

Vinícius Alexandre Gomes Barcellos

**Da física da luz à modelagem estelar: uma
análise dos processos físicos e das equações de
estrutura estelar**

Vitória, Espírito Santo, Brasil

2024

Vinícius Alexandre Gomes Barcellos

Da física da luz à modelagem estelar: uma análise dos processos físicos e das equações de estrutura estelar

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade Federal do Espírito Santo

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten

Vitória, Espírito Santo, Brasil

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

B242f Barcellos, Vinícius Alexandre Gomes, 1999-
Da física da luz à modelagem estelar : uma análise dos processos físicos e das equações de estrutura estelar / Vinícius Alexandre Gomes Barcellos. - 2024.
132 f. : il.

Orientador: Hermano Endlich Schneider Velten.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Astrofísica. 2. Estrutura estelar. 3. Gravidade. I. Velten, Hermano Endlich Schneider. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53




UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA


“Da física da luz a modelagem estelar: uma análise dos processos físicos e das equações de estrutura estelar”

Aluno: Vinicius Alexandre Gomes Barcellos


Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

 Documento assinado digitalmente
GUSTAVO ANDRES GUERRERO ERASO
Data: 13/12/2024 12:23:51 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

 Documento assinado digitalmente
HERMANO ENDLICH SCHNEIDER VELTEN
Data: 13/12/2024 13:02:38 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gustavo Andres Guerrero Eraso
(UFMG)

 Documento assinado digitalmente
JULIO CESAR FABRIS
Data: 13/12/2024 12:45:16 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten
(Orientador- PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 12 de dezembro de 2024

Dedico este trabalho ao meu avô, João Geraldo Gomes (in memoriam), que sempre foi o porto seguro da minha família.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Valéria Gomes Barcellos e Alexandre de Jesus Barcellos, por me proporcionarem a oportunidade de estudar.

Aos meus familiares, pelo apoio incondicional.

Aos meus amigos de longa data, do grupo Família Bafis, que considero como parte da minha família.

Aos amigos da UFES, em especial Victor e Taciana. Sentirei saudades das jogatinas de truco, das conversas e da convivência diária.

À minha noiva, Laura, não há palavras que expressem a gratidão que sinto por você.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten, pela paciência e orientação ao longo desta jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro através da bolsa concedida.

*“Nobody exists on purpose.
Nobody belongs anywhere.
We’re all going to die.
Come watch TV.”
Morty*

Resumo

Este trabalho aborda aspectos fundamentais da astrofísica moderna, com foco em três áreas principais: a teoria da radiação, as equações da estrutura estelar e a modelagem estelar. A primeira parte discute a interação entre luz e matéria, destacando a formulação da Lei de Planck, além das aplicações da fotometria e espectroscopia na determinação de parâmetros estelares. Na segunda parte, são apresentadas as equações fundamentais que governam a estrutura estelar, derivadas da mecânica dos fluidos, e sua relação com o equilíbrio hidrostático e o transporte de energia. A última parte aborda a modelagem estelar, introduzindo a equação de Lane-Emden e suas modificações no contexto relativístico e de teorias de gravidade modificada, com ênfase na teoria *beyond-Horndeski*. Tais teorias buscam expandir a fronteira do conhecimento da astrofísica e cosmologia e eliminar a necessidade de componentes “bizarros” no universo.

Palavras-chave: Astrofísica; Estrutura Estelar; Gravidade.

Abstract

This work addresses fundamental aspects of modern astrophysics, focusing on three main areas: the theory of radiation, the equations of stellar structure, and stellar modeling. The first part discusses the interaction between light and matter, highlighting the formulation of Planck's Law, as well as the applications of photometry and spectroscopy in determining stellar parameters. In the second part, the fundamental equations governing stellar structure, derived from fluid mechanics, are presented, along with their relation to hydrostatic equilibrium and energy transport. The final part addresses stellar modeling, introducing the Lane-Emden equation and its modifications in the relativistic context and in modified gravity theories, with an emphasis on the *beyond-Horndeski* theory. These theories aim to expand the frontier of knowledge in astrophysics and cosmology, seeking to eliminate the need for "bizarre" components in the universe.

Keywords: Astrophysics; Stellar Structure; Gravity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica da Lei de Stefan-Boltzmann, que descreve a relação entre a potência por unidade de área da radiação emitida e a temperatura absoluta à quarta potência.	19
Figura 2 – Representação gráfica da Lei de Deslocamento de Wien. À esquerda tem-se a variação do comprimento de onda máximo (λ_{max}) em relação à temperatura e à direita, a constância da relação λ_{max}/T^{-1}	22
Figura 3 – Medidas feitas por O. Lummer e E. Pringshein, em 1899, sobre a distribuição de intensidade de radiação de corpo negro para várias temperaturas, mostrando experimentalmente a validade da Lei de deslocamento de Wien. Retirado de (STUDART, 2000).	23
Figura 4 – Comparação das Distribuições de Densidade de Energia: A Lei de Planck, a Lei de Wien e a Lei de Rayleigh-Jeans.	26
Figura 5 – Distribuição da densidade de energia em termos do comprimento de onda, exposta em (1.51), proposta por Planck.	29
Figura 6 – Distribuição do espectro de emissão solar ao nível do mar (em vermelho) e no topo da atmosfera (em amarelo) (ALMEIDA et al., 2020).	34
Figura 7 – Nebulosa escura Barnard 98, observada em diferentes comprimentos de onda, do visível ao infravermelho, onde percebe-se a diferença de absorção em certas faixas do espectro observado. Fonte: ESO (European Southern Observatory). Disponível em: < https://www.eso.org/public/images/eso9934b/ >.	39
Figura 8 – Visualização do espectro contínuo no visível seguido do espectro de absorção e emissão do átomo de hidrogênio (leis de Kirchhoff).	43
Figura 9 – Razão de número de átomos de hidrogênio com elétrons no primeiro estado excitado ($n = 2$), N_2 , pela soma de átomos com elétrons no estado fundamental e primeiro estado excitado, $N_1 + N_2$, utilizando a equação de excitação de Boltzmann (3.17).	51
Figura 10 – Razão do número de átomos uma vez ionizados (N_{II}) pela soma do número de átomos neutros com átomos uma vez ionizados ($N_I + N_{II}$), utilizando a equação de Saha (3.18).	52

Figura 11 – Sequência espectral OABFGKM ilustrando a dependência da temperatura na formação das linhas espectrais. Os dados utilizados para produzir este gráfico são obtidos pelo telescópio 0.9m Coudé Feed telescope at Kitt Peak National Observatory e se encontram em <i>Indo-US coudé-feed spectral library</i> . Disponível em: < https://noirlab.edu/science/observing-noirlab/observing-kitt-peak/telescope-and-instrument-documentation/cfib >	53
Figura 12 – Diagrama feito por Henry Norris Russel, com os tipos espectrais ao topo e as magnitudes absolutas ao lado esquerdo. Imagem retirada de (RUSSELL, 1914).	55
Figura 13 – Diagrama HR com o eixo horizontal sendo a temperatura efetiva (eixo invertido) e o eixo vertical sendo a luminosidade. Fonte: ESO (European Sourhern Observatory). Disponível em: < https://www.eso.org/public/images/eso0728c/ >.	56
Figura 14 – Forças de origem gravitacional, \mathbf{F}_g , e de pressão, \mathbf{F}_P , atuando em uma camada de uma estrela.	65
Figura 15 – Soluções da equação de Lane-Emden para diferentes valores do índice politrópico n	101
Figura 16 – Soluções da Equação de Lane-Emden modificada, com o parâmetro da gravidade modificada associado as teorias de <i>beyond-Horndeski</i> $\Upsilon = -0.5, 0, 0.5$ e 1	121

Sumário

	Introdução	13
I	FÍSICA DA LUZ	14
1	TEORIA DA RADIAÇÃO	15
1.1	Corpo Negro	15
1.2	Lei de Wien	19
1.3	Lei de Rayleigh-Jeans	22
1.4	Lei de Planck	24
1.4.1	Lei de Planck e os seus limites	30
2	FOTOMETRIA	32
2.1	Luminosidade	32
2.2	Sistema de Magnitudes	35
2.2.1	Magnitude Bolométrica	41
3	ESPECTROSCOPIA	42
3.1	Linhas Espectrais	42
3.2	Classificação Estelar	49
II	EQUAÇÕES DA ESTRUTURA ESTELAR	57
4	MECÂNICA DOS FLUIDOS AUTO-GRAVITANTES	58
4.1	Equações da continuidade, de Euler e de Poisson	58
4.2	Equilíbrio hidrostático	61
4.3	Pressão e temperatura	63
4.4	Perturbações no equilíbrio hidrostático	65
4.5	Pertubações na simetria esférica	68
5	TEOREMA DO VIRIAL	70
5.1	Potencial Gravitacional	70
5.2	Energia Interna	72
5.3	Energia Nuclear	75
5.4	Conservação da energia	77
6	TRANSPORTE DE ENERGIA	78

6.1	Radiação	78
6.2	Convecção	84
6.2.1	Critérios para convecção	89
6.2.2	Teoria do comprimento de mistura	93
III	MODELAGEM ESTELAR	96
7	ESTRELAS POLITRÓPICAS	97
7.1	A equação de estado politrópica	97
7.2	Variáveis adimensionais e a equação de Lane-Emden	98
7.3	Condições de contorno e as soluções analíticas e numéricas	99
8	CASO RELATIVÍSTICO	103
8.1	Transformações de Galileu, eletromagnetismo e transformações de Lorentz	103
8.2	A equação TOV	105
8.3	Lane-Emden relativística	112
9	TEORIAS DE GRAVIDADE MODIFICADA	115
	Considerações finais	123
	REFERÊNCIAS	125

Introdução

A astrofísica moderna oferece um campo vasto e interdisciplinar para o estudo dos fenômenos que governam as estrelas, desde a interação entre luz e a matéria até as forças fundamentais que sustentam a estrutura dos corpos celestes. O estudo detalhado desses fenômenos não apenas enriquece nosso entendimento da evolução estelar, mas também amplia nossa compreensão das leis físicas em condições extremas.

Entre os conceitos centrais para a análise das estrelas, destacam-se os processos de emissão e absorção de radiação, que constituem a base da Teoria da Radiação. O estudo aprofundado desses fenômenos resultou na formulação da Lei de Planck, no início do século XX, a qual descreve a distribuição da densidade espectral de energia emitida ou absorvida em função do comprimento de onda, em conformidade com as observações experimentais. Nessa formulação, a emissão e absorção de radiação de um objeto apresentam um comportamento análogo a uma distribuição gaussiana. Além disso, a análise da luz emitida pelas estrelas, utilizando técnicas como a fotometria e a espectroscopia, permite determinar parâmetros fundamentais, como a temperatura superficial, composição química, densidade, raio e distância da Terra. Esses dados são essenciais para a caracterização dos astros e para a construção de modelos que buscam elucidar a estrutura interna das estrelas.

Esses modelos são baseados em um conjunto de quatro equações fundamentais, conhecidas como Equações da Estrutura Estelar, que descrevem o equilíbrio hidrostático, a conservação da massa, a conservação da energia e o transporte de energia. Essas equações estabelecem relações entre a pressão, densidade, massa, temperatura e luminosidade, envolvendo assim quatro equações e cinco variáveis. Para resolver esse sistema, é necessária uma equação de estado, que define uma relação entre pressão, densidade e temperatura. As Equações da Estrutura Estelar são derivadas das equações da mecânica dos fluidos, incluindo a equação da continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson. Além disso, o estudo do transporte de energia, realizado essencialmente por meio de radiação ou convecção, dentro das estrelas é feito analisando as condições físicas no interior estelar.

A modelagem estelar é um aspecto crucial da investigação astrofísica, onde é considerado que cada camada da estrela sustenta as camadas mais externas (equilíbrio hidrostático), a lei zero da termodinâmica é válida, isto é, a energia flui de regiões mais quentes para as mais frias (transporte energético), a massa total da estrela é a soma de todas as camadas no interior estelar (conservação da massa) e que a luminosidade total corresponde à energia total produzida em todas as regiões da estrela (conservação da energia).

Considerar todas essas variáveis na modelagem estelar não é uma tarefa simples.

Por essa razão, nos primeiros anos de pesquisa sobre a estrutura estelar, foi adotada uma forma mais simples para a equação de estado, conhecida como equação politrópica, onde a pressão é função apenas da densidade, $P = P(\rho)$, desconsiderando os efeitos do transporte de energia. Isso simplifica o sistema de equações e, com a introdução de parâmetros adimensionais, permite a derivação de uma única equação para a estrutura estelar: a equação de Lane-Emden. Essa equação inclui um parâmetro n , chamado índice politrópico, que modifica a relação entre pressão e densidade, alterando também a forma da equação de Lane-Emden e indicando a transformação termodinâmica que ocorre no sistema. Existem soluções analíticas para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$, e os modelos politrópicos podem ser usados para descrever estrelas com núcleos de matéria degenerada relativística ($n = 3$) e matéria ordinária não relativística ($n = 3/2$).

A equação de Lane-Emden é derivada a partir de uma abordagem newtoniana, sendo adequada para descrever a maior parte das estrelas. No entanto, para estrelas onde o regime relativístico é essencial, como as estrelas de nêutrons, essa equação não é suficiente. Nesses casos, é necessário utilizar a equação de equilíbrio hidrostático no contexto da Relatividade Geral, chamada equação TOV (Tolman-Oppenheimer-Volkoff), que é apropriada para tratar de campos gravitacionais intensos. A partir da equação TOV também é possível obter uma equação diferencial em função de parâmetros adimensionais, análoga à equação de Lane-Emden.

Além dessas abordagens, tem crescido o campo de pesquisa que busca modificar a Relatividade Geral (RG), motivado tanto por questões teóricas quanto por desafios observacionais. Do ponto de vista teórico, a RG prevê a existência de singularidades, pontos no espaço-tempo onde a curvatura diverge, tornando impossível a descrição geométrica do fenômeno gravitacional. Do ponto de vista observacional, o problema reside no modelo cosmológico padrão, que é fundamentado na RG, mas requer a inclusão de um setor escuro no universo para explicar a expansão acelerada, a formação de grandes estruturas e as curvas de rotação das galáxias. Esse setor escuro, composto por matéria escura e energia escura, representa 95% de toda a matéria e energia do universo, mas sua natureza permanece desconhecida, já que sua detecção é puramente gravitacional e indireta, e não faz parte do modelo padrão de partículas elementares.

Tais teorias, que generalizam a equação TOV, buscando eliminar a necessidade de constituintes “estranhos”. Essas teorias também introduzem modificações na equação de Lane-Emden no limite newtoniano, com a adição de novos parâmetros. Tais modificações alteram as equações da estrutura estelar e, conseqüentemente, as condições de equilíbrio estelar, resultando em uma equação de Lane-Emden modificada, cuja forma varia dependendo da teoria de gravidade utilizada.

O presente trabalho tem como objetivo explorar aspectos fundamentais da astrofísica, sendo dividido em três partes principais: a física da luz, as equações da estrutura

estelar e a modelagem estelar.

Na primeira parte, discute-se a teoria da radiação, explicando como ocorre a interação da luz com a matéria, culminando na formulação da Lei de Planck. Além disso, são apresentadas as aplicações da fotometria e da espectroscopia na obtenção de parâmetros físicos de objetos celestes, bem como na sua classificação.

Na segunda parte, são introduzidas as equações da mecânica dos fluidos e sua utilização para derivar as duas primeiras equações de estrutura estelar: a equação de continuidade da massa e a equação de equilíbrio hidrostático. Também é abordada a importância do teorema do Virial, que descreve a relação entre a energia cinética e a energia potencial gravitacional em sistemas virializados (em equilíbrio). Em seguida, são apresentadas as duas últimas equações de estrutura estelar: a equação de conservação da energia e a equação de transporte de energia, cuja forma depende de como ocorre o transporte, sendo este predominantemente por radiação ou convecção. A diferença entre esses dois modos de transporte de energia também é discutida.

Por fim, na terceira parte, é demonstrado como resolver o sistema de equações de estrutura estelar utilizando uma equação de estado politrópica, resultando na equação de Lane-Emden. Além disso, são abordadas suas modificações no caso relativístico e no contexto de teorias de gravidade modificada, em específico para a teoria *beyond-Horndeski*.

Parte I

Física da Luz

1 Teoria da radiação

A radiação é um dos conceitos fundamentais na física, essencial para o estudo da astronomia e astrofísica. Ela se refere à emissão e propagação de energia através do espaço na forma de ondas eletromagnéticas. A análise da radiação emitida por corpos celestes nos permite obter informações sobre suas propriedades físicas. Nesta seção, exploraremos os conceitos-chave no estudo da radiação.

1.1 Corpo Negro

Em 1865, James C. Maxwell provou que uma perturbação eletromagnética em um meio homogêneo se propaga na forma de uma onda, que mais tarde ficou conhecida como “ondas eletromagnéticas”. Ele também encontrou que tais ondas têm a mesma velocidade de propagação que a luz no vácuo. Sendo assim, define-se radiação como o processo de transferência de energia por meio de ondas eletromagnéticas e, como tal, não requer um meio para se propagar. Isso se manifesta de várias formas, como a luz e o calor do Sol, o calor gerado pelo corpo humano, o brilho de um material incandescente, a luz e o calor de uma vela, entre outros exemplos. Essa forma de transferência de energia é conhecida como “emissão térmica” ou “radiação térmica”, método pelo qual um objeto emite radiação¹ devido à sua temperatura.

O estudo da radiação envolve essencialmente duas áreas da física: eletromagnetismo e termodinâmica. Os trabalhos sobre a interação da radiação e matéria no final do século XIX e início do século XX produzidos por Maxwell, Gustav Kirchhoff (1824 - 1887), Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906), Josef Stefan (1835 - 1893), Wilhelm Wien (1864 - 1938), Max Planck (1858 - 1947), Joseph John Thomson (1856 - 1940), Niels Henrik David Bohr (1885 - 1962), e outros cientistas, culminaram no surgimento de outra área da física de extrema importância, a mecânica quântica.

A invenção do bolômetro² por Adolf Ferdinand Svanberg (1806 - 1857) em 1851, ainda que de forma elementar, permitiu o avanço do conhecimento da radiação. Já em 1858, o físico Balfour Stewart (1828 - 1887), após experimentos sobre emissão e absorção de radiação térmica, enunciou “O poder da emissão de cada tipo de substância é igual ao seu poder de absorção, para cada comprimento de onda radiante” (GONTIJO; RODRIGUES, 2022). No ano seguinte, em 1859, Kirchhoff observou, também a partir de resultados experimentais, que objetos à mesma temperatura possuem a mesma capacidade de emissão e absorção.

¹ Na literatura, as palavras radiação, luz e ondas eletromagnéticas são utilizadas como sinônimos.

² Instrumento realizado para medir radiação.

Assim, de maneira geral, a matéria e radiação interagem através de trocas de energia até atingirem o equilíbrio termodinâmico. Isso significa que um corpo com temperatura maior que o meio que o envolve emitirá constantemente radiação eletromagnética levando o sistema em direção ao equilíbrio e vice-versa.

Então, sendo a radiação o transporte de energia por ondas eletromagnéticas, pode-se definir a intensidade³ associada à radiação emitida e e à radiação absorvida a de um corpo. Portanto, considerando dois objetos – A e B – radiantes interagindo, no equilíbrio térmico tem-se (STUDART, 2000)

$$\frac{e_A}{a_A} = \frac{e_B}{a_B}. \quad (1.1)$$

Caso um corpo N possua a característica de absorver toda a energia incidente, atribui-se que $a_N = 1$ e ele será definido como corpo negro. Assim, de (1.1), tem-se que

$$e_N = \frac{e_A}{a_A} \mid e_N > e_A \quad \forall \text{ corpo } A, \quad (1.2)$$

chamado de princípio de proporcionalidade entre emissão e absorção total. Nesse caso, o corpo exibirá uma intensidade emissiva maior que qualquer outro. No entanto, é importante ressaltar que esse é apenas um conceito teórico.

Introduzido por Kirchhoff, em 1860, “corpo negro é um corpo que absorve toda a radiação que incide nele”, sendo um absorvedor perfeito (HOCKEY et al., 2007). Entretanto, para que esse objeto esteja em equilíbrio termodinâmico, ele deve emitir na mesma taxa que absorve, sendo também um emissor perfeito (FILHO; SARAIVA, 2017).

Para aprofundar a compreensão dos fenômenos físicos relacionados à radiação, foi necessário estabelecer uma conexão entre a temperatura e um parâmetro dinâmico de um sistema. Nesse contexto, em 1860, Maxwell demonstrou que as velocidades das moléculas de um gás em equilíbrio térmico seguem a Lei de distribuição normal, também conhecida como distribuição gaussiana⁴. A proposta de Maxwell foi generalizada no ano 1872 por Boltzmann e ficou conhecida como “Lei de Maxwell-Boltzman”, que em suma é uma distribuição de probabilidades e tem a forma

$$f_{MB} = 4\pi \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \right)^3 v^2 e^{-mv^2/2k_B T}, \quad (1.3)$$

onde f_{MB} é a função distribuição, m é a massa das partículas do gás, k_B é a constante de Boltzmann ($k_B = 1,380649 \times 10^{-23}$ J/K), v são as velocidades que as partículas podem assumir e T é a temperatura absoluta do sistema. É importante destacar que esse resultado

³ Intensidade é energia por unidade de área por unidade de tempo ou potência por unidade de área.

⁴ A Lei de distribuição normal foi desenvolvida por físicos e matemáticos ao longo dos séculos XVIII e XIV com a finalidade de descrever os erros experimentais em medidas físicas. Portanto, sua forma elementar é em função de variáveis estatísticas - média, variância e desvio padrão. Ela se tornou mais importante com os trabalhos de Abraham de Moivre (1667 - 1784), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) e Gauss (CAIRE, 2013).

é válido para um gás ideal⁵ e para tal é válido a equação de Clapeyron

$$PV = n\mathcal{R}T, \quad (1.4)$$

onde P é a pressão do gás, V é o seu volume, n é o seu número de mols, $\mathcal{R} = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ é a constante universal dos gases. Nesse contexto, a energia cinética média $\langle E \rangle$ é dada pela relação

$$\langle E \rangle = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}, \quad (1.5)$$

e, como o cálculo de $\langle v^2 \rangle$ leva a

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3\mathcal{R}T}{M}, \quad (1.6)$$

pode-se concluir que

$$\langle E \rangle \propto T. \quad (1.7)$$

Também demonstrado por Rudolf Clausius (1822 - 1888) em 1857 ([FELDENS; DIAS; SANTOS, 2010](#)).

Com isso em mente, pode-se dizer que quando uma radiação incide em um corpo opaco, sua parte absorvida aumenta e energia cinética dos átomos que compõem o corpo, o que, por consequência, eleva sua temperatura, como mostra (1.7). Porém, os átomos possuem partículas carregadas, como os elétrons, que são aceleradas pela radiação incidente e, conforme a teoria eletromagnética, essas partículas aceleradas emitem radiação, liberando energia do sistema. Assim sendo, a emissão de radiação resulta numa diminuição da energia cinética dos átomos, o que leva à diminuição da temperatura. Portanto, o equilíbrio termodinâmico é definido pela igualdade entre as taxas de emissão e absorção do corpo ([TIPLER; LLEWELLYN, 2017](#)).

O estudo da radiação emitida por um corpo negro é necessária pois envolve essencialmente um corpo em equilíbrio térmico e a emissão que ocorre nesse caso é a emissão térmica. Mas como corpo negro é uma idealização, o modelo mais próximo na realidade é o de uma cavidade com um pequeno furo. Nesse modelo, a radiação que entra tem uma probabilidade baixíssima de escapar, permanecendo no interior e sendo espalhada pelas paredes internas da cavidade até atingir o equilíbrio térmico. Assim, toda radiação incidente é absorvida pelo corpo. A radiação presente na cavidade pode ser analisada quanto às suas componentes espectrais⁶ via uma função distribuição $R(\lambda, T)$. Dessa forma, $R(\lambda, T)d\lambda$ representa a intensidade da radiação dentro do intervalo de comprimento de $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ quando a cavidade está a uma temperatura absoluta T . O espectro da emissão é caracterizado pela intensidade, que deve ser proporcional a densidade de energia $u(\lambda, T)$. A

⁵ Um gás ideal é um modelo conceitual que pressupõe que as partículas do gás são consideradas pontos materiais, realizam movimentos aleatórios, suas colisões são perfeitamente elásticas, não experimentam atração ou repulsão mútua, e suas variáveis termodinâmicas estão relacionadas por meio de uma equação de estado.

⁶ As componentes espectrais são o comprimento de onda λ e a frequência ν .

conexão entre a intensidade irradiada e a densidade de energia total $u_T(\lambda, T)$ é determinada pela equação

$$R(\lambda, T) = \frac{c}{4}u_T(\lambda, T), \quad (1.8)$$

onde R é a intensidade (em W/m^2), também chamada de radiância espectral, $c = 2,998 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ é a velocidade da luz no vácuo e o fator $1/4$ é de origem geométrica.

Um importante resultado sobre emissão térmica foi alcançado por Stefan, em 1879, que derivou empiricamente a relação

$$R \propto T^4, \quad (1.9)$$

com base nos resultados de seus experimentos de resfriamento de corpos (GONTIJO; RODRIGUES, 2022) (TIPLER; LEWELLYN, 2017).

A equação (1.9) mostra uma relação de proporcionalidade entre a radiância espectral e a temperatura, mas não fornece informações sobre o comportamento das componentes de uma onda, como comprimento de onda λ ou frequência ν . Logo, a radiância pode ser descrita para caracterizar quantitativamente a emissão de radiação por um corpo em equilíbrio térmico à temperatura T , em termos de λ ou de ν . Portanto, $R(\lambda, T)d\lambda$ definirá a intensidade emitida pelo corpo dentro da faixa de comprimento de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ e

$$R = \int_0^\infty R(\lambda, T)d\lambda \quad (1.10)$$

descreverá a distribuição da intensidade R no espectro de comprimento de onda. Essa é a Lei de Stefan em notação integral.

O passo seguinte à Lei de Stefan seria determinar a constante de proporcionalidade entre a radiância espectral e a temperatura. Isso foi feito por Boltzmann, em 1884, que demonstrou (1.9) de forma matemática, aplicando a segunda lei da termodinâmica à teoria eletromagnética, tratando o problema como um gás em que a pressão era de radiação⁷, sem a necessidade de determinar $R(\lambda, T)$. Boltzmann obteve

$$R = \sigma T^4, \quad (1.11)$$

sendo $\sigma = 5,6705 \times 10^{-8} \text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$ denominada “constante de Stefan-Boltzmann”. Essa equação é conhecida como “Lei de Stefan-Boltzmann”.

Portanto, a Lei de Stefan-Boltzmann estabelece que a intensidade irradiada por um corpo é função exclusivamente da temperatura e não depende de outras características do corpo. Além disso, a radiância espectral é proporcional à quarta potência da temperatura, o que indica a rapidez com que um corpo emite energia. Essas informações são compiladas na Figura 1.

⁷ A pressão de radiação é obtida através da teoria eletromagnética de Maxwell.

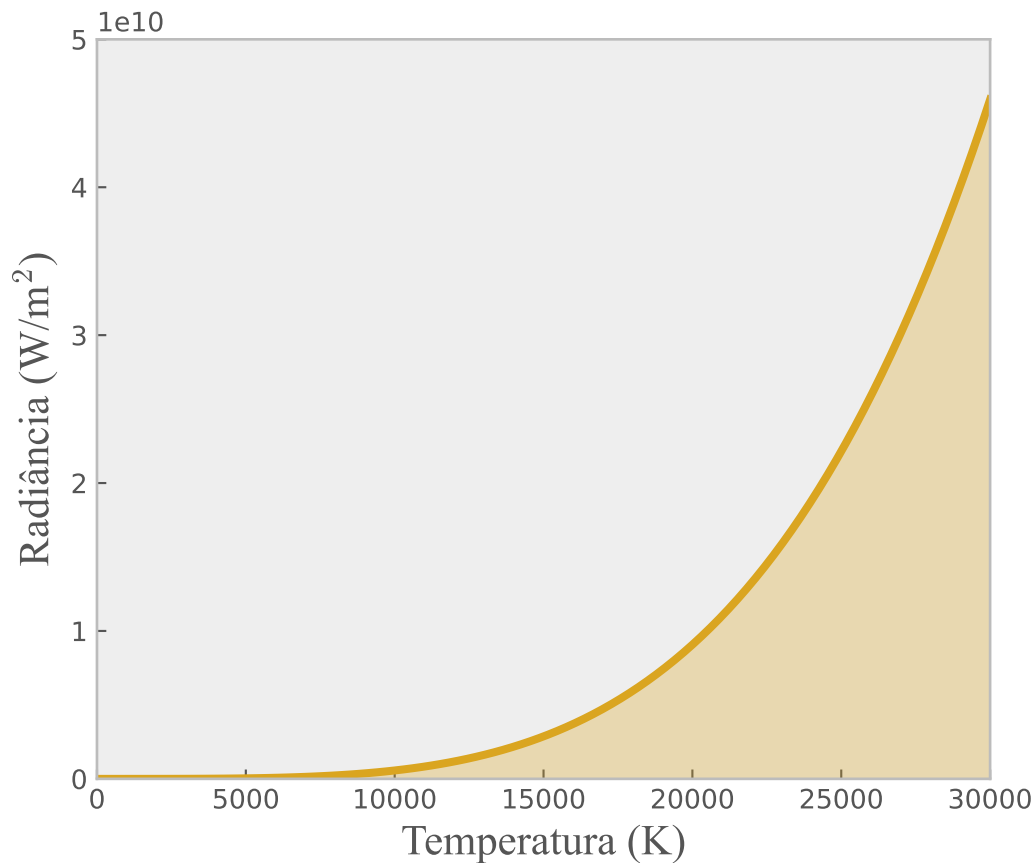


Figura 1 – Representação gráfica da Lei de Stefan-Boltzmann, que descreve a relação entre a potência por unidade de área da radiação emitida e a temperatura absoluta à quarta potência.

Um objeto que funciona como um corpo negro é um emissor perfeito de radiação. Portanto, emite a máxima quantidade possível de radiação referente à sua temperatura. Por outro lado, objetos reais – que não são corpos negros – emitem menos radiação pois sua capacidade de emissão é reduzida devido à sua emissividade inferior.

A emissividade, representada por ε , é um parâmetro que multiplica a equação (1.11) e indica a eficiência com que um objeto emite radiação térmica em relação a um corpo negro ideal na mesma temperatura. Assim, ε varia de 0 a 1, onde 0 representa uma emissão mínima de radiação térmica (baixa emissividade), e 1 indica que o objeto emite como um corpo negro ideal (alta emissividade). Esse parâmetro depende das propriedades físicas do objeto, além da temperatura, como a cor e a composição da superfície (TIPLER; LLEWELLYN, 2017).

1.2 Lei de Wien

Um salto tecnológico com respeito ao bolômetro de Svanberg foi dado pelo astrofísico americano Samuel Pierpont Langley (1834 - 1906) no ano 1878. Langley aprimorou

o bolômetro com a intenção de estudar a distribuição de energia do espectro solar. Ele percebeu que o pico de intensidade de cada radiação se movia em direção a comprimentos de onda mais curtos conforme a temperatura aumentava (LOETTIGERS, 2003). A fundamentação matemática deste resultado foi apresentada pelo físico alemão Wilhelm Wien (1864 - 1938), sendo posteriormente reconhecida como Lei de deslocamento de Wien. Essa Lei afirma que a função distribuição da densidade de energia é expressa pela equação

$$u(\nu, T) = \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (1.12)$$

onde ν é a frequência e $\phi(\nu/T)$ é uma função que depende apenas da razão entre a frequência e a temperatura.

Para derivar esse resultado, Wien considerou um corpo negro modelado como uma esfera oca, cujas paredes são perfeitamente condutoras, apresentando um pequeno orifício. Nessa concepção, ele imaginou que a esfera, com raio r , passasse por uma contração uniforme, com velocidade $v = dr/dt$, ao longo de um intervalo de tempo t . Devido a essa movimentação, ao incidir um feixe de luz com velocidade de propagação c , ocorreria o efeito Doppler - mudança na frequência de uma onda por conta do movimento relativo entre a fonte e um observador (STUDART, 2000) (CARUSO; OGURI, 2016).

A velocidade de propagação de uma onda é calculada utilizando a expressão

$$v = \lambda\nu. \quad (1.13)$$

Ao diferenciar esta expressão, tem-se

$$dv = d\lambda \cdot \nu + \lambda \cdot d\nu. \quad (1.14)$$

Nesse contexto, v assume a velocidade da luz c , que é constante. Dessa forma, é automático que

$$\frac{|d\nu|}{\nu} = \frac{|d\lambda|}{\lambda}, \quad (1.15)$$

e conseqüentemente

$$u(\lambda, T)d\lambda = u(\nu, T)d\nu. \quad (1.16)$$

Como $u(\lambda, T)d\lambda$ descreve como a densidade de energia total u_T é distribuída ao longo do espectro do comprimento de onda, então

$$u_T = \int_0^\infty u(\lambda, T)d\lambda = \int_0^\infty u(\nu, T)d\nu. \quad (1.17)$$

Unindo isso a equação (1.12), tem-se

$$u = \int_0^\infty u(\nu, T)d\nu = \int_0^\infty \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu, \quad (1.18)$$

que, com a mudança de variáveis

$$x = \frac{\nu}{T} \rightarrow d\nu = Tdx, \quad (1.19)$$

transforma-se em

$$u = \int_0^\infty \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = T^4 \int_0^\infty x^3 \phi(x) dx. \quad (1.20)$$

Para a função de densidade de energia proposta por Wien estar de acordo com os dados experimentais, ou seja, satisfazer a Lei de Stefan-Boltzmann,

$$\int_0^\infty x^3 \phi(x) dx = \text{constante}, \quad (1.21)$$

o que significa que (1.9) está inserida na distribuição proposta por Wien.

Unindo (1.12) e (1.16),

$$u(\lambda, T) d\lambda = u(\nu, T) d\nu = \nu^3 \phi\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} \phi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda = \frac{\varphi(\lambda T)}{\lambda^5} d\lambda, \quad (1.22)$$

para $c = 1$. Assim, $u(\lambda, T) = \lambda^{-5} \varphi(\lambda T)$. Ao derivar $u(\lambda, T)$ pode-se encontrar o comprimento de onda para o qual a densidade de energia é máxima,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} u(\lambda, T) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\varphi(\lambda T)}{\lambda^5} \right) = \frac{1}{\lambda^5} \frac{d\varphi(\lambda T)}{d\lambda} \frac{d(\lambda T)}{d\lambda} + \varphi(\lambda T) \frac{d(\lambda^{-5})}{d\lambda} \\ &= \frac{T}{\lambda^5} \varphi'(\lambda T) - \frac{5}{\lambda^6} \varphi(\lambda T) = 0 \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{du(\lambda, T)}{d\lambda} = \lambda T \varphi'(\lambda T) - 5 \varphi(\lambda T) = 0, \quad (1.23)$$

que possui raiz em $\lambda_{max} T$. Isso leva à conclusão

$$\lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \rightarrow \lambda_{max} T = \text{constante} = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}, \quad (1.24)$$

denominada Lei de deslocamento de Wien, que mostra que o pico da distribuição da densidade de energia se desloca em direção a comprimentos de ondas menores a medida que a temperatura aumenta.

Wien, em 1896 - 1897, investigou a função $\varphi(\lambda T)$ e, para determiná-la, baseou-se em um modelo para corpo radiante que assume que a radiação emitida por um corpo negro pode ser, de certa forma, análoga ao comportamento de um gás que obedece a Lei de Maxwell-Boltzmann, descrita em (1.3). Em seguida, ele supõe que cada molécula desse gás emite vibrações, e as características dessas emissões, como comprimento de onda e intensidade, dependem exclusivamente da velocidade v das moléculas.

Ao assumir essa hipótese, estabelece-se que $\lambda = \lambda(v) \Rightarrow v = v(\lambda)$. Assim, a densidade de energia entre o intervalo de comprimento de onda $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, dada por $u(\lambda, T)$, é proporcional ao número de moléculas que emitem radiação nesse intervalo. Então, Wien propõe que

$$u(\lambda, T) = g(\lambda) e^{f(\lambda)/T} \quad (1.25)$$

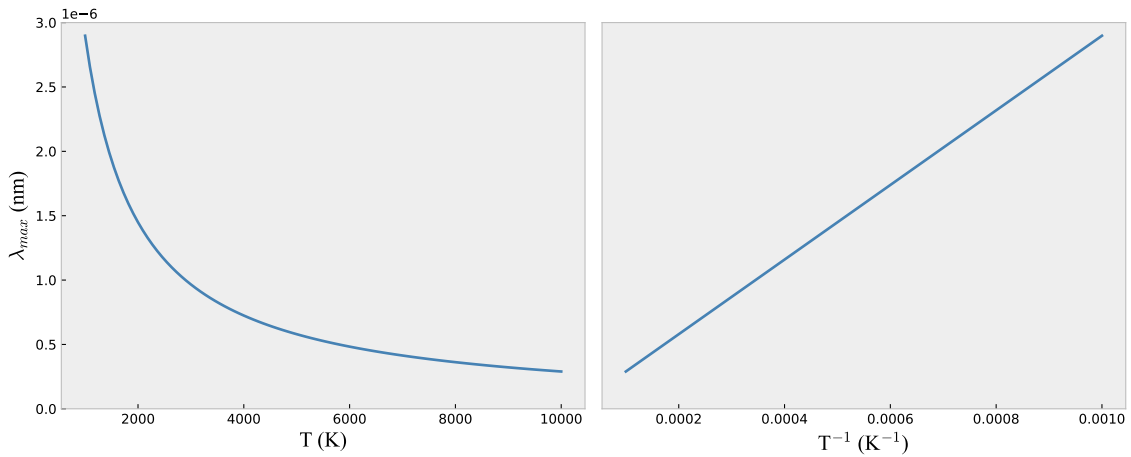


Figura 2 – Representação gráfica da Lei de Deslocamento de Wien. À esquerda tem-se a variação do comprimento de onda máximo (λ_{max}) em relação à temperatura e à direita, a constância da relação λ_{max}/T^{-1} .

onde f e g são funções desconhecidas. Comparando (1.25) com (1.22), chega-se à função distribuição da densidade de energia de Wien em sua forma completa

$$u(\lambda, T) = A \frac{e^{-B/\lambda T}}{\lambda^5}, \quad (1.26)$$

onde A e B são constantes. O físico alemão Louis Paschen (1865 - 1940) obteve este mesmo resultado de maneira independente (GONTIJO; RODRIGUES, 2022). A determinação das constantes A e B foi feita por Planck, em 1900. Com isso, a distribuição de densidade proposta por Wien pode ser escrita como

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}}. \quad (1.27)$$

Para escrever (1.27) em termos da frequência, basta utilizar (1.13), (1.15) e (1.16), de modo que

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T}}. \quad (1.28)$$

1.3 Lei de Rayleigh-Jeans

A busca pela determinação da função $u(\lambda, T)$ não parou com Wien e Paschen pois a relação dada na equação (1.26) só satisfaz os resultados experimentais para pequenos valores de comprimento de onda, a medida que λ aumenta a distribuição determinada por Wien e Paschen se desloca dos resultados experimentais. Quem percebeu isso foi o físico Lord Rayleigh (1842 - 1919) ao observar os resultados experimentais dos trabalhos de Otto Richar Lummer (1860 - 1935) e Ernst Pringshein (1859 - 1917), que obtiveram medidas mais precisas da intensidade da radiação em função do comprimento de onda, que confirmou a Lei de deslocamento de Wien.

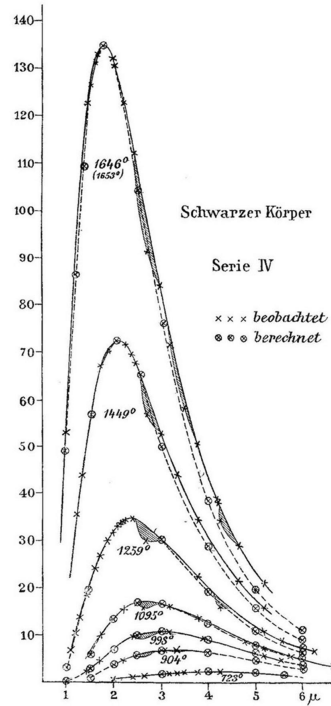


Figura 3 – Medidas feitas por O. Lummer e E. Pringshein, em 1899, sobre a distribuição de intensidade de radiação de corpo negro para várias temperaturas, mostrando experimentalmente a validade da Lei de deslocamento de Wien. Retirado de (STUDART, 2000).

Para determinar $u(\lambda)$ ⁸, Rayleigh calculou a densidade das ondas eletromagnéticas no interior de uma cavidade. A intensidade irradiada R para fora da cavidade é proporcional à densidade de energia u no interior da cavidade e essa relação de proporcionalidade é determinada em (1.8).

Pode-se calcular $u(\lambda)$ classicamente determinando o número de modos de oscilação do campo eletromagnético da cavidade cujos comprimentos de onda estão no intervalo entre λ e $\lambda + d\lambda$ e multiplicar o resultado pela energia média por modo

$$u(\lambda)d\lambda = \langle E(\lambda) \rangle n(\lambda)d\lambda, \quad (1.29)$$

onde $\langle E(\lambda) \rangle$ é a energia média de uma onda eletromagnética de comprimento de onda λ e $n(\lambda)$ é o número de ondas por unidade de volume que possui comprimento de onda λ .

Para um sistema clássico, o hamiltoniano \mathcal{H} de um oscilador harmônico unidimensional é dado por

$$\mathcal{H} = K + \Omega = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2}, \quad (1.30)$$

onde p_i é o momento linear, m é a massa da partícula, w será a frequência angular e q_i é a coordenada onde a partícula está se movimentando.

⁸ A partir daqui será utilizado a notação $u(\lambda, T) = u(\lambda)$, já que a distribuição do espectro de energia é igual para corpos de mesma temperatura.

Para teoria cinética dos gases pode-se utilizar o Teorema da equipartição da energia, que estabelece que cada termo quadrático na expressão de um hamiltoniano clássico produz uma contribuição $k_B T/2$ (SALINAS, 2013). Dessa forma,

$$\langle K \rangle = \langle \Omega \rangle = \frac{k_B T}{2}, \quad (1.31)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle \Omega \rangle = k_B T. \quad (1.32)$$

O número de modos $n(\lambda)$, que não depende da geometria da cavidade é dado por

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda, \quad (1.33)$$

e conseqüentemente, a equação (1.29) determinará a distribuição espectral da densidade de energia como

$$u(\lambda)d\lambda = \langle E(\lambda) \rangle n(\lambda)d\lambda = k_B T \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda, \quad (1.34)$$

essa equação foi demonstrada em 1900 por Rayleigh e aprimorada por James Jeans (1877 - 1946), ela é conhecida como Lei de Rayleigh-Jeans⁹. É importante ressaltar que a energia $\langle E \rangle$ não depende do comprimento de onda, como mostrado na equação (1.32).

A Lei de Rayleigh-Jeans é compatível com os resultados experimentais para grandes valores de comprimento de onda. Contudo, quando $\lambda \rightarrow 0$ a distribuição de Rayleigh tende a infinito. Isso foi demonstrado experimentalmente no mesmo ano pelos físicos Heinrich Leopold Rubens (1865 - 1922) e Ferdinand Kurlbaum (1857 - 1927) (GONTIJO; RODRIGUES, 2022) (CARUSO; OGURI, 2016).

Analisando (1.34) percebe-se que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\lambda) = \infty \text{ ou } R = \frac{c}{4} \int_0^\infty u(\lambda)d\lambda = \infty, \quad (1.35)$$

o que implica na energia não ser conservada. A discrepância da teoria com a experiência foi tão grande que isso ficou conhecido como Catástrofe do Ultravioleta¹⁰. É importante ressaltar que essa é uma descrição clássica do que posteriormente se descobriu ter origem em fenômenos quânticos, como mostraram os trabalhos de Planck, posteriormente confirmados com Einstein.

1.4 Lei de Planck

Planck iniciou seus estudos sobre a radiação de corpo negro em 1897. No entanto, antes de se imergir nesse campo de pesquisa, ele era um físico teórico com um forte interesse

⁹ A equação (1.34) é uma correção realizada em Junho de 1905 por Jeans na forma obtida por Rayleigh em Maio de 1905, $u(\lambda, T) = 64\pi k_B T / \lambda^4$ (GONTIJO; RODRIGUES, 2022). Em (LINDSAY; HAAR, 1970) a distribuição encontrada por Rayleigh também aparece como $u(\lambda, T) = CT\lambda^{-4}e^{-D/\lambda T}$, onde C e D são constantes.

¹⁰ Esse termo foi utilizado pela primeira vez por Paul Ehrenfest (1880 - 1933) em 1911.

nas áreas de termodinâmica e mecânica estatística. Seu foco principal estava na busca por uma compreensão mais profunda da segunda Lei da Termodinâmica e suas implicações. O que impulsionou seu interesse nesse campo foi a natureza universal da Lei de Kirchhoff da radiação térmica. Essa Lei estabelece que, a uma temperatura específica, a relação entre a taxa de emissão de energia de um corpo e sua taxa de absorção de energia permanece constante, sendo idêntica à taxa de emissão de um corpo negro na mesma temperatura (KLEIN, 1962).

A ideia de *quantum*¹¹ foi introduzida por Planck em 1900. Tal ideia foi apresentada à Sociedade Alemã de Física no trabalho¹² de título “*Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum*”, mas só ganhou credibilidade com o trabalho de Albert Einstein (1879 - 1955) sobre o efeito fotoelétrico, o que o rendeu um prêmio nobel em 1921.

Os trabalhos sobre radiação de Planck foram apresentados entre 19 de Outubro e 14 de Dezembro de 1900, em três comunicações dele. Na primeira ele apresentou a nova relação para distribuição espectral da radiação normal, na segunda foi introduzida a hipótese da quantização da energia e na terceira foi publicado o trabalho completo (STUDART, 2000).

É comum encontrar na literatura a ideia de que o conceito de *quantum* surgiu como uma proposta alternativa à física clássica, onde a energia tinha característica contínua. Mas isso não é verdade. A ideia de *quantum* veio como uma condição da compatibilidade entre valores da entropia¹³. Além disso, é importante ressaltar que o problema que Planck tentava resolver era o da interação da radiação com a matéria e, para isso, ele usou a eletrodinâmica e a termodinâmica para mostrar como a radiação e a matéria interagem na busca do equilíbrio térmico (FELDENS; DIAS; SANTOS, 2010).

Outro fato comum de se encontrar na literatura é o de que Planck introduziu o conceito de *quantum* para solucionar a crise estabelecida provocada pela discordância da física clássica com os resultados experimentais. A verdade é que não havia a consciência de tal crise (KLEIN, 1962), visto que o Lord Rayleigh publicou seu trabalho sobre radiação de corpo negro em Junho de 1900, quatro meses antes da primeira apresentação de Planck¹⁴, trabalho que demonstrava que a Lei de Distribuição Clássica (Lei de Rayleigh-Jeans), exposta em (1.34). As implicações desse trabalho não foram percebidas de imediato, mas posteriormente observou-se que a Lei de Rayleigh-Jeans implicava na Catástrofe do

¹¹ *Quantum* é a menor quantidade de energia que pode ser transmitida através de uma onda.

¹² A versão em português “Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia no Espectro Normal” se encontra em PLANCK, (2000).

¹³ A abordagem termodinâmica, utilizando a entropia e algumas relações importantes estão bem desenvolvidas em KLEIN, (1962) e FELDENS; DIAS; SANTOS, (2010).

¹⁴ Apesar de Planck não citar os trabalhos de Rayleigh, é provável que ele sabia da existência desses trabalhos, visto que Planck se refere ao trabalho de Rubens e Kurlbaum em que o trabalho de Rayleigh é citado.

Ultravioleta.

O resultado obtido por Wien, expresso em (1.26), obteve grande sucesso com os resultados experimentais iniciais, contudo, em outubro de 1900, Heinrich Leopold Rubens (1865 - 1922) e Kurlbaum estenderam as observações para maiores comprimentos de onda e concluíram que para grandes comprimentos de onda havia uma ligeira discordância entre os resultados experimentais e a Lei de deslocamento de Wien. Já o resultado encontrado por Rayleigh, publicado em Junho de 1900 com o título de “Remarks upon the Law of Complete Radiation”¹⁵, utilizou da física clássica para atingir a distribuição (1.34), que difere completamente da distribuição de Wien, mas também não é compatível com os resultados experimentais (como mostra a Figura 4), apenas para grandes comprimentos de onda, como já foi discutido na seção anterior.

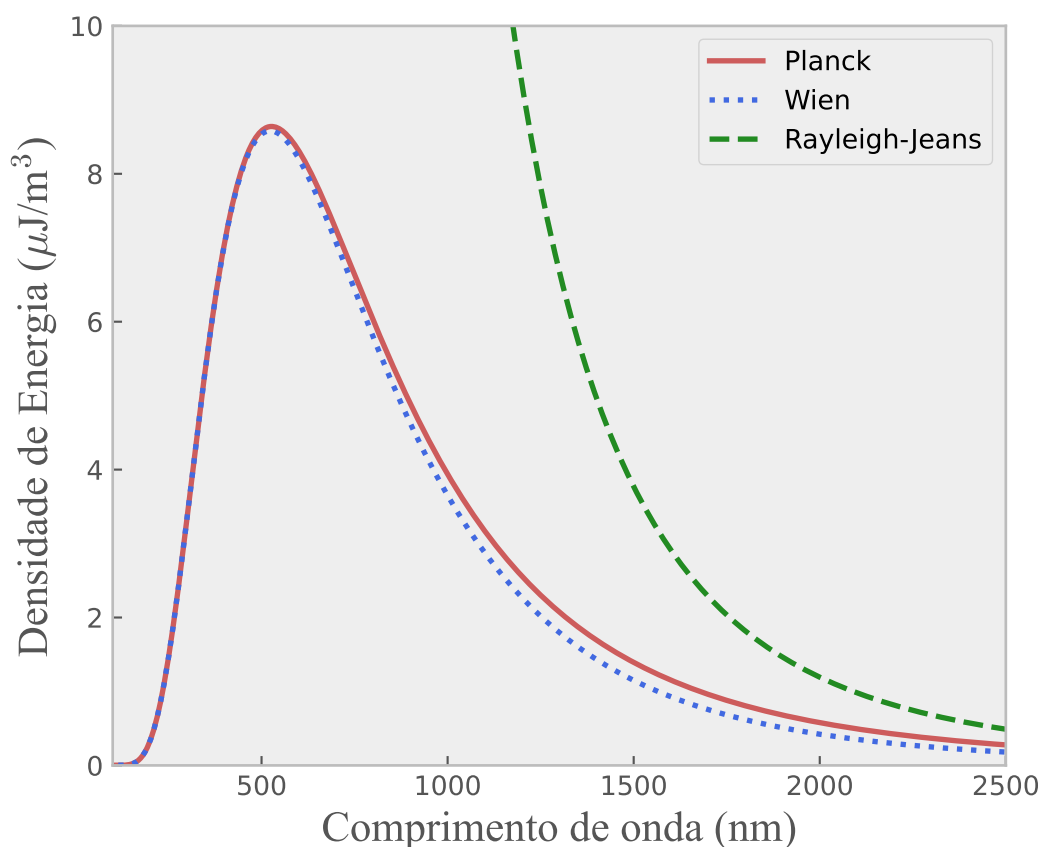


Figura 4 – Comparação das Distribuições de Densidade de Energia: A Lei de Planck, a Lei de Wien e a Lei de Rayleigh-Jeans.

O cálculo da radiância espectral envolve o cálculo do número de ondas por unidade de volume em determinado intervalo de comprimento de onda $n(\lambda)$ e o cálculo da energia média de uma onda em um comprimento de onda $\langle E(\lambda) \rangle$, como apresentado em (1.29). Dessa forma, para obter uma equação que se adequasse aos resultados experimentais seria

¹⁵ Esse trabalho se encontra em LINDSAY; HAAR, (1970), nas páginas 195 a 198.

necessário modificar a forma de calcular $n(\lambda)$ ou $\langle E(\lambda) \rangle$. Houve tentativas de modificar os cálculos de ambos os termos e a resolução estava no cálculo de energia por modo.

Portanto, a fim de estar em conformidade com os resultados experimentais, a equação deve estar de acordo com os resultados já amplamente confirmados. A partir das observações experimentais (Figura 3), pode-se afirmar

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} R(\lambda) = 0 \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda) = 0. \quad (1.36)$$

Além disso, os estudos realizados por Rubens e Kurlbaum apontaram que, para comprimentos de onda consideravelmente longos, a função de distribuição $u(\lambda)$ passa a se tornar diretamente proporcional à temperatura absoluta. A partir da equação (1.29), é evidente que $u(\lambda)$ depende tanto do cálculo de $n(\lambda)$ quanto de $\langle E(\lambda) \rangle$. Dado que o cálculo do número de modos não sofre modificações e não envolve a temperatura, é possível definir que a energia média terá o mesmo comportamento que radiância espectral apresentado em (1.36). Logo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle E(\lambda) \rangle = 0 \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle E(\lambda) \rangle = k_B T. \quad (1.37)$$

Para o entendimento do comportamento da energia média de uma onda eletromagnética, é necessário entender como se calcula na mecânica estatística a energia média de um componente físico qualquer num sistema em equilíbrio térmico à temperatura T . A probabilidade de encontrar uma componente de um sistema com energia E_n é determinada por

$$P(E_n) = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{Z}, \quad (1.38)$$

onde Z define a chamada função de partição¹⁶, dada por

$$Z = \sum_n e^{-E_n/k_B T}, \quad (1.39)$$

associada à normalização da probabilidade P . Determina-se a energia média por

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P(E_n), \quad (1.40)$$

que pode ser reescrita, utilizando (1.38), como

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P(E_n) = \sum_n E_n \frac{e^{-E_n/k_B T}}{Z} = \frac{1}{Z} \left(-\frac{\partial}{\partial(1/k_B T)} \sum_n e^{-E_n/k_B T} \right), \quad (1.41)$$

que leva a

$$\langle E(\lambda) \rangle = -\frac{\partial}{\partial(1/k_B T)} \ln Z. \quad (1.42)$$

¹⁶ A função de partição é uma ferramenta matemática que descreve como a energia é distribuída entre os diferentes estados microscópicos de um sistema termodinâmico em equilíbrio.

Para prosseguir nesse cálculo é necessário utilizar a hipótese de Planck de que o elemento de energia deve ser proporcional à frequência do oscilador¹⁷,

$$\epsilon = h\nu, \quad (1.43)$$

onde $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ é a constante de Planck e sendo a energia quantizada tem-se $E_n = nh\nu$. Com isso é possível determinar a função de partição

$$Z = \sum_n e^{-nh\nu/k_B T}. \quad (1.44)$$

Fazendo a transformação $\alpha = h\nu/k_B T$ para simplificar o tratamento com o somatório, tem-se

$$Z = \sum_n e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots, \quad (1.45)$$

que, ao fazer uma transformação de variáveis $x = e^{-\alpha}$, torna-se

$$Z = \sum_n e^{-n\alpha} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (1.46)$$

equivalente à série de Maclaurin de $(1 - x)^{-1}$. Logo, a função de partição será

$$Z = \sum_n e^{-n\alpha} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{1}{1 - e^{-h\nu/k_B T}}. \quad (1.47)$$

Substituindo (1.47) em (1.42), tem-se

$$\begin{aligned} \langle E(\nu) \rangle &= -\frac{\partial}{\partial(1/k_B T)} \ln(1 - e^{-h\nu/k_B T})^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-h\nu/k_B T}} \frac{d}{d(1/k_B T)} (1 - e^{-h\nu/k_B T}) \\ &= \frac{h\nu e^{-h\nu/k_B T}}{1 - e^{-h\nu/k_B T}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

e, portanto, quando a energia só pode assumir valores discretos, $\langle E(\nu) \rangle$ ¹⁸ assumirá a forma

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (1.49)$$

Com a equação (1.33) definindo a maneira de calcular o número de modos e (1.49) o mesmo para energia média, a densidade de energia apresentada em (1.29) se tornará

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (1.50)$$

que é a distribuição obtida por Planck, conhecida por Lei de Planck. Essa distribuição foi confirmada rapidamente por Rubens, que encontrou uma concordância satisfatória em cada ponto (KLEIN, 1962). Mesmo com o excelente resultado, Planck nutria dúvidas a

¹⁷ A frequência é relacionada ao comprimento de onda através da equação fundamental da ondulatória: $v = \lambda\nu$.

¹⁸ Aqui a energia média aparece em função da frequência por conta da hipótese de Planck ser dada em termos de ν , exposta na equação (1.43).

respeito da hipótese da quantização da energia. Essa suposição ganhou mais confiança da comunidade científica com o trabalho de Einstein sobre o efeito fotoelétrico, que trabalhou com a energia quantizada (GONTIJO; RODRIGUES, 2022).

Pode-se expressar a Lei de Planck em termos do comprimento de onda utilizando as equações (1.13), (1.15) e (1.16), de forma a obter

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \quad (1.51)$$

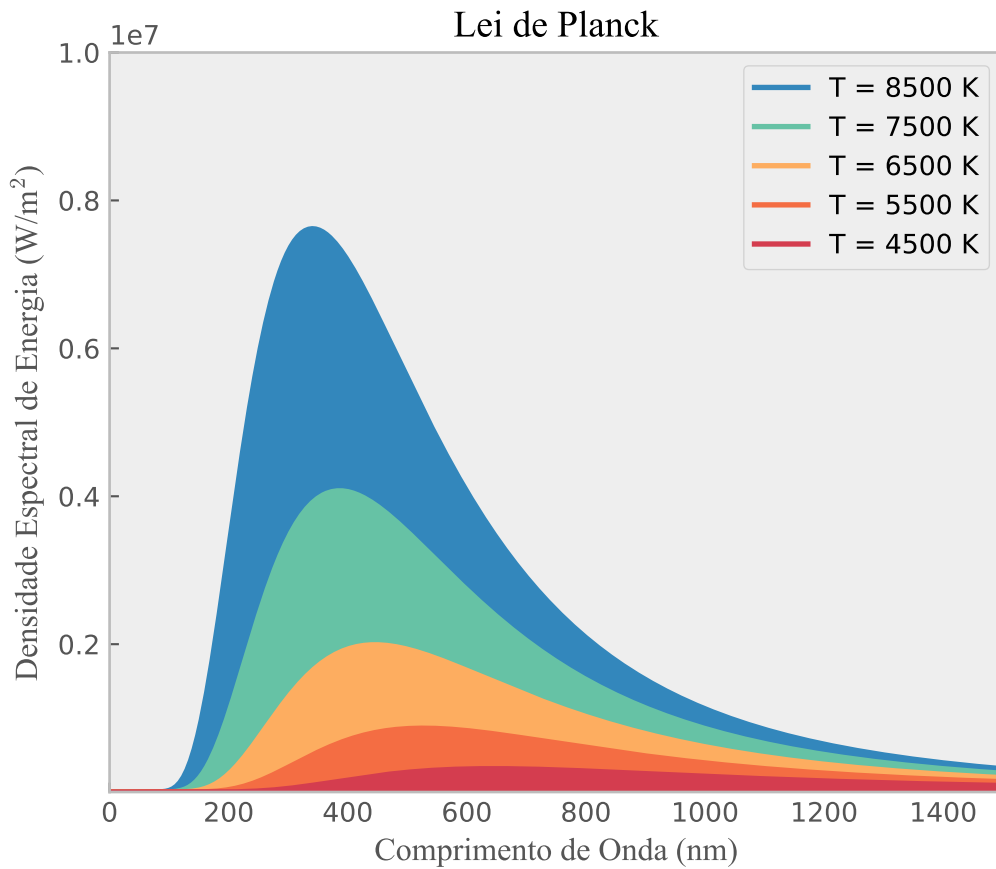


Figura 5 – Distribuição da densidade de energia em termos do comprimento de onda, exposta em (1.51), proposta por Planck.

Com a Lei de Planck, a radiância espectral, determinada por (1.10), se torna

$$\begin{aligned} R(\nu) &= \int_0^\infty R(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{c}{4} \rho(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{h\nu/k_B T} - 1)} d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu, \end{aligned} \quad (1.52)$$

e como

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T} \rightarrow d\alpha = \frac{h}{k_B T} d\nu, \quad (1.53)$$

o cálculo da radiância segue

$$R(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} d\alpha, \quad (1.54)$$

onde

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} d\alpha = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1.55)$$

Portanto, a radiância será

$$R = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4, \quad (1.56)$$

que, quando comparada à Lei de Stefan-Boltzmann, observa-se

$$R = \sigma T^4 = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4 \Rightarrow \sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} = 5,6705 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}. \quad (1.57)$$

1.4.1 Lei de Planck e os seus limites

Para Lei de Planck estar de acordo com os resultados experimentais ela deve satisfazer as condições escritas em (1.37). Como o cálculo da energia média para energia quantizada leva à $\langle E(\nu) \rangle = h\nu(e^{h\nu/k_B T} - 1)^{-1}$, deve-se olhar para os limites quando $\nu \rightarrow 0$ e $\nu \rightarrow \infty$. Para isso, é útil utilizar as seguintes relações já apresentadas

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T} \quad (1.58)$$

e

$$e^{h\nu/k_B T} = e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots, \text{ se } \alpha \ll 1 \text{ vale } e^\alpha \approx 1 + \alpha. \quad (1.59)$$

Assim, a energia média pode ser escrita como

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{e^\alpha - 1} \frac{k_B T}{k_B T} = \frac{\alpha k_B T}{e^\alpha - 1}. \quad (1.60)$$

1. Para $\nu \rightarrow 0$ (ou $\alpha \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow \infty$); com as relações dadas, a energia média se torna

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{\alpha k_B T}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha k_B T}{1 + \alpha - 1} = k_B T, \quad (1.61)$$

e, portanto,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle E(\nu) \rangle = k_B T. \quad (1.62)$$

2. Para $\nu \rightarrow \infty$ (ou $\alpha \rightarrow \infty$ ou $\lambda \rightarrow 0$); por (1.60), tem-se

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{\alpha k_B T}{e^\alpha - 1} = \frac{\alpha k_B T}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots - 1} = \frac{k_B T}{1 + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \dots}, \quad (1.63)$$

portanto,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E(\nu) \rangle = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{k_B T}{1 + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \dots} = \frac{\lim_{\nu \rightarrow \infty} (k_B T)}{\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \dots \right)} = 0. \quad (1.64)$$

Assim, as condições para energia são satisfeitas com a Lei de Planck. Além dessa análise, é possível recuperar a distribuição de Wien e a distribuição de Rayleigh-Jeans, considerando novamente o termo $e^{hc/\lambda k_B T}$. Se

$$hc/\lambda k_B T \gg 1, \quad (1.65)$$

conclui-se que

$$e^{hc/\lambda k_B T} \gg 1, \quad (1.66)$$

logo,

$$e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \approx e^{hc/\lambda k_B T}. \quad (1.67)$$

Com isso, a Lei de Planck (1.51) se torna

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}}, \quad (1.68)$$

que é a distribuição de Wien, escrita em (1.27). De forma análoga, se $hc/\lambda k_B T \ll 1$ e considerando (1.59),

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{hc}{\lambda k_B T} + 1 - 1} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{\lambda k_B T}{hc}, \quad (1.69)$$

a Lei de Planck vira

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \quad (1.70)$$

que é a distribuição de Rayleigh-Jeans.

2 Fotometria

A fotometria é o ramo da ciência dedicado à medição da luz, abrangendo todo o espectro eletromagnético. Esse campo envolve a quantificação de várias propriedades da luz, como intensidade, brilho e cor. Inicialmente, o olho humano era o principal instrumento de observação, mas o avanço tecnológico, com a invenção do telescópio por Galileu Galilei (1564 - 1642), revolucionou as observações astronômicas. Como a maioria das observações é feita por meio da medição da luz, cuja emissão segue um comportamento de distribuição determinado pela Lei de Planck, é possível analisar essa distribuição para inferir características do objeto estudado.

2.1 Luminosidade

Os trabalhos sobre emissão térmica nos levaram à Lei de Deslocamento de Wien, à Lei de Stefan-Boltzmann e à Lei de Planck, completamente necessárias para o entendimento desse fenômeno. Uma das aplicações desses resultados é o estudo de estrelas.

O brilho das estrelas advém de ondas eletromagnéticas, que podem ter várias origens, incluindo a emissão térmica. Embora essa luz não forneça informações diretas sobre sua estrutura interna, é possível estudá-la indiretamente por meio da espectroscopia, que veremos na próxima seção, e da modelagem teórica.

Para desenvolver os conceitos apresentados nesta seção, assumimos que as estrelas são objetos esféricos. Essa hipótese é bastante razoável, pois o brilho que observamos no céu noturno aparece como pontos que, mesmo com o movimento da Terra, permanecem iguais de todas as perspectivas. Assim sendo, a radiação emitida é isotrópica em uma área superficial de uma esfera, $4\pi R^2$, sendo R o raio da estrela. Contudo, a luz que chega na Terra é uma parcela irrelevante se comparada com toda a energia emitida em sua superfície. Como já discutido anteriormente, intensidade irradiada obedece a Lei de Stefan-Boltzmann (1.11) e, no contexto astrofísico, é chamada de fluxo, denotado por f , descrito por

$$f = \sigma T^4. \quad (2.1)$$

Além disso, a potência é chamada de luminosidade, denotada por L . Essa é uma característica intrínseca de todas as estrelas e representa a intensidade da radiação emitida por toda a superfície em todas as direções. Assim, como consideramos que as estrelas são esféricas, o fluxo na superfície é calculado por

$$f(R) = \frac{L}{4\pi R^2}. \quad (2.2)$$

Com a equação (2.1), a luminosidade na superfície de uma estrela é dada por

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4. \quad (2.3)$$

Para uma distância arbitrária d de uma estrela, o fluxo e a luminosidade são escritos, respectivamente, como

$$f(d) = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (2.4)$$

e

$$L = 4\pi d^2 \sigma T^4. \quad (2.5)$$

Com (2.2) e (2.4), é possível perceber que o fluxo em uma distância qualquer

$$f(d) = \frac{L}{4\pi d^2} \cdot \frac{R^2}{R^2} \Rightarrow f(d) = \frac{R^2}{d^2} f(R). \quad (2.6)$$

Como R é constante, nota-se que o fluxo decai com o quadrado da distância d .

É viável determinar a quantidade de energia emitida por uma estrela em comprimentos de onda específicos por meio do uso de filtros que permitem a passagem seletiva de fótons na faixa desejada. A energia é calculada com base na contagem de fótons que atravessam o filtro, empregando a quantização da energia, conforme representada na equação (1.43). No entanto, essa abordagem não é aplicável a todo o espectro eletromagnético por conta da sensibilidade dos detectores, tornando necessária uma estimativa do que não está sendo considerado (HORVATH, 2020). Portanto, para calcular a luminosidade é fundamental possuir uma ideia da distância do objeto. Isso requer a medição do fluxo de radiação e a identificação do comprimento de onda na qual a emissão é máxima. Com base nesse comprimento de onda, é possível encontrar a temperatura superficial da estrela através da Lei de deslocamento de Wien por meio da análise da distribuição da emissão, como estipulado pela Lei de Planck. Essa temperatura é denominada temperatura efetiva, denotada por T_{ef} , e não é diretamente medida, mas sim calculada.

Em essência, a temperatura efetiva é o valor da temperatura que um corpo negro teria para produzir a mesma distribuição de densidade de energia que a estrela observada. É expressa em Kelvin (K) e será utilizada para classificar as estrelas em diferentes categorias espectrais. É importante ressaltar que uma estrela não é um corpo negro, visto que não existe um corpo negro real. Além disso, as temperaturas nas regiões internas de uma estrela, próximas ao seu núcleo, variam na faixa de 10^7 a 10^9 K (PHILLIPS, 1994), enquanto as temperaturas superficiais estão no intervalo de 10^3 a 10^4 K, podendo atingir a ordem de 10^5 como estrelas centrais de nebulosas planetárias (MACIEL, 2018). Ou seja, as camadas internas não se encontram à mesma temperatura e não há equilíbrio termodinâmico. Apesar disso, a energia produzida no núcleo é transportada para as camadas mais externas sem alterar significativamente as temperaturas das camadas intermediárias, de forma que pode-se dizer que há um equilíbrio termodinâmico dentro de uma mesma camada e isso é

chamado de equilíbrio termodinâmico local (ETL) (FILHO; SARAIVA, 2017). Mesmo que não exista na natureza um objeto tal qual o corpo negro, pode-se usar a Lei de Planck para inferir a temperatura de qualquer objeto que emita radiação térmica, portanto isso vale também para estrelas, como mostra a Figura 6. Com os resultados de L e T_{ef} é possível encontrar um valor para o raio da estrela com (2.3).

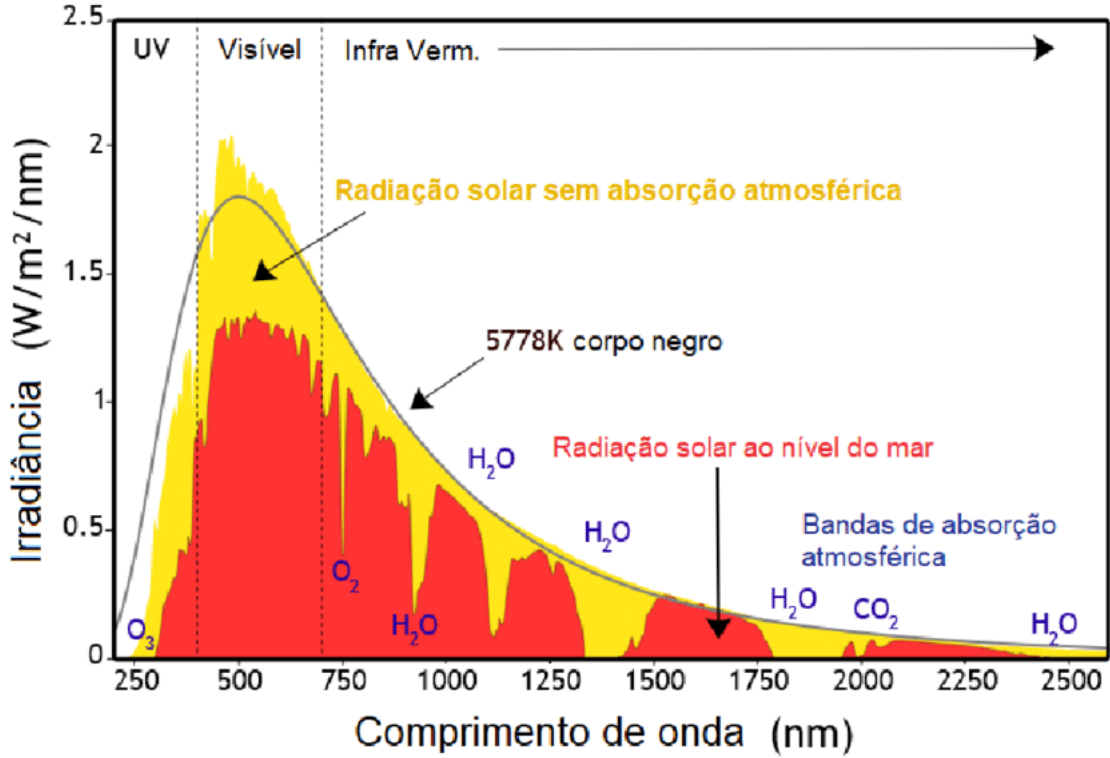


Figura 6 – Distribuição do espectro de emissão solar ao nível do mar (em vermelho) e no topo da atmosfera (em amarelo) (ALMEIDA et al., 2020).

Na literatura, encontra-se que luminosidade do Sol, representada por L_{\odot} ¹, vale $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$ W, e a temperatura efetiva do sol é $T_{ef\odot} = 5785$ K. Com esses dados pode-se estimar o raio do sol R_{\odot} com (2.3), ou seja,

$$R_{\odot} = \sqrt{\frac{L_{\odot}}{4\pi\sigma T_{ef\odot}^4}} = \sqrt{\frac{3,83 \cdot 10^{26}}{4 \cdot 3,14 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5785}} \simeq 6,93 \cdot 10^8 \text{ m.} \quad (2.7)$$

Ao comparar com o raio do sol encontrado na literatura ($R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ m), utilizando o conceito de erro relativo percentual ($E\%$), dado por

$$E\% = \frac{|x - \bar{x}|}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (2.8)$$

onde x é a medida comparada com o valor de referência \bar{x} ,

$$E\% = \frac{|6,93 \cdot 10^8 - 6,96 \cdot 10^8|}{6,96 \cdot 10^8} \cdot 100\% = \frac{0,03}{6,96} \cdot 100\% \simeq 0,43\%. \quad (2.9)$$

¹ As grandezas que são acompanhadas do símbolo \odot são associadas ao Sol, estrela do nosso sistema planetário.

Ou seja, a equação (2.3) é uma boa estimativa do raio do Sol.

2.2 Sistema de Magnitudes

A luminosidade de uma estrela é uma característica intrínseca e o fluxo de radiação emitido por ela depende da luminosidade e da distância que nos encontramos de uma determinada estrela. O estudo do brilho (fluxo) das estrelas levou à formulação do sistema de magnitudes, uma ferramenta fundamental de astronomia que remota à antiguidade. No ocidente, os primeiro catálogo de estrelas foi elaborado na Grécia antiga por Hiparco (160 - 125 a.C.), que analisou por volta de 850 estrelas visíveis a olho nu de acordo com seu brilho, e as classificou em seis categorias, atribuindo magnitude 1 às mais brilhante e 6 às mais fracas. Isso foi reproduzido por Ptolomeu (100 - 170 d.C.) em sua obra “Almagesto” (HORVATH, 2020). Essa classificação de estrelas por a partir da percepção humana é chamada de magnitude aparente m . Nesse contexto histórico, acreditava-se que as estrelas eram pontos fixos no céu e, por isso, a explicação da diferença de brilho entre as elas era atrelada ao seu tamanho. Contudo, nos dias de hoje sabe-se que as estrelas estão a diferentes distâncias da Terra, então, o brilho visto por nós pode ter influência tanto de sua distância quanto da sua luminosidade, como mostra (2.4).

A invenção do telescópio no século XVII desencadeou uma revolução na observação do céu, revelando estrelas que eram previamente invisíveis a olho nu. À medida que a astronomia, a física e a tecnologia progrediram, surgiu a necessidade de se criar uma escala de classificação de brilho mais precisa e consistente. Esse desenvolvimento culminou no estabelecimento do sistema moderno de magnitudes, no século XIX. O astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829 - 1891) estabeleceu que o sistema de magnitudes criado por Hiparco era logarítmico, e o brilho de uma estrela de magnitude 1 (m_1) era cem vezes maior que o de uma estrela de magnitude 6 (m_6) (FILHO; SARAIVA, 2017), ou seja,

$$\Delta m = m_6 - m_1 = 5 \Rightarrow \frac{f_1}{f_6} = 100. \quad (2.10)$$

É necessário estabelecer como varia o fluxo para cada variação de magnitude (Tabela 1). Assim, sendo um sistema de magnitudes logarítmico, tem-se que

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 1 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = 100^{1/5} = 2,512. \quad (2.11)$$

Logo,

$$\frac{f_1}{f_2} = 100^{\Delta m/5} = 2.512^{\Delta m}. \quad (2.12)$$

Aplicando logaritmo na equação anterior,

$$\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \log\left(100^{\Delta m/5}\right) = \frac{\Delta m}{5} \log 100 = \frac{2}{5} \Delta m, \quad (2.13)$$

Tabela 1 – Diferença de magnitudes e razão do fluxo entre estrelas de magnitudes de 2 a 6 comparado a uma estrela de magnitude 1.

$m_2 - m_1$	f_1/f_2
1	2,512
2	6,310
3	15,859
4	39,811
5	100,000

de forma a obter

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right). \quad (2.14)$$

Em (2.14), temos duas magnitudes e dois fluxos. No entanto, é importante saber a magnitude de uma estrela, sem depender da medida de outra. Assim, considera-se um fluxo de calibração, supondo que a magnitude desse fluxo é igual a zero. Ou seja,

$$m_c = 0 \Rightarrow f_c = \text{constante}, \quad (2.15)$$

onde f_c é o fluxo de calibração e m_c é a magnitude associada a esse fluxo. Com essa hipótese e utilizando a equação (2.14) para medir a magnitude m de uma estrela qualquer, se escreve

$$m - m_c = \frac{5}{2} \log \left(\frac{f_c}{f} \right) \rightarrow m = \frac{5}{2} \log \left(\frac{f_c}{f} \right) = \frac{5}{2} (\log f_c - \log f),$$

e como o logaritmo de uma constante é uma constante, a magnitude aparente m , de uma estrela qualquer, é dada por

$$m = c - \frac{5}{2} \log f. \quad (2.16)$$

onde c é uma constante, dada por $c = 2,5 \log f_c$. É comum utilizar a magnitude da estrela Vega como calibração pois sua magnitude é zero ($m_{\text{Vega}} = 0$) (FILHO; SARAIVA, 2017).

O cálculo do fluxo observado considera diversos elementos, tais como o fluxo emitido pela estrela fora da atmosfera da Terra, a influência da atmosfera (fator de transmissão²), e a eficiência dos equipamentos, incluindo os filtros utilizados. Atualmente, existem vários sistemas de magnitude em uso, cada um associado a conjuntos específicos de filtros com recepções diferentes em faixas do espectro eletromagnético (MACIEL, 2018). Um dos sistemas de magnitudes mais utilizados é o *UBV*, criado por desenvolvido por Harold Lester Johnson (1921 - 1980) e William Wilson Morgan (1906 - 1994) em 1951, que define magnitudes em três faixas espectrais: *U* de ultravioleta *B* de *blue* (azul) e *V* de visível (amarelo) (FILHO; SARAIVA, 2017). Contudo, existem outros sistemas de magnitudes, como apresentado na Tabela 2.

² O fator de transmissão é uma medida que descreve a capacidade de um material ou meio de permitir a passagem de determinados comprimentos de onda de radiação.

Tabela 2 – Principais sistemas de magnitudes, sendo λ_0 os comprimentos de ondas centrais de cada filtro, correspondentes ao máximo de transmissividade (sensibilidade), e a largura total do filtro designada por $\Delta\lambda$ (MACIEL, 2018)

Sistema	Filtro	λ_0 (Å)	$\Delta\lambda$ (Å)
UBV (Johnson)	U	3650	700
	B	4400	1000
	V	5500	900
Infravermelho (Johnson)	R	7000	2200
	I	8800	2400
	J	12500	3800
	H	16500	4000
	K	22000	4800
	L	34000	7000
	M	50000	12000
Seis cores (Stebbins)	N	104000	57000
	U	3550	500
	V	4200	800
	B	4900	800
	G	5700	800
	R	7200	1800
u v b y β (Stromgren)	I	10300	1800
	u	3500	3400
	v	4100	200
	b	4700	160
	y	5500	240
β	4860	30, 150	

O brilho de um objeto em cada sistema de magnitude é diferente, já que existem faixas espectrais em que ele emitirá mais radiação que outras. Por exemplo, o Sol no sistema UBV possui magnitudes $U_{\odot} = -25,9$, $B_{\odot} = 26,1$ e $V_{\odot} = -26,8$.

Se o fluxo for monocromático, a magnitude será monocromática. Se o fluxo for integrado, a magnitude será integrada, ou bolométrica. Na prática, os fluxos não são perfeitamente monocromáticos, compreendendo uma pequena faixa de comprimento de onda do espectro eletromagnético. Da mesma forma, é difícil medir o fluxo em todo espectro.

Também pode-se conectar a equação (2.16) com a equação do fluxo (2.4), de modo

que

$$\begin{aligned}
 m &= c - \frac{5}{2} \log \left(\frac{L}{4\pi d^2} \right) \\
 &= c - \frac{5}{2} \log L + \frac{5}{2} \log (4\pi d^2) \\
 &= c - \frac{5}{2} \log L + 5 \log(4\pi) + 5 \log d,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

e definindo $C = c + 5\log(4\pi)$, a magnitude aparente é escrita como

$$m = C - \frac{5}{2} \log L + 5 \log d, \tag{2.18}$$

de forma que depende da luminosidade intrínseca da estrela e da sua distância. De acordo com (2.18), m será maior quanto mais distante a estrela estiver, o que faz sentido visto que a magnitude é uma escala invertida.

Para comparar o brilho intrínseco das estrelas é necessário ter uma medida de brilho que não dependa da distância. Com isso em mente, define-se a magnitude absoluta M , que é a magnitude aparente que a estrela teria se estivesse a uma distância padrão de 10 pc (pc = parsec = $3,09 \cdot 10^{18}$ cm). Dessa forma, utilizando (2.18), tem-se

$$M = m(d = 10\text{pc}) = C - \frac{5}{2} \log L + 5 \log 10, \tag{2.19}$$

e a magnitude absoluta é dada pela expressão

$$M = C - \frac{5}{2} \log L + 5. \tag{2.20}$$

Ao subtrair (2.20) de (2.18), obtém-se

$$m - M = 5 \log \frac{d}{10}, \tag{2.21}$$

e $m - M$ é chamado de módulo da distância, visto que relaciona a magnitude aparente com a magnitude absoluta em um dado sistema de magnitudes dependendo somente da distância da estrela d medida em parsec.

As expressões que envolvem a magnitude aparente, tais como (2.21) e (2.18), admitem que não há nenhuma interação da radiação estelar entre a estrela e a atmosfera terrestre. Contudo, isso não é verdadeiro. Entre o topo da atmosfera e a estrela existe o meio interestelar, composto por outras estrelas, galáxias, nuvens de poeira, entre outras estruturas. Também existe a atmosfera, dependendo de onde a medição é feita. Assim, no caminho percorrido pela luz ela pode ser absorvida ou espalhada. Dessa forma, a equação para magnitude aparente levando em consideração esses efeitos é dada por

$$m = C - \frac{5}{2} \log L + 5 \log d + A, \tag{2.22}$$

e, conseqüentemente, o módulo da distância passa a ser

$$m - M = 5 \log \frac{d}{10} + A, \quad (2.23)$$

onde A é a absorção em magnitudes, usualmente também chamada de extinção interestelar. Este efeito é percebido na Figura 7. Repare que se soma esse efeito, visto que ele diminui o brilho da estrela em determinada faixa do espectro, logo diminui a magnitude aparente. Este efeito é semelhante ao de observar uma luz em um dia nublado ou em meio a uma neblina, quanto mais nublado ou quanto mais neblina houver, menos brilhosa será a luz.

Além disso, a extensão interestelar é importante para determinação da distância da estrela. De (2.23)

$$\log d = \frac{m - M - A}{5} + 1. \quad (2.24)$$

Ou seja, desconsiderar os efeitos sofridos pela luz no caminho até chegar nos instrumentos de detecção pode levar a grandes diferenças nas inferências das distâncias.

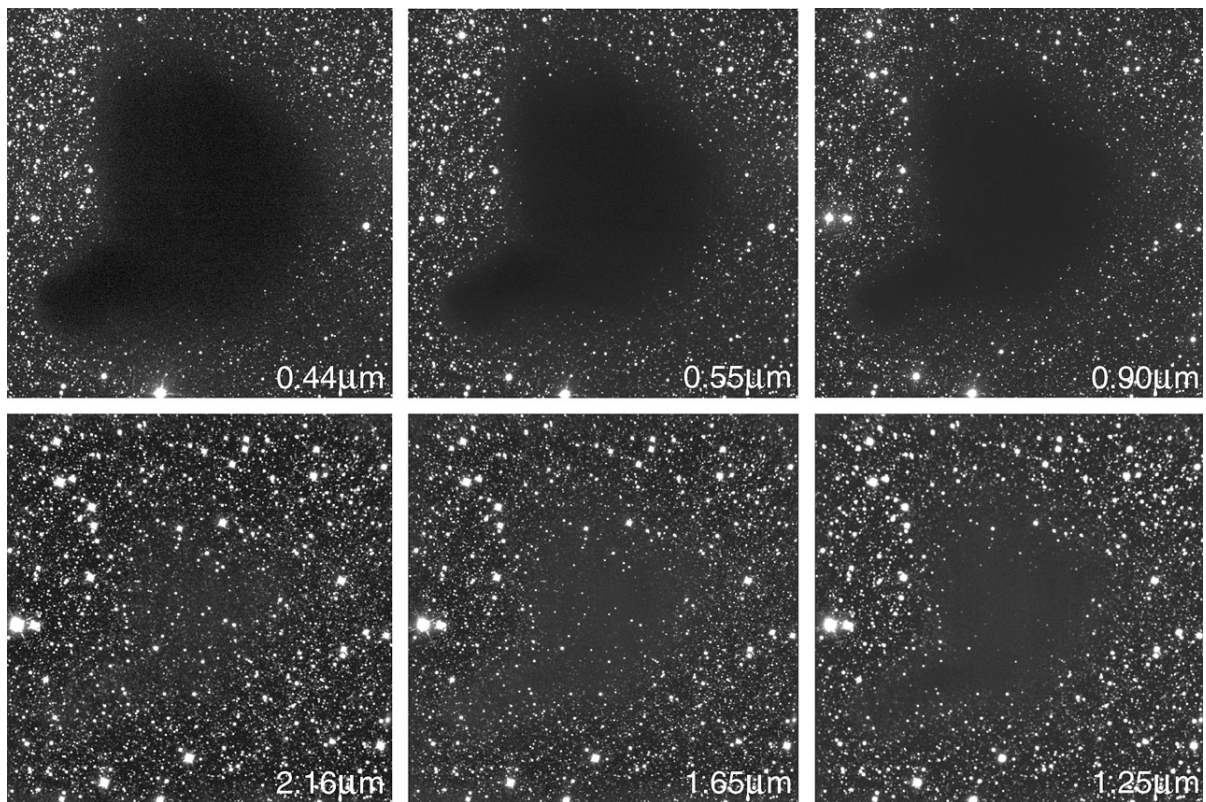


Figura 7 – Nebulosa escura Barnard 98, observada em diferentes comprimentos de onda, do visível ao infravermelho, onde percebe-se a diferença de absorção em certas faixas do espectro observado. Fonte: ESO (European Southern Observatory). Disponível em: <<https://www.eso.org/public/images/eso9934b/>>.

Olhando para Figura 7 percebe-se que o meio interestelar em questão permite a passagem de certos comprimentos de onda. Isso significa que a absorção A tem uma relação de dependência de λ . A extinção interestelar pode ter essencialmente duas razões:

a absorção e o espalhamento. Por esses processos, a luz interage com a poeira estelar, que são grãos com dimensões que variam de 10^{-5} a 10^{-6} cm, afetando mais a luz na região do azul e, conseqüentemente, avermelhando estrelas localizadas atrás dessas nuvens de poeira. Ou seja, a poeira interestelar permite a passagem de certos comprimentos de onda e absorve outros, isso implica que a extinção atmosférica A é seletiva.

Para aprimorar o estudo da extinção atmosférica, define-se os índices de cor para um dado sistema de magnitudes. O índice de cor é calculado a partir da diferença de magnitudes em duas bandas do espectro observado pelo sistema de magnitudes em questão. Tomando como referência o sistema UBV , os índices de cor $U - B$ e $B - V$, de forma que para o Sol, tem-se:

$$\begin{aligned}(U - B)_{\odot} &= (m_U - m_B)_{\odot} = -25,9 - (-26,1) = 0,2 \\ (B - V)_{\odot} &= (m_B - m_V)_{\odot} = -26,1 - (-26,8) = 0,7\end{aligned}$$

e, obviamente, quando se toma um índice de cor da mesma banda o resultado é zero, ou seja

$$U - U = B - B = V - V = 0.$$

Isso é válido em qualquer sistema de magnitudes.

Assim, define-se o avermelhamento ou excesso de cor E de uma cor como sendo a diferença entre os índices de cor aparente e absoluto. Assim, tomando novamente como referência o sistema de magnitude UBV , os índices de cor aparente, calculados utilizando a magnitude aparente, serão $(U - B)$ e $(B - V)$, e os índices de cor absolutos, calculados utilizando a magnitude absoluta, serão $(U - B)_0$ e $(B - V)_0$. Portanto, o excesso de cor entre as bandas U e B é determinado por

$$E_{U-B} = (U - B) - (U - B)_0. \quad (2.25)$$

De (2.23), pode-se escrever

$$U - U_0 = 5 \log \frac{d}{10} + A_U \quad (2.26)$$

$$B - B_0 = 5 \log \frac{d}{10} + A_B, \quad (2.27)$$

onde A_U e A_B são as absorções nas bandas U e B , respectivamente. Com isso, o excesso de cor (2.25) fica

$$\begin{aligned}E_{U-B} &= (U - B) - (U - B)_0 = U - U_0 - (B - B_0) \\ &= 5 \log \frac{d}{10} + A_U - 5 \log \frac{d}{10} + A_B \\ &= A_U - A_B.\end{aligned} \quad (2.28)$$

O estudo dos índices de cor é essencial para determinar a extinção interestelar e estão relacionados com propriedades intrínsecas das estrelas, essencialmente da temperatura. A

utilização dos filtros é essencial para estipular a temperatura de uma estrutura por meio da Lei de Planck.

2.2.1 Magnitude Bolométrica

A luminosidade L de uma estrela está relacionada com a potência irradiada por ela em todas as direções e em todos os comprimentos de onda. De forma análoga à radiância e em concordância com a equação (2.2), pode-se escrever a luminosidade como

$$L = 4\pi R^2 \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = 4\pi R^2 F_{bol}, \quad (2.29)$$

onde F_{bol} é o fluxo bolométrico, isto é, o fluxo emitido em toda área superficial da estrela medido em todos os comprimentos de onda. A magnitude correspondente a este fluxo é a magnitude bolométrica M_{bol} , que seguirá a mesma lógica da magnitude absoluta, sendo também logarítmica e supondo que as estrelas estão a uma distância de 10 parsecs. Assim, seguindo a equação (2.20) e considerando magnitudes bolométricas, pode-se escrever

$$M_{bol}^2 - M_{bol}^1 = -\frac{5}{2} \log \frac{L_2}{L_1}, \quad (2.30)$$

que nos leva a

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{-0,4(M_{bol}^2 - M_{bol}^1)}. \quad (2.31)$$

Contudo, é comum escrever a luminosidade em comparação com a luminosidade solar L_\odot , de forma que

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-0,4(M_{bol} - M_{bol}^\odot)}. \quad (2.32)$$

A magnitude bolométrica de uma estrela pode ser obtida a partir da magnitude visual ($M_V \equiv V$) com auxílio da correção bolométrica (CB), dada por

$$M_{bol} = M_V - CB, \quad (2.33)$$

de forma a respeitar a condição $M_V > M_{bol}$ ³. Para o Sol, a correção bolométrica é $CB_\odot = 0,07$ e a magnitude visual do sol $M_V^\odot = 4,82$ e portanto $M_{bol}^\odot = 4,75$ (MACIEL, 2018).

³ A condição $M_V > M_{bol}$ reflete que as estrelas emitem radiação térmica, obedecendo à Lei de Planck, com a maior parte dessa radiação concentrada no espectro do visível. Isso resulta em uma magnitude visual maior que a correção bolométrica, que abrange as demais faixas espectrais, sendo, portanto, menor que a magnitude visual.

3 Espectroscopia

A espectroscopia é uma ferramenta que revela informações sobre a matéria por meio da interação da luz com átomos e moléculas. Ao examinar as linhas de absorção e emissão, conhecidas como linhas espectrais, em diferentes comprimentos de onda, ela permite identificar elementos químicos e determinar propriedades físicas, como temperatura e densidade, de diversos materiais, incluindo corpos celestes.

3.1 Linhas Espectrais

Isaac Newton (1643 - 1727), conhecido por suas contribuições fundamentais à mecânica, incluindo as leis do movimento e a Lei da gravitação universal, também desempenhou um papel significativo no campo da ótica, que culminou na publicação, em 1704, do livro *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. Uma de suas descobertas notáveis nesse campo ocorreu em 1665-1666, durante um período de quarentena causado por um surto de peste bubônica, quando Newton demonstrou que a luz branca, ao passar por um prisma, se decompõe em diferentes cores, formando uma sequência de cores (espectro) como um arco-íris.

Em 1802, o químico britânico William Hyde Wollaston (1766 - 1828) descobriu linhas escuras ao observar o espectro solar. Nos anos seguintes, na Alemanha, o vidraceiro Joseph von Fraunhofer (1787 - 1826) observou, em 1813, utilizando instrumentos de invenção própria as mesmas linhas observadas por Wollaston, contando 574 destas linhas.

Ainda no século XVII, no ano 1856, o químico alemão Robert Wilhelm Bunsen (1811 - 1899) concebeu o dispositivo conhecido como bico de Bunsen, posteriormente chamado de bico de Bunsen. Uma de suas notáveis características era a chama incolor que produzia. Quando uma substância química era introduzida na chama, as cores emitidas refletiam as características da própria substância, e não as da chama em si. Bunsen, junto a Kirchhoff, desenvolveu a pesquisa de espectros dos elementos químicos que levou à conclusão de que cada elemento produzia linhas espectrais diferentes.

Posteriormente, em 1859, após estudos sobre emissão e absorção da radiação, Kirchhoff elaborou as leis que caracterizavam estes fenômenos. Tais leis ficaram conhecidas como Leis de Kirchhoff, sendo elas:

1. **Lei de emissão térmica:** Um objeto quente, sendo ele sólido, líquido ou gasoso, emite um espectro contínuo de ondas eletromagnéticas. A intensidade do espectro depende da temperatura e do comprimento de onda.

2. **Lei das linhas de emissão:** Um gás quente emite ondas eletromagnéticas em um espectro discreto. Cada elemento químico ou molécula tem seu próprio conjunto característico de linhas de emissão.
3. **Lei das linhas de absorção:** Um gás frio quando atravessado por uma emissão com espectro contínuo absorverá comprimentos de onda específicos, resultando em linhas escuras no espectro, ou linhas de absorção, distintas para cada elemento químico ou molécula.

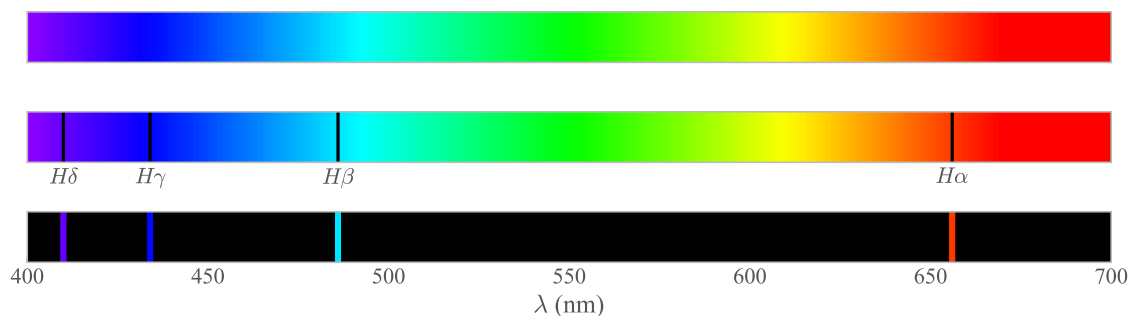


Figura 8 – Visualização do espectro contínuo no visível seguido do espectro de absorção e emissão do átomo de hidrogênio (leis de Kirchhoff).

Com isso, na segunda metade do século XIX já se compreendia que as linhas de emissão e absorção estavam relacionadas ao material envolvido, como observado por Kirchhoff. No entanto, a origem dessas linhas permanecia desconhecida, uma vez que a física atômica estava em seus estágios iniciais de desenvolvimento. Foi somente no início do século XX, com o advento da quantização da energia proposta por Planck e posteriormente confirmada por Einstein, que houve um avanço significativo no entendimento dos átomos.

Assim, concomitantemente ao estudo da radiação, havia a física atômica. Ao longo da história, o conceito de átomo foi gradualmente elaborado para compreender a estrutura da matéria. Um dos primeiros modelos atômicos foi o de John Dalton (1766 - 1844), apresentado em 1808, onde o átomo era considerado a menor estrutura da matéria, indivisível, de acordo com a origem da palavra, do grego átomo: a = não, tomo = divisão. Esse modelo era o possível no contexto da época, já que não se conhecia a natureza da luz nem a possibilidade de o átomo ser constituído por outras partículas.

Joseph John Thomson (1856 - 1940) foi o primeiro a abordar o átomo como um objeto com estrutura interna ativa, buscando estudar a dinâmica do que o compunha, indo além da concepção do átomo como um mero objeto contável na estrutura da matéria (CARUSO; OGURI, 2016).

O modelo atômico de Thomson, frequentemente associado à analogia do pudim de passas¹, começou a ser estruturado em 1899. Nele, Thomson imaginava uma estrutura

¹ A ideia de pudim de passas passa por uma interpretação de que os elétrons, chamados à época de

composta por um grande número de corpúsculos de carga negativa, os elétrons, onde haveria também alguma carga positiva para equilibrar a carga total. Posteriormente, em 1904, ele reformulou o modelo, passando a descrever o átomo como uma esfera positiva uniformemente carregada, na qual os elétrons estariam distribuídos em anéis concêntricos.

De acordo com esse modelo, os elétrons executavam movimentos acelerados periódicos, o que explicaria a emissão de ondas eletromagnéticas por um corpo com temperatura maior que o zero absoluto. No entanto, o modelo enfrentava um paradoxo ao tentar explicar a estabilidade do átomo e a formação de linhas espectrais, como apontou Joseph Larmor (1857 - 1942).

Thomson considerou que as cargas positivas não possuíam massa e, portanto, a massa do átomo estaria concentrada nos elétrons. Porém, o próprio Thomson já havia medido a relação carga/massa do elétron², o que justificava a necessidade de seu modelo assumir uma grande quantidade de elétrons.

Joseph Larmor apresentou uma indagação sobre este modelo: se a média das somas das acelerações dos elétrons de uma órbita específica fosse constantemente nula, a perda de energia por emissão seria mínima ou inexistente, o que poderia conferir estabilidade ao movimento dos elétrons em uma órbita. Contudo, em um modelo onde os elétrons, em média, não sofrem acelerações significativas, não ocorre emissão e, conseqüentemente, não há formação de linhas espectrais (CARUSO; OGURI, 2016).

Assim, os sucessos do modelo atômico de Thomson estão atrelados à sua capacidade de explicar a emissão de radiação por um corpo que possui temperatura acima do zero absoluto e a certas regularidades da tabela periódica, mas não é capaz de proporcionar uma explicação adequada para a estabilidade dos átomos e a formação de linhas espectrais.

O próximo avanço na teoria atômica foi dada por Ernest Rutherford (1871 - 1937), que descobriu o núcleo atômico em 1909 através do experimento da folha de ouro³, que consistia em um feixe de partículas *alfa* direcionado a uma fina folha de ouro e observou o padrão de dispersão resultante.

Os resultados do experimento de Rutherford mostraram que a maior parte das partículas alfa passava pela folha com pouco desvio, como se esperava com base no modelo atômico de Thomson, mas algumas poucas sofriam uma grande dispersão e outras até ricocheteavam de volta na direção de onde vieram. Rutherford interpretou essas observações como evidência de que a maior parte da massa do átomo estavam concentradas em uma

corpúsculos, estariam distribuídos de forma aleatória em seu modelo atômico, o que não é verdade, visto que Thomson assumiu que estes estariam distribuídos em anéis concêntricos uniformemente.

² O elétron foi descoberto por Thomson, o que lhe rendeu um prêmio nobel em 1906.

³ O experimento da folha de ouro, também conhecido como experimento de Rutherford ou experimento de Geiger-Marsden, foi realizado no laboratório do Rutherford por Hans Geiger (1882 - 1945) e Ernst Marsden (1889 - 1970), com supervisão de Rutherford, na Universidade de Manchester, no Reino Unido.

região muito pequena do átomo, o núcleo atômico, que possuiria um raio da ordem de 10^4 vezes menor que o raio atômico.

Em síntese, o modelo de Rutherford foi introduzido em 1911 em seu artigo intitulado “*The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom*” (RUTHERFORD, 1911). Nesse modelo, o átomo era constituído por um núcleo de carga positiva, onde a maior parte da massa está contida, envolto por uma nuvem de elétrons, conhecida como eletrosfera.

Este modelo explicava a dispersão de partículas *alfa* em grandes ângulos, porém, ainda se deparava com o desafio da estabilidade. Se o elétron permanecesse estacionário, seria atraído em direção ao núcleo positivo, levando ao seu colapso. Por outro lado, se o elétron estivesse em movimento circular ao redor do núcleo, estaria constantemente acelerado, o que resultaria na emissão de radiação, na perda de energia e, por fim, no seu colapso em direção ao núcleo. Portanto, sob esse modelo, o átomo não é uma estrutura estável.

A solução da estabilidade veio com Bohr, com a introdução da quantização à estrutura do átomo, em 1913, em seu artigo “*On the constitution of atoms and molecules*” (BOHR, 1913). Para isso, Bohr postulou:

- (a) Os elétrons estão localizados em órbitas fixas, denominadas estados estacionários ou níveis de energia, em que cada órbita possui uma energia definida,

$$\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n\}, \quad (3.1)$$

onde ϵ é a energia associada à cada nível de energia.

- (b) O elétron em cada órbita fixa não irradia energia eletromagnética, a menos que realize uma transição entre os níveis de energia.

As órbitas que os elétrons podem ocupar são aquelas que o momento angular é um múltiplo de $h/2\pi$, onde h é a constante de Planck. Como na mecânica clássica o momento angular pode ser escrito como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow |\vec{L}| = rmv \sin \theta, \quad (3.2)$$

onde \vec{L} é o momento angular, \vec{r} é o vetor posição, \vec{p} é o momento linear, m é a massa do objeto, \vec{v} é o vetor velocidade e θ é o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade. Assim, pela hipótese de Bohr, se tratando do elétron realizando um movimento circular uniforme e unindo isso à quantização do momento angular, pode-se escrever

$$L = m_e r v = n \frac{h}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*, \quad (3.3)$$

onde $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg é a massa do elétron e n é chamado de número quântico principal, que indica o nível de energia em que o elétron se encontra.

A força elétrica, calculada pela Lei de Coulomb, entre um núcleo com número atômico Z (ou seja, Z prótons) e um elétron é

$$F_e = -K \frac{Ze^2}{r^2} \quad (3.4)$$

onde $K = 8.988 \times 10^9$ N · m²/C² é a constante eletrostática e $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C é a carga elementar, que é o módulo da carga de um elétron (ou a carga de um próton, que é a mesma em magnitude, mas oposta em sinal).

Assim, como a análise de Bohr para o átomo ainda parte de uma perspectiva clássica, para a estabilidade do elétron ser mantida deve-se satisfazer as leis de Newton, de forma que a força elétrica (Lei de Coulomb) será contrabalanceada pela “força centrípeta”⁴. Logo,

$$\sum F = F_c + F_e = \frac{m_e v^2}{r} + K \frac{Ze(-e)}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = K \frac{Ze^2}{m_e r}. \quad (3.5)$$

De (3.3) e (3.5), chega-se a

$$r = \frac{n^2 h^2}{(2\pi)^2 K Z m_e e^2}. \quad (3.6)$$

Essa equação (3.6) ilustra os tamanhos possíveis dos níveis de energia e sua dependência do número quântico. Nota-se que o termo n aparece ao quadrado, ou seja, $n^2 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$, indicando que as distâncias entre as órbitas não são uniformes. O estado estacionário com $n = 1$ é conhecido como estado fundamental, enquanto os demais são chamados de estados excitados.

Além disso, pode-se calcular também a energia de cada estado. Pela física clássica a energia do sistema é calculada pela soma da energia cinética com a energia potencial. Neste contexto trata-se da energia potencial elétrica (E_{pe}),

$$E_n = K + E_{pe}. \quad (3.7)$$

que se relaciona com o potencial elétrico V com

$$V = \frac{E_{pe}}{q}, \quad V = K \frac{Ze}{r} \Rightarrow E_{pe} = -K \frac{Ze^2}{r}, \quad (3.8)$$

em que q é a carga elétrica que está submetida ao potencial elétrico V (aqui $q = -e$ pois trata-se de um elétron). Além disso, é possível relacionar a energia cinética com a força centrípeta, de forma a obter

$$F_c = \frac{m_e v^2}{r} \cdot \frac{2}{2} = 2 \frac{K}{r} \Rightarrow K = \frac{r}{2} F_c, \quad (3.9)$$

⁴ A força centrípeta é a força necessária para manter um objeto em movimento circular. Ela atua na direção do centro do círculo e é responsável por mudar a direção do movimento do objeto sem alterar sua velocidade escalar.

mas como de (3.5) $F_c = -F_e$, (3.9) pode ser escrita como

$$K = \frac{KZe^2}{2r}. \quad (3.10)$$

Logo, (3.7) para energia do nível n se torna

$$E_n = K + E_{pe} = \frac{KZe^2}{2r} - \frac{KZe^2}{r} = -\frac{KZe^2}{2r}. \quad (3.11)$$

Mas a energia ainda não está em função de n . Para isso, basta utilizar a equação para o raio (3.6), que se obtém

$$E_n = -\frac{2\pi^2 K^2 m_e^2 e^4 Z^2}{h^2 n^2} = -13,6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV}, \quad (3.12)$$

onde $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Como postulou Bohr, um átomo só emite um fóton quando um elétron transaciona de um nível de energia maior, n_1 para outro de energia menor, n_2 . A energia do fóton emitido é determinado pela diferença de energia entre os dois estados envolvidos,

$$E_{\text{fóton}} = \Delta E = E_1 - E_2, \quad (3.13)$$

onde $E_1 = E(n_1)$ e $E_2 = E(n_2)$. No processo inverso, na absorção, o elétron saltaria do estado n_2 para o estado n_1 absorvendo a energia ΔE . O menor pacote de energia é determinado pelo *quantum* de energia proposto por Planck, como escrito na equação (1.43). Assim, a energia associada ao fóton emitido é

$$E_{\text{fóton}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (3.14)$$

Unindo (3.12), (3.13) e (3.14), tem-se

$$\nu = \frac{E_{\text{fóton}}}{h} = \frac{2\pi^2 K^2 m_e^2 e^4 Z^2}{h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 13,6 Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ eV}, \quad (3.15)$$

que para um comprimento de onda, no caso de um átomo mais simples, o hidrogênio (H), onde $Z = 1$, tem-se

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13,6 \text{ eV}}{hc} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{1}{912 \text{ \AA}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (3.16)$$

Essa equação ajuda a explicar as linhas espectrais de emissão e absorção do átomo de hidrogênio, de forma que este átomo só pode emitir e absorver determinados comprimentos de onda. Observar uma linha spectral é a evidência da presença do material que produz aquela linha spectral.

A equação (3.16) funciona para descrever as linhas do átomo de hidrogênio, mas falha para átomos e moléculas mais complexas, visto que o átomo de Bohr possui características geométricas e determinísticas. Para isso é necessária a mecânica quântica,

desenvolvida posteriormente por Erwin Schrödinger (1887 - 1961), Werner Heisenberg (1901 - 1976), e outros, baseando-se numa visão probabilística dos eventos.

Um fenômeno que influencia as linhas espectrais é o seu alargamento. Os níveis de energia não são perfeitamente estreitos e, portanto, uma linha espectral está associada a um intervalo de energia finito δE . Esse alargamento ocorre devido a vários fatores⁵. Quando o alargamento é devido ao princípio de incerteza de Heisenberg, ele é chamado de alargamento natural. Quando é causado por colisões entre átomos, que perturbam os níveis de energia, é denominado alargamento colisional. Além desses mecanismos, há o alargamento devido ao efeito Doppler, causado pelo movimento aleatório das partículas, algumas se aproximando e outras se afastando de nós.

A intensidade, ou grossura, de uma linha espectral é proporcional ao número de átomos que estão no estado de energia a partir do qual ocorre a transição que produz determinada linha. A forma de contar átomos em um gás a uma temperatura constante T , em equilíbrio térmico, estão em cada estado de energia é dada pela equação de excitação de Boltzmann

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{g_{i+1}}{g_i} \exp[(E_i - E_{i+1})/k_B T], \quad (3.17)$$

onde N_{i+1} e N_i são o número de átomos por volume nos níveis de energia E_{i+1} e E_i , respectivamente, g_{i+1} e g_i são os pesos estatísticos (número de diferentes estados com a mesma energia) dos níveis $i + 1$ e i . Contudo, a medida que a temperatura aumenta, os átomos ionizam, perdendo elétrons, de forma que uma parte destes fica indisponível para realizar transições. De forma análoga, a relação entre estágios de ionização é determinada pela equação de ionização de Saha

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp[-\mathcal{X}_i/k_B T], \quad (3.18)$$

onde N_{i+1} e N_i representam o número de átomos por volume nos estados de ionização $i + 1$ -ésimo e i -ésimo, com $i + 1$ e i elétrons removidos, respectivamente. \mathcal{X}_i denota o potencial de ionização do estado i (energia necessária para remover i elétrons do átomo), Z_{i+1} e Z_i referem-se às funções de partição, n_e é o número de elétrons por volume e m_e representa a massa do elétron. A equação (3.18) foi formulada por Meghnad Saha (1893 - 1956) e representa a razão entre a população de dois níveis consecutivos de ionização de um mesmo elemento químico.

Um gás em equilíbrio termodinâmico tem suas propriedades descritas pelas equações (1.3), (1.51), (3.17) e (3.18), as quais dependem apenas de um parâmetro: a temperatura T . O equilíbrio termodinâmico oferece uma representação precisa dos interiores estelares. Contudo, sua aplicabilidade diminui nas camadas mais externas e menos densas das

⁵ Para uma descrição mais detalhada dos mecanismos que causam o alargamento das linhas espectrais, consulte VALVERDE; BASEIA; BAGNATO, (2016).

atmosferas estelares. Assim, é crucial identificar e investigar separadamente os fenômenos que ocorrem nesse contexto específico (MACIEL, 1991).

3.2 Classificação Estelar

Os estudos das linhas espectrais serviu de base para classificação estelar, de forma que a classificação espectral utilizada nos dias de hoje deriva da classificação de Harvard, que foi desenvolvida durante o final do século XIX e início do século XX no Observatório de Harvard, dirigido por Edward Charles Pickering (1846 - 1919).

A equipe recrutada por Pickering era exclusivamente composta por mulheres. O objetivo principal dessa equipe era processar dados astronômicos. A primeira integrante, em 1881, foi Williamina Fleming (1886 - 1952), que anteriormente trabalhava para Pickering como empregada. Entre as mulheres notáveis no observatório, Henrietta Leavitt (1868 - 1921) destacou-se ao descobrir uma relação entre a magnitude absoluta e o período de variação do brilho das cefeidas em 1912, o que permitiu a medição de distâncias⁶ de objetos fora da nossa galáxia (BARROS, 2018). Cecilia Payne (1900 - 1979), que ingressou no observatório em 1923, concluiu em sua tese de doutorado, intitulada *Stellar Atmospheres - A contribution to the Observational Study of High Temperatures in the reversing Layers of Stars* (GAPOSCHKIN, 1925), que as estrelas eram predominantemente compostas de hidrogênio e hélio (VIEIRA; MASSONI; ALVES-BRITO, 2021). Por exemplo, o Sol possui 71% de hidrogênio, 27% de hélio e menos de 2% de outros elementos, denominados *metais* em astrofísica⁷ (MACIEL, 2018). Annie Cannon (1863 - 1941), por sua vez, classificou aproximadamente um quarto de milhão de estrelas entre 1918 e 1924, com base nas linhas espectrais do hidrogênio⁸ e suas intensidades, começando pela letra A para linhas mais fortes e seguindo para B, C, e assim por diante. O sistema de classificação desenvolvido por Cannon é chamado de sistema de Harvard.

Atualmente, o sistema de classificação espectral é unidimensional e possui como parâmetro a temperatura efetiva. As estrelas são separadas nos tipos O, B, A, F, G, K e M, em que a temperatura diminui ao longo da sequência, como mostra a Tabela 3. Cada tipo é subdividido em 10 subclasses, que vão de 0 a 9. A classificação se estende para estrelas mais frias, que foram adicionadas a partir de 1990: classe L, com temperaturas que variam de 1400K a 2200K, e classe T, com temperaturas menores que 1400K. Percebe-se que quanto menor é a temperatura de uma estrela, bandas moleculares se tornam mais presentes, já que transições moleculares requerem menos energia que transições atômicas.

⁶ A metodologia desenvolvida por Henrietta Leavitt possibilitou a Edwin Hubble (1889 - 1953) calcular a distância à qual a galáxia de Andrômeda está situada HUBBLE, (1925).

⁷ A proporção de elementos químicos mais pesados que o hidrogênio e hélio dentro de uma estrela é referida como metalicidade.

⁸ A classificação com respeito as linhas espectrais do hidrogênio se deve ao fato que a física deste átomo era a melhor compreendida no início do século XX.

Além dessas, tem-se também as classes R, N e S, que estão associadas a estrelas frias (temperaturas próximas às de classe M) e com abundância de metais pesados.

Tabela 3 – Classificação espectral e suas características (ZEILIK; GREGORY, 1998).

Classe Espectral	T_{eff}	Linhas Espectrais
O	>30000 K	He II forte, H fraco, linhas fortes de metais multiplamente ionizados
B	10000-30000 K	He I forte, H moderado
A	7500-10000 K	linhas do H atigem seu máximo
F	6000-7500 K	H moderado linhas fortes de metais uma vez ionizados;
G	5000-6000 K	H fraco metais uma vez ionizados forte
K	3500-5000 K	linhas de metais neutros e uma vez ionizados, H fraco
M	<3500 K	bandas moleculares intensas (i.e. TiO), linhas de átomos neutros fortes, H muito fraco.

Nos dias de hoje, sabe-se que as estrelas, em geral, são compostas por aproximadamente 90% de hidrogênio e 10% hélio, enquanto os outros elementos (metais) contribuem em até 2% (FILHO; SARAIVA, 2017). Diante dessa informação, é natural conjecturar que todas as estrelas exibiriam linhas espectrais intensas associadas a esses elementos e linhas mais tênues para os metais. No entanto, como demonstrado também na Tabela 3, isso não é uma regra e ocorre por influência da temperatura na estrutura do átomo (transições eletrônicas e ionização), como mostra as equações (3.17) e (3.18).

O hidrogênio exibe linhas espectrais muito bem conhecidas, com destaque para a Série de Balmer. Esta série engloba transições de nível de energia que envolvem o primeiro estado excitado ($n = 2$), com linhas como H_α , H_β , H_γ , localizadas no espectro visível. Outra série significativa é a de Lyman, que abrange transições relacionadas ao estado fundamental ($n = 1$) e está na região ultravioleta, sendo representada por linhas como Ly_α , Ly_β , Ly_γ . Estas informações estão na Tabela 4.

Tabela 4 – Séries de Lyman e Balmer (ZEILIK; GREGORY, 1998).

Séries de Lyman			Séries de Balmer		
Nome	Transição	λ	Nome	Transição	λ
L_α	$1 \rightarrow 2$	121,6 nm	H_α	$2 \rightarrow 3$	656,3 nm
L_β	$1 \rightarrow 3$	102,5 nm	H_β	$2 \rightarrow 4$	486,1 nm
L_γ	$1 \rightarrow 4$	97,2 nm	H_γ	$2 \rightarrow 5$	434,1 nm
.
.
Ionização	$1 \rightarrow \infty$	91,1 nm	Ionização	$2 \rightarrow \infty$	364,6 nm

Assim, para que uma estrela apresente linhas espectrais na série de Balmer, é necessário que contenha uma quantidade significativa de átomos de hidrogênio excitados no nível $n = 2$. Conforme ilustrado na Figura 9, o número de átomos de H com elétrons em $n = 2$ é proporcional à temperatura, e esses tornam-se mais proeminentes a partir de temperaturas em torno de 10000K.

A diminuição da intensidade das linhas da série de Balmer em estrelas de temperaturas mais elevadas pode ser explicada pela ionização, conforme descrito na equação de Saha (3.18). Conforme ilustrado na Figura 10, acima de aproximadamente 7500K, os átomos de hidrogênio começam a ser ionizados, e em torno de 10000K, todos estão completamente ionizados. Isso significa que não há mais elétrons nos átomos de hidrogênio para realizar as transições que produzem a série de Balmer. Portanto, mesmo em estrelas muito quentes, com alta proporção de hidrogênio em sua composição, as linhas de Balmer tornam-se tênues devido à falta de elétrons disponíveis. A Figura 11 apresenta o espectro de estrelas classificadas como OBAFGKM, evidenciando a diminuição das linhas de Balmer conforme a temperatura aumenta.

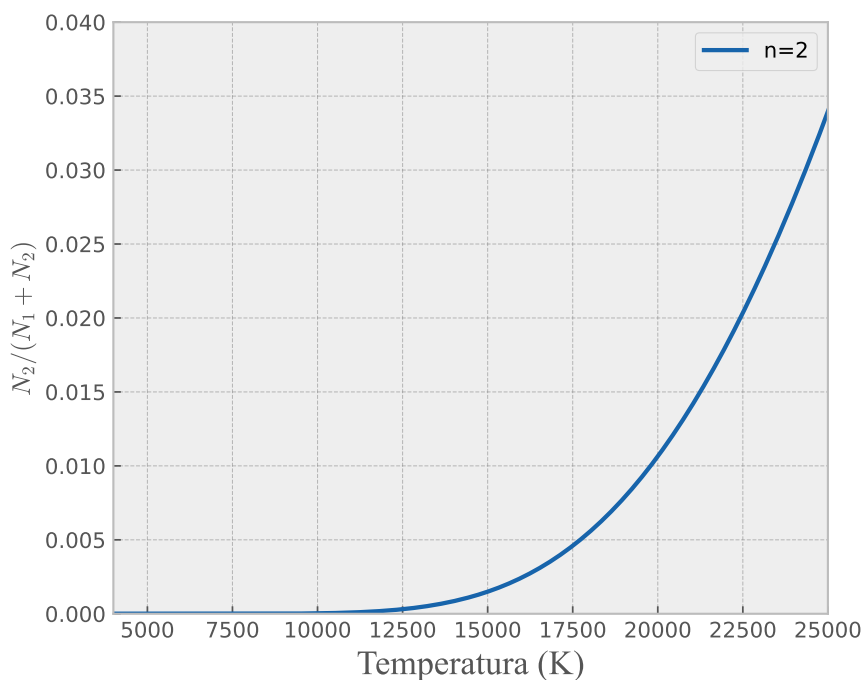


Figura 9 – Razão de número de átomos de hidrogênio com elétrons no primeiro estado excitado ($n = 2$), N_2 , pela soma de átomos com elétrons no estado fundamental e primeiro estado excitado, $N_1 + N_2$, utilizando a equação de excitação de Boltzmann (3.17).

A outra classificação estelar é com respeito à luminosidade, apresentada na Tabela 5, que junto à classificação espectral formará uma classificação bidimensional.

Em 1943, William Wilson Morgan (1906 - 1994), Philip Childs Keenan (1908 - 2000) e Edith M. Kellman (1911 - 2007) introduziram as classes estelares Ia, Ib, II, III, IV

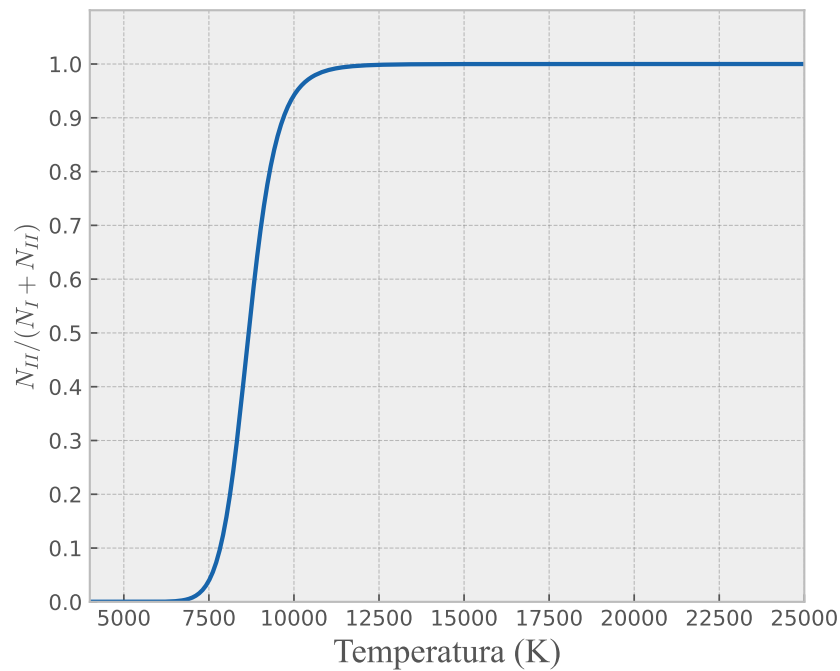


Figura 10 – Razão do número de átomos uma vez ionizados (N_{II}) pela soma do número de átomos neutros com átomos uma vez ionizados ($N_I + N_{II}$), utilizando a equação de Saha (3.18).

e V. Atualmente, a classe Ia é dividida em Ia-0, Ia e Iab. Adicionalmente, as classes VI e VII foram incorporadas para representar as subanãs e as anãs brancas, respectivamente.

Tabela 5 – Classificação estelar com respeito a luminosidade (MACIEL, 2018).

Classe	Características
Ia-0	supergigantes mais luminosas
Ia	supergigantes luminosas
Iab	supergigantes moderadamente luminosas
Ib	supergigantes menos luminosas
II	gigantes brilhantes
III	gigantes
IV	subgigantes
V	anãs
VI	subanãs
VII	anãs brancas

A luminosidade é definida pela equação (2.5), onde $T = T_{ef}$. Isso permite estabelecer uma correspondência entre uma classe de luminosidade e uma temperatura efetiva. Dado que as classes espectrais estão associadas a intervalos específicos de temperaturas efetivas, torna-se possível relacionar as classes de luminosidade às classes espectrais. Além disso, também pode-se relacionar com a magnitude absoluta.

Esses parâmetros observacionais e físicos estelares são agrupados no que é chamado de Diagrama HR. Em sua forma clássica, tal diagrama contém a magnitude absoluta visual

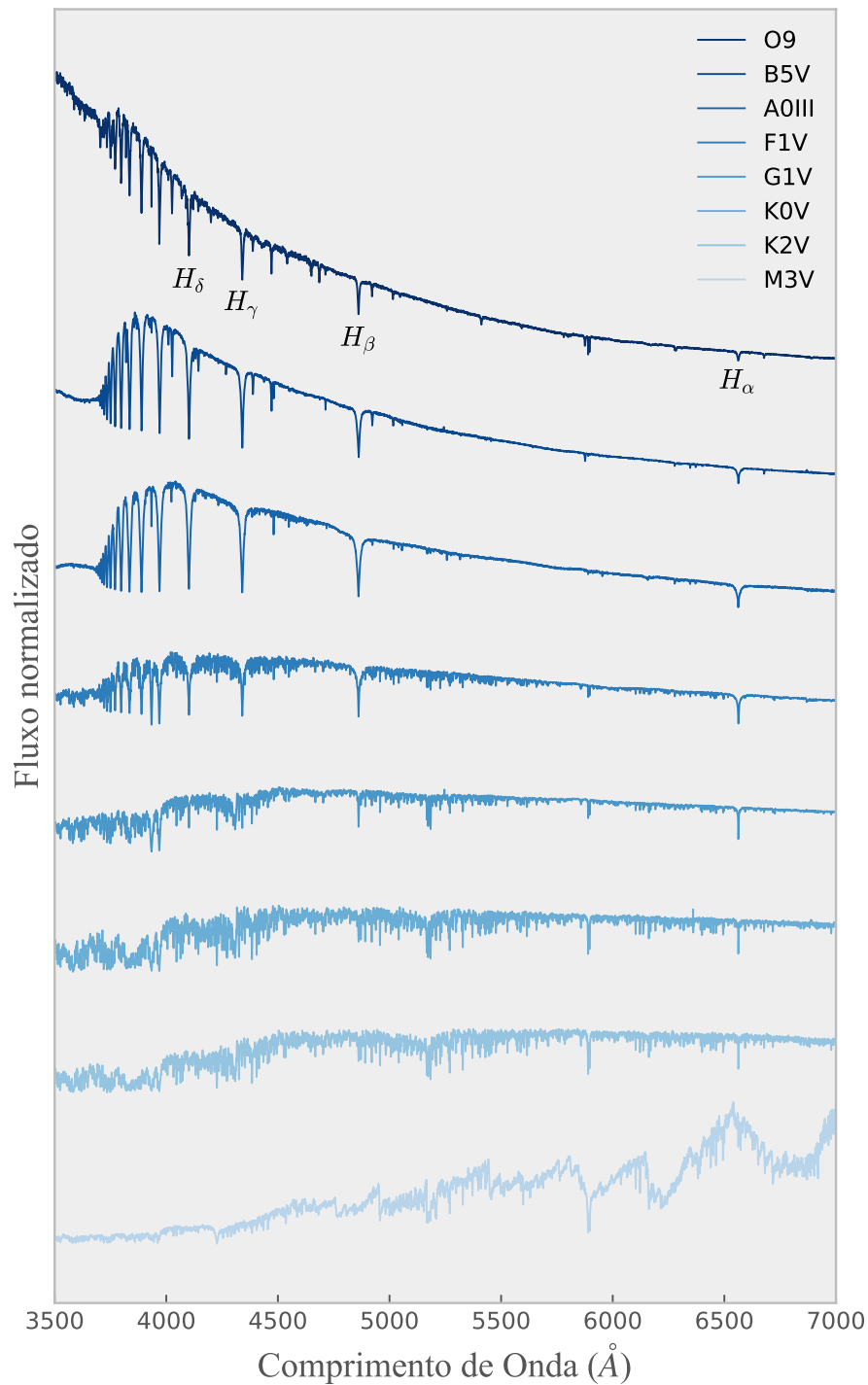


Figura 11 – Sequência espectral OABFGKM ilustrando a dependência da temperatura na formação das linhas espectrais. Os dados utilizados para produzir este gráfico são obtidos pelo telescópio 0.9m Coudé Feed telescope at Kitt Peak National Observatory e se encontram em *Indo-US coudé-feed spectral library*. Disponível em: <<https://noirlab.edu/science/observing-noirlab/observing-kitt-peak/telescope-and-instrument-documentation/cfib>>

M_V em função da temperatura efetiva T_{ef} (podendo ser luminosidade $\times T_{ef}$, incluindo a classificação espectral e variações logarítmicas dos parâmetros físicos). As letras HR são em homenagem a Ejnar Hertzsprung (1873 - 1967) e Henry Norris Russel (1877 - 1957), que foram fundamentais para a descoberta das correlações dos parâmetros estelares.

Hertzsprung, no início do século XX, analisou estrelas as quais tinham magnitudes absolutas e tipos espectrais bem determinados. Seus trabalhos de 1905 e 1907 (HERTZSPRUNG, 1905; HERTZSPRUNG, 1907) revelaram a relação entre esses parâmetros. Ele se surpreendeu com o fato de estrelas do tipo G em diante tinham um intervalo de magnitude, apesar da mesma classificação espectral (CARROLL; OSTLIE, 2017). As mais brilhantes ele chamou de gigantes, visto que, pela equação (2.5), tem-se

$$R = \frac{1}{T_{ef}^2} \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}, \quad (3.19)$$

o que significa que, para estrelas com a mesma temperatura mais luminosidade implica em um raio maior. Uma classe espectral abrange temperaturas próximas, conforme a Tabela 3. Em um terceiro artigo (HERTZSPRUNG, 1911), Hertzsprung incluiu diagramas e gráficos da magnitude aparente pela cor das estrelas contidas nas Plêiades e Híades⁹ (GINGERICH, 2013).

Já em 1913, Russel chegou às mesmas conclusões de Hertzsprung de forma independente. Ele teve acesso a dados de mais estrelas e em seu artigo distinguiu as estrelas entre gigantes e anãs (RUSSELL, 1913). Com seus gráficos foi possível perceber que a maior parte das estrelas se concentravam em uma faixa que vai do canto superior esquerdo ao canto inferior direito, como mostra a Figura 12. Essa região do diagrama é chamada de Sequência Principal.

Além da sequência principal, outras regiões bem conhecidas do diagrama HR são as regiões das gigantes, supergigantes e anãs brancas, como mostra a Figura 13. Estima-se que cerca de 80% das estrelas se localizam na sequência principal, aproximadamente 20% na região das anãs brancas e 1% nas regiões das gigantes e supergigantes (FILHO; SARAIVA, 2017).

Ao interpretar o diagrama HR, é crucial considerar diversos fatores que podem influenciar os resultados, como a distância, a seleção espectral e a região observada. Por exemplo, ao utilizar a magnitude aparente, estrelas próximas com baixo brilho intrínseco podem parecer mais brilhantes do que estrelas distantes com alto brilho intrínseco. Além disso, a distribuição das estrelas no diagrama HR pode variar significativamente dependendo se a região observada contém estrelas predominantemente jovens ou velhas. Portanto, o diagrama HR é uma ferramenta essencial para o estudo da evolução estelar e para a

⁹ As Plêiades, também conhecidas como “Sete Irmãs”, e as Híades são aglomerados estelares situados na constelação de Touro.

compreensão das características intrínsecas das estrelas, desde que seus vieses de seleção sejam levados em consideração.

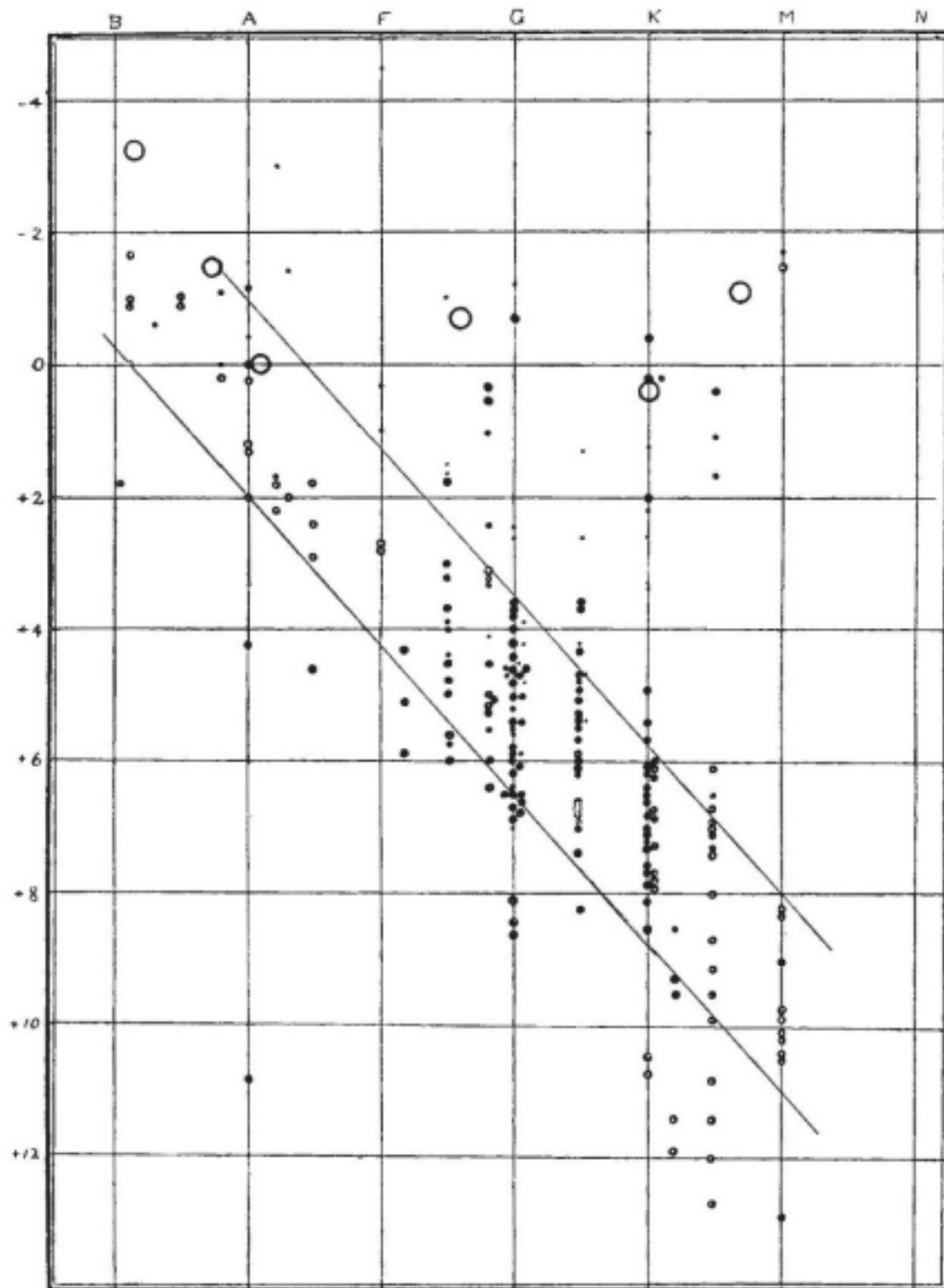


Figura 12 – Diagrama feito por Henry Norris Russel, com os tipos espectrais ao topo e as magnitudes absolutas ao lado esquerdo. Imagem retirada de (RUSSELL, 1914).

Com o auxílio das observações e do diagrama HR, percebe-se que os parâmetros estelares como as magnitudes, temperatura efetiva, luminosidade, raio, entre outros, pouco mudam ao longo dos anos. Isso se exemplifica no fato de Hiparco ter catalogado as estrelas que observamos hoje, há 2000 anos atrás (HORVATH, 2020). Essas informações levam à

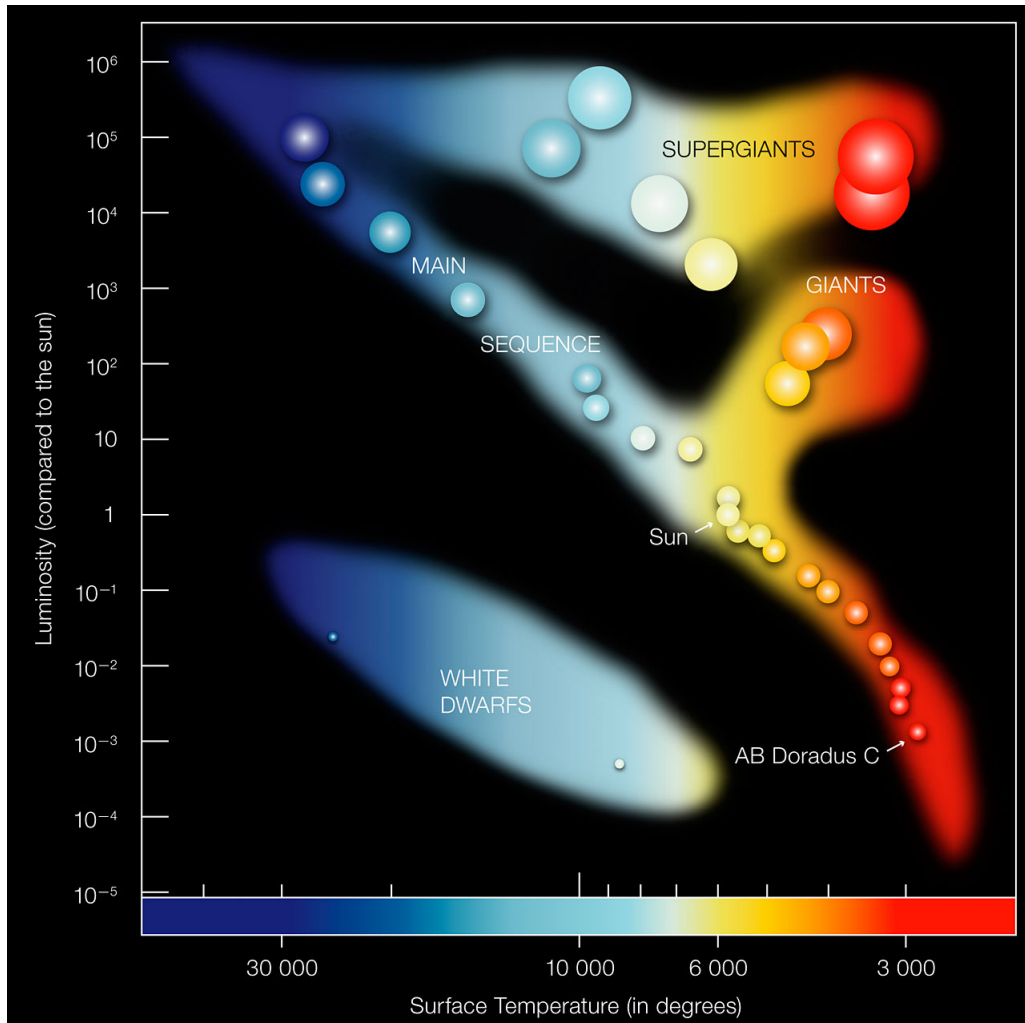


Figura 13 – Diagrama HR com o eixo horizontal sendo a temperatura efetiva (eixo invertido) e o eixo vertical sendo a luminosidade. Fonte: ESO (European Southern Observatory). Disponível em: <<https://www.eso.org/public/images/eso0728c/>>.

conclusão de que as estrelas são, em grande parte de sua vida, objetos muito estáveis. O próximo capítulo analisará as equações que regem o equilíbrio estelar.

Parte II

Equações da estrutura estelar

4 Mecânica dos fluidos auto-gravitantes

4.1 Equações da continuidade, de Euler e de Poisson

Ao embarcar na teoria da estrutura interna de uma estrela, é essencial estabelecer algumas premissas iniciais que orientarão a formulação de suas equações. A estrela é considerada um objeto isolado (um sistema auto-gravitante), esfericamente simétrico, sem rotação, desprovido de campos magnéticos e radialmente estática. Assim, os parâmetros físicos são dependentes exclusivamente da distância em relação ao centro da estrela, representada por r .

A descrição de sistemas auto-gravitantes na mecânica newtoniana é mais adequada utilizando a abordagem de fluidos, que se baseia na aplicação da equação da continuidade, da equação de Euler e da equação de Poisson.

Para derivar essas equações, consideramos uma massa contida num volume Σ , onde a superfície será denotada por $\partial\Sigma$. A conservação da massa é determinada por

$$\frac{dM_\Sigma}{dt} = -\Phi_{\partial\Sigma}, \quad (4.1)$$

onde M_Σ é a massa contida na região Σ e $\Phi_{\partial\Sigma}$ é o fluxo total de massa através da superfície $\partial\Sigma$. O sinal de menos é adotado por convenção, indicando que o fluxo é positivo quando está saindo de Σ .

A densidade da massa contida em um volume qualquer é expressa por $\rho = M/V$, onde V é o volume. De forma que pode-se escrever

$$M_\Sigma = \int_\Sigma \rho dV, \quad (4.2)$$

e, ao derivar em relação ao tempo, temos

$$\frac{dM_\Sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\Sigma \rho dV = \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (4.3)$$

Associado a essa massa existe um campo de velocidades, $\mathbf{v}(t, x^i(t))$. O termo x_i representa as variáveis espaciais, em que $i = \{1, 2, 3\}$ e $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Para calcular o fluxo de massa que atravessa uma área A em um intervalo infinitesimal de tempo δt , considera-se a velocidade \mathbf{v} constante. A componente de \mathbf{v} projetada no vetor normal \hat{n} à superfície é $\mathbf{v} \cdot \hat{n} = v \cos \theta$, e o volume que passa por essa superfície é $V = Av \cos \theta \delta t$. Como a densidade é $\rho = \frac{\delta m}{V}$, a massa que passa pela superfície será

$$\delta m = \rho Av \cos \theta \delta t, \quad (4.4)$$

resultando na expressão

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta m}{\delta t} \right) = \rho A v \cos \theta. \quad (4.5)$$

Para uma área muito pequena δA , o fluxo de massa por unidade de área por unidade de tempo \mathbf{J} é definido como

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad (4.6)$$

tal que

$$\frac{1}{\delta a} \frac{dm}{dt} = \rho v \cos \theta = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta A. \quad (4.7)$$

Assim, o fluxo total de massa, conforme expresso em (4.1), é obtido integrando sobre toda a superfície da região Σ :

$$\Phi_{\partial \Sigma} = \oint_{\partial \Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \oint_{\partial \Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA. \quad (4.8)$$

Dessa forma, as equações (4.1), (4.3) e (4.8) conduzem a

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial \Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (4.9)$$

que é a equação da continuidade em sua forma integral. Para obter a forma diferencial se utiliza o Teorema de Gauss,

$$\oint_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\Sigma} \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (4.10)$$

em que \mathbf{F} é um campo vetorial qualquer. Assim, (4.9) fica

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \Rightarrow \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0, \quad (4.11)$$

portanto, a forma diferencial da equação da continuidade é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.12)$$

Para obter a equação de Euler, analisamos um elemento infinitesimal de massa dM de um fluido. Se o momento linear é constante, a segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, é aplicável. Dessa maneira, a força resultante exercida em dM é obtida por

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{a} dM = \int_{\sigma} \mathbf{a} \rho dV, \quad (4.13)$$

onde a aceleração \mathbf{a} é

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, x^i(t)) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx^i} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.14)$$

A força exercida em uma área caracteriza a pressão $P = \mathbf{F}_P/\mathbf{A}$, para \mathbf{F}_P representando a força associada à essa pressão. Assim, num fluido, uma força aplicada em um elemento infinitesimal de área dA é dada pela expressão

$$\mathbf{F}_P = - \int_{\Sigma} \nabla P dV. \quad (4.15)$$

Considerando elemento dr em uma esfera, por simplicidade, a força associada à pressão interna $P(r)$ está no sentido \hat{r} , enquanto a força associada à pressão externa $P(r + dr)$ está no sentido $-\hat{r}$. Com isso, pela segunda lei de Newton, tem-se

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_P &= -P(d + dr)A + P(r)A = -[P(d + dr) + P(r)]A \\ &= - \left[\frac{\partial P}{\partial r} dr \right] A = - \frac{\partial P}{\partial r} dV, \end{aligned} \quad (4.16)$$

de forma que pode-se generalizar e escrever $d\mathbf{F}_P = -\nabla P dV$, de acordo com a equação (4.15).

No contexto gravitacional, a força é dada por $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, em que \mathbf{g} é a aceleração gravitacional. Além disso, como o campo gravitacional é conservativo¹, \mathbf{g} pode ser expresso como

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi, \quad (4.17)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Com isso, a força gravitacional é escrita como

$$\mathbf{F}_g = - \int_{\Sigma} \nabla\phi \rho dV. \quad (4.18)$$

As forças que atuam em um elemento de volume do fluido podem ter origem na pressão, expressa em (4.15), e no campo gravitacional, expressa em (4.18). A soma dessas forças é a força resultante no elemento de massa dM . Logo, de (4.13),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_g \Rightarrow \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) \rho dV = - \int_{\Sigma} (\nabla P + \nabla\phi \rho) dV, \quad (4.19)$$

que nos leva a equação de Euler

$$\frac{\nabla P}{\rho} + \nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0. \quad (4.20)$$

Para dedução da equação de Poisson, usaremos a força gravitacional dada pela Lei da gravitação universal,

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.21)$$

onde r é a distância entre os corpos de massa m e M e o sinal de menos caracteriza uma força atrativa. Além disso, o campo gravitacional \mathbf{g} é

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.22)$$

¹ Se o rotacional do campo vetorial \mathbf{F} for zero, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, em toda parte do domínio em consideração, então \mathbf{F} é conservativo.

de forma que o fluxo Φ_g do campo \mathbf{g} em uma superfície arbitrária Σ é calculado como

$$\Phi_g = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \int_{\Sigma} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV. \quad (4.23)$$

Com o auxílio de (4.22), (4.23) torna-se

$$\Phi_g = -GM \oint_{\partial\Sigma} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = -GM \oint_{\partial\Sigma} \frac{\cos\theta}{r^2} \, dA. \quad (4.24)$$

O elemento $\cos\theta dA$ é a projeção da área dA sobre a superfície S de uma esfera com centro no centro do campo gravitacional. Um elemento infinitesimal de área dS da esfera é

$$dS = r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \cos\theta dA, \quad (4.25)$$

para Ω sendo o ângulo sólido, θ o ângulo polar e φ o ângulo azimutal. Portanto, o fluxo Φ_g se torna

$$\Phi_g = -GM \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi d\theta = -4\pi GM, \quad (4.26)$$

que ao se considerar um elemento de massa infinitesimal dM ,

$$\Phi_g = -4\pi G \int dM = -4\pi G \int_{\Sigma} \rho dV. \quad (4.27)$$

Assim, ao comparar a equação (4.23) com (4.27), chega-se a

$$\Phi_g = \int_{\Sigma} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = \int_{\Sigma} -4\pi G \rho dV, \quad (4.28)$$

e, conseqüentemente

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho, \quad (4.29)$$

que pode ser reescrito com o auxílio da equação (4.17), de forma a obter a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (4.30)$$

4.2 Equilíbrio hidrostático

Uma estrela é um objeto bastante complexo, que para uma descrição mais próxima à realidade demanda a aplicação de várias áreas da física, tais como a termodinâmica, a física atômica, a mecânica quântica e gravitação. Contudo, para uma descrição simples, mas efetiva, desse objeto, partiremos da aplicação da mecânica clássica à gravitação e aos fluidos. Isso nos permitirá encontrar um conjunto de equações que envolvem a pressão P , a densidade ρ , a temperatura T e a luminosidade L , que relacionarão também outros parâmetros físicos. Essa abordagem oferece estimativas precisas para os parâmetros das estrelas, essencialmente aquelas da Sequência Principal, bem como as presentes no setor das gigantes e supergigantes.

A maneira padrão de descrever estrelas é considerá-las como fluidos, respeitando, então, (4.12), (4.20) e (4.30). Sendo a estrela um sistema auto-gravitante, esfericamente simétrico e sem rotação, a pressão, a densidade e o potencial gravitacional dependem somente do raio r : $P = P(r)$, $\rho = \rho(r)$ e $\phi = \phi(r)$. A estaticidade radial permite afirmar que uma casca esférica de raio r não está em movimento, o que leva a $\mathbf{v} = 0$. Dessa forma, a equação da continuidade e a equação de Euler se tornam, respectivamente,

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial t} = 0 \quad (4.31)$$

e

$$\frac{\nabla P(r)}{\rho(r)} + \nabla \phi(r) = 0. \quad (4.32)$$

O gradiente de um escalar f em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (4.33)$$

Assim, devido a simetria esférica, (4.32) se torna

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (4.34)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{dr}. \quad (4.35)$$

A equação de Poisson nos fornece um resultado para o laplaciano do campo gravitacional ϕ . Como o laplaciano em coordenadas esféricas aplicado em um campo escalar f é dado por

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (4.36)$$

a equação (4.30) se torna

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi r^2 G \rho, \quad (4.37)$$

que pode-se integrar de 0 a r , levando a

$$\int_0^r \frac{d}{dr'} \left(r'^2 \frac{d\phi}{dr'} \right) dr' = 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (4.38)$$

e, assim,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (4.39)$$

Com (4.39), a equação (4.35) se torna

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G \rho}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (4.40)$$

Se define a equação da continuidade da massa por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (4.41)$$

que representa a massa da estrela contida em um raio r . Portanto, é possível escrever a equação (4.40) como

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} = -\rho(r)g(r), \quad (4.42)$$

onde $g(r)$ é o campo gravitacional no raio r , definido em (4.22).

A equação (4.42) apresenta a condição de equilíbrio hidrostático para estrutura estelar com simetria esférica e sem contração ou expansão. Essa condição indica que a pressão por si só não sustenta o equilíbrio, mas sim seu gradiente. Como os parâmetros $M(r)$, $\rho(r)$ e r são sempre positivos, esse gradiente será negativo, portanto a pressão diminui à medida que o raio aumenta. A continuidade da massa (4.41) e a equação de equilíbrio hidrostático (4.42) caracterizam a estrutura mecânica da estrela.

A pressão da equação (4.42) é a pressão total do sistema, que pode ter diversas origens. Nas estrelas em que a descrição clássica funciona, essa pressão advém do gás e da radiação dentro da estrutura. Assim,

$$P = P_{\text{gás}} + P_{\text{radiação}} = \frac{k_B \rho T}{\mu m_u} + \frac{aT^4}{3}, \quad (4.43)$$

onde μ é o peso molecular médio, $m_u = 1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ é a unidade de massa atômica² e a é uma constante definida a partir da constante de Stefan-Boltzmann, que vale $a = 4\sigma/c = 8\pi k_B^4/15h^3c^3$.

4.3 Pressão e temperatura

Obter uma equação que descreva o perfil da pressão e da temperatura é uma tarefa complexa, pois requer a determinação da equação de estado, que descreve o comportamento da densidade, sendo uma função do raio r . No entanto, é possível construir uma função considerando uma densidade para toda estrutura e realizar estimativas dessas variáveis a partir da equação de equilíbrio hidrostático. Ao considerar uma densidade média $\bar{\rho}$ para toda a configuração,

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}, \quad (4.44)$$

a equação da continuidade se torna

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}. \quad (4.45)$$

² A unidade de massa atômica é uma unidade de medida padronizada que é usada para expressar massas atômicas e moleculares em uma escala relativa.

Assim, a equação de equilíbrio hidrostático pode se integrada de r a R ,

$$\begin{aligned}\int_r^R \left(\frac{dP}{dr'} \right) dr' &= - \int_r^R \frac{GM(r')\bar{\rho}}{r'^2} dr' \\ P(R) - P(r) &= -\frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}^2 \int_r^R r' dr' \\ P(r) &= \frac{GM\bar{\rho}}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),\end{aligned}\quad (4.46)$$

onde $P(R) \simeq 0$, já que $P(R) \ll P(r=0) = P_c$. Esta equação descreve o perfil da pressão no contexto estudado.

A pressão central, no núcleo da estrela, é calculada tomando o limite $r \rightarrow 0$ na equação (4.46),

$$P_c = \frac{GM\bar{\rho}}{2R}. \quad (4.47)$$

Podemos aplicar isso para o Sol, em que a densidade média é

$$\bar{\rho}_\odot = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3} \simeq 1408 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad (4.48)$$

e a pressão central é

$$P_c^\odot = \frac{GM_\odot\bar{\rho}_\odot}{2R_\odot} \simeq 1,3 \cdot 10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \quad (4.49)$$

para $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ e $R_\odot = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Para encontrar uma expressão para a temperatura, considera-se que as estrelas são compostas essencialmente por hidrogênio, de forma que $m_u \approx m_H$, em que m_H é a massa do hidrogênio. Além disso, o peso molecular médio considerado é igual a $1/2$. Em conjunto a essas hipóteses, é necessário uma conexão entre pressão e temperatura, que é estabelecida por uma equação de estado. Consideraremos aqui a equação de estado do gás ideal,

$$P = nk_B T = \frac{\rho}{\mu m_u} k_B T = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T, \quad (4.50)$$

onde $n = \rho/\mu m_H$ é o número de partículas por volume em que todas possuem o peso molecular μ e $\mathcal{R} = k_B/m_H$ é a constante universal dos gases. É importante destacar que o peso molecular médio μ é adimensional.

Assumindo que a pressão é descrita pela equação (4.46), a temperatura pode ser expressa em função do raio como

$$T(r) = \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{GM}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (4.51)$$

e, de forma análoga à pressão central, em $r \rightarrow 0$, obtemos a temperatura central T_c ,

$$T_c = \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{GM}{2R}. \quad (4.52)$$

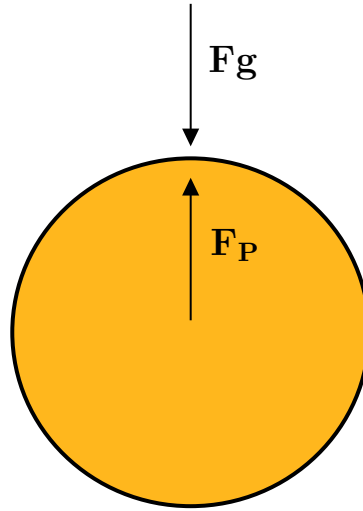


Figura 14 – Forças de origem gravitacional, \mathbf{F}_g , e de pressão, \mathbf{F}_P , atuando em uma camada de uma estrela.

que para o Sol é

$$T_c^\odot = \frac{m_H}{2k_B} \frac{GM_\odot}{2R_\odot} \simeq 5,8 \cdot 10^6 \text{ K}, \quad (4.53)$$

em que para a massa do hidrogênio $m_H \approx m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, sendo m_p a massa do próton. Essa temperatura obtida é uma aproximação, visto que foi utilizada uma densidade média para toda estrutura. O resultado real é aproximadamente $T_c^\odot \simeq 1,6 \cdot 10^7 \text{ K}$ (MACIEL, 2018).

4.4 Perturbações no equilíbrio hidrostático

Para a obtenção da equação de equilíbrio hidrostático clássica, são desconsiderados os efeitos de rotação, campos magnéticos, convecção e variações temporais (como oscilações, perdas de massa e ventos estelares). Esses efeitos podem causar desvios no equilíbrio estelar ou na simetria esférica. Apesar disso, em contextos onde tais fatores estão presentes, a estrela pode ainda ser considerada estável.

Uma estrela pode sofrer expansões e contrações, mas mesmo assim se manter coesa e não colapsar. Analisando a equação de equilíbrio hidrostático, percebe-se que a expansão ocorrerá se o gradiente da pressão for maior que a força gravitacional.

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| > \frac{GM(r)}{r^2} \text{ (expansão)}, \quad \frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| < \frac{GM(r)}{r^2} \text{ (contração)}. \quad (4.54)$$

A Figura 14 ilustra o balanço de forças em uma camada de uma estrela. Esta camada pode estar em movimento ou em repouso. De maneira geral, a equação de movimento pode ser expressa pela segunda lei de Newton, que nesse contexto é:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_g = \left(-\frac{m}{\rho} \nabla P - \frac{GMm}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} = m\mathbf{a}. \quad (4.55)$$

Então, a aceleração é

$$a = \ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}. \quad (4.56)$$

Podemos imaginar uma situação exagerada em que uma dessas forças envolvidas no equilíbrio hidrostático desapareça repentinamente e ocorra um colapso. Se o gradiente de pressão é nulo, aceleração será calculada por

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (4.57)$$

Essa equação pode ser integrada,

$$\int \frac{d^2r}{dt^2} dr = - \int \frac{GM}{r^2} dr, \quad (4.58)$$

onde termo à direita resulta em GM/R e o termo à esquerda pode ser desenvolvido como

$$\int \frac{d^2r}{dt^2} dr = \int \frac{d^2r}{dt^2} \frac{dr}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2. \quad (4.59)$$

Retornando em (4.57), tem-se

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2}, \quad (4.60)$$

que pode ser integrada novamente,

$$\int dr = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2} dt, \quad (4.61)$$

resultando em

$$R = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2}. \quad (4.62)$$

O tempo apresentado nessa equação é chamado de tempo de queda livre³, denotado por t_{ql} , e representa a escala de tempo em que uma estrela colapsaria sob a ação da força gravitacional. Esse tempo é definido por

$$t_{\text{ql}} = \left(\frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2}. \quad (4.63)$$

No caso de não haver força gravitacional, ocorreria uma explosão. Nesse contexto, define-se o tempo de explosão, denotado por t_{expl} , como

$$t_{\text{expl}} = R \left(\frac{\rho}{2P} \right)^{1/2}. \quad (4.64)$$

³ Esse tempo apresenta variações em sua nomenclatura, podendo ser chamado de tempo dinâmico como em [FILHO; SARAIVA\(2017\)](#).

Para o equilíbrio hidrostático ocorrer, a condição $t_{\text{ql}} \approx t_{\text{expl}}$ deve ser cumprida. Isso é chamado de escala de tempo hidrodinâmico,

$$t_{\text{hidr}} \approx \left(\frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2} \approx R \left(\frac{\rho}{2P} \right)^{1/2}, \quad (4.65)$$

que corresponde ao tempo em que uma estrela responde à perturbações no equilíbrio hidrostático, que, para o Sol, é

$$t_{\text{hidr}} = \left(\frac{R_{\odot}^3}{2GM_{\odot}} \right)^{1/2} \approx 1127 \text{ s} \approx 19 \text{ min.} \quad (4.66)$$

Num contexto real, as duas forças estão coexistindo. Assim, uma abordagem mais geral é dada pela equação (4.56) com auxílio de (4.54), que pode ser reescrita como

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right|}{\frac{GM}{r^2}} \right) = -f \frac{GM}{r^2}, \quad f \equiv \left(1 - \frac{\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right|}{\frac{GM}{r^2}} \right). \quad (4.67)$$

Como o movimento é acelerado, a equação de movimento é escrita

$$dr = \dot{r}_0 t + \frac{\ddot{r} dt^2}{2}. \quad (4.68)$$

Ao considerar que a partícula em queda livre ($\dot{r}_0 = 0$) percorrerá uma parte do raio, $dr = \alpha R$, onde α representa o quanto do raio total a partícula percorreu. Assim,

$$dr = \frac{\ddot{r} dt^2}{2} = \alpha R. \quad (4.69)$$

Unindo esse resultado com a equação (4.67), pode-se escrever o tempo que a estrutura oscila um comprimento de raio αR como

$$t \equiv dt = \left(\frac{2\alpha R}{|\ddot{r}|} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\alpha R^3}{fGM} \right)^{1/2}. \quad (4.70)$$

Para determinar f é necessário estabelecer uma relação entre $\rho^{-1}|dP/dr|$ e GM/r^2 . A equação (4.67) funciona para o caso em que não há equilíbrio hidrostático, de modo que podemos assumir, a partir de (4.42), um desvio de 1%,

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| \simeq 0,99 \frac{GM}{r^2}, \quad (4.71)$$

que, substituindo em (4.67), tem-se

$$\ddot{r} = -0,01 \frac{GM}{r^2}. \quad (4.72)$$

Em conjunto à isso, para obtermos uma estimativa, também podemos considerar uma variação de 10% do raio da estrela, $\alpha \simeq 0,1$, então

$$t = \left(\frac{20R^3}{GM} \right)^{1/2}. \quad (4.73)$$

Para o Sol

$$t = \left(\frac{20R_{\odot}^3}{GM_{\odot}} \right)^{1/2} \approx 7127 \text{ s} \approx 119 \text{ min.} \quad (4.74)$$

Ou seja, através da relação estabelecida entre a força com origem na pressão e a força gravitacional se determina o desvio do equilíbrio hidrostático e, conseqüentemente, f . Um desvio de 1%, causando 10% de alteração do raio da estrela, levaria aproximadamente duas horas. Portanto, é possível estipular um tempo associado a valores fixos de f e α . Percebe-se que é uma escala de tempo muito curta se comparado ao tempo que as estrelas são estáveis.

4.5 Perturbações na simetria esférica

A força centrípeta gerada pela rotação faz com que a estrela se achate nos polos e se expanda no equador, assumindo uma forma elipsoidal. Para analisarmos esse caso vamos supor uma partícula de massa m na superfície, $r = R$, em rotação. A força centrípeta, denotada por \mathbf{F}_c , é dada por

$$\mathbf{F}_c = m\mathbf{a}_c = m \frac{v^2}{R} (-\hat{\mathbf{r}}) = -m\omega^2 r \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.75)$$

onde \mathbf{a}_c é a aceleração centrípeta, v é velocidade linear e ω a frequência angular. Assim, pela segunda lei de Newton, tem-se

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c \\ &= \left(-\nabla P \frac{m}{\rho} - \frac{GMm}{r^2} - m\omega^2 r \right) \hat{\mathbf{r}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GMm}{r^2} - m\omega^2 r \quad (4.76)$$

Para a simetria esférica ser mantida, deve satisfazer

$$\frac{|\mathbf{F}_c|}{|\mathbf{F}_g|} \ll 1 \Rightarrow \omega^2 \ll \frac{GM}{R^3}. \quad (4.77)$$

Como a velocidade angular se relaciona com o período de rotação t_r por $\omega = 2\pi/t_r$, tem-se

$$t_r \gg \left(4\pi^2 \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}, \quad (4.78)$$

que pode ser relacionado como o tempo hidrodinâmico apresentado na equação (4.65),

$$t_r \gg (8\pi^2)^{1/2} t_{\text{hidr}}. \quad (4.79)$$

Retomando o exemplo do Sol, que possui um período de rotação diferencial⁴ médio de 27-28 dias, aproximadamente 2,332,800 segundos, correspondendo a uma frequência

⁴ A rotação diferencial ocorre quando diferentes regiões de um objeto em rotação têm diferentes velocidades angulares. Isso só é possível em líquidos ou gases.

angular de $\omega_{\odot} \approx 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, as quantidades t_r^{\odot} e ω_{\odot} satisfazem às condições estabelecidas em (4.77) e (4.79), respectivamente.

Assim, ao estudar uma estrela aleatória, para saber em qual contexto utilizar a simetria esférica em sua modelagem é necessário que tal estrela satisfaça as condições apresentadas nessa seção. Para maioria das estrelas, o desvio da simetria esférica pode ser ignorado. Contudo, algumas estrelas (anãs brancas e estrelas de nêutrons) giram rapidamente e os efeitos da rotação devem ser incluídos nas equações de estrutura.

5 Teorema do Virial

O Teorema do Virial desempenha papel crucial no estudo da estabilidade e evolução estelar, fornecendo uma conexão entre a energia cinética e a energia potencial gravitacional. Em essência, o teorema afirma que, para um sistema físico com variáveis canônicas $q_i(t)$ e $p_i(t)$ limitadas (ou seja, finitas para qualquer instante de tempo t), e cujos valores médios $\sum_i q_i \partial H / \partial q_i$ e $\sum_i p_i \partial H / \partial p_i$ existem independentemente, estes valores são iguais.

Para demonstrar essa relação, define-se a quantidade

$$G(t) = \sum_i p_i(t) q_i(t), \quad (5.1)$$

que, derivando em relação ao tempo e utilizando as equações de Hamilton, tem-se

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i (\dot{p}_i q_i + p_i \dot{q}_i) = \sum_i \left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (5.2)$$

O valor médio dessa equação é

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \left\langle \sum_i \left(p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\rangle. \quad (5.3)$$

No entanto, o valor médio de dG/dt em um intervalo de tempo τ é nulo quando $\tau \rightarrow \infty$,

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 0. \quad (5.4)$$

Consequentemente, chega-se ao resultado central do Teorema do Virial

$$\left\langle \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\rangle = \left\langle \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\rangle, \quad (5.5)$$

em que o virial desse sistema é definido como

$$\mathcal{V} = - \sum_i q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (5.6)$$

5.1 Potencial Gravitacional

O Teorema do Virial pode ser aplicado num sistema em que as partículas desse sistema estão sujeitas ao potencial gravitacional. Nesse cenário, o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = K + \Omega = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r}, \quad (5.7)$$

onde K representa a energia cinética e Ω a energia potencial gravitacional. Em coordenadas cartesianas, as coordenadas generalizadas q_i e os momentos generalizados p_i são,

respectivamente, as coordenadas r e o momento linear p do sistema. Assim, pelo Teorema do Virial, tem-se

$$\left\langle p \frac{\partial H}{\partial p} - r \frac{\partial H}{\partial r} \right\rangle = \left\langle pv - r \frac{GMm}{r^2} \right\rangle = \left\langle mv^2 - \frac{GMm}{r} \right\rangle, \quad (5.8)$$

que nos leva a

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 2 \langle K \rangle + \langle \Omega \rangle. \quad (5.9)$$

Além disso, é possível escrever a função $G(t)$ como

$$G(t) = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i, \quad (5.10)$$

em que p_i e r_i são o momento linear e as coordenadas da partícula i em um sistema de N -corpos de massa m_i . Essa função pode ser expressa em termos do momento de inércia, que quantifica a resistência à alteração do estado de movimento de um corpo em rotação,

$$G(t) = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i r_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt}, \quad (5.11)$$

onde o momento de inércia é $I = \sum_i m_i r_i^2$. Assim, chega-se em

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 2 \langle K \rangle + \langle \Omega \rangle. \quad (5.12)$$

Um sistema em equilíbrio é obtido quando a energia é conservada, ou seja, $dG/dt = 0$. Portanto, o Teorema do Virial aplicado ao contexto gravitacional leva a

$$2 \langle K \rangle + \langle \Omega \rangle = 0. \quad (5.13)$$

Em geral, as medidas instantâneas das energias cinéticas e potencial são suficientes para satisfazer o Teorema do Virial, logo, desse teorema $2K + \Omega = 0$.

O teorema apresentado estabelece uma relação entre a energia cinética e potencial de um sistema, mas não fornece detalhes sobre a estrutura interna de uma estrela. Sabe-se que a energia cinética está diretamente relacionada à temperatura do sistema e, conseqüentemente, à pressão, cuja origem é crucial na caracterização estelar. A relação entre a pressão e a temperatura é determinada por uma equação de estado, que varia conforme o contexto.

Para aplicar o Teorema do Virial ao cenário estelar, é necessário reformulá-lo em termos da pressão. Partindo da equação de equilíbrio hidrostático, (4.42), multiplicando por $4\pi r^3$ e integrando de 0 a R , tem-se

$$\int_0^R \left(\frac{dP}{dr} \right) 4\pi r^3 dr = - \int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} 4\pi r^3 dr. \quad (5.14)$$

O termo à esquerda é integrado por partes,

$$\int_0^R \left(\frac{dP}{dr} \right) 4\pi r^3 dr = 4\pi r^3 P \Big|_0^R - \int_0^R 12\pi r^2 P dr, \quad (5.15)$$

e o elemento $4\pi r^3 P|_0^R$ desaparece pois no limite inferior o $r = 0$ e no limite superior tem-se $P(R) \simeq 0$. Assim, segue

$$\int_0^R 12\pi r^2 P dr = \int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} 4\pi r^3 dr. \quad (5.16)$$

O termo à direita caracteriza o negativo da energia gravitacional, $-\Omega$. Para uma massa m contida em uma esfera, $m = 4\pi r^3 \rho/3$, logo $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Assim, (5.16) torna-se

$$-\Omega = \int_0^M \frac{GM}{r} dm = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm. \quad (5.17)$$

Dessa forma, o Teorema do virial se escreve como

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = \Omega + 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm. \quad (5.18)$$

Analisando a expressão (5.17), o termo Ω representa a energia potencial de todos os elementos de massa dm da estrela – normalizado de zero ao infinito. A energia $-\Omega$, sendo positiva, é a energia necessária para expandir todas as cascas de massa dm para o infinito e é liberada quando a configuração estelar se forma a partir de um meio infinitamente distribuído. A medida que ocorrem expansões e contrações nas camadas internas das estrelas, a energia potencial gravitacional Ω aumenta ou diminui, respectivamente (KIPPENHAHN; WEIGERT; WEISS, 2012).

5.2 Energia Interna

A equação (5.18) estabelece uma relação entre a energia potencial gravitacional, a pressão e a densidade do sistema. Podemos combinar essa equação com a equação de estado de um gás ideal, apresentada em (4.50), e descobrir como Ω se relaciona com a energia interna u de um sistema gravitacional. No entanto, antes de prosseguir, é fundamental entender como u está relacionada com P e ρ .

O Teorema da Equipartição afirma que a energia cinética média das partículas de um gás ideal a temperatura T é $3k_B T/2$. Assim, a energia interna por unidade de massa de um gás com N partículas e massa M , pequena o suficiente para que não haja variação da temperatura, é

$$u = \frac{N}{M} \frac{3}{2} k_B T, \quad (5.19)$$

em que o número de partículas N é determinado pela razão da massa total M do gás pela massa média das partículas que compõem o gás (peso molecular médio \times unidade de massa atômica),

$$N = \frac{M}{\mu m_u}. \quad (5.20)$$

Novamente consideramos $m_u \approx m_H$ e, conseqüentemente, (5.19) torna-se

$$u = \frac{3 k_B T}{2 \mu m_H}. \quad (5.21)$$

Comparando (5.21) com (4.50), obtém-se

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2}{3} u, \quad (5.22)$$

que substituindo (5.18), chega-se a

$$-\Omega = 2 \int_0^M u \, dm, \quad (5.23)$$

que para U sendo a energia interna total da estrela, definida por

$$U \equiv \int_0^M u \, dm, \quad (5.24)$$

toma a forma

$$-\Omega = 2U. \quad (5.25)$$

Essa versão do Teorema do Virial mostra uma relação entre valores instantâneos da energia potencial gravitacional e a energia interna total da configuração. Derivando (5.25) com respeito ao tempo, temos que

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt} = 0. \quad (5.26)$$

Analisando essa expressão, vemos que, em caso de contração da estrela, a energia potencial diminui ($\dot{\Omega}$), e metade dessa energia é convertida em energia interna. Na expansão, Ω aumenta, logo a energia interna é convertida em energia potencial gravitacional.

A energia total W do sistema é definida pela soma das energias que o compõem. Portanto, nesse caso,

$$W = \Omega + U = \frac{\Omega}{2}, \quad (5.27)$$

e a sua derivada em relação ao tempo é

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (5.28)$$

Portanto, uma variação na energia total corresponde à metade da variação da energia potencial gravitacional. Logo, deve-se entender para onde vai a outra metade.

Olhando para energia potencial gravitacional, escrita em (5.16), Ω é, por definição, negativa e diminui à medida que a distância do objeto que produz o campo gravitacional aumenta. Assim, por (5.27), pode-se concluir que para uma estrutura gravitacionalmente ligada, $W < 0$.

Além disso, conforme abordado no Capítulo 1, qualquer corpo que possua temperatura emite radiação térmica. Dessa forma, as estrelas estão continuamente irradiando e, portanto, perdendo energia através da sua luminosidade L . Como resultado, a taxa de variação da energia total com o tempo é negativa e a energia perdida é transformada em luz. Assim, pelo princípio da conservação da energia, tem-se

$$\frac{dW}{dt} + L = 0, \quad (5.29)$$

que em conjunto com (5.28), se escreve

$$L = -\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (5.30)$$

Essa equação mostra que a energia perdida da estrela através da luminosidade é metade da variação da energia gravitacional perdida no processo de contração da estrela. Olhando para equação (5.26), percebemos que $L = \dot{U}$, então $L + \dot{U} = -\dot{\Omega}$.

Podemos estimar intervalo de tempo em que a energia potencial gravitacional e a energia interna da estrela podem sustentar a perda de energia pela irradiação. Esse intervalo é denominado escala de tempo de Kelvin-Helmholtz (t_{KH}) e é obtido integrando (5.30) no tempo,

$$\int L dt = \left| \int -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) dt \right|, \quad (5.31)$$

resultando em

$$t_{KH} = \frac{GM^2}{2LR}. \quad (5.32)$$

Para o Sol: $t_{KH} \simeq 4,95 \cdot 10^4 \text{ s} = 1,57 \cdot 10^7$ anos. Como sabemos que o tempo que o Sol permanecerá na sequência principal é da ordem de 10^{10} anos, conclui-se que a energia gravitacional e a energia interna não são suficientes pra manter a luminosidade do Sol por esse período, logo, falta uma fonte de energia para manter essa luminosidade. Portanto, outra fonte de energia é necessária, que provém da fusão nuclear no núcleo das estrelas.

A equação de estado de um gás ideal pode ser escrita como

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{\mu} T = (C_P - C_V)T = (\gamma - 1)C_V T = (\gamma - 1)u, \quad (5.33)$$

onde C_P e C_V são os calores específicos por unidade de massa. Onde utilizamos as relações termodinâmicas $\mathcal{R}/\mu = C_P - C_V$, $\gamma = C_P/C_V$ (coeficiente adiabático) e $u = C_V T$. Com isso o Teorema do Virial e a energia total, se tornam, respectivamente,

$$-\Omega = 3(\gamma - 1)U, \quad (5.34)$$

e

$$W = \left[\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \right] \Omega. \quad (5.35)$$

A equação (5.34) se torna (5.25) quando $\gamma = 5/3$. Logo, a forma do Teorema do Virial apresentada em (5.25) só é válida para um gás ideal monoatômico. Além disso, como para estrela estar ligada gravitacionalmente deveremos ter

$$W < 0 \rightarrow \left[\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \right] \Omega < 0 \rightarrow \left[\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \right] > 0 \rightarrow 3\gamma - 4 > 0, \quad (5.36)$$

que determina um limite inferior para estabilidade da estrutura em

$$\gamma > \frac{4}{3}. \quad (5.37)$$

Se $\gamma < \frac{4}{3}$, a estrela possui energia suficiente para dispersar parcial ou completamente sua estrutura. Por outro lado, quando $\gamma = \frac{4}{3}$, a energia total é nula, indicando que a estrela está fracamente ligada gravitacionalmente. Isso significa que qualquer pequena perturbação poderia desencadear o colapso ou a dispersão do gás. Este cenário ocorre em estrelas onde a pressão de radiação ou a pressão de partículas relativísticas predominam (KIPPENHAHN; WEIGERT; WEISS, 2012).

5.3 Energia Nuclear

Como demonstra a escala de tempo de Kelvin-Helmholtz (5.32), a contração gravitacional não é suficiente para sustentar a estabilidade mecânica da estrela durante todo o período em que ela permanece na sequência principal. A fonte de energia que permite essa estabilidade é o processo de fusão nuclear, que aumenta a energia interna da estrela e, consequentemente, contribui para a pressão, contrabalançando a força gravitacional.

A fusão nuclear consiste na união de dois átomos leves para formação de um átomo mais pesado. Nesse caso, a massa do átomo formado é menor que a soma da massa daqueles que o formaram devido à energia de ligação das partículas serem negativas. Ou seja, para um núcleo de número atômico Z e massa atômica A ,

$$m(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{B(Z, A)}{c^2}, \quad (5.38)$$

onde m_p é a massa de prótons, m_n é a massa de nêutrons do átomo e $B(Z, A)$ é a energia de ligação do núcleo, que nesse contexto decorre do potencial elétrico. Essa diferença de massa é convertida em energia, de acordo com $E = \Delta mc^2$. Para que a fusão ocorra, são necessárias temperaturas da ordem de 10^7 K, além de altas pressões, que permitem um grande número de colisões entre as partículas do sistema. Essas condições são encontradas nas regiões próximas ao núcleo estelar.

Existem três processos nucleares fundamentais para a geração de energia no interior de uma estrela: o ciclo próton-próton, que consiste na fusão de quatro núcleos de hidrogênio em um de hélio e ocorre em temperaturas próximas de $T \simeq 8 \cdot 10^6$ K; o ciclo CNO (Carbono-Nitrogênio-Oxigênio), em que esses elementos funcionam como catalisadores na conversão

de hidrogênio em hélio e dominam a produção de energia para temperaturas $T \geq 18 \cdot 10^6$ K; e a reação triplo- α , que transforma três núcleos de hélio (partículas α) em um núcleo de carbono. Essa síntese ocorre em estrelas que já converteram grande parte do hidrogênio em hélio.

A energia gerada pelo ciclo próton-próton tem uma dependência na temperatura elevada à quarta potência ($\epsilon_{p-p} \propto T^4$), enquanto o ciclo CNO apresenta uma dependência na temperatura elevada à vigésima potência ($\epsilon_{\text{CNO}} \propto T^{20}$). Dessa forma, estrelas em que o ciclo CNO predomina permanecerão menos tempo na Sequência Principal, já que liberam uma quantidade de energia significativamente maior em comparação àquelas em que o ciclo p-p é dominante. Isso ocorre em estrelas com aproximadamente $1,8 M_{\odot}$, o que permite dividir a Sequência Principal em duas regiões: superior ($M > 1,8 M_{\odot}$) e inferior ($M < 1,8 M_{\odot}$).

Tomando como exemplo a reação do ciclo p-p, que tem como resultado:



onde H representa o hidrogênio, ${}^4\text{He}$ um isótopo do hélio, e^+ o pósitron, ν_e o neutrino e γ a radiação gama. O hidrogênio possui uma massa de $m_H = 1,00784$ u, enquanto o hélio tem $m_{He} = 4,002602$ u, resultando em uma diferença de massa de $\Delta m = 4m_H - m_{He} = 0.028758$ u. Consequentemente, a energia liberada no interior de uma estrela durante uma reação completa do ciclo p-p é $\Delta E = \Delta mc^2 = 4,3 \cdot 10^{-12}$ J. Como o ciclo p-p contribui com 98% da produção total de energia no Sol, cuja luminosidade é $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$ W, a quantidade de ciclos p-p por segundo que devem ocorrer para essa luminosidade ser mantida é $L_{\odot}/\Delta E \simeq 9 \cdot 10^{37}$.

Uma estrela sai da sequência principal quando o hidrogênio do núcleo é consumido. Sendo a massa contida no núcleo correspondente a cerca de 10% da massa total da estrela, a energia de origem na fusão nuclear para manter a estrela na sequência principal é

$$E_n = \frac{0,1M}{4m_H} \Delta E, \quad (5.40)$$

onde a razão $0,1M/4m_H$ determina a quantidade de massa disponível no núcleo para realizar o ciclo próton-próton. Logo, podemos definir a escala de tempo nuclear t_n por

$$t_n = \frac{E_n}{L}, \quad (5.41)$$

onde L é a luminosidade. Para o Sol, $E_n \approx 1,26 \cdot 10^{44}$ J, logo, $t_n \approx 3,3 \cdot 10^{17}$ s $\approx 10^{10}$ anos. Ou seja, a energia nuclear permite que as estrelas permaneçam mais tempo em equilíbrio se comparado a uma situação onde haja apenas contração gravitacional.

Ao comparar as escalas de tempo definidas em (4.65), (5.32) e (5.41), é possível estabelecer a hierarquia

$$t_{\text{hidr}} \leq t_{KH} \leq t_n. \quad (5.42)$$

Quando uma das condições é violada, a estrela entra em um período de instabilidade, resultando em um colapso, até que retorne a um estado de equilíbrio.

5.4 Conservação da energia

As estrelas possuem um mecanismo de autorregulação intrínseco que garante sua estabilidade por longos períodos. Quando a temperatura do núcleo atinge níveis suficientes para iniciar a fusão nuclear do hidrogênio, a energia liberada aumenta a temperatura e a pressão internas, impulsionando a taxa de fusão. Esse aumento de pressão gera um desequilíbrio hidrostático, com a pressão superando levemente a gravidade, resultando na expansão do núcleo. A expansão diminui a densidade e a temperatura do núcleo, reduzindo a taxa de fusão nuclear. Conseqüentemente, a estrela perde energia através da luminosidade, iniciando um processo de contração que eleva a temperatura interna e reinicia o ciclo. Esses processos mantêm o equilíbrio dinâmico e impede o aumento descontrolado da taxa de fusão nuclear, garantindo sua estabilidade ao longo do tempo.

A luminosidade representa a energia perdida pela estrela por unidade de tempo. Assim, essa perda deve ser compensada por uma taxa produção de energia no interior. Essa produção vem da fusão nuclear, que mantém o equilíbrio hidrostático. Portanto, equação que descreve a conservação da energia é

$$L(r) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr, \quad (5.43)$$

onde $\epsilon(r)$ é a taxa de produção de energia ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). A luminosidade pode ser uma função complexa, dependendo de como a energia é produzida no interior estelar. Assim, tomando duas cascas esféricas no interior estelar, uma de raio r e outra de raio $r + dr$, a luminosidade, sendo dependente do raio, será, respectivamente, $L(r)$ e $L(r + dr)$. Dessa forma, se escreve

$$dL = L(r + dr) - L(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr, \quad (5.44)$$

ou

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r). \quad (5.45)$$

De forma geral, a taxa $\epsilon(r)$ depende da temperatura, da densidade e dos elementos que estão produzindo energia nas reações nucleares. Além disso, a equação (5.44) pode ser escrita em termos de um diferencial de massa $dm = 4\pi r^2 \rho dr$, então

$$\frac{dL}{dm} = \epsilon. \quad (5.46)$$

Para uma descrição mais detalhada da luminosidade no interior estelar é importante incorporar as análises dos processos de transporte de energia que ocorrem nas estrelas, que fornecerá uma relação entre L e o gradiente de temperatura.

6 Transporte de energia

Na astrofísica, o transporte de energia é crucial para entender a estrutura e evolução das estrelas. No interior estelar, a energia gerada por reações nucleares no núcleo precisa ser transportada para a superfície, onde é irradiada para o espaço. Esse processo ocorre através de três mecanismos principais: condução, radiação e convecção. Neste capítulo caracterizaremos os dois últimos devido a relevância deles.

6.1 Radiação

As estrelas, em seu estado de equilíbrio, emitem uma luminosidade constante. Essa energia é transportada para superfície através de três mecanismos principais: radiação, condução e convecção. As equações que descrevem esse transporte ajudam a compreender a estrutura térmica e o fluxo energético dentro das estrelas.

A luminosidade é constante devido à conservação da energia. Como consideramos estrelas objetos estáticos e estáveis, conclui-se que não pode haver variação da energia total contida em cada camada da estrela, de forma que existe um equilíbrio entre os processos de emissão e absorção.

Os processos de emissão envolvem a transição eletrônica, onde um elétron "desce" de uma camada e emite um fóton como discutido na seção 3, e o espalhamento de fótons, que pode aumentar o número de fótons no feixe de luz, embora não seja um processo de emissão direta. Por outro lado, os processos de absorção, diretamente relacionados à opacidade do meio, incluem o "ligado-ligado", o "ligado-livre" e o "livre-livre".

Portanto, não ocorre um fluxo direto de fótons do centro para a superfície transportando energia à velocidade da luz. Em vez disso, os fótons são considerados partículas individuais que passam por múltiplos processos de emissão e absorção, seguindo um caminho aleatório (*random walk*), até eventualmente alcançarem a superfície.

Cada fóton percorre uma distância d , ao longo da qual ocorre uma mudança de energia entre o início e o fim de sua trajetória. Essa distância é conhecida como caminho livre médio l_f , onde o subscrito f refere-se ao fóton. A relação entre o deslocamento d e o caminho livre médio l_f é expressa por

$$d = l_f \sqrt{N}, \quad (6.1)$$

onde N é o número de interações que o fóton realiza ao longo de sua trajetória.

Observando a equação (6.1), nota-se que o transporte de energia via radiação não é simples. Por exemplo, no Sol, onde o caminho livre médio do fóton é $l_f \approx 2 \cdot 10^{-2}$ m

(KIPPENHAHN; WEIGERT; WEISS, 2012) e o raio do Sol é $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ m, o número de interações que um fóton realiza para percorrer do centro até a superfície é aproximadamente $1,2 \cdot 10^{21}$.

É crucial entender que um fóton não percorre todo o raio da estrela individualmente. O que o corre é uma série de milhões de interações entre fótons e átomos, que transportam energia ao longo do caminho. A reação pela qual os fótons emitidos pela superfície possuem energias menores do que os emitidos no núcleo estelar é devido à temperatura da região onde são emitidos. Assim sendo, é necessário encontrar uma equação de transporte de energia via radiação.

Para obter essa equação é necessário entender alguns aspectos fundamentais. A pressão de radiação depende diretamente da temperatura elevada à quarta potência, dada por $aT^4/3$

$$P_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{3}, \quad (6.2)$$

onde a é a constante de radiação, que vale $7,5657 \times 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^4$. O contraste térmico no interior estelar é notável, já que a temperatura central atinge milhões ou até bilhões de Kelvin, enquanto na superfície varia de milhares a centena de milhares. Essa diferença gera um gradiente de temperatura, que por sua vez induz um gradiente de pressão.

Para ilustrar o quão gradual é a variação de temperatura no interior estelar, podemos realizar uma estimativa simplificada. Considerando uma temperatura central de $T_c \approx 10^7$ K e uma temperatura superficial de $T_s \approx 10^4$ K, e utilizando o raio solar como referência, obtemos um gradiente de temperatura aproximado de

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \approx \frac{T_c - T_s}{R_{\odot}} \approx \frac{10^7 - 10^4 \text{ K}}{6,96 \cdot 10^8 \text{ m}} \approx 1,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}}. \quad (6.3)$$

Esse valor é extremamente baixo e indica que o interior estelar se encontra em um estado próximo ao equilíbrio térmico, com variações de temperatura muito sutis entre camadas, de forma que a radiação é emitida de uma região quase isotérmica.

O transporte de energia por radiação ocorre devido ao balanço: a radiação que se move para fora, proveniente de camadas ligeiramente mais quentes abaixo, encontra a radiação que se move para dentro, proveniente de camadas um pouco mais frias acima. Esse fluxo resultante é o responsável por transportar energia do núcleo para superfície.

Com base nisso, podemos analisar o transporte de energia radiativa dentro da estrela de forma simplificada, onde a propagação é unidimensional. Vamos considerar dois pontos que distam ds . A radiação, com um comprimento de onda específico (λ), que se propaga entre esses pontos, está sujeita aos processos de emissão (fótons emitidos pela vizinhança ou espalhados em direção ao feixe de luz) e absorção (fótons absorvidos pela vizinhança ou espalhados para fora do feixe de luz). A absorção é caracterizada pelo

coeficiente de absorção por volume κ_λ e a emissão pelo coeficiente de emissão j_λ ¹. Então, a variação na intensidade da radiação dI_λ ao longo da distância percorrida ds pode ser expressa por

$$I_\lambda(s + ds) - I_\lambda(s) = dI_\lambda = j_\lambda \rho ds - \kappa_\lambda \rho I_\lambda ds, \quad (6.4)$$

que pode ser escrita como

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}. \quad (6.5)$$

A taxa de ocorrência de processos de emissão e absorção determinam a velocidade que a intensidade do feixe muda. Assim, é possível introduzir a razão entre os coeficientes de emissão e absorção, chamado de função fonte,

$$S \equiv \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}. \quad (6.6)$$

Dessa forma, (6.5) torna-se

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda, \quad (6.7)$$

que é a equação de transporte radiativo. Em situações onde a intensidade permanece constante, ela se iguala à função fonte ($I_\lambda = S_\lambda$). No entanto, se a intensidade for maior que a função fonte ($I_\lambda > S_\lambda$), a intensidade diminui à medida que a radiação se propaga. Por outro lado, se a intensidade for menor que a função fonte ($I_\lambda < S_\lambda$), a intensidade aumenta com a distância percorrida.

Vale ressaltar que, em uma perspectiva macroscópica do interior estelar existe um fluxo de energia radial. Caso contrário, a luz das estrelas não chegaria até nós.

Para encontrar uma solução para a equação de transporte radiativo, podemos simplificar o problema assumindo que os coeficientes de emissão e absorção são constantes. Consideremos também um feixe de luz com intensidade inicial $I_\lambda(0)$ em $s = 0$, que percorrerá uma distância Δs . Assim, podemos integrar (6.5) de 0 à Δs

$$\int_0^{\Delta s} \left(\frac{dI_\lambda}{ds} \right) ds = \int_0^{\Delta s} (j_\lambda \rho - \kappa_\lambda \rho I_\lambda) ds, \quad (6.8)$$

de forma que

$$\int_{I_\lambda(0)}^{I_\lambda(\Delta s)} \frac{dI_\lambda}{j_\lambda \rho - \kappa_\lambda \rho I_\lambda} = \int_0^{\Delta s} ds. \quad (6.9)$$

A parte à esquerda da equação pode se integrada por substituição, fazendo $u = j_\lambda \rho - \kappa_\lambda \rho I_\lambda$ e $du/dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda$. E assim, segue que

$$-\int \frac{du}{u} = \int_0^{\Delta s} \kappa_\lambda \rho ds \Rightarrow -\ln |u| = \kappa_\lambda \rho \Delta s + C_1, \quad (6.10)$$

¹ A unidade de κ_λ e j_λ são, respectivamente, m^{-1} e $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

e, portanto

$$\begin{aligned}
\left[-\ln |j_{\lambda}\rho - \kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda}| \right]_{I_{\lambda}(0)}^{I_{\lambda}(\Delta s)} &= \kappa_{\lambda}\rho\Delta s + C_1 \\
-\ln |j_{\lambda}\rho - \kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda}(\Delta s)| + \ln |j_{\lambda}\rho - \kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda}(0)| &= \kappa_{\lambda}\rho\Delta s + C_1 \\
\left| \frac{j_{\lambda}\rho - \kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda}(\Delta s)}{j_{\lambda}\rho - \kappa_{\lambda}\rho I_{\lambda}(0)} \right| &= e^{-\kappa_{\lambda}\rho\Delta s - C_1} \\
\frac{1 - \frac{\kappa_{\lambda}}{j_{\lambda}} I_{\lambda}(\Delta s)}{1 - \frac{\kappa_{\lambda}}{j_{\lambda}} I_{\lambda}(0)} &= \pm e^{-C_1} e^{-\kappa_{\lambda}\rho\Delta s}. \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Definindo $A = \pm e^{-C_1}$ e isolando $I_{\lambda}(\Delta s)$, então obtém-se

$$I_{\lambda}(\Delta s) = \left(-\frac{j_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}} + I_{\lambda}(0) \right) A e^{-\kappa_{\lambda}\rho\Delta s} + \frac{j_{\lambda}}{\kappa_{\lambda}}. \quad (6.12)$$

Se $A = 1$, a equação fica

$$I_{\lambda}(\Delta s) = I_{\lambda}(0)e^{-\kappa_{\lambda}\rho\Delta s} + S_{\lambda} \left(1 - e^{-\kappa_{\lambda}\rho\Delta s} \right). \quad (6.13)$$

Se tratando do transporte de radiação, um conceito importante é a profundidade ótica, que é definida como

$$d\tau_{\lambda} = -\kappa_{\lambda}\rho ds, \quad (6.14)$$

que é uma medida adimensional que descreve a quantidade de radiação que é absorvida ou espalhada pelo meio, ou o quanto o meio é opaco para determinados comprimentos de onda. Integrando a profundidade ótica de um raio de luz que parte da posição inicial $r = 0$ e percorre uma distância $r = \Delta s$, tem-se

$$\int_0^{\Delta s} d\tau_{\lambda} = - \int_0^{\Delta s} \kappa_{\lambda}\rho ds \Rightarrow \Delta\tau(\lambda) = \tau_{\lambda}(\Delta s) - \tau_{\lambda}(0) = -\kappa_{\lambda}\rho\Delta s, \quad (6.15)$$

de forma que $\Delta s < 0$, o que implica que a medida que a luz sobe na estrela a profundidade ótica diminui e o meio fica menos opaco. Podemos considerar que na superfície $\tau_{\lambda}(\Delta s) = 0$, visto que após atingir $r = R$ a luz atingirá o vácuo e viajará sem impedimento. Assim, podemos escrever

$$\tau_{\lambda}(0) = \kappa_{\lambda}\rho\Delta s. \quad (6.16)$$

Com esse resultado, a equação (6.12) se torna

$$I_{\lambda}(\Delta s) = I_{\lambda}(0)e^{-\tau_{\lambda}(0)} + S_{\lambda} \left(1 - e^{-\tau_{\lambda}(0)} \right). \quad (6.17)$$

O primeiro caso que podemos encontrar uma solução para a equação de transporte radiativo acima é o opticamente fino ($\tau_{\lambda}(0) \ll 1$). Para isso, utilizaremos da expansão em série de Taylor da função $f(x) = e^{-x}$, em que $x = \kappa_{\lambda}\rho\Delta s$, que é

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (6.18)$$

e no caso que $x \ll 1$ podemos ignorar os termos de ordem maior que dois. Assim sendo, obtemos

$$I_\lambda(\Delta s) \approx I_\lambda(0) + \tau_\lambda(0)S_\lambda, \quad (6.19)$$

que mostra que no caso opticamente fino quase toda radiação produzida na camada Δs contribui para radiação que emergirá às camadas acima, visto que a absorção é insignificante.

O outro caso a ser analisado é o opticamente espesso ($\tau_\lambda(0) \gg 1$), que é facilmente obtido, resultando em

$$I_\lambda(\Delta s) \approx S_\lambda, \quad (6.20)$$

que mostra que a radiação incidente é toda absorvida e a radiação que emergirá às camadas superiores é determinada pela função fonte.

Além desses, o outro caso a ser analisado é o que a camada está em equilíbrio termodinâmico e não há fluxo de energia entre as regiões internas da estrela. Assim, da equação (6.7), temos que

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda = 0, \quad (6.21)$$

e, assim, obtém-se

$$I_\lambda = S_\lambda. \quad (6.22)$$

No caso que há equilíbrio termodinâmico, a intensidade é descrita pela Lei de Planck, $I_\lambda = u(\lambda)$, logo $S_\lambda = u(\lambda)$. Sendo assim,

$$j_\lambda = \kappa_\lambda u(\lambda), \quad (6.23)$$

que é uma forma da lei de Kirchhoff (MACIEL, 2018).

A equação de transporte radiativo apresentada até o momento não fornece uma conexão com o gradiente de temperatura existente dentro da estrela. Para derivar essa relação entre o fluxo de radiação e o gradiente de temperatura precisamos descrever o campo de radiação no interior estelar. Assim sendo, descreveremos a intensidade específica em função do raio e do ângulo polar θ , $I_\lambda = I_\lambda(r, \theta)$. Então, a derivada da intensidade com respeito ao deslocamento s e considerando simetria azimutal ($d\phi/dr = 0$) é

$$\frac{dI_\lambda(r, \theta)}{ds} = \frac{\partial I_\lambda}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds}. \quad (6.24)$$

A transformação de coordenadas cartesianas para esféricas, assumindo que o movimento é retilíneo ($dy = dz = 0$), onde $dx = ds$, nos fornece

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad (6.25)$$

de forma que, combinando as equações (6.7) e (6.24), obtém-se

$$\cos \theta \frac{\partial I_\lambda}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\lambda}{\partial \theta} + \kappa_\lambda \rho I_\lambda - j_\lambda \rho = 0. \quad (6.26)$$

Essa equação pode ser escrita em termos da função fonte, tornando-se

$$\frac{\cos \theta}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{\kappa_{\lambda\rho r}} \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial \theta} + I_{\lambda} - S_{\lambda} = 0. \quad (6.27)$$

Uma análise importante a ser feita nesse contexto é olhando para o caminho livre médio do fóton, dado por

$$l_f = \frac{1}{\kappa_{\lambda\rho}}, \quad (6.28)$$

que nos permite escrever a equação de transporte radiativo como

$$l_f \cos \theta \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial r} - l_f \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial \theta} + I_{\lambda} - S_{\lambda} = 0. \quad (6.29)$$

Como o livre caminho médio de um fóton dentro de uma estrela é da ordem de $2 \cdot 10^{-1}$ m (KIPPENHAHM; WEIGERT; WEISS, 2012), então

$$l_f \cos \theta \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial r} \ll I_{\lambda} \text{ e } l_f \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial \theta} \ll I_{\lambda}. \quad (6.30)$$

Ou seja, os dois primeiros da equação (6.29) são pequenos, e, portanto, sua diferença também, o que implica que a diferença entre a intensidade I_{λ} e a função fonte S_{λ} também será. O significado disso é que as condições física variam pouco ao longo do livre caminho médio de um fóton, e o equilíbrio térmico é uma boa aproximação (MACIEL, 2018).

No contexto que há equilíbrio térmico $S_{\lambda} = u(\lambda)$ e $\partial u(\lambda)/\partial \theta = 0$, logo

$$I_{\lambda} = \rho_{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{du(\lambda)}{dr}, \quad (6.31)$$

onde o primeiro termo é a componente isotrópica e o segundo está associado à anisotropia, que resulta no fluxo ao longo da estrela.

Para calcularmos o fluxo, utilizaremos a definição

$$F = \int I \cos \theta d\omega, \quad (6.32)$$

onde ω representa o ângulo sólido e $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Assim, combinando essa equação com a equação (6.31), segue

$$\begin{aligned} F &= \int I \cos \theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\rho_{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{du(\lambda)}{dr} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi u(\lambda) \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta - 2\pi \frac{\cos \theta}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{du(\lambda)}{dr} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi u(\lambda) \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi} - 2\pi \frac{\cos \theta}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{du(\lambda)}{dr} \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \\ &\Rightarrow F = -\frac{4\pi}{3\kappa_{\lambda\rho}} \frac{du(\lambda)}{dr}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Como a distribuição $u(\lambda)$ é diretamente conectada com a lei de Stefan-Boltzmann, em que

$$u(\lambda) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{ac}{4\pi} T^4. \quad (6.34)$$

Logo,

$$\frac{du(\lambda)}{dr} = \frac{ac}{\pi} T^3 \frac{dT}{dr}, \quad (6.35)$$

que leva a relação entre o fluxo e o gradiente de temperatura,

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{dT}{dr}. \quad (6.36)$$

O fluxo tem relação direta com a luminosidade. Assim, substituindo o fluxo radiativo apresentado em (6.36) em (2.2), encontramos a luminosidade em função do gradiente de temperatura,

$$L = -\frac{16\pi ac}{3} \frac{r^2 T^3}{\kappa_{\lambda\rho}} \frac{dT}{dr}, \quad (6.37)$$

que é a última equação fundamental da estrutura da estrela. É importante ressaltar que essa equação é para o transporte de energia através da estrela é realizado via mecanismo de radiação. No contexto convectivo, o fluxo tomará outra forma.

6.2 Convecção

A energia flui continuamente no interior estelar por meio da radiação, seja pela emissão térmica ou pelo espalhamento de fótons em um feixe. Em contrapartida, o transporte por convecção depende do movimento de matéria em larga escala, impulsionado por diferenças de temperatura (gradiente de temperatura).

Dessa forma, a convecção exige o movimento do gás estelar. Nesta seção, vamos explorar as condições necessárias para que esse tipo de transporte de energia ocorra dentro das estrelas.

Para analisar o transporte de energia por convecção é necessário examinar algumas relações termodinâmicas que nos ajudarão a determinar as condições necessárias para que esse processo ocorra.

A termodinâmica utiliza variáveis termodinâmicas para analisar sistemas em equilíbrio (WRESZINSKI, 2018). Sua primeira Lei expressa a conservação da energia, estabelecendo que a variação da energia interna du de um sistema é determinado pelo balanço entre o calor transferido dq para o sistema e o trabalho realizado dW pelo sistema sobre sua vizinhança,

$$du = dq - dW. \quad (6.38)$$

Nesta equação, todas as grandezas estão expressas por unidade de massa.

A energia interna do sistema é uma função de estado, portanto, seu valor é determinado unicamente pelas condições atuais do gás, independentemente dos processos que o levaram a esse estado. Contudo, o calor e o trabalho não são funções de estado e, portanto, dependem dos processos ocorridos no sistema (CARROLL; OSTLIE, 2017).

Analisaremos aqui um gás ideal monoatômico. Para esse caso, a energia interna é dada em (5.21), que também assume a forma

$$u = \frac{3}{2} \frac{k_B}{\mu m_H} T = \frac{3}{2} n \mathcal{R} T, \quad (6.39)$$

onde n é o número de moles por unidade de massa (1 mole = N_A , onde $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro, que é o número de átomos necessários para obter a massa molar, encontrada na tabela periódica). Dessa equação, podemos afirmar que a energia interna é função da composição e da temperatura do sistema, $u = u(\mu, T)$.

Além disso, uma quantidade termodinâmica importante de ser estudada são os calores específicos², definidos matematicamente como

$$C_P \equiv \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_P \quad \text{e} \quad C_V \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V, \quad (6.40)$$

onde C_P e C_V são os calores específicos a pressão e volume constantes, respectivamente.

Um cenário comum no estudo de gases envolve um cilindro contendo gás, equipado com um pistão móvel na área transversal A . Esse pistão pode comprimir ou expandir o gás, realizando trabalho sobre ele ou recebendo trabalho dele, ao se deslocar uma distância dr . A pressão exercida nas extremidades do cilindro é dada pela força dividida pela área. Nesse contexto, o trabalho por unidade de massa pode ser expresso como

$$dW = \frac{F}{m} dr = \frac{PA}{m} dr = PdV, \quad (6.41)$$

onde definimos o volume específico (volume por unidade de massa) por $V \equiv 1/\rho$. Com isso, a Primeira Lei da Termodinâmica se torna

$$du = dq - PdV. \quad (6.42)$$

Para volume constante, $dV = 0$, essa equação fornece

$$du = du|_V = dq|_V, \quad (6.43)$$

que, com o auxílio de (6.40), (6.40) pode ser escrita como

$$du = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT. \quad (6.44)$$

² Calor específico é a quantidade de energia térmica (calor) necessária para elevar a temperatura de uma unidade de massa de uma substância em uma unidade de temperatura.

Podemos diferenciar (6.39) com respeito a temperatura, obtendo

$$du = \frac{3}{2}n\mathcal{R}dT, \quad (6.45)$$

que igualando com (6.44), se tem

$$du = \frac{3}{2}n\mathcal{R}dT = C_V dT \Rightarrow \left(\frac{3}{2}n\mathcal{R} - C_V\right) dT = 0. \quad (6.46)$$

Para essa afirmação ser verdadeira $dT = 0$ (não é esse caso que estamos buscando, visto que para descrição do transporte via convecção é necessário que haja variação de temperatura entre duas regiões) ou $3n\mathcal{R}/2 - C_V = 0$. Portanto,

$$C_V = \frac{3}{2}n\mathcal{R}. \quad (6.47)$$

É conveniente também calcular C_P para o caso que estamos analisando. Para isso, a Primeira Lei da Termodinâmica será escrita da seguinte maneira

$$du = dq - PdV = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P dT - P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT. \quad (6.48)$$

Além disso, a equação de estado dos gases ideais, com a relação $n\mathcal{R} = k_B/\mu m_H$ se torna

$$PV = n\mathcal{R}T, \quad (6.49)$$

que pode ser diferenciada, de forma que

$$VdP + PdV = \mathcal{R}Tdn + n\mathcal{R}dT. \quad (6.50)$$

Para pressão e n constante, essa expressão se torna

$$P \frac{dV}{dT} = n\mathcal{R}. \quad (6.51)$$

Com essa expressão e com (6.40), da equação (6.48) seguirá

$$C_V dT = C_P dT - n\mathcal{R}dT \rightarrow (C_V - C_P + n\mathcal{R})dT = 0, \quad (6.52)$$

e, assim, obtemos

$$C_P = C_V + n\mathcal{R}. \quad (6.53)$$

As relações estabelecidas em (6.47) e (6.53) são sempre válidas para o caso do gás ideal monoatômico.

Um parâmetro que será muito importante para análise de estrutura estelar é definido pela razão dos calores específico, que é o coeficiente adiabático representado pela letra γ ,

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V}. \quad (6.54)$$

Esse coeficiente é importante para análise de certos processos em uma transformação adiabática, tal como a compressibilidade e a variação da temperatura.

Uma transformação adiabática é aquela que não ocorre troca de calor entre o sistema e a vizinhança, isto é, $dq = 0$. Assim sendo, a Primeira Lei da Termodinâmica toma a seguinte forma

$$du = -PdV. \quad (6.55)$$

A parte da direita desta equação é obtida em (6.50) e, como podemos considerar o número de moles n constante, de forma que da equação (6.50), obtém-se

$$PdV + VdP = nRdT, \quad (6.56)$$

que, com o auxílio de (6.48) é válida, chega-se a

$$du = -PdV \rightarrow C_V dT = -PdV \rightarrow dT = -\frac{PdV}{C_V}. \quad (6.57)$$

Substituindo esse resultado em (6.56), temos

$$PdV + VdP = -\frac{nR}{C_V}PdV, \quad (6.58)$$

e, com a equação (6.53), podemos escrever

$$PdV + VdP = -\left(\frac{C_P - C_V}{C_V}\right)PdV = (1 - \gamma)PdV, \quad (6.59)$$

que leva a

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}. \quad (6.60)$$

Essa equação pode ser integrada

$$\begin{aligned} \gamma \int \frac{dV}{V} &= -\int \frac{dP}{P} \\ \gamma \ln |V| + C_1 &= -\ln |P| + C_2 \\ \ln |V^\gamma| + \ln |P| &= C_3 \\ \ln |PV^\gamma| &= C_3 \\ PV^\gamma &= \pm e^{C_3}, \end{aligned}$$

que resulta na relação adiabática entre pressão e volume,

$$PV^\gamma = K, \quad (6.61)$$

em que K é uma constante (C_1 , C_2 e C_3 são constantes e estão compiladas em K). Outras relações podem ser obtidas a partir da lei dos gases ideais.

Além de todas as relações obtidas até aqui, uma outra será necessária para desenvolver um critério para a convecção estelar, que é o gradiente de temperatura adiabático.

A equação do gás ideal, (4.50), permite afirmar que $P = P(\mu, \rho, T)$. Assim sendo, podemos diferenciar P com respeito ao raio r , de forma que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{\partial P}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dr} \\ &= -\frac{\mu k_B T}{\mu^2 m_H} \frac{d\mu}{dr} + \frac{k_B T}{\mu m_H} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho k_B}{\mu m_H} \frac{dT}{dr} \\ &= -\frac{P}{\mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

A expressão (6.61), junto a densidade específica $\rho = 1/V$, nos leva a

$$P = K\rho^\gamma, \quad (6.63)$$

que diferenciada com relação a r é

$$\frac{dP}{dr} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}, \quad (6.64)$$

mas como $\rho^\gamma = P/K$, tem-se

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr}, \quad (6.65)$$

que é o gradiente de pressão de uma expansão adiabática.

Além disso, podemos assumir μ como constante, isto é, $d\mu = 0$. Dessa forma, (6.62) se torna

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr}, \quad (6.66)$$

que combinada com (6.64), leva a relação

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dP}{dr}. \quad (6.67)$$

O subscrito *ad* designa o contexto adiabático. Esse gradiente pode tomar outras formas, como por exemplo, usando a equação dos gases ideais e a equação de equilíbrio hidrostático, obtemos

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mu m_H}{k_B} \frac{GM}{r^2}. \quad (6.68)$$

Também há uma terceira possibilidade. Utilizando as equações (4.22), (6.39), (6.53) (6.54), teremos

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\frac{g}{C_P}. \quad (6.69)$$

O estudo de processos adiabáticos são boas aproximações para casos em que há pouca troca de calor, visto que, na realidade, há transferência de calor em qualquer processo termodinâmico. Assim, nas seguintes análises utilizaremos o subscrito *real* para denotar os valores reais das grandezas do sistema.

O caso que o gradiente de temperatura real é maior que o gradiente de temperatura adiabático é denominado “super adiabático”,

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{real} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}. \quad (6.70)$$

6.2.1 Critérios para convecção

Para obter a condição para que ocorra a convecção olharemos para um elemento situado no interior da estrela, que está circundado pela vizinhança. As condições iniciais (indicadas pelo subscrito i) desse elemento são $T_i^{(e)}$, $P_i^{(e)}$ e $\rho_i^{(e)}$. E as condições iniciais da vizinhança são $T_i^{(v)}$, $P_i^{(v)}$ e $\rho_i^{(v)}$. Para esse elemento descer ele deve possuir uma densidade maior que a vizinhança ($\rho_i^{(e)} > \rho_i^{(v)}$) e para ele subir deverá possuir uma densidade menor que a vizinhança ($\rho_i^{(e)} < \rho_i^{(v)}$). A situação que será analisada para encontrar a condição de convecção será assumindo que o elemento subirá.

O desenvolvimento do critério partirá do princípio de Arquimedes, que diz que um corpo imerso parcial ou completamente em fluido, este exerce sobre o corpo uma força de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado pelo corpo, esta força é chamada de “empuxo”, e é definida por

$$\mathbf{F}_E = \rho_i^{(v)} g(\hat{\mathbf{r}}), \quad (6.71)$$

onde \mathbf{F}_E é a força de empuxo por unidade de volume, $\rho_i^{(v)}$ é a densidade da vizinhança, visto que é o fluido da vizinhança que exercerá esta força no elemento, e \mathbf{g} é a aceleração gravitacional.

Da mesma forma, o elemento também sofre ação da força gravitacional \mathbf{F}_g (também por unidade de volume), dada por

$$\mathbf{F}_g = \frac{m}{V} \mathbf{g} = \rho_i^{(e)} g(-\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.72)$$

Assim sendo, a força resultante \mathbf{F}_R por unidade de volume resultante que atua no elemento será

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_g \\ &= \rho_i^{(v)} g(\hat{\mathbf{r}}) + \rho_i^{(e)} g(-\hat{\mathbf{r}}) \\ &= (\rho_i^{(v)} - \rho_i^{(e)}) g(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\delta\rho g(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (6.73)$$

O sinal negativo é justificado por $\delta\rho \equiv \rho_i^{(e)} - \rho_i^{(v)} < 0$, condição necessária para que o elemento suba.

Ao percorrer uma distância dr , o elemento se encontrará circundado de uma nova vizinhança que possuirá novas condições denotadas por $P_f^{(v)}$, $T_f^{(v)}$ e $\rho_f^{(v)}$, em que o subscrito f está associado ao final da trajetória. Da mesma forma, as grandezas associada ao elemento sofrerão alterações e serão escritas por $P_f^{(e)}$, $T_f^{(e)}$ e $\rho_f^{(e)}$. Caso a densidade do elemento seja maior que a da vizinhança ($\rho_f^{(e)} > \rho_f^{(v)}$), o elemento descera e não ocorrerá a convecção. Do contrário, se a densidade do elemento for menor que a da vizinhança ($\rho_f^{(e)} < \rho_f^{(v)}$), o elemento continuará subindo e haverá convecção.

Agora, é necessário expressar essa condição em termos do gradiente de temperatura. Para isso, algumas hipóteses são assumidas. A primeira delas é que o gás se encontra próximo do equilíbrio térmico, o que nos permite escrever

$$T_i^{(e)} \simeq T_i^{(v)} \quad \text{e} \quad \rho_i^{(e)} \simeq \rho_i^{(v)}. \quad (6.74)$$

A segunda é que o gás realiza uma expansão adiabática e a pressão do elemento e da vizinhança são sempre iguais, isto é,

$$P_f^{(e)} = P_f^{(v)}. \quad (6.75)$$

Por último, é assumido que o elemento percorreu uma distância infinitesimal dr . Com isso podemos escrever $\rho_f^{(e)}$ como uma expansão da série de Taylor, de forma que

$$\rho_f^{(e)} \simeq \rho_i^{(e)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(e)} dr \quad \text{e} \quad \rho_f^{(v)} \simeq \rho_i^{(v)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(v)} dr. \quad (6.76)$$

Com isso, a condição ($\rho_f^{(e)} < \rho_f^{(v)}$) para que ocorra a convecção se torna

$$\begin{aligned} \rho_f^{(e)} &< \rho_f^{(v)} \\ \rho_i^{(e)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(e)} dr &< \rho_i^{(v)} + \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(v)} dr \\ \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(e)} dr &< \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(v)} dr. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Os termos cancelados são devido à hipótese apresentada em (6.74). E, para finalizar, podemos integrar (6.77), que resulta em

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(e)} < \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(v)}. \quad (6.78)$$

Para prosseguir no desenvolvimento do critério devemos lembrar que o elemento sofre uma expansão adiabática, portanto, a parte esquerda da inequação acima é obtida na equação (6.64), já a parte direita é obtida com (6.66), de forma que

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\rho_i^{(e)}}{P_i^{(e)}} \left. \frac{dP}{dr} \right|^{(e)} < \frac{\rho_i^{(v)}}{P_i^{(v)}} \left(\left. \frac{dP}{dr} \right|^{(v)} - \frac{P_i^{(v)}}{T_i^{(v)}} \left. \frac{dT}{dr} \right|^{(v)} \right). \quad (6.79)$$

A segunda hipótese apresentada em (6.75) tem como consequência

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|^{(e)} = \left. \frac{dP}{dr} \right|^{(v)} = \frac{dP}{dr}, \quad (6.80)$$

que permite simplificar (6.79), que junto com (6.74), chega-se a

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T_i^{(v)}}{P_i^{(v)}} \frac{dP}{dr} > \left. \frac{dT}{dr} \right|^{(v)}. \quad (6.81)$$

Essa condição é chamada de critério de Schwarzschild. Repare que o lado esquerdo da inequação é idêntico ao gradiente de temperatura adiabático apresentado em (6.67). Além disso, o gradiente de temperatura à direita está associado a vizinhança, que não passa pelo processo de expansão adiabática, e, portanto, está ligado ao gradiente de temperatura real. Então,

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{real}. \quad (6.82)$$

Como a temperatura no centro da estrela é maior do que a temperatura na superfície, ou seja, a temperatura diminui à medida que o raio aumenta, $dT/dr < 0$. Então, considerando apenas valores absolutos, podemos escrever

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{real} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}, \quad (6.83)$$

que se assemelha ao caso super adiabático mostrado em (6.70). Essa equação nos diz que para a convecção ocorrer, o gradiente de temperatura real deve ser super adiabático. Caso contrário, a camada será estável (FILHO; SARAIVA, 2017).

Agora, olhando para a condição (6.81), podemos escrevê-la sem o subscrito i e o sobrescrito (v), já que a vizinhança do sistema está associada a valores reais presentes nas camadas do interior estelar. Logo,

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \left(\frac{dT}{dr}\right)^{-1} \frac{dP}{dr} < 1 \rightarrow \frac{T}{P} \frac{dP}{dT} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad (6.84)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (6.85)$$

O critério para convecção desenvolvido até o momento não leva em consideração a mudança de composição entre as camadas do interior de uma estrela. Com o objetivo de encontrar um critério mais realista define-se

$$\begin{cases} \chi_\rho \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_{T,\mu} = \frac{\rho}{P} \frac{dP}{d\rho} = \frac{\rho k_B T}{P \mu m_H} = 1 \\ \chi_\mu \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_{\rho,T} = \frac{\mu}{P} \frac{dP}{d\mu} = \frac{\mu}{P} \left(-\frac{k_B \rho T}{\mu^2 m_H}\right) = -1 \\ \chi_T \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \mu}\right)_{\mu,\rho} = \frac{T}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{T}{P} \frac{k_B \rho}{\mu m_H} = 1 \end{cases} \quad (6.86)$$

Com essas definições podemos escrever o diferencial da pressão dP como

$$\begin{aligned}
 dP &= \frac{\partial P}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial P}{\partial T} dT \\
 dP &= -\frac{k_B \rho T}{\mu^2 m_H} d\mu + \frac{k_B T}{\mu m_H} d\rho + \frac{k_B \rho}{\mu m_H} dT \\
 dP &= -\frac{P}{\mu} d\mu + \frac{P}{\rho} d\rho + \frac{P}{T} dT \\
 \frac{dP}{P} &= -\frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \\
 d \ln P &= \chi_\rho d \ln \rho + \chi_T d \ln T + \chi_\mu d \ln \mu.
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

Assim, o critério de estabilidade

$$\left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(e)} - \left. \frac{d\rho}{dr} \right|^{(v)} > 0, \tag{6.88}$$

com o auxílio de (6.62), (6.66) e (6.86), se torna

$$\cancel{\left. \frac{\chi_P dP}{P dr} \right|^{(e)}} - \left. \frac{\chi_T dT}{T dr} \right|^{(e)} - \cancel{\left. \frac{\chi_P dP}{P dr} \right|^{(v)}} + \left. \frac{\chi_T dT}{T dr} \right|^{(v)} - \left. \frac{\chi_\mu d\mu}{\mu dr} \right|^{(v)} > 0, \tag{6.89}$$

onde os termos cancelados são devido a hipótese apresentada em (6.75), e, como o elemento está associado ao processo adiabático e a vizinhança ao processo real, em que nenhuma grandeza se mantém constante, escreve-se

$$-\frac{\chi_T}{T} \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\chi_T}{T} \left(\frac{dT}{dr} \right)_{real} - \frac{\chi_\mu}{\mu} \left(\frac{d\mu}{dr} \right)_{real} > 0. \tag{6.90}$$

Agora, para prosseguirmos, utilizaremos uma quantidade física, chamada de altura de escala de pressão, denotado por H_P , definida por

$$H_P \equiv -\frac{dr}{d \ln P} = -P \frac{dr}{dP}. \tag{6.91}$$

É claro que H_P é positivo, visto que a pressão diminui à medida que r aumenta.

No contexto que há equilíbrio hidrostático, temos que $dP/dr = -g\rho$, como mostra (4.42), e H_P toma a forma

$$H_P = \frac{P}{g\rho}. \tag{6.92}$$

A análise dimensional da expressão acima diz que H_P possui dimensão de comprimento, representando a distância vertical na qual a pressão atmosférica diminui por um fator de e . Olhando para essa equação, percebemos que $H_P \rightarrow \infty$ em direção ao centro da estrela, já que $H_P \propto P$ e $H_P \propto 1/g$, onde P aumenta e g diminui à medida que r diminui.

Seguindo no desenvolvimento do critério de convecção no contexto que há mudança na composição, multiplicaremos (6.90) por H_P , de forma que obtemos

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{real} < \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{ad} + \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_{real}, \tag{6.93}$$

que é chamado de critério de Ledoux, e pode tomar outra forma utilizando a nomenclatura dos deltas:

$$\nabla_{rad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{real}, \quad \nabla_{ad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{ad}, \quad \nabla_{\mu} \equiv \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_{real}. \quad (6.94)$$

A definição de ∇_{rad} é devido ao fato que o elemento realiza transporte convectivo e, como o processo condutivo é irrelevante comparado aos outros dois, se considera que a vizinhança transporta energia por radiação. Com essas definições, o critério de Ledoux é escrito como

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\chi_{\mu}}{\chi_T} \nabla_{\mu}. \quad (6.95)$$

O critério de Schwarzschild é recuperado quando $\nabla_{\mu} = 0$:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad}. \quad (6.96)$$

6.2.2 Teoria do comprimento de mistura

A análise do transporte de energia por convecção, similarmente ao caso do fluxo radiativo, visa obter o fluxo convectivo. No entanto, a formulação de uma teoria completa e abrangente para derivar o fluxo convectivo ainda é um desafio na astrofísica (MACIEL, 2018). O modelo mais utilizado é a teoria do comprimento de mistura (*mixing-length theory*), que diz que cada elemento que realiza convecção viaja uma distância média l (comprimento de mistura) até que chegue em uma camada que se estabilize, se misturando com o meio, encerrando a convecção.

O critério inicial para que ocorra a convecção é $\rho_f^{(e)} < \rho_f^{(v)}$. Pela lei dos gases ideais, $\rho \propto 1/T$. Com isso o critério de convecção se torna

$$T_f^{(v)} < T_f^{(e)}, \quad (6.97)$$

consequentemente,

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)^{(v)} < \left(\frac{dT}{dr} \right)^{(e)} \Rightarrow 0 < \left(\frac{dT}{dr} \right)^{(e)} - \left(\frac{dT}{dr} \right)^{(v)}. \quad (6.98)$$

O gradiente da temperatura é negativo. Logo, ao se escrever essa condição em termos de valores absolutos, tem-se

$$0 < \left| \frac{dT}{dr} \right|^{(v)} - \left| \frac{dT}{dr} \right|^{(e)}. \quad (6.99)$$

Inicialmente, o elemento está em equilíbrio térmico com a vizinhança ($T_i^{(e)} = T_i^{(v)}$). Mas para ocorrer a convecção é necessário que haja uma diferença de temperatura, como

mostra (6.97). Dessa forma, quando o elemento percorre uma distância dr ele possuirá uma diferença de temperatura com a vizinhança

$$\delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)^{(e)} - \left(\frac{dT}{dr} \right)^{(v)} \right] dr. \quad (6.100)$$

Novamente, como o elemento sofre uma expansão adiabática e a vizinhança não, utilizaremos o subscritos *ad* e *real*, respectivamente. Assim,

$$\delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{real} \right] dr = \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) dr. \quad (6.101)$$

Essa variação de temperatura está associada com a distância (comprimento de mistura) que o elemento percorre até termalizar (entrar em equilíbrio térmico) com a vizinhança em uma região que a pressão do elemento é igual a da vizinhança ($P^{(e)} = P^{(v)}$) (KIPPENHAHN; WEIGERT; WEISS, 2012). O comprimento de mistura é dado por

$$l = \alpha H_P, \quad (6.102)$$

em que α é o parâmetro fundamental da teoria do comprimento de mistura.

O elemento, ao percorrer a distância l e chegar na região que possui a mesma pressão que a vizinhança, possuirá um excesso de calor por unidade de volume, que é calculado por

$$\delta q = \rho C_P \delta T, \quad (6.103)$$

onde δT é calculado através da equação (6.101) em que $dr = l$.

Essa distância é percorrida em um intervalo de tempo e o elemento possui uma velocidade associada a ele. Denotaremos essa velocidade por v_c , onde o subscrito c indica que é a velocidade de um elemento que realiza a convecção. Assim, ao multiplicarmos (6.103) por v_c obtemos uma expressão para o cálculo do fluxo convectivo F_c ,

$$F_c = \delta q v_c = \rho C_P \delta T v_c. \quad (6.104)$$

Mas como a convecção é produzida por um conjunto de elementos que começam seus movimentos em pontos diferentes da camada convectiva e, conseqüentemente, possuem valores diferentes de velocidades e gradientes de temperatura, as grandezas presentes nessa equação representam as médias dessas quantidades dos elementos envolvidos (KIPPENHAHN; WEIGERT; WEISS, 2012). Assim sendo, a equação (6.104) representa o fluxo médio devido aos movimentos convectivos onde dr e v_c são, respectivamente, o deslocamento médio e a velocidade média dos elementos (FILHO; SARAIVA, 2017). Assumiremos, então, que a distância média que os elementos percorrem serão

$$\langle dr \rangle = \frac{l}{2}. \quad (6.105)$$

Com isso, como convecção ocorre devido ao desbalanceamento entre a força de empuxo e a força gravitacional. O termo $\delta\rho$ presente na equação (6.73) é calculado através da equação de estado, considerando μ constante,

$$\begin{aligned}\delta P &= \frac{dP}{d\rho}\delta\rho + \frac{dP}{dT}\delta T \\ &= P\left(\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta T}{T}\right).\end{aligned}\quad (6.106)$$

Logo, a média das forças resultantes apresentada em (6.73) fica

$$\langle \mathbf{F}_R \rangle = \frac{1}{2} \frac{g\rho}{T} \delta T(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{g\rho}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) dr(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \frac{g\rho}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) dr(\hat{\mathbf{r}}).\quad (6.107)$$

O trabalho por unidade de volume realizado dessa força é

$$W = \int_0^{l/2} \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{g\rho}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) dr(\hat{\mathbf{r}}) \cdot dr(\hat{\mathbf{r}}),\quad (6.108)$$

que, com o Teorema do trabalho e energia cinética, podemos escrever

$$\frac{\rho v_c^2}{2} = \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{g\rho}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) (dr)^2.\quad (6.109)$$

Devido aos termos quadráticos, ao se tomar a raiz quadrada em ambos os lados, obtêm-se resultados positivos e negativos, o que significa que essa expressão é válida para os elementos que sobem e que descem (FILHO; SARAIVA, 2017). Prosseguindo, tem-se

$$v_c = \frac{l}{2} \left[\frac{g}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{1/2}.\quad (6.110)$$

Substituindo esse resultado na equação do fluxo convectivo (6.104), com o auxílio da equação do gás ideal e (6.102), obteremos o fluxo convectivo

$$\begin{aligned}F_c &= \rho C_P \delta T v_c = \rho C_P \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \left[\frac{g}{T} \delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{1/2} \frac{l^2}{4} \\ &= \rho C_P \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} \left[\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{3/2} \frac{1}{4} \left(\alpha \frac{k_B}{\mu m_H} \frac{T}{g} \right)^2 \\ &= \rho C_P \left(\frac{k_B}{\mu m_H} \right)^2 \left(\frac{g}{T} \right)^{3/2} \left[\delta \left(\frac{dT}{dr} \right) \right]^{3/2} \frac{\alpha^2}{4}.\end{aligned}\quad (6.111)$$

Esse resultado para o fluxo convectivo é obtido por conta das hipóteses feitas na teoria de comprimento de mistura, que é uma teoria fenomenológica e possui um bom sucesso observacional (CARROLL; OSTLIE, 2017). É importante dizer que o comprimento de mistura l possui uma incerteza grande, visto que ele possui relação com a altura de escala de pressão, que por sua vez varia bastante dentro das camadas das estrelas. Além disso, o parâmetro livre α não é único para qualquer tipo de estrela. Ou seja, teorias convectivas são bem complexas e a teoria de comprimento de mistura é apenas uma delas.

Parte III

Modelagem Estelar

7 Estrelas politrópicas

As equações que descrevem a estrutura interna da estrela são (4.41), (4.42), (5.45) e (6.37) - no caso radiativo - ou (6.67) - no caso convectivo. Nesse sistema de equações tem-se quatro equações e cinco variáveis: $M(r)$, $P(r)$, $\rho(r)$, $L(r)$ e $T(r)$. Então, para resolver tal sistema é necessário uma equação de estado que descreve a termodinâmica do sistema, conectando a pressão com a densidade e temperatura $P = P(\rho, T)$.

Percebe-se que os pares de equações são conectados por conta da pressão depender da temperatura. O modelo mais simples que podemos considerar é um sistema barotrópico, onde a pressão dependerá somente da densidade e a temperatura será constante, ou seja, não se considera os processos de transferência de energia. Isso permitirá resolver o primeiro par de equação e utilizar o perfil de densidade $\rho(r)$ no segundo par.

7.1 A equação de estado politrópica

Um caso particular de um sistema barotrópico é quando o sistema sofre transformações politrópicas, onde uma mudança de estado é “quasi-estática”, de forma que o calor específico se mantém constante ao longo do processo,

$$\frac{dq}{dT} = c = \text{constante}. \quad (7.1)$$

Neste caso, considerando que a pressão é função somente da densidade, a Primeira Lei da Termodinâmica é escrita como

$$\frac{dq}{dT}dT = \frac{du}{dT}dT + PdV \rightarrow (C_V - c)dT = PdV. \quad (7.2)$$

Para o número de moles igual a 1 ($n = 1$), a equação do gás ideal e a relação entre os calores específicos C_P e C_V são $PV = RT$ e $R = C_P - C_V$. Com isso, tem-se

$$(C_V - c)dT = PdV = (C_P - C_V)\frac{T}{V}dV, \quad (7.3)$$

que ao integrar, obtém-se

$$T^{C_V - c}V^{C_P - C_V} = \text{constante}. \quad (7.4)$$

Definindo o expoente politrópico γ'

$$\gamma' \equiv \frac{C_P - c}{C_V - c}, \quad (7.5)$$

temos que

$$\gamma' - 1 = \frac{C_P - C_V}{C_V - c}. \quad (7.6)$$

Portanto, a equação (7.4) ficará

$$TV^{\gamma'-1} = \text{constante}, \quad (7.7)$$

que com a equação de estado é possível escrever

$$T\rho^{1-\gamma'} = \text{constante}; \quad T^{\gamma'}P^{1-\gamma'} = \text{constante}; \quad P\rho^{-\gamma'} = \text{constante}. \quad (7.8)$$

Na equação de equilíbrio hidrostático e na equação da continuidade da massa precisamos da relação estabelecida entre a pressão e a densidade, que no caso politrópico é $P = P(\rho) = K\rho^{\gamma'}$. Podemos definir índice politrópico n por

$$n = \frac{1}{\gamma' - 1}. \quad (7.9)$$

Com isso, a relação politrópica se torna

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (7.10)$$

onde K e n são constantes. Os valores de n e γ' ajudam a determinar outras transformações termodinâmicas. Para uma transformação isobárica $\gamma' = 0$ ($n = -1$). Para o caso isocórico $\gamma' \rightarrow \infty$ ($n = 0$). Para uma isotérmica $\gamma' = 1$ ($n \rightarrow \infty$). Por último, para uma transformação adiabática $\gamma' = \gamma$. Isso nos permite dizer que o caso politrópico é uma particularidade de uma transformação barotrópica em que o expoente da densidade é $1 + \frac{1}{n}$ e nesse caso um processo adiabático ocorre quando $c = 0$ na expressão (7.5).

7.2 Variáveis adimensionais e a equação de Lane-Emden

Para modelar o interior é necessário obter uma única equação em termos de variáveis adimensionais, combinando as equações de equilíbrio hidrostático e a da continuidade da massa. Tais variáveis adimensionais são definidas por

$$\begin{cases} r = a\xi \\ \rho(r) = \rho_c\theta^n(r), \end{cases} \quad (7.11)$$

onde a é uma constante que possui unidade de comprimento, de forma que ξ seja adimensional, e ρ_c é a densidade central da estrela, onde $\theta^n(r)$ é uma variável adimensional. Se o objeto obedecer à lei dos gases ideais, temos que $P \propto \rho T$. Já no caso politrópico, a relação é $P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}$, que igualando as duas expressões, concluímos que $\rho \propto T^n$. Analisando essa relação, podemos afirmar que a variável θ mede a temperatura do sistema.

Com essa definição, a relação entre as derivadas de r e as derivadas de ξ serão, portanto

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi}. \quad (7.12)$$

A pressão no contexto politrópico pode ser escrita em termos de ξ e θ utilizando as relações apresentadas em (7.11):

$$P = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\theta^{n+1}(\xi) = P_c\theta^{n+1}(\xi), \quad (7.13)$$

onde P_c é a pressão central.

Agora, para prosseguir no objetivo de obter uma equação que descreverá a estrutura da estrela, reescrevemos a equação de equilíbrio hidrostático como

$$\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = -GM(r), \quad (7.14)$$

que diferenciada com respeito ao raio é

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right) = -G \frac{dM(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \rho(r). \quad (7.15)$$

Assim, substituindo as grandezas adimensionais dadas em (7.11) na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{a^2 \xi^2}{\rho_c \theta^n} \frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} \left(K \rho_c^{1+\frac{1}{n}} \theta^{n+1} \right) \right] &= -4\pi G a^2 \xi^2 \rho_c \theta^n \\ \frac{1}{a^2 \xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi^2}{\rho_c \theta^n} K \rho_c^{\frac{1}{n}+1} (n+1) \theta^n \frac{d\theta}{d\xi} \right] &= -4\pi G \rho_c \theta^n \\ \frac{1}{a^2} \frac{(n+1) K \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) &= -\theta^n, \end{aligned} \quad (7.16)$$

de forma que, ao definir o comprimento a como

$$a = \left[\frac{(n+1) K \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{1/2}, \quad (7.17)$$

é escrita na forma

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n, \quad (7.18)$$

que é chamada de equação de Lane-Emden.

7.3 Condições de contorno e as soluções analíticas e numéricas

Para resolver tal equação é necessário saber as condições de contorno. Olhando para relação (7.11) e sabendo que $\rho(0) = \rho_c$, percebemos que

$$\theta(\xi) = \left(\frac{\rho(\xi)}{\rho_c} \right)^n \Rightarrow \theta(0) = \left(\frac{\rho(0)}{\rho_c} \right)^n = 1, \quad (7.19)$$

o que permite escrever a condição de contorno

$$\theta(\xi = 0) = 1; \quad \frac{d\theta(\xi = 0)}{d\xi} = 0. \quad (7.20)$$

Uma outra informação que é importante saber é quando é o fim da estrela. Isso é determinado em $P(r = R) = 0$. No raio R tem-se associado uma variável ξ_R , em que

$$R = a\xi_R = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} \xi_R. \quad (7.21)$$

Além disso, também podemos obter uma expressão para a massa da estrela em termos das variáveis adimensionais. Partindo de (4.41), se escreve

$$M(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr = 4\pi \int_0^{\xi_R} \rho_c \theta^n a^2 \xi^2 a d\xi = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_R} \xi^2 \theta^n d\xi. \quad (7.22)$$

Utilizando a equação de Lane-Emden, (7.18) ficará

$$M(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_R} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi, \quad (7.23)$$

e, finalmente, a expressão para massa total da estrutura é

$$M_\xi = -4\pi a^3 \rho_c \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R} \quad (7.24)$$

que com a definição de a também tem a forma

$$M_\xi = -\frac{\rho_c^{\frac{3-n}{2n}}}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{(n+1)K}{G} \right]^{3/2} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_R}. \quad (7.25)$$

Através dessa expressão, tem-se que $M_\xi \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}$ e da expressão (7.21) tem-se que $\rho_c \propto R^{\frac{2n}{1-n}}$. Consequentemente, temos uma relação entre a massa e o raio estabelecida por

$$M \propto R^{\frac{3-n}{1-n}}. \quad (7.26)$$

Assim sendo, o índice n é extremamente importante pra determinar as características de uma estrela que respeita a equação de estado politrópica (7.10). Para isso é necessário resolver a equação de Lane-Emden para os valores possíveis de n e ver em qual caso se aplica. Isso é feito utilizando as condições de contorno estabelecidas em (7.19). que nos levam a soluções analíticas para $n=0, 1$ e 5 . Em específico, as soluções para $n=1$ e 5 são obtidas com certas transformações¹ que revelam as soluções analíticas que não são óbvias na forma original da equação. As soluções analíticas são:

$$\begin{cases} n=0 & \theta_0(\xi) = -\frac{\xi^2}{6} + 1 & \xi_R = \sqrt{6} \\ n=1 & \theta_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} & \xi_R = \pi \\ n=5 & \theta_5(\xi) = \left(\frac{\xi^2}{3} + 1 \right)^{-1/2} & \xi_R \rightarrow \infty \end{cases} \quad (7.27)$$

¹ Essas transformações estão bem apresentadas no livro do CHANDRASEKHAR, 2010.

A solução para $n = 0$ é a de uma esfera de densidade constante ($\rho = \rho_c$), o que caracteriza um fluido incompressível, ou seja, seu volume não diminui quando submetido à pressão. Nesse caso, o perfil da pressão e a pressão central são determinados pelas equações (4.46) e (4.47), respectivamente. Já o caso em que $n = 1$, a densidade é fornecida por $\rho = \rho_c \theta$ e a pressão será $P = K \rho_c^{3/2} \theta^2$, que, olhando para (7.27), fica claro que tal solução descreve um modelo de uma esfera gasosa com uma distribuição de densidade e pressão que diminui à medida que o raio aumenta. No último caso analítico, $n = 5$, a solução apresenta um comportamento peculiar que descreve uma esfera de gás infinita com uma distribuição de densidade (e, portanto, pressão) que nunca chega a zero, mas diminui assintoticamente a zero à medida que ξ aumenta. Apesar do raio infinito, a massa total do objeto é finita. Isso ocorre porque a densidade diminui rapidamente de forma que a contribuição das regiões mais externas para a massa total se torna insignificante. Obviamente essa solução não é aplicável à realidade pois nenhum objeto se estende ao infinito. Soluções para $n > 5$ possuem mesmo comportamento, portanto, podemos restringir o intervalo de interesse em $0 \leq n \leq 5$ (FILHO; SARAIVA, 2017). Já as soluções numéricas são obtidas utilizando métodos numéricos para resolver equações diferenciais ordinárias. Aqui no caso foi utilizado o método Runge-Kutta de quarta e quinta ordem através da função `solve_ivp` da biblioteca SciPy (*Scientific Python*), que permitiu fazer o plot da figura 15.

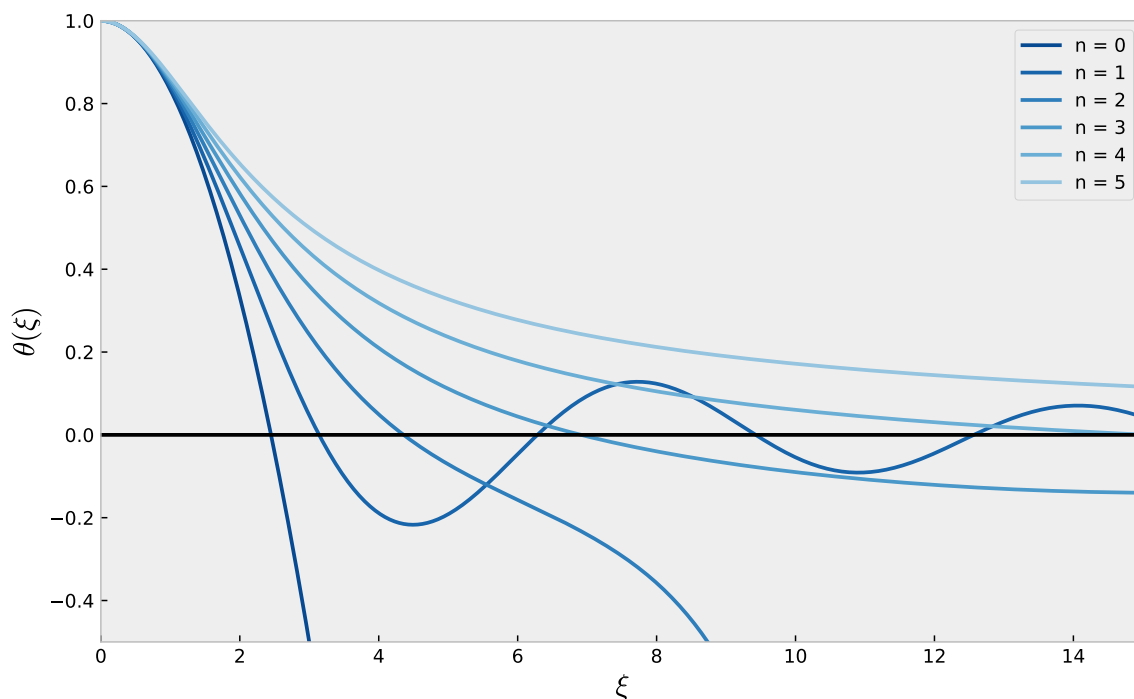


Figura 15 – Soluções da equação de Lane-Emden para diferentes valores do índice politrópico n .

Embora a equação de Lane-Emden não represente uma situação real, há contextos em que sua aplicação é válida, como no caso $n = 0$, que apesar de descrever um objeto

muito simples de densidade constante, é uma boa aproximação para planetas rochosos (SEAGER et al., 2007). Também é útil para o caso de um gás degenerado não relativístico, onde $P \propto \rho^{5/3}$, e no caso relativístico, onde $P \propto \rho^{4/3}$ (MACIEL, 2018).

O caso relativístico corresponde ao índice politrópico $n = 3$ e é bem importante pois estabelece um limite de massa para objetos que obedecem a relação politrópica. Nesse contexto a massa perde a dependência no raio e na densidade central apresentadas nas equações (7.26) e (7.25), de forma que qualquer configuração estelar nesse cenário possui a mesma massa. Essa massa determina um limite de equilíbrio de configurações politrópicas em que $n = 3$, de forma que para massas superiores a esse limite, ocorre um regime de instabilidade. Tal massa é conhecida como Massa de Chandrasekhar² (M_{CH}), que é aproximadamente $M_{CH} \approx 1,46M_{\odot}$ (CHANDRASEKHAR, 1931).

² O físico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) obteve essa relação em CHANDRASEKHAR, (1931).

8 Caso relativístico

O desejo de descrever o movimento dos corpos celestes observados é algo que acompanha a humanidade. A primeira teoria que explicou com precisão as observações foi a Teoria da Gravitação Universal, proposta por Newton (NEWTON; COHEN; WHITMAN, 1999). Por quase 300 anos, essa teoria foi a principal e mais bem sucedida explicação sobre a gravidade. Contudo, no início do século XX, Albert Einstein (1879 - 1955) publicou uma série de artigos que levou a uma mudança de paradigma e a uma evolução sobre a compreensão do Universo. Em 1905, ele apresentou o artigo fundador da Teoria da Relatividade Restrita (RR) (EINSTEIN, 1905) e, em 1916, seus estudos culminaram na formulação da Teoria da Relatividade Geral (RG) (EINSTEIN, 1916), que se tornou a moderna teoria da gravitação, substituindo a teoria newtoniana na descrição dos fenômenos gravitacionais. Assim sendo, é interessante entender como ocorreu essa transição.

8.1 Transformações de Galileu, eletromagnetismo e transformações de Lorentz

A mecânica clássica, área da física dedicada ao estudo do movimento e suas causas, baseia-se nas três leis de Newton, na Lei da Gravitação Universal e no princípio da relatividade de Galileu. Para discutir este último, é necessário considerar um sistema de referência, ou referencial, que é um conjunto de medidas espaciais e um cronômetro universal, que juntos fornecem a função da posição de um objeto em relação ao tempo a partir de uma origem definida. Essas medidas podem ser feitas utilizando coordenadas cartesianas, polares ou esféricas, sendo estas as mais comuns, embora outros sistemas de coordenadas possam ser utilizados.

Dado que a origem de um referencial pode ser qualquer ponto no espaço, existem infinitos sistemas de referência possíveis. O princípio da relatividade de Galileu postula que as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial, isto é, naqueles que se movem uniformemente com relação ao outro.

No contexto da física newtoniana, considerando dois referenciais cartesianos inerciais S e S' , com eixos paralelos, com coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') , em que S' se move uniformemente no eixo x com velocidade V em relação a S , são válidas as transformações de Galileu

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (8.1)$$

Além da mecânica, outro campo da física que era bem compreendido até o fim do século XIX era o eletromagnetismo, responsável por descrever como os campos elétricos e

magnéticos interagem com as cargas elétricas. A base teórica dessa área está contida num conjunto de equações conhecidas como equações de Maxwell, escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (8.5)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétricos e magnéticos, respectivamente, e as quantidades ρ e \mathbf{J} representam a densidade de carga elétrica e a densidade de corrente elétrica.

Essas equações não serão analisadas em detalhe aqui, o objetivo é apresentá-las para demonstrar que não são invariantes em relação às transformações de Galileu. Para isso, consideramos o vácuo, onde não há cargas ($\rho = 0$) nem correntes ($\mathbf{J} = 0$), de forma que as equações (8.2) e (8.5) são simplificadas para

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (8.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (8.7)$$

Tomando o rotacional de (8.4), tem-se

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (8.8)$$

que, ao utilizar a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, onde \mathbf{A} é um campo vetorial qualquer, se torna

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (8.9)$$

Substituindo as simplificações (8.6) e (8.7) na equação acima, obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.10)$$

O análogo pode ser feito para o campo magnético, de forma que chega-se a

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.11)$$

Essas equações, (8.10) e (8.11), possuem a forma de uma equação de onda, indicando que os campos elétrico e magnético se propagam como tal.

Assim sendo, para demonstrar que uma equação de onda não é invariante sob transformações de Galileu, consideramos um campo vetorial \mathbf{A} arbitrário, que depende apenas de x e satisfaz

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.12)$$

Pelas transformações (8.1), os operadores diferenciais são

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \end{cases} \quad (8.13)$$

que, ao substituir em (8.12), obtemos

$$\left(1 - \frac{V^2}{x^2}\right) \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t'^2} + 2 \frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x' \partial t'} = 0, \quad (8.14)$$

que não preserva a forma da equação de onda original (8.12). Portanto, conclui-se que uma equação de onda não é invariante sob transformações de Galileu. Este resultado, combinado com os achados do experimento de Michelson-Morley realizado em 1887 por Albert Abraham Michelson (1852 - 1931) e Edward Williams Morley (1838 - 1923), que demonstraram que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais, independentemente do movimento relativo, levaram Einstein a formular a Teoria da Relatividade Restrita.

Para Einstein, as equações de Maxwell deviam respeitar o princípio da relatividade e isso significava que as transformações de Galileu eram inadequadas. Além disso, os resultados obtidos por Michelson e Morley indicou a existência de uma velocidade invariante. Nesse novo contexto, o conceito de simultaneidade tornou-se relativo, implicando que o tempo não é mais absoluto como na física clássica, mas sim atrelado ao referencial. Assim, as transformações que preservam a invariância das equações de Maxwell são as transformações de Lorentz¹,

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (8.15)$$

em que

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (8.16)$$

Portanto, a Relatividade Restrita estabelece uma mecânica que é invariante sob as transformações de Lorentz. É importante notar que as transformações de Galileu são um caso especial dessas transformações quando $V \ll c$.

8.2 A equação TOV

A RG é uma extensão da RR, ampliando a descrição de fenômenos físicos para referenciais não-inerciais (acelerados) e incluindo a gravidade, agora entendida como

¹ Uma discussão mais aprofundada das transformações de Lorentz pode ser lida em [FILHO; FERREIRA, 2023](#)

expressão geométrica do espaço-tempo quadridimensional. A RG se baseia na geometria diferencial e no princípio de equivalência, sendo este último de extrema importância para o seu desenvolvimento. No cenário newtoniano, considera-se que o campo gravitacional \mathbf{g} é uniforme. Já na RG, Einstein estabeleceu que a gravidade é a curvatura do espaço-tempo, resultado da distribuição de massa e energia. Por isso, quanto mais próximo de um objeto, mais o espaço-tempo é deformado, implicando num campo gravitacional não-uniforme, variando ponto a ponto, ou seja, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Assim, o princípio da equivalência da RG afirma que é possível escolher um referencial no qual a RR é recuperada localmente, ou seja, é possível encontrar uma região do espaço-tempo suficientemente pequena onde \mathbf{g} seja uniforme.

A maioria das estrelas pode ser analisada sob a perspectiva newtoniana, onde a equação de equilíbrio hidrostático leva à derivação da equação de Lane-Emden. Esta equação é utilizada para modelar objetos simples em que a pressão depende apenas da densidade na forma (7.10), sem considerar os efeitos de transporte de energia. Apesar disso, possui resultados significativos, como discutido na seção anterior. Entretanto, a teoria newtoniana não cabe em todos os contextos e tem seus limites estabelecidos pelo fator de compactidade C , que para sistemas gravitacionais é definido por

$$C = \frac{2GM}{c^2 R} = \frac{R_S}{R}, \quad (8.17)$$

onde M e R são a massa e o raio do objeto, R_S é o raio de Schwarzschild², enquanto G e c são a constante gravitacional e a velocidade da luz, respectivamente. A teoria newtoniana é aplicável quando $C \ll 1$, enquanto a RG torna-se necessária à medida que a compactidade se aproxima de 1. Por exemplo, estrelas de nêutrons possuem $C \approx 0,6$, enquanto buracos negros possuem $C \approx 1$.

Assim sendo, quando a compactidade se aproxima de 1, é essencial uma equação de equilíbrio hidrostático no contexto relativístico, que pode ser obtida com as ferramentas fornecidas pela RG. Esta teoria é descrita matematicamente por um conjunto de equações conhecidas como Equações de Campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (8.18)$$

que relacionam a distribuição de matéria e energia, representado pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, com a geometria do espaço-tempo do sistema, representado pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, definido por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (8.19)$$

² O raio de Schwarzschild (R_S) representa o raio crítico no qual um objeto de determinada massa precisa ser comprimido para se tornar um buraco negro. Matematicamente expresso como $R_S = 2GM/c^2$. Tal raio também define o que é chamado de horizonte de eventos, fronteira além da qual nada, nem mesmo a luz, pode escapar.

em que $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que descreve a curvatura, $R_{\mu\nu}$ e R representam, respectivamente, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci. Estes são calculados através do tensor de Riemman $R^\lambda_{\mu\rho\nu}$, definido por

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \quad (8.20)$$

que é calculado através da conexão, denominada símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (8.21)$$

Portanto, o $R_{\mu\nu}$ é obtido pela contração sob dois índices de $R^\lambda_{\mu\rho\nu}$ e R é a contração de $R_{\mu\nu}$ com a métrica, ou seja,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (8.22)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (8.23)$$

Então, para encontrar a equação de equilíbrio hidrostático relativístico é necessário determinar a métrica e o tensor momento-energia. Para o caso de uma distribuição estática e esférica de massa, essa equação é conhecida por equação TOV, em homenagem aos cientistas que primeiro estudaram tal problema, sendo eles Richard C. Tolman (1881 - 1948), J. Robert Oppenheimer (1904 - 1967) e George M. Volkoff (1914 - 2000). Em 1939, Tolman publicou seu artigo (TOLMAN, 1939) na mesma edição da revista *Physical Review* que Oppenheimer e Volkoff publicaram em conjunto (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939). A métrica utilizada por eles é escrita em coordenadas esféricas como

$$ds^2 = e^f c^2 dt^2 - e^g dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8.24)$$

em que ν e λ são funções apenas da coordenada radial r . O elemento de linha é calculado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e as coordenadas são $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$.

Como a métrica utilizada é estática e ortogonal, tem-se que

$$\frac{dx^{\mu\nu}}{dt} = 0 \quad (8.25)$$

e

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{se } \mu \neq \nu. \quad (8.26)$$

Assim, o tensor métrico é escrito, em forma matricial, como

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

de forma que é válido $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$.

Com $g_{\mu\nu}$ determinado, calcula-se os símbolos de Christoffel não nulos, que para a métrica (8.24) são

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{df}{dr}, \\
 \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{(f-g)} \frac{df}{dr}, \\
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{dg}{dr}, \\
 \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-g}, \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-g}, \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Com as conexões determinadas, os termos geométricos (8.20), (8.22) e (8.23) podem ser calculados. As componentes não nulas do tensor de Riemann são

$$\begin{aligned}
 R_{101}^0 &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{4} \left(\frac{df}{dr} \right)^2, \\
 R_{202}^0 &= -\frac{r}{2} e^{-g} \frac{df}{dr}, \\
 R_{303}^0 &= -\frac{r}{2} e^{-g} \sin^2 \theta \frac{df}{dr}, \\
 R_{212}^1 &= \frac{r}{2} e^{-g} \frac{dg}{dr}, \\
 R_{313}^1 &= \frac{r}{2} e^{-g} \sin^2 \theta \frac{dg}{dr}, \\
 R_{323}^2 &= \sin^2 \theta (1 - e^{-g}).
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Consequentemente, o tensor de Ricci fornecerá

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{1}{2} e^{f-g} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} \right], \\
 R_{11} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} \right], \\
 R_{22} &= \frac{r}{2} e^{-g} \left[\frac{dg}{dr} - \frac{df}{dr} \right] - e^{-g} + 1, \\
 R_{33} &= \sin^2 \theta \left\{ \frac{r}{2} e^{-g} \left[\frac{dg}{dr} - \frac{df}{dr} \right] - e^{-g} + 1 \right\}.
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Por último, o escalar de Ricci será

$$\begin{aligned}
 R &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
 R &= e^{-f} R_{00} - e^{-g} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\
 R &= e^{-g} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} \left(\frac{df}{dr} - \frac{dg}{dr} \right) + \frac{2}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2}.
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

Agora, com os termos geométricos calculados, podemos substituir (8.29), (8.30) e (8.31) no tensor de Einstein (8.19), de forma que obtemos as equações

$$\begin{aligned}
G_{00} &= e^f \left[e^{-g} \left(\frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \right], \\
G_{11} &= e^g \left[e^{-g} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right], \\
G_{22} &= \frac{r^2}{2} e^{-g} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \frac{dg}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{df}{dr} - \frac{dg}{dr} \right) \right], \\
G_{33} &= \sin^2 \theta G_{22}.
\end{aligned} \tag{8.32}$$

As equações apresentadas até aqui são somente a parte geométrica das equações de campo de Einstein. Para essas equações ficarem completas é necessário determinar o tensor momento-energia. Para um fluido em equilíbrio termodinâmico, $T_{\mu\nu}$ é

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} - P g_{\mu\nu} \tag{8.33}$$

onde ρ é a densidade própria, medida em um referencial comóvel ao fluido, P é a pressão, τ é o tempo próprio e $dx^\alpha/d\tau$ é a quadrivelocidade de cada ponto do fluido.

O tempo próprio³ é definido a partir do cálculo de distâncias $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, de forma que ao dividir pela velocidade da luz ao quadrado, temos uma grandeza com unidade de tempo. Como a velocidade da luz é um invariante, o tempo próprio também será. Com isso, é possível escrever

$$d\tau = \frac{ds}{c}. \tag{8.34}$$

Devido à isso, tem-se que

$$d\tau = \frac{1}{c} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} = \frac{1}{c} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} dt. \tag{8.35}$$

Como estamos lidando com uma configuração estática, as componentes espaciais da quadrivelocidade são nulas, isto é, $x^1 = x^2 = x^3 = 0$. Assim, a componente temporal é $d\tau = \sqrt{g_{00}} c dt$, logo, as componentes não nulas do tensor energia-momento são

$$\begin{aligned}
T_{00} &= e^f \rho c^2, \\
T_{11} &= e^g P, \\
T_{22} &= r^2 P, \\
T_{33} &= r^2 P \sin^2 \theta = \sin^2 \theta T_{22}.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

³ O tempo próprio é tempo medido por um referencial que está em repouso em relação ao evento que está sendo medido.

Com os resultados (8.32) e (8.36) é possível calcular as equações de campo de Einstein, (8.18), de forma que chega-se ao sistema de equações

$$G_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \Rightarrow e^{-g} \left(\frac{g'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho, \quad (8.37)$$

$$G_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} \Rightarrow e^{-g} \left(\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} P, \quad (8.38)$$

$$G_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} \Rightarrow \frac{e^{-g}}{2} \left[f'' - \frac{1}{2} f' g' + \frac{1}{2} (f')^2 + \frac{1}{r} (f' - g') \right] = \frac{8\pi G}{c^4} P, \quad (8.39)$$

$$G_{33} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{33} \rightarrow \sin^2 \theta G_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} \sin^2 \theta T_{22} \rightarrow G_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22}. \quad (8.40)$$

Assim, basta realizar algumas manipulações algébricas para obter a equação TOV. Primeiramente, nota-se que as equações (8.38) e (8.39) possuem a parte direita da equação igual. Assim, ao igualá-las, se tem

$$e^{-g} \left[-\frac{f'g'}{2} - \frac{(f'+g')}{2r} + \frac{f''}{2} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} = e^{-g} \left[-\frac{f'g'}{4} - \frac{(f')^2}{4} \right]. \quad (8.41)$$

Além disso, ao derivar (8.38) e multiplicar por $r/2$, chega-se à

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \left(\frac{8\pi G}{c^4} \frac{dP}{dr} \right) &= \frac{r}{2} \left[\frac{d}{dr} (e^{-g}) \left(\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + e^{-g} \left(\frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) + \frac{2}{r^3} \right] \\ \frac{4\pi G}{c^4} r \frac{dP}{dr} &= e^{-g} \left[-\frac{f'g'}{2} - \frac{(f'+g')}{2r} + \frac{f''}{2} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (8.42)$$

que, comparando com (8.41), se obtém

$$\frac{4\pi G}{c^4} \frac{dP}{dr} = -\frac{e^{-g}}{4r} (g' + f') f'. \quad (8.43)$$

É necessário eliminar os termos que envolvem as funções f e g . Para isso, se soma as equações (8.37) e (8.38), que resulta em

$$\frac{e^{-g}}{r} (f' + g') = \frac{8\pi G}{c^4} (P + \rho c^2). \quad (8.44)$$

Substituindo (8.44) em (8.43), temos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(P + \rho c^2)}{2} f', \quad (8.45)$$

que representa uma configuração de equilíbrio para a situação analisada (distribuição de massa estática e esférica).

Olhando para (8.45), é evidente que ainda precisamos eliminar f' e reescrevê-la em termos da função de massa presente na esfera de raio r . Para isso, define-se uma nova variável u por

$$u \equiv \frac{r}{2} (1 - e^{-g}). \quad (8.46)$$

Com essa definição e com (8.45), a equação (8.38) é reescrita,

$$\begin{aligned}
e^{-g} \left(\frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^4} P \\
\frac{e^{-g} f'}{r} + \frac{e^{-g}}{r^2} - \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^4} P \\
\frac{e^{-g} f'}{r} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-g}) &= \frac{8\pi G}{c^4} P \\
\frac{e^{-g} f'}{r} - \frac{2u}{r^3} &= \frac{8\pi G}{c^4} P \\
e^{-g} f' &= \frac{8\pi G}{c^4} r P + \frac{2u}{r^2} \\
\left(1 - \frac{2u}{r} \right) \left(\frac{-2}{P + \rho c^2} \frac{dP}{dr} \right) &= \frac{8\pi G}{c^4} r P + \frac{2u}{r^2} \\
\left(\frac{r - 2u}{r} \right) \frac{dP}{dr} &= -(P + \rho c^2) \left(\frac{4\pi G}{c^4} r P + \frac{u}{r^2} \right) \\
\frac{dP}{dr} &= -\frac{1}{r} \frac{P + \rho c^2}{r - 2u} \left(\frac{8\pi G}{c^4} r^3 P + u \right). \tag{8.47}
\end{aligned}$$

Para determinar u , é necessário reescrever (8.37),

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-g} g}{r} - \frac{e^{-g}}{r^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\
-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (e^{-g}) - \frac{e^{-g}}{r^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\
\frac{2}{r^2} \left[-\frac{r}{2} \frac{d}{dr} (e^{-g}) - \frac{e^{-g}}{2} + \frac{1}{2} \right] &= \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\
-\frac{r}{2} \frac{d}{dr} (e^{-g}) + \frac{1}{2} (1 - e^{-g}) &= \frac{4\pi G}{c^2} \rho r^2,
\end{aligned}$$

de forma a obter

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho r^2, \tag{8.48}$$

que integrando na variável radial de 0 à r , se tem

$$\begin{aligned}
\int_0^r \left(\frac{du}{dr'} \right) dr' &= \frac{G}{c^2} \left[4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right] \\
\int_{u(0)}^{u(r)} du' &= \frac{G}{c^2} M(r) \\
u(r) &= \frac{G}{c^2} M(r). \tag{8.49}
\end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (8.47), chega-se finalmente a equação TOV

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)M(r)}{r^2} \left[\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right)^{-1} \right], \tag{8.50}$$

que representa a equação de equilíbrio hidrostático no contexto relativístico. A equação newtoniana, (4.42), é recuperada quando $P(r)/\rho(r)c^2 \ll 1$, $4\pi r^3 P(r)/M(r)c^2 \ll 1$ e $2GM(r)/rc^2 \ll 1$.

A equação TOV foi resolvida por Oppenheimer e Volkov na tentativa de criar um modelo para estrelas de nêutrons, utilizando a equação de estado de um gás de Fermi composto por nêutrons degenerados. Eles chegaram a uma estimativa de massa máxima para esses objetos, conhecida como limite TOV, sugerindo que tais estrelas teriam uma massa máxima de $0,7M_{\odot}$. Atualmente, sabe-se que o limite de massa para essas estrelas está entre $1,17 M_{\odot}$ e $2,16 M_{\odot}$ (REZZOLLA; MOST; WEIH, 2018). Além disso, é possível parametrizar a TOV, onde cada parâmetro introduzido possui uma interpretação física e que impacta nas trajetórias do diagrama massa-raio, como apresentado em (VELTEN; OLIVEIRA; WOJNAR, 2016). Tais parâmetros podem mostrar a relação de cada parte da TOV com possíveis teorias de extensões da gravidade.

8.3 Lane-Emden relativística

Equações diferenciais como a TOV, altamente não lineares, são normalmente resolvidas através de métodos numéricos de integração. Contudo a obtenção de soluções analíticas é de grande valor e aumenta a precisão de um modelo. Assim, em 1964, Robert F. Tooper realizou o estudo da equação de estado politrópica aplicada ao cenário relativístico em (Tooper, 1965), obtendo uma solução analítica para o índice politrópico $n = 0$. Para isso, ele utilizou as variáveis adimensionais introduzidas no capítulo 7 em (7.11) e o comprimento característico definido em (7.17) em conjunto com outros novos parâmetros, sendo eles σ e $v(\xi)$, dados, respectivamente, por

$$\sigma = \frac{K\rho_c^{1/n}}{c^2} = \frac{P_c}{\rho_c c^2}, \quad (8.51)$$

$$v(\xi) = \frac{M}{4\pi a^3 \rho_c} \frac{c^2}{GM} u. \quad (8.52)$$

O parâmetro relativístico σ é interpretado como a razão da pressão em relação a densidade de energia no centro da esfera, como mostra (8.51), enquanto $v(\xi)$ é definido com o objetivo de tornar (8.50) adimensional.

Com essas definições, Tooper obteve uma equação equivalente à equação de Lane-Emden no cenário relativístico, que é escrita como

$$\left(\frac{1 - 2\sigma(n+1)v/\xi}{1 + \sigma\theta} \right) \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + v + \sigma\xi\theta \frac{dv}{d\xi} = 0. \quad (8.53)$$

Além disso, a definição de $v(\xi)$ apresentada em (8.52) juntamente com (8.49) e (7.11) nos permite escrever

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n. \quad (8.54)$$

Essas duas equações fecham o sistema de equações que deve ser resolvido para obtenção de parâmetros estruturas de uma estrela relativística.

Para resolver tais equações, é necessário fornecer os valores de n e σ e utilizar as condições de contorno para variável θ apresentadas em (7.20). Além dessas, como $v(\xi)$ depende de u e $u(0) = 0$, tem-se também que

$$v(0) = 0. \quad (8.55)$$

Para $n = 0$, a equação (8.54) se torna

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2, \quad (8.56)$$

que ao ser integrada na variável ξ , resulta em

$$\int_0^\xi \left(\frac{dv}{d\xi'} \right) d\xi' = \int_0^\xi \xi'^2 d\xi' \Rightarrow v(\xi) = \frac{\xi^3}{3}. \quad (8.57)$$

Substituindo (8.56) e (8.57) em (8.53), se obtém

$$\left(\frac{3 - 2\sigma\xi^2}{1 + \sigma\theta} \right) \frac{d\theta}{d\xi} + (1 + 3\sigma\theta)\xi = 0, \quad (8.58)$$

que pode ser reorganizada, separando as variáveis θ e ξ , e integrada de 0 a um ξ qualquer,

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{1}{(1 + \sigma\theta)(1 + 3\sigma\theta)} \left(\frac{d\theta}{d\xi'} \right) d\xi' &= - \int_0^\xi \frac{\xi'}{3 - 2\sigma\xi'^2} d\xi' \\ \int_{\theta(0)}^{\theta(\xi)} \frac{1}{(1 + \sigma\theta)(1 + 3\sigma\theta)} d\theta &= - \int_0^\xi \frac{\xi'}{3 - 2\sigma\xi'^2} d\xi'. \end{aligned} \quad (8.59)$$

A parte direita da equação pode ser integrada com uma substituição simples, onde $w = 3 - \sigma\xi^2$ e, conseqüentemente, $dw/d\xi = -4\sigma\xi$. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} - \int_0^\xi \frac{\xi'}{3 - 2\sigma\xi'^2} d\xi' &= \frac{1}{4\sigma} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{4\sigma} \ln |w| \\ &= \left[\frac{1}{4\sigma} \ln |3 - 2\sigma\xi^2| \right]_0^\xi \\ &= \frac{1}{4\sigma} \ln \left| \frac{3 - 2\sigma\xi^2}{3} \right|. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Já a parte à esquerda, precisa ser reescrita na forma de frações parciais, de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \sigma\theta)(1 + 3\sigma\theta)} &= \frac{A}{1 + \sigma\theta} + \frac{B}{1 + 3\sigma\theta} \\ 1 &= A(1 + 3\sigma\theta) + B(1 + \sigma\theta) \\ 1 &= (A + B) + \sigma\theta(3A + B). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Como inicialmente o numerador não possui nenhum termo linear em θ , temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + B = 0, \end{cases} \quad (8.62)$$

que possui como solução $A = -1/2$ e $B = 3/2$. Assim, segue que

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(\xi)} \frac{1}{(1 + \sigma\theta)(1 + 3\sigma\theta)} d\theta = -\frac{1}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(\xi)} \frac{d\theta}{1 + \sigma\theta} + \frac{3}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(\xi)} \frac{d\theta}{1 + 3\sigma\theta}, \quad (8.63)$$

onde ambas integrais são resolvidas realizando substituições simples, sendo elas $x = 1 + \sigma\theta \rightarrow dx/d\theta = \sigma$ e $y = 1 + 3\sigma\theta \rightarrow dy/d\theta = 3\sigma$, levando a

$$\frac{1}{2\sigma} \left[\ln \left| \frac{1 + 3\sigma\theta}{1 + \sigma\theta} \right| \right]_{\theta(0)}^{\theta(\xi)} = \frac{1}{2\sigma} \ln \left| \frac{(1 + 3\sigma\theta(\xi)) (1 + \sigma)}{(1 + \sigma\theta(\xi)) (1 + 3\sigma)} \right|. \quad (8.64)$$

Agora, retornando com os resultados (8.64) e (8.60) em (8.53), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma} \ln \left| \frac{(1 + 3\sigma\theta(\xi)) (1 + \sigma)}{(1 + \sigma\theta(\xi)) (1 + 3\sigma)} \right| &= \frac{1}{4\sigma} \ln \left| 1 - \frac{2}{3}\sigma\xi^2 \right| \\ \ln \left| \frac{(1 + 3\sigma\theta(\xi)) (1 + \sigma)}{(1 + \sigma\theta(\xi)) (1 + 3\sigma)} \right| &= \ln \left| \left(1 - \frac{2}{3}\sigma\xi^2 \right)^{1/2} \right| \\ \frac{(1 + 3\sigma\theta(\xi)) (1 + \sigma)}{(1 + \sigma\theta(\xi)) (1 + 3\sigma)} &= \left(1 - \frac{2}{3}\sigma\xi^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

que, ao isolar isolar nossa função $\theta(\xi)$, resultará em

$$\sigma\theta(\xi) = \frac{(1 + 3\sigma) \left(1 - \frac{2}{3}\sigma\xi^2 \right)^{1/2} - (1 + \sigma)}{3(1 + \sigma) - (1 + 3\sigma) \left(1 - \frac{2}{3}\sigma\xi^2 \right)^{1/2}}. \quad (8.66)$$

Como estamos trabalhando com uma solução para equação de equilíbrio hidrostática, é interessante obter o valor de ξ_R , associado ao fim da estrutura estelar. Isso é obtido quando $\theta(\xi_R) = 0$ e nos leva a

$$\xi_R = \frac{\sqrt{6(1 + 2\sigma)}}{1 + 3\sigma}. \quad (8.67)$$

Essas soluções são válidas apenas para $n = 0$ e, de acordo com Topper, em (Tooper, 1965), não é possível obter soluções para as equações (8.53) e (8.54) onde $\sigma \neq 0$. Assim, em caso que não há solução analítica fechada de uma equação diferencial, a solução em série de potências pode servir como a representação analítica de sua solução (NOUH; SAAD, 2014). É importante entender que essa formulação é válida para o caso relativístico de uma distribuição de matéria estática e esférica utilizando uma equação de estado politrópica utilizando a métrica (8.24). Portanto, outros modelos relativísticos podem ser analisados com outras equações de estado e outras métricas. Além da RG, outras teorias de gravitação vêm sendo estudadas com o objetivo de resolver problemas que ela não explica.

9 Teorias de gravidade modificada

A RG substituiu a teoria da gravitação universal formulada por Newton e é atualmente a teoria moderna da gravitação. Isso não significa que a teoria newtoniana é completamente descartada e ambas têm sua aplicabilidade (no contexto da astrofísica estelar) determinada pela compacidade, conforme (8.17). Além disso, a teoria newtoniana é recuperada com um limite da RG para baixas velocidades e campos fracos.

Desde sua formulação, há mais de 100 anos, a RG obteve grandes sucessos observacionais, como a deflexão da luz próxima a objetos massivos, a explicação da precessão do periélio de Mercúrio, o avermelhamento da luz gerado por um campo gravitacional e a detecção de ondas gravitacionais, entre outros. No entanto, a RG também possui seus limites e é considerada uma teoria incompleta. Existem essencialmente dois motivos para isso. Primeiro, a natureza fundamental das interações é quântica, o que exige uma formulação quântica da gravitação para acessar o regime de pequenas distâncias ou altas energias. Segundo, sabe-se que o universo está se expandindo de forma acelerada, e o mecanismo que causa essa aceleração é desconhecido. Isso indica que a RG por si só não é suficiente para compreensão completa do Universo. Em escalas cosmológicas, um termo adicional, a constante cosmológica Λ , é introduzido nas equações de campo de Einstein para explicar essa expansão acelerada. De certa forma, a existência de um setor escuro no modelo cosmológico padrão, composto de matéria escura e energia escura, motivou a busca por extensões da RG. Essas componentes não possuem detecções diretas, mas suas inferências baseiam-se em observações de efeitos gravitacionais. Esses fatos podem indicar que a teoria da RG deve ser substituída a partir de certas escalas cosmológicas. Essa classe de teorias é chamada de teorias de gravidade modificada.

Apesar das incompatibilidades em certa escala, a RG é uma teoria muito bem estabelecida. Por conta disso, as novas teorias da gravitação devem levar em consideração esses sucessos e resolver problemas que a RG falha em solucionar. Fazer isso é definitivamente uma tarefa bastante complicada e pode levar a modificações das equações no limite newtoniano, de forma que a equação de equilíbrio hidrostático e a equação de Poisson ganham termos adicionais que dependem da teoria em particular (WOJNAR, 2023). Assim, a equação (4.37) pode ser escrita de forma genérica para uma configuração esfericamente simétrica como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi G\rho + tgm(r), \quad (9.1)$$

onde $tgm(r)$ é o termo de gravidade modificada, sendo assumido como uma função específica do raio para dada teoria de gravitação.

Além disso, é interessante obter a equação de Lane-Emden modificada utilizando a

equação de estado politrópica e as variáveis adimensionais θ e ξ . De forma análoga ao que foi feito para obter (7.18) e (8.53), chega-se à

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n + g_{mod0}(\xi), \quad (9.2)$$

onde $g_{mod0}(\xi)$ é um termo adimensional introduzido para uma dada teoria e é definido por

$$g_{mod0}(\xi) = \frac{tgm(r)}{4\pi G\rho_c}, \quad (9.3)$$

que depende da densidade central, onde este parâmetro pode ser ocultado por um outro parâmetro da teoria.

Uma forma inicial para começar a modificar uma teoria é a adição de um grau de liberdade. Em teorias de campo clássicas, como a RG, isso se dá por um campo escalar. Assim, tais campos escalares devem cumprir uma série de requisitos para que a teoria forneça bons resultados.

A relatividade geral pode ser escrita no formalismo lagrangiano¹, que se baseia na Lagrangiana de Einstein-Hilbert, escrita como

$$\mathcal{L}_G = \frac{R}{\kappa} \sqrt{-g}, \quad (9.4)$$

onde g é o determinante da métrica do espaço-tempo, R é o escalar de Ricci e $\kappa = 8\pi G/c^4$. Esta Lagrangiana envolve somente os termos geométricos, por isso o subíndice G . Para uma descrição mais completa é necessário acrescentar um termo associado à presença de matéria, que se assume que é um escalar em função de um tensor $\Theta_{\mu\nu}$ que envolve a distribuição de matéria e energia do sistema, escrito como

$$\mathcal{L}_M = \Theta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad (9.5)$$

de forma que a lagrangiana da RG seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M = \frac{R}{\kappa} \sqrt{-g} + \Theta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (9.6)$$

O termo geométrico \mathcal{L}_G na equação acima transforma-se como um escalar sob mudanças de referencial, dependendo unicamente da métrica e de suas derivadas (BITTENCOURT, 2022). Pelo princípio da equivalência, é possível adotar um referencial localmente plano no espaço-tempo, onde a métrica de Minkowski é recuperada e, conseqüentemente, suas derivadas se anulam. Assim, a importância dessa formulação na relatividade geral está no fato de que a lagrangiana, sendo um escalar, permanece invariável sob transformações de referencial.

¹ Para uma leitura mais detalhada sobre o formalismo lagrangiano aplicado à relatividade geral, ver (BITTENCOURT, 2022).

Uma generalização da RG é obtida ao introduzir uma função arbitrária da curvatura, na qual o termo \mathcal{L}_G é modificado para

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}f(R), \quad (9.7)$$

definindo assim uma classe de teorias conhecidas como teorias $f(R)$ ². Essas teorias foram propostas para enfrentar desafios no regime de altas energias, como o universo inflacionário mas, especialmente após a descoberta da expansão acelerada do Universo, também se tornaram alternativas para o universo tardio. Elas podem ser interpretadas como modelos de modificações geométricas, capazes de explicar a expansão acelerada do Universo sem a necessidade de introduzir uma nova interação fundamental, como um campo escalar, ou uma componente exótica, como a energia escura (BESSA; OTTONI, 2022).

Assim, a próxima classe de teorias que modificam a Relatividade Geral deve introduzir um campo escalar ϕ , onde a Lagrangiana é expressa como

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}f(\phi, X, R), \quad (9.8)$$

sendo $X = \phi_\mu\phi^\mu$ o termo cinético quadridimensional associado ao campo ϕ . As teorias que incorporam um campo escalar são chamadas de teorias escalares-tensoriais. Dentre essas teorias, destacam-se aquelas que preservam as equações de movimento de segunda ordem, algo essencial para evitar problemas de estabilidade, sendo a mais geral delas a teoria de Horndeski, proposta em 1974 por Gregory W. Horndeski em (HORNDESKI, 1974). A partir da teoria de Horndeski, é possível também identificar outras teorias conhecidas, como Brans-Dicke e Cubic Galileon, além de recuperar as teorias $f(R)$.

As teorias escalares-tensoriais podem resolver os problemas que a RG enfrenta ao explicar a expansão acelerada do Universo, sem a necessidade da existência da matéria escura e energia escura. No entanto, isso gera um novo desafio, conhecido como problema do cobertor curto, onde, ao solucionar os problemas da RG em grandes escalas, surgem novas dificuldades em pequenas escalas (escalas próximas a do sistema solar) (OTTONI et al., 2021). Esse problema é abordado por meio de mecanismos chamados de blindagem, que têm como objetivo garantir que as teorias de gravidade modificada recuperem a RG em nível local, mantendo as características em escalas cosmológicas. Os testes locais, onde a RG é bem sucedida, são realizados em regiões com densidades muito maiores do que aquelas realizadas em escalas cosmológicas. Dessa forma, os novos graus de liberdade introduzidos pelos campos escalares nessas teorias têm sua propagação suprimida em regiões densas.

Os principais mecanismos de blindagem são o mecanismo Camaleão (“*chameleon*”) e o de Vainshtein. O mecanismo Camaleão estabelece que os campos escalares introduzidos se tornam mais massivos em ambientes mais densos, o que inibe sua propagação, e menos

² Uma abordagem completa sobre as teorias $f(R)$ pode ser encontrada em FELICE; TSUJIKAWA, 2010.

massivos em ambientes menos densos. Essa modificação advém de uma dependência da forma do termo potencial do campo com a densidade do meio. Já o mecanismo de Vainshtein afeta o termo cinético do campo escalar, que envolve suas derivadas, passando a depender da densidade do meio, o que resulta na sua supressão em meios mais densos. Por esse motivo, pode-se dizer que a inércia associada ao campo escalar é afetada. Para um aprofundamento no mecanismo Camaleão fica a sugestão de leitura (KHOURY; WELTMAN, 2004b; KHOURY; WELTMAN, 2004a) e para o mecanismo de Vainshtein (VAINSHTEIN, 1972).

O mecanismo de Vainshtein possui um problema que é o fato que ele não funciona no interior de corpos muito massivos, como estrelas, em extensões da teoria de Horndeski, conhecidas por *beyond-Horndeski*³. De forma simplificada, tal classe de teorias relaxa vínculos usuais da teoria de Horndeski, o que resulta em derivadas de ordens superiores, porém, livre de instabilidades. Assim, o mecanismo de Vainshtein não é eficaz no interior de um corpo massivo, mas mantém sua validade nos arredores do corpo. Isso significa que as teorias de gravidade modificada podem impactar as equações de estrutura estelar.

Para analisar tal problema considera-se a métrica genérica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) no limite de espaço-tempo plano (pequenas escalas), esféricamente simétrica, dada por

$$ds^2 = -[1 + 2\Phi(t, \vec{x})]c^2 dt^2 + a(t)^2[1 - 2\Psi(t, \vec{x})]\delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.9)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala unitário, $\Phi(t, \vec{x})$ e $\Psi(t, \vec{x})$ são os potenciais gravitacionais, onde o segundo é associado à anisotropia. Além disso, tem-se o campo escalar ϕ introduzido nas teorias,

$$\phi = \varphi(t) + \pi(t, \vec{x}), \quad (9.10)$$

em que $\varphi(t)$ é a parte homogênea do campo e $\pi(t, \vec{x})$ representa a perturbação local. Para o mecanismo de Vainshtein ser efetivo a condição $\Phi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x})$ deve ser satisfeita. Assim sendo, os novos termos de interação preditos pelas teorias de *beyond-Horndeski* destroem tal condição no interior de objetos massivos, fazendo com que o mecanismo de Vainshtein perca sua efetividade, mantendo suas propriedades nas proximidades do corpo. Para um aprofundamento neste problema fica a sugestão de leitura dos artigos (KOBAYASHI; WATANABE; YAMAUCHI, 2015; CRISOSTOMI; KOYAMA, 2018; SAITO et al., 2015).

³ As teorias escalar-tensoriais que envolvem derivadas de ordem superior de um campo escalar em suas Lagrangianas geralmente resultam na introdução de um grau de liberdade (ou campo escalar) do tipo “fantasma” de Ostrogradsky. No entanto, é possível formular classes de Lagrangianas livres desse tipo de campo escalar, que propagam três graus de liberdade. Os primeiros modelos, conhecidos como modelos de Horndeski, foram construídos sob a condição de que das equações de movimento fossem de segunda ordem. Porém, descobriu-se recentemente que essa condição não é indispensável para evitar campos fantasmas, resultando no surgimento das chamadas teorias *beyond-Horndeski* (BABICHEV et al., 2016).

Em caso de simetria esférica, quando a coordenada radial é bem menor do que o raio de Vainshtein⁴, se considerando uma configuração quasi-estática, tem-se

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{c^2 r^2} + \frac{\Upsilon_1 G}{4 c^2} \frac{d^2 M(r)}{dr^2}, \quad (9.11)$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{GM(r)}{c^2 r^2} - \frac{5\Upsilon_2 G}{4 c^2 r} \frac{dM(r)}{dr} + \frac{\Upsilon_3 G}{c^2} \frac{d^2 M(r)}{dr^2}, \quad (9.12)$$

onde $M(r)$ é massa do objeto contida em uma esfera de raio r e Υ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) é uma constante que depende dos parâmetros da teoria definida pela lagrangiana (9.8) e nos cenários mais simples é constante e pode-se encontrar restrições a partir de cenários estelares (BANERJEE et al., 2021).

Para um caso mais geral, onde a anisotropia é considerada, além da pressão radial, a pressão tangencial (associada a anisotropia) também possui importância. Contudo, é um caso mais complexo e não será discutido aqui. Assim, desconsiderando a anisotropia do sistema, isto é, $\Psi(\vec{x}) \ll 1$, a covariância do tensor momento-energia, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$, leva a

$$\frac{dP}{dr} = -\rho c^2 \frac{d\Phi}{dr}, \quad (9.13)$$

consequentemente,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2} - \frac{\Upsilon}{4} G \rho \frac{d^2 M(r)}{dr^2}, \quad (9.14)$$

onde $\Upsilon_1 = \Upsilon$ por simplicidade.

Ao olhar para o gradiente de pressão apresentado em (9.14) e compará-lo com (4.42) percebe-se que há um termo adicional com a inclusão do parâmetro Υ que caracteriza o regime de gravidade modificada e, também, uma derivada segunda da massa. Isso nos permite afirmar que nesse novo contexto há uma modificação na equação de equilíbrio hidrostático no interior do objeto, mas para $r > R$ a expressão usual é retomada, visto que $M(r)$ é constante e igual a massa total do corpo M .

Além disso, pode-se utilizar a equação de estado politrópica (7.10) e as variáveis adimensionais apresentadas em (7.11) para obter a equação de Lane-Emden modificada

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\left(1 + \frac{\Upsilon}{4} n \xi^2 \theta^{n-1} \right) \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\Upsilon}{2} \xi^3 \theta^n \right] = -\theta^n. \quad (9.15)$$

Essa equação é encontrada para as teorias escalares tensoriais, em particular as teorias beyond-Horndeski. Além disso, sua forma pode ser alterada, dependendo da teoria (WOJNAR, 2023). Obviamente, para $\Upsilon = 0$ recupera-se (7.18).

A equação de Lane-Emden modificada é extremamente importante para entender os impactos do parâmetro Υ nas equações de estrutura estelar. Uma primeira restrição à

⁴ O raio de Vainshtein, r_V , é uma escala característica que delimita onde a teoria de gravidade modificada entra em um regime não-linear (BABICHEV; DEFFAYET, 2013). Além disso, também é o raio em que a teoria se reduz à Relatividade Geral (FERRARI et al., 2023).

este parâmetro pode ser obtida olhando para o caso em que o índice politrópico n é igual a zero. Neste caso a densidade é constante, como mostra (7.11), e a equação de conservação da massa (4.41), ao ser integrada de 0 a r , resulta em

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_C. \quad (9.16)$$

Consequentemente, a equação de equilíbrio hidrostático (9.14) se torna

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^3 r - 2\pi G \Upsilon \rho^2 r = -\left(\frac{2}{3} + \Upsilon\right) 2\pi G \rho^2 r, \quad (9.17)$$

que ao ser integrada de 0 a r , tem-se

$$P = P_c - \left(\frac{2}{3} + \Upsilon\right) 2\pi G \rho^2 r, \quad (9.18)$$

onde a constante de integração P_c é a pressão central.

Quando $n = 0$, diz-se que se trata de um fluido incompressível, já que ρ é constante. Assim sendo, o raio da estrela é definido onde a pressão se anula, isto é, $P(r = R) = 0$. Com isso, (9.18) leva a

$$R = \sqrt{\frac{3P_c}{\pi G \rho^2 (2 + 3\Upsilon)}}. \quad (9.19)$$

Ao analisar a equação acima, observa-se que o raio é inversamente proporcional ao parâmetro Υ . Esse comportamento é demonstrado na figura 16, onde o objeto se torna mais compacto a medida que Υ aumenta. Além disso, à medida que esse parâmetro se aproxima de $-2/3$, o raio tende ao infinito. Como o denominador não pode ser igual a zero, se estabelece uma condição de estabilidade: $\Upsilon > -2/3$. Caso contrário, o raio assume um valor complexo, o que inviabiliza a existência de uma configuração estelar.

Outras limitações para o parâmetro Υ já foram identificadas. Ao analisar a massa mínima necessária para a queima de hidrogênio em anãs marrons, foi obtido $\Upsilon \leq 1.6$. Já o estudo de anãs brancas resultou nas restrições $-0.48 \leq \Upsilon \leq 0.54$ e $-0.18 \leq \Upsilon \leq 0.27$ para níveis de confiança de 5σ e 1σ , respectivamente. Um limite mais rigoroso foi encontrado em cenários com anãs brancas, com $\Upsilon \leq 0.18$. Além disso, um limite inferior foi estabelecido considerando cenários de gravidade forte, $\Upsilon > -0.44$, enquanto a análise da física das anãs marrons indicou $\Upsilon \geq -0.12$ (BANERJEE et al., 2021).

Outro exemplo de como as teorias de gravidade modificada afetam a estrutura estelar pode ser observada na temperatura superficial de uma estrela completamente convectiva, que no caso newtoniano é dado por

$$T_{ef} \simeq 2600\mu^{13/51} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{7/51} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/102} \text{ Kelvin}, \quad (9.20)$$

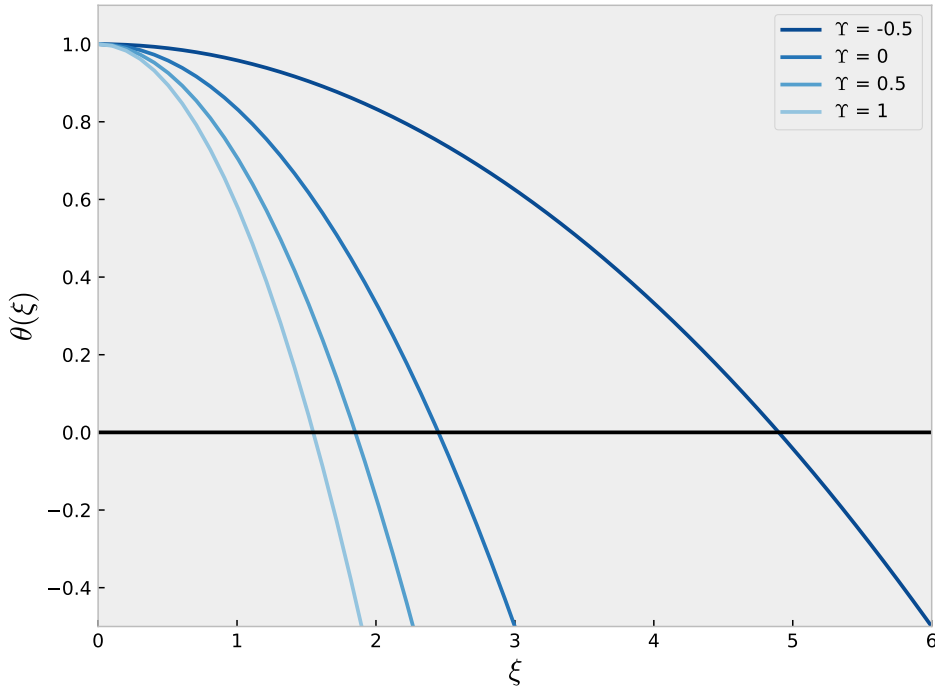


Figura 16 – Soluções da Equação de Lane-Emden modificada, com o parâmetro da gravidade modificada associado as teorias de *beyond-Horndeski* $\Upsilon = -0.5, 0, 0.5$ e 1 .

enquanto em *beyond-Horndeski* assume a forma

$$T_{ef} = 2487.77 \mu^{13/51} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{7/51} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/102} \left(\frac{\left(\frac{1 + \Upsilon/2}{Z} \right)^{4/3}}{\xi_R^5 \sqrt{-\theta'}} \right)^{1/17} \text{ Kelvin} \quad (9.21)$$

como apresentado em (GOMES; WOJNAR, 2023). Nesta equação μ é o peso molecular médio e Z é a metalicidade. Além disso, para uma estrela de massa M , ambas as equações mostram a evolução (quase verticais) no diagrama HR das estrelas pré-sequência principal.

As teorias de gravitação modificada oferecem uma nova perspectiva sobre o fenômeno gravitacional, apresentando-se como uma alternativa ao modelo cosmológico padrão. Essas teorias modificam a ação de Einstein-Hilbert, bem como a equação TOV, o que impacta as propriedades físicas das estrelas. A análise das observações atuais e futuras permite impor restrições a essas teorias.

No caso de estrelas relativísticas, onde existe incerteza sobre a equação de estado da matéria em densidades supranucleares, essa incerteza se combina com os novos parâmetros introduzidos pelas teorias de gravidade modificada, resultando em uma nova fenomenologia para previsões típicas dos modelos de estrutura estelar, como a relação massa-raio, massas máximas e momento de inércia. Para estrelas não relativísticas, a modificação da equação de Poisson pode enfraquecer ou fortalecer a força gravitacional dentro dos corpos astrofísicos, causando mudanças na massa, raio, densidade central ou luminosidade da estrela, afetando,

por exemplo, o limite de Chandrasekhar para anãs brancas, ou a massa mínima para a queima de hidrogênio em anãs marrons de alta massa.

Existem diversas abordagens para essas teorias, e por isso recomenda-se a leitura de (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2020), que apresenta uma análise abrangente das teorias escalar-tensoriais no formalismo métrico. Além disso, sugere-se também a leitura de (OLMO, 2012), onde as teorias escalar-tensoriais são discutidas no contexto do formalismo de Palatini.

Considerações finais

Este trabalho foi estruturado em três grandes partes, com o objetivo de oferecer uma introdução à astrofísica, buscando manter o texto acessível para que qualquer estudante, ao lidar com esses temas pela primeira vez, possa acompanhar e desenvolver seu aprendizado de maneira clara e eficaz.

Na primeira parte, o foco esteve no desenvolvimento teórico e histórico da teoria da radiação, destacando o papel dos cientistas Wien, Rayleigh e Planck. Planck, em particular, foi responsável por obter resultados teóricos em concordância com as observações experimentais, além de romper paradigmas ao introduzir o conceito de *quantum*, que se revelou revolucionário para a ciência. Também foram abordadas as técnicas de fotometria, com a discussão sobre os conceitos de luminosidade e magnitude, essenciais para observações astronômicas. Além disso, a espectroscopia foi discutida, explicando a origem das linhas de emissão e absorção, seu significado nas observações e sua importância na compreensão da física estelar e na classificação estelar.

Na segunda parte, central para o desenvolvimento da terceira, foram introduzidas as equações fundamentais que governam a estrutura estelar: a equação de continuidade da massa (4.41), a equação de equilíbrio hidrostático (4.42), a equação de conservação da energia (5.45) e as equações de transporte radiativo (6.36) e transporte convectivo (6.111). As duas primeiras foram derivadas assumindo que as estrelas são objetos isolados (auto-gravitantes), esféricamente simétricos, sem rotação, sem campos magnéticos e estaticamente radiais, o que implica que os parâmetros estelares dependem apenas do raio r .

Na terceira e última parte, voltada para a modelagem estelar, foi abordado um caso particular de sistema barotrópico: as transformações politrópicas, onde a mudança de estado é quase-estática. Esse caso resulta em uma única equação para a estrutura estelar em termos de variáveis adimensionais, conhecida como equação de Lane-Emden, a partir da qual é possível obter parâmetros físicos das estrelas. No entanto, essa abordagem apresenta uma limitação, pois desconsidera os efeitos do transporte de energia, resultando em uma estratificação da temperatura no interior estelar conforme a pressão, de acordo com a relação de um gás ideal. A equação de Lane-Emden newtoniana possui soluções analíticas para os índices politrópicos 0, 1 e 5, mas também pode ser resolvida numericamente. Além disso, foi apresentada a equação de equilíbrio hidrostático relativística, conhecida como equação TOV, derivada da relatividade geral, necessária para descrever estrelas relativísticas como estrelas de nêutrons, que não podem ser adequadamente descritas pela abordagem newtoniana. Por fim, foi discutida a motivação por trás das teorias de gravidade modificada, com foco nas teorias *beyond-Horndeski*, e como essas teorias podem

modificar as equações de estrutura estelar, levando a uma versão modificada da equação de Lane-Emden. Esse campo está em crescente desenvolvimento e continuará até que observações e previsões teóricas apresentem resultados satisfatórios e novos desafios surjam.

Este trabalho pode ser expandido de várias maneiras, como, por exemplo, uma análise mais aprofundada do desenvolvimento teórico das teorias de Horndeski e *beyond-Horndeski*, bem como de outras teorias escalar-tensoriais e seus diferentes formalismos. Também é possível aplicar essas teorias no contexto da astrofísica, analisando seus impactos nas equações de estrutura estelar e comparando-os com dados observacionais, ou realizando uma análise desses dados para obter restrições para essas teorias. Além disso, essas novas teorias podem ajudar a resolver problemas já identificados, como a discrepância entre a relação massa-raio e as observações, conforme discutido por (TORRES; ANDERSEN; GIMÉNEZ, 2009).

Referências

- ALMEIDA, G. et al. Análise do comportamento de lentes em vidro de sílica perante a utilização de radiação solar concentrada. *LNEG - Laboratório Nacional de Energia e Geologia*, 11 2020.
- BABICHEV, E.; DEFFAYET, C. An introduction to the vainshtein mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 18, p. 184001, set. 2013. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/30/18/184001>>.
- BABICHEV, E. et al. Relativistic stars in beyond horndeski theories. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 33, n. 23, p. 235014, nov. 2016. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/23/235014>>.
- BANERJEE, P. et al. Constraining modified gravity from tidal phenomena in binary stars. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 910, n. 1, p. 23, mar 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F1538-4357%2Fabd3>>.
- BARROS, M. C. de. As mulheres do harvard college observatory: Henrietta swan leavitt-a mulher que descobriu como medir a distância das galáxias. *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*, v. 18, p. 12–21, 2018.
- BESSA, P.; OTTONI, T. Um primeiro passo em direção à modificação da gravidade: teorias escalar-tensoriais e $f(r)$. *Cadernos de Astronomia*, v. 3, n. 2, p. 128–143, 2022.
- BITTENCOURT, T. F. *Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral*. Dissertação (Monografia) — Universidade Federal Fluminense, 2022.
- BOHR, N. On the Constitution of Atoms and Molecules. *Phil. Mag. Ser. 6*, v. 26, p. 1–24, 1913.
- CAIRE, E. *A História da Origem da Curva Normal*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2013.
- CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. 2. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2017.
- CARUSO, F.; OGURI, V. *Física Moderna - Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- CHANDRASEKHAR, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys. J.*, v. 74, p. 81–82, 1931.
- CHANDRASEKHAR, S. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. New York: Dover Publications, 2010.
- CRISOSTOMI, M.; KOYAMA, K. Vainshtein mechanism after gw170817. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 021301, Jan 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.021301>>.

EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, v. 322, p. 891, 1905.

EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7, p. 769, 1916.

FELDENS, B.; DIAS, P. M. C.; SANTOS, W. M. S. E assim se fez o quantum. . . *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 32, n. 2, p. 2602, Apr 2010. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172010000200015>>.

FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f(r) theories. *Living Reviews in Relativity*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 1, jun 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrr-2010-3>>.

FERRARI, A. G. et al. Cosmological effects of the galileon term in scalar-tensor theories. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 6, set. 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.063520>>.

FILHO, K. D. S. O.; SARAIVA, M. D. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

FILHO, O. L. d. S.; FERREIRA, M. Invariância das equações de maxwell por transformações de lorentz: pontes conceituais via derivação como alternativa ao cálculo tensorial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 45, p. e20230231, 2023. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0231>>.

GAPOSCHKIN, C. *Stellar Atmospheres: A Contribution to the Observational Study of High Temperature in the Reversing Layers of Stars*. The Observatory, 1925. (Harvard Observatory monographs). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=L_c5AAAAMAAJ>.

GINGERICH, O. *The Critical Importance of Russell's Diagram*. 2013.

GOMES, D. A.; WOJNAR, A. Early evolution of fully convective stars in scalar–tensor gravity. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 83, n. 6, jun 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11659-9>>.

GONTIJO, L. M. A.; RODRIGUES, C. G. Radiação térmica e a fórmula de planck. *Química Nova*, Sociedade Brasileira de Química, v. 45, n. 10, p. 1303–1314, Oct 2022. ISSN 0100-4042. Disponível em: <<https://doi.org/10.21577/0100-4042.20170942>>.

HERTZSPRUNG, E. Zur strahlung der sterne. i. *Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie*, v. 3, p. 442–449, 1905.

HERTZSPRUNG, E. Zur strahlung der sterne. ii. *Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie*, v. 5, p. 86–107, 1907.

HERTZSPRUNG, E. Über die verwendung photographischer effektiver wellenlaengen zur bestimmung von farbenaequivalenten. *Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam*, v. 22, 1911.

HOCKEY, T. et al. *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*. Berlin: Springer, 2007.

- HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, p. 363–384, 1974.
- HORVATH, J. E. *Astrofísica de Altas Energias*. São Paulo: Edusp, 2020.
- HUBBLE, E. P. Cepheids in spiral nebulae. *Pop. Astr.*; Vol. 33; Page 252-255, v. 33, 1925.
- KHOURY, J.; WELTMAN, A. Chameleon cosmology. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 69, p. 044026, Feb 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.044026>>.
- KHOURY, J.; WELTMAN, A. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 93, p. 171104, Oct 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.171104>>.
- KIPPENHAHN, R.; WEIGERT, A.; WEISS, A. *Stellar Structure and Evolution*. Berlin: Springer, 2012.
- KLEIN, M. J. Max planck and the beginnings of the quantum theory. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, v. 1, n. 5, p. 459–479, 1962. ISSN 00039519, 14320657. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/41133222>>.
- KOBAYASHI, T.; WATANABE, Y.; YAMAUCHI, D. Breaking of vainshtein screening in scalar-tensor theories beyond horndeski. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 91, p. 064013, Mar 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.064013>>.
- LINDSAY, R. B.; HAAR, D. ter. *Lord Rayleigh - The Man and His Work*. United Kingdom: Pargamon Press, 1970.
- LOETTIGERS, A. Samuel pierpont langley and his contributions to the empirical basis of black-body radiation. *Physics in Perspective*, v.5, 262-280 (2003), v. 5, 2003.
- MACIEL, W. J. *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo: IAG/USP, 1991.
- MACIEL, W. J. *Introdução à Estrutura e Evolução Estelar*. São Paulo: Edusp, 2018.
- NEWTON, I.; COHEN, I.; WHITMAN, A. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, 1999. (The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy). ISBN 9780520088160. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=k_NgQgAACAAJ>.
- NOUH, M.; SAAD, A. *A New Analytical Solution to the Relativistic Polytopic Fluid Spheres*. 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1406.1455>>.
- OLMO, G. J. *Introduction to Palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies*. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1212.6393>>.
- OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D.; WOJNAR, A. Stellar structure models in modified theories of gravity: Lessons and challenges. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 876, p. 1–75, set. 2020. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.001>>.

- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb 1939. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>>.
- OTTONI, T. et al. A equação do equilíbrio estelar em teorias modificadas da gravitação. *Cadernos de Astronomia*, v. 2, n. 2, p. 110–122, 2021.
- PHILLIPS, A. *The Physics of Stars*. Wiley, 1994. (Manchester Physics Series). ISBN 9780471940579. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=K5DvAAAAMAAJ>>.
- PLANCK, M. Sobre a lei de distribuição de energia no espectro normal. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, n. 4, 2000.
- REZZOLLA, L.; MOST, E. R.; WEIH, L. R. Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 852, n. 2, p. L25, jan. 2018. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aaa401>>.
- RUSSELL, H. N. “giant” and “dwarf” stars. *The Observatory*, v. 36, p. 324–1913, 1913.
- RUSSELL, H. N. Relations between the spectra and other characteristics of the stars. *Nature*, v. 93, n. 2323, p. 252–258, 5 1914. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/093252a0>>.
- RUTHERFORD, E. The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom. *Phil. Mag. Ser. 6*, v. 21, p. 669–688, 1911.
- SAITO, R. et al. Modified gravity inside astrophysical bodies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2015, n. 06, p. 008, jun 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/06/008>>.
- SALINAS, S. R. A. *Introdução à Física Estatística*. São Paulo: Edusp, 2013.
- SEAGER, S. et al. Mass-radius relationships for solid exoplanets. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 669, n. 2, p. 1279–1297, nov. 2007. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/521346>>.
- STUDART, N. A invenção do conceito de quantum de energia segundo planck. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, n. 4, 2000.
- TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 364–373, Feb 1939. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>>.
- Tooper, R. F. *General-Relativistic Polytopic Fluid Spheres*. Tese (Doutorado) — Illinois Institute of Technology Chicago, jan. 1965.
- TORRES, G.; ANDERSEN, J.; GIMÉNEZ, A. Accurate masses and radii of normal stars: modern results and applications. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer Science and Business Media LLC, v. 18, n. 1–2, p. 67–126, out. 2009. ISSN 1432-0754. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00159-009-0025-1>>.

- VAINSHTEIN, A. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Physics Letters B*, v. 39, n. 3, p. 393–394, 1972. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269372901475>>.
- VALVERDE, C.; BASEIA, B.; BAGNATO, V. S. Mecanismos de alargamento de linhas espectrais atômicas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 4, 2016.
- VELTEN, H.; OLIVEIRA, A. M.; WOJNAR, A. A free parametrized TOV: Modified Gravity from Newtonian to Relativistic Stars. *PoS*, MPC2015, p. 025, 2016.
- VIEIRA, P. C.; MASSONI, N. T.; ALVES-BRITO, A. O papel de cecilia payne na determinação da composição estelar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, v. 43, p. e20210028, 2021. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0028>>.
- WOJNAR, A. *Introduction to stellar and substellar physics in modified gravity*. 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2311.14403>>.
- WRESZINSKI, W. F. *Termodinâmica*. São Paulo: Edusp, 2018.
- ZEILIK, M.; GREGORY, S. *Introductory Astronomy & Astrophysics*. Saunders College Pub., 1998. (Saunders golden sunburst series). ISBN 9780030062285. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iH7vAAAAMAAJ>>.