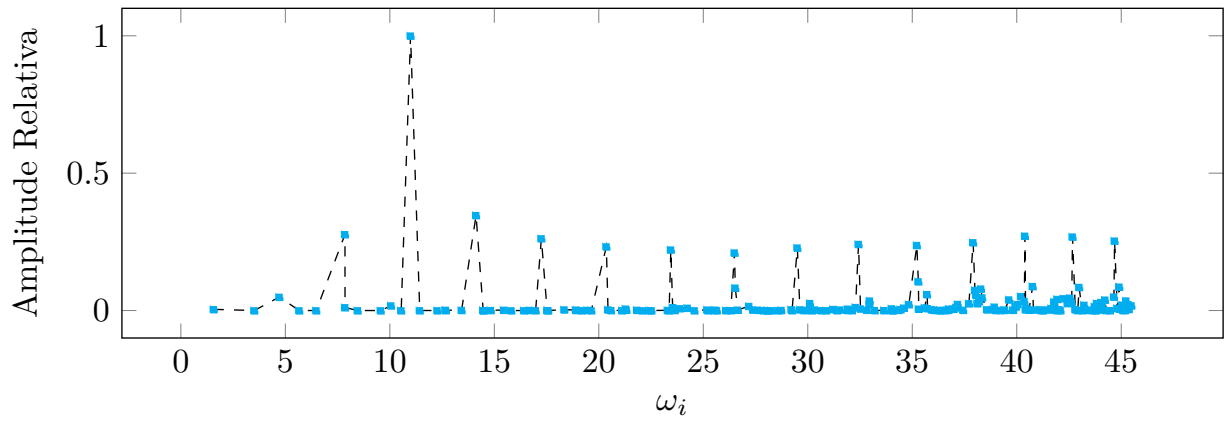


Figura 4.65: Amplitudes relativas para  $\omega = 10$  rad/s  
Fonte: Próprio Autor

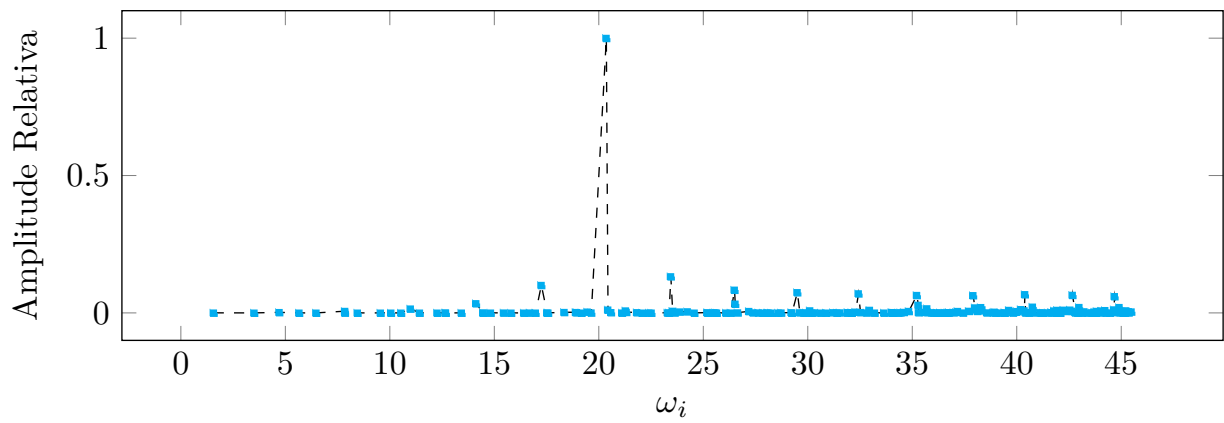


Figura 4.66: Amplitudes relativas para  $\omega = 20$  rad/s  
Fonte: Próprio Autor

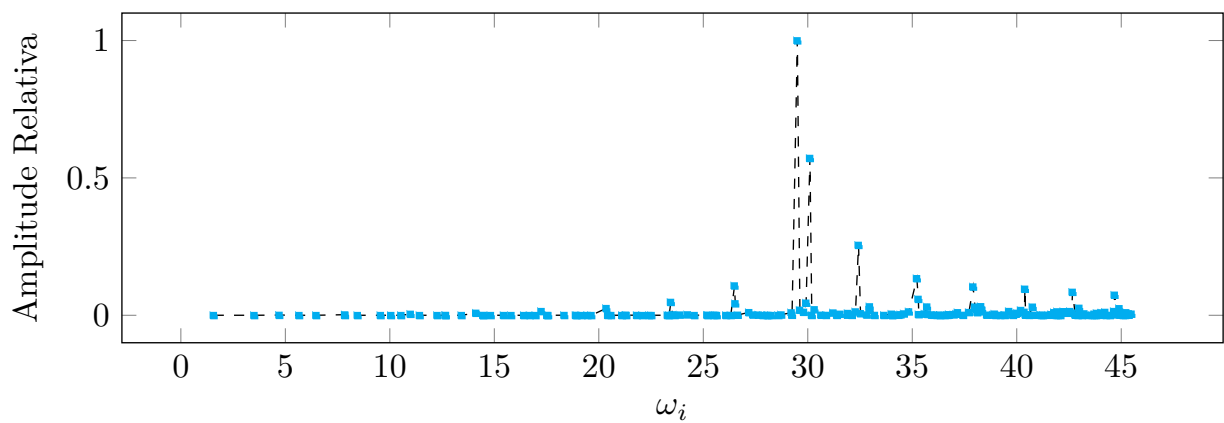


Figura 4.67: Amplitudes relativas para  $\omega = 30$  rad/s  
Fonte: Próprio Autor

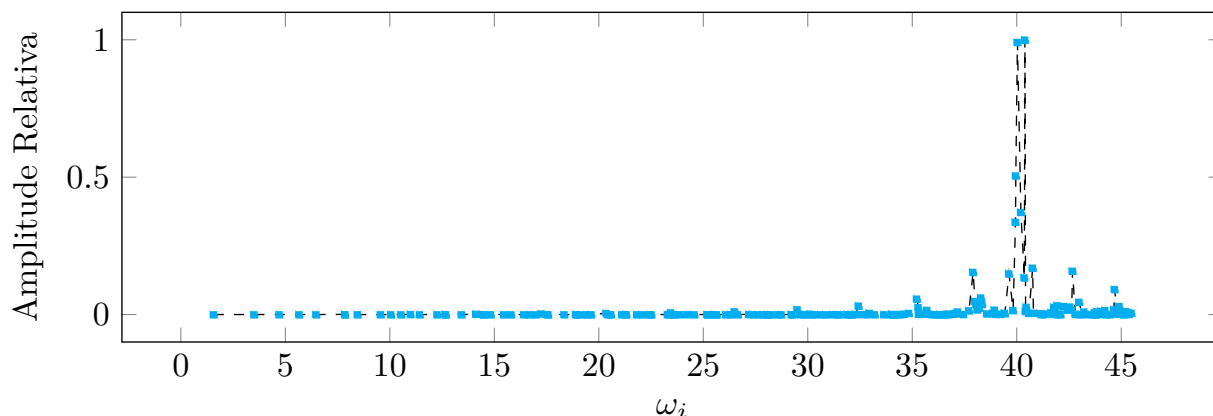


Figura 4.68: Amplitudes relativas para  $\omega = 40 \text{ rad/s}$   
 Fonte: Próprio Autor

Fica claro que, para cada frequência de excitação  $\omega$  testada, os modos mais excitados centram-se nela, indicando sua maior participação na composição do movimento. Adicionalmente, observe que os 200 primeiros modos incluem frequências até aproximadamente  $45 \text{ rad/s}$ . Assim, caso a excitação tenha frequência superior, como  $50 \text{ rad/s}$ , por exemplo, é provável que, caso apenas modos entre os 200 primeiros sejam considerados, a resposta tenha baixa qualidade. Neste caso, seria necessário aumentar o intervalo de modos a serem considerados para a composição da resposta. Entretanto, como demonstrado anteriormente, os modos superiores são de difícil representação no modelo discreto, dificultando a melhoria dos resultados.

Ao iniciar os experimentos, entretanto, mesmo os resultados para a frequência de  $1 \text{ rad/s}$  selecionando os modos entre o primeiro terço (200 modos) apresentou baixa qualidade. Os modos foram então selecionados entre os 100 primeiros (que abrangem frequências naturais até  $34 \text{ rad/s}$ ). Estes, mais bem representados numericamente, geraram os resultados a seguir.

Os valores de deslocamento no centro da aresta direita, ponto  $P_6$ , foram determinados para uma frequência  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  e passo de tempo  $\Delta t = 10^{-3}$ , considerando um número crescente de modos e os resultados são apresentados nas figuras [4.69 - 4.72].

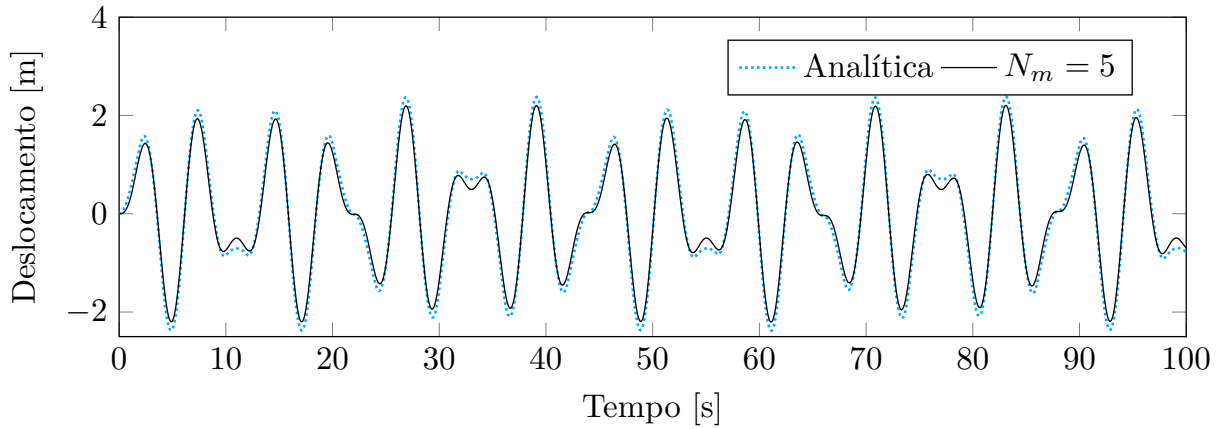


Figura 4.69: Deslocamento em  $P_6$  considerando cinco modos  
Fonte: Próprio Autor

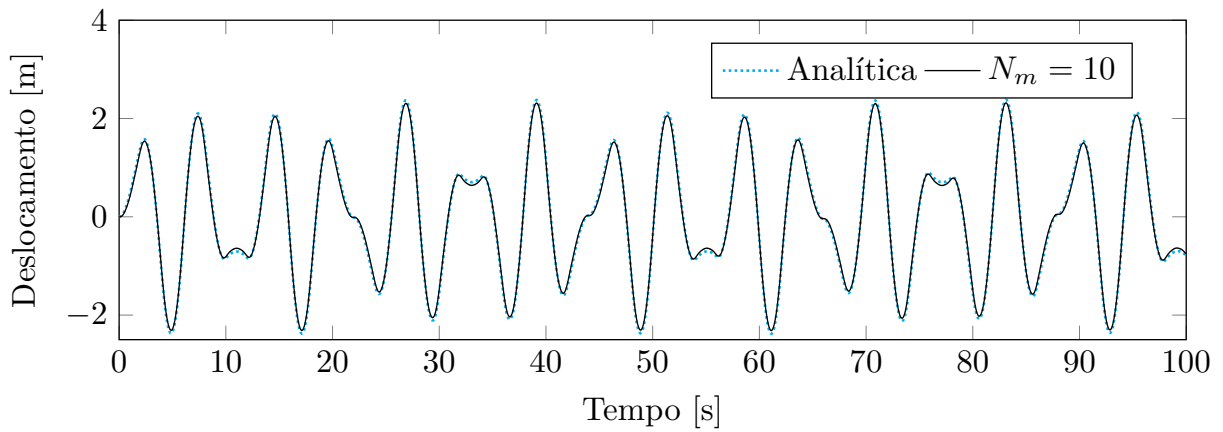


Figura 4.70: Deslocamento em  $P_6$  considerando dez modos  
Fonte: Próprio Autor

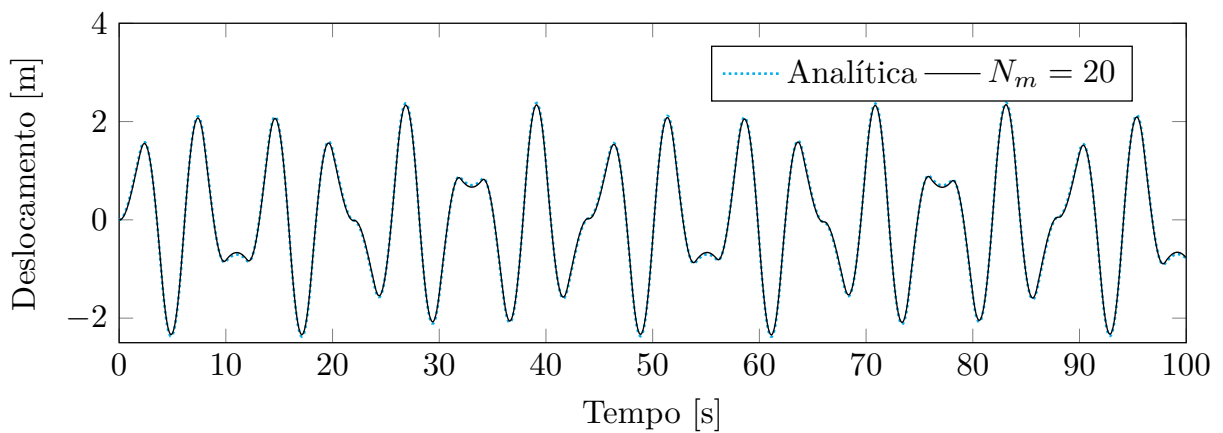


Figura 4.71: Deslocamento em  $P_6$  considerando vinte modos  
Fonte: Próprio Autor

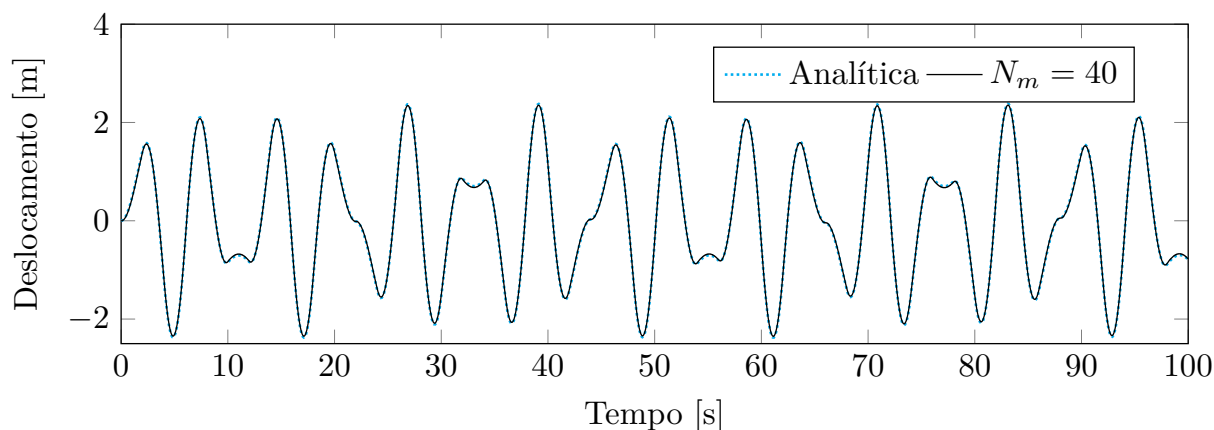


Figura 4.72: Deslocamento em  $P_6$  considerando quarenta modos  
Fonte: Próprio Autor

É possível observar uma melhora nos resultados conforme são adicionados modos. Todavia, devido à proximidade entre a resposta numérica e a resposta analítica, mesmo considerando apenas 10 modos, fica difícil comparar o grau de melhora apenas observando as figuras apresentadas. Assim, um gráfico com o erro médio percentual, equação (4.64), em função do número de modos considerados é apresentado na figura [4.73] permitindo uma comparação mais detalhada.

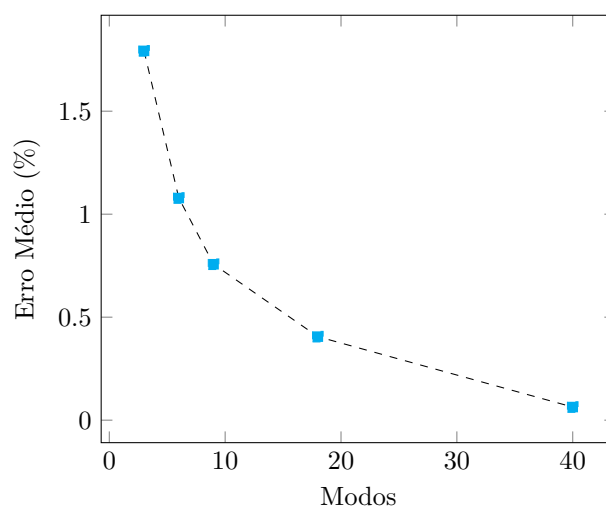


Figura 4.73: Erro médio na determinação do deslocamento em  $P_6$   
Fonte: Próprio Autor

Os próximos experimentos foram realizados considerando fixos: o número de modos considerados ( $N_m = 40$ ) e o passo de tempo ( $\Delta t = 10^{-3}$  segundos); e, variando a frequência da carga de excitação. Foram observados alguns fenômenos vibracionais e os resultados

obtidos foram comparados com aqueles alcançados por [Loeffler, Santos e Lara \(2024\)](#) ou pelo próprio autor, utilizando os mesmos parâmetros de simulação destes.

Os resultados de deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando uma frequência  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  são exibidos nas Figuras [4.74] e [4.75].

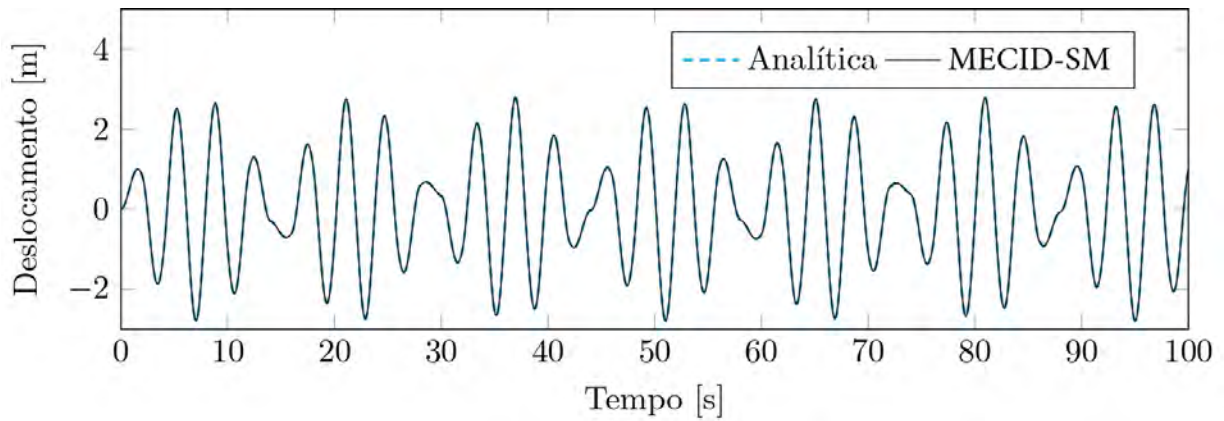


Figura 4.74: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando  $\omega = 2 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

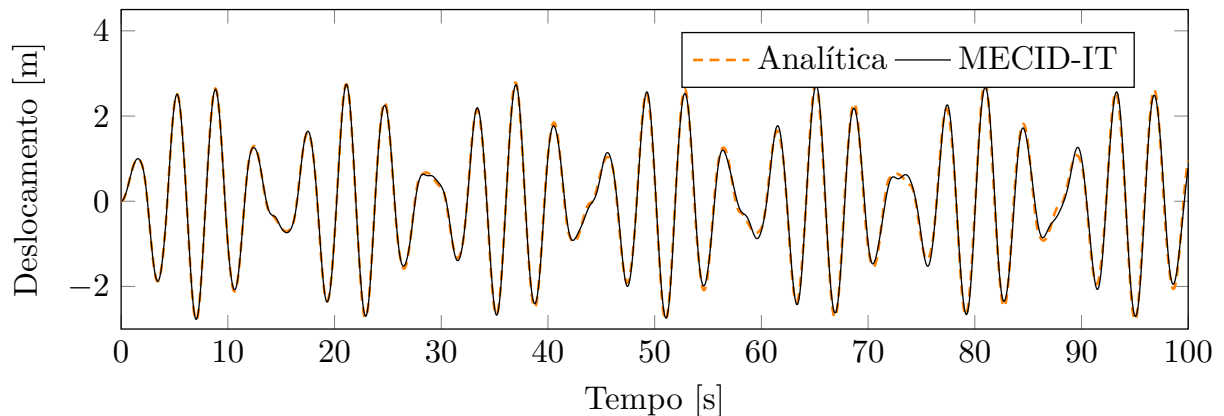


Figura 4.75: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando  $\omega = 2 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

Observa-se uma satisfatória caracterização da resposta ao longo do tempo em ambos os casos. O uso de passos de tempo reduzidos pela MECID-SM possibilitou a redução do amortecimento fictício, de forma que não se observa a redução da amplitude com o avanço no tempo, como observado nos resultados obtidos através da MECID-IT.

Para a velocidade angular de  $4 \text{ rad/s}$ , além do efeito de redução de amplitude máxima, que podem ser identificados mais claramente nos modos mais altos, fora dos instantes iniciais, nota-se também o fenômeno de alongamento do período, nos resultados alcançados

por intermédio da MECID-IT.

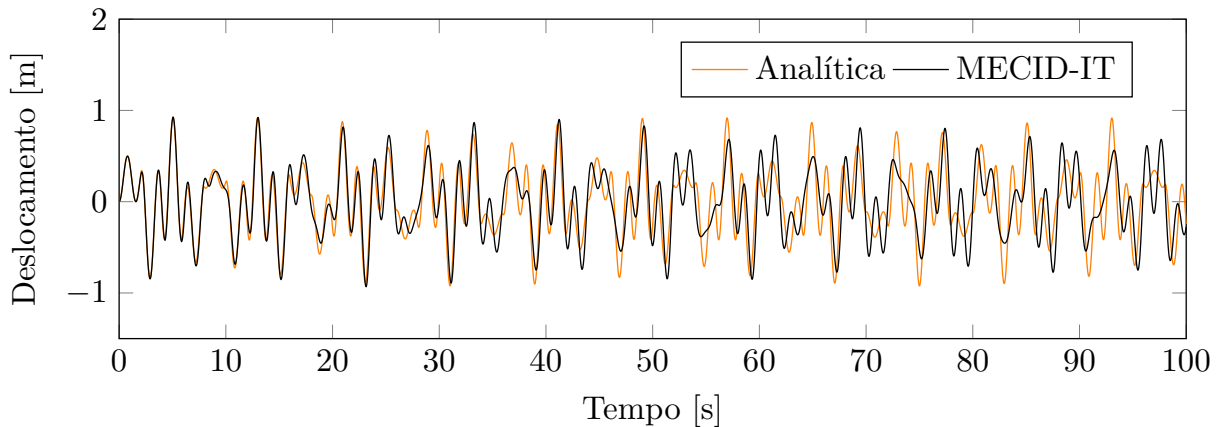


Figura 4.76: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 4 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

Esses fenômenos ocorrem devido ao amortecimento fictício do esquema de Houbolt e podem ser mitigados pela redução do passo de tempo. A técnica MECID-IT apresenta instabilidade quando se tenta utilizar um intervalo de tempo menor que  $10^{-2}$  segundos (SANTOS et al., 2025). No entanto, com a técnica MECID-SM, é possível adotar um passo de integração menor, o que reduz o amortecimento fictício e melhora a qualidade da solução numérica.

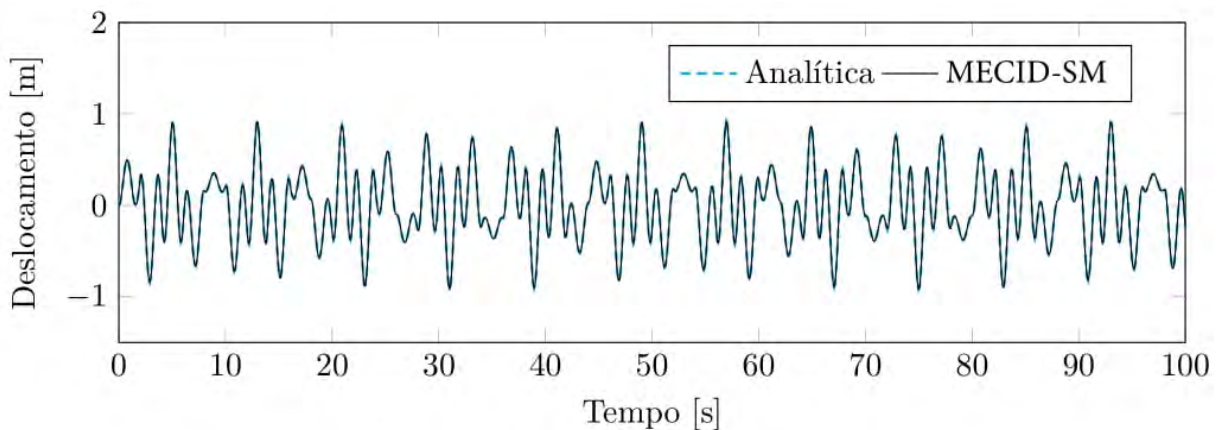


Figura 4.77: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 4 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

Nas figuras [4.78] e [4.79] apresenta-se o comportamento do sistema para a velocidade angular igual a  $5 \text{ rad/s}$ , considerando as duas formulações. Nesta condição, surge um fenômeno interessante na análise vibracional: o batimento.

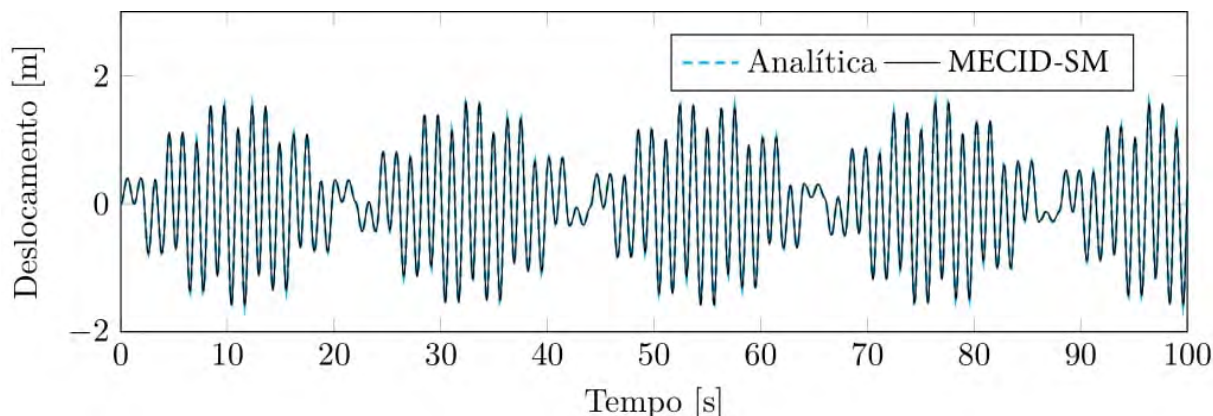


Figura 4.78: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 5 \text{ rad/s}$   
 Fonte: Próprio Autor

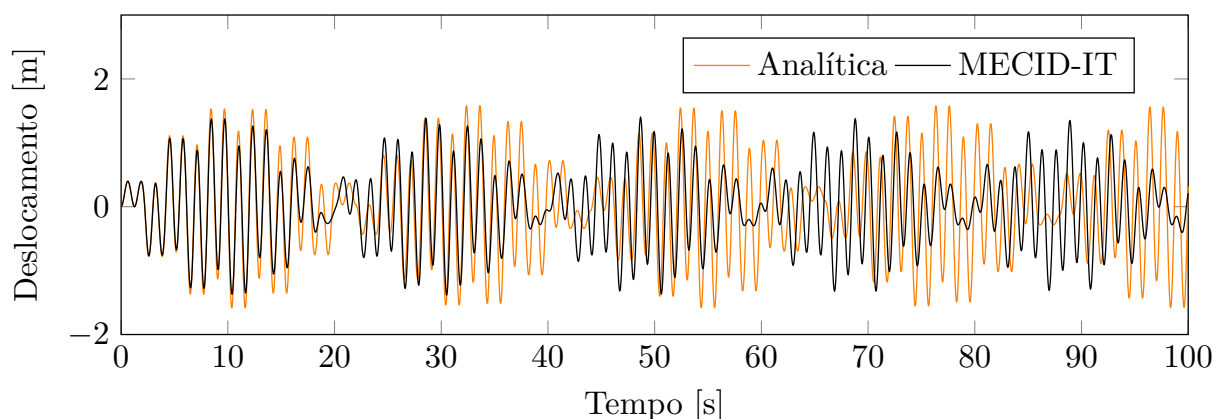


Figura 4.79: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 5 \text{ rad/s}$   
 Fonte: Adaptado de Loeffler, Santos e Lara (2024)

O fenômeno de batimento surge quando duas ondas com frequências ligeiramente diferentes interferem entre si, resultando em uma oscilação cuja amplitude varia periodicamente ao longo do tempo. O batimento é resultado da superposição construtiva e destrutiva das ondas, alternando entre reforço e cancelamento das amplitudes conforme elas se deslocam no tempo. Essa variação manifesta-se como uma "batida", perceptível como uma pulsação periódica, cuja frequência corresponde à diferença entre as frequências das duas ondas originais. No exemplo em questão, o período do batimento é:

$$\tau_B = \frac{2\pi}{\omega - \omega_2} = \frac{2\pi}{5 - (3\pi/2)} \approx 21.67 \text{ s.}$$

Loeffler, Santos e Lara (2024) obtiveram uma resposta numérica com período do batimento igual à 21.65 s. Este valores está próximo ao batimento da solução analítica,

mas apresenta uma leve defasagem. Os autores discutem que esta defasagem pode ser explicada por erros de aproximação numérica e pela presença do amortecimento fictício do esquema de Houbolt, que altera a frequência natural, resultando em uma frequência amortecida menor. O amortecimento prolonga o período de vibração, fazendo com que a resposta não seja completamente periódica. Mais uma vez, a adoção da formulação MECID-SM, e a possibilidade de adotar passos de tempo reduzidos possibilita a eliminação destes fenômenos de dispersão numérica.

O mesmo fenômeno do batimento é observado quando se considera uma frequência de excitação  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ .

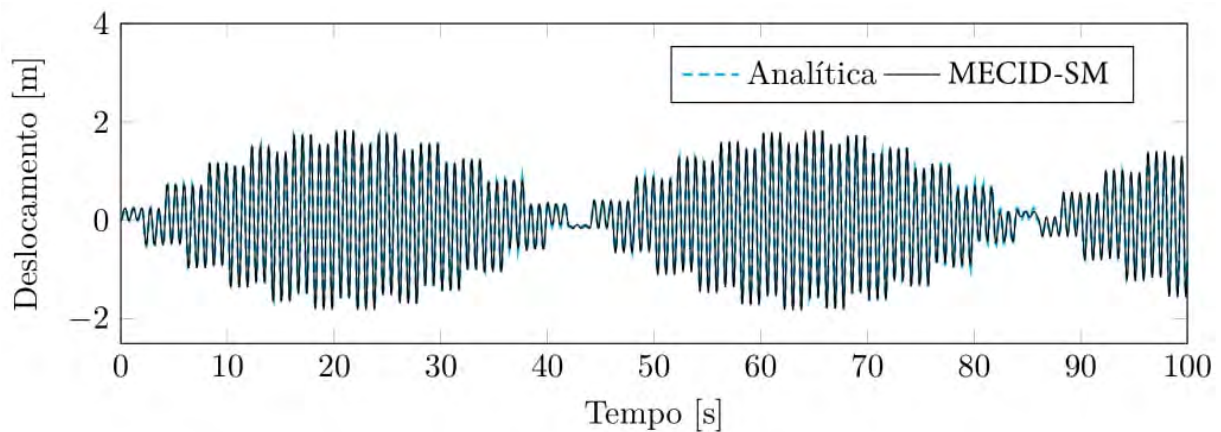


Figura 4.80: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 8 \text{ rad/s}$   
Fonte: Próprio Autor

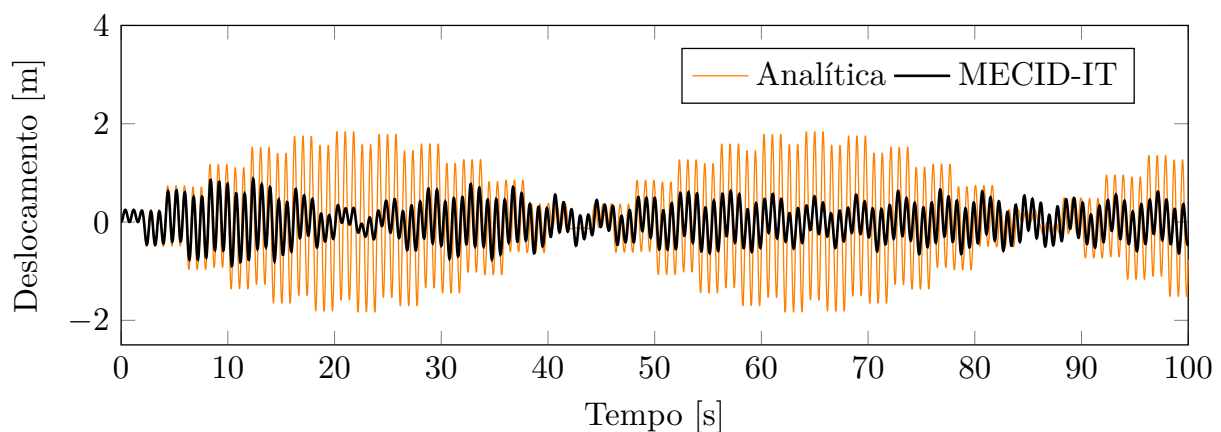


Figura 4.81: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 8 \text{ rad/s}$   
Fonte: Adaptado Loeffler, Santos e Lara (2024)

Observa-se uma distinção entre os valores numérico e analítico nos resultados de Loeffler, Santos e Lara (2024). Diferença esta, que é creditada, mais uma vez, ao fato

de que o passo empregado possui amortecimento fictício não desprezível, levando a uma atenuação da contribuição dos altos modos. A precisão dos resultados da formulação MECID-SM é mais satisfatória, como evidencia a figura [4.82]. Esta figura apresenta a resposta nos primeiros 45 segundos, permitindo a constatação de que a resposta numérica está, de fato, próxima em valores e em fase com a resposta analítica.

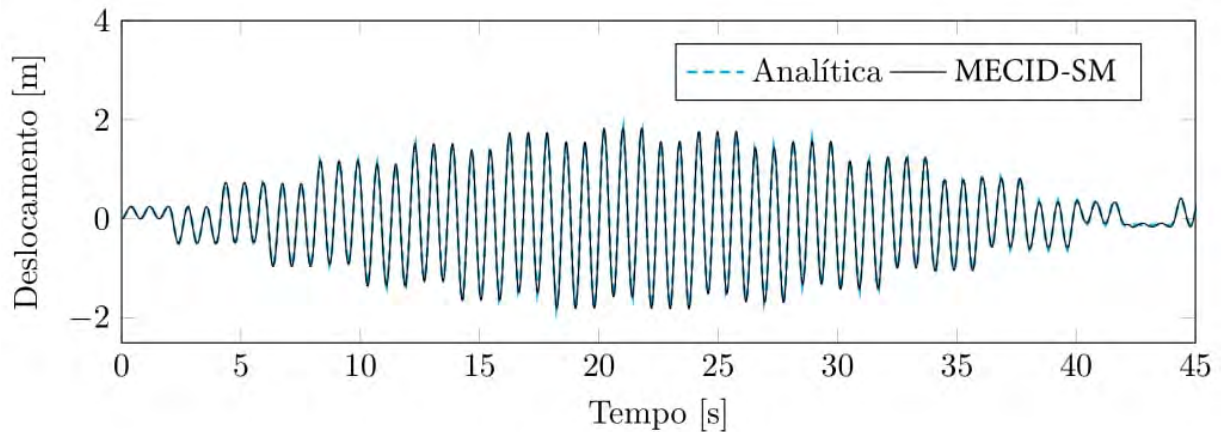


Figura 4.82: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando  $\omega = 8 \text{ rad/s}$  ( $t \in [0, 45]$ )

Fonte: Próprio Autor

Quando as frequências de excitação são medianas, as baixas frequências naturais induzem períodos vibracionais relativos ao movimento livre que são muito longos em comparação ao período da excitação e não se fazem, sentir nos primeiros instantes da resposta, para a velocidade angular de excitação igual a  $20 \text{ rad/s}$  vide figuras [4.83] e [4.84]. Assim, as oscilações são governadas claramente pela frequência da excitação. O período de resposta é de  $0,314\text{s}$ , conforme se pode observar. Também mostram amplitudes reduzidas, cujos valores numéricos são concordantes com a solução analítica nos instantes iniciais da resposta.

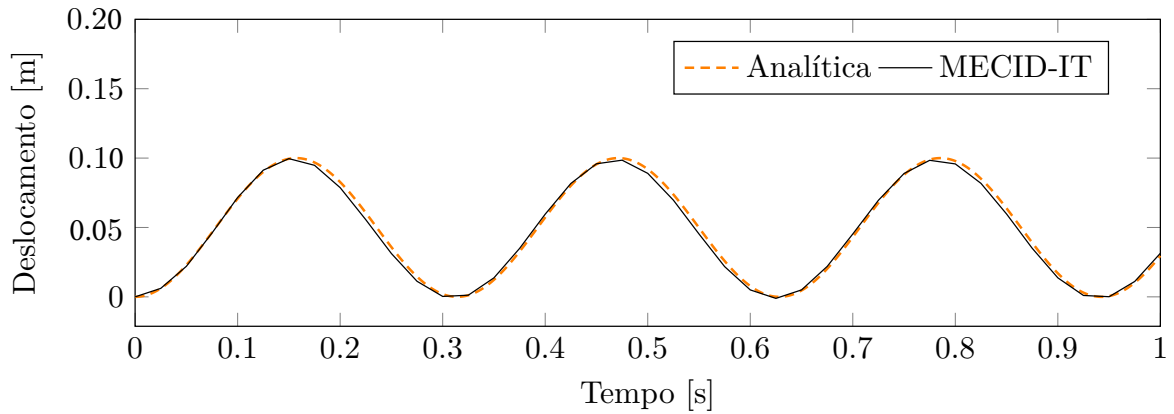


Figura 4.83: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  ( $t \in [0, 1]$ )  
Fonte: Adaptado de Loeffler, Santos e Lara (2024)

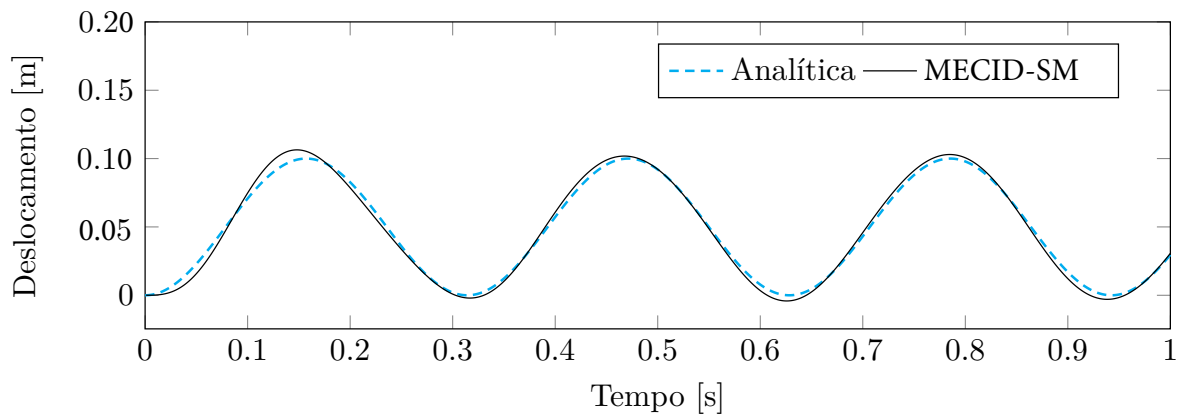


Figura 4.84: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  considerando  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  ( $t \in [0, 1]$ )  
Fonte: Próprio Autor

Uma experiência adicional foi realizada com passo de tempo menor,  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos, foi conduzida e os resultados não mostram melhoria conforme exposto na figura [4.85].

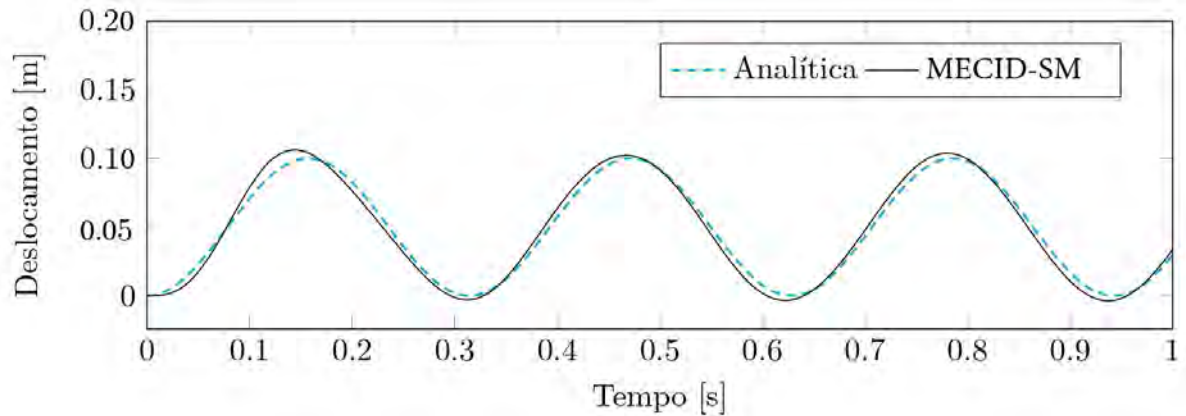


Figura 4.85: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  ( $t \in [0, 1]$ ) -  $\Delta t = 10^{-4}$   
 Fonte: Próprio Autor

Estes resultados para os instantes iniciais, entretanto, não refletem a precisão alcançada pela formulação numérica, como mostrado nas figuras [4.86] e [4.87] a seguir, que apresentam os resultados nos cem primeiros segundos para  $\Delta t = 10^{-3}$  e  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos, respectivamente. Nestas figuras fica evidente a baixa qualidade da resposta para este conjunto de parâmetros.

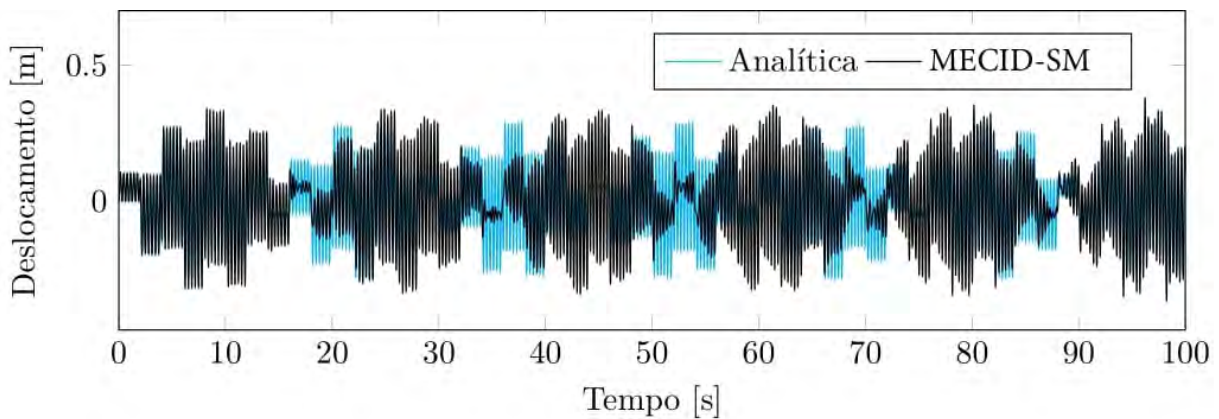


Figura 4.86: Deslocamento em  $P_6$  nos primeiros 100 segundos para  $\Delta t = 10^{-3}$   
 Fonte: Próprio Autor

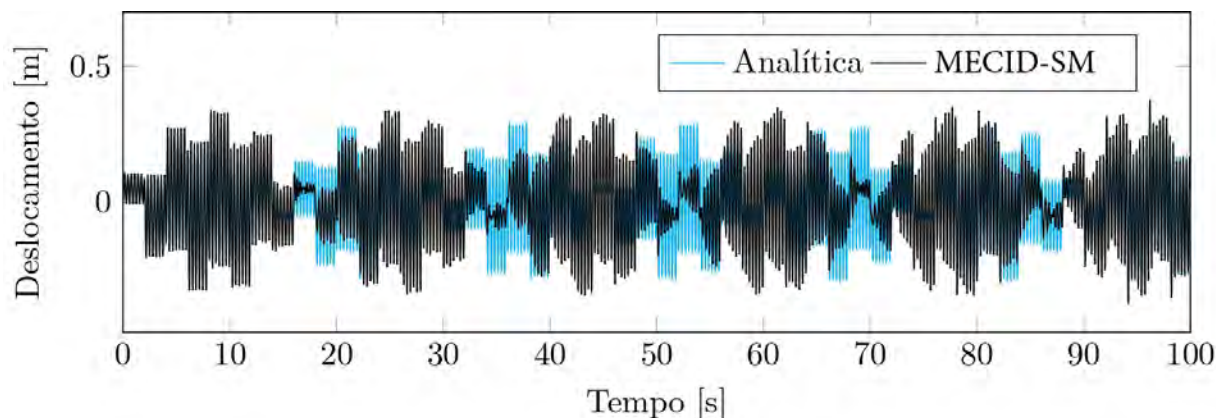


Figura 4.87: Deslocamento em  $P_6$  nos primeiros 100 segundos para  $\Delta t = 10^{-4}$   
 Fonte: Próprio Autor

Uma experiência adicional, utilizando uma malha mais refinada,  $NEL|NPI = 640|625$ , considerando um total de 100 modos entre os 200 primeiros, e, um passo temporal  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos, foi realizada. Os resultados são apresentados na figura [4.88] e mostram que houve melhora, principalmente nos instantes iniciais, nos quais o período da resposta numérica está melhor ajustado à resposta analítica. Entretanto, os resultados ainda são insatisfatórios nos instantes avançados, nos quais a resposta numérica ainda aparece com frequência e amplitude diferentes da resposta analítica.

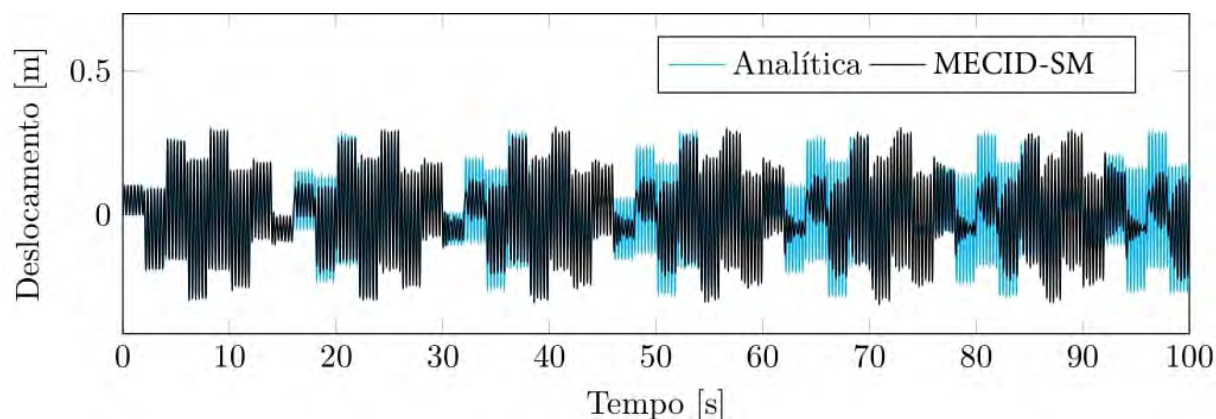


Figura 4.88: Deslocamento em  $P_6$  considerando  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  ( $NEL|NPI = 640|625$ )  
 Fonte: Próprio Autor

No procedimento de integração direta observa-se uma defasagem entre a resposta analítica e a numérica que se deve, principalmente, ao amortecimento fictício do esquema Houbolt, que alonga os períodos. No procedimento de superposição modal a suspeita recai no erro numérico cometido no cálculo das frequências mais altas, erro este que se

propaga na composição modal da resposta. A obtenção de resultados mais precisos com a MECID-SM depende da adoção de malhas mais refinadas e de um maior número de pontos internos. Pois, dessa forma, possibilita-se uma melhor caracterização numérica das propriedades do sistema e, conseqüentemente, uma melhoria na determinação dos modos.

#### 4.8.6 Exemplo IV

Para demonstrar a robustez e versatilidade da formulação em estudo, este exemplo complementar analisa um problema dependente do tempo diferente: a difusão de calor transiente em meios bidimensionais, isotrópicos e homogêneos. A equação que governa esse tipo de problema é uma equação parabólica, que descreve a evolução da temperatura no meio ao longo do tempo e do espaço. Considerando a ausência de fontes, a equação pode ser escrita da seguinte forma (BERGMAN et al., 2011):

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \dot{T} \quad (4.66)$$

O potencial escalar  $T = T(\mathbf{X}, t)$  representa a temperatura e  $\alpha$  é a difusividade térmica do material. O coeficiente  $\alpha$  no aço tem valores na ordem de  $10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s (GASKELL; LAUGHLIN, 2017), o que implica um alto valor para a inércia térmica, justificando que o fenômeno de difusão transiente é caracterizado pela transferência lenta de energia de partes com maior potencial em direção a regiões de menor potencial.

Em comparação, o valor da velocidade de propagação de ondas longitudinais em aços é por volta de 6000 m/s (MORO; FARINA; ROSSI, 1980; KENNEDY, 2015); o que, ao ser elevado ao quadrado, resulta em  $3.6 \times 10^7$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. Portanto, ondas acústicas se propagam mais rápido em comparação com ondas térmicas. A energia proveniente de ações externas, associada a derivadas de segunda ordem no tempo, pode causar gradientes severos que induzem descontinuidades no campo de variáveis. Isso produz outros fenômenos além de atingir simplesmente um estado estacionário, como movimentos vibratórios, periódicos ou não, situações de impacto e ressonância.

No entanto, a equação de difusão transiente também possui suas peculiaridades. Diferentemente da equação da onda que possui comportamento hiperbólico, a natureza parabólica da equação de calor transiente implica que as soluções tendem a suavizar variações iniciais ao longo do tempo, resultando em um comportamento difusivo, onde

as perturbações térmicas se espalham e se dissipam, mas em que uma ação aplicada à distância já é sentida em todo o domínio, embora de maneira reduzida. Apesar de serem mais suaves, problemas de impacto térmico e grandes gradientes de temperatura podem exigir certa robustez dos esquemas de solução numérica. De fato, o fluxo de energia formado durante o processo tende a se estabilizar, atingindo o equilíbrio, o que caracteriza os chamados estados ou regimes estacionários. O período entre o momento da aplicação de ações externas e a nova posição de equilíbrio estacionário é chamado de estágio transitório.

Para o problema térmico, os autovetores são encontrados considerando o caso em que o sistema não está sujeito à carga térmica externa e que a variável de campo para uma resposta livre é assumida como  $T(\mathbf{X}, t) = T(\mathbf{X})e^{-\lambda t}$ , onde  $T(\mathbf{X})$  é a amplitude espacial da resposta estacionária do sistema para uma dada constante de decaimento modal  $\lambda$ . Os autovalores indicam as taxas de decaimento ou crescimento exponencial das temperaturas ao longo do tempo ( $\lambda_i$ ). Cada autovetor  $\{\phi_i\}$  associado a um destes autovalores descreve um padrão espacial específico de distribuição de temperatura.

Neste exemplo, busca-se o perfil de temperaturas em uma placa quadrada, com lados e propriedades físicas unitárias. Quanto às condições de contorno, a placa é isolada nas bordas horizontais. Um dos bordos verticais está sujeito a uma temperatura constante, enquanto no outro a temperatura é subitamente reduzida no instante  $t = 1$ , indicado pela função degrau unitário  $H(t - 1)$ , conforme figura [4.89]. No instante inicial, a temperatura é uniformemente nula em todo o domínio.

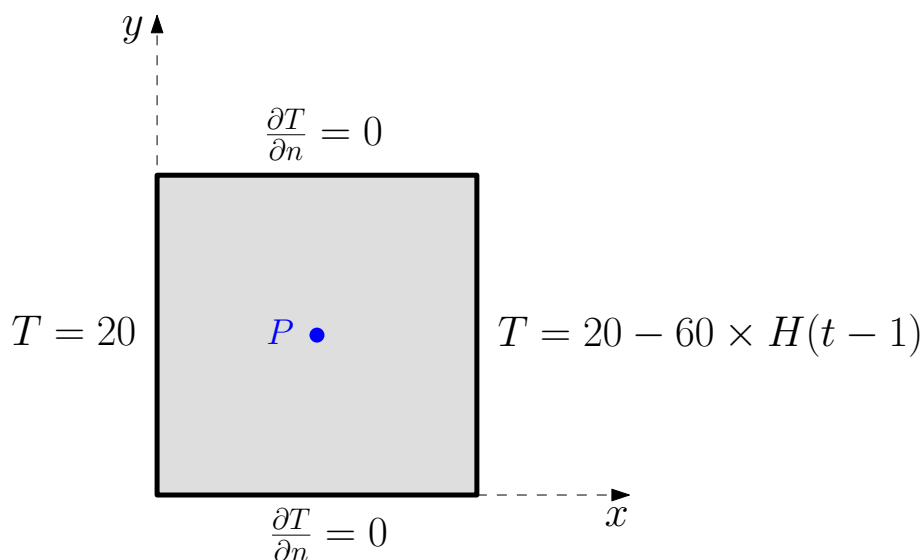


Figura 4.89: Geometria e Condições de contorno do Exemplo IV  
Fonte: Próprio Autor

Utiliza-se uma malha com 160 elementos de contorno e 144 pontos internos distribuídos segundo a figura [4.90].

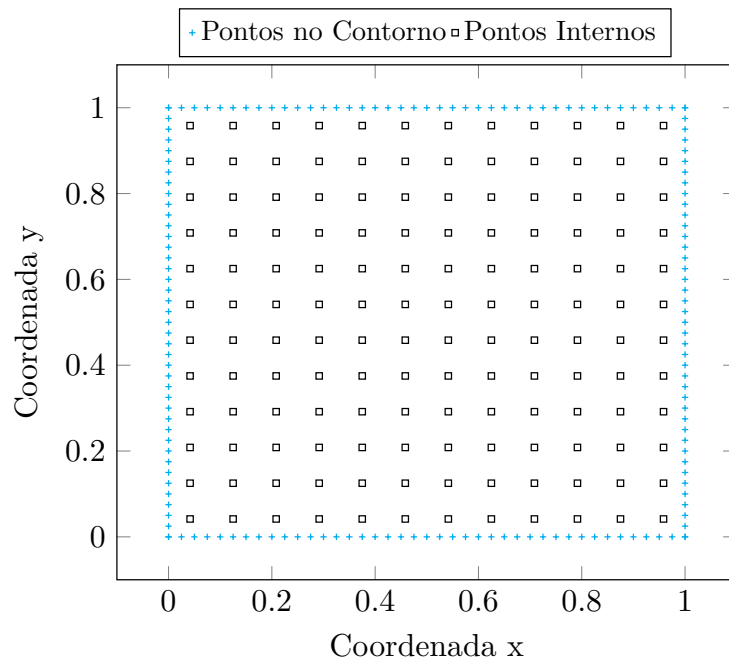


Figura 4.90: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 160|144$   
Fonte: Próprio Autor

Os valores de temperatura ao longo do tempo no ponto  $\mathbf{P}$ , localizado nas coordenadas centrais do corpo, obtidos considerando um número crescente de modos e passo de tempo  $\Delta t = 10^{-3}$ , são apresentados nas figuras [4.91 - 4.95] a seguir. Já a figura [4.96] apresenta os valores de erro percentual médio para os diferentes valores de  $N_m$ .

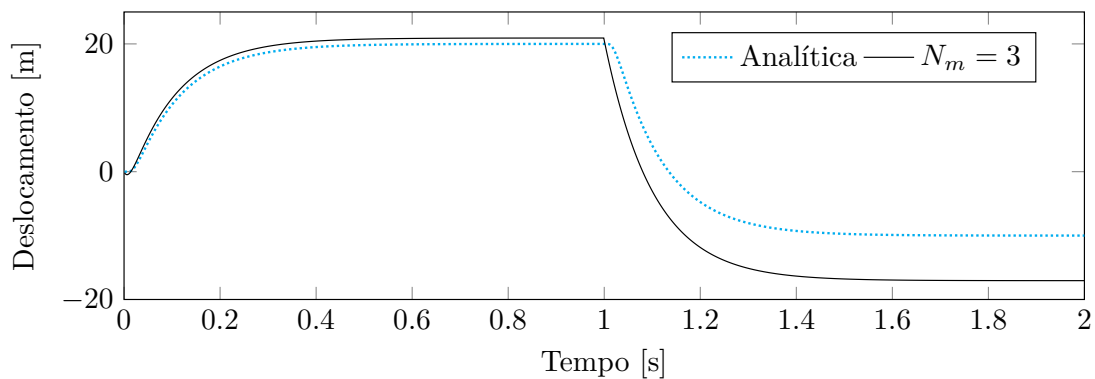


Figura 4.91: Temperatura no ponto  $\mathbf{P}$  considerando três modos  
Fonte: Próprio Autor

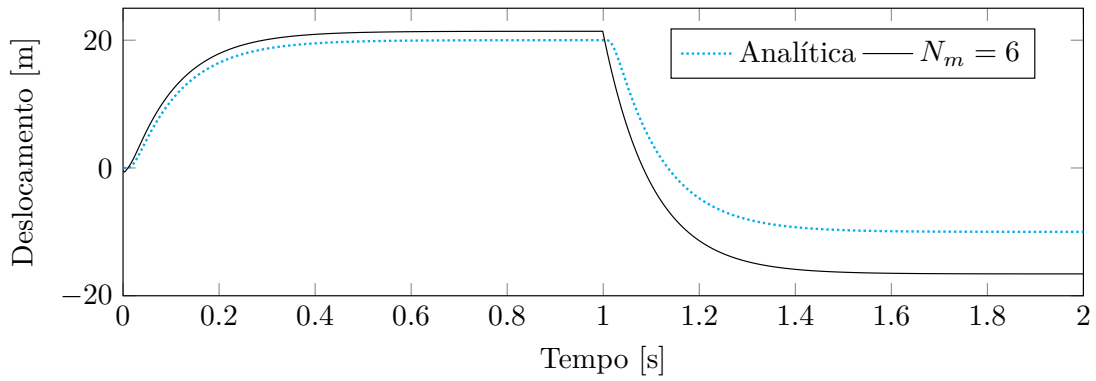


Figura 4.92: Temperatura no ponto  $P$  considerando seis modos  
Fonte: Próprio Autor

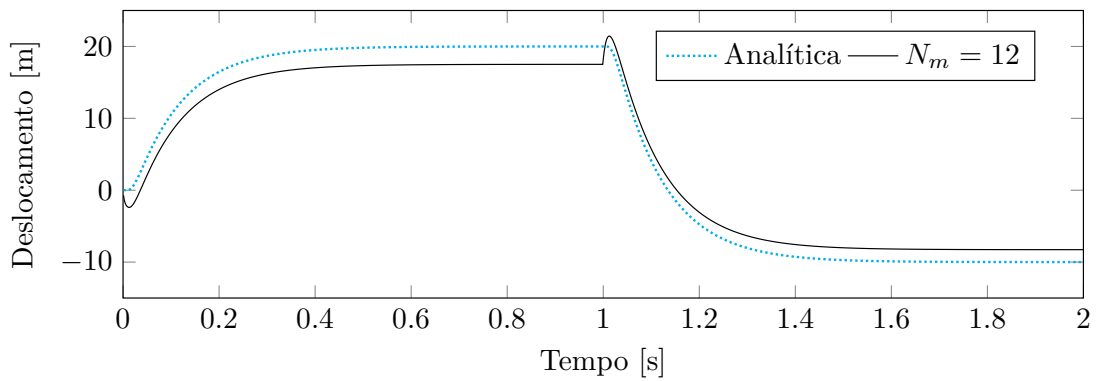


Figura 4.93: Temperatura no ponto  $P$  considerando doze modos  
Fonte: Próprio Autor

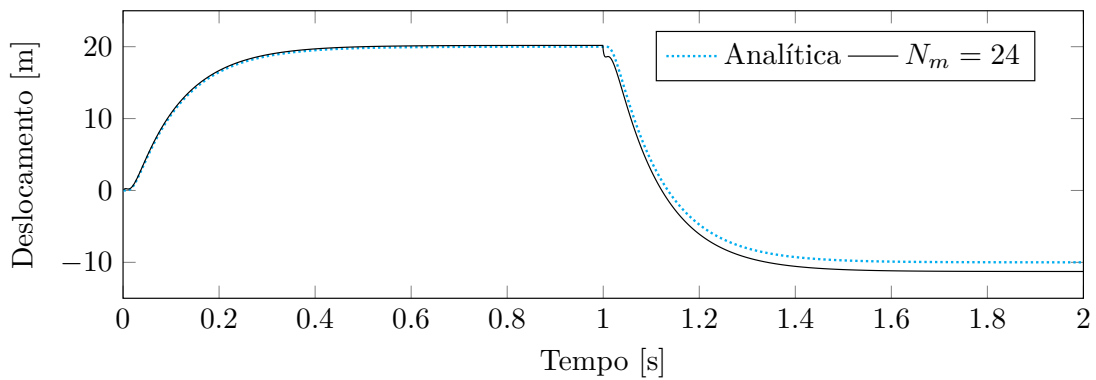


Figura 4.94: Temperatura no ponto  $P$  considerando 24 modos  
Fonte: Próprio Autor

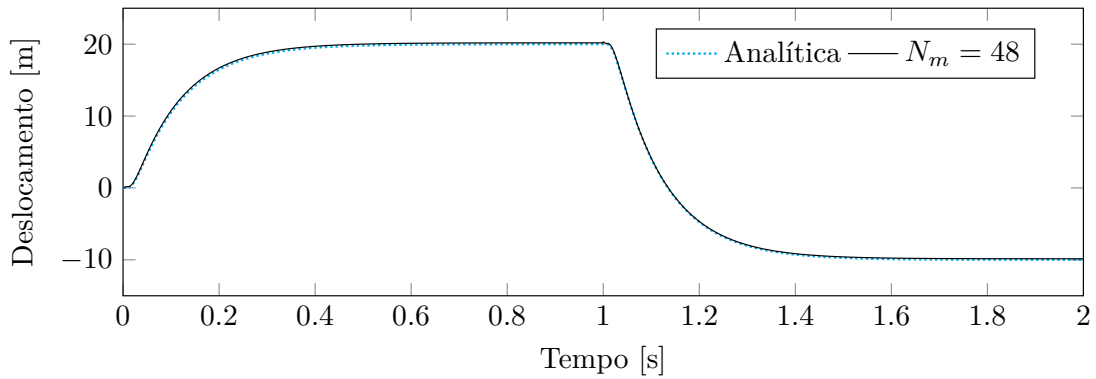


Figura 4.95: Temperatura no ponto  $P$  considerando 48 modos  
Fonte: Próprio Autor

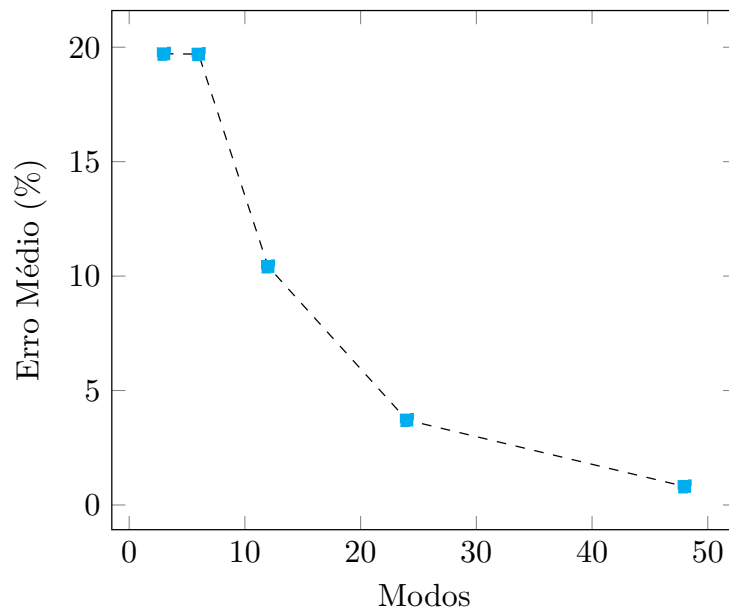


Figura 4.96: Erro médio na determinação da temperatura em  $P$   
Fonte: Próprio Autor

Como é típico do método modal, conforme mais modos são considerados para compor a resposta numérica, mais esta se aproxima da resposta analítica; e, com 48 modos a diferença gráfica entre elas já não é notável, indicando que a formulação proposta é eficaz em prover resultados satisfatórios, em termos de precisão, para o problema proposto. Mesmo com a redução súbita da temperatura, a resposta numérica é satisfatória quando o número de modos considerados é suficientemente grande.

## O MEC E A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste capítulo será explorada uma formulação do MEC cujo diferencial reside na aplicação da transformada de Laplace em relação ao tempo nas equações diferenciais governantes, bem como nas condições de contorno e iniciais do problema, reduzindo-o a um independente do tempo, que é resolvido no domínio da transformada por meio do MECID. Finalmente, a solução no domínio do tempo é obtida através de um método numérico de inversão.

### 5.1 A Transformada de Laplace

A transformada de Laplace (TL) é uma ferramenta matemática útil na análise de sistemas dinâmicos e na resolução de equações diferenciais. Desenvolvida por Pierre-Simon Laplace no final do século XVIII, ela permite a transformação de equações diferenciais lineares ordinárias em equações algébricas mais simples, facilitando sua resolução (LAPLACE, 1820; WIDDER, 2015).

A ideia central por trás da transformada de Laplace (TL) é mapear uma função do tempo,  $f(t)$ , em uma função de uma nova variável complexa no domínio da frequência,  $F(s)$ . Ao transportar o problema para o domínio da frequência, a TL possibilita a análise do comportamento de um sistema dinâmico em diferentes frequências, o que muitas vezes oferece uma compreensão mais profunda de seu comportamento.

O procedimento de transformação é possível para funções  $f(t)$  definidas para  $t \geq 0$ , e é realizado através da seguinte integral:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (5.1)$$

onde "s" é a variável complexa do espaço transformado e a função  $F(s)$  é comumente referida como a transformada de Laplace de  $f(t)$ . A seguir, são descritas algumas das principais propriedades da transformada de Laplace ([WIDDER, 2015](#)):

### *Linearidade*

A transformada de Laplace é linear, o que significa que, para duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  e para quaisquer constantes  $\alpha$  e  $\beta$ , têm-se:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (5.2)$$

### *Transformada da Derivada*

A transformada de Laplace da derivada de uma função  $f(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (5.3)$$

Para a segunda derivada, a relação é:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (5.4)$$

Essa propriedade é particularmente útil na solução de equações diferenciais lineares.

### *Transformada da Integral*

A transformada de Laplace da integral de uma função  $f(t)$  é:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \quad (5.5)$$

### *Transformada Inversa*

A transformada inversa de Laplace permite recuperar a função original a partir da sua transformada. Se  $F(s)$  é a transformada de  $f(t)$ , então a transformada inversa é:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (5.6)$$

Estas e outras propriedades facilitam a análise de sistemas dinâmicos. A seguir são apresentados alguns exemplos de transformadas de Laplace de funções comuns:

1. **Função constante:** A transformada de Laplace de uma função constante é dada por:

$$\mathcal{L}\{K\} = \frac{K}{s}$$

2. **Função polinomial:** A transformada de Laplace da função polinomial é dada por:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. **Função seno:** A transformada de Laplace da função seno é:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

4. **Função exponencial decrescente:** A transformada de Laplace da função exponencial decrescente é:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s + a}$$

5. **Função de impulso unitário:** A função de impulso unitário, ou delta de Dirac, denotada por  $\delta(t)$ , é uma função com área unitária e infinitesimalmente estreita no ponto  $t = 0$ , definida como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{para } t = 0 \\ 0, & \text{para } t \neq 0 \end{cases}$$

A transformada de Laplace da função de impulso unitário é:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

6. **Função degrau unitário:** A função degrau unitário, denotada por  $H(t - a)$ , é definida como:

$$H(t - a) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

A transformada de Laplace da função degrau unitário é dada por:

$$\mathcal{L}\{H(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Estas e outras transformadas são geralmente encontradas em tabelas conhecidas como Tabelas de transformada de Laplace que fornecem uma lista abrangente de pares de transformadas, relacionando uma função  $f(t)$  no domínio do tempo com sua correspondente  $F(s)$  no domínio de Laplace.

Essas tabelas são organizadas de forma que as funções comuns e suas respectivas transformadas estejam facilmente acessíveis, permitindo aos usuários consultar e aplicar as transformadas correspondentes em seus problemas. No entanto, é importante observar que as tabelas de transformada de Laplace nem sempre contêm todas as transformadas possíveis. Algumas funções mais complexas podem exigir manipulações adicionais ou a aplicação de propriedades específicas da transformada de Laplace para serem encontradas. Além disso, as tabelas geralmente apresentam apenas transformadas unilaterais, que são aplicáveis a funções definidas para  $t \geq 0$ .

Ao usar as tabelas de transformada de Laplace, é fundamental garantir a correspondência correta entre a função no domínio do tempo e sua transformada no domínio de Laplace. Além disso, entender as propriedades da transformada de Laplace, como linearidade, deslocamento no tempo, mudança de escala e convolução, pode ser extremamente útil na resolução de problemas mais complexos.

### 5.1.1 Aplicação da TL na solução de EDOs

Uma das aplicações mais comuns da TL está na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs) lineares com condições iniciais ou de contorno. Ao aplicar a transformada a ambos os lados da equação diferencial, obtêm-se uma equação algébrica em  $s$  de mais fácil resolução. Após encontrar a solução no domínio transformado, pode-se usar tabelas de transformadas de Laplace ou técnicas de inversão para encontrar a solução no domínio do tempo.

Para exemplificar a utilização da TL na solução de EDOs, considere o problema típico de se determinar o movimento de uma sistema massa-mola amortecido conforme representado pela figura [5.1].

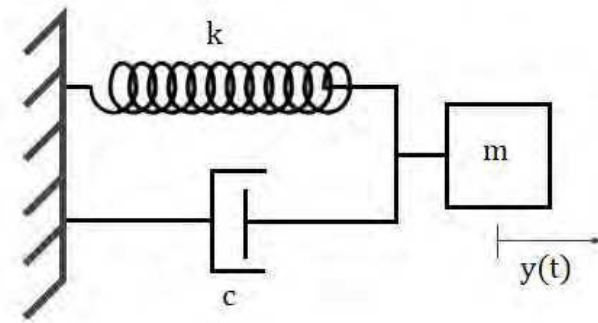


Figura 5.1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor  
Fonte: Próprio Autor

A equação que rege este problema é uma EDO linear:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (5.7)$$

Na equação (5.7),  $m$  é a massa,  $c$  é o coeficiente de amortecimento e  $k$  é a constante de rigidez da mola. Considere ainda valores numéricos,  $m = 1$  kg,  $c = 0.5$  Ns/m e  $k = 4$  N/m e condições iniciais  $y_o = 1$  m e  $\dot{y}_o = 0$  m/s.

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da equação diferencial, e fazendo uso da propriedade de transformada da derivada:

$$m[s^2Y(s) - s \cdot y_o - \dot{y}_o] + c[sY(s) - x_o] + kY(s) = 0 \quad (5.8)$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$s^2Y(s) - s - 0 + 0.5sY(s) - 0.5 + 4Y(s) = 0 \quad (5.9)$$

Resolvendo para  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 0.5s + 4} \quad (5.10)$$

Para encontrar a resposta  $y(t)$  no domínio do tempo, deve-se encontrar a inversa da transformada de Laplace de  $Y(s)$ . Após algumas manipulações algébricas é possível reescrever:

$$Y(s) = \frac{s + 0.25}{(s + 0.25)^2 + 1.984^2} + 0.126 \times \frac{1.984}{(s + 0.25)^2 + 1.984^2} \quad (5.11)$$

Utilizando uma tabela de transformadas é possível obter a transformada inversa de cada um dos termos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 0.25}{(s + 0.25)^2 + 1.984^2} \right\} = e^{-0.25t} \cos(1.984t) \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1.984}{(s + 0.25)^2 + 1.984^2} \right\} = e^{-0.25t} \text{sen}(1.984t) \quad (5.13)$$

Valendo-se da propriedade de linearidade, pode-se então determinar a resposta do sistema:

$$y(t) = e^{-0.25t} [\cos(1.984t) + 0.125 \sin(1.984t)] \quad (5.14)$$

Esta solução descreve o movimento do sistema massa-mola amortecido descrito quando impostas as condições iniciais fornecidas.

## 5.2 Determinação Numérica da Transformada Inversa

Como mostrado no exemplo anterior, ao usar a transformada de Laplace, os problemas podem ser resolvidos no domínio de frequência complexa e, em seguida, as soluções podem, se necessário, ser revertidas para o domínio do tempo, para obter a resposta desejada. Para tanto é utilizada a transformada inversa.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (5.15)$$

Apesar de úteis, as tabelas de transformada não possuem correspondentes para todas as funções. Nos casos não tabelados, procedimentos numéricos podem ser utilizados (COHEN, 2007).

Devido à natureza complexa do procedimento de inversão, não há nenhum algoritmo que gere resultados satisfatórios para toda e qualquer função. Esse fato tem gerado diversas pesquisas, com o número de métodos propostos ultrapassando a centena (ABATE; VALKÓ, 2004). A escolha do método adequado, dentre os diversos disponíveis, para inverter determinada função é um assunto tratado por diversos autores. Davies e Martin (1979) realizaram uma avaliação de muitos métodos. Em seu trabalho, testaram uma variedade de algoritmos em diferentes transformações cujas inversas exatas são conhecidas e mostraram

quais métodos apresentam melhores resultados para cada classe de função testada.

Os métodos podem ser baseados na aproximação da integral complexa de inversão (DUBNER; ABATE, 1968; SIMON; STROOT; WEISS, 1972; DURBIN, 1974; CRUMP, 1976; HOOG; KNIGHT; STOKES, 1982; HONIG; HIRDES, 1984a; D'AMORE et al., 2012; PIESENS, 1971), na expansão da função original em uma série de funções invertíveis analiticamente (CHUNG; SUN, 1986; WEEKS, 1966; LYNESS; GIUNTA, 1986; GIUNTA; LACETTI; RIZZARDI, 1989), na fórmula de Post-Widder (JR, 1966; ZAKIAN, 1969; STEHFEST, 1970a; STEHFEST, 1970b; VALKÓ; ABATE, 2004), ou na deformação do contorno de integração de Bromwich (TALBOT, 1979; ABATE; VALKÓ, 2004).

Nesta secção serão descritos e testados três métodos de avaliação numérica da transformada inversa de Laplace. Três funções teste com inversa no tempo conhecidas, expostas na tabela [5.1], serão avaliadas com o objetivo de verificar a eficácia da metodologias de inversão apresentadas. Para estes testes, é apropriado utilizar funções que capturem as características típicas de ondas, como periodicidade, amortecimento e possíveis efeitos de dispersão. As funções semelhantes e adequadas para este tipo de solução incluem senos e cossenos, funções fundamentais para descrever a natureza ondulatória e cíclica, especialmente para ondas harmônicas; e seno e cosseno modulados por decaimento exponencial, para ondas que perdem energia ao longo do tempo devido a efeitos dissipativos.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
$f_1(t) = e^{-t}$	$F_1(s) = \frac{1}{s-1}$
$f_2(t) = \text{sen}(t)$	$F_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$
$f_3(t) = e^{-t}\text{sen}(t)$	$F_3(s) = \frac{2}{(s-1/5)^2+4}$

Tabela 5.1 - Funções utilizadas para teste dos Métodos de Inversão  
Fonte: Próprio Autor

O primeiro algoritmo se baseia no Método de Stehfest, o qual foi relatado por Davies e Martin (1979) como fornecendo bons resultados em uma ampla gama de funções. Além do método de Stehfest, também será considerada uma extensão, proposta por Aral e Gülçat

(1977), do método introduzido por Zakian e Littlewood (1973) baseado em Polinômios de Legendre Deslocados. Além destes dois primeiros métodos que utilizam apenas parâmetros reais, um terceiro método que utiliza parâmetros complexos para aproximar  $f(t)$  através de séries de Fourier foi também testado, o método proposto por Durbin (1974).

### 5.2.1 Inversão de Stehfest

Stehfest (1970a), Stehfest (1970b) se baseou no trabalho de Jr (1966) para desenvolver um método de inversão que aproxima  $f(t)$  por meio de uma soma ponderada de valores da transformada  $F(s)$  em um conjunto discreto de parâmetros de transformação. O Método de Stehfest é comumente utilizado em trabalhos que acoplam o MEC com a transformada de Laplace para resolver problemas de difusão térmica (MORIDIS; REDDEL, 1991; CRANN, 2005). O algoritmo do método é descrito a seguir.

Seja  $F(s)$  a transformada de Laplace de  $f(t)$  e suponha que se busca o valor  $f(t)$  em  $t = T$ , isto é  $f(T)$ .

O primeiro passo é a definição de um conjunto discreto composto por  $M$  valores da variável de transformação no qual cada componente  $s_j$  é dada por:

$$s_j = j \frac{\ln 2}{T} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (5.16)$$

Uma vez definidos os elementos  $s_j$ , o valor de  $f(T)$  é aproximado pela soma ponderada a seguir:

$$f(T) \approx \frac{\ln 2}{T} \sum_{j=1}^M \omega_j F(s_j) \quad (5.17)$$

Os pesos  $\omega_j$  são dados por:

$$\omega_j = (-1)^{\frac{M}{2}+j} \sum_{k=\frac{1}{2}(1+j)}^{\min\{j, \frac{M}{2}\}} \frac{(2k)! \quad k^{\frac{M}{2}}}{(\frac{M}{2} - k)! k! (k-1)! (j-k)! (2k-j)!} \quad (5.18)$$

A seguir serão conduzidos experimentos para verificar a eficácia do método, centrados principalmente na influência do parâmetro  $M$  na qualidade do procedimento de inversão. Diversos autores discutiram a escolha do parâmetro. Stehfest (1970a) sugere que para uma precisão de oito dígitos, um valor de  $M = 10$  deve ser usado. Moridis e Reddel (1991) sugerem que a precisão do método é insensível a mudanças no valor de  $M$  para

$6 < M < 20$  enquanto [Zhu, Satravaha e Lu \(1994\)](#) relatam que  $M = 6$  oferece a melhor precisão. Desta forma, parece não haver um valor ótimo para o parâmetro  $M$ , pois isso depende do problema. Entretanto, valores na região  $6 < M < 10$  geralmente parecem apresentar resultados satisfatórios. Nos testes a seguir as funções de teste serão invertidas para  $M \in \{6, 8, 10, 12\}$ .

Os resultados do primeiro experimento, no qual foram determinados numericamente os valores temporais de  $f_1$ , são apresentados na figura [\[5.2\]](#).

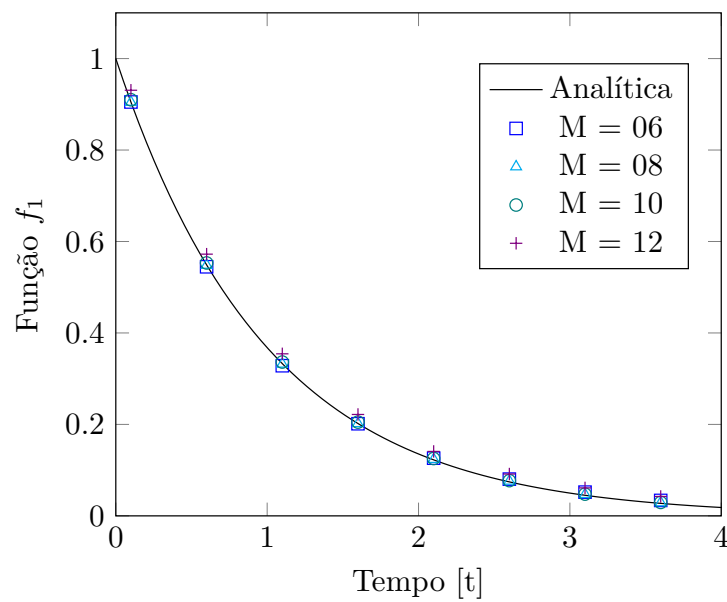


Figura 5.2: Resultados do Método de Stehfest para a função  $f_1$   
Fonte: Próprio Autor

Uma análise direta da figura [\[5.2\]](#) mostra que o procedimento de inversão entrega resultados satisfatórios para todos os valores do parâmetro  $M$  experimentados. Maiores informações sobre a precisão do método em função do valor de  $M$  podem ser obtidas na tabela [\[5.2\]](#), que apresenta os valores numéricos obtidos.

t	Analítico	M = 6	M = 8	M = 10	M = 20
0.100	0.904837	0.905056	0.904705	0.909979	0.930721
0.600	0.548812	0.544692	0.548298	0.553051	0.572302
1.100	0.332871	0.328336	0.332091	0.336378	0.354360
1.600	0.201897	0.201480	0.201997	0.205033	0.221726
2.100	0.122456	0.126168	0.123669	0.125428	0.140896
2.600	0.074274	0.080403	0.076136	0.077053	0.091495
3.100	0.045049	0.051906	0.046983	0.047521	0.061163
3.600	0.027324	0.033759	0.028913	0.029401	0.042419

Tabela 5.2 - Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função  $f_1$   
Fonte: Próprio Autor

Observando os dados da tabela, nota-se que para os três menores valores,  $M = 06, 08$  e  $10$ , os resultados são melhores que para  $M = 12$ . Além disso, destaca-se que, para todos os valores de  $t$ , os resultados com maior precisão foram obtidos para  $M = 8$ . Tal fato corrobora a tese de que não há garantias de que um maior número de elementos de ponderação irá gerar resultados melhores.

A Figura [5.3] mostra graficamente, enquanto a tabela [5.3] apresenta numericamente, os resultados obtidos nos experimentos realizados para a função  $f_2$ .

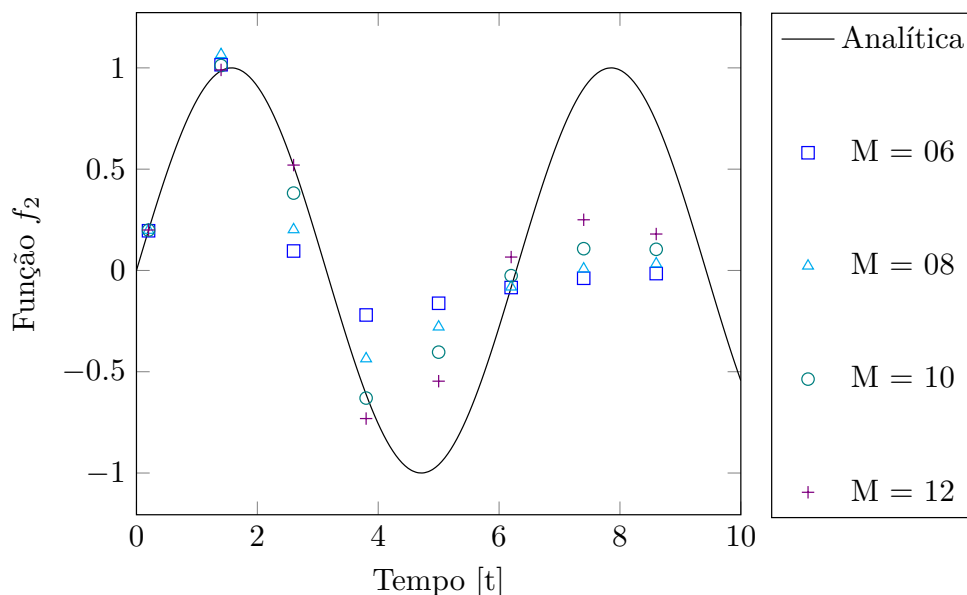


Figura 5.3: Resultados do Método de Stehfest para a função  $f_2$   
Fonte: Próprio Autor

t	Analítico	M = 6	M = 8	M = 10	M = 20
0.200	0.198669	0.195974	0.198625	0.199117	0.199764
1.400	0.985450	1.015494	1.066175	1.011760	0.989942
2.600	0.515501	0.095972	0.201645	0.381900	0.520180
3.800	-0.611858	-0.219785	-0.435658	-0.629953	-0.731146
5.000	-0.958924	-0.161987	-0.278499	-0.403282	-0.546603
6.200	-0.083089	-0.084316	-0.081227	-0.025734	0.066083
7.400	0.898708	-0.038573	0.007948	0.107362	0.250168
8.600	0.734397	-0.015510	0.033163	0.104379	0.179827

Tabela 5.3 - Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função  $f_2$   
Fonte: Próprio Autor

Observa-se que, após o primeiro meio período da função, onde ocorre a primeira mudança de concavidade, o método numérico foi incapaz de seguir a curva da função, independentemente do valor do parâmetro  $M$ . Os resultados deste exemplo corroboram com Stehfest (1970a), que relata uma dificuldade do método em obter bons resultados quando a função  $F(s)$  a ser invertida tiver comportamento oscilatório no domínio do tempo.

Os resultados para terceira e última função de teste são explicitados na figura [5.4] e tabela [5.4] a seguir.

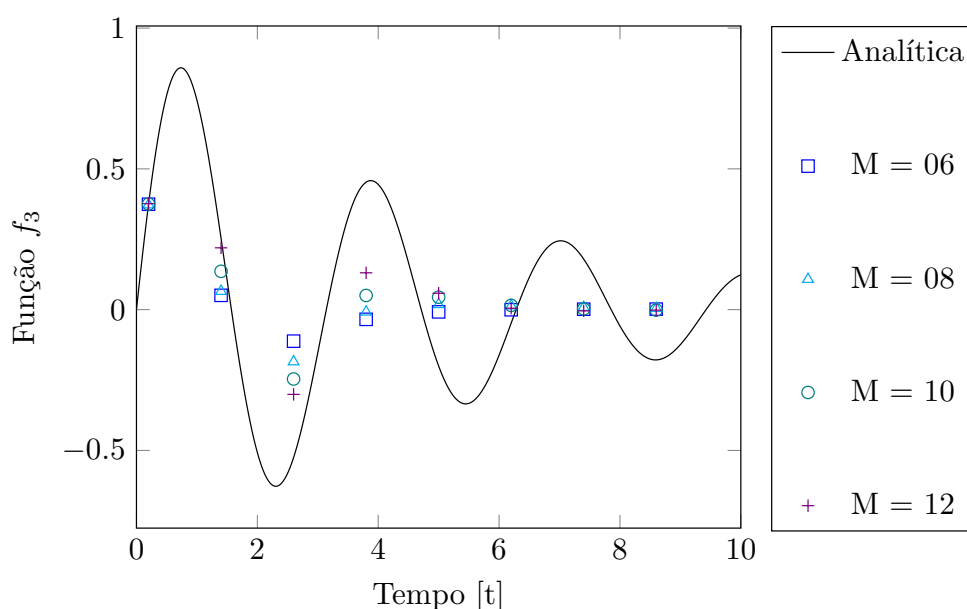


Figura 5.4: Resultados do Método de Stehfest para a função  $f_3$   
Fonte: Próprio Autor

t	Analítico	M = 6	M = 8	M = 10	M = 20
0.200	0.374149	0.374360	0.372364	0.374948	0.376315
1.400	0.253179	0.050780	0.065135	0.136100	0.219593
2.600	-0.525232	-0.111945	-0.184968	-0.246385	-0.301019
3.800	0.452664	-0.034449	-0.008152	0.050330	0.130806
5.000	-0.200134	-0.007907	0.018430	0.044137	0.058115
6.200	-0.047923	-0.000396	0.013941	0.015146	0.004810
7.400	0.179436	0.001561	0.008173	0.002384	-0.004331
8.600	-0.178511	0.001889	0.004506	-0.001589	-0.001858

Tabela 5.4 - Valores analíticos e numéricos (Stehfest) para a função  $f_3$   
Fonte: Próprio Autor

Em conformidade com o exemplo anterior, o método numérico apresenta dificuldade em representar o comportamento oscilatório da função inversa no tempo. Estes dois últimos exemplos mostram que para o problema da onda, onde as respostas temporais têm natureza oscilatória, o método de Stehfest não é uma escolha adequada para o procedimento de inversão a ser acoplado ao MEC.

### 5.2.2 Inversão por Polinômios de Legendre Deslocados

Aral e Gülçat (1977) empregaram uma formulação que combinava a transformada de Laplace com o Método dos Elementos Finitos para resolver problemas regidos pela equação da onda. Para retornar ao domínio do tempo, utilizaram um método numérico de inversão envolvendo Polinômios de Legendre Deslocados (PLD), inspirados no trabalho de Zakian e Littlewood (1973).

Seja  $F(s)$  a transformada de Laplace de  $f(t)$ ; para aproximar numericamente o valor  $f(t)$  em  $t = T$ , isto é,  $f(T)$ , adota-se procedimento a seguir.

De forma semelhante ao Método de Stehfest, o primeiro passo é a construção de um conjunto discreto de parâmetros de transformação  $s_k$ :

$$s_k = \frac{k+1}{\tau} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (5.19)$$

O parâmetro  $\tau$  será discutido adiante no texto. Além do conjunto discreto de parâmetros de transformação, deve-se obter também, polinômios de Legendre de grau  $k$  definido por:

$$P_k(z) = a_{k0} + a_{k1}z + a_{k2}z^2 + \cdots + a_{kk}z^k \quad (5.20)$$

onde  $z = e^{-T/\tau}$

Os coeficientes dos polinômios,  $a_{kj}$ , são definidos pela expressão envolvendo coeficientes binomiais a seguir:

$$a_{kj} = (-1)^{k+j} \binom{k+j}{k} \binom{k}{j} \quad 0 \leq j \leq k \quad : \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (5.21)$$

O valor de  $f(T)$  é então aproximado como uma soma ponderada dos polinômios, como se segue:

$$f(T) \approx \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^M C_k P_k(z) \quad (5.22)$$

Os pesos  $C_k$  são definidos:

$$C_k = (2k+1) \sum_{i=0}^k a_{ki} F(s_j) \quad (5.23)$$

A escolha do parâmetro  $\tau$  foi testada e discutida por [Aral e Gülçat \(1977\)](#). Em seu trabalho, experimentaram com diferentes valores de  $\tau$ , notando um impacto mínimo no acompanhamento da solução. Por fim, sugerem  $\tau = T$ , mas observando que  $\tau = 1.0$  produz resultados semelhantes. Já a escolha de  $M$  influencia o erro de truncamento; à medida que  $M$  se aproxima do infinito, o erro de truncamento diminui, mas aumentar  $M$  eleva a magnitude dos coeficientes, causando erros de arredondamento. Essa instabilidade, associada às Transformadas Inversas de Laplace, é observada também em outros métodos. Há uma sugestão dos autores para  $M = 12$ , mas aqui serão testados valores maiores e menores que 12 para se comparar os resultados.

A Figura [\[5.5\]](#) apresenta os resultados obtidos para  $\tau = 1.0$  e valores de  $M \in \{08, 12, 16, 20\}$ . Os dados numéricos relativos a estes resultados são encontrados na tabela [\[5.5\]](#).

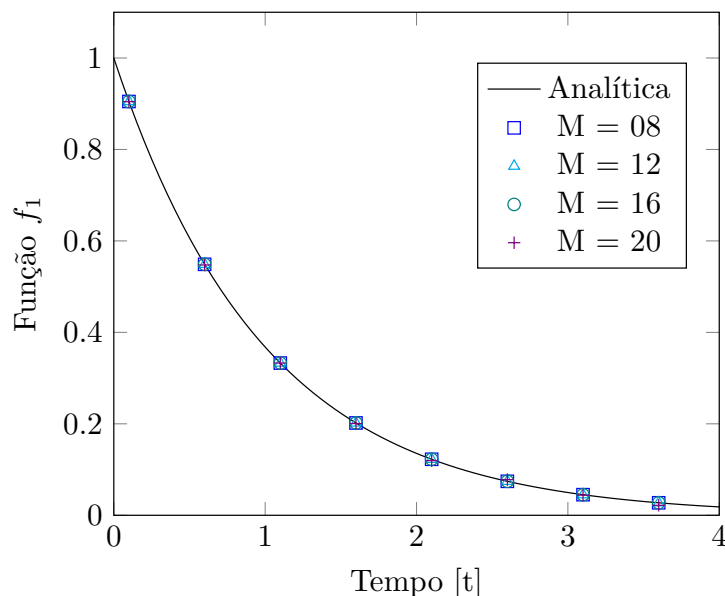


Figura 5.5: Resultados do Método PLD para a função  $f_1$   
 Fonte: Próprio Autor

t	Análítico	M = 8	M = 12	M = 16	M = 20
0.100	0.904837	0.904837	0.904837	0.904853	0.904487
0.600	0.548812	0.548812	0.548812	0.548808	0.547409
1.100	0.332871	0.332871	0.332871	0.332855	0.332905
1.600	0.201897	0.201897	0.201897	0.201901	0.200634
2.100	0.122456	0.122456	0.122456	0.122461	0.119559
2.600	0.074274	0.074274	0.074274	0.074282	0.077925
3.100	0.045049	0.045049	0.045049	0.045019	0.044000
3.600	0.027324	0.027324	0.027324	0.027328	0.021862

Tabela 5.5 - Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função  $f_1$   
 Fonte: Próprio Autor

Os dados apresentados pela figura [5.5] e tabela [5.5] mostram que, para todos os valores de  $M$  testados, o método numérico gera resultados satisfatórios, com destaque para  $M = 08$ , que apresenta valores iguais à solução analítica dentro das casas decimais representadas.

Neste segundo teste propõe-se fixar o parâmetro  $M = 08$  e avaliar a influência do parâmetro  $\tau$  na composição da curva pelo método de inversão. A função utilizada é a que gera como inversa no tempo a função senoidal. Os resultados são explicitados na figura [5.6] e tabela [5.6].

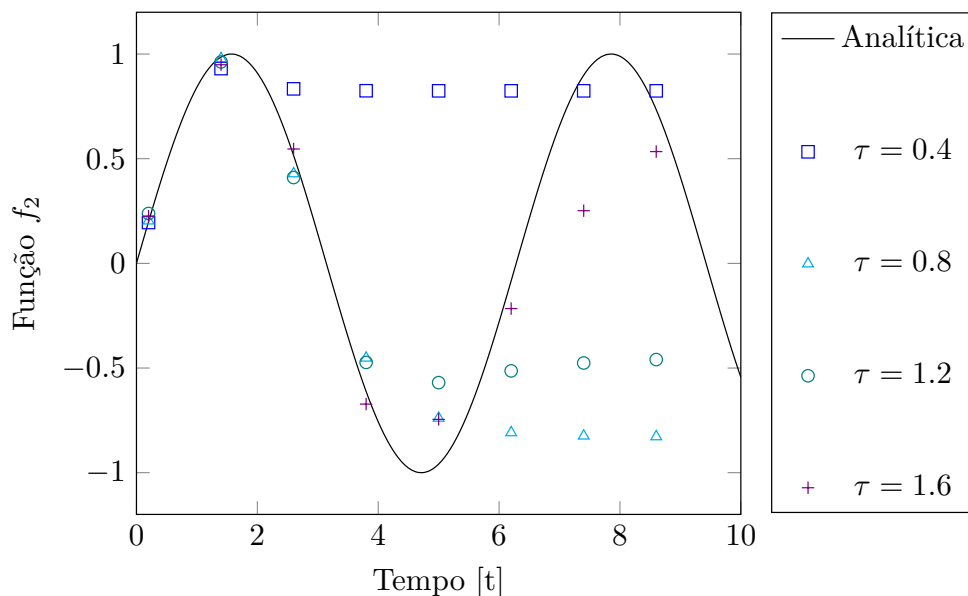


Figura 5.6: Resultados do Método PLD para a função  $f_2$

Fonte: Próprio Autor

<b>t</b>	<b>Analítico</b>	<b><math>\tau = 0.4</math></b>	<b><math>\tau = 0.8</math></b>	<b><math>\tau = 1.2</math></b>	<b><math>\tau = 1.6</math></b>
0.200	0.198669	0.194996	0.203104	0.238235	0.225165
1.400	0.985450	0.930256	0.978455	0.962149	0.948800
2.600	0.515501	0.833589	0.428337	0.409896	0.546263
3.800	-0.611858	0.824590	-0.452085	-0.473176	-0.672257
5.000	-0.958924	0.824129	-0.738997	-0.569682	-0.745247
6.200	-0.083089	0.824106	-0.808490	-0.513611	-0.216021
7.400	0.898708	0.824105	-0.824280	-0.475995	0.251624
8.600	0.734397	0.824105	-0.827818	-0.459593	0.533960

Tabela 5.6 - Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função  $f_2$

Fonte: Próprio Autor

Nota-se um resultado superior ao Método de Stehfest. Os resultados melhoram com o aumento do parâmetro  $\tau$ , mas ainda assim são insatisfatórios.

Para averiguar a possibilidade de melhoria na qualidade da solução com o aumento do valor de  $\tau$ , testes adicionais foram realizados e seus resultados são apresentados nas figuras [5.7] e [5.8].

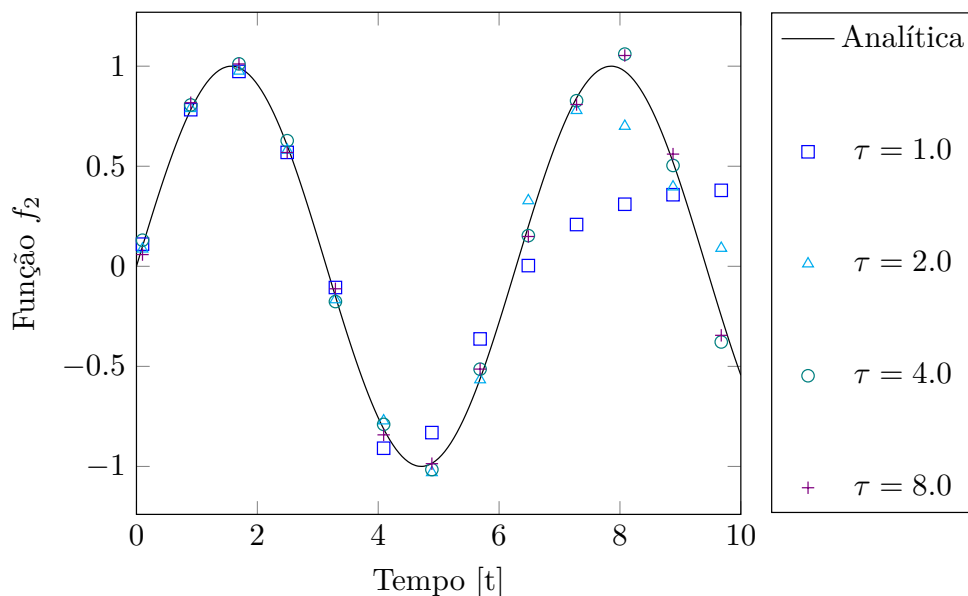


Figura 5.7: Resultados do Método PLD para a função  $f_2$  em função de  $\tau$   
 Fonte: Próprio Autor

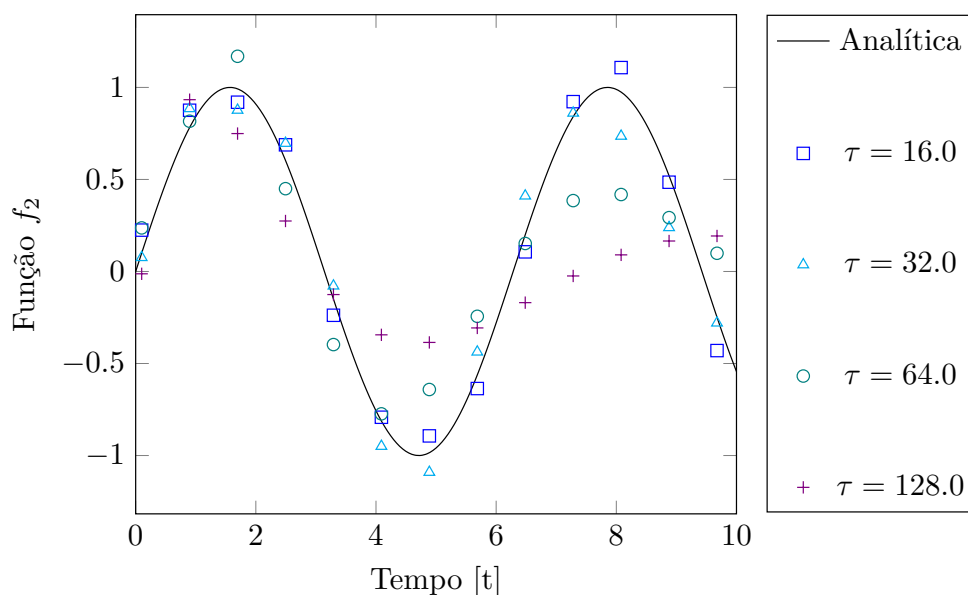


Figura 5.8: Resultados do Método PLD para a função  $f_2$  em função de  $\tau$   
 Fonte: Próprio Autor

Observa-se que o aumento do valor do parâmetro  $\tau$  resulta, de fato, em uma melhoria nos resultados obtidos. No entanto, esta melhora é evidenciada apenas até o valor  $\tau = 16$ . Para valores superiores aos testados, verifica-se uma deterioração nos resultados.

O último teste realizado diz respeito à última função, exponencial decrescente. O valor do parâmetro  $M$  é fixado em 08 e alguns valores de  $\tau$  são testados. A Figura [5.9] e a tabela [5.7] expõem os resultados.

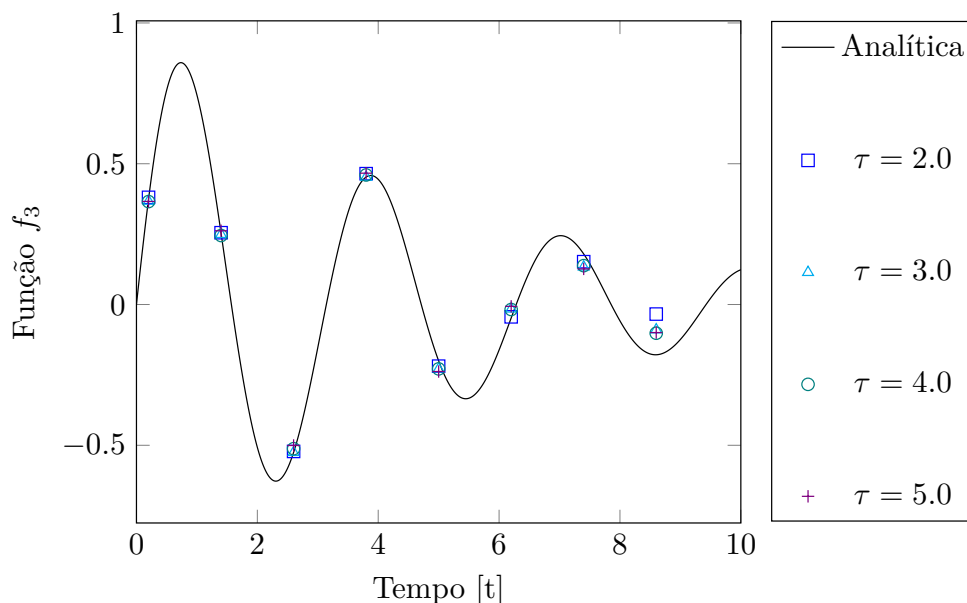


Figura 5.9: Resultados do Método PLD para a função  $f_3$   
 Fonte: Próprio Autor

t	Analítico	$\tau = 2.0$	$\tau = 3.0$	$\tau = 4.0$	$\tau = 5.0$
0.200	0.374149	0.380595	0.367138	0.365522	0.366104
1.400	0.253179	0.254981	0.249172	0.244998	0.261865
2.600	-0.525232	-0.521855	-0.525256	-0.512159	-0.500718
3.800	0.452664	0.464684	0.452428	0.460062	0.466384
5.000	-0.200134	-0.218935	-0.228839	-0.228644	-0.237989
6.200	-0.047923	-0.043850	-0.015696	-0.017843	-0.006682
7.400	0.179436	0.152089	0.133480	0.137984	0.126495
8.600	-0.178511	-0.033958	-0.089791	-0.102026	-0.099673

Tabela 5.7 - Valores analíticos e numéricos (PLD) para a função  $f_3$   
 Fonte: Próprio Autor

Observa-se um bom desempenho do método em acompanhar a solução analítica nos primeiros instantes de tempo para todos os valores do parâmetro  $\tau$ . Entretanto, Há um “descolamento” a partir da segunda metade do terceiro período.

Com base nos testes apresentados, conclui-se que, assim como o método de Stehfest, o método envolvendo PLD aparenta dificuldade em acompanhar soluções oscilatórias no domínio do tempo. Com isso, é também inadequado para aplicação a problemas envolvendo a equação da onda.

### 5.2.3 Método de Durbin

O pioneirismo em empregar séries de Fourier para inversão numérica de transformadas de Laplace pode ser creditado a [Dubner e Abate \(1968\)](#), que empregaram a expansão de Fourier em cossenos para aproximar  $f(t)$  a partir de  $F(s)$ . [Durbin \(1974\)](#) aprimorou este método ao modifica-lo para considerar também os termos da expansão em seno. Entretanto, a eficácia dos métodos desenvolvidos está diretamente relacionada à escolha dos parâmetros intrínsecos de cada método, sendo essa seleção dos parâmetros, em certa medida, arbitrária. [Honig e Hirdes \(1984b\)](#) apresentou um método para redução dos erros de truncamento e uma proposta para a escolha de parâmetros ótimos. Entretanto, no presente trabalho, os parâmetros serão escolhidos segundo as recomendações de [Dubner e Abate \(1968\)](#).

Seja  $F(s)$  a transformada de Laplace de  $f(t)$ . Para  $t$  no intervalo  $(0, T]$ , o valor da função é aproximado por:

$$f(t) \approx \frac{2e^{at}}{T} \left[ -\frac{1}{2} \Re \{F(a)\} + \sum_{k=0}^M \Re \{F(s_k)\} \cos \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) + \sum_{k=0}^M \Im \{F(s_k)\} \sen \left( \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \quad (5.24)$$

O valor da variável transformada  $s_k$  é dado pela expressão a seguir:

$$s_k = a + \frac{2\pi k}{T} i \quad (5.25)$$

Na equação (5.25),  $i$  é a unidade imaginária,  $i = \sqrt{-1}$ .

Neste trabalho, o valor do parâmetro ‘T’ será sempre considerado como  $2t_{\text{máx}}$ , onde  $t_{\text{máx}}$  é o maior valor de tempo no qual a função inversa será avaliada. Já a escolha do real ‘a’ é feita seguindo a análise de erro realizada por [Dubner e Abate \(1968\)](#):

$$a = -\frac{\ln(Tol)}{T} \quad (5.26)$$

O parâmetro  $Tol$  é a ordem do erro que pode ser alcançada caso seja considerada o número de termos suficientemente grande. Neste trabalho adota-se  $Tol = 10^{-3}$ , desta forma:

$$a = \frac{\ln(10^3)}{2t_{\text{máx}}} \approx \frac{3.454}{t_{\text{máx}}} \quad (5.27)$$

Serão testadas as mesmas três funções buscando um entendimento da influência de cada parâmetro livre na precisão do método. A Figura [5.10] explicita os resultados para a inversão da primeira função (exponencial) quando se assume valores crescentes para  $M$ .

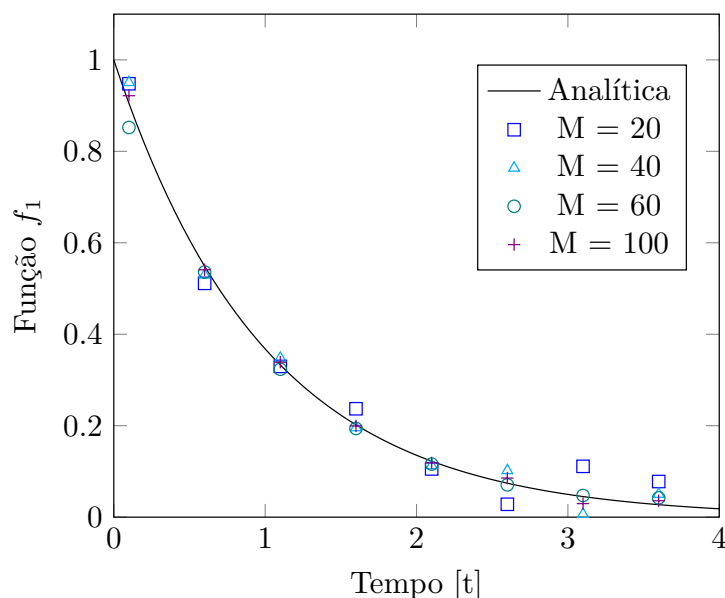


Figura 5.10: Resultados do Método de Durbin para a função  $f_1$   
Fonte: Próprio Autor

$t$	Analítico	$M = 20$	$M = 40$	$M = 80$	$M = 100$
0.100	0.904837	0.947778	0.950602	0.852165	0.921655
0.600	0.548812	0.511282	0.529711	0.536013	0.541106
1.100	0.332871	0.329675	0.347992	0.323553	0.338933
1.600	0.201897	0.237075	0.195805	0.194001	0.199569
2.100	0.122456	0.105446	0.113134	0.116058	0.118529
2.600	0.074274	0.028176	0.101981	0.070670	0.085542
3.100	0.045049	0.111135	0.006450	0.047341	0.029666
3.600	0.027324	0.077949	0.050352	0.042129	0.035937

Tabela 5.8 - Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função  $f_1$   
Fonte: Próprio Autor

A baixa qualidade destes primeiros resultados, quando comparados aos métodos anteriores, se deve à dificuldade em se representar funções exponenciais negativas através

de séries de Fourier. Ainda assim, com a inclusão de termos suficientes, é possível obter resultados melhores. O resultado para um total de 1000 termos é exibido na figura [5.11] e confirma que é possível obter bons resultados, desde que sejam considerados termos suficientes.

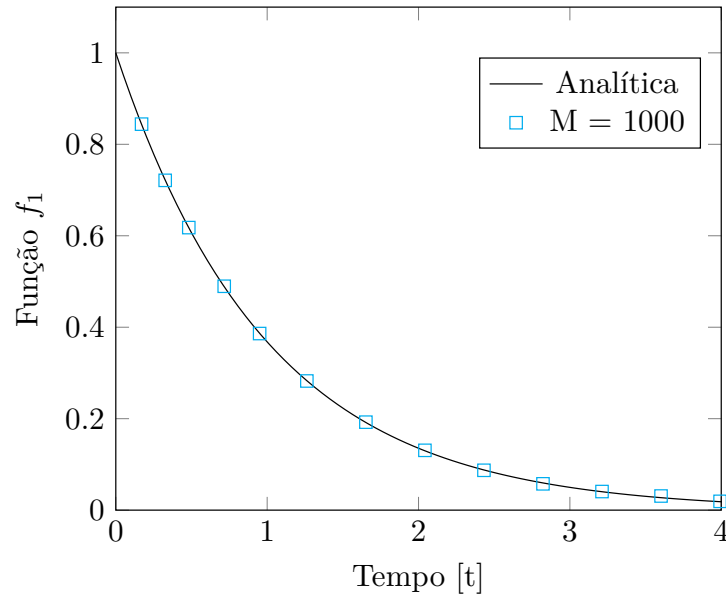


Figura 5.11: Resultado do Método de Durbin para a função  $f_1$  considerando  $M = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

Os resultados para a segunda função (senoide) são apresentados na figura [5.12] e tabela [5.9] a seguir.

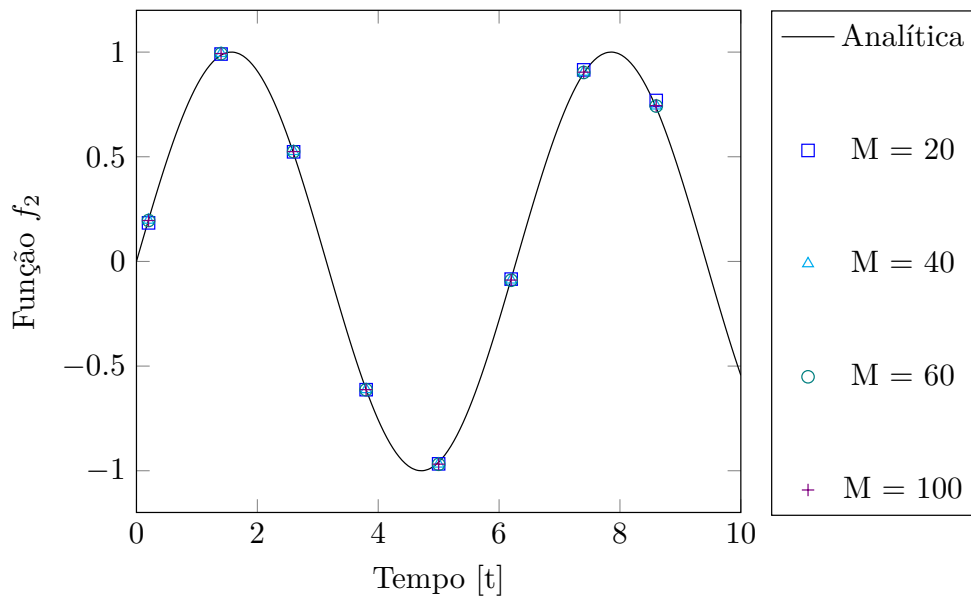


Figura 5.12: Resultados do Método de Durbin para a função  $f_2$   
Fonte: Próprio Autor

t	Analítico	M = 20	M = 40	M = 80	M = 100
0.200	0.198669	0.184039	0.197298	0.195329	1.954901
1.400	0.985450	0.990579	0.993748	0.992745	0.993021
2.600	0.515501	0.523462	0.525338	0.524323	0.524678
3.800	-0.611858	-0.612776	-0.611892	-0.613091	-0.612594
5.000	-0.958924	-0.966988	-0.967707	-0.969174	-0.968457
6.200	-0.083089	-0.084470	-0.088389	-0.090128	-0.089089
7.400	0.898708	0.915005	0.904315	0.902532	0.904013
8.600	0.734397	0.768819	0.742959	0.742146	0.744142

Tabela 5.9 - Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função  $f_2$   
Fonte: Próprio Autor

Observa-se no gráfico da figura [5.12] uma alta qualidade nos resultados todos os valores do parâmetro  $M$ . Para uma análise mais detalhada, utiliza-se a tabela [5.9], na qual é possível perceber a melhora dos resultados com o aumento do parâmetro  $M$ . Sendo a função seno uma função trigonométrica periódica, não é estranho esta ser melhor representada quando comparada à função  $f_1$  (exponencial).

Os resultados para a terceira e última função são apresentados na figura [5.13] e tabela [5.10] a seguir.

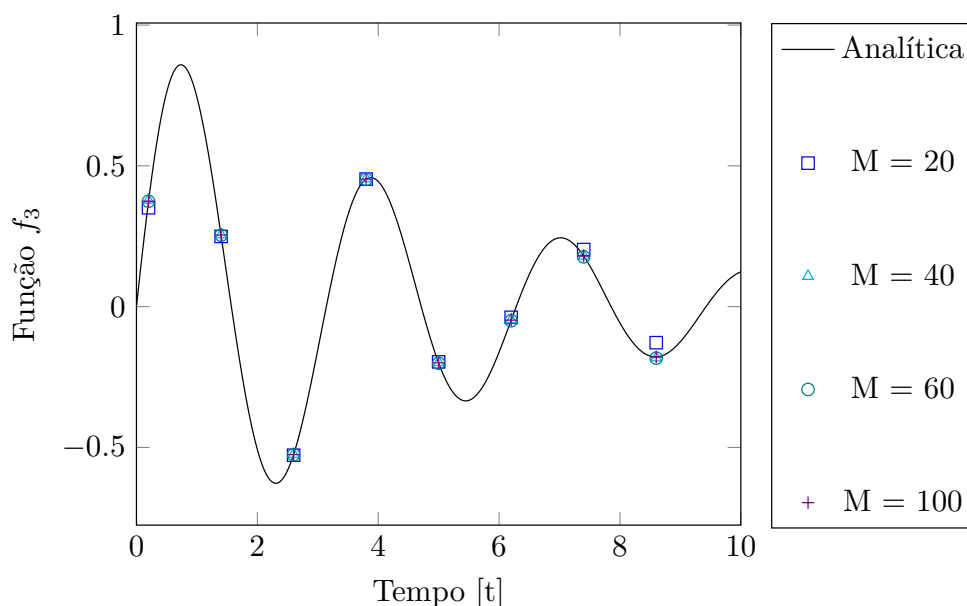


Figura 5.13: Resultados do Método de Durbin para a função  $f_3$   
Fonte: Próprio Autor

<b>t</b>	<b>Analítico</b>	<b>M = 20</b>	<b>M = 40</b>	<b>M = 80</b>	<b>M = 100</b>
0.200	0.374149	0.351159	0.378262	0.374178	0.374541
1.400	0.253179	0.249333	0.255616	0.253581	0.254145
2.600	-0.525232	-0.527660	-0.524080	-0.526124	-0.525407
3.800	0.452664	0.452950	0.454412	0.452013	0.453014
5.000	-0.200134	-0.196244	-0.198188	-0.201102	-0.199663
6.200	-0.047923	-0.037906	-0.046550	-0.049971	-0.047894
7.400	0.179436	0.202896	0.180249	0.176818	0.179764
8.600	-0.178511	-0.127924	-0.181571	-0.182897	-0.178960

Tabela 5.10 - Valores analíticos e numéricos (Durbin) para a função  $f_3$   
Fonte: Próprio Autor

Em conformidade com os resultados anteriores, os resultados do método de inversão para a função  $f_3$  são bons e convergem para o valor analítico conforme mais termos são adicionados. Tal fato reforça a confiabilidade das análises realizadas e indica consistência do Método proposto por [Durbin \(1974\)](#), tornando-o adequado para se acoplado ao MEC na resolução de problemas relacionados à equação da onda.

### 5.3 A transformada de Laplace no contexto do MEC

Nos exemplos anteriores as funções eram algébricas, de modo que era possível, até mesmo com o auxílio de tabelas, determinar a  $F(s)$  no espaço transformado e assim realizar a volta ao espaço físico. O mesmo ocorre se as transformadas são aplicadas em equações diferenciais ordinárias.

Em se tratando de Equações Diferenciais Parciais, como a equação da Onda, o tratamento das derivadas espaciais é feito pelo MEC, de modo que, ao final chega-se a um sistema composto por diversas equações algébricas acopladas, ainda dependentes do tempo. A transformada de Laplace é, então, uma ferramenta capaz de eliminar as derivadas com relação ao tempo. Porém, agora se apresenta um sistema algébrico de equações, não mais uma única equação diferencial ordinária.

O processo de aplicação do MECID com a transformada de Laplace (MECID-TL) envolve os passos descritos na figura (5.14).

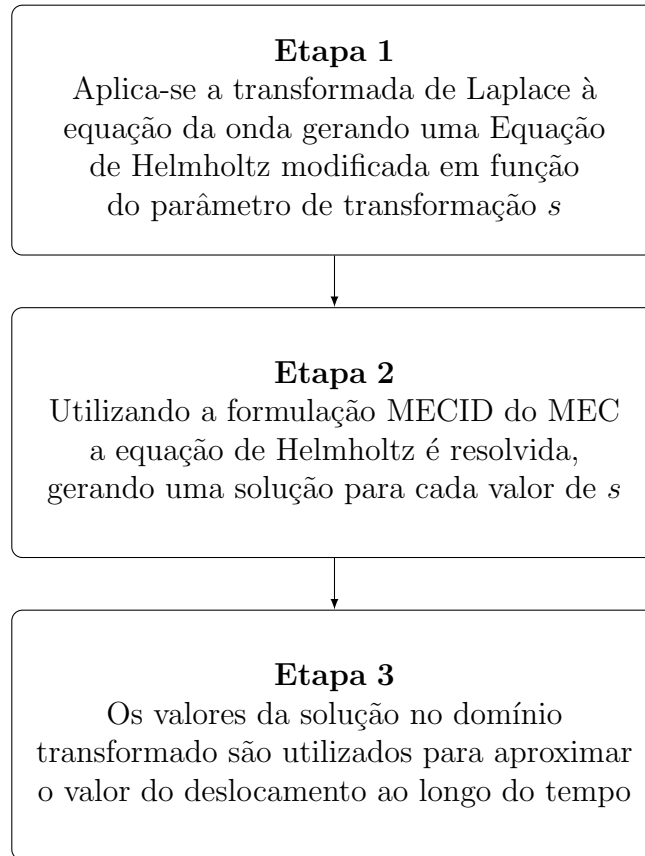


Figura 5.14: Fluxograma do MECID-TL  
Fonte: Próprio Autor

Os procedimentos delineados no fluxograma apresentado na figura [5.14] estão agrupados em três etapas distintas. A seguir, detalha-se cada uma dessas etapas, proporcionando uma maior compreensão do processo.

#### 5.4 Etapa 1: Aplicação da transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace, a equação da onda assume, no espaço transformado, a forma a seguir.

$$\nabla^2 U(\mathbf{X}, s) = \frac{1}{k^2} \left[ s^2 U(\mathbf{X}, s) - sU_0(\mathbf{X}) - \dot{U}_0(\mathbf{X}) \right] \quad (5.28)$$

Na equação (5.28),  $U(\mathbf{X}, s)$  é a transformada do potencial.

$$U(\mathbf{X}, s) = \mathcal{L}\{u(\mathbf{X}, t)\} \quad (5.29)$$

As condições de contorno são também transformadas.

$$U(\mathbf{X}, s) = \bar{U}(\mathbf{X}, s), \quad \text{em } \Gamma_u \quad (5.30)$$

$$Q(\mathbf{X}, s) = \bar{Q}(\mathbf{X}, s), \quad \text{em } \Gamma_q \quad (5.31)$$

### 5.5 Etapa 2: O MEC no Domínio Transformado de Laplace

Integra-se a equação (5.28) sobre o domínio físico  $\Omega(\mathbf{X})$ , usando uma função auxiliar, solução fundamental de um problema correlato,  $U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$ , resultando:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 U(\mathbf{X}, s) U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega = \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} [s^2 U(\mathbf{X}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.32)$$

onde  $b(\mathbf{X}, s) = -sU_0(\mathbf{X}) - \dot{U}_0(\mathbf{X})$  e  $U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  é a solução fundamental para o problema de Poisson. Ao lado esquerdo da equação (5.32) aplica-se então o procedimento padrão do MEC com a integração por partes e o teorema da Divergência, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\xi})U(\boldsymbol{\xi}, s) + \int_{\Gamma} U(\mathbf{X}, s)Q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma} Q(\mathbf{X}, s)U^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X})d\Gamma = \\ -\frac{1}{k^2} \int_{\Omega} [s^2 U(\mathbf{X}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \end{aligned} \quad (5.33)$$

O coeficiente  $c(\boldsymbol{\xi})$  considera as possibilidades de posicionamento do ponto fonte em relação ao domínio  $\Omega$  e ao contorno  $\Gamma$  e assume os valores descritos na equação (3.27). Observe ainda que o termo  $b(\mathbf{X}, s)$ , que computa as condições iniciais, se torna um termo de domínio nesta equação.

A transformação da integral do domínio presente no lado direito em integral de contorno é feita através da formulação da interpolação direta apresentada anteriormente. Para este problema, a regularização se dá conforme o procedimento descrito a seguir. Seja:

$$I_D = \int_{\Omega} [s^2 U(\mathbf{X}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.34)$$

Então:

$$\begin{aligned} I_D = \int_{\Omega} [s^2 U(\mathbf{X}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega + \int_{\Omega} [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \end{aligned} \quad (5.35)$$

Rearranjando os termos:

$$I_D = \int_{\Omega} s^2 [U(\mathbf{X}, s) - U(\boldsymbol{\xi}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega + \int_{\Omega} [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.36)$$

O tratamento destas integrais é realizado analogamente ao do capítulo anterior. Entretanto, devido à aplicação anterior da transformada de Laplace e inclusão do parâmetro  $s$  juntamente com as condições de contorno, há diferenças no termo de domínio, justificando a reprodução do procedimento para este caso.

### 5.5.1 Tratamento do Termo Regularizado

O termo regularizado,  $T_R$ , é exposto abaixo.

$$T_R = s^2 \int_{\Omega} [U(\mathbf{X}, s) - U(\boldsymbol{\xi}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.37)$$

O núcleo da integral é então aproximado utilizando funções de base radial ponderadas por coeficientes por hora indeterminados:

$$[U(\boldsymbol{\xi}, s) - U(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \approx \alpha_j^\xi F_j(\mathbf{X}) \quad (5.38)$$

Da mesma forma que na subsecção 3.3.1 o termo regularizado é tratado e pode ser escrito em função dos coeficientes a determinar  $\alpha_j^\xi$ , resultando em:

$$T_R \approx s^2 \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (5.39)$$

### 5.5.2 Tratamento do Termo Excedente

Uma vez tratado o termo regularizado, o último termo que demanda tratamento algébrico é o termo de domínio inserido na formulação devido ao artifício da regularização.

$$T_E = \int_{\Omega} [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.40)$$

Este último termo que pode ser tratado matematicamente via Tensor de Galerkin

(KYTHE, 1995) e assim ser transformado numa integral de contorno; toma-se inicialmente:

$$G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) = U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) \quad (5.41)$$

Pode-se escrever então:

$$T_E = \int_{\Omega} [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.42)$$

Ou ainda:

$$T_E = [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Omega \quad (5.43)$$

Aplicando o Teorema da Divergência, o termo excedente pode ser reescrito:

$$T_E = [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (5.44)$$

A derivada direcional de  $G^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})$  é:

$$G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) = \frac{1}{4\pi} \{0.5 - \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X})]\} r_i n_i \quad (5.45)$$

### 5.5.3 Discretização via MEC

Uma vez que todos os termos de domínio foram tratados, é possível escrever a equação integral de contorno.

$$\begin{aligned} & c(\boldsymbol{\xi}) U(\boldsymbol{\xi}, s) + \int_{\Gamma} U(\mathbf{X}, s) Q^*(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} Q(\mathbf{X}, s) U^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) d\Gamma = \\ & = \frac{1}{k^2} \left\{ s^2 \alpha_j^{\boldsymbol{\xi}} \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma + [s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) + b(\mathbf{X}, s)] \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Após a aplicação em todos os nós do contorno usando a técnica de colocação, a equação (5.46) pode ser expressa na forma matricial que correlaciona os valores nodais prescritos com os valores incógnitos. Um procedimento de discretização análogo ao apresentado no capítulo 4 é aplicado. O lado esquerdo da equação (5.46) gera as matrizes  $[\mathbf{H}]$ ,  $[\mathbf{G}]$  clássicas do MEC. O lado direito contabiliza os termos dependentes do parâmetro  $s$ , sendo estes divididos em três:

$$TE_1 = \left(\frac{s}{k}\right)^2 \alpha_j^\xi \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (5.47)$$

$$TE_2 = \left(\frac{s}{k}\right)^2 s^2 U(\boldsymbol{\xi}, s) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (5.48)$$

$$TE_3 = \frac{1}{k^2} b(\mathbf{X}, s) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (5.49)$$

A menos de uma contante, estes termos são semelhantes aos tratados na seção (3.4.3), e a sua discretização leva aos vetores a seguir, respectivamente:

$$\{\mathbf{P}(s)\} = \left(\frac{s}{k}\right)^2 \begin{bmatrix} (-S_2^1 \Lambda_2 - S_2^1 \Lambda_2 \cdots - S_3^1 \Lambda_3) & S_2^1 \Lambda_2 & \cdots & S_N^1 \Lambda_N \\ S_1^2 \Lambda_1 & (-S_1^2 \Lambda_1 - S_3^2 \Lambda_3 \cdots - S_N^2 \Lambda_N) & \cdots & S_N^2 \Lambda_N \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_1^N \Lambda_1 & S_2^N \Lambda_2 & \cdots & (-S_1^N \Lambda_1 - S_2^N \Lambda_2 \cdots - S_{N-1}^N \Lambda_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\{\mathbf{Q}(s)\} = \left(\frac{s}{k}\right)^2 \begin{bmatrix} (\int \mathbf{P}_{1,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{1,N} d\Gamma_N) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\int \mathbf{P}_{2,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{2,N} d\Gamma_N) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\int \mathbf{P}_{N,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{N,N} d\Gamma_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\{\mathbf{R}(s)\} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} (\int \mathbf{P}_{1,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{1,N} d\Gamma_N) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\int \mathbf{P}_{2,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{2,N} d\Gamma_N) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\int \mathbf{P}_{N,1} d\Gamma_1 + \cdots + \int \mathbf{P}_{N,N} d\Gamma_N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_N(s) \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

Explicitadas as composições destes vetores,  $\{\mathbf{P}(s)\}$  e  $\{\mathbf{Q}(s)\}$  podem ser agrupados de forma a compor a matriz  $[\mathbf{M}]$  relativa à rigidez:

$$\{\mathbf{P}(s)\} + \{\mathbf{Q}(s)\} = [\mathbf{M}]\{\mathbf{U}(s)\} \quad (5.53)$$

Uma vez executado com sucesso o procedimento de discretização da equação integral de governo, é possível gerar o sistema linear responsável por calcular as incógnitas em cada elemento do contorno.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{U}(s)\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{Q}(s)\} = [\mathbf{M}(s)]\{\mathbf{U}(s)\} + \{\mathbf{R}(s)\} \quad (5.54)$$

O sistema é então operacionalizado de forma a separar os termos conhecidos dos termos desconhecidos do potencial e da derivada do potencial. Os valores desconhecidos são condensados em um vetor  $\{\mathbf{Y}(s)\}$  os valores conhecidos agrupados juntamente com  $\{\mathbf{R}(s)\}$  em um vetor  $\{\bar{\mathbf{R}}(s)\}$  :

$$[\mathbf{A}(s)]\{\mathbf{Y}(s)\} = \{\bar{\mathbf{R}}(s)\} \quad (5.55)$$

Observe que o sistema descrito pela equação (5.55) não depende do tempo. Isto acontece pois, como destacado no início do capítulo, o problema dinâmico foi transformado em um problema estacionário que é função da variável de transformação  $s$ .

#### 5.5.4 Cálculo do Potencial em Pontos Internos

A solução do sistema descrito na equação (5.55) não considera, a priori, valores incógnitos nos pontos internos. O valor do potencial nestes é comumente determinado após a obtenção das incógnitas no contorno, retornando-se à equação (5.46) e considerando o ponto fonte  $\xi$  coincidente com o ponto interno no qual se deseja conhecer o valor do potencial. Como em pontos internos o valor de  $c(\xi)$  é unitário, a equação, omitindo os argumentos, reduz-se a:

$$U_d = - \int_{\Gamma} U Q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} Q U^* d\Gamma + \frac{1}{k^2} \left\{ s^2 \alpha_j^{\xi} \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma + [s^2 U + b] \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \right\} \quad (5.56)$$

Com os valores das variáveis no contorno já determinados, o cálculo das integrais na equação (5.56) torna-se direto. Alternativamente, pode-se calcular os valores do potencial para os pontos internos simultaneamente com as incógnitas do contorno durante a resolução do sistema de equações algébricas do MEC. Para isso, a equação (5.56) é reescrita em submatrizes e incluída na expressão matricial da equação (5.54). Isso resulta na equação

(5.57), que, após a aplicação das condições de contorno, permite obter simultaneamente as incógnitas no contorno e os potenciais dos pontos internos.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_I & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_\Gamma \\ \mathbf{U}_I \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_\Gamma \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\Gamma & \mathbf{M}'_\Gamma \\ \mathbf{M}_I & \mathbf{M}'_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_\Gamma \\ \mathbf{U}_I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_\Gamma \\ \mathbf{R}_I \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

Na equação (5.57) as submatrizes e vetores com subíndice  $\Gamma$  são referentes às incógnitas no contorno e o subíndice  $I$  indica os valores desconhecidos no domínio interior.

### 5.5.5 Etapa 3: Procedimento de Inversão

Define-se um conjunto  $\mathcal{T}$  de valores de tempo onde se tem interesse de conhecer a configuração do sistema. Estes valores são escolhidos de forma a possibilitar a caracterização do comportamento dinâmico do sistema. Define-se também um conjunto  $\mathcal{S}$  com os valores  $s_1, s_2, \dots, s_M$ , escolhidos conforme o procedimento descrito na secção 5.2.3.

O sistema descrito pela equação (5.55) é resolvido para cada um destes valores, gerando soluções  $\{\mathbf{Y}_1\}, \{\mathbf{Y}_2\}, \dots, \{\mathbf{Y}_M\}$ . Por fim, estas soluções são utilizados para alimentar a equação (5.24) de forma a aproximar a configuração do sistema nos instantes de tempo  $t_i \in \mathcal{T}$  onde se deseja conhecer a configuração do sistema.

Observe que os valores  $s_1, s_2, \dots, s_M$  da variável transformada são complexos, isto torna as operações matriciais mais complexas e custosas.

## 5.6 Simulações Numéricas

Nesta seção são descritos os testes numéricos conduzidos no estudo da formulação descrita neste capítulo; ou seja, é dedicada a expor a resposta da formulação MECID-TL a diversos tipos de simulações no intuito de avaliar sua performance nos problemas dinâmicos regidos pela equação da onda.

### 5.6.1 Objetivos

Numa perspectiva histórica, deve-se notar que a qualidade dos resultados de formulações que utilizam a transformada de Laplace sempre dependeu fortemente do tipo de problema abordado devido às especificidades dos métodos de inversão (DAVIES;

MARTIN, 1979). O esquema de inversão de Stehfest é eficaz para problemas de transferência de calor, onde as respostas são governadas por funções exponenciais negativas. Por outro lado, problemas de propagação de ondas, expressos em termos de funções harmônicas, são bem representados por modelos de inversão que se fundamentem em séries completas de Fourier. Assim, o objetivo primário dos experimentos a seguir é verificar se o acoplamento da técnica de Durbin com MECID fornece resultados com bom nível de precisão em problemas dinâmicos.

Um segundo objetivo é comparar o custo computacional, indicado pelo tempo de execução do algoritmo, da formulação MECID-TL com a MECID-SM, desenvolvida no capítulo anterior, e a MECID-IT, utilizada em trabalhos anteriores (LOEFFLER; SANTOS; LARA, 2024).

### 5.6.2 Metodologia

A metodologia para estes experimentos é, em sua essência, igual à descrita no capítulo anterior, com os meios simulados são considerados homogêneos, isotrópicos com propriedades mecânicas unitárias. As malhas incorporando nós duplos nas quinas e discretização realizada com base em elementos de contorno lineares. As integrais do MEC foram calculadas utilizando 20 pontos de Gauss distribuídos segundo o esquema autoadaptativo de Telles (1987) e os sistemas lineares resolvidos através do método de eliminação de Gauss.

#### *Inversão Numérica da Transformada*

A inversão numérica da solução transformada será realizada através do Método de Durbin (DURBIN, 1974). As simulações realizadas terão como foco maior a influencia do número de termos da série,  $M$ , na qualidade da solução.

#### *Software e Hardware*

As simulações foram feitas com o auxílio de um computador Dell Latitude 7390 com processador Intel(R) Core(TM) i5-8350U (1.90 GHz). Os códigos foram escritos na linguagem Fortran 90 e compilados via Microsoft Fortran PowerStation.

### 5.6.3 Exemplo I

O primeiro exemplo resolvido representa uma barra engastada submetida à carga repentina (Função degrau unitário). Uma vez transformadas, as condições iniciais e de contorno assumem a forma a seguir.

$$U(x, y, 0) = 0$$

$$\dot{U}(x, y, 0) = 0$$

$$U(0, y, s) = 0$$

$$Q(1, y, s) = \frac{1}{s}$$

$$Q(x, 0, s) = 0$$

$$Q(x, 1, s) = 0$$

Os testes subsequentes foram realizados utilizando uma malha  $NEL|NPI = 160|144$ . A Figura [5.15] apresenta a distribuição dos pontos que delimitam os elementos de contorno e dos pontos internos.

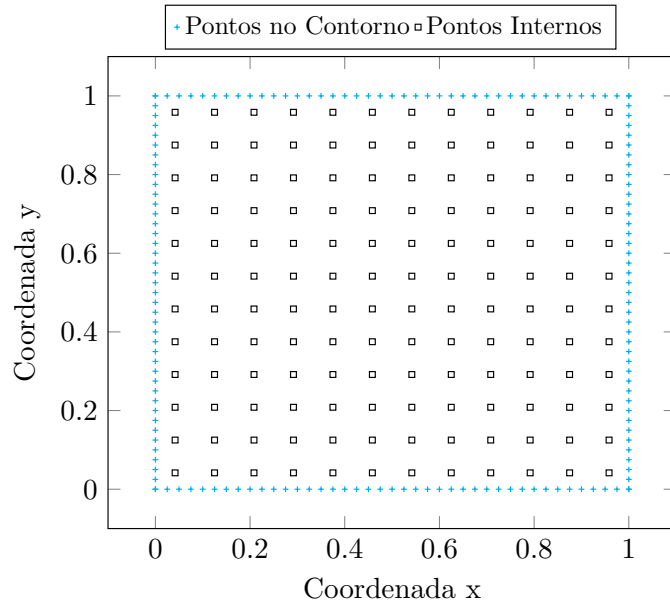


Figura 5.15: Distribuição dos pontos na malha NEL|NPI = 160|144  
Fonte: Próprio Autor

A primeira simulação para este caso é a busca pelo potencial no ponto  $P_1$  localizado no centro da aresta direita. As Figuras [5.16 - 5.21] apresentam os resultados utilizando o MECID-TL para diferentes valores do parâmetro M.

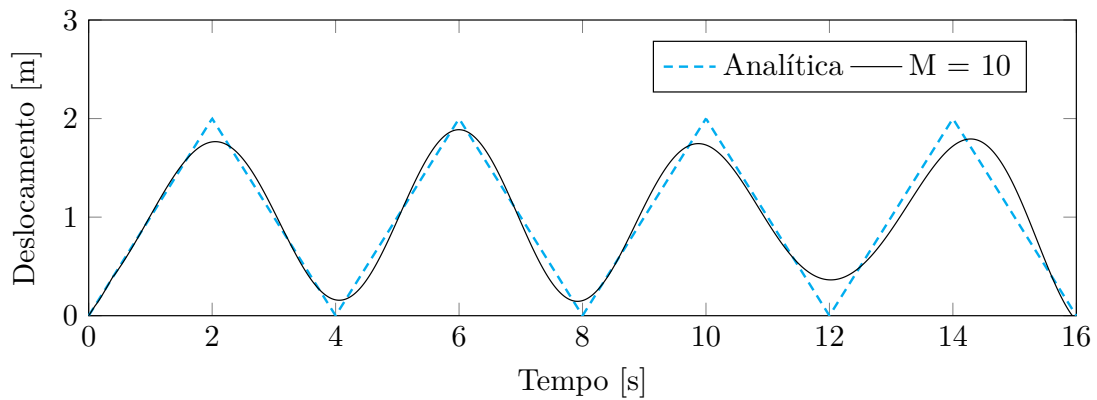


Figura 5.16: Deslocamento em  $P_1$  para M = 10  
Fonte: Próprio Autor

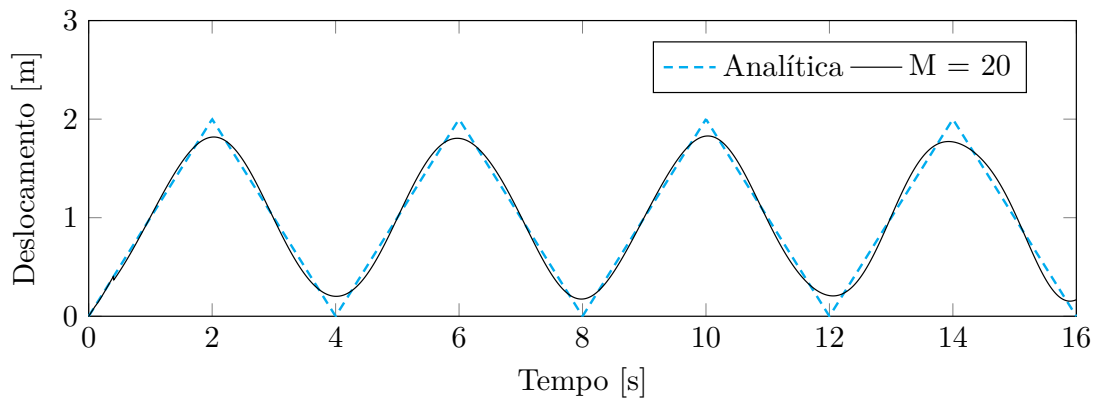


Figura 5.17: Deslocamento em  $P_1$  para  $M = 20$   
Fonte: Próprio Autor

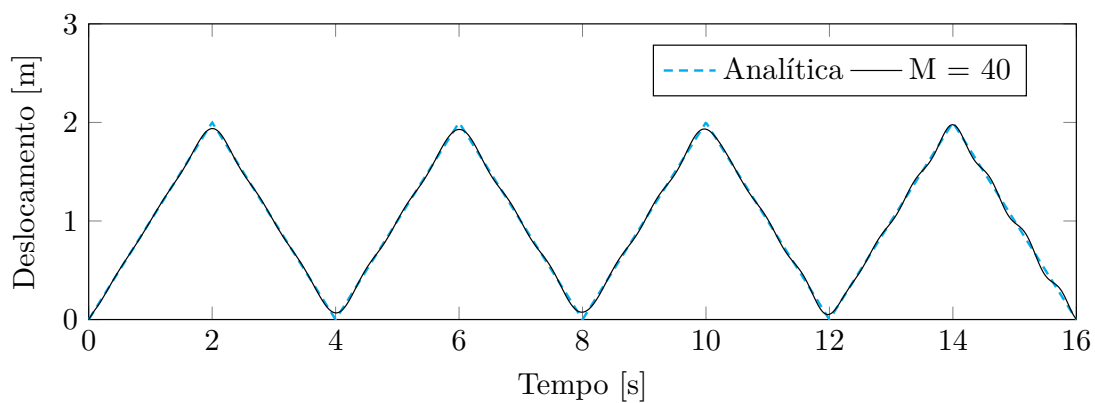


Figura 5.18: Deslocamento em  $P_1$  para  $M = 40$   
Fonte: Próprio Autor

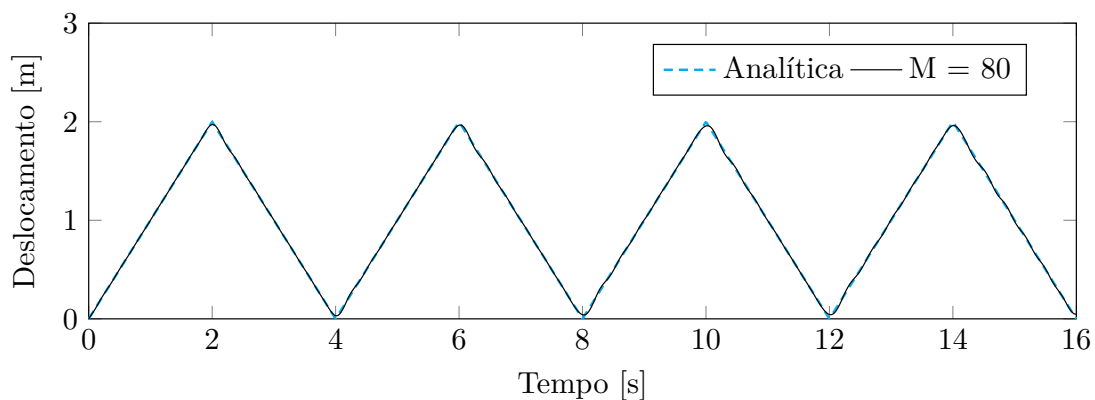


Figura 5.19: Deslocamento em  $P_1$  para  $M = 80$   
Fonte: Próprio Autor

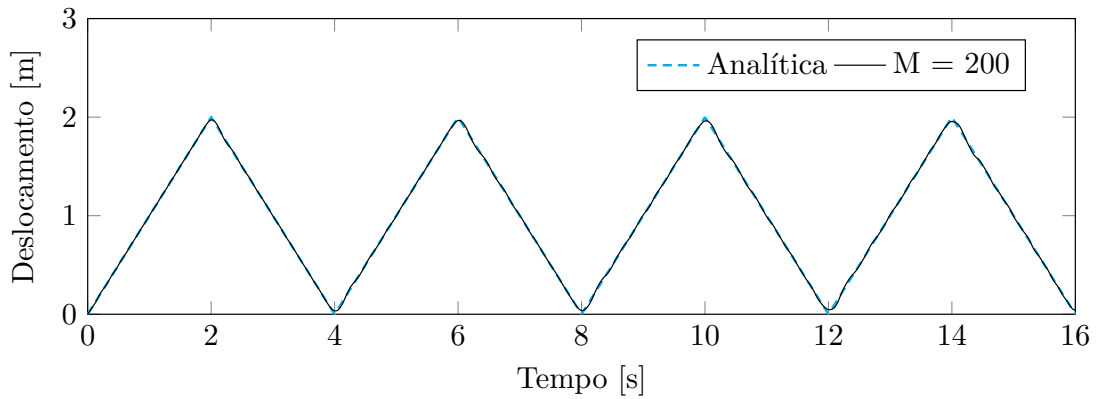


Figura 5.20: Deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  para  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

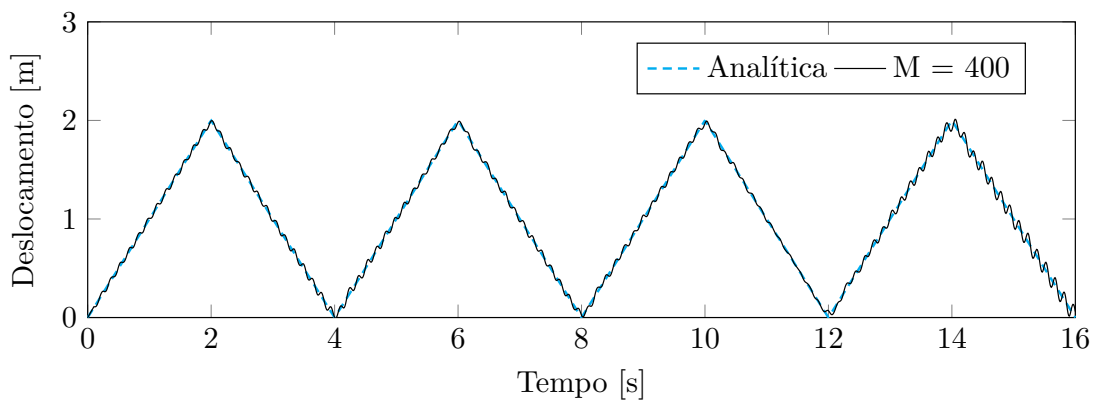


Figura 5.21: Deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  para  $M = 400$   
Fonte: Próprio Autor

Para  $M \leq 20$ , o método entrega resultados de baixa precisão. Entretanto, nota-se uma melhora visível da solução numérica conforme o número de termos considerados aumenta e, para um total de 100 termos, a resposta do MECID-TL é praticamente idêntica à resposta analítica. Estes resultados são ratificados pelo gráfico do erro percentual apresentado na figura [5.22].

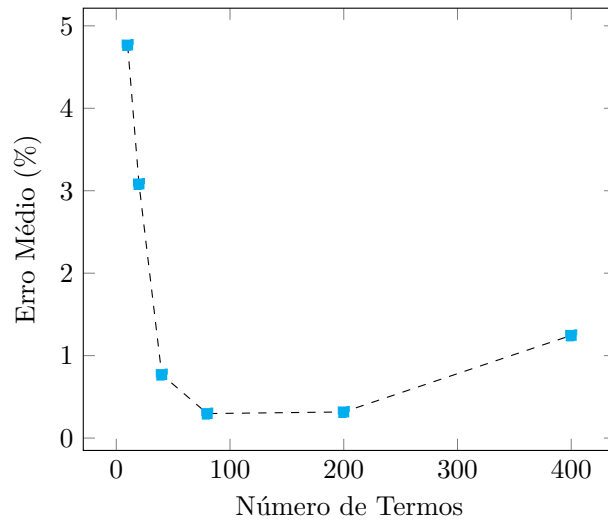


Figura 5.22: Erro médio na determinação do deslocamento em  $P_1$   
Fonte: Próprio Autor

Esse fenômeno é característico das séries de Fourier, onde o acréscimo de termos aumenta o custo computacional, porém eleva a precisão do método. Essa dinâmica guarda semelhança com a superposição modal, em que a inclusão de mais modos resulta em uma resposta mais precisa. Se o valor de  $M$  for excessivo, os resultados numéricos não melhoram como ocorre com  $M = 400$ ; pelo contrário, podem surgir oscilações típicas relacionadas a erros de arredondamento computacional. Além disso, o tempo de processamento cresce, fato que pode ser mais relevante em sistemas mais complexos, com muitos graus de liberdade.

O experimento a seguir consiste em determinar o valor da tensão no ponto  $P_2$  localizado no centro da aresta esquerda. As figuras [5.23 - 5.28] apresentam os resultados para diferentes valores do parâmetro  $M$ .

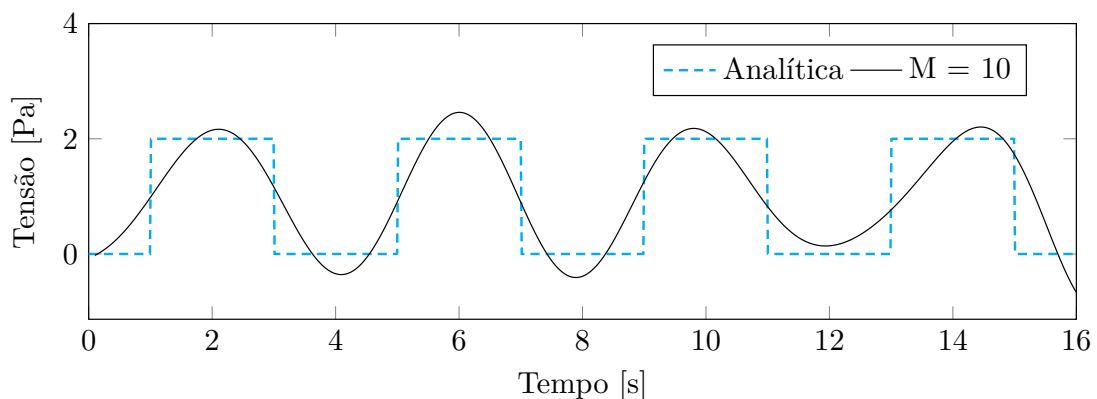


Figura 5.23: Tensão em  $P_2$  para  $M = 10$   
Fonte: Próprio Autor

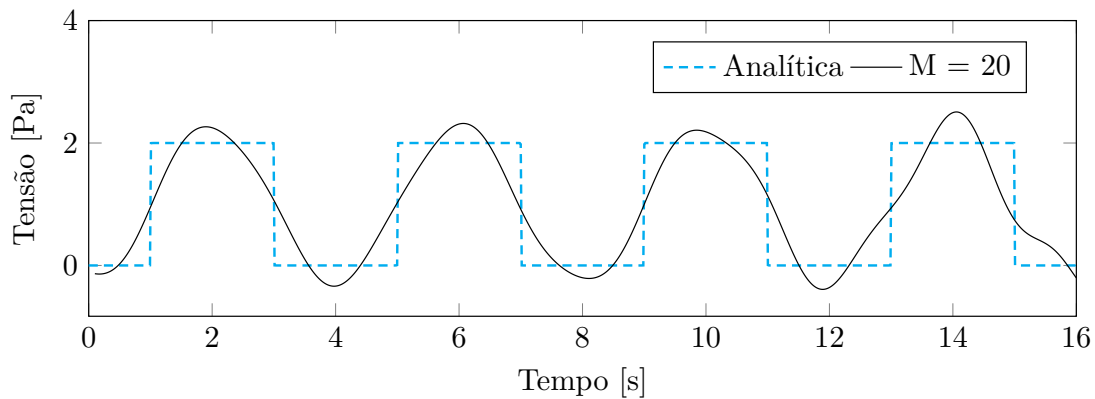


Figura 5.24: Tensão em  $P_2$  para  $M = 20$   
Fonte: Próprio Autor

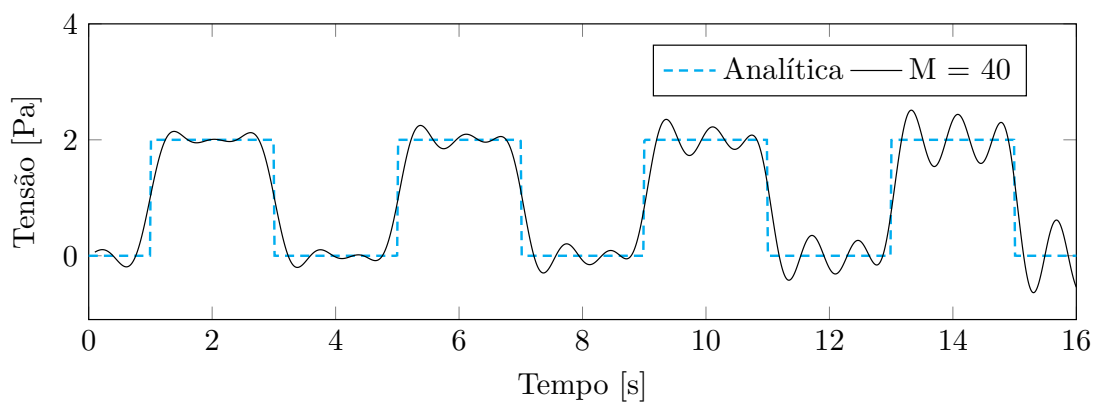


Figura 5.25: Tensão em  $P_2$  para  $M = 40$   
Fonte: Próprio Autor

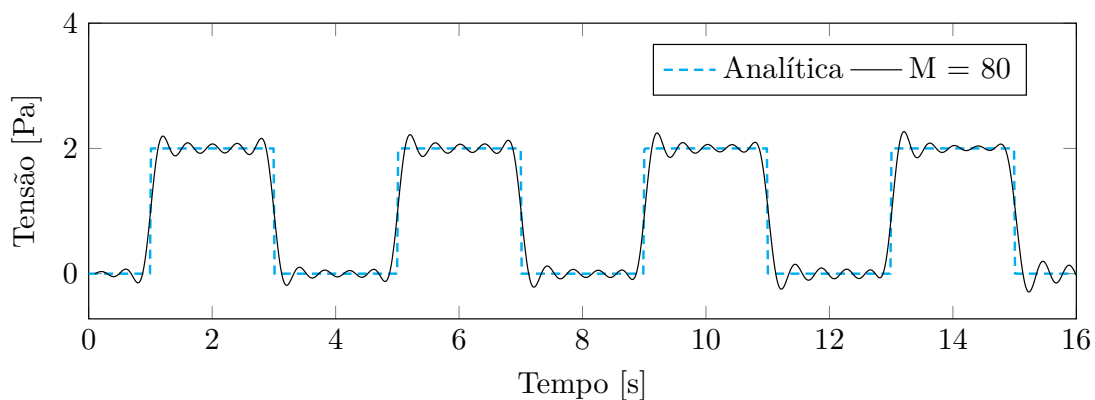


Figura 5.26: Tensão em  $P_2$  para  $M = 80$   
Fonte: Próprio Autor

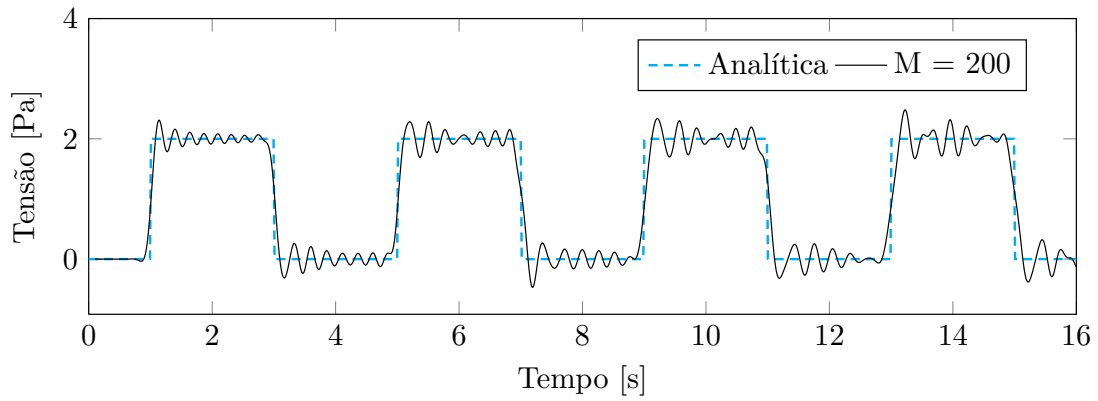


Figura 5.27: Tensão em  $P_2$  para  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

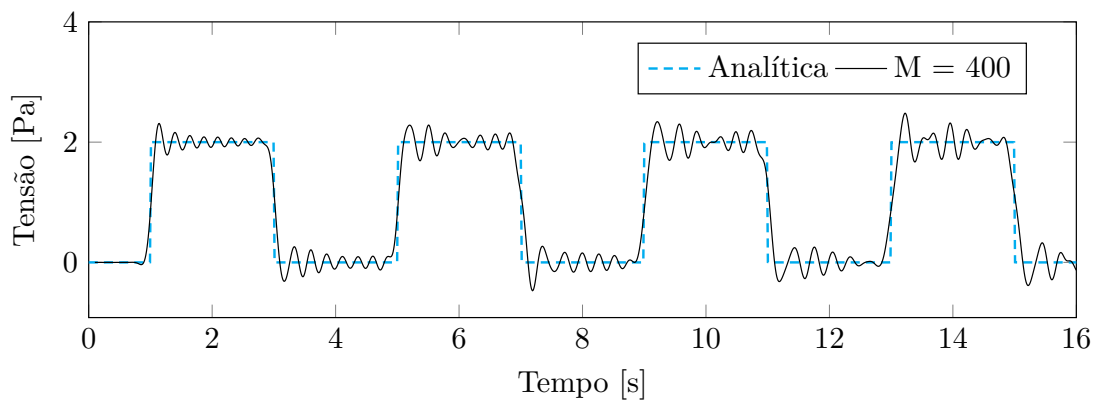


Figura 5.28: Tensão em  $P_2$  para  $M = 400$   
Fonte: Próprio Autor

O erro médio percentual no cálculo da tensão em  $P_2$  é apresentado na figura [5.29] a seguir.

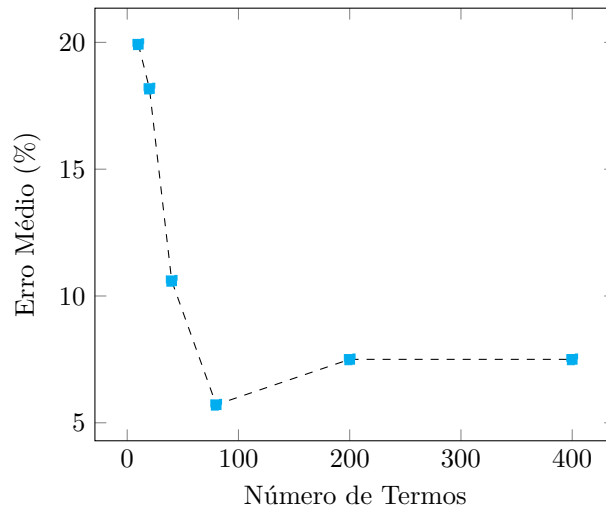


Figura 5.29: Erro médio na determinação da tensão em  $P_2$   
Fonte: Próprio Autor

Em conformidade com o resultado anterior, observa-se um aumento na qualidade da resposta à medida que mais termos são incorporados à série, até 80 termos. A partir daí, há uma perda de precisão. As flutuações presentes na resposta numérica, principalmente próximas às descontinuidades, podem ser creditadas ao fenômeno de Gibbs.

Durante os experimentos notou-se que o nível de precisão alcançado para um determinado número de termos considerados na série de inversão é dependente do intervalo de tempo no qual se busca a resposta. Isto é, quando comparado com um intervalo maior, para um menor intervalo de tempo, o nível de precisão alcançado considerando um número fixo de termos é maior. Os resultados de um teste adicional realizado fixando o número de termos em  $M = 20$  e buscando o deslocamento em  $P_1$  para diferentes intervalos de tempo são explicitados nas figuras [5.30 - 5.35].

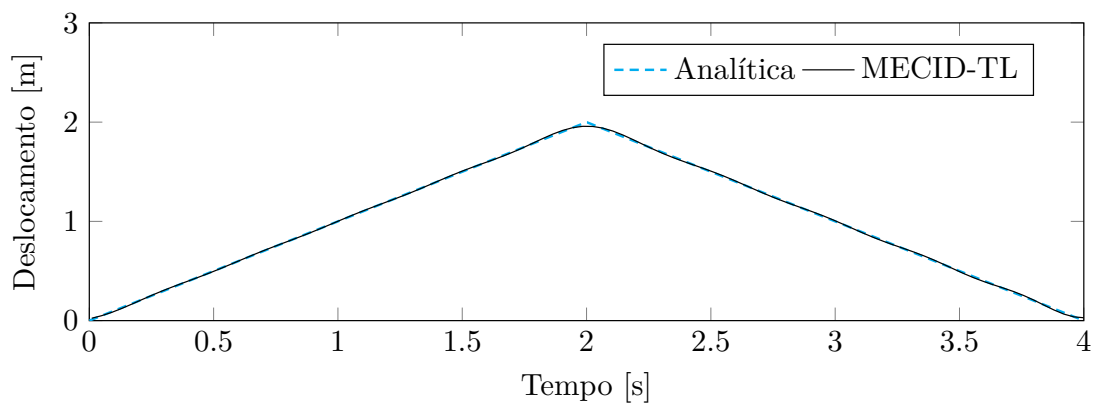


Figura 5.30: Deslocamento em  $P_1$  nos primeiros 4 segundos  
Fonte: Próprio Autor

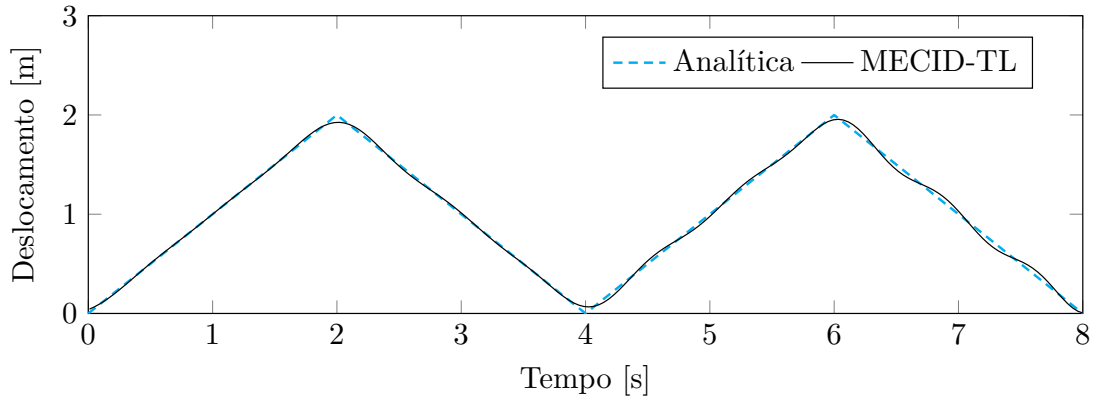


Figura 5.31: Deslocamento em  $P_1$  nos primeiros 8 segundos  
Fonte: Próprio Autor

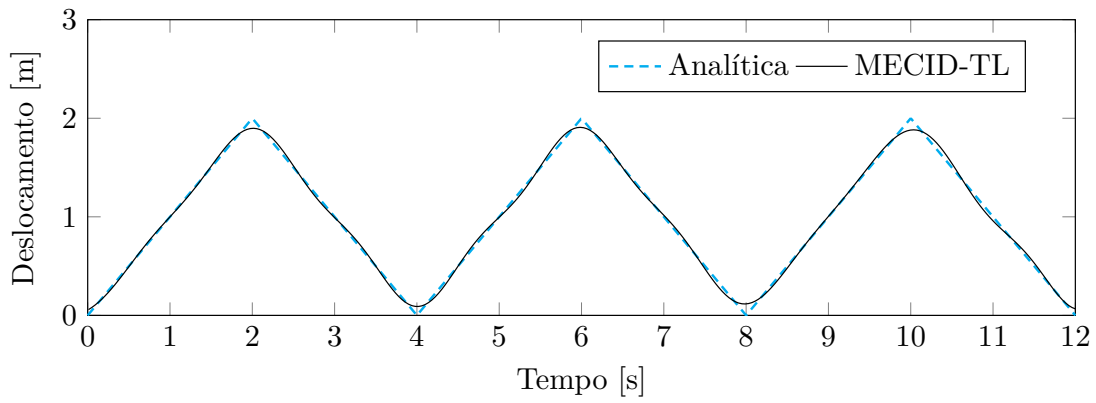


Figura 5.32: Deslocamento em  $P_1$  nos primeiros 12 segundos  
Fonte: Próprio Autor

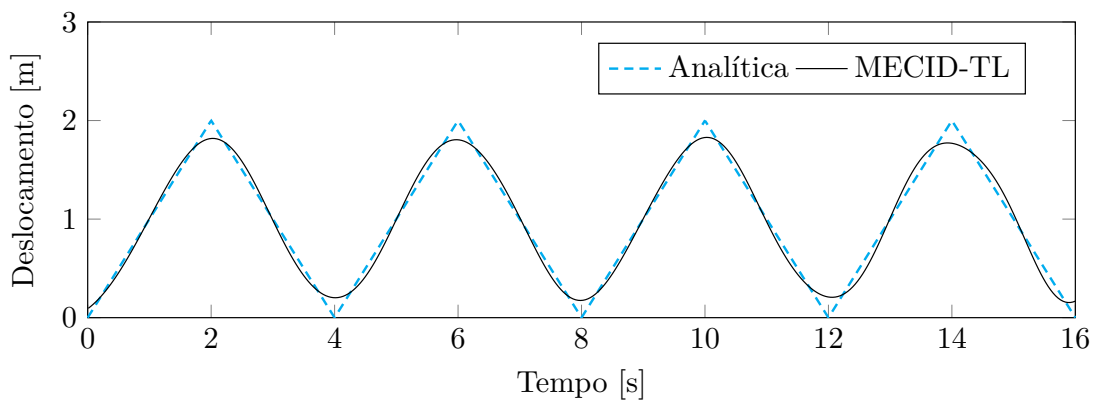


Figura 5.33: Deslocamento em  $P_1$  nos primeiros 16 segundos  
Fonte: Próprio Autor

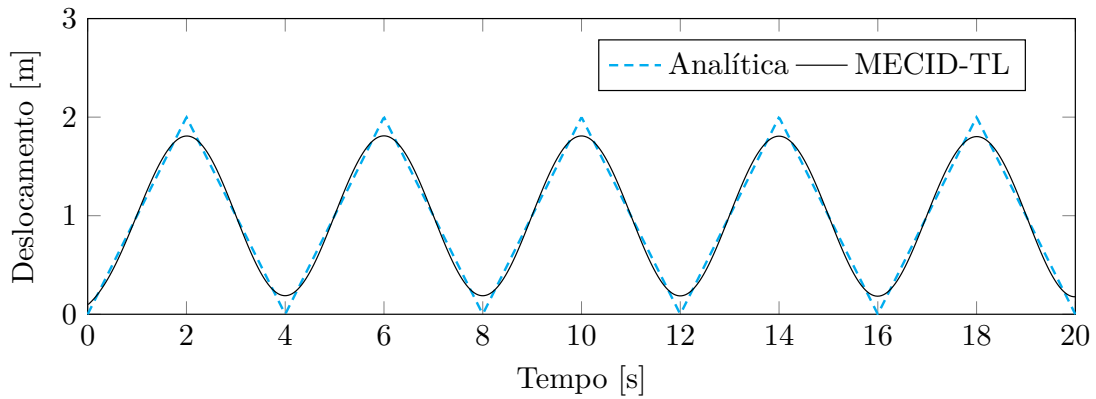


Figura 5.34: Deslocamento em  $P_1$  nos primeiros 20 segundos  
Fonte: Próprio Autor

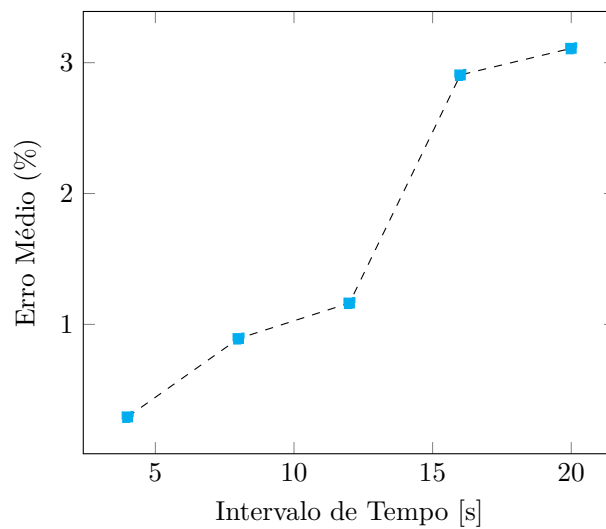


Figura 5.35: Erro médio ( $\bar{E}$ ) em cada intervalo  
Fonte: Próprio Autor

Esse comportamento resulta da transformada de Laplace operar como um mapeamento da função na variável transformada  $s$ . Portanto, o volume de informações necessárias para representar corretamente o potencial no domínio transformado aumenta com o intervalo de tempo considerado. Essa característica é interessante quando o intervalo de tempo é pequeno, pois o número de termos da série de Durbin necessário para atingir um nível específico de precisão é reduzido. No entanto, torna-se desvantajosa para intervalos longos, já que a necessidade de um grande número de termos pode fazer com que o tempo de execução computacional se torne proibitivo.

## 5.6.4 Exemplo II

O segundo exemplo, é a membrana curva com simetria circunferencial. As condições de contorno e iniciais transformadas são descritas a seguir.

$$U(r, \theta, 0) = 0$$

$$\dot{U}(r, \theta, 0) = 0$$

$$Q(1, \theta, s) = 0$$

$$U(5, \theta, s) = 0$$

$$Q(r, 0, s) = 0$$

$$Q(r, \frac{\pi}{2}, s) = 0$$

Os experimentos serão realizados utilizando uma malha fixa  $NEL|NPI = 160|357$ . os pontos que compõem esta malha são apresentados na figura [5.36].

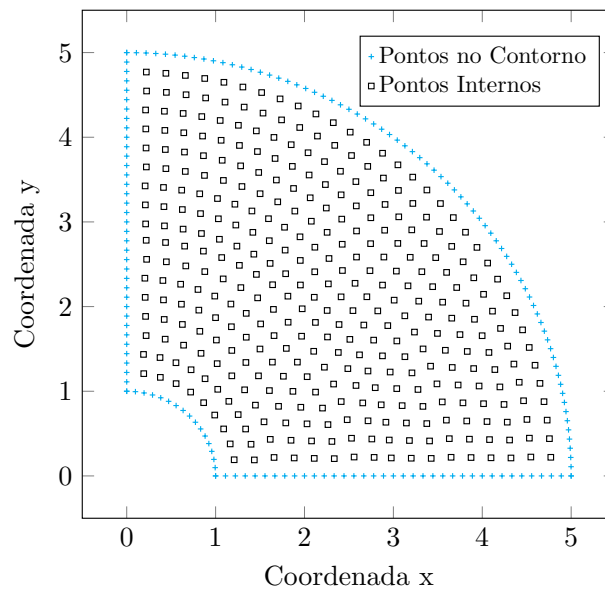


Figura 5.36: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 160|357$   
Fonte: Próprio Autor

O primeiro teste, para este exemplo, consiste em determinar o deslocamento ao longo do tempo do ponto  $P_3$  localizado no centro do arco menor. É considerado um número crescente de termos na composição da transformada inversa. Os resultados para  $M = 10, 20, 40, 80$  e  $200$  são apresentados nas figuras [5.37 - 5.41] a seguir. Já a figura [5.42] apresenta o gráfico do erro percentual médio.

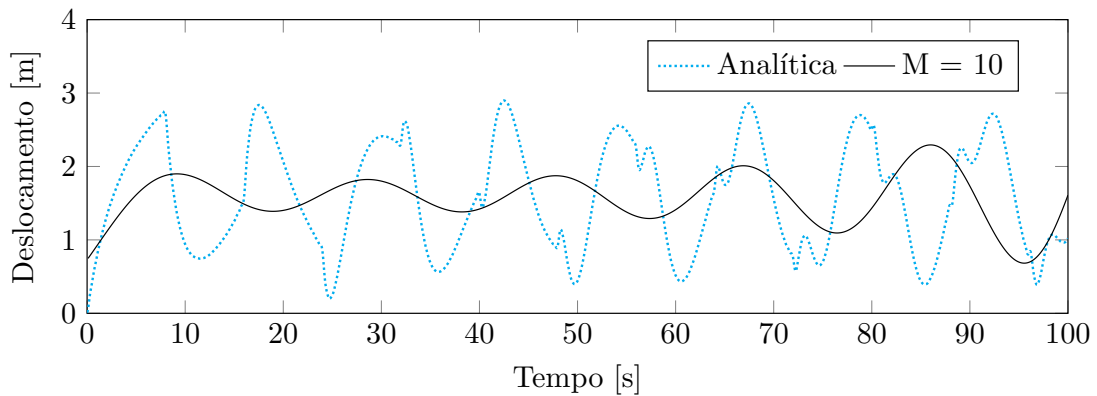


Figura 5.37: Deslocamento em  $P_3$  para  $M = 10$   
Fonte: Próprio Autor

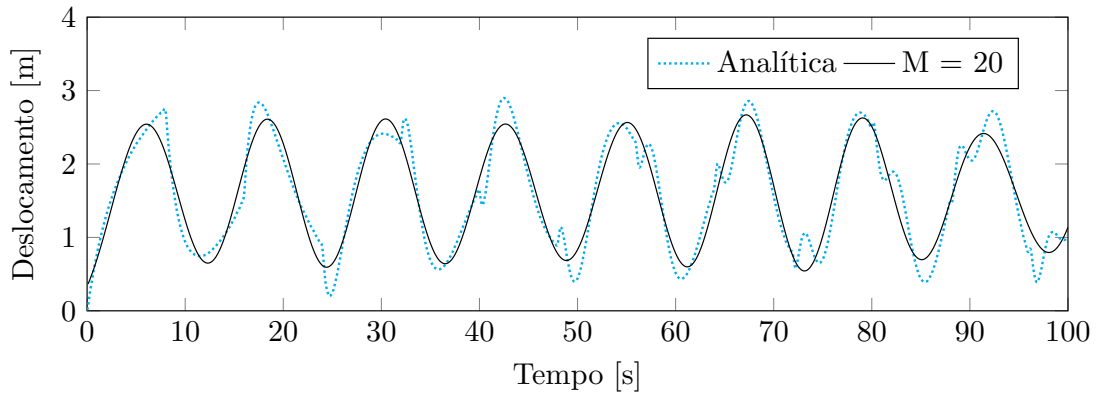


Figura 5.38: Deslocamento em  $P_3$  para  $M = 20$   
Fonte: Próprio Autor

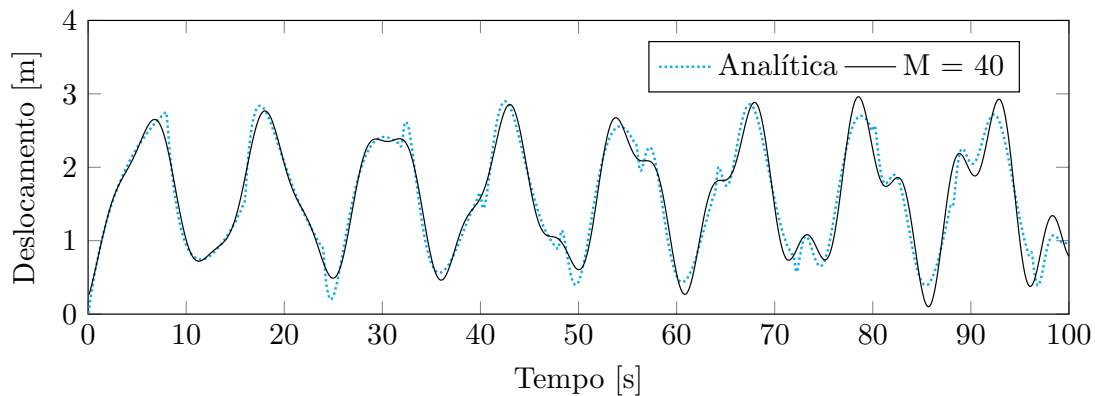


Figura 5.39: Deslocamento em  $P_3$  para  $M = 40$   
Fonte: Próprio Autor

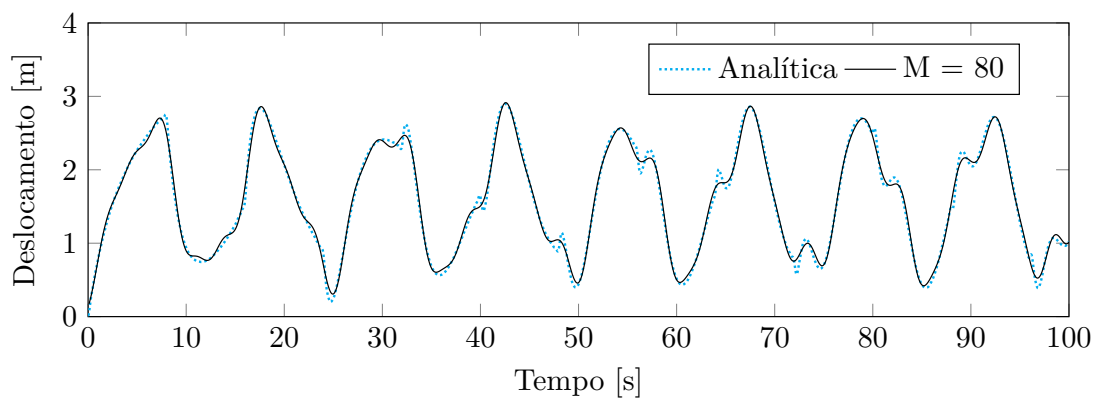


Figura 5.40: Deslocamento em  $P_3$  para  $M = 80$   
Fonte: Próprio Autor

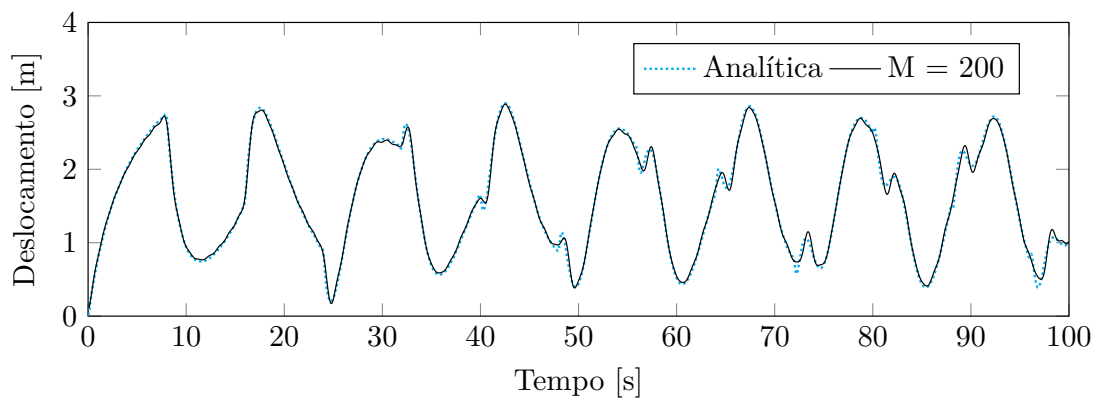


Figura 5.41: Deslocamento em  $P_3$  para  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

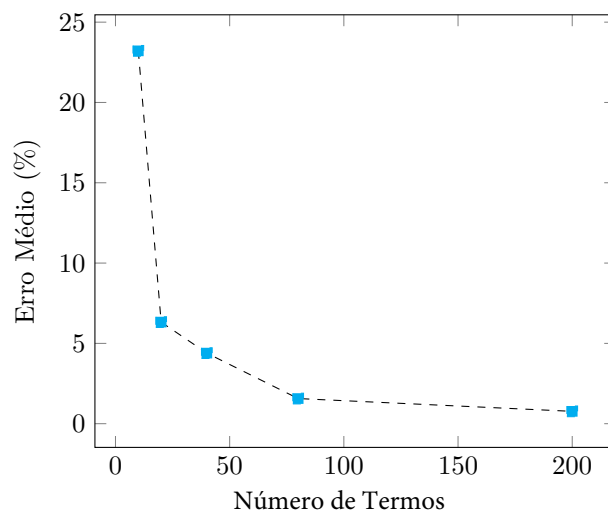


Figura 5.42: Erro médio na determinação do deslocamento em  $P_3$   
Fonte: Próprio Autor

Os resultados apresentados são semelhantes ao exemplo anterior; conforme mais termos são considerados, maior é a precisão do método. O experimento seguinte busca, mais uma vez, observar o impacto do número de termos considerados na série de Durbin da equação de inversão na precisão dos resultados. Para isso, busca-se, desta vez, caracterizar o comportamento da tensão no ponto  $P_4$ , localizado no centro do arco maior. Os resultados deste segundo experimento são apresentados nas figuras [5.43 - 5.49] a seguir, enquanto o erro percentual é apresentado na figura [5.48].

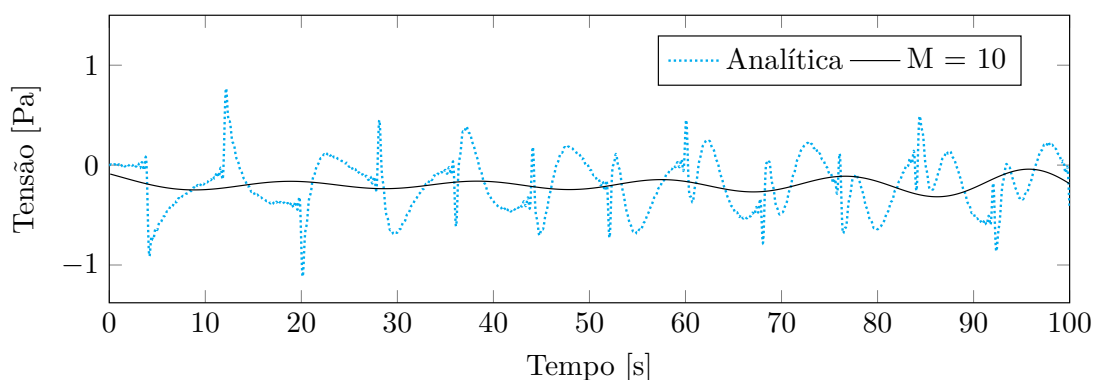


Figura 5.43: Tensão em  $P_3$  para  $M = 10$   
Fonte: Próprio Autor

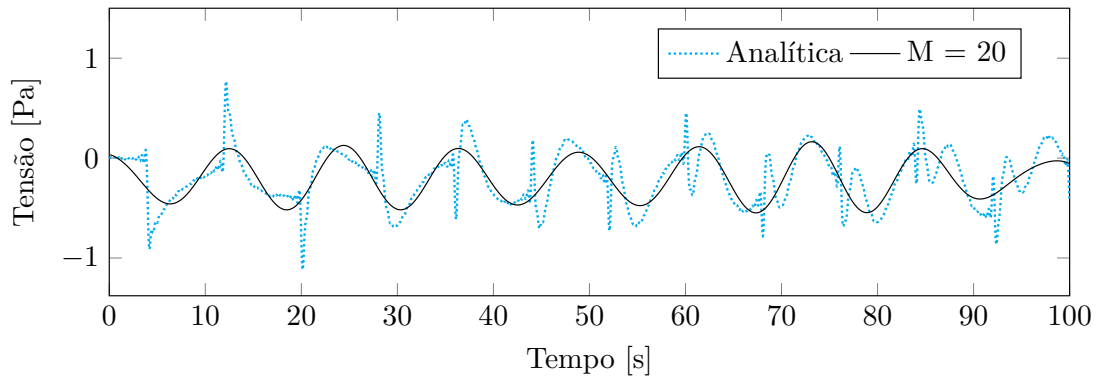


Figura 5.44: Tensão em  $P_3$  para  $M = 20$   
Fonte: Próprio Autor

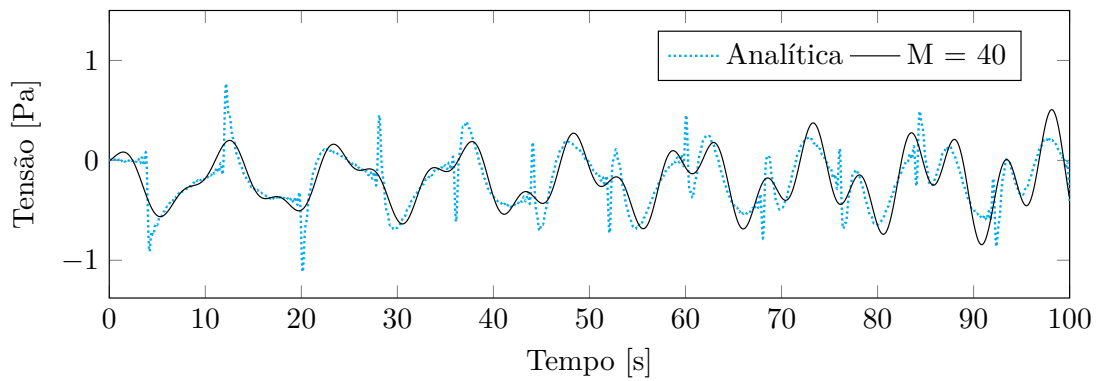


Figura 5.45: Tensão em  $P_3$  para  $M = 40$   
Fonte: Próprio Autor

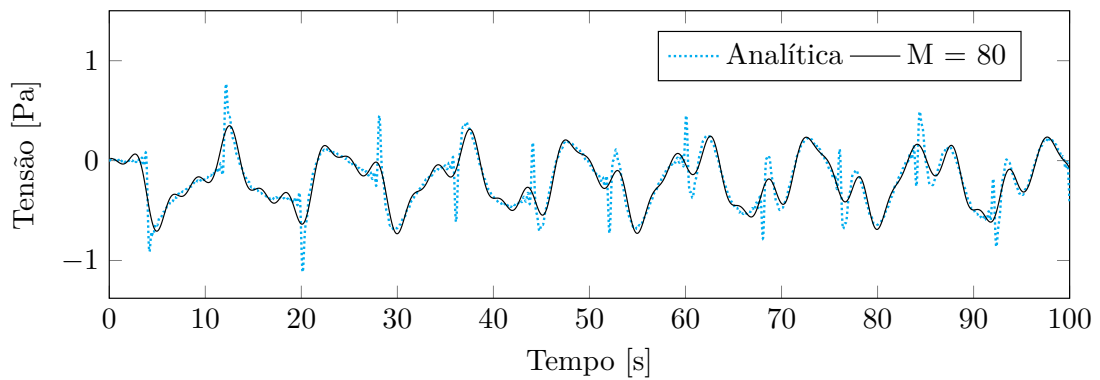


Figura 5.46: Tensão em  $P_3$  para  $M = 80$   
Fonte: Próprio Autor

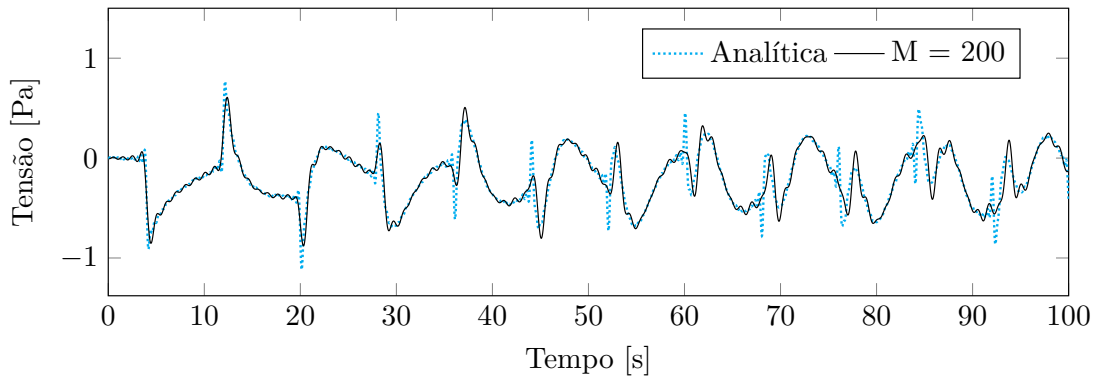


Figura 5.47: Tensão em  $P_3$  para  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

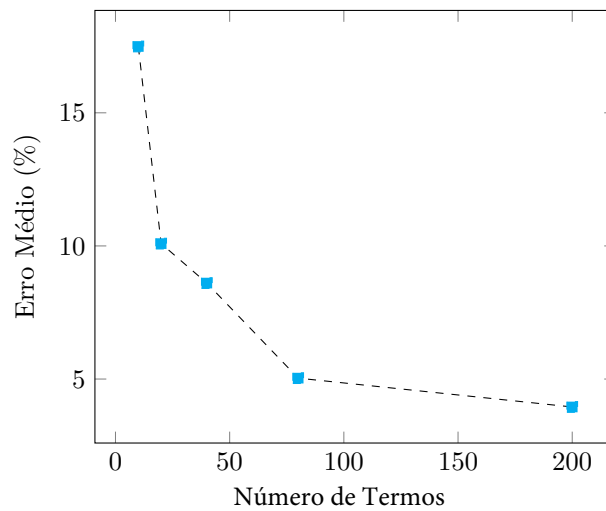


Figura 5.48: Erro médio na determinação da tensão em  $P_4$   
Fonte: Próprio Autor

Há uma melhora dos resultados conforme mais termos são adicionados. Ainda assim, mesmo para um total de 200 termos há uma dificuldade em representar os “picos”, indicando a complexidade do problema resolvido. Uma experiência adicional é realizada para  $M = 1000$  para verificar se um número maior de termos gera uma resposta mais precisa.

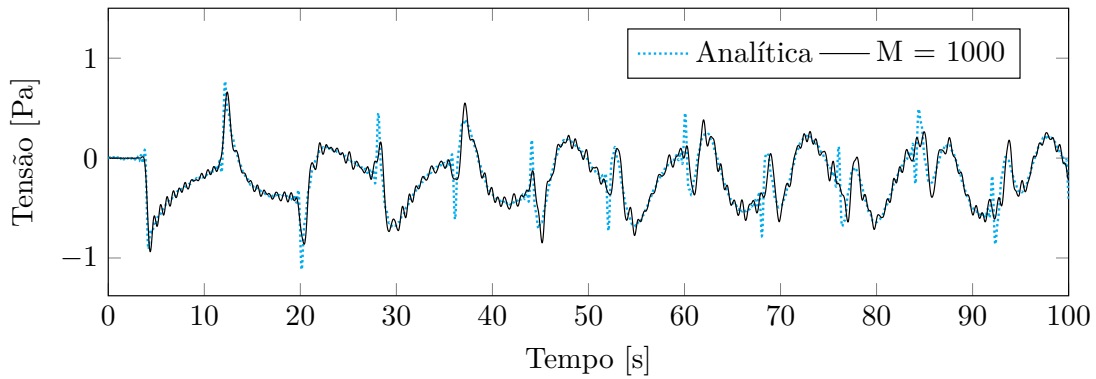


Figura 5.49: Tensão em  $P_3$  para  $M = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

Observa-se que não há uma melhoria na qualidade da resposta em comparação com o resultado para  $M = 200$ . Pelo contrário, percebe-se o surgimento de flutuações na resposta, provavelmente devido ao acúmulo de erros de arredondamento. Outra abordagem para tentar melhorar a caracterização da resposta dinâmica é a inclusão de mais pontos interpolantes. Para tal, utiliza-se uma malha  $NEL|NPI = 320|1471$ , com os pontos de contorno e interpolantes distribuídos conforme figura [5.50].

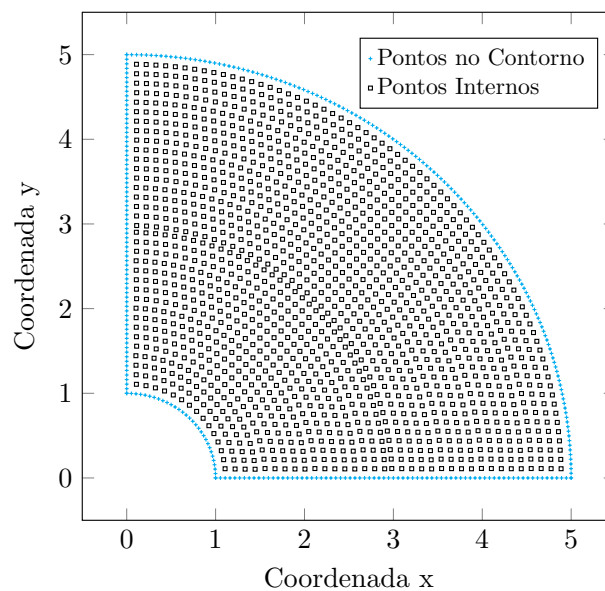


Figura 5.50: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 320|1471$   
Fonte: Próprio Autor

Os resultados da tensão em  $P_4$  para esta malha mais refinada, considerando um total de 200 termos, é apresentado na figura [5.51].

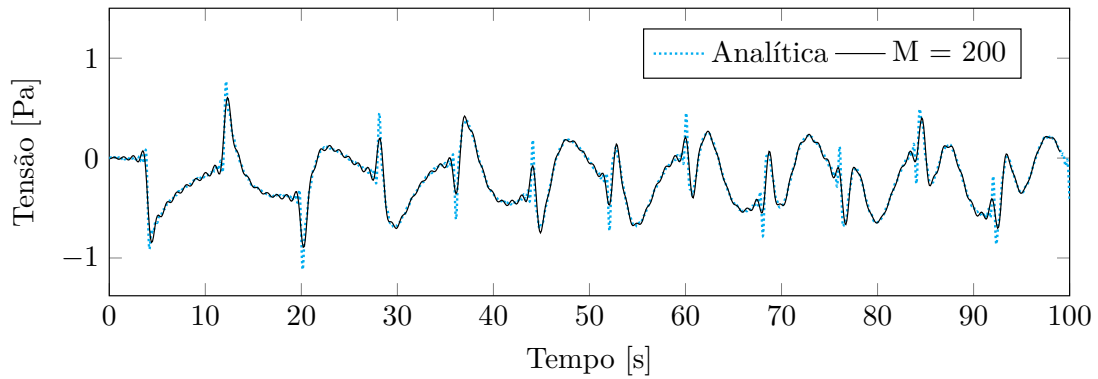


Figura 5.51: Tensão em  $P_3$  para  $M = 200$  com malha mais refinada  
Fonte: Próprio Autor

A inclusão de mais pontos interpolantes no domínio interior, leva a uma melhor caracterização numérica das propriedades do domínio simulado. Com isso, se explica a melhora nos resultados quando estes são comparados aos resultados anteriores, figura [5.47].

### 5.6.5 Exemplo III

Neste terceiro exemplo resolve-se uma barra submetida a um carregamento periódico, em que a frequência de excitação é uma variável arbitrária e assumirá diversos valores de forma a analisar sua influência no comportamento da domínio. As condições de contorno e iniciais transformadas são:

$$U(x, y, 0) = 0$$

$$\dot{U}(x, y, 0) = 0$$

$$U(0, y, s) = 0$$

$$U(1, y, s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Q(x, 0, s) = 0$$

$$Q(x, 1, s) = 0$$

Fixada uma malha  $NEL|NPI = 320|361$ , com pontos distribuídos segundo a figura [5.52], calcula-se o deslocamento no ponto  $P_6$  quando a frequência de excitação é  $\omega = 1$   $rad/s$ . Os resultados ao longo dos primeiros cem segundos, para um número crescente de termos da série de inversão, são apresentados nas figuras [5.53 - 5.56]. Um gráfico do erro percentual médio em função no número de termos é apresentado na figura [5.57].

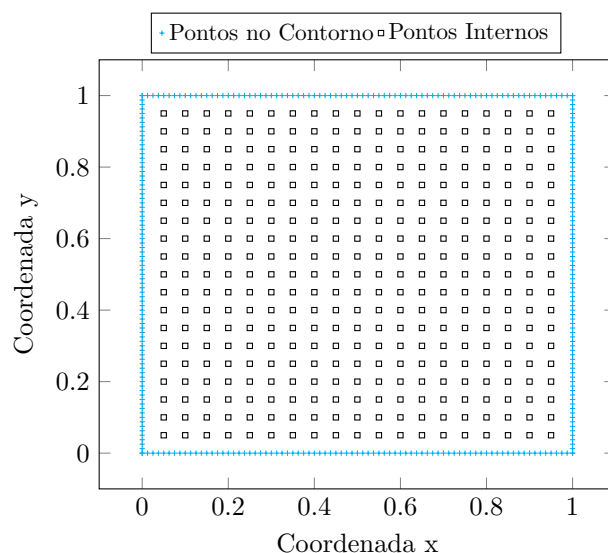


Figura 5.52: Distribuição dos pontos na malha  $NEL|NPI = 320|361$   
Fonte: Próprio Autor

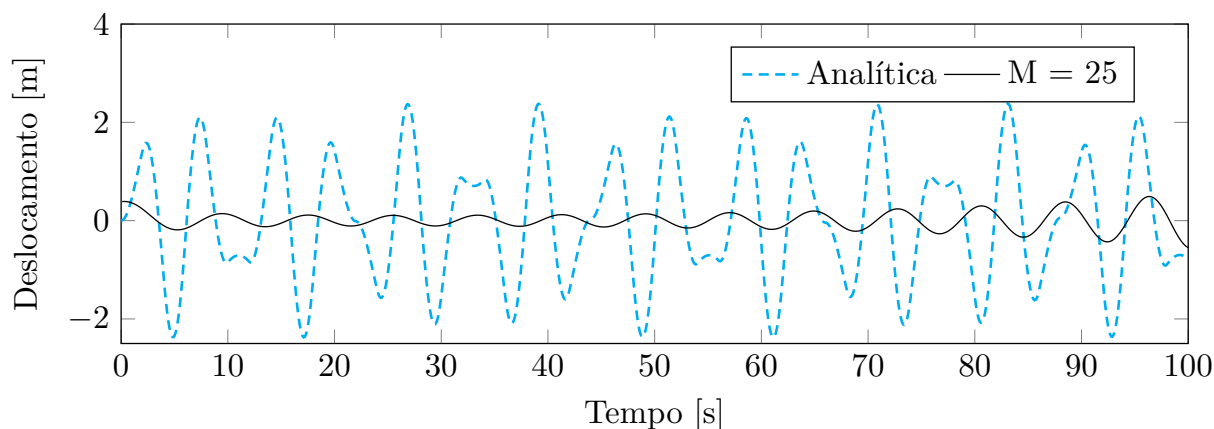


Figura 5.53: Deslocamento em  $P_6$  para  $M = 25$   
Fonte: Próprio Autor

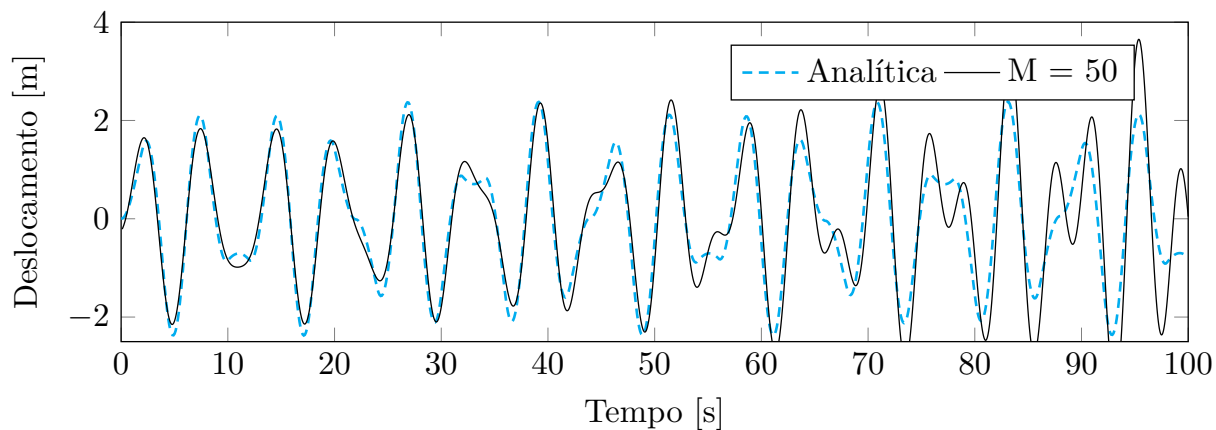


Figura 5.54: Deslocamento em  $P_6$  para  $M = 50$   
Fonte: Próprio Autor

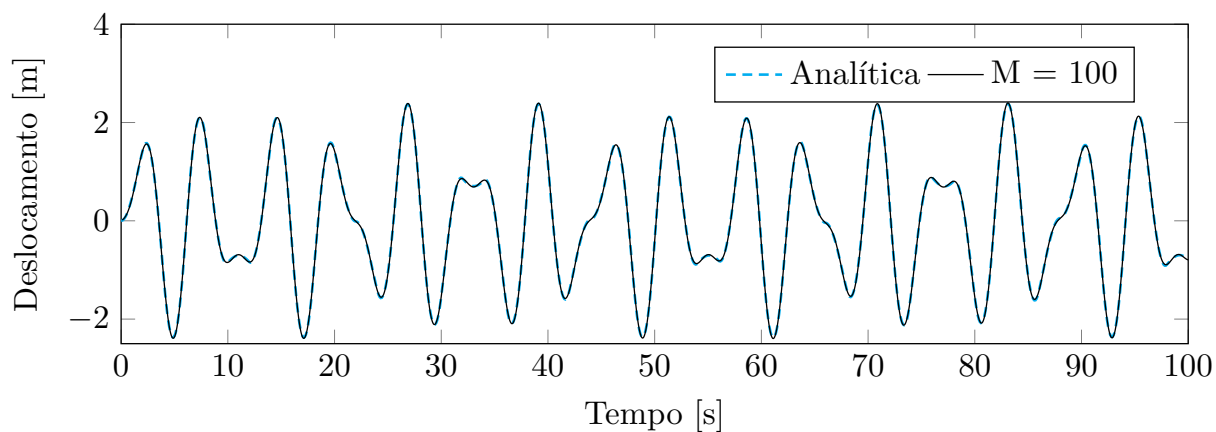


Figura 5.55: Deslocamento em  $P_6$  para  $M = 100$   
Fonte: Próprio Autor

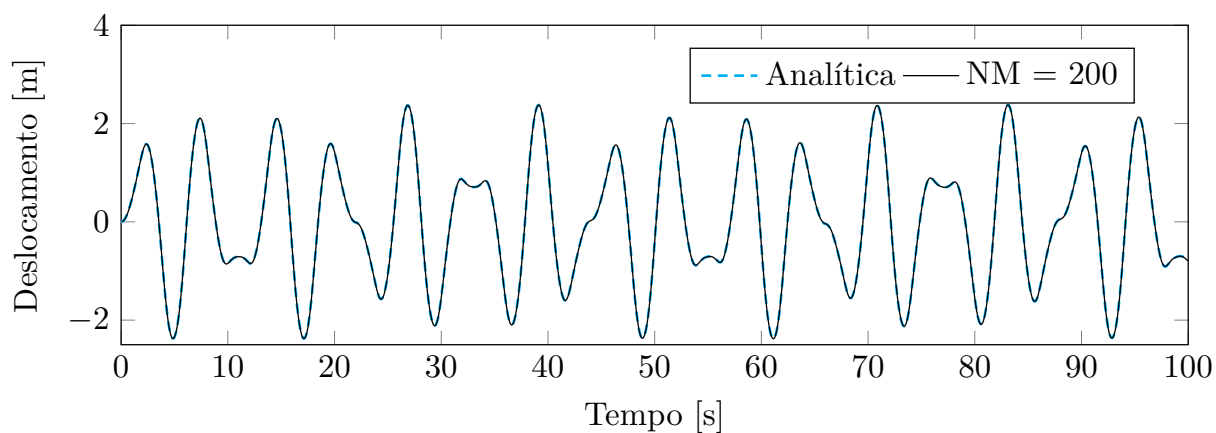


Figura 5.56: Deslocamento em  $P_6$  para  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

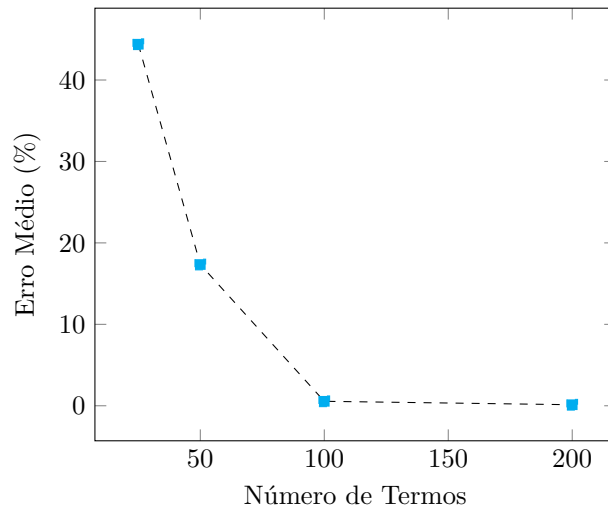


Figura 5.57: Erro médio na determinação do deslocamento em  $\mathbf{P}_6$   
Fonte: Próprio Autor

Conforme esperado, há um aumento de precisão na representação da resposta dinâmica conforme são considerados mais termos na série de inversão de Durbin. Neste ponto, fixa-se então o número de termos considerando na série de inversão em duzentos e busca-se os resultados de deslocamento considerando diferentes valores da frequência do termo forçante.

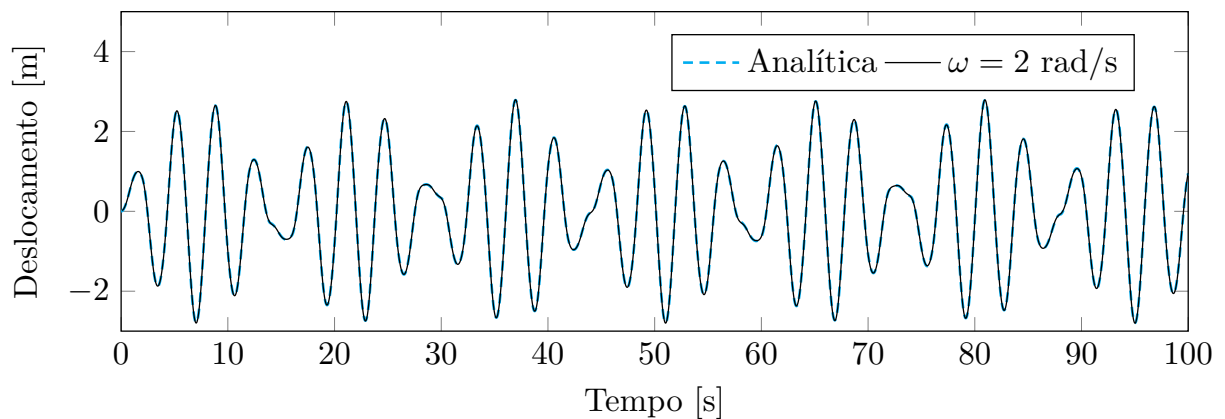


Figura 5.58: Deslocamento em  $\mathbf{P}_6$  para  $\omega = 2$  rad/s  
Fonte: Próprio Autor

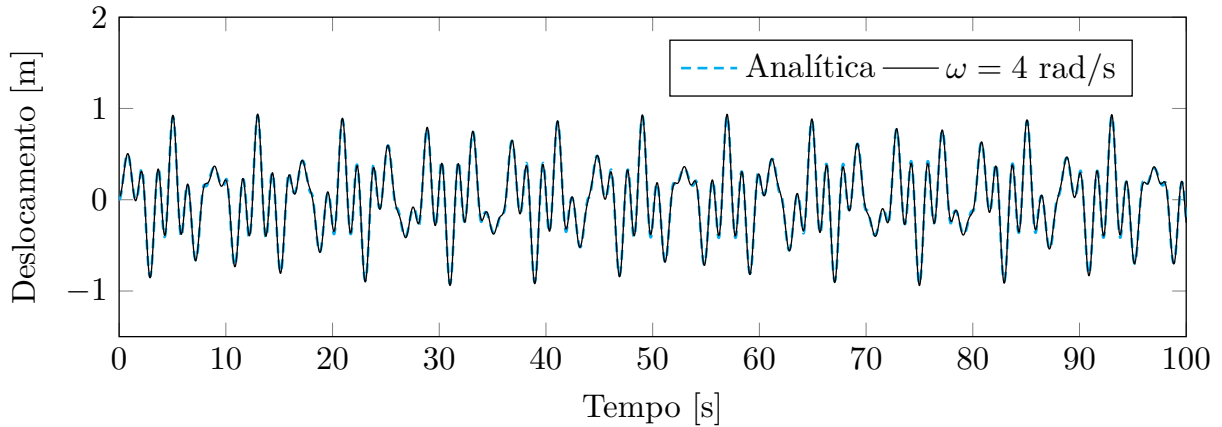


Figura 5.59: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 4 \text{ rad/s}$   
 Fonte: Próprio Autor

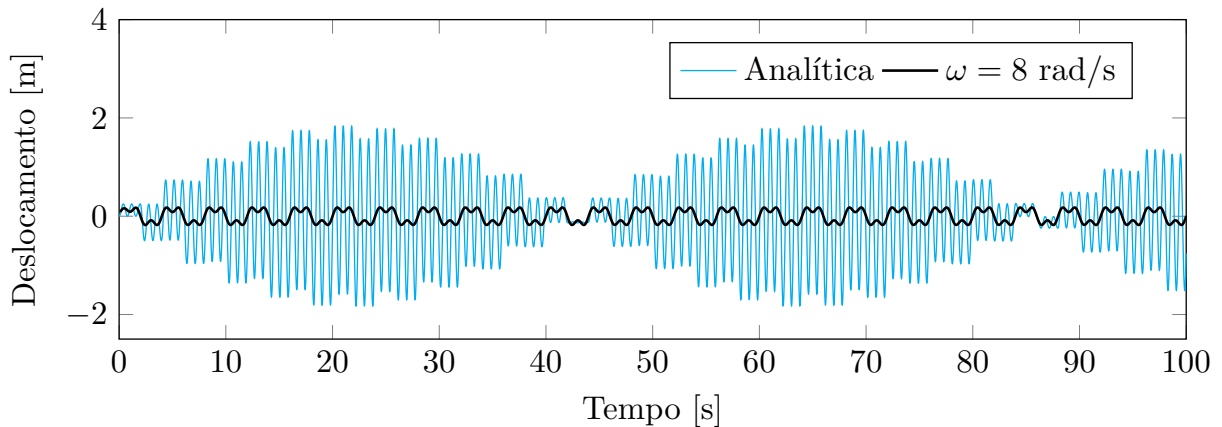


Figura 5.60: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 8 \text{ rad/s}$   
 Fonte: Próprio Autor

Os resultados para  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  e  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ , figuras [5.58] e [5.59] respectivamente, são satisfatórios, com a resposta numérica visualmente coincidente à analítica. Entretanto, para  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ , figura [5.60], a formulação numérica se mostra incapaz de representar o deslocamento corretamente.

A má qualidade deste último resultado pode ser explicada por dois fatores: a malha utilizada pode ser insuficiente para representar as configurações relativas aos modos mais elevados, que são excitados pela frequência de excitação mais alta; ou, o número de termos considerados,  $M = 200$ , pode não ser suficiente para capturar as configurações deformadas mais complexas associadas à frequência de  $8 \text{ rad/s}$ . No capítulo anterior, os resultados obtidos por meio da superposição modal demonstraram que essa malha é adequada para representar satisfatoriamente essas configurações. Portanto, resta considerar a segunda

hipótese. A resposta obtida, mantendo a mesma malha, mas com um número maior de termos na série de inversão,  $M = 400$ , é apresentada nas figuras [5.61] e [5.62] e confirmam essa linha de raciocínio. Estes novos resultados, demonstram uma resposta numérica significativamente mais consistente e satisfatória, evidenciando a importância de um número maior de termos na captura das características dinâmicas do sistema.

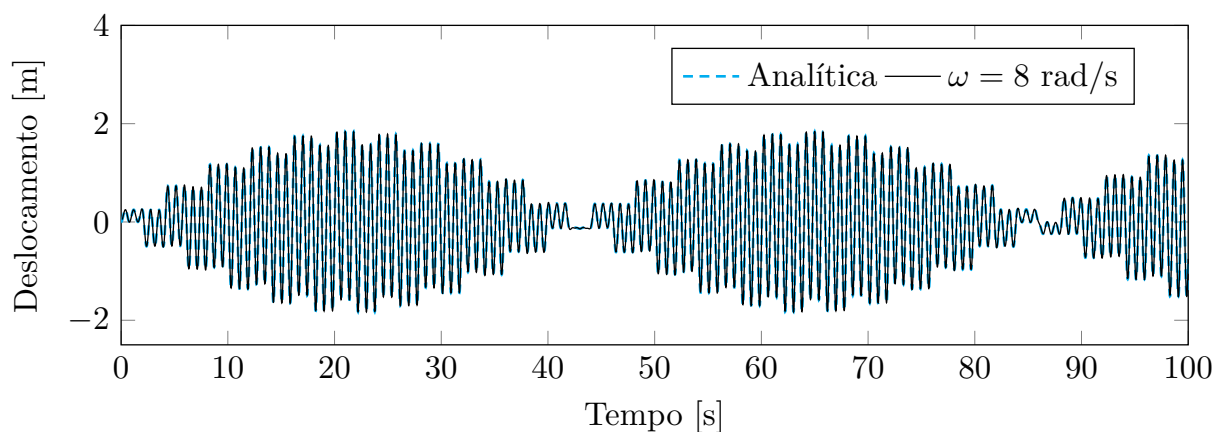


Figura 5.61: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 8$  rad/s

Fonte: Próprio Autor

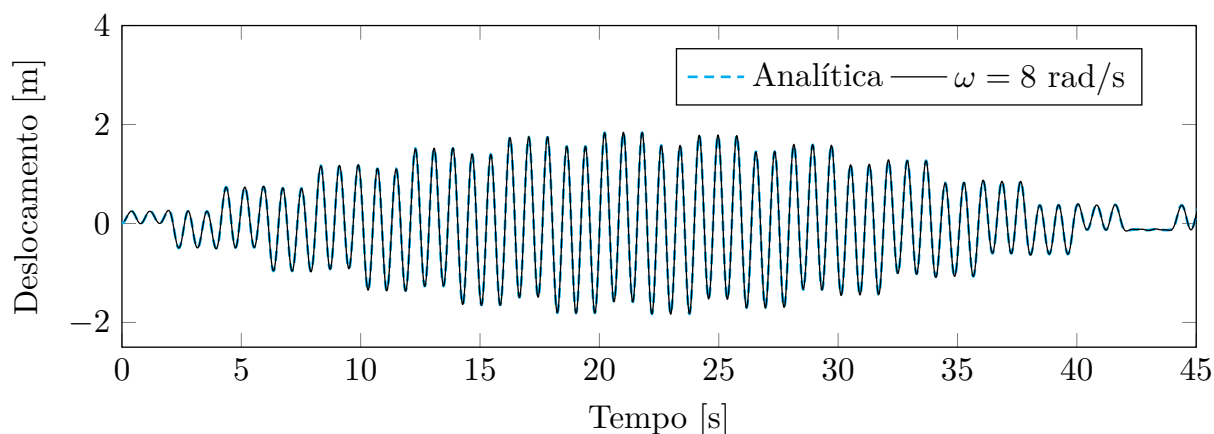


Figura 5.62: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 8$  rad/s (Instantes iniciais)

Fonte: Próprio Autor

Dando segmento aos experimentos, os resultados de deslocamento em  $P_6$ , assumindo uma frequência de excitação  $\omega = 20$  rad/s, para valores crescentes do total de termos considerados na fórmula de Durbin são exibidos nas figuras [5.63 - 5.66].

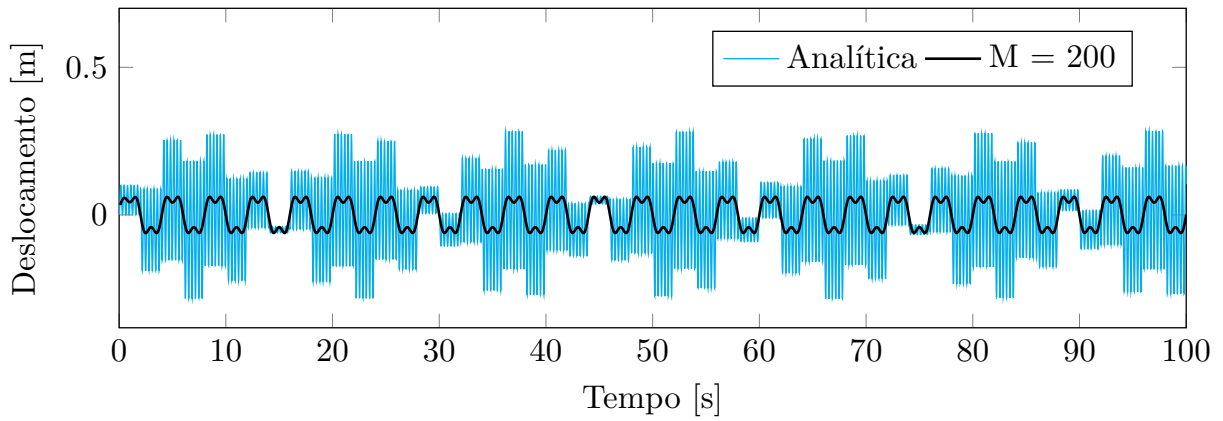


Figura 5.63: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 20$  rad/s e  $M = 200$   
Fonte: Próprio Autor

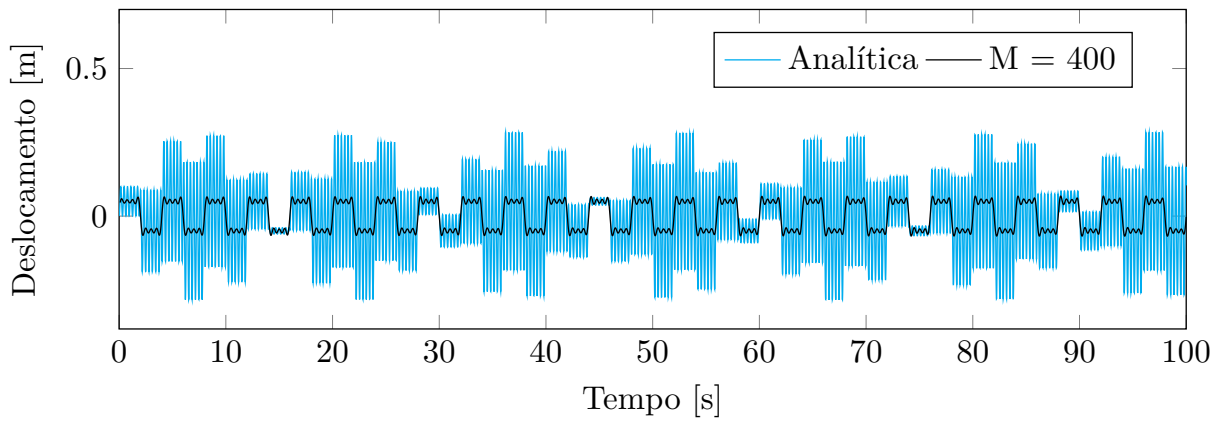


Figura 5.64: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 20$  rad/s e  $M = 400$   
Fonte: Próprio Autor

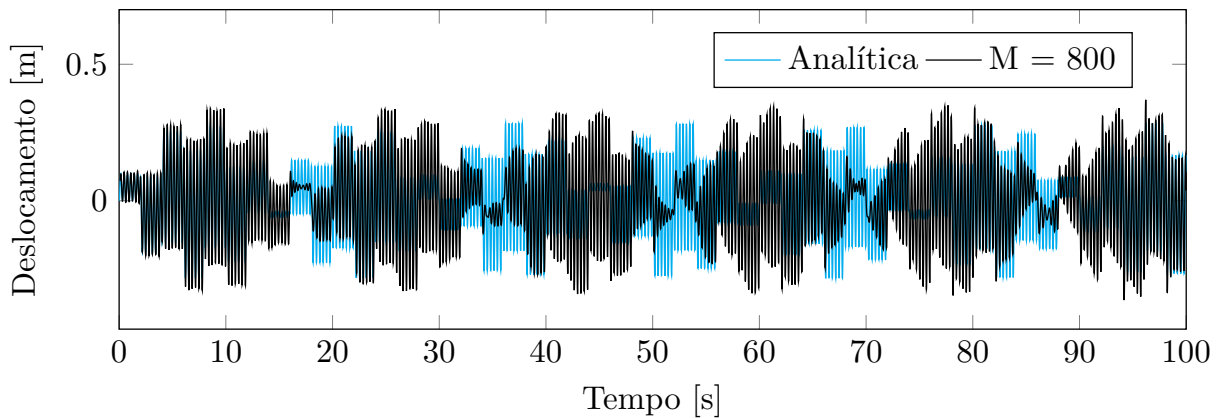


Figura 5.65: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 20$  rad/s e  $M = 800$   
Fonte: Próprio Autor

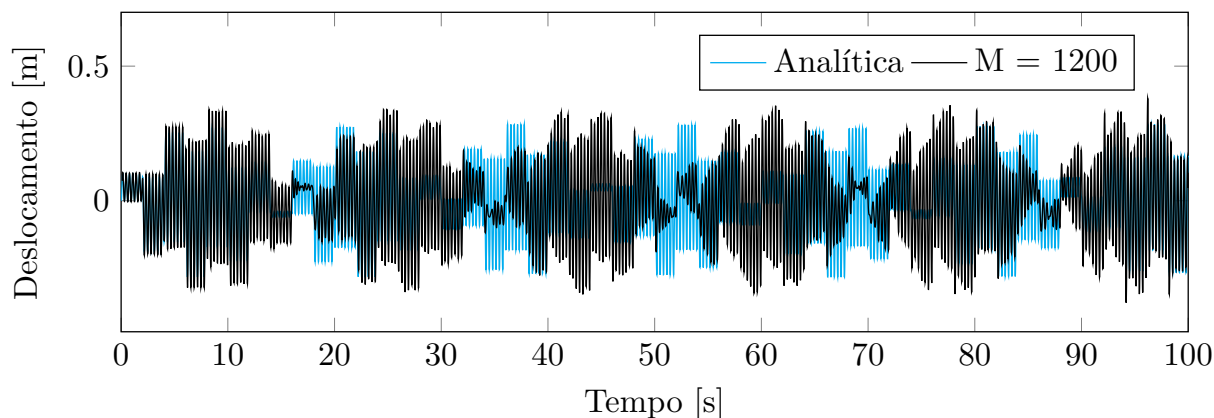


Figura 5.66: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  e  $M = 1200$   
 Fonte: Próprio Autor

Assim como no teste anterior (para  $\omega = 8 \text{ rad/s}$ ), para  $M = 200$  e  $400$ , número total de termos considerados é absolutamente insuficiente para capturar adequadamente as conformações deformadas associadas a essa frequência de excitação. Para  $M = 800$  e  $1200$  há uma melhoria nos resultados. Entretanto, a resposta numérica ainda não reflete com precisão o comportamento físico esperado. Propõe-se então uma nova abordagem: uma malha mais refinada,  $NEL|NPI = 640|625$ , e um total de termos na série de inversão  $M = 800$ . Os resultados desta experiência são apresentados na figura [5.67] a seguir.

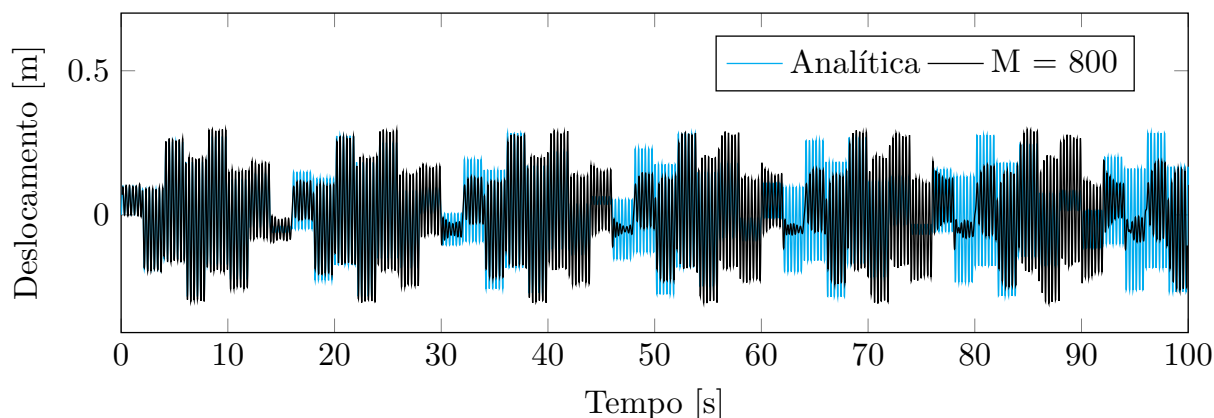


Figura 5.67: Deslocamento em  $P_6$  para  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  e  $NEL|NPI = 640|625$   
 Fonte: Próprio Autor

Percebe-se uma melhora nos resultados, notadamente nos instantes iniciais, com a resposta numérica ficando mais próxima da resposta analítica. Entretanto, nota-se dificuldade em se conseguir resultados satisfatórios para este valor de frequência de excitação provavelmente se deve à dificuldade em se caracterizar numericamente os

conteúdos referentes à modos elevados. É possível que malhas mais refinadas e/ou a inserção de mais termos na série de inversão levem a melhores resultados; contudo, o custo computacional se torna elevado.

### *Análise do custo computacional*

A análise do custo computacional em formulações numéricas utilizadas para resolver problemas de engenharia é essencial para garantir a eficiência e viabilidade das soluções propostas. Em muitos casos, os problemas de engenharia são complexos e envolvem grande quantidade de dados e variáveis, o que demanda um poder computacional significativo. Se o custo computacional não for devidamente considerado, o tempo de processamento pode se tornar excessivo, inviabilizando a aplicação prática das soluções, especialmente em situações que requerem respostas em tempo real. Além disso, a otimização do custo computacional pode levar a uma melhor utilização dos recursos, permitindo que os engenheiros explorem mais alternativas de solução, realizem simulações mais detalhadas e cheguem a resultados mais precisos sem exceder as limitações impostas pelos equipamentos ou pelos prazos.

Assim, neste ponto do trabalho, em que as formulações em estudo foram arduamente testadas quanto à capacidade de gerar respostas precisas, vale enriquecer a discussão realizando um comparativo do custo computacional, ou tempo de execução, entre as metodologias aqui apresentadas (MECID-SM e MECID-TL) e a formulação comumente utilizada de avanço passo a passo (MECID-IT), apresentada brevemente ao final do capítulo 3.

Avaliar o custo computacional de um código, contudo, é uma tarefa complexa devido a vários fatores que influenciam o desempenho de algoritmos e programas. A complexidade dos algoritmos nem sempre é evidente; enquanto algumas operações podem parecer simples em teoria, sua implementação prática pode envolver diversas interações entre partes do código, resultando em comportamentos inesperados que impactam o custo computacional. Além disso, o desempenho de um código é altamente dependente do hardware em que ele é executado, variando significativamente entre diferentes arquiteturas de processadores, quantidades de memória disponível, e até mesmo a eficiência de outros programas em execução simultânea. Daí a importância de se utilizar uma mesma máquina e buscar reproduzir as mesmas condições ao se comparar diferentes códigos.

Ademais, quando se compara diferentes formulações existentes de determinado método numérico, dificilmente a precisão dos resultados depende exclusivamente da malha utilizada. Isso ocorre porque cada formulação está atrelada a alguns outros parâmetros particulares e, mesmo a dependência de parâmetros em comum, como pontos internos no contexto deste trabalho, possui diferentes graus de importância. Para as formulações aqui estudadas, mesmo que a malha utilizada seja a mesma, a precisão depende de outros parâmetros, como o passo temporal na integração no tempo, o número de modos e o passo de tempo na superposição modal, e, o número de termos na série de inversão para o MECID-TL.

Deste modo, faz-se necessário encontrar uma forma de equipará-las para que a discussão e análise sobre o tempo computacional seja possível. Tendo isto em vista, far-se-á uso do erro médio para essa equiparação; ou seja, para uma mesma malha, serão escolhidos os parâmetros de cada formulação de modo que a combinação desses parâmetros leve a um erro médio da mesma ordem.

Como, a priori, o maior custo computacional da superposição modal está na determinação dos autovalores e autovetores e, na metodologia proposta, os modos que compõem a resposta são escolhidos dentro de um terço do GDL, a medida de tempo computacional pode variar pouco, pois, de qualquer forma, o número de modos determinado é fixo. Assim, para o estudo do tempo computacional, será adotada uma metodologia diferente, em que todos os modos dentro de um intervalo serão considerados. Dessa forma, nesta seção, quando se diz que  $N_m = 150$ , por exemplo, entende-se que todos os 150 primeiros modos foram calculados e estão sendo utilizados para compor a resposta.

A primeira experiência no que diz respeito ao tempo computacional é a contabilização do tempo total necessário à determinação da resposta dinâmica do ponto localizado no centro da aresta direita ao longo dos 10 primeiros segundos (exemplos 4.8.5 e 5.6.5) considerando uma malha  $NEL|NPI = 320|361$ . A frequência de excitação é  $\omega = 1rad/s$ . Os seguintes parâmetros foram utilizados de forma a obter um erro médio de  $1.0 \times 10^{-1} \%$  em todas as formulações:

- MECID-IT:  $\Delta t = 0.025$  no esquema de Houbolt;
- MECID-SM:  $\Delta t = 0.025$  no esquema de Houbolt e  $N_m = 350$ ;
- MECID-TL:  $M = 26$  na fórmula de Durbin.

Todas as execuções dos métodos sob análise foram realizadas em um computadores pessoal com recursos compartilhados entre vários processos ativos. Dessa forma, foi adotada uma metodologia simplificada para avaliar o tempo de execução computacional dos métodos. Essa metodologia consiste na obtenção do tempo médio de execução ( $\bar{t}$ ) do método, calculado pela média aritmética dos tempos individuais de cinco execuções sequenciais. Cada tempo individual foi obtido através da comparação entre as saídas da função *SYSTEM\_CLOCK*, nativa do Fortran 90, que fornece um valor preciso em *ticks* do sistema.

Os resultados são apresentados na tabela [5.11] a seguir.

Formulação	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\bar{t}$
MECID-IT	241	240	240	240	239	240
MECID-SM	550	543	538	545	546	544
MECID-TL	587	581	591	586	564	582

Tabela 5.11 - Tempo de execução dos métodos para  $\bar{E} = 1.0 \times 10^{-1} \%$   
Fonte: Próprio Autor

Como esperado, ao utilizar o procedimento de integração passo a passo, o tempo computacional requerido é menor, pois apenas um único sistema é resolvido após a montagem das matrizes. Por outro lado, na MECID-SM, além da fatoração QR, executada uma única vez para a obtenção dos autovalores, é necessário resolver um sistema para a determinação de cada autovetor. Já na MECID-TL, para cada valor do parâmetro  $M$ , um sistema linear precisa ser resolvido.

Prosseguindo com os experimentos, mantendo a malha, busca-se obter um erro médio menor, de  $1.0 \times 10^{-2} \%$ . Na MECID-SM pode-se reduzir o passo de tempo, possibilitando resultados superiores mesmo com um menor número de modos sendo utilizados para compor a resposta levando à um tempo de execução inferior, vide tabela [5.12]. A formulação MECID-TL, por sua vez, possibilita a redução do erro em dez vezes com um aumento de 38% no tempo computacional, ao se considerar um maior número de termos na série de inversão. Os seguintes parâmetros foram utilizados de forma a obter um erro médio de  $1.0 \times 10^{-2} \%$  nestas duas formulações:

- MECID-SM:  $\Delta t = 0.001$  no esquema de Houbolt e  $N_m = 250$ ;

- MECID-TL:  $M = 50$  na fórmula de Durbin.

Os resultados de tempo computacional aferidos são apresentados na tabela [5.12].

Formulação	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\bar{t}$
MECID-SM	527	539	519	526	521	526
MECID-TL	805	814	801	796	806	804

Tabela 5.12 - Tempo de execução dos métodos para  $\bar{E} = 10^{-2} \%$   
Fonte: Próprio Autor

Em contrapartida, ao se utilizar a formulação com integração passo a passo para determinar a resposta dinâmica, para esta malha, não é possível atingir o nível de precisão com erro médio  $\bar{E} = 1.0 \times 10^{-2} \%$ . Isso ocorre porque o menor passo de tempo que permitiu uma resposta estável foi  $\Delta t = 0.012$  segundos e, a resposta para este passo apresenta um erro médio de  $2.4 \times 10^{-2} \%$ . Este valor mínimo foi obtido reduzindo o passo de tempo em 0.001 a partir do passo anteriormente utilizado,  $\Delta t = 0.025$  segundos. A alteração nos tempos computados é mínima, uma vez que, nestes experimentos, o procedimento de avanço é responsável por uma parcela bem pequena do tempo de execução.

Uma redução de incremento de tempo, e por consequência, da precisão, pode ser alcançada para uma malha  $NEL|NPI = 640|900$ . Nos experimentos conduzidos com esta nova malha, o menor passo de tempo que permitiu uma resposta estável foi  $\Delta t = 0.01s$ . Estes resultados apresentaram um erro médio de  $2.2 \times 10^{-2} \%$  e os tempos de execução computados são apresentados na tabela [5.13].

Formulação	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$\bar{t}$
MECID-IT	1267	1287	1283	1289	1286	1282

Tabela 5.13 - Tempo de execução MECID-IT para  $NEL|NPI = 640|900$  e  $\Delta t = 0.01$   
Fonte: Próprio Autor

Observa-se que o tempo de execução mais que quadruplicou sem que o nível de precisão desejado ( $\bar{E} = 1.0 \times 10^{-2} \%$ ) fosse alcançado. Combinando este último resultado com os anteriores (tabelas [5.11] e [5.12]), pode-se inferir que, a depender do nível de precisão exigido, o refino da malha e a nuvem de pontos internos necessária para que a

MECID-IT entregue o resultado requerido leve a um custo computacional mais elevado que a MECID-SM e MECID-TL. Ou seja, quando leva-se em conta o duo precisão numérica e custo computacional, a formulação MECID-IT parece ser mais vantajosa em aplicações onde um tempo de execução é prioritário. Já as formulações MECID-SM e MECID-TL podem ser mais vantajosas em aplicações nas quais o nível de precisão requerido é elevado.

É importante destacar que os tempos de execução registrados refletem as condições específicas do ambiente de medição, especialmente o hardware utilizado, e, portanto, devem ser comparados apenas com resultados obtidos em circunstâncias semelhantes. Embora seja viável realizar uma análise de recursos como memória e armazenamento, considera-se que a análise temporal apresenta maior relevância para os objetivos deste trabalho.

Quanto à precisão, cabe ressaltar que, nas formulações baseadas no esquema de avanço temporal de Houbolt, a determinação do valor da variável de interesse em um instante avançado requer o cálculo de seus valores em todos os instantes temporais anteriores, definidos pelo passo de integração. Esse processo pode gerar um acúmulo de erros de arredondamento, característico dos métodos de integração passo a passo. Além disso, a escolha do passo de tempo adequado é um ponto que pode tornar a formulação instável e sujeita a grande erros. Por outro lado, no MECID-TL, o cálculo é realizado diretamente por meio da fórmula de Durbin, o que torna essa abordagem mais adequada em cenários onde a precisão é prioritária. No entanto, como evidenciado no exemplo I, à medida que o intervalo de interesse se expande, o custo computacional pode se tornar proibitivo.

#### 5.6.6 Exemplo IV

Este é o exemplo regido pela equação da difusão transiente resolvido primeiramente utilizando a superposição modal. Uma vez que a transformada de Laplace é aplicada, a equação de calor transiente assume, no espaço transformado, a forma a seguir:

$$\nabla^2 \Theta(\mathbf{X}, s) = \frac{1}{\alpha} \left[ s\Theta(\mathbf{X}, s) - \Theta_0(\mathbf{X}) \right] \quad (5.58)$$

Onde:

$$\Theta(\mathbf{X}, s) = \mathcal{L}\{T(\mathbf{X}, t)\} \quad e \quad Q(\mathbf{X}, s) = \mathcal{L}\{q(\mathbf{X}, t)\} \quad (5.59)$$

Para este problemas, as condições de contorno e iniciais transformadas são:

$$\Theta(x, y, 0) = 0$$

$$\Theta(0, y, s) = \frac{20}{s}$$

$$\Theta(1, y, s) = \frac{20}{s} - \frac{60}{s}e^{-s}$$

$$Q(x, 0, s) = 0$$

$$Q(x, 1, s) = 0$$

Uma vez aplicado o procedimento MECID de forma similar ao já explicitado para a equação da onda, e utilizando o método de Durbin para obter a resposta no tempo, pode-se obter o campo de temperaturas ao longo do domínio. Dito isto, os resultados do valor da temperatura no ponto central do corpo (ponto  $\mathbf{P}$ ), em função do tempo, considerando um número crescente de termos na série de inversão, são apresentados nas figuras 5.68 a 5.72, enquanto o erro médio percentual é apresentado na figura 5.73.

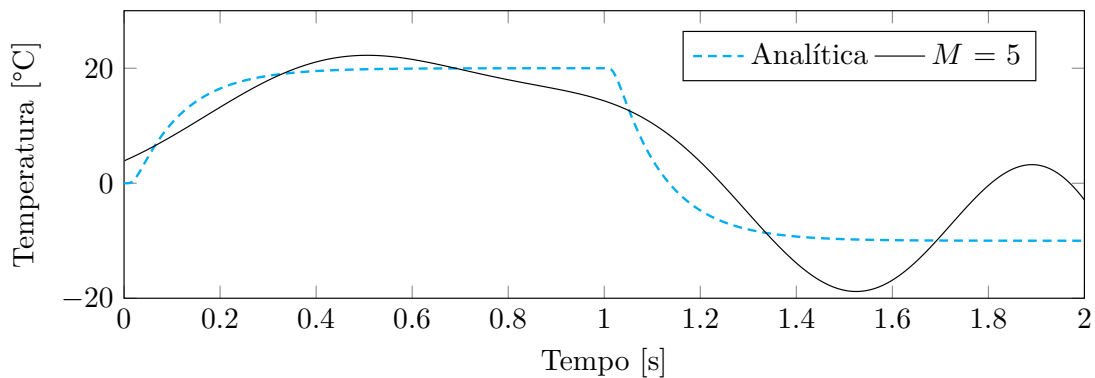


Figura 5.68: Temperatura no ponto  $\mathbf{P}$  para  $M = 5$   
Fonte: Próprio Autor

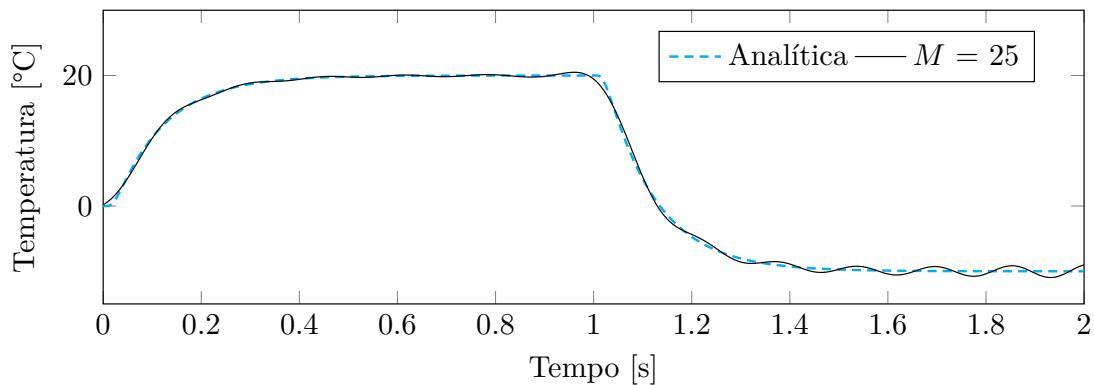


Figura 5.69: Temperatura no ponto  $P$  para  $M = 25$   
Fonte: Próprio Autor

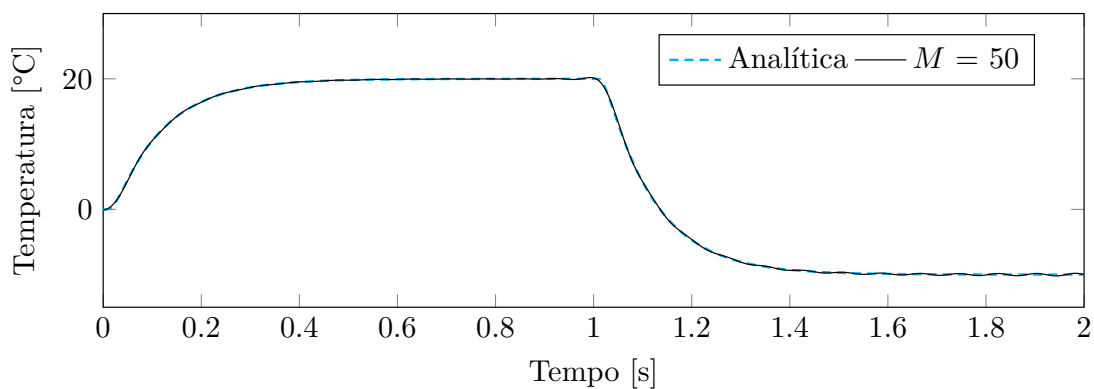


Figura 5.70: Temperatura no ponto  $P$  para  $M = 50$   
Fonte: Próprio Autor

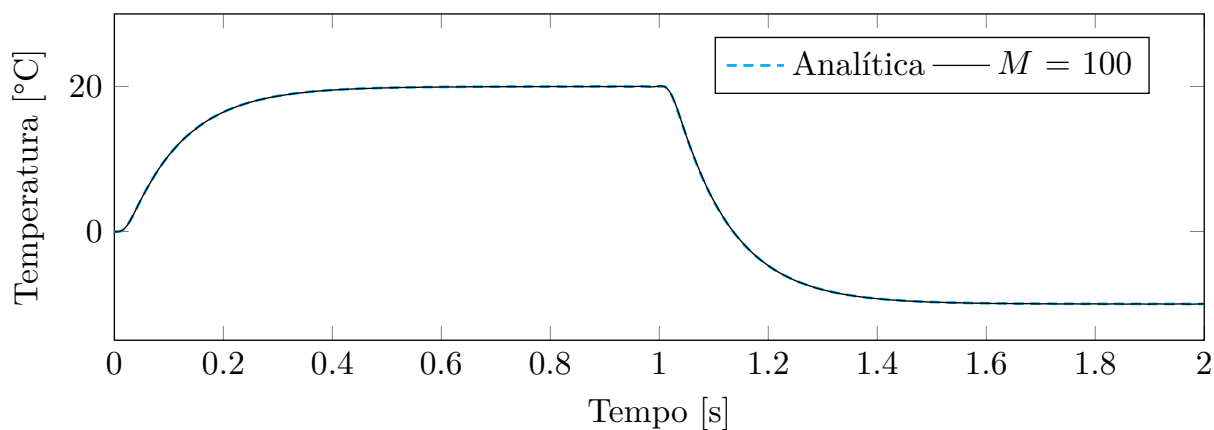


Figura 5.71: Temperatura no ponto  $P$  para  $M = 100$   
Fonte: Próprio Autor

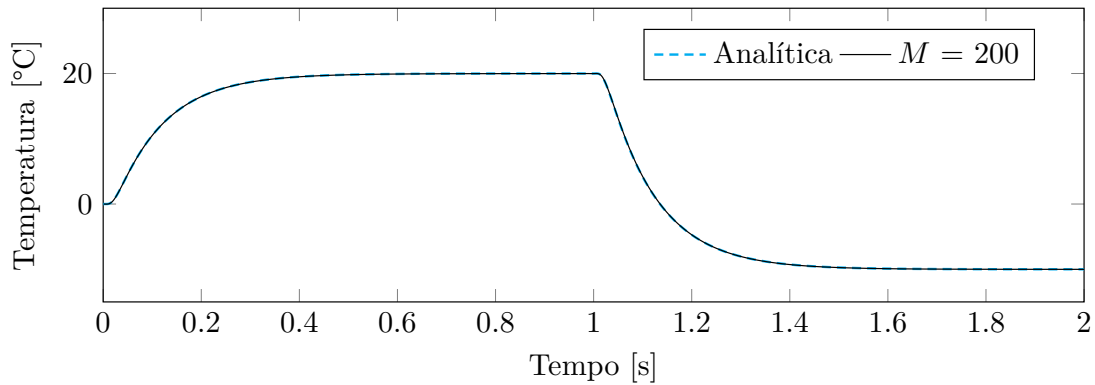


Figura 5.72: Temperatura no ponto  $P$  para  $M = 200$   
 Fonte: Próprio Autor

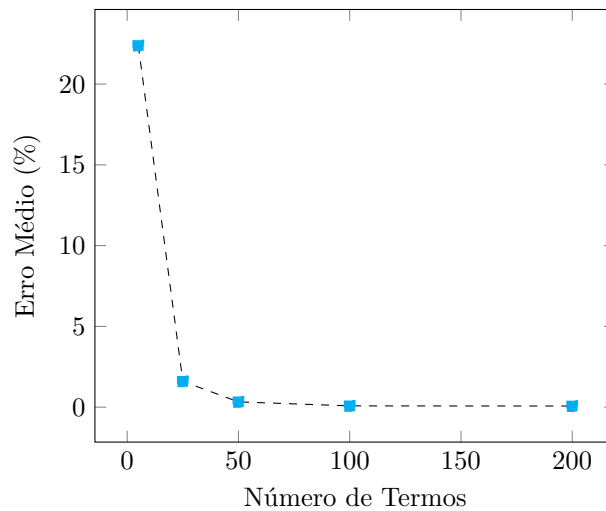


Figura 5.73: Erro médio na determinação da temperatura em  $P_6$   
 Fonte: Próprio Autor

Conforme são adicionados termos na série de inversão os resultados numéricos se aproximam da curva analítica, praticamente coincidindo com esta para  $M = 100$ . Quando o número de termos na série é menor ou igual a 50, o método aparenta ter alguma dificuldade em representar o perfil de temperatura nos instantes finais, quando o valor de temperatura se estabiliza. Tal comportamento se explica pela natureza oscilatória dos termos da fórmula de Durbin e é facilmente mitigado pela inclusão de termos suficientes, como observado. A redução súbita da temperatura na aresta direita em  $t = 1$  não aparenta ser uma dificuldade para o método numérico, indicando a robustez deste.

## CONCLUSÃO

Este trabalho faz parte de uma linha de pesquisa na qual é desenvolvida a formulação Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta para solucionar problemas de propagação de ondas acústicas. Propôs-se a investigar, de forma inovadora, o uso da MECID aplicando duas metodologias distintas: a Superposição Modal e a Transformada de Laplace. Essa análise buscou oferecer contribuições para o campo de métodos numéricos aplicados à engenharia, com o intuito de explorar os limites, as potencialidades e as implicações práticas e teóricas dessas técnicas em problemas transientes de propagação de ondas.

Um dos desafios nesta área é identificar o fator responsável pela perda de estabilidade do modelo de resposta direta para incrementos de tempo reduzidos. Este comportamento não é apresentado em outros métodos numéricos que discretizam o domínio; mas que, por sua vez, trabalham com matrizes simétricas. Com o MECID, o uso do esquema de integração direta é fortemente dependente do emprego de malhas refinadas para a obtenção de respostas precisas e estáveis. Muitos fatores já foram testados: o tipo de esquema de avanço do tempo, o efeito dos pontos internos e o tipo de função radial utilizada, entre outros. Apesar da maior robustez da matriz de inércia gerada pela MECID, uma conclusão definitiva ainda não havia sido alcançada. Assim, a técnica de superposição modal foi necessária, uma vez que este método pode facilmente identificar e eliminar frequências não reais na resposta após a resolução do problema de autovalor. Então, gera-se um esquema desacoplado de equações ordinárias, constituído por frequências reais, que pode ser resolvido analiticamente ou utilizando esquemas incrementais de avanço no tempo.

Com base nos experimentos aqui desenvolvidos, uma conclusão robusta pode ser alcançada no sentido de que as frequências complexas, implicitamente representadas na

matriz dinâmica MECID, são responsáveis pela instabilidade do modelo de integração direta para intervalos de tempo reduzidos utilizando o método de integração direta. Em simulações utilizando uma discretização menos refinada, o problema de instabilidade pode ser creditado à má qualidade do conteúdo modal. Quando há um refinamento da malha, a composição de frequências torna-se mais precisa, e assim, passos menores podem ser utilizados para melhorar a precisão da solução numérica; entretanto, se os intervalos de tempo são por demais reduzidos, o efeito do amortecimento fictício na eliminação de modos e frequências espúrios também decresce, causando instabilidade.

Assim, utilizando o procedimento de superposição modal foram eliminadas frequências não reais e poderiam ser utilizados esquemas de marcha no tempo que não possuem amortecimento fictício, como o Newmark. A utilização do esquema Houbolt se fez unicamente para realizar uma comparação com os resultados obtidos anteriormente pelo MECID utilizando o método de integração passo a passo.

Adicionalmente, nos estudos realizados para utilização da superposição modal com a MECID, foram apresentadas duas alternativas: a possibilidade de utilização do método clássico, disponível na literatura especializada em Álgebra linear; e a técnica que é utilizada nas poucas referências que tratam do uso computacional de matrizes não simétricas, chamada de método modal modificado ([PRODONOFF; ZEPKA, 1983](#)). A razão da escolha deste último, mais caro computacionalmente, não aparece em nenhuma das referências bibliográficas consultadas. Ambos os modelos são matematicamente consistentes.

Porém, o motivo da escolha foi comprovado computacionalmente. Embora o método clássico seja simples, ele envolve a multiplicação do vetor de forças aplicadas pelo inverso da matriz de autovetores. Isso resulta em um comportamento físico totalmente oposto ao esperado. Difere totalmente dos resultados obtidos pela superposição modal de sistemas compostos por matrizes simétricas e dos resultados apresentados pelo Método de Separação de Variáveis na resolução de equações diferenciais parciais. Utilizando a estratégia de álgebra clássica, há uma valorização de modos vibracionais elevados, numericamente mal representados, que prejudicam a resposta dinâmica, como mostrado no Capítulo 4.

No que diz respeito à MECID-TL, a transformada de Laplace reescreve uma equação diferencial ordinária em uma forma independente do tempo, simplificando a análise e permitindo a proposição de uma metodologia alternativa elegante para resolver problemas simples. No entanto, sua aplicação a problemas regidos por equações diferenciais parciais,

representativas de casos dinâmicos pertinentes à mecânica dos contínuos, envolve desafios numéricos significativos.

Como a transformada de Laplace substitui a dependência temporal por soluções sucessivas de um modelo espacial discreto, reescrito em termos de uma nova variável, e retorna recursivamente ao espaço físico, o sucesso do modelo depende tanto do método de discretização espacial quanto do esquema de inversão utilizado. Retornar ao domínio do tempo sempre foi um grande desafio para a transformada de Laplace, tanto em termos de precisão quanto de custo computacional. Os experimentos realizados neste estudo demonstram que o método de inversão de Durbin se mostrou adequado para resolver a equação de onda, pois utiliza uma série geral de Fourier para a inversão. Este método compartilha semelhanças com a técnica de superposição modal, onde a adição de mais termos à série resulta em uma resposta dinâmica mais precisa.

Acoplar transformada de Laplace ao MECID, já desenvolvido com sucesso em diferentes aplicações relacionadas à teoria do campo escalar, proporcionou maior robustez e qualidade aos resultados numéricos, resolvendo com precisão a parte da discretização espacial. Como ocorre com todos os métodos numéricos, os resultados mais precisos foram obtidos com o refino da malha. Em relação ao conteúdo modal mais elaborado, relacionado às frequências mais altas, uma situação comum em dinâmicas, a inserção de mais termos na série de inversão levou a melhores resultados. A composição adequada desses dois parâmetros convergiu para soluções mais próximas dos valores analíticos. No entanto, em comparação com os modelos MECID que empregam o método de solução por integração no tempo, foram observadas limitações mais significativas na precisão deste modelo em casos de velocidades angulares mais altas. Este aspecto indica que, por enquanto, este modelo deve ser aplicado em casos onde os conteúdos modais não sejam elevados.

Outro ponto a ser destacado é que a transformada de Laplace é, em linhas gerais, computacionalmente mais cara do que os esquemas comumente usados de integração no tempo, pois requer a resolução do sistema de equações adicional para cada termo incluído na série de inversão. Problemas dinâmicos geralmente exigem muitos graus de liberdade, o que pode ser uma restrição substancial ao usar a Transformada de Laplace. Portanto, técnicas para reduzir o custo computacional devem ser empregadas para aumentar a competitividade. No entanto, muitas situações industriais importantes não exigem discretizações muito elevadas, onde a metodologia aqui proposta pode ser

utilizada de forma vantajosa devido à precisão de seus resultados, demonstrada aqui pela resolução de problemas pertencentes a uma área de reconhecida dificuldade numérica.

Quanto ao problema térmico, o exemplo resolvido atesta que ambas as formulações, MECID-SM e MECID-TL, são também eficaz em resolver problemas envolvendo transientes térmicos em sólidos homogêneos isotrópicos. Para esta classe de problemas, o potencial escalar (temperatura) detém natureza mais estável e não oscilatória. Portanto, o nível de refino das malhas e a quantidade do modos necessários, é reduzida, tornando o custo computacional mais competitivo. Nota-se uma facilidade nas respostas numéricas em seguir o perfil da curva de temperaturas ao longo do tempo, mesmo com um baixo número de modos/termos considerados. Apresenta-se apenas um desvio de amplitude em relação à resposta analítica, que é bastante reduzido com a consideração de modos superiores ou termos adicionais na fórmula de Durbin.

Do ponto de vista das implicações práticas, as metodologias desenvolvidas possuem aplicabilidade em diversas áreas da engenharia, como civil, mecânica, aeroespacial e automotiva, onde a análise dinâmica de estruturas e a propagação de ondas são de interesse. A capacidade de discriminar modos específicos por meio da Superposição Modal permite uma análise focada em pontos críticos de uma estrutura, como áreas de maior concentração de esforços ou regiões com propensão a ressonância. Já a Transformada de Laplace proporciona uma abordagem alternativa para problemas onde resultados de alta precisão são requeridos.

No campo teórico, este trabalho contribui para o avanço dos métodos numéricos, ao propor inovações na aplicação combinada da MECID com técnicas de resolução temporal. A combinação com Superposição Modal ou a Transformada de Laplace, embora ainda não plenamente exploradas, abre novas possibilidades de pesquisa e desenvolvimento, possibilitando um avanço significativo na área de métodos de elementos de contorno aplicados a sistemas dinâmicos.

Como recomendações para estudos futuros, sugere-se a exploração de métodos de inversão alternativos para a Transformada de Laplace, que possam reduzir o custo computacional sem comprometer a precisão dos resultados. Além disso, dada as similaridades entre as técnicas, o desenvolvimento de técnicas híbridas, que combinem a discriminação modal com a transformada de Laplace, pode representar uma importante contribuição para a área. Recomenda-se, também, a aplicação do MECID-SM e

---

MECID-TL em problemas tridimensionais e em geometrias mais complexas, como estruturas com contornos irregulares ou ainda com múltiplas camadas de material, onde a modelagem numérica enfrenta desafios adicionais devido à complexidade da discretização e das condições de contorno.

## Referências Bibliográficas

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 60, n. 5, p. 979–993, 2004. Citado na página [150](#).

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 60, n. 5, p. 979–993, 2004. Citado na página [151](#).

ACHENBACH, J. *Wave propagation in elastic solids*. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado na página [41](#).

AL-JAWARY, M. A.; WROBEL, L. C. Radial integration boundary integral and integro-differential equation methods for two-dimensional heat conduction problems with variable coefficients. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 36, n. 5, p. 685–695, 2012. Citado na página [35](#).

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; PAIVA, W. P. de. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 23, n. 9, p. 805–818, 2007. Citado na página [35](#).

AMERICO, H. V. Análise numérica para busca de autovalores. Universidade Federal de Minas Gerais, 2013. Citado na página [248](#).

ANTES, H. A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 313–322, 1985. Citado na página [31](#).

APOSTOL, T. *Calculus (Vol. 2)*. [S.l.]: Wiley, 1967. Citado na página [50](#).

ARAL, M. M.; GÜLÇAT, Ü. A finite element laplace transform solution technique for the wave equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 11, n. 11, p. 1719–1732, 1977. Citado 3 vezes nas páginas [152](#), [156](#) e [157](#).

AZIS, M. I. et al. A combined laplace transform and boundary element method for unsteady laplace problems of several classes of anisotropic functionally graded materials. *Engineering Letters*, v. 29, n. 2, p. 534–542, 2021. Citado na página [33](#).

- BALISTA, T. G. et al. Comparisons between direct interpolation and reciprocity techniques of the boundary element method for solving two-dimensional helmholtz problems. *Engineering Computations*, Emerald Publishing Limited, v. 40, n. 9/10, p. 2841–2861, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 73.
- BARBOSA, J.; LOEFFLER, C.; LARA, L. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 108, p. 295–300, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 91.
- BARCELOS, H. de M.; LOEFFLER, C. F. The direct interpolation boundary element method applied to smoothly inhomogeneous laplace's problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 105, p. 155–164, 2019. Citado na página 36.
- BATHE, K. *Finite Element Procedures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado na página 55.
- BEBENDORF, M.; GRZHIBOVSKIS, R. Accelerating galerkin bem for linear elasticity using adaptive cross approximation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Wiley Online Library, v. 29, n. 14, p. 1721–1747, 2006. Citado na página 29.
- BERGMAN, T. L. et al. *Introduction to heat transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado na página 140.
- BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis. 1987. Citado na página 30.
- BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part ii (1986-1996). 1997. Citado na página 30.
- BLEVINS, R. D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes*. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1979. ISBN 0442207107. Citado na página 70.
- BREBBIA, C.; TELLES, J.; WROBEL, L. a. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. ISBN 9783540124849. Citado 12 vezes nas páginas 27, 28, 29, 30, 48, 53, 54, 57, 58, 60, 68 e 73.
- BREBBIA, C.; WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. [S.l.]: Newnes-Butterworths, 1980. ISBN 9780408003407. Citado 3 vezes nas páginas 27, 30 e 64.
- BUHMANN, M. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 57.
- BULCÃO, A.; LOEFFLER, C. F. Comportamento dos autovalores na vibração livre de barras de seção variável. In: *Anais do V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*. Rio de Janeiro, PUC/Rio: [s.n.], 1998. único, p. 107–113. Citado na página 234.
- CAMPOS, L. S.; LOEFFLER, C. F. A new strategy for a faster matrix assembly in the boundary element method. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 174, p. 449–453, 2024. ISSN 0898-1221. Citado na página 29.

- CAMPOS, L. S. et al. Testing the accomplishment of the radial integration method with the direct interpolation boundary element technique for solving helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 110, p. 16–23, 2020. Citado na página [36](#).
- CARRER, J.; MANSUR, W.; VANZUIT, R. Scalar wave equation by the boundary element method: a d-bem approach with non-homogeneous initial conditions. *Computational Mechanics*, Springer, v. 44, p. 31–44, 2009. Citado na página [229](#).
- CARRER, J.; PEREIRA, W.; MANSUR, W. Two-dimensional elastodynamics by the time-domain boundary element method: Lagrange interpolation strategy in time integration. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 1164–1172, 2012. Citado na página [31](#).
- CASTILLO, G. V. *Análise comparativa do desempenho dos esquemas incrementais de avanço no tempo com o método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. Vitória, ES, 2001. Citado na página [117](#).
- CASTILLO, G. V.; LOEFFLER, C. Performance evaluation of some new time integration methods in elastodynamic problems formulated by dual reciprocity boundary element method. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, WIT Press, v. 35, 2003. Citado na página [36](#).
- CHAI, P. et al. A multi-domain bem based on dual interpolation boundary face method for 3d elasticity problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 143, p. 568–578, 2022. Citado na página [29](#).
- CHEN, Y.; HWU, C. Boundary element method for vibration analysis of two-dimensional anisotropic elastic solids containing holes, cracks or interfaces. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 40, p. 22–35, 2014. ISSN 0955-7997. Citado na página [33](#).
- CHUNG, K. W.; SUN, H. C. A numerical laplace transform inversion method for exponential series. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 12, n. 9, p. 861–870, 1986. Citado na página [151](#).
- CITARELLA, R.; FEDERICO, L.; CICATIELLO, A. Modal acoustic transfer vector approach in a fem–bem vibro-acoustic analysis. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 248–258, 2007. Citado na página [34](#).
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. *Of structures*. [S.l.]: McGraw-Hill NY, USA, 1975. Citado na página [88](#).
- COHEN, A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 5. Citado na página [150](#).
- CRANN, D. The laplace transform boundary element method for diffusion-type problems. University of Hertfordshire, 2005. Citado na página [152](#).
- CRUMP, K. S. Numerical inversion of laplace transforms using a fourier series approximation. *Journal of the ACM*, ACM, v. 23, n. 1, p. 89–96, 1976. Citado na página [151](#).

- CRUSE, T. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. ii. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 341–355, 1968. Citado na página 31.
- CRUSE, T. A.; RIZZO, F. J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. i. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 244–259, 1968. Citado na página 31.
- CUI, M. et al. A new radial integration polygonal boundary element method for solving heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 123, p. 251–260, 2018. Citado na página 35.
- D’ALEMBERT, J. L. R. *Traité de dynamique*. [S.l.]: David l’aîné, 1743. Citado na página 24.
- D’AMORE, F. et al. A computational approach to laplace transform inversion. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 83, n. 1, p. 1–13, 2012. Citado na página 151.
- DAVIES, A. et al. A hybrid laplace transform/finite difference boundary element method for diffusion problems. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Tech Science Press, v. 18, n. 2, p. 79, 2007. Citado na página 32.
- DAVIES, B.; MARTIN, B. Numerical inversion of the laplace transform: a survey and comparison of methods. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 1–32, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 150, 151 e 174.
- DOMINGUEZ, J. *Response of embedded rectangular foundations to travelling waves*. [S.l.], 1978. Citado na página 31.
- DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements in Dynamics*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1993. (Computational Engineering). ISBN 9781853122583. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.
- DOMINGUEZ, J.; ROESSET, J. Dynamic stiffness of rectangular foundations. *Nasa Sti/recon Technical Report N*, v. 79, 1978. Citado na página 31.
- DUBNER, H.; ABATE, J. Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM New York, NY, USA, v. 15, n. 1, p. 115–123, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 151 e 162.
- DURBIN, F. Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to dubner and abate’s method. *The Computer Journal*, The British Computer Society, v. 17, n. 4, p. 371–376, 1974. Citado 7 vezes nas páginas 32, 33, 151, 152, 162, 166 e 174.
- ERINGER, A. *Elastodynamics*. [S.l.]: Ripol Klassik, 1974. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 43.
- EULER, L. *Mechanica, sive motus scientia*. Basel: B. Schwabe, 1736. Citado na página 24.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T. R.; HERBIN, R. *Handbook of Numerical Analysis (Vol. VII)*. [S.l.: s.n.], 2000. Citado na página 27.

- FASSHAUER, G. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. [S.l.]: World Scientific Publishers, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 57.
- FOURIER, J. B. J. *Théorie analytique de la chaleur*. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1888. v. 1. Citado na página 25.
- FRANGI, A. Causal shape functions in the time domain boundary element method. *Computational mechanics*, Springer, v. 25, n. 6, p. 533–541, 2000. Citado na página 30.
- FU, Z.-F.; HE, J. *Modal analysis*. [S.l.]: Elsevier, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 74.
- FUNG, Y. *Foundations of Solid Mechanics*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1965. (International seeries in dynamics, v. 1). ISBN 9780133299120. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- GALERKIN, B. G. Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov*, v. 19, n. 7, p. 897–908, 1915. Citado na página 25.
- GALILEI, G. *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze*. [S.l.]: Elsevier, 1638. Citado na página 24.
- GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 55.
- GAO, X. W. et al. Fracture analysis of functionally graded materials by a bem. *Composite Science and Technology*, v. 68, n. 5, p. 1209–1215, 2008. Citado na página 35.
- GAO, X. W. et al. Radial integration bem for dynamic coupled thermoelastic analysis under thermal shock loading. *Computers and Structures*, v. 158, p. 140–147, 2015. Citado na página 35.
- GAO, Z.; LI, Z.; LIU, Y. A time-domain boundary element method using a kernel-function library for 3d acoustic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 161, p. 103–112, 2024. Citado na página 31.
- GASKELL, D. R.; LAUGHLIN, D. E. *Introduction to the Thermodynamics of Materials*. [S.l.]: CRC press, 2017. Citado na página 140.
- GAUL, L.; KÖGL, M.; WAGNER, M. *Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 71.
- GAUL, L.; SCHANZ, M. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 179, n. 1-2, p. 111–123, 1999. Citado na página 32.
- GIUNTA, G.; LACETTI, G.; RIZZARDI, A. A numerical inversion of the laplace transform with applications to heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 32, n. 7, p. 1293–1304, 1989. Citado na página 151.

- GOMES, G. et al. An object-oriented approach to dual reciprocity boundary element method applied to 2d elastoplastic problems. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, Emerald Publishing Limited, v. 15, n. 5, p. 958–974, 2019. Citado na página [35](#).
- GRAFF, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. [S.l.]: Dover Publications, 1975. Citado 6 vezes nas páginas [41](#), [42](#), [43](#), [45](#), [47](#) e [239](#).
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2023. Citado na página [49](#).
- GUO, S. et al. A triple reciprocity method in laplace transform boundary element method for three-dimensional transient heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 114, p. 258–267, 2017. ISSN 0017-9310. Citado na página [32](#).
- HAMILTON, W. R. *On a general method in dynamics*. [S.l.]: Richard Taylor United Kindom, 1834. Citado na página [24](#).
- HONIG, G.; HIRDES, U. A method for numerical laplace inversion based on the fourier series approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 10, n. 1, p. 113–121, 1984. Citado na página [151](#).
- HONIG, G.; HIRDES, U. A method for the numerical inversion of laplace transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 10, n. 1, p. 113–132, 1984. Citado na página [162](#).
- HOOG, F. R. de; KNIGHT, J. H.; STOKES, A. N. An improved method for numerical inversion of laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, SIAM, v. 3, n. 3, p. 357–366, 1982. Citado na página [151](#).
- HOUBOLT, J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 17, n. 9, p. 540–550, 1950. Citado 3 vezes nas páginas [78](#), [90](#) e [244](#).
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Prentice Hall, 1987. Citado na página [27](#).
- JASWON, M. Integral equation methods in potential theory. i. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 275, n. 1360, p. 23–32, 1963. Citado na página [29](#).
- JASWON, M.; PONTER, A. An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 273, n. 1353, p. 237–246, 1963. Citado na página [29](#).
- JR, D. P. G. Observing stochastic processes, and approximate transform inversion. *Operations Research*, INFORMS, v. 14, n. 3, p. 444–459, 1966. Citado 2 vezes nas páginas [151](#) e [152](#).
- KAMIYA, N.; ANDOH, E. Helmholtz eigenvalue analysis by boundary element method. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 160, n. 2, p. 279–287, 1993. Citado na página [35](#).

- KAMIYA, N.; ANDOH, E.; NOGAE, K. A new complex-valued formulation and eigenvalue analysis of the helmholtz equation by boundary element method. *Advances in engineering software*, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 219–227, 1996. Citado na página 35.
- KENNEDY, J. R. Ultrasonic evaluation of microstructure in pipe steels. 2015. Citado na página 140.
- KIRKUP, S. M. et al. Simulation of the acoustic field of a horn loudspeaker by the boundary element–rayleigh integral method. *Journal of Computational Acoustics*, World Scientific, v. 21, n. 01, p. 1250020, 2013. Citado na página 34.
- KONTONI, D. Elastoplastic dynamic analysis by the dr-bem in modal co-ordinates. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, WIT Press, v. 3, 1993. Citado na página 33.
- KOPUZ, S.; LALOR, N. Analysis of interior acoustic fields using the finite element method and the boundary element method. *Applied Acoustics*, Elsevier, v. 45, n. 3, p. 193–210, 1995. Citado na página 33.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics 10E All Access Pack*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado na página 84.
- KUTTRUFF, H. *Room acoustics*. [S.l.]: Crc Press, 2016. Citado na página 49.
- KYTHER, P. *An Introduction to Boundary Element Methods*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1995. (Symbolic & Numeric Computation). ISBN 9780849373770. Citado 3 vezes nas páginas 27, 63 e 170.
- LAGRANGE, J.-L. *Mécanique Analytique*. [S.l.]: Desaint, 1788. Citado na página 24.
- LAGRANGE, J. L. *Théorie des fonctions analytiques: contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. [S.l.]: Ve. Courcier, 1813. Citado na página 25.
- LAPLACE, P. S. *Théorie analytique des probabilités*. [S.l.]: Courcier, 1820. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 145.
- LEI, J.; SHAO, C.; DONG, L. Laplace-domain bem for dynamic analysis of size-dependent couple stress elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 156, p. 344–355, 2023. Citado na página 33.
- LEI, J. et al. Dynamic crack propagation in matrix involving inclusions by a time-domain bem. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 36, n. 5, p. 651–657, 2012. Citado na página 31.
- LEIBNIZ, G. W. Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. *Acta Eruditorum Lipsienium*, v. 1, p. 103–116, 1682. Citado na página 24.
- LI, J.; KHODAEI, Z. S.; ALIABADI, M. Boundary element modelling of ultrasonic lamb waves for structural health monitoring. *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, v. 29, n. 10, p. 105030, 2020. Citado na página 32.

- LIU, Y.; NISHIMURA, N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 371–381, 2006. Citado na página [29](#).
- LOEFFLE, C. et al. Performance of compact radial basis functions in the direct interpolation boundary element method for solving potential problems. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Tech Science Press, v. 113, n. 3, p. 367–387, 2017a. Citado na página [36](#).
- LOEFFLER, C. *Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar*. [S.l.]: Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1988. Citado na página [245](#).
- LOEFFLER, C.; MANSUR, W. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems. *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*, Computational Mechanics Pub, p. 105–124, 1987. Citado 3 vezes nas páginas [34](#), [73](#) e [88](#).
- LOEFFLER, C.; MANSUR, W. A regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 74, p. 14–18, 2017c. ISSN 0955-7997. Citado na página [61](#).
- LOEFFLER, C. et al. Comparison between the formulation of the boundary element method that uses fundamental solution dependent of frequency and the direct radial basis boundary element formulation for solution of helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 79, p. 81–87, 2017b. Citado na página [36](#).
- LOEFFLER, C.; SANTOS, G.; LARA, L. Um estudo sobre a propagação de ondas acústicas num sistema amortecido submetido à excitação periódica. In: *XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. [S.l.: s.n.], 2024. Citado 6 vezes nas páginas [126](#), [132](#), [134](#), [135](#), [137](#) e [174](#).
- LOEFFLER, C. F.; CRUZ, Á. L.; BULCÃO, A. Direct use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 50, p. 97–108, 2015. Citado 3 vezes nas páginas [34](#), [55](#) e [62](#).
- LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Aplicação do método dos elementos de contorno em problemas de calor transiente com sub-regiões utilizando soluções fundamentais independentes do tempo. In: *VII Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*. [S.l.: s.n.], 1986. v. 2, p. 1022–1048. Citado na página [34](#).
- LOEFFLER, C. F. et al. Solving helmholtz problems with the boundary element method using direct radial basis function interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 61, p. 218–225, 2015. Citado na página [68](#).
- LOEFFLER, C. F. et al. Direct interpolation boundary element method applied for solving steady-state convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 154, p. 107383, 2024. Citado na página [36](#).

- LOEFFLER, C. F.; PINHEIRO, V. P.; LARA, L. d. O. C. A novel direct interpolation boundary element method formulation for solving diffusive–advective problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 169, p. 105992, 2024. Citado na página [36](#).
- LU, T.; LEGRAND, M. Nonsmooth modal analysis with boundary element method. In: *XI International Conference on Structural Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 205–212. Citado na página [34](#).
- LYNESS, J. N.; GIUNTA, A. A. An application of quadrature theory to laplace transform inversion. *Mathematics of Computation*, AMS, v. 46, n. 173, p. 151–169, 1986. Citado na página [151](#).
- MANOLIS, G.; BESKOS, D. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and laplace transform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 17, n. 4, p. 573–599, 1981. Citado na página [31](#).
- MANOLIS, G.; BESKOS, D. Dynamic response of lined tunnels by an isoparametric boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 291–307, 1983. Citado na página [30](#).
- MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E. Boundary element methods in elastodynamics. (*No Title*), 1988. Citado na página [30](#).
- MANOLIS, G. D.; DINEVA, P. S. Elastic waves in continuous and discontinuous geological media by boundary integral equation methods: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, v. 70, p. 11–29, 2015. Citado na página [30](#).
- MANSUR, W.; BREBBIA, C. Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 307–311, 1982. Citado na página [30](#).
- MANSUR, W.; BREBBIA, C. Further developments on the solution of the transient scalar wave equation. *Time-dependent and Vibration Problems*, Springer, p. 87–123, 1985. Citado na página [30](#).
- MANSUR, W. J. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1983. Citado na página [30](#).
- MANSUR, W. J.; BREBBIA, C. Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 299–306, 1982. Citado na página [30](#).
- MANSUR, W. J.; BREBBIA, C. A. Transient elastodynamics. In: *Time-dependent and vibration problems*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 124–155. Citado na página [31](#).
- MARKOV, I. et al. Laplace domain bem for anisotropic transient elastodynamics. *Mathematics and Mechanics of Solids*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 27, n. 10, p. 2034–2045, 2022. Citado na página [33](#).

- MORIDIS, G.; REDDEL, D. The laplace transform boundary element (ltbe) method for the solution of diffusion-type equations. In: *Boundary Elements XIII*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 83–97. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 152.
- MORO, A.; FARINA, C.; ROSSI, F. Measurement of ultrasonic wave velocity in steel for various structures and degrees of cold-working. *NDT International*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 169–175, 1980. Citado na página 140.
- NAGA, T. H.; ELSHEIKH, E. M.; RASHED, Y. F. Indirect boundary element formulation with dual reciprocity in elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 144, p. 301–310, 2022. Citado na página 35.
- NARAYANAN, G.; BESKOS, D. Numerical operational methods for time-dependent linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 18, n. 12, p. 1829–1854, 1982. Citado na página 32.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied mathematical modelling*, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 157–162, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 55.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. Transient dynamic analysis by the boundary element method. *Boundary Elements*, Springer-Verlag Berlin, p. 719–730, 1983. Citado na página 34.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition. *Boundary elements VIII*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag Berlin . . . , v. 1, p. 435–443, 1986. Citado na página 33.
- NARVAEZ, A.; USECHE, J. A new radial basis integration method applied to the boundary element analysis of 2d scalar wave equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 136, p. 77–92, 2022. Citado na página 34.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, American Society of Civil Engineers, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Citado na página 78.
- NEWTON, I. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. [S.l.]: Royal Society, 1687. Citado na página 24.
- NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; AZUMA, N. An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of traveling waves. *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, Faculty of Engineering, Kyoto University, v. 37, n. 1, p. 28–46, 1975. Citado na página 31.
- NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; FUKUI, T. Applications of integral equation method to some geomechanical problems. In: *This paper was presented and discussed at the International Conference on Numerical Methods in Geomechanics held at Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, June 1976*. [S.l.: s.n.], 1976. Citado na página 31.

- NOWAK, A. The multiple reciprocity method of solving transient heat conduction problems. *Boundary Elements XI*, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag Southampton and Berlin, v. 2, 1989b. Citado na página 35.
- NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. The multiple-reciprocity method. a new approach for transforming bem domain integrals to the boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 164–167, 1989a. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- NOWAK, A. J.; PARTRIDGE, P. W. Comparison of the dual reciprocity and the multiple reciprocity methods. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 155–160, 1992. Citado na página 35.
- PARTRIDGE, P.; BREBBIA, C.; WROBEL, L. *Dual Reciprocity Boundary Element Method*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1991. (International Series on Computational Engineering). ISBN 9781851667000. Citado 4 vezes nas páginas 27, 34, 35 e 54.
- PEREIRA, P. V. M. *Uso de funções de base radial de suporte pleno na solução das integrais de domínio da equação de Poisson usando o método dos elementos de contorno*. 2014. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014. Citado na página 90.
- PEREZ-GAVILAN, J.; ALIABADI, M. A symmetric galerkin boundary element method for dynamic frequency domain viscoelastic problems. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 79, n. 29-30, p. 2621–2633, 2001. Citado na página 31.
- PIESSENS, R. The numerical inversion of laplace transforms using generalised laguerre polynomials. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, v. 11, n. 4, p. 431–439, 1971. Citado na página 151.
- PINHEIRO, V. P.; LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Boundary element method solution of stationary advective–diffusive problems: A comparison between the direct interpolation and dual reciprocity technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 142, p. 39–51, 2022. Citado na página 36.
- PRODONOFF, V.; ZEPKA, S. Análise modal de sistemas com matrizes não simétricas. In: *VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*. [S.l.: s.n.], 1983. Citado 3 vezes nas páginas 80, 81 e 209.
- RAMŠAK, M.; ŠKERGET, L. 3d multidomain bem for solving the laplace equation. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 31, n. 6, p. 528–538, 2007. Citado na página 29.
- RAMSEY, K. A. Effective measurements for structural dynamics testing. *Sound and Vibration*, v. 9, n. 11, p. 24–34, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.
- RAO, S. S.; YAP, F. F. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: Addison-Wesley New York, 1995. v. 4. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 85.
- REDDY, J. *An Introduction to the Finite Element Method*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1993. Citado na página 27.

RICHARDSON, M.; POTTER, R. Identification of the modal properties of an elastic structure from measured transfer function data. In: *20th International Instrumentation Symposium (ISA), Albuquerque, New Mexico, USA*. [S.l.: s.n.], 1974. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

RITZ, W. Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1909. Citado na página 25.

SANTOS, A. d. J. d.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. d. O. C. A stability analysis of the direct interpolation boundary element method applied to acoustic wave propagation problems using the modal superposition technique. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 21, p. e520, 2024. Citado na página 88.

SANTOS, G. et al. The direct interpolation boundary element method for solving acoustic wave problems in the time domain. *Computational and Applied Mathematics (submetido e aguardando resposta)*, 2024. Citado na página 111.

SANTOS, G. A. R. dos et al. The direct interpolation boundary element method for solving acoustic wave problems in the time domain. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 44, n. 1, p. 1–31, 2025. Citado 8 vezes nas páginas 37, 91, 92, 109, 111, 117, 133 e 234.

SCHIARA, L. de S.; PASCHOALINI, A. T. A detailed implementation of multithreading and out-of-core computation to the conventional boundary element algorithm with minimum code changes. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 45, n. 2, p. 114, 2023. Citado na página 30.

SHENG, X. Applying the boundary element and modal superposition methods to evaluate inlet noise of high circumferential orders [m]. In: *08'International conference on noise and vibration engineering*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 535–547. Citado na página 33.

SIMOES, N. et al. Transient heat conduction under nonzero initial conditions: a solution using the boundary element method in the frequency domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 562–567, 2012. Citado na página 31.

SIMON, G. M.; STROOT, P. G.; WEISS, G. H. Numerical laplace inversion using spline approximations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 155–164, 1972. Citado na página 151.

SORIANO, H. L. *Introdução à dinâmica das estruturas*. [S.l.]: Elsevier Rio de Janeiro, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 72, 75, 76, 85 e 126.

STEHFEST, H. Algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms [d5]. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 13, n. 1, p. 47–49, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 151, 152 e 155.

STEHFEST, H. Remark on algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 13, n. 10, p. 624, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 151 e 152.

STOER, J. et al. *Introduction to numerical analysis*. [S.l.]: Springer, 1980. v. 1993. Citado na página 90.

SUTRADHAR, A.; PAULINO, G. H.; GRAY, L. Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the laplace transform galerkin boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 119–132, 2002. Citado na página 32.

SYMM, G. Integral equation methods in potential theory. ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 275, n. 1360, p. 33–46, 1963. Citado na página 29.

TAKAHASHI, T. A fast time-domain boundary element method for three-dimensional electromagnetic scattering problems. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 482, p. 112053, 2023. Citado na página 31.

TALBOT, A. The accurate numerical inversion of laplace transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 23, n. 1, p. 97–120, 1979. Citado na página 151.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n. 5, p. 959–973, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 29, 65, 90 e 174.

TILLERSON, J. R.; STRICKLIN, J. A. *Numerical methods of integration applied in the nonlinear dynamic analysis of shells of revolution*. Dissertação (Mestrado) — Texas A&M University., 1970. Citado na página 245.

VALKÓ, P. P.; ABATE, J. Comparison of sequence accelerators for the gaver method of numerical laplace transform inversion. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 48, n. 3-4, p. 629–636, 2004. Citado na página 151.

WEEKS, W. T. Numerical inversion of laplace transforms using laguerre functions. *Journal of the ACM*, ACM, v. 13, n. 2, p. 419–429, 1966. Citado na página 151.

WEN, P.; ALIABADI, M.; ROOKE, D. A new method for transformation of domain integrals to boundary integrals in boundary element method. *Communications in numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 14, n. 11, p. 1055–1065, 1998. Citado na página 34.

WIDDER, D. V. *Laplace transform (pms-6)*. Princeton university press, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 145 e 146.

WROBEL, L.; BREBBIA, C. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 65, n. 2, p. 147–164, 1987. Citado na página 34.

WROBEL, L.; BREBBIA, C.; NARDINI, D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. *Finite elements in water resources VI*, Springer-Verlag, p. 801–811, 1986. Citado na página 34.

- WROBEL, L.; DEFIGUEIREDO, D. A dual reciprocity boundary element formulation for convection-diffusion problems with variable velocity fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 8, n. 6, p. 312–319, 1991. Citado na página [34](#).
- XIE, X.-B.; JIN, S.; WU, R.-S. Wave-equation-based seismic illumination analysis. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 71, n. 5, p. S169–S177, 2006. Citado na página [49](#).
- YANG, K.; GAO, X. W. Radial integration bem for transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 34, n. 6, p. 557–563, 2010. Citado na página [35](#).
- YEIH, W. et al. A study on the multiple reciprocity method and complex-valued formulation for the helmholtz equation. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 1–6, 1998. Citado na página [35](#).
- YU, B. et al. Isogeometric dual reciprocity boundary element method for solving transient heat conduction problems with heat sources. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 385, p. 113197, 2021. Citado na página [35](#).
- YU, B. et al. Radial integration bem for one-phase solidification problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 39, p. 36–43, 2014. Citado na página [35](#).
- ZAKIAN, V. Numerical inversion of laplace transforms using laguerre functions. *Electronics Letters*, IET, v. 5, n. 3, p. 120–121, 1969. Citado na página [151](#).
- ZAKIAN, V.; LITTLEWOOD, R. Numerical inversion of laplace transforms by weighted least-squares approximation. *The Computer Journal*, Oxford University Press, v. 16, n. 1, p. 66–68, 1973. Citado 2 vezes nas páginas [152](#) e [156](#).
- ZHANG, J. et al. Active noise control over space: A wave domain approach. *IEEE/ACM Transactions on audio, speech, and language processing*, IEEE, v. 26, n. 4, p. 774–786, 2018. Citado na página [49](#).
- ZHU, S.; SATRAVAHA, P.; LU, X. Solving linear diffusion equations with the dual reciprocity method in laplace space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 13, n. 1, p. 1–10, 1994. Citado na página [153](#).
- ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite elements and approximation*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Citado na página [26](#).

# Apêndice

## SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste apêndice são apresentadas as soluções analíticas dos problemas simulados neste trabalho.

A escolha do número adequado de termos para soluções de referência em série é fundamental para garantir que a função alvo está sendo corretamente representada. Ao determinar a quantidade ideal de termos a serem incluídos em uma série, alguns fatores devem ser considerados. A precisão e a convergência são elementos cruciais, pois um número insuficiente de termos pode resultar em aproximações imprecisas e não representativas. Por outro lado, incluir termos em excesso pode ser desnecessário e computacionalmente ineficiente. É essencial encontrar um equilíbrio que assegure a precisão desejada, pois, neste trabalho, as soluções analíticas serão usadas como referência para avaliar as métricas de erro das soluções numéricas. Portanto, adota-se o algoritmo descrito a seguir na obtenção das soluções de referência.

Para determinar a solução analítica em um intervalo de tempo, são selecionados  $N_p$  pontos igualmente espaçados dentro desse intervalo, de modo que a distância entre eles seja de  $10^{-3}$ .

Utilizando precisão dupla, inicialmente, a série é truncada com  $N_t$  termos para uma aproximação inicial. Em seguida, a série é truncada com  $N_t + 1$  termos para uma segunda aproximação, e a maior diferença absoluta entre essas duas aproximações,  $D_{\text{máx}}$ , é determinada nos  $N_p$  pontos anteriormente mencionados.

Se a maior diferença for inferior a  $10^{-6}$  e superior a  $10^{-7}$ , considera-se que  $N_t$  é um número adequado de termos. Se a maior diferença for superior a  $10^{-6}$ , deve-se aumentar o número de termos. Se for inferior a  $10^{-7}$ , deve-se diminuir o número de termos. Caso este intervalo não seja obtido com um número de termos inferior ou igual a cem mil, adota-se

à a resposta considerando o total de cem mil termos.

### A.1 Exemplo I

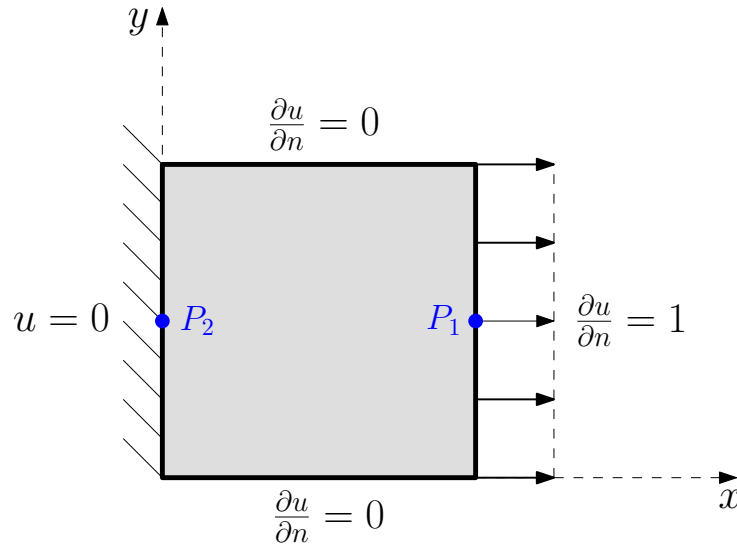


Figura A.1: Geometria e Condições de contorno do Exemplo I  
Fonte: Próprio Autor

A solução analítica do deslocamento, para propriedades mecânicas unitárias, condições iniciais nulas e condições de contorno conforme descrito na figura [A.1], é dada por (CARRER; MANSUR; VANZUIT, 2009):

$$u(x, t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \times \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right] \times \text{sen} \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right] \right\} \quad (\text{A.1})$$

A resposta de deslocamento em  $P_1$ , ao longo de um intervalo de 12 segundos, é apresentada nas figuras [A.2-A.4], considerando 12000 pontos de tempo igualmente espaçados e um número crescente de termos da série. A tabela [A.1] apresenta os resultados de  $D_{\text{máx}}$  para estes valores de  $N$ . Os resultados indicam que  $N = 1000$  é um valor adequado para as condições escolhidas.

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	1.84E-03
100	2.01E-05
1000	2.02E-07

Tabela A.1 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para o deslocamento em  $\mathbf{P}_1$   
Fonte: Próprio Autor

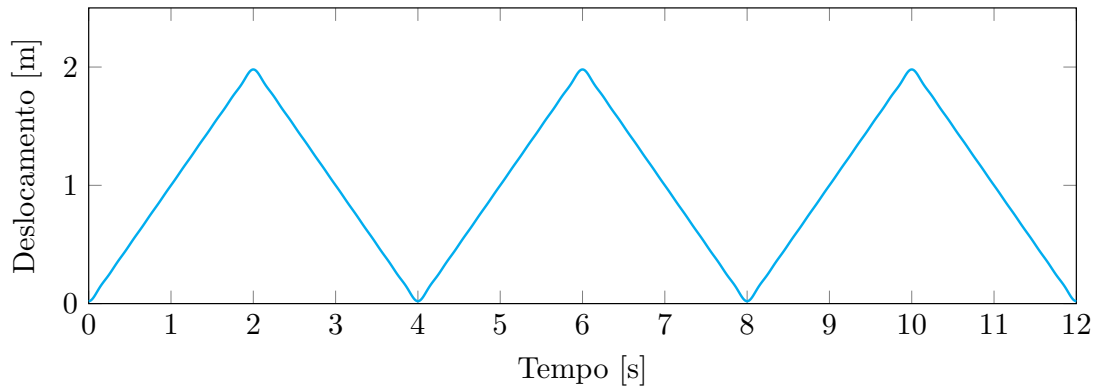


Figura A.2: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  com  $N = 10$   
Fonte: Próprio Autor

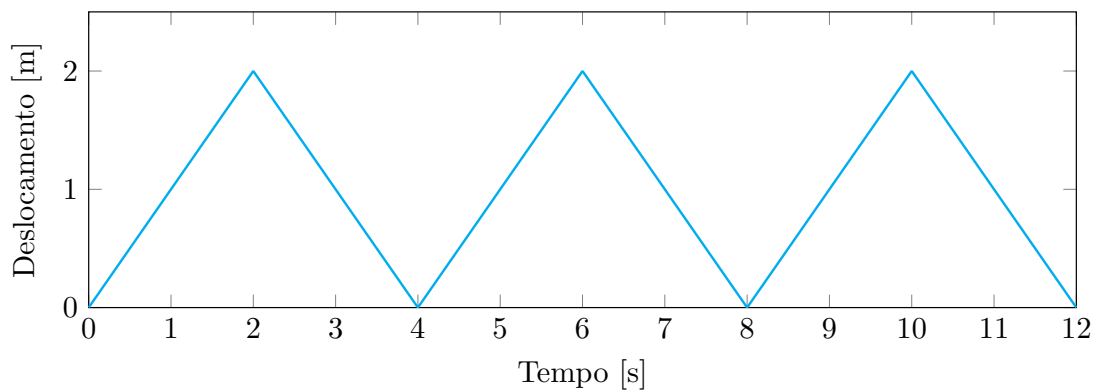


Figura A.3: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  com  $N = 100$   
Fonte: Próprio Autor

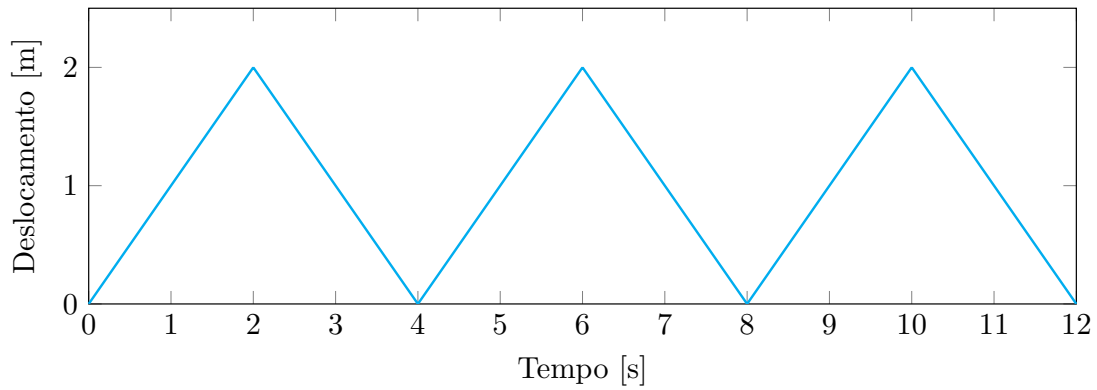


Figura A.4: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_1$  com  $N = 1000$   
 Fonte: Próprio Autor

A solução para as tensões é obtida derivando a equação (A.1) com relação ao vetor normal. Na aresta esquerda, onde o vetor normal unitário é  $\vec{n} = (-1, 0)$ , a expressão resultante é:

$$q(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{2n-1} \times \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right] \right\} \quad (\text{A.2})$$

Os resultados apresentados na Tabela [A.2] e figuras [A.5 - A.9] indicam que  $N = 100000$  é um valor apropriado para as condições escolhidas.

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	6.06E-02
100	6.33E-03
1000	6.36E-04
10000	6.37E-05
100000	6.37E-06

Tabela A.2 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para a tensão em  $\mathbf{P}_2$   
 Fonte: Próprio Autor

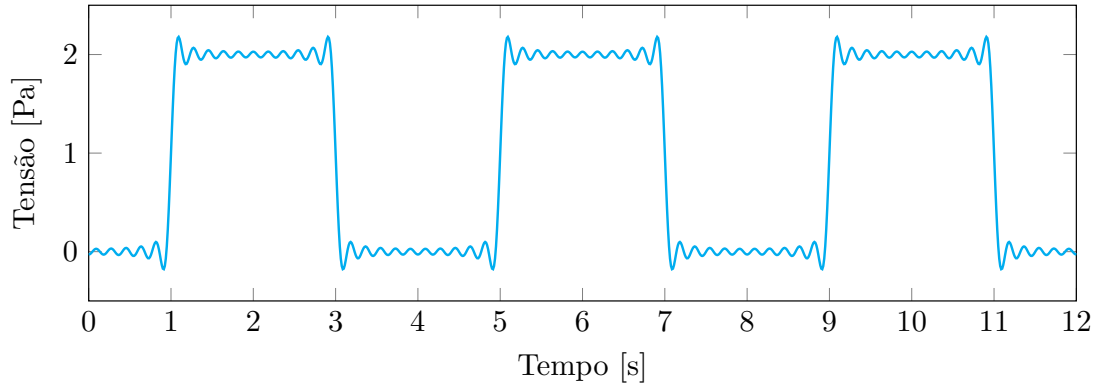


Figura A.5: Resposta analítica da tensão  $P_2$  com  $N = 10$   
Fonte: Próprio Autor

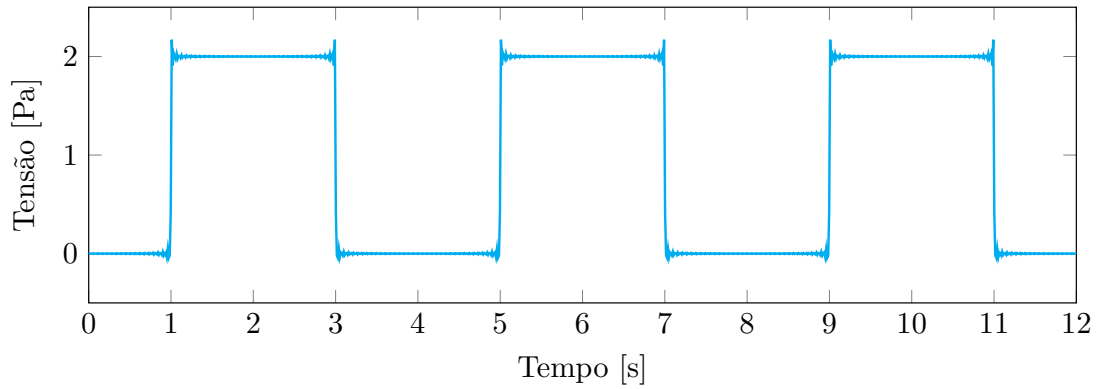


Figura A.6: Resposta analítica da tensão  $P_2$  com  $N = 100$   
Fonte: Próprio Autor

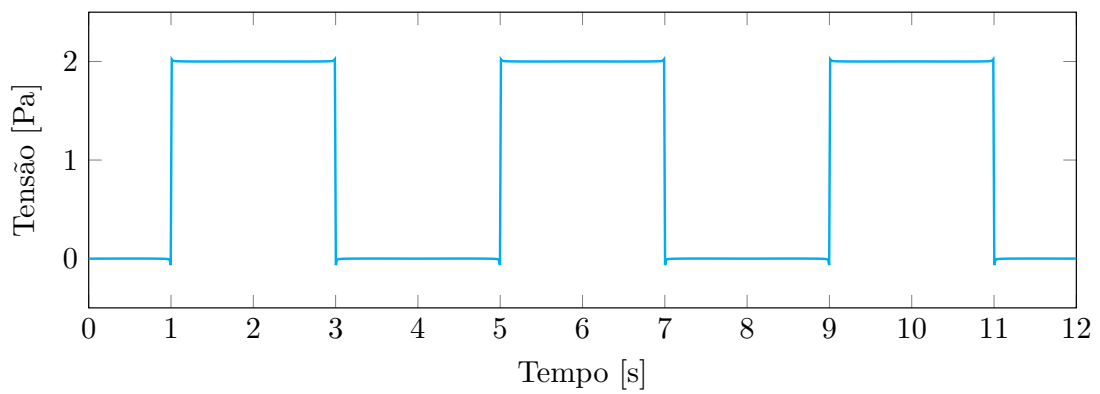


Figura A.7: Resposta analítica da tensão  $P_2$  com  $N = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

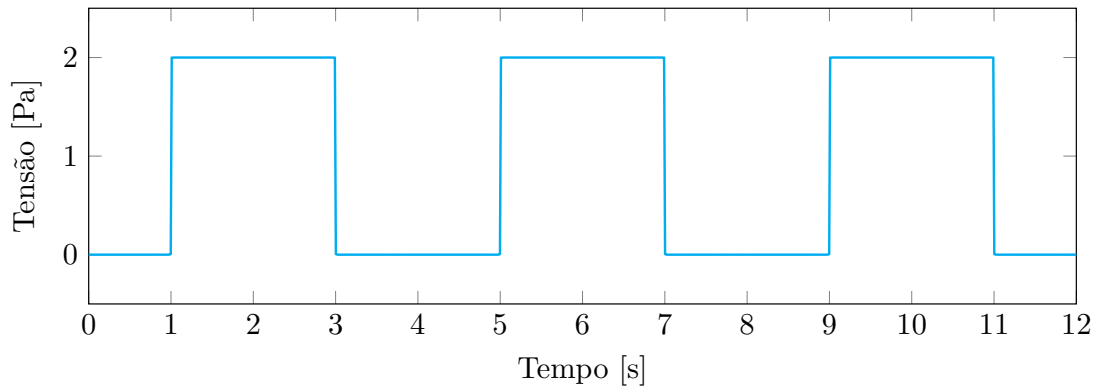


Figura A.8: Resposta analítica da tensão  $P_2$  com  $N = 10000$   
Fonte: Próprio Autor

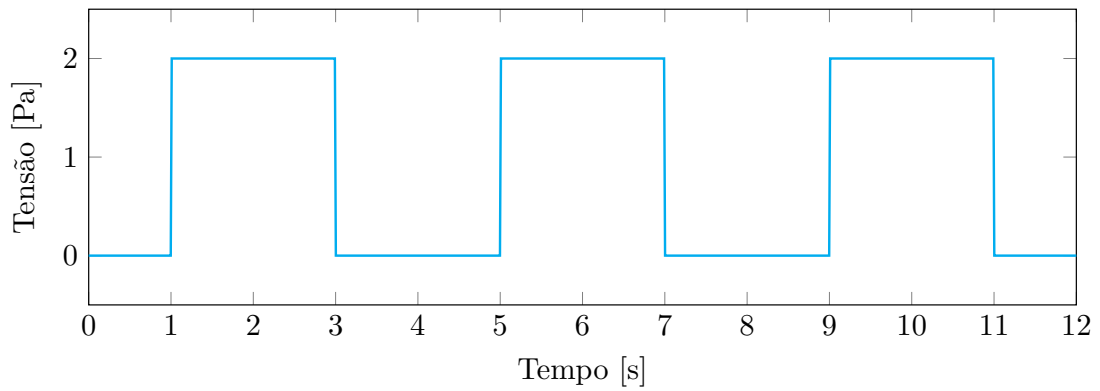


Figura A.9: Resposta analítica da tensão  $P_2$  com  $N = 100000$   
Fonte: Próprio Autor

## A.2 Exemplo II

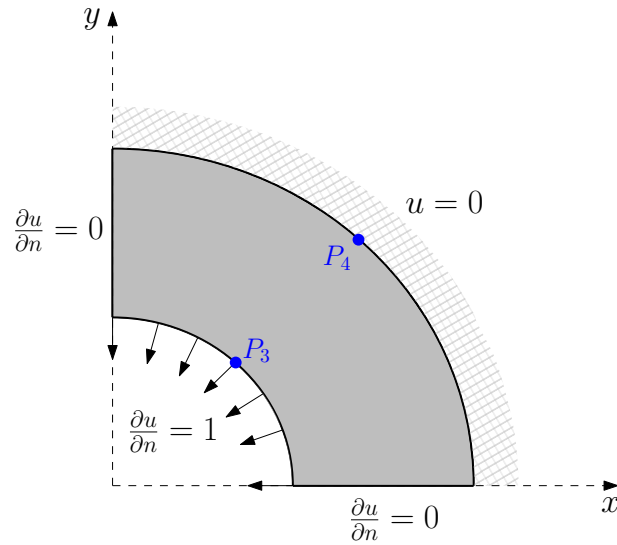


Figura A.10: Geometria e Condições de contorno do Exemplo II  
Fonte: Próprio Autor

O raio menor é  $a = 1 \text{ m}$  e o raio maior é  $b = 5 \text{ m}$ .

A solução analítica para o potencial e a derivada primal, considerando estas dimensões, condições iniciais nulas e, as condições apresentadas na figura [A.10], são dadas por uma soma de funções de Bessel na seguinte forma (BULCÃO; LOEFFLER, 1998; SANTOS et al., 2025):

$$u(r, t) = b \left[ \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_0(\lambda_m r) \cos(\lambda_m t) \quad (\text{A.3})$$

$$q(r, t) = - \left( \frac{b}{r} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \lambda_m Z_1(\lambda_m r) \cos(\lambda_m t) \quad (\text{A.4})$$

$$C_m = \frac{(b/\lambda_m) [bZ_1(\lambda_m b) \ln(a/b) - Z_0(\lambda_m b)/\lambda_m]}{[\frac{b^2}{2} Z_0(\lambda_m b)^2 - \frac{a^2}{2} Z_1(\lambda_m a)^2]} \quad (\text{A.5})$$

$$Z_0(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m r) Y_0(\lambda_m a) - J_0(\lambda_m a) Y_0(\lambda_m r) \quad (\text{A.6})$$

As funções  $J_0$  e  $Y_0$  são funções de Bessel do primeiro e segundo tipos, respectivamente. Os valores de  $\Lambda_m$  são obtidos a partir da solução da seguinte equação característica transcendental, equação (A.7), obtida obedecendo às condições de contorno.

$$J_1(\lambda_m a)Y_0(\lambda_m b) - J_1(\lambda_m b)Y_0(\lambda_m a) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Neste trabalho, o pacote Roots da linguagem Julia foi utilizado para encontrar as raízes (autovalores) empregando o método da bisseção.

A seguir é apresentada a tabela [A.3], com os valores de  $D_{\text{máx}}$ , e as figuras [A.11 - A.13], com as curvas de resposta, em função do número de termos  $N_t$ . Estes, referentes à solução analítica do deslocamento.

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	7.28E-03
100	8.02E-05
1000	8.10E-07

Tabela A.3 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para o deslocamento em  $\mathbf{P}_3$   
Fonte: Próprio Autor

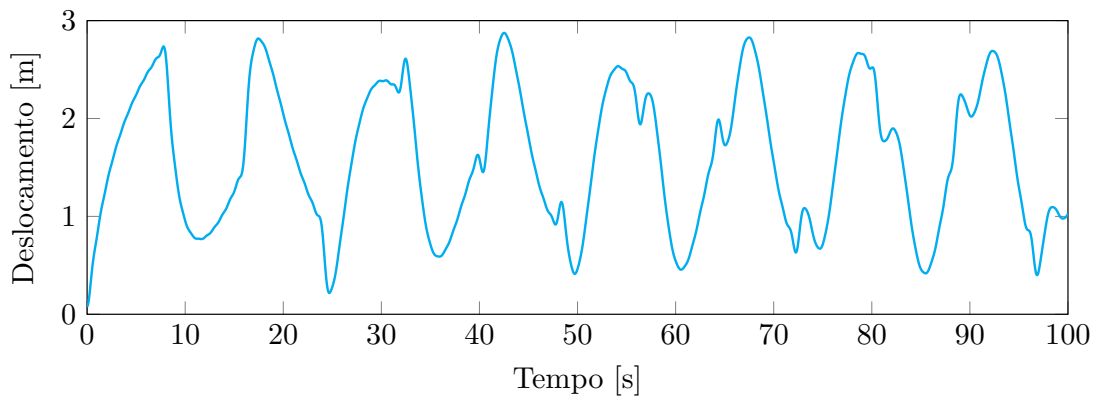


Figura A.11: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_3$  com  $N = 10$   
Fonte: Próprio Autor

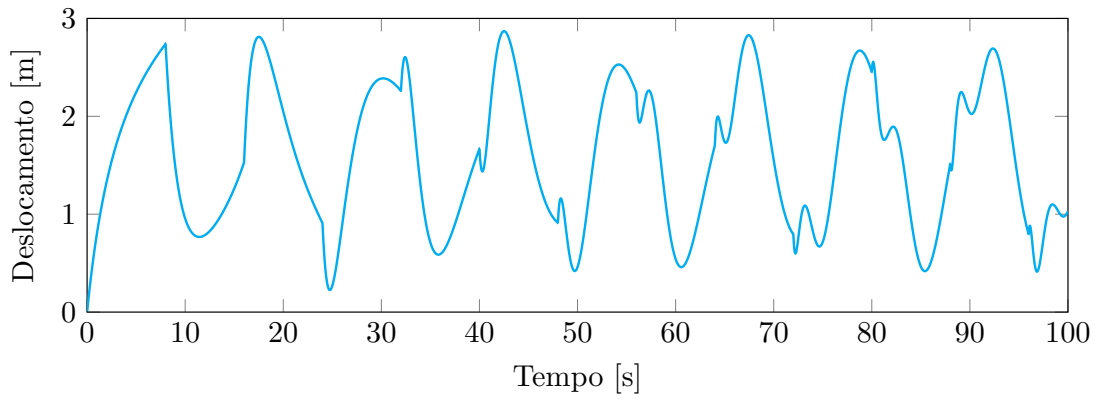


Figura A.12: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_3$  com  $N = 100$   
 Fonte: Próprio Autor

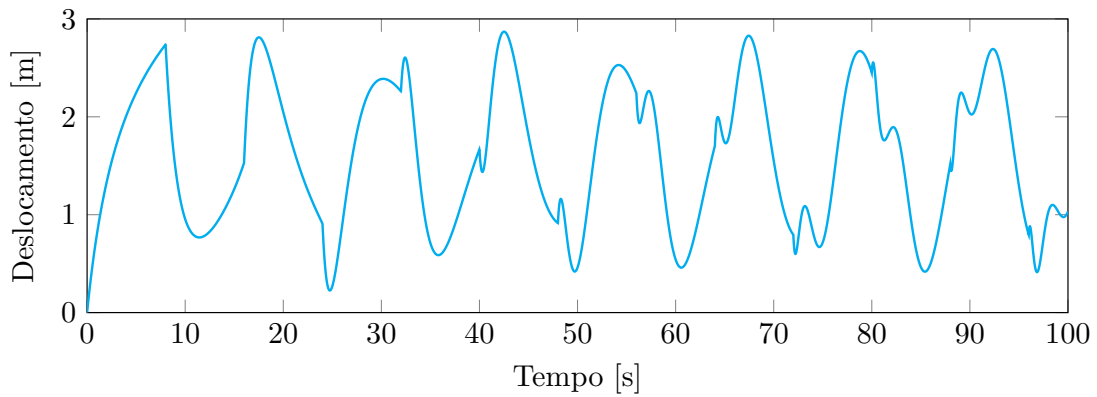


Figura A.13: Resposta analítica do deslocamento em  $\mathbf{P}_3$  com  $N = 1000$   
 Fonte: Próprio Autor

Os dados relacionados à solução analítica das tensões são apresentados na tabela [A.4] e nas figuras [A.14 - A.17] a seguir.

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	2.70E-02
100	2.83E-03
1000	2.85E-04
10000	2.85E-05

Tabela A.4 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para a tensão em  $\mathbf{P}_4$   
 Fonte: Próprio Autor

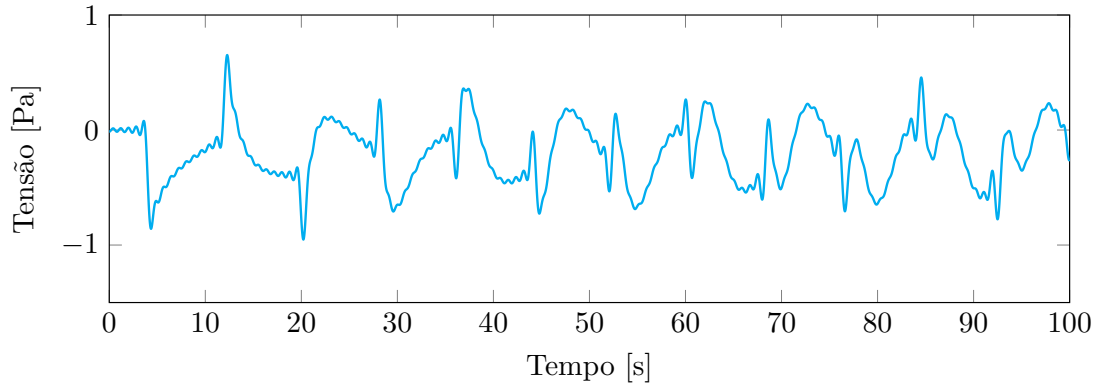


Figura A.14: Resposta analítica da tensão  $P_4$  com  $N = 10$   
Fonte: Próprio Autor

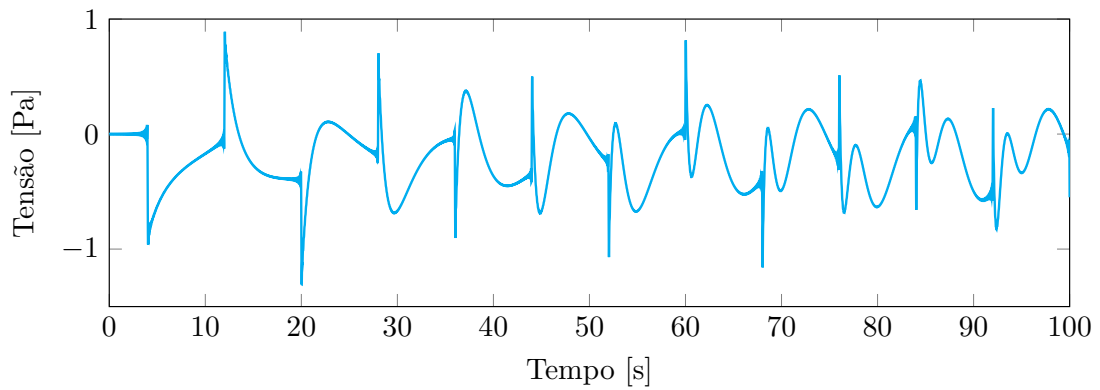


Figura A.15: Resposta analítica da tensão  $P_4$  com  $N = 100$   
Fonte: Próprio Autor

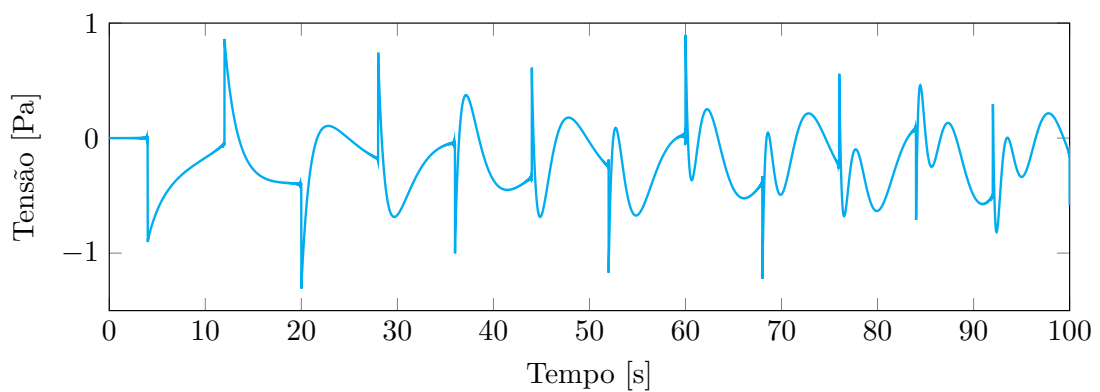


Figura A.16: Resposta analítica da tensão  $P_4$  com  $N = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

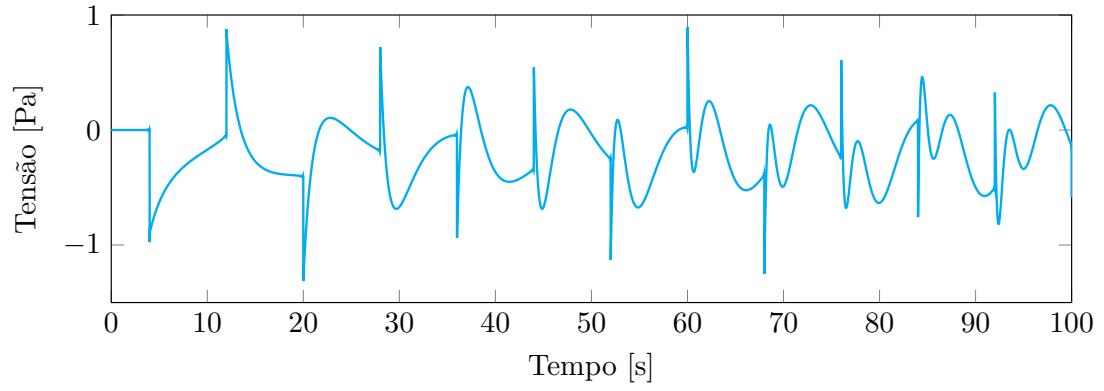


Figura A.17: Resposta analítica da tensão  $P_4$  com  $N = 10000$   
Fonte: Próprio Autor

## A.3 Exemplo III

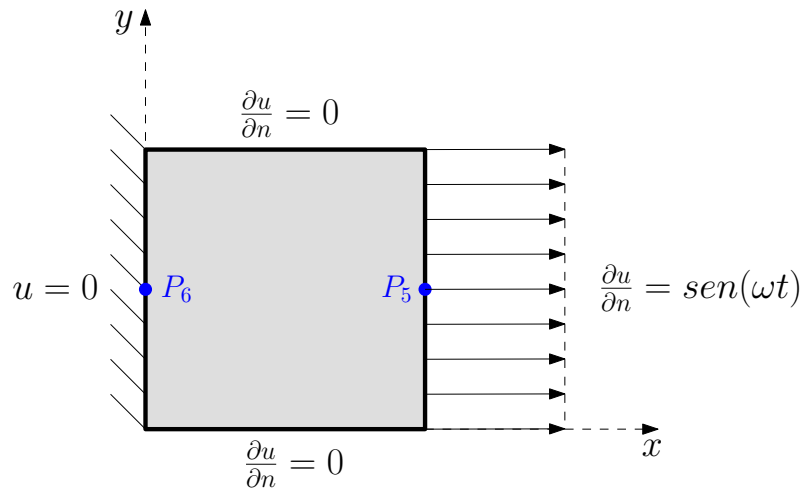


Figura A.18: Geometria e Condições de contorno do Exemplo III  
Fonte: Próprio Autor

A solução analítica do problema, considerando condições iniciais nulas, pode ser obtida pelo método de separação de variáveis. Seguindo o procedimento matemático adequado para o caso de cargas variáveis com o tempo, a resposta do deslocamento é dada por (GRAFF, 1975):

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ \frac{\omega_n \text{sen}(\omega t) - \omega \text{sen}(\omega_n t)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \frac{\text{sen}(\omega_n x)}{\omega_n} \quad (\text{A.8})$$

Na equação (21), tem-se a frequência natural  $\omega_n$ :

$$\omega_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2}$$

Os valores de  $D_{\text{máx}}$  e as curvas de deslocamento, considerando uma frequência de excitação  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  (a maior simulada), são apresentados na tabela [A.5] e nas Figuras [A.19 - A.21].

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	4.67E-03
100	2.14E-05
1000	2.04E-07

Tabela A.5 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para o deslocamento em  $P_5$

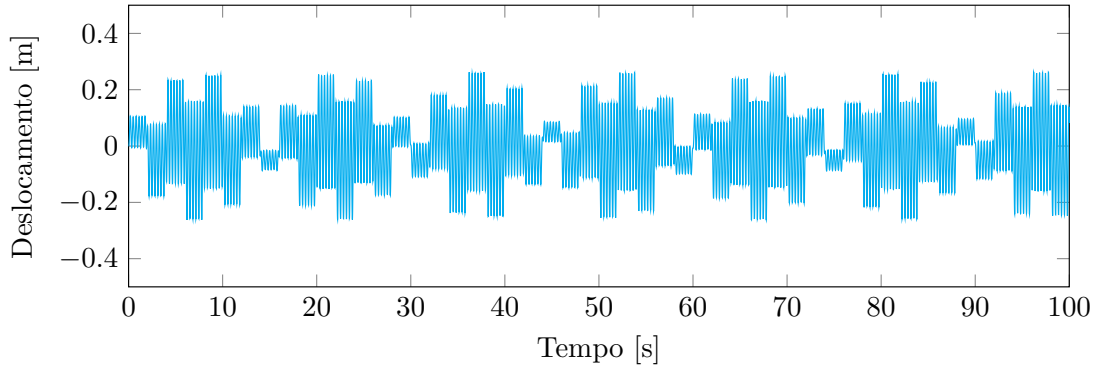


Figura A.19: Resposta analítica do deslocamento em  $P_5$  com  $N = 10$   
Fonte: Próprio Autor

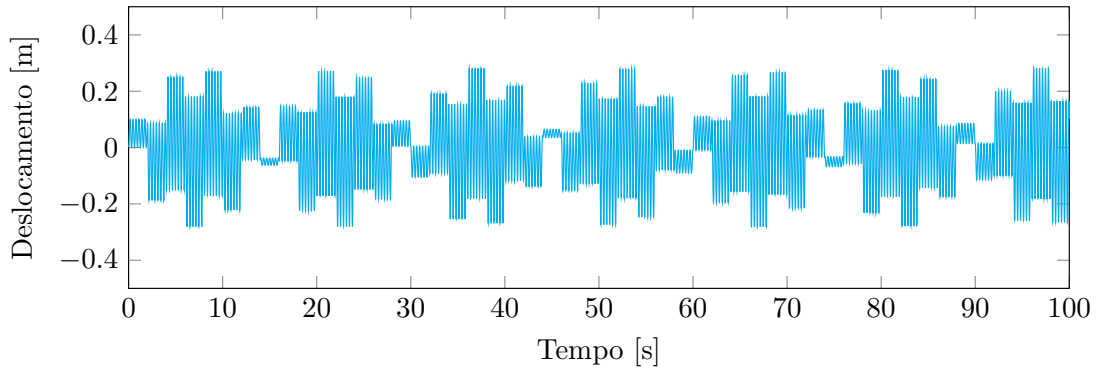


Figura A.20: Resposta analítica do deslocamento em  $P_5$   $N = 100$   
Fonte: Próprio Autor

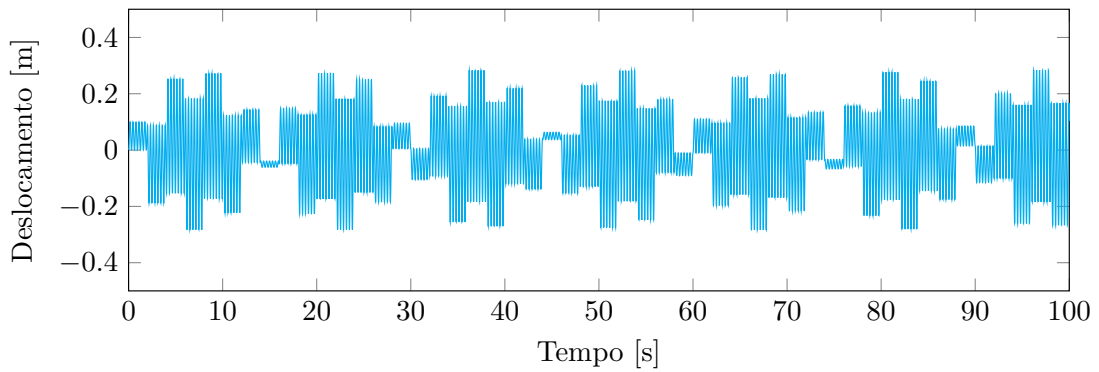


Figura A.21: Resposta analítica do deslocamento em  $P_5$   $N = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

## A.4 Exemplo IV

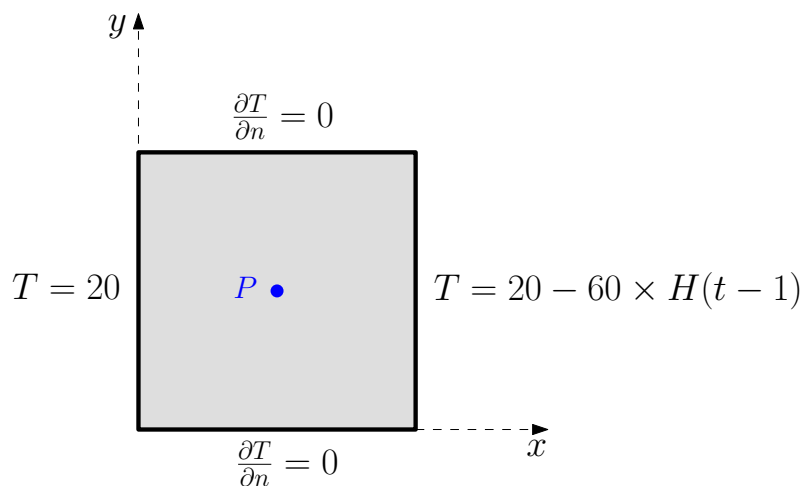


Figura A.22: Geometria e Condições de contorno do Exemplo IV  
Fonte: Próprio Autor

A solução analítica da temperatura, para propriedades mecânicas unitárias, condições iniciais nulas e condições de contorno conforme descrito na figura [A.22], pode ser obtida pelo método de separação de variáveis:

$$u(x, y, t) = 20 - 60xH(t - 1) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t} e^{\alpha n^2 \pi^2 H(t-1)} \quad (\text{A.9})$$

O coeficiente  $b_n$  é dado por:

$$b_n = \frac{40}{n\pi} \left\{ [1 - 4(-1)^n]H(t - 1) + (-1)^n - 1 \right\}$$

Os valores de  $D_{\text{máx}}$  e as curvas de temperaturas são apresentados na tabela [A.5] e nas figuras [A.19 - A.21].

$N_t$	$D_{\text{máx}}$
10	2.31
100	2.52E-01
1000	2.54E-02
10000	2.55E-03
100000	2.55E-04

Tabela A.6 - Valores de  $D_{\text{máx}}$  para a temperatura em  $\mathbf{P}$   
 Fonte: Próprio Autor

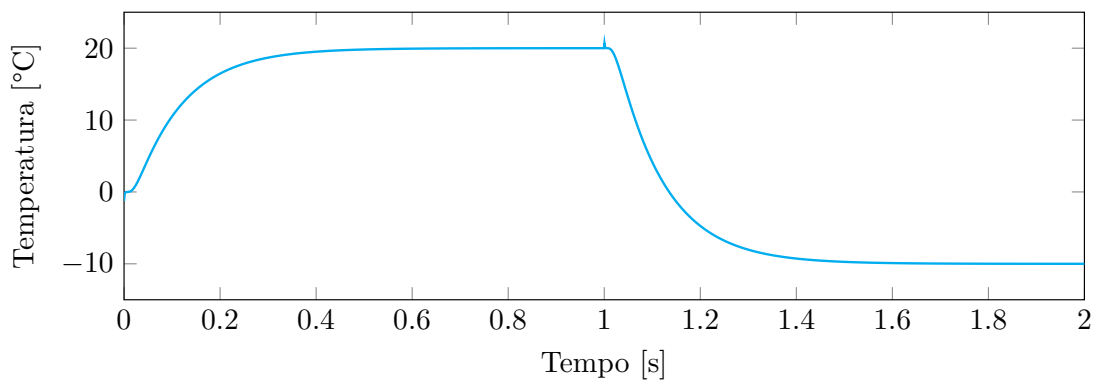


Figura A.23: Resposta analítica da temperatura em  $\mathbf{P}$  com  $N = 10$   
 Fonte: Próprio Autor

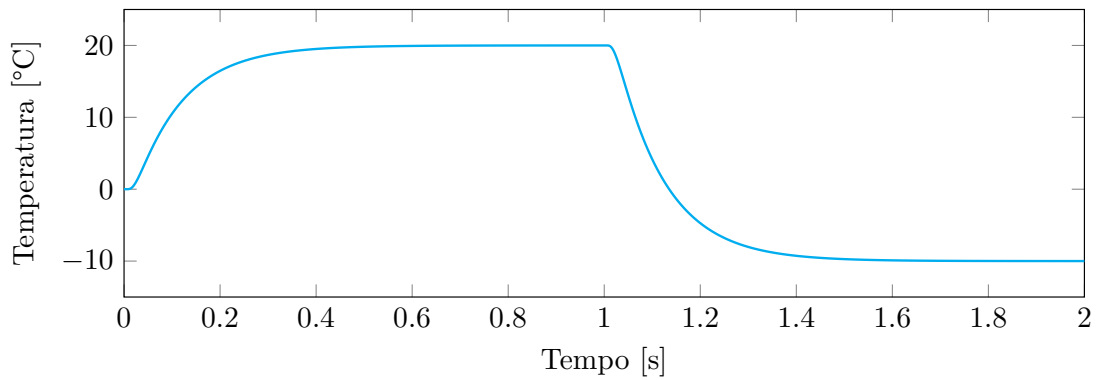


Figura A.24: Resposta analítica da temperatura em  $\mathbf{P}$  com  $N = 100$   
 Fonte: Próprio Autor

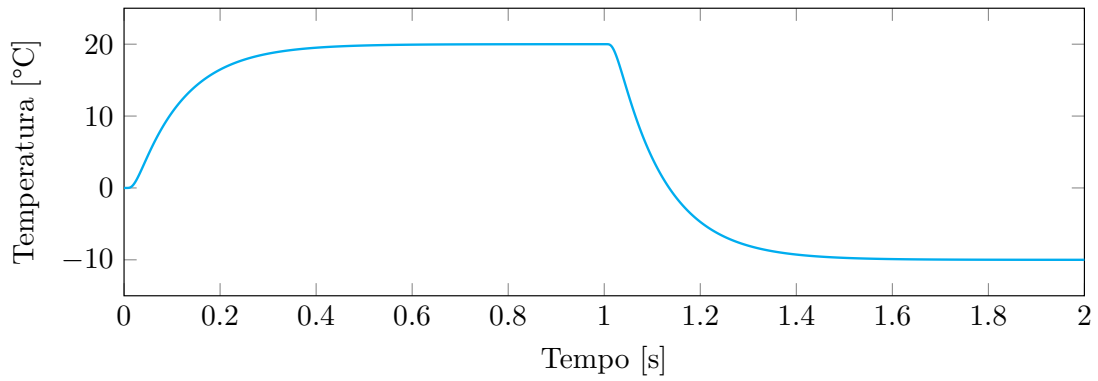


Figura A.25: Resposta analítica da temperatura em  $\mathbf{P}$  com  $N = 1000$   
Fonte: Próprio Autor

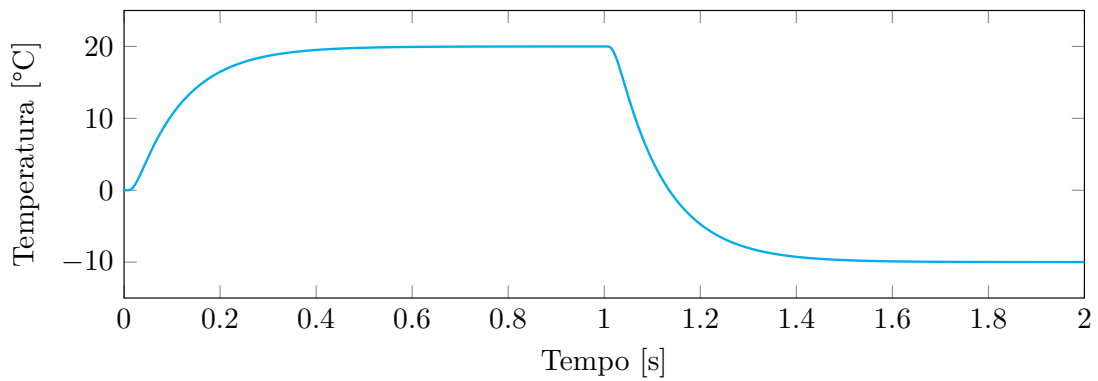


Figura A.26: Resposta analítica da temperatura em  $\mathbf{P}$  com  $N = 10000$   
Fonte: Próprio Autor

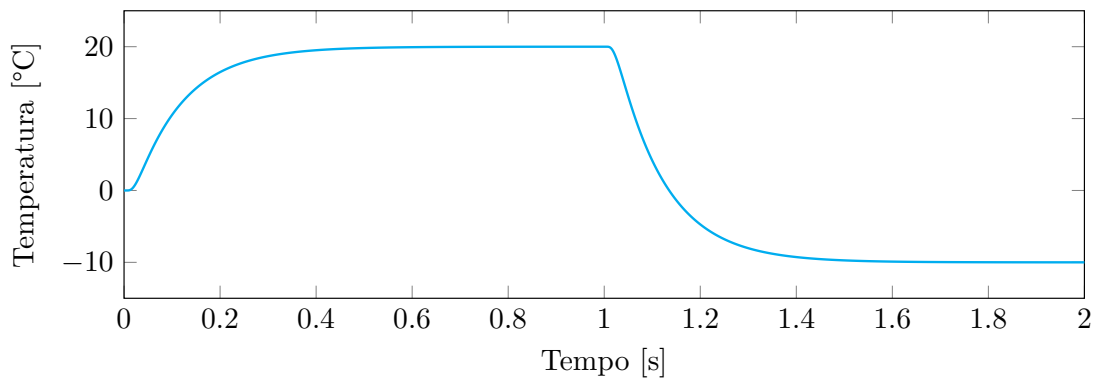


Figura A.27: Resposta analítica da temperatura em  $\mathbf{P}$  com  $N = 100000$   
Fonte: Próprio Autor

## ALGORÍTIMO DE HOUBOLT

O esquema de avanço no tempo de Houbolt é uma técnica numérica utilizada para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Este método é particularmente útil para problemas em que a estabilidade e a precisão são importantes, como na análise de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos.

Este apêndice visa apresentar de forma objetiva a aplicação do método de Houbolt na solução das EDOs geradas após a aplicação do Método Modal. São utilizadas as seguintes aproximações para a derivada primeira e segunda (HOUBOLT, 1950):

$$\{\dot{\mathbf{y}}\}_{t+1} = \frac{1}{6\Delta t} \left( 11\{\mathbf{y}\}_{t+1} - 18\{\mathbf{y}\}_t + 9\{\mathbf{y}\}_{t-1} - 2\{\mathbf{y}\}_{t-2} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\{\ddot{\mathbf{y}}\}_{t+1} = \frac{1}{\Delta t^2} \left( 2\{\mathbf{y}\}_{t+1} - 5\{\mathbf{y}\}_t + 4\{\mathbf{y}\}_{t-1} - \{\mathbf{y}\}_{t-2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Para os problemas regidos pela equação da onda, considere o sistema de EDOs resultante da aplicação do método modal, equação (4.53):

$$[\mathbf{I}]\{\ddot{\mathbf{y}}\}_{t+1} + [\mathbf{\Lambda}]\{\mathbf{y}\}_{t+1} = \{\bar{\mathbf{f}}\}_{t+1} \quad (\text{B.3})$$

Pode-se operar matricialmente e solucionar simultaneamente as  $n$  equações; entretanto, aqui por simplicidade demonstrar-se-á a solução de cada modo individualmente. Como as matrizes são diagonais, para um modo  $i$  qualquer pode-se escrever:

$$\ddot{y}_{t+1}^i + \omega_i^2 y_{t+1}^i = f_{t+1}^i \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a expressão da equação (B.2):

$$\frac{1}{\Delta t^2} \left( 2y_{t+1}^i - 5y_t^i - 4y_{t-1}^i - y_{t-2}^i \right) + \omega^2 y_{t+1}^i = f_{t+1}^i \quad (\text{B.5})$$

Rearrmando os termos, pode-se escrever:

$$y_{t+1}^i = \frac{1}{2 + \omega^2 \Delta t^2} \left( 5y_t^i + 4y_{t-1}^i + y_{t-2}^i + \Delta t^2 f_{t+1}^i \right) \quad (\text{B.6})$$

Observando a equação (B.6) nota-se que para a determinação do deslocamento no instante  $t + 1$  é necessário o conhecimento do deslocamento no instante atual e nos 2 instantes anteriores. A inicialização do método, isto é, em  $t = 0$ , é realizada utilizando as expressões dos deslocamento fictícios (TILLERSON; STRICKLIN, 1970):

$$y_{-1}^i = \Delta t^2 \ddot{y}_o^i + 2y_o^i - y_1^i \quad (\text{B.7})$$

$$y_{-2}^i = 6\Delta t^2 \ddot{y}_o^i + 6\dot{y}_o^i + 9y_o^i - 8y_1^i \quad (\text{B.8})$$

No caso do problema térmico resolvido, o procedimento é semelhante. A maior diferença está no uso da aproximação para a primeira derivada, equação (B.1).

O Método de Houbolt é um esquema incondicionalmente estável (LOEFFLER, 1988); ainda assim, recomenda-se a utilização de incrementos de tempo, menores que  $\frac{1}{50}$  do período do modo que está sendo analisado (TILLERSON; STRICKLIN, 1970). Além disto, uma característica importante do método de Houbolt é a presença do chamado amortecimento fictício.

O amortecimento fictício refere-se a uma forma de dissipação numérica de energia que surge como uma consequência da formulação do método. Mesmo que o sistema físico modelado seja não-amortecido ou tenha uma quantidade pequena de amortecimento, o método de Houbolt, devido à sua natureza implícita e à forma como trata as velocidades e acelerações nos passos de tempo, introduz um efeito de amortecimento adicional que não está presente no modelo físico real. Esse efeito é particularmente mais significativo em frequências mais altas, onde o amortecimento fictício se torna mais acentuado.

O amortecimento numérico introduzido pelo método de Houbolt tende a dissipar rapidamente as componentes de alta frequência da resposta dinâmica. Isso pode ser desejável em alguns casos, uma vez que essas altas frequências muitas vezes correspondem

---

a modos numéricos ou ruídos indesejados que não têm relevância física. Outrossim, o efeito de amortecimento fictício ajuda a manter a solução estável em muitos casos. Entretanto, a escolha inadequada do tamanho do passo de tempo pode exacerbar o efeito de amortecimento, introduzindo uma dissipação numérica excessiva e levando a resultados fisicamente irrealistas, especialmente em sistemas pouco amortecidos.

## DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES

Este apêndice tem por objetivo discutir e apresentar a metodologia utilizada para a determinação dos autovalores e autovetores. A representação precisa desses elementos é fundamental para a obtenção de bons resultados por meio da Superposição Modal. Sabe-se que, em geral, os métodos para a obtenção de autovalores e autovetores de matrizes cheias e assimétricas, como as do MEC, demandam um grande número de operações, sendo, portanto, onerosos do ponto de vista computacional. Assim, uma discussão sobre os principais métodos e a busca pelo que melhor se adequa ao problema em questão, balanceando precisão e custo computacional, se faz necessária, justificando, portanto, a existência deste apêndice.

**DEFINIÇÃO (O problema de Autovalor):** *Dada uma matriz real quadrada  $[\mathbf{A}]$  de ordem  $n \times n$  e um vetor não nulo  $\{\mathbf{x}\}$  de dimensão  $n$ , o problema de autovalores e autovetores consiste em encontrar um número real  $\lambda$  (o autovalor) e um vetor não nulo  $\{\mathbf{x}\}$  (o autovetor) tal que a seguinte equação seja satisfeita:*

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{x}\} = \lambda\{\mathbf{x}\}$$

Diz-se que  $\lambda$  é o autovalor associado ao autovetor  $\{\mathbf{x}\}$ . Geometricamente, a multiplicação pela uma matriz  $[\mathbf{A}]$  equivale a uma transformação linear que comprime ou dilata  $\{\mathbf{v}\}$  por um fator  $\lambda$ , invertendo o sentido, no caso de  $\lambda$  negativo, sobre uma mesma reta.

De forma semelhante ao que ocorre para polinômios, não há uma fórmula geral para encontrar autovalores de uma matriz  $n \times n$  quando  $n > 4$ . Este fato fundamenta a utilização

de métodos numéricos para calcular os autovalores de matrizes de dimensões maiores. O Teorema de Abel implica que não há métodos diretos gerais para calcular autovalores de matrizes maiores que 4. Assim, todos os métodos para encontrar autovalores de matrizes  $n \times n$  com  $n > 4$  são, por necessidade, métodos iterativos (AMERICO, 2013).

Entre os principais métodos iterativos para essa tarefa, destacam-se o método das Potências e o Algoritmo QR. O método das Potências, em sua abordagem típica, calcula o maior autovalor de uma dada matriz. Existe também uma variação, o método das Potências Inverso, que calcula o menor autovalor da matriz. Estas variantes permitem o cálculo de apenas um autovalor, seja o maior ou o menor, não sendo, portanto, adequadas para a aplicação na superposição modal, onde se busca múltiplos autovalores e autovetores. No entanto, uma terceira variação do método das Potências se mostra adequada: o método das Potências Inverso com Deslocamento, que possibilita calcular o autovalor mais próximo a um determinado valor  $\mu$ , chamado deslocamento, e seu respectivo autovetor.

#### *Algoritmo QR com Matriz de Hessenberg*

O algoritmo QR com a matriz de Hessenberg segue os seguintes passos:

I. A matriz  $[\mathbf{A}]$  é inicialmente transformada em uma matriz de Hessenberg  $[\mathbf{H}]$ . Isso é feito utilizando a decomposição de Householder.

II. Aplicação do Algoritmo QR:

1. Inicialização:  $[\mathbf{H}]_0 = [\mathbf{H}]$ .

2. Decomposição QR: Para a matriz  $[\mathbf{H}]_k$ , calcular a decomposição QR, obtendo  $[\mathbf{Q}]_k$  e  $[\mathbf{R}]_k$  tais que:

$$[\mathbf{H}]_k = [\mathbf{Q}]_k [\mathbf{R}]_k$$

3. Atualização: Atualizar a matriz como:

$$[\mathbf{H}]_{k+1} = [\mathbf{R}]_k [\mathbf{Q}]_k$$

4. Iteração: Repetir os passos 2 e 3 até que  $[\mathbf{H}]_k$  se aproxime de uma forma triangular superior, onde os elementos fora da diagonal se tornem suficientemente pequenos.

III. Extração dos Autovalores: Após a convergência, dentro da tolerância escolhida, os elementos da diagonal da matriz triangular superior resultante  $[\mathbf{H}_k]$  são aproximações para os autovalores de  $[\mathbf{A}]$ .

IV. Determinação dos Autovetores: Para cada autovalor  $\lambda$ , resolver o sistema:

$$([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{I}])\{\mathbf{x}\} = 0$$

#### *Método das Potências Inverso com Deslocamento*

I. Escolha de um deslocamento  $\mu$  próximo ao autovalor desejado. O objetivo é encontrar o autovalor mais próximo de  $\mu$ .

II. Modifica-se a matriz  $[\mathbf{A}]$  de acordo com o deslocamento escolhido:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{A}] - \mu[\mathbf{I}]$$

onde  $[\mathbf{I}]$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Isso transforma o problema de encontrar autovalores de  $[\mathbf{A}]$  em encontrar os autovalores de  $[\mathbf{B}]$ .

III. Escolhe-se um vetor inicial  $\{\mathbf{x}_0\} \in \mathbb{R}^n$ , que não deve ser um autovetor. Normalmente, escolhe-se  $\{\mathbf{x}\}_0$  com componentes aleatórias ou unitárias.

IV. A seguir, aplica-se o método das potências inverso, ou seja, itera-se da seguinte maneira:

1. Resolve-se o sistema linear  $[\mathbf{B}]\{\mathbf{y}\}_k = \{\mathbf{x}\}_{k-1}$ , ou seja,  $([\mathbf{A}] - \mu[\mathbf{I}])\{\mathbf{y}\}_k = \{\mathbf{x}\}_{k-1}$ .
2. Normaliza-se  $\{\mathbf{y}\}_k$  para obter o próximo vetor  $\{\mathbf{x}\}_k$ :

$$\{\mathbf{x}\}_k = \frac{1}{\|\{\mathbf{y}\}_k\|} \{\mathbf{y}\}_k$$

3. Estimam-se o autovalor utilizando o método de Rayleigh:

$$\lambda_k = \{\mathbf{x}\}_k^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{x}\}_k$$

V. A iteração continua até que a norma da diferença entre  $\{\mathbf{x}\}_k$  e  $\{\mathbf{x}\}_{k-1}$ , ou a diferença entre  $\lambda_k$  e  $\lambda_{k-1}$ , seja menor do que uma tolerância predefinida  $\epsilon$ .

VI. Após a convergência, o vetor  $\{\mathbf{x}\}_k$  será uma aproximação do autovetor associado ao autovalor  $\lambda_k$ .

### Comparativo entre os Métodos

O algoritmo QR, quando aplicado diretamente a uma matriz  $n \times n$ , possui um custo elevado. No entanto, uma melhoria significativa pode ser alcançada se a matriz for primeiramente reduzida à forma de Hessenberg. Essa redução pode ser feita em  $O(n^3)$  operações. Depois de reduzida, o algoritmo QR pode ser aplicado com maior eficiência, dado que as iterações subsequentes envolvem apenas matrizes de Hessenberg, que mantêm a estrutura esparsa, diminuindo o número de operações.

O custo de cada iteração QR em uma matriz de Hessenberg é de  $O(n^2)$  para a decomposição QR, mas o custo total por iteração pode ser um pouco maior devido à aplicação das transformações. O número de iterações necessárias depende da convergência, que em geral é  $O(n)$ , resultando em um custo total de  $O(n^3)$  para calcular todos os autovalores. Se apenas  $k$  autovalores são necessários, a complexidade pode ser reduzida, mas o custo total ainda tende a ser  $O(n^3)$  devido ao número de iterações necessárias para garantir a convergência dos autovalores desejados. Para calcular os  $k$  autovetores associados, após obter os  $k$  autovalores desejados, é possível calcular os autovetores resolvendo sistemas lineares que envolvem a matriz original, o que adiciona um custo de  $O(kn^3)$ .

Já no método das potências inversas com deslocamento, o custo da resolução de sistemas lineares por meio da eliminação de Gauss é de  $O(n^3)$  para cada fatoração. O método converge rapidamente para o autovalor mais próximo de  $\mu$ , e o número de iterações depende da proximidade de  $\mu$  ao autovalor real. Para calcular  $k$  autovalores, repete-se o processo com diferentes deslocamentos  $\mu$ , resultando em um custo total de  $O(kn^3)$  operações. Após a convergência, os autovetores associados são calculados simultaneamente com os autovalores durante o processo de iteração.

Entretanto, o método das potências inversas com deslocamento requer que, a cada execução, um deslocamento  $\mu$  seja escolhido, o qual deve estar próximo do autovalor a ser encontrado. Para determinar todos os autovalores, a seleção adequada dos deslocamentos torna-se um desafio, especialmente na ausência de informações prévias sobre a distribuição dos autovalores. Essa dificuldade pode resultar em erros de convergência ou em um número excessivo de execuções com deslocamentos inadequados, tornando o processo altamente ineficiente. Quando os autovalores estão próximos uns dos outros, o método pode falhar

em distinguir adequadamente os autovalores, o que requer ajustes nos deslocamentos e um número maior de iterações, e, conseqüentemente, um maior custo computacional.

Em contraste, o algoritmo QR, especialmente quando aplicado a matrizes de Hessenberg, permite a determinação simultânea de todos os autovalores de maneira mais eficiente. O algoritmo QR não requer ajustes manuais de deslocamento nem múltiplas execuções para cada autovalor individual. Logo, para a aplicação em questão, análise modal, na qual muitas vezes é necessário determinar boa parte dos autovalores e autovetores de uma matriz, o algoritmo QR se mostra mais adequado.