UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MARIO ROCHA JUNIOR

COLAPSO ESFÉRICO EM PRESENÇA DE ENERGIA ESCURA

VITÓRIA-ES

2017

MARIO ROCHA JUNIOR

COLAPSO ESFÉRICO EM PRESENÇA DE ENERGIA ESCURA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella (Orientador).
Universidade Federal do Espirito Santo

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi
Universidade Federal do Espírito Santo - CEUNES

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Luciano Casarini
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Valerio Marra
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA-ES
2017

COLAPSO ESFÉRICO EM PRESENÇA DE ENERGIA ESCURA

MARIO ROCHA JUNIOR

COLAPSO ESFÉRICO EM PRESENÇA DE ENERGIA ESCURA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica.

ORIENTADOR: PROF. DR. OLIVER FABIO PIATTELLA

Vitória

17 de abril de 2017

© 2017, Mario Rocha Junior.
Todos os direitos reservados.

Rocha Junior, Mario

D1234p Colapso Esférico em Presença de Energia Escura / Mario Rocha Junior. — Vitória, 2017
xiii, 68 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador: Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella

1. — Dissertações. 2. — Dissertações.
I. Orientador. II. Título.

CDU 000.0*00.00

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha,
ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`,
armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG
(o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`),
terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={`*nome do arquivo*`}`
ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:
`approval=[`*ajuste*`][`*escala*`]{`*nome do arquivo*`}`
onde *ajuste* Ãľ uma distância para deslocar a imagem para baixo
e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:
`approval=[-2cm][0.9]{`*nome do arquivo*`}`
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

Dedicado à minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças nos momentos em que mais precisei e me questionei sobre minha capacidade em realizar este trabalho.

Um enorme agradecimento a toda minha família, meu pai Mario, minha mãe Marinete e minha irmã Camila por me dar sempre o suporte para continuar e chegar até aqui. Ao meu sobrinho Heitor pelos momentos de descontração e pelas risadas que ele me proporcionou ao longo deste tempo.

À minha namorada, melhor amiga e companheira Marina Midori que mesmo distante esteve sempre comigo enviando boas vibrações, me encorajando a buscar o meu melhor e a crescer como profissional e como pessoa.

Ao meu amigo Gregório pelos 20 anos de amizade e por me ajudar diversas vezes a escrever esta dissertação com grandes conselhos e dicas.

Ao professor e orientador Oliver por ter me aceito como seu aluno, pela paciência, pelos ensinamentos e por acreditar que eu poderia fazer um bom trabalho.

Ao professor Júlio Fabris por ser uma grande fonte de inspiração e um exemplo de profissional que tanto almejo ser.

Aos professores Antônio Brasil, Jair Checon, Oliver Piattella, Júlio Fabris, Davi Rodrigues e Clisthenis Constantinidis por compartilhar seus conhecimentos através das ótimas aulas ministradas.

Aos meus grandes amigos da pós-graduação Pedro, Cássio, Edison, Eddy, Felipe, Carla, Tays, Nicolas, Kim, Messias, Denis, Badke, Michael, Mariniel, Álefe, Sara e David com quem tive a honra de dividir meus melhores momentos e que sempre se prontificaram a me ajudar quando eu não tinha mais ninguém para isso.

Ao secretário da pós-graduação José Carlos.

Agradeço também à CAPES pelo suporte financeiro.

*"**Seja a mudança que você quer ver no mundo.**"*
(Mahatma Gandhi)

Resumo

É um fato já conhecido que o Universo passa por um processo de expansão onde há fortes evidências de que a presença da denominada energia escura é a responsável por acelerar este processo. Sob este ponto de vista este trabalho visa utilizar a teoria do colapso esférico para estudar o comportamento de uma estrutura, aqui conhecida como sobredensidade imersa em um Universo de background de Friedmann-Robertson-Walker. Considerando a sua densidade como um fluido ideal cuja a equação de estado $p = w\rho$ aplicaremos a teoria inicialmente em um Universo de Einstein-de Sitter passando a seguir para o modelo de Universo com a presença de escura onde analisaremos o ΛCDM bem como o wCDM com valores específicos para a constante w.

Abstract

It is a known fact that the Universe goes through of expansion where there is strong evidences that the presence of the so-called dark energy is responsible for accelerating this processe. From this point of view, this work aims to use the spherical collapse theory to study the behaviour of a structure, here know as overdensity immersed in a Friedmann-Robertson-Walker background universe. Considering its density as an ideal fluid whose state equation is $p = w\rho$ we will initially apply the theory in an Einstein-de Sitter Universe and then proceed to the universe model with presence of dark energy where we will analyze the ΛCDM and the wCDM models with specific values for the constant w.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um dos principais e mais importantes tópicos acerca da compreensão do Universo está associado à sua origem e posteriormente à formação de estruturas observadas ao longo de sua história. Denominado "*hot Big Bang*", neste modelo é assumido a ocorrência de um evento cataclísmico há cerca de 10^{10} anos, chamado **Big Bang**, onde o universo surgiu e iniciou sua expansão a partir de um ponto singular [1]. Este termo é geralmente usado para designar o modelo cosmológico padrão, que trata-se de um universo homogêneo e isotrópico[1] cuja evolução é governada pelas **equações de Friedmann** que são obtidas através da relatividade geral, de forma que seus principais constituintes podem ser descritos por fluidos de matéria e radiação cujas propriedades cinemáticas correspondem às observadas no Universo real [2][2].

Durante seu processo evolutivo o Universo passou por profundas transformações até chegar na configuração observada atualmente e um importante cenário ocorre durante o período conhecido como **inflação**, que é caracterizada por um breve período de aceleração [3, 4] em sua expansão. Esta fase inflacionária do Universo foi marcada também pelo surgimento de inomogeneidades primordiais que servem como as sementes para a formação das estruturas [3].

No que diz respeito à origem das inomogeneidades, importantes estudos sobre o assunto foram publicados nos anos 80, como por exemplo [5–7], em que afirmam que elas foram originadas de flutuações quânticas e assim seriam responsáveis pelas estruturas que viriam a ser formadas. Em muitos modelos inflacionários essas inomogeneidades produzidas tem propriedades consistentes com as estruturas observadas em larga escala e assim a inflação ofereceria uma explicação promissora

[1]A homogeneidade está associada ao fato de as leis da física serem as mesmas em qualquer ponto tomado como referência. Alem disso, a isotropia implica na física ser a mesmas em qualquer direção, não havendo, portanto, pontos privilegiados.

[2]É claro que o universo real não é exatamente homogêneo e isotrópico, fazendo este modelo ser, até certo ponto, uma abstração.

para a origem física das perturbações iniciais [8].

O ponto fundamental a ser entendido é a maneira como as perturbações[3] evoluem no tempo. Em tempos primordiais (mais precisamente logo após a recombinação) a perturbação ainda encontra-se muito pequena, digamos $\delta << 1$ e sua evolução desenvolve-se no regime linear e neste caso não há condições suficientes para que as primeiras estruturas sejam formadas, havendo então a necessidade de novas técnicas para estudo dessas perturbações no regime não-linear [2].

Ao admitir que o Universo passa pelo processo de expansão, qualquer região particular pertencente a ele necessariamente será submetida às mesmas condições. Seja então esta região preenchida como uma densidade (como matéria, por exemplo) ela sofrerá as consequências da instabilidade gravitacional e como resultado evoluirá para o regime não-linear e neste caso ela irá se "libertar"da expansão geral e iniciará o processo de colapso, onde o tempo em que ele ocorrerá dependerá das condições iniciais das perturbações e do meio onde ela esta imersa [9].

O estudo dessa **sobre-densidade**[4] (ou *overdensity*) bem como a forma como ela se desenvolve no tempo formam a base da teoria de colapso gravitacional do tipo "*Top-Hat*"que é um modelo simplificado de formação de estruturas. Este modelo, que foi introduzido inicialmente no trabalho [10] como uma forma de calcular a evolução dessas sobre-densidades para vislumbrar o regime não-linear da teoria de perturbação [11].

Por fim, neste trabalho contextualizamos a teoria de colapso esférico do modelo "*top-hat*"afim de estudá-lo em um Universo de Friedmann assim como sua aplicação em diferentes possibilidades de colapso. Portanto, a partir dessas informações estruturamos este trabalho da seguinte forma.

- No capítulo 2 será discutido as teorias elementares do universo (seja ele estático ou não) bem como a sua dinâmica no processo evolutivo culminando com a teoria de perturbações que será abordada na parte final do capítulo. Todo este estudo será feito no contexto newtoniano.

- No capitulo 3 a abordagem será no contexto relativístico onde será visto conceitos que serão de importante aplicação nos capítulos seguintes.

- No capítulo 4 a teoria de colapso esférico será inicialmente estudada.

[3]Os termos perturbação e inomogeneidade são sinônimos neste contexto e portanto podem ser usados neste texto para designar a mesmas quantidades físicas.

[4]O termo *onverdensity* é largamente utilizado para designar uma estrutura cusja densidade é superior do que a densidade média do Universo

- No capítulo 5 aplicaremos os conceitos dos capítulos anteriores em modelos de colapso esférico para os casos CDM, ΛCDM e wCDM.
- No capitulo 6 será reservado à conclusão do trabalho e as considerações finais.

Capítulo 2

DINÂMICA NA COSMOLOGIA NEWTONIANA

2.1 Introdução

Iniciaremos aqui uma breve discussão acerca de alguns dos temas que servirão de base para desenvolvimento do trabalho que virá a seguir e para isso iremos inicialmente utilizar como abordagem a teoria Newtoniana.

2.2 Dinâmica de um Universo em Expansão

2.2.1 Introdução

Uma importante característica do Universo é o fato de que para grandes escalas ele apresenta-se homogêneo e isotrópico e durante muito tempo estas afirmações foram tratadas como uma suposição, denominada **princípio cosmológico** que veio a ser confirmado no final do século XX e que pode ser enunciado como segue:

> O universo é homogêneo e evolui de tal forma que a todo instante t ele apresenta o mesmo aspecto para todo o observador que participa da expansão.

Ou seja, este princípio estabelece que não há centro privilegiado no universo e que é possível definir um tempo válido universalmente. [12]

Tendo em vista que o tamanho observável do universo é da ordem de 3000 Mpc estudos utilizando *redshift* sugerem que a homogeneidade e isotropia do universo verifica-se apenas em escalas da ordem de 100 Mpc [3, 13] de forma que para uma escala menor há uma grande inomogeneidade e isso indica que o princípio cosmológico citado acima seria válido apenas dentro de um limite de escalas.

Apesar da teoria inflacionária afirmar o fato de que o universo continua homogêneo e isotrópico a distâncias maiores que 3000 Mpc mas tornando-se altamente inomogêneo quando visto em escalas muito maiores do que do caminho observado, isto atenua as esperanças de compreensão do universo como um todo. O fato é que de acordo com as observações é possível estabelecer firmemente que o universo é homogêneo e isotrópico em escalas maiores que 100 Mpc e tem desenvolvido estruturas não homogêneas em escalas menores [3]; além disso existem boas evidências de que o Universo está se expandindo o que significa que a distância entre nós e galáxias distantes era menor em sua história primordial do que é hoje [14]. Esta expansão se dá de acordo com a lei de Hubble.

2.2.2 Lei de Hubble

Sob o contexto apoiado pelo princípio cosmológico em que o Universo esteja se expandindo pode-se tomar quaisquer dois observadores em diferentes pontos afim de estudar como eles movem-se um em relação ao outro. Neste caso escrevemos que a velocidade relativa entre dois referenciais localizados nos pontos A e B como sendo:

$$\vec{v}_{B(A)} = H(t)\vec{r}_{BA}, \tag{2.1}$$

onde:
$\vec{v}_{B(A)}$ é a velocidade do observador B em relação ao observador A; e
$\vec{r}_{BA}$ é a distância relativa entre os dois observadores.

A função H(t) é particularmente importante e é denominada **parâmetro de Hubble** que mede a taxa de expansão do universo. Matematicamente ela é definida como segue [3]:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{2.2}$$

onde a grandeza $a(t)$ é chamada **fator de escala** e descreve a distância entre os observadores em função do tempo, enquanto que o ponto indica uma derivada em relação ao tempo. Como veremos a seguir, o seu comportamento pode ser associado ao tipo de universo estudado no que diz respeito à sua constante de curvatura k. As possibilidades são mostradas na figura (2.1).

A equação (2.1) é denominada **Lei de Hubble**. Note que $\vec{v}_{B(A)}$ pode ser maior que a velocidade da luz se $\vec{r}_{BA}$ for grande o suficiente sem contradizer o princípio de que "nada pode viajar com velocidade superior a da luz "uma vez que este princípio refere-se à velocidade relativa entre dois objetos medida localmente no

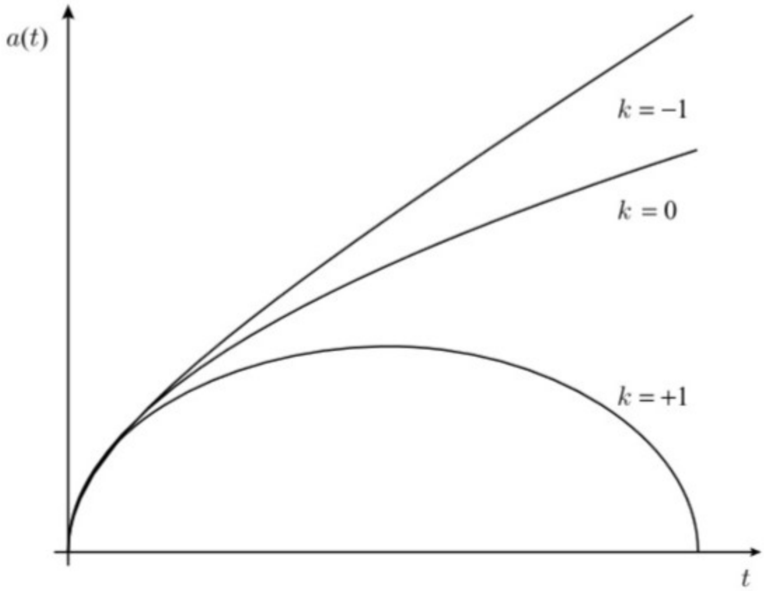


Figura 2.1. Representação do comportamento do fator de escala para universos aberto, plano e fechado.

mesmo espaço-tempo e não à velocidade entre dois corpos distantes e definida globalmente [15].

2.3 Cosmologia Newtoniana

Seja primeiramente um universo infinito, homogêneo e isotrópico em expansão contendo um fluido composto por matéria cuja equação de estado seja representada por p. Se tivermos uma situação onde p seja muito pequeno em relação à sua densidade ρ então tratamos de um fluido chamado de poeira[1].

Podemos escolher um ponto arbitrário deste universo e considerar uma expansão a partir dele de forma que, como consequência da homogeneidade e isotropia, teremos uma região esférica cujo raio crescerá com o tempo e poderá ser descrito matematicamente como

$$R(t) = a(t)\chi_{com}, \tag{2.3}$$

onde χ_{com} é uma coordenada comóvel.[2] Se levarmos em consideração que este raio é pequeno o suficiente para manter a velocidade das partículas muito menores do que a velocidade da luz e acrescentando ainda o fato de termos uma gravidade

[1] Os termos poeira e matéria são equivalentes.

[2] São aquelas coordenadas que que acompanham a expansão do Universo, de forma que um observador estacionário que participa dessa expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes.

fraca atuando na região podemos estudar esta expansão usando a **lei da gravitação**, publicada por Isaac Newton em 1687 enunciada como segue [16]:

> Cada partícula do universo atrai qualquer outra partícula com uma força diretamente proporcional ao produto das respectivas massas e inversamente proporcional ao quadrado da entre as partículas.

Matematicamente podemos traduzir este enunciado da forma:

$$F = \frac{mM}{R^2}G, \tag{2.4}$$

onde:
F é o módulo da força gravitacional que atua sobre cada partícula;
M e m são as massas das referidas partículas interagentes;
R é a distância entre elas;
G é uma constante física fundamental denominada **constante gravitacional**.[3]

2.3.1 Aceleração da Expansão

Um importante conceito frequentemente utilizado no contexto cosmológico é o da aceleração com a qual uma determinada região do espaço se expande e portanto é desejável obter uma expressão matemática que represente esta quantidade durante este processo de evolução. E para derivá-la podemos considerar tal região como sendo uma esfera cujo raio varie no tempo segundo (2.3).

Primeiramente consideremos uma partícula de massa m localizada em sua superfície sujeita à atração gravitacional apenas das partículas contidas no interior desta esfera, que juntas possuem uma massa total igual a M e distribuem-se ao longo da região de forma que possam ser tratadas como um fluido. A força gravitacional, em módulo, envolvida no processo será então dada por (2.4).

Ao utilizar a segunda lei de Newton, a equação para $R(t)$ expressa acima e a definição da densidade $\rho = M/V$ (onde V é o volume da esfera) encontramos:

$$m\ddot{R} = -\frac{mM}{R^2}G$$

$$\ddot{R} = -\frac{\rho V}{R^2}G = -\frac{4\pi}{3}R^3\frac{\rho}{R^2}G = -\frac{4\pi}{3}R\rho G$$

$$\ddot{a}\chi_{com} = -\frac{4\pi}{3}a\chi_{com}\rho G$$

[3] O valor numérico para G depende do sistema de unidades adotado. Em particular, no Sistema Internacional de Unidades (SI) seu valor é $6,674287x10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$.

$$\boxed{\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}Ga\rho} \tag{2.5}$$

Este resultado representa a aceleração com a qual esta esfera, por intermédio de seu fator de escala, se expande e o sinal negativo significa que tal expansão ocorre cada vez mais lentamente.

2.3.2 Analogia à Conservação de Energia Clássica

De posse da aceleração da expansão pode-se particularizar o problema para o caso em que este seja um fluido de poeira e assim a densidade no interior da região satisfaz a condição $\rho = \rho_0 \frac{a_0^3}{a^3}$[4] e portanto, ao substituir este resultado em (2.5) obtemos:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^2} \tag{2.6}$$

Podemos resolver a equação acima por integração, mas antes multiplicamos por $\dot{a}$ e fazemos uma mudança de variável via definição $\dot{a} \equiv x$.

$$\dot{a}\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^2}\dot{a}$$

$$x\dot{x} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^2}\dot{a}$$

$$x\frac{dx}{dt} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^2}\frac{da}{dt}$$

$$\int xdx = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 a_0^3\int\frac{da}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a} + E,$$

onde E é constante de integração. Voltando a variável a:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a} = E. \tag{2.7}$$

Podemos ainda definir $V(a) = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a}$ e encontrar que

$$\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) = E.$$

[4]Este resultado é obtido através da equação da continuidade e será demonstrado em detalhes nos próximos capítulos

Este ultimo resultado é análogo à conservação de energia clássica com o termo $\dot{a}^2/2$ fazendo o papel da energia cinética enquanto que $V(a)$ pode ser interpretado como uma energia potencial, bem como E que neste contexto seria a energia total do sistema.

2.3.3 Geometria Espacial

Do ponto de vista cosmológico o futuro de um universo dominado por poeira depende do sinal de E podendo ele expandir eternamente ou eventualmente colapsar. Reescrevendo a equação (2.7) a dividindo por a^2:

$$\frac{\dot{a}^2}{2a^2} - \frac{4\pi}{3} G\rho_0 \frac{a_0^3}{a^3} = \frac{E}{a^2}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi}{3} G\rho_0 \frac{a_0^3}{a^3} = \frac{2E}{a^2}$$

$$H^2 - \frac{2E}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{2.8}$$

Vemos então que o sinal da energia depende diretamente do parâmetro de Hubble e da densidade de matéria presente dentro da referida região. Para o caso de $E = 0$ encontramos uma importante grandeza definida como a **densidade crítica** ρ_c que nos fornece uma condição para haver o colapso da região. Logo:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.9}$$

Usando esta definição pode-se expressar E em termos da densidade crítica a partir da equação (2.8):

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_c - \frac{2E}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{2E}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_c - \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$E = \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_c \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$$

$$E = \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_c \left(1 - \Omega(t)\right), \tag{2.10}$$

Onde definimos

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \tag{2.11}$$

que é chamado **parâmetro de densidade** e é uma função do tempo que nos informa se o espaço é aberto, fechado ou plano [2] e portanto associa este espaço a uma determinada geometria.

Como o sinal referente à energia é fixo o termo $1 - \Omega(t)$ não muda de sinal, independente da evolução temporal. Neste caso pode-se tomar a medida feita nos dias atuais, $t = t_0$ para determinar o sinal de E estabelecendo assim uma relação com a geometria espacial do universo. Em particular, tal geometria será sempre oposta ao sinal da energia e daí é possível notar que

- se $\Omega_0 > 1$ então $E < 0$ e a curvatura espacial é positiva ($k = +1$), caracterizando um *universo fechado*. Neste caso o fator de escala atinge seu valor máximo e o universo recolapsa;
- se $\Omega_0 = 1$ então $E = 0$ tem-se uma expansão parabólica sem curvatura ($k = 0$) e a geometria espacial de um *universo plano*.
- se $\Omega_0 < 1$ então $E > 0$ e a curvatura espacial é negativa ($k = -1$), caracterizando um *universo aberto*. Neste caso o fator de escala aumenta fazendo e o universo expande-se hiperbolicamente.

A geometria espacial para os três casos pode ser esquematizado de acordo com a figura.

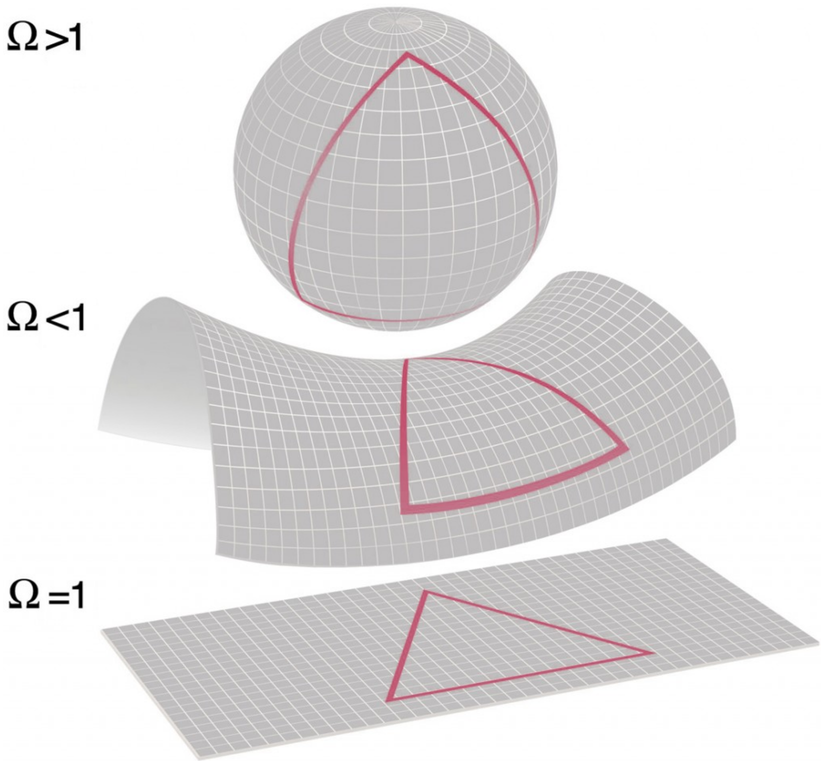


Figura 2.2. Geometria espacial para os universos fechado, aberto e plano.

É importante ressaltar ainda que para os casos plano e aberto o universo se expande eternamente a uma taxa decrescente. Outra importante observação se deve ao fato de que tal comportamento do universo está associado ao seu conteúdo de matéria podendo existir, por exemplo, um universo fechado que nunca recolapsa.

2.4 Instabilidade Gravitacional

Através de medidas feitas da radiação cósmica de fundo (CMB) sabemos de importantes características do universo na época da recombinação: sua homogeneidade e isotropia. Entretanto nos dias atuais essas características não são mais verificadas uma vez que o universo apresenta uma estrutura não linear bem desenvolvida fazendo com que essas estruturas assumam formas tais como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias.

Em uma região na escala de aproximadamente algumas centenas de megaparsec a inomogeneidade na densidade desta distribuição permanece muito pequena mas ainda assim suficiente para desenvolvimento destas estruturas não lineares e o motivo é explicado pela instabilidade gravitacional, que será discutida a seguir.

A instabilidade gravitacional é uma propriedade natural da gravidade e consiste no fato de que a matéria é atraída para regiões com altas densidades fazendo com que as inomogeneidades presentes nela se amplifiquem. Para sabermos se as estruturas não lineares formadas hoje são provenientes das pequenas inomogeneidades presentes na época da recombinação é necessário estudarmos o quão rápido elas crescem em um universo que está se expandindo.

Aqui aplicaremos estes conceitos em ambos os tipos de universo (estático e em expansão) e para isso torna-se necessário derivar equações que possibilite este tipo de estudo.

2.4.1 Equações Hidrodinâmicas

Iremos aqui derivar e discutir brevemente as equações que costumeiramente usa-se para estudar a questão da instabilidade gravitacional, denominadas *equações hidrodinâmicas*. Para isso, consideramos que em grandes escalas a matéria pode ser descrita como uma aproximação de um fluido perfeito de forma que em um determinado instante de tempo ele pode ser caracterizado pela distribuição da densidade de energia $\rho(\vec{x},t)$, pela entropia por unidade de massa $S(\vec{x},t)$ e pelo campo vetorial da velocidade $\vec{V}(\vec{x},t)$.

2.4.1.1 Equação da Continuidade

Inicialmente consideremos uma região com um volume fixo dado por ΔV. Então, por definição da densidade, podemos escrever que para um volume infinitesimal vale:

$$M(t) = \int_{\Delta V} \rho(\vec{x}, t) dV.$$

A taxa de variação da massa pode então ser expressa por:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Delta V} \rho dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{2.12}$$

Por outro lado, a taxa de variação da massa dentro da região está diretamente associada com a quantidade de massa que atravessa a sua superfície. Ou seja, se a quantidade de matéria diminui, mais massa atravessa a referida superfície. Admitindo que cada ponto do fluxo possui uma velocidade $\vec{V}(\vec{x}, t)$ temos que:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\oint_s \rho \vec{V} d\vec{a},$$

onde $d\vec{a}$ é elemento infinitesimal de área localizado para fora da superfície.
Utilizando a definição do teorema de Gauss [17] na última equação encontramos:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\int_{\Delta V} \nabla(\rho \vec{V}) dV. \tag{2.13}$$

Como a equação (2.12) é igual a (2.13), concluímos que:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0}. \tag{2.14}$$

Portanto, está é a equação da continuidade.

2.4.1.2 Equação de Euler

Um outra equação importante para estudo de fluidos no contexto Newtoniano é a equação de Euler que pode ser derivada tomando um pequeno elemento de matéria com massa ΔM sujeito a uma força gravitacional $\vec{F}_{gr}$. Por definição:

$$\vec{F}_{gr} = -\Delta M \nabla \phi, \tag{2.15}$$

onde ϕ é o potencial gravitacional.

Podemos ainda escrever a força exercida pela pressão do fluido a partir de sua definição ($p = \frac{\vec{F}_p}{A}$) no volume que o contem:

$$\vec{F}_p = -\oint_s p \cdot d\vec{a},$$

onde novamente por teorema de Gauss escrevemos:

$$\vec{F}_p = -\int_{\Delta V} (\nabla p) dV \simeq -\nabla p \cdot \Delta V. \tag{2.16}$$

Pela 2ª lei de Newton para o caso em que a aceleração é devida a própria gravidade ($\vec{a} = \vec{g}$), temos que:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{gr} + \vec{F}_p = \Delta M\vec{g}. \tag{2.17}$$

Note que a gravidade podemos escrever a $\vec{g}$ como segue:

$$\vec{g} = \frac{d\vec{V}(\vec{x}, t)}{dt} = \left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)_x + \frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x^i}\right),$$

onde $i = 1, 2, 3$ são as três componentes da velocidade. Assim:

$$\vec{g} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}. \tag{2.18}$$

Por meio de substituição das equações (2.15),(2.16),(2.18) em (2.17) concluímos:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\phi = 0}. \tag{2.19}$$

2.4.1.3 Conservação da Entropia do Sistema

Esta é uma expressão que torna-se extremamente necessária pois lidamos com o caso de um elemento de fluido perfeito em movimento e neste caso temos uma situação adiabática que leva à entropia do sistema é conservada. Portanto, para $S = S(\vec{x}, t)$ temos:

$$\frac{dS(\vec{x}, t)}{dt} = 0. \tag{2.20}$$

Aplicando a derivada total em relação ao tempo em $S = S(\vec{x}, t)$, temos:

$$dS(\vec{x}, t) = \frac{\partial S}{\partial\vec{x}} d\vec{x} + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

$$\frac{dS(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)S.$$

Logo, da equação (2.4) encontramos:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)S = 0}. \tag{2.21}$$

Adicionando às equações derivadas a equação de Poisson, dada por:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \tag{2.22}$$

juntamente com a equação de estado

$$p = p(\rho, S), \tag{2.23}$$

temos o conjunto de equações denominadas hidrodinâmicas que formam um conjunto completo de sete equações que nos permite calcular as sete funções desconhecidas para ρ, $\vec{V}$, S, ϕ, p.

2.5 Teoria Linear das Perturbações

Derivamos na seção anterior as equações hidrodinâmicas que são não lineares e em geral apresentam grande dificuldade para se encontrar suas soluções. Entretanto é possível estudar o comportamento de pequenas perturbações em torno de um universo de background homogêneo e isotrópico linearizando essas equações, trabalho que será feito a seguir.

2.5.1 Perturbação das Equações Hidrodinâmicas

Dividiremos este trabalho de perturbação das equações hidrodinâmicas em duas etapas: no caso do universo estático e a seguir em sua versão em expansão.

2.5.1.1 Universo Estático

Primeiramente consideremos uma região preenchida por um fluido que estará sujeito a uma pequena flutuação nas grandezas que o caracterizam e serão dadas por:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x},t) &= \rho_0 + \delta\rho(\vec{x},t) \\ \vec{V}(\vec{x},t) &= \vec{V}_0 + \delta\vec{V}(\vec{x},t) \\ \phi(\vec{x},t) &= \phi_0 + \delta\phi(\vec{x},t) \\ S(\vec{x},t) &= S_0 + \delta S(\vec{x},t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

tal que as perturbações são bem menores do que o respectivo valor da grandeza em questão.

Podemos escrever que para a pressão, a partir da equação (2.23) será dada por:

$$p(\vec{x},t) = p(\rho_0 + \delta\rho, S_0 + \delta S) = p_0 + \delta p(\vec{x},t). \tag{2.25}$$

Em aproximação linear ainda podemos escrever que a pressão pode ser expressa como sendo:

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \delta S. \tag{2.26}$$

Substituindo as equações (2.25) e (2.26) nas equações hidrodinâmica, tomando ciência que os termos com índice zero estão fixos e eliminando os termos perturbativos de ordem superiores encontramos:

<u>Equação da continuidade</u>:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \nabla\cdot[(\rho_0 + \delta\rho)(\vec{V}_0 + \delta\vec{V})] = 0$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot[\rho_0\vec{V}_0 + \rho_0\delta\vec{V} + \delta\rho\vec{V}_0 + \delta\rho\delta\vec{V}] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot(\delta\vec{V}) = 0}. \tag{2.27}$$

<u>Equação de Euler</u>:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{V}_0 + \delta\vec{V}) + [(\vec{V}_0 + \delta\vec{V})\cdot\nabla](\vec{V}_0 + \delta\vec{V}) + \frac{\nabla(p_0 + \delta p)}{\rho} + \nabla(\phi_0 + \delta\phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{V}) + \frac{1}{\rho_0}\nabla(\delta p) + \nabla(\delta\phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{V}) + \frac{1}{\rho_0}\nabla\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \delta S\right] + \nabla(\delta\phi) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla\, \delta\rho + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla\, \delta S + \nabla(\delta\phi) = 0} \tag{2.28}$$

Conservação da entropia:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_0 + \delta S) + (\vec{V}\cdot\nabla)(S_0 + \delta S) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0} \tag{2.29}$$

Note que neste caso podemos encontrar uma solução do tipo $\delta S(\vec{x}, t) = \delta S(\vec{x})$
Equação de Poisson:
Finalmente podemos escrever a equação de Poisson perturbada da forma:

$$\boxed{\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho}. \tag{2.30}$$

Assim, de posse das equações hidrodinâmicas podemos ainda tomar o divergente [18] da equação de Euler e utilizar as equações da continuidade e de Poisson encontradas acima para encontrar:

$$\nabla\cdot\left[\frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla\, \delta\rho + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla\, \delta S + \nabla(\delta\phi)\right] = 0$$

$$\frac{\partial(\nabla\cdot\delta\vec{V})}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla\cdot(\nabla\delta\rho) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla\cdot(\nabla\delta S) + \nabla\cdot(\nabla(\delta\phi)) = 0$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla^2\, \delta\rho + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla^2\, \delta S + \nabla^2\delta\phi = 0$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla^2\, \delta\rho + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla^2\, \delta S + 4\pi G\delta\rho = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla^2\, \delta\rho - 4\pi G\rho_0\delta\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \nabla^2\, \delta S}. \tag{2.31}$$

Esta é uma equação linear para $\delta\rho$ com a entropia atuando como uma dada fonte e está associada à instabilidade gravitacional para um universo estático.

2.5.1.2 Universo em Expansão

Analogamente ao caso estático, podemos derivar as equações para o caso de um universo expandindo utilizando as mesmas perturbações descritas pela equação

(2.24). Assim como no caso anterior faremos um tratamento para cada equação.
Equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \nabla[(\rho_0 + \delta\rho)(\vec{V}_0 + \delta\vec{V})] = 0$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla[\rho_0\vec{V}_0 + \rho_0\delta\vec{V} + \delta\rho\vec{V}_0 + \delta\rho\delta\vec{V}] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta\vec{V} + \nabla(\delta\rho \cdot \vec{V}_0) = 0} \tag{2.32}$$

Equação de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{V}_0 + \delta\vec{V}) + [(\vec{V}_0 + \delta\vec{V}) \cdot \nabla](\vec{V}_0 + \delta\vec{V}) + \frac{\nabla(p_0 + \delta p)}{\rho} + \nabla(\phi_0 + \delta\phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{V}) + (\vec{V}_0 \cdot \nabla)\delta\vec{V} + (\delta\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla (\delta p) + \nabla(\delta\phi) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla)\delta\vec{V} + (\delta\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}_0 + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla \delta\rho + \nabla(\delta\phi) = 0} \tag{2.33}$$

Equação de Poisson:
Como no caso anterior, podemos escrever a equação de Poisson perturbada da forma:

$$\boxed{\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho}. \tag{2.34}$$

Seguindo o mesmo raciocínio adotado anteriormente, podemos repetir os cálculos para as equações derivadas acima mas com uma diferença importante: como o universo está expandindo a componente da velocidade não será zero e portanto ela irá acompanhar o fluxo de Hubble durante a expansão. Logo, podemos dizer que esta velocidade será descrita por: $\vec{V} = \vec{V}_0 = H(t) \cdot \vec{x}$.

Note que antes de fazermos o cálculo precisamos definir referenciais e grandezas apropriadas para tratarmos desta questão. Neste caso utiliza-se coordenadas comóveis com o fluxo de Hubble $\vec{q}$, denominada coordenadas Lagrangiana que se relacionam com as Eulerianas da forma $\vec{x} = a(t)\vec{q}$.

Outra definição necessária refere-se à derivada parcial com respeito ao tempo. Seja uma função genérica $f = f(\vec{x}, t)$ podemos escrever:

$$df(\vec{x} = a(t)\vec{q}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} dt + \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)_t d\vec{x}$$

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x}=a(t)\vec{q},t)}{\partial t}\right)_{\vec{q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)_t \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x}=a(t)\vec{q},t)}{\partial t}\right)_{\vec{q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \dot{a}\vec{q}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)_t$$

Consequentemente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{q}} - (\vec{V}_0 \cdot \nabla_{\vec{x}}). \tag{2.35}$$

Com relação às coordenadas espaciais:

$$\nabla_{\vec{x}} = \frac{1}{a}\,\nabla_{\vec{q}}\,. \tag{2.36}$$

Substituindo (2.35) e (2.36) nas equações hidrodinâmicas e usando a definição para a flutuação dada por $\delta \equiv \dfrac{\delta\rho}{\rho_0}$:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\,\nabla_{\vec{q}}\,\delta\vec{V} = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial\delta\vec{V}}{\partial t} + H\delta\vec{V} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla_{\vec{q}}\,\delta + \frac{1}{a}\,\nabla\,\delta\phi = 0 \tag{2.38}$$

$$\nabla^2_{\vec{q}}\,\phi = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta, \tag{2.39}$$

onde $\nabla_{\vec{q}}$ e $\nabla^2_{\vec{q}}$ atuam com respeito às coordenadas Lagrangianas $\vec{q}$ e as derivadas temporais são tomadas para $\vec{q}$ constante. Para uma melhor notação usaremos estes operadores sem o índice a partir de agora, ou seja $\nabla_{\vec{q}} \equiv \nabla$ e $\nabla^2_{\vec{q}} \equiv \nabla^2$.

Portanto, tomando o divergente de (2.38) e utilizando também as equações (2.37) e (2.39) concluímos que:

$$\nabla\cdot\left[\frac{\partial\delta\vec{V}}{\partial t} + H\delta\vec{V} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla\,\delta + \frac{1}{a}\,\nabla\,\delta\phi\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\delta\vec{V}) + H\,\nabla\cdot\delta\vec{V} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla\cdot(\nabla\delta) + \frac{1}{a}\,\nabla\cdot(\nabla\delta\phi) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(a\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) - \frac{\dot{a}}{a}\left(a\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta + \frac{1}{a}\,\nabla^2\,\delta\phi = 0$$

$$-a\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \dot{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} - \dot{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta + \frac{1}{a}4\pi G a^2\rho_0\delta = 0$$

$$-a\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - 2\dot{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta + 4\pi G a\rho_0\delta = 0$$

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta - 4\pi G\rho_0\delta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta - 4\pi G\rho_0\delta = 0}. \tag{2.40}$$

Derivamos portanto a equação que descreve a instabilidade gravitacional de um universo em expansão.

Solução para δ

Podemos calcular a solução desta equação para um universo dominado por poeira e neste caso seguem as seguintes condições:

$$a(t)\alpha t^{2/3} \Rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2.41}$$

$$\rho_0 = \epsilon_0/a^3,$$

onde ϵ_0 é a densidade de matéria observada nos dias atuais. Esta equação, devida a condição (2.41) fica:

$$\rho_0 = \frac{\epsilon_0 t_0^2}{t^2} \tag{2.42}$$

Usando a equação de (2.7) para o caso onde $E = 0$ (veremos mais a frente que este refere-se ao universo de base) podemos calcular o termo $\epsilon_0 t_0^2$:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\epsilon_0 t_0^2}{t^2}$$

$$\left(\frac{2}{3t}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\epsilon_0 t_0^2}{t^2}$$

$$\frac{4}{9t^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\epsilon_0 t_0^2}{t^2}$$

$$\epsilon_0 t_0^2 = \frac{1}{6\pi G} \tag{2.43}$$

Via substituição das equações acima em (2.40) encontramos que:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta - 4\pi G\frac{1}{6\pi G t^2}\delta = 0$$

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \nabla^2\,\delta - \frac{2}{3t^2}\delta = 0,$$

em que para o caso de poeira o termo $\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s$ que representa o quadrado da velocidade do som é igual a zero. Logo:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0.$$

Devido a estrutura da expressão acima podemos assumir que ela possui solução obedecendo uma lei de potências [13] da forma $\delta \propto t^n$ e portanto, substituindo esta solução acima encontramos:

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0$$

$$n^2 + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3} = 0,$$

cujas soluções serão: $n = 2/3$ e $n = -1$. Neste caso podemos escrever que a expressão para o cálculo da flutuação será:

$$\boxed{\delta(t) = A(\vec{q})t^{2/3} + B(\vec{q})t^{-1}} \tag{2.44}$$

Note que $A(\vec{q})$ e $B(\vec{q})$ são funções das coordenadas Lagrangiana e é possível obter essas expressões a partir das condições iniciais para $\delta(t)$.

Solução para a velocidade

Utilizamos agora a equação da continuidade dada por (2.32) para encontrar a velocidade das partículas componentes do fluido compreendidas em uma determinada região. Neste caso consideremos que esta solução pode ser escrita como uma onda plana que satisfaz:

$$\delta = \delta u_i(t)e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}, \tag{2.45}$$

onde $i = 1, 2$ para $\delta\rho$ e $\delta\vec{V}$ respectivamente.
Assim, para a equação da continuidade encontramos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho_{\vec{k}}e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}) + \rho_0 \nabla \cdot (\delta\vec{V}_{\vec{k}}e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}) = 0$$

$$e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho_{\vec{k}}) + \rho_0\delta\vec{V}_{\vec{k}} \nabla \cdot (e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}) = 0$$

$$e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})}\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho_{\vec{k}}) + i\rho_0\vec{K}\cdot\vec{V}e^{(i\vec{K}\cdot\vec{x})} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho_{\vec{k}}) + i\rho_0\vec{K}\cdot\vec{V} = 0$$

$$i\vec{K}\cdot\vec{V} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\rho_{\vec{k}}}{\rho_0}\right)$$

Considerando o caso em que $\vec{K}$ é paralelo a $\vec{V}$, em módulo escrevemos que:

$$iKV = -\frac{\partial}{\partial t}(\delta)$$

$$\boxed{V = i\frac{\dot{\delta}}{K}} \tag{2.46}$$

A grandeza $\vec{K}$ refere-se ao vetor número de onda e o ponto é a derivada da flutuação com respeito ao tempo.

Capítulo 3

TEORIA BÁSICA DA FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

3.1 Cosmologia e a Relatividade Geral

Podemos voltar à seção (2.3) e estudá-la usando agora como base a relatividade geral, proposta por Einstein em 1915 como uma tentativa de generalizar a teoria da gravidade de Newton. Sob essa ótica, Einstein então propôs a ideia de que a interação gravitacional passa a ser um efeito da curvatura do espaço-tempo, tal que esta está associada à distribuição material do universo.

Do ponto de vista cosmológico, os atuais modelos são baseados na ideia de que o Universo é considerado o mesmo em todos os lugares, ideia essa conhecida como **princípio Copernicano** que é uma generalização do princípio cosmológico citado em (2.2.1). Devido ao fato de haver ampla evidência observacional da isotropia, o princípio Copernicano leva a acreditar que não estamos no centro do Universo e desta forma observadores de quaisquer outros locais também devem observar esta isotropia, e portanto esta condição, juntamente com a homogeneidade passa a ser assumida.

Ao olhar para uma galaxia distante a impressão é a de que ela está recuando em relação ao observador, ou seja o Universo aparentemente não é estático e está mudando com o tempo. Este pensamento leva à construção de um modelo tal que a isotropia e a homogeneidade do Universo é característica apenas do espaço e não do tempo. Esta afirmação de acordo com a **relatividade geral** significa que o Universo pode ser *foliado* em fatias tipo espaço (ver figura 2.2) tal que cada uma delas seja homogênea e isotrópica e ainda possa ser representada matematicamente por $\mathbf{R}\times\Sigma$, onde $\mathbf{R}$ é a direção temporal e Σ uma variedade tridimensional que neste contexto deve ser *maximamente simétrico* (ou seja, deve ter número máximo dos *vetores de Killing*).

Figura 3.1. Hipersuperfícies tipo do espaço com tempo constante onde vale a homogeneidade e isotropia em qualquer ponto.

A descrição matemática para o espaço-tempo que satisfaz as características acima é a *métrica* de **Friedmann-Robertson-Walker** (FRW) que será discutida a seguir.

3.1.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Baseando-se na ideia do princípio cosmológico pode-se introduzir a métrica do espaço-tempo, uma variedade 4-dimensional. Assim, podemos descrevê-la como [2]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{3.1}$$

Esta é, portanto, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A função $a(t)$ é o já discutido fator de escala; a constante k é referente à curvatura do espaço-tempo que pode assumir valor igual a +1,0,-1 descrevendo sua geometria e seu respectivo modelo de universo podendo ser associados aos espaços esféricos (fechado), Euclidiano (plano) e hiperbólico (aberto), respectivamente.

3.1.2 As Equações de Friedmann

Para o modelo cosmológico padrão a geometria do espaço-tempo é determinada pelo conteúdo de matéria/energia do Universo através das **equações de campo de Einstein**, a saber:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

onde μ,ν assumem valores 0,1,2,3. É importante lembrar que ao propor esta expressão Einstein visava representar o equilíbrio entre a geometria de um lado e a energia material do outro [12]. Uma outra definição é feita a partir do primeiro membro da equação (3.2) e será escrito como sendo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o chamado **tensor de Einstein**.

No ano de 1917 foi proposta por Einstein uma modificação nas suas equações de campo com o objetivo de contrabalancear as foças gravitacionais afim de manter a estaticidade do universo, hipótese sustentada por ele com o conhecimento da época. Logo, a nova versão desta equação de campo assumiu a forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

A constante Λ foi denominada **constante cosmológica** e hoje sabe-se que ela desempenha fundamental importância na expansão do universo, ao contrário de seu pensamento inicial.

A partir desta é possível derivar as equações que descrevem a evolução do Universo, denominadas equações de Friedmann. Aqui $R_{\mu\nu}$ é chamado **tensor de Ricci** que descreve a curvatura local do espaço-tempo, R é o **escalar de curvatura**, $T_{\mu\nu}$ é o **tensor energia-momento** que está associado ao conteúdo de matéria do Universo e $g_{\mu\nu}$ é o chamado **tensor métrico**, ou simplesmente **métrica** que neste caso será a de FRW dada por (3.1).

Consideremos uma região específica contendo um fluido que preencha toda ela uniformemente e comporta-se como um ideal. Para esta situação, o tensor energia-momento será:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

onde:

u_μ e u_ν são as quadrivelocidades das partículas que compõem o fluido e que podem ser escritas como $u_\mu = u_\nu = (c, 0, 0, 0)$; e

p é a equação de estado.

Colocando o tensor energia-momento sob notação matricial tem-se que:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

O **tensor de Riemann**, que fornece a curvatura da variedade é definido da forma:

$$R^{\rho}\mu\sigma\nu = \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \tag{3.6}$$

de onde podemos tirar o tensor de Ricci através da contração de dois índices como segue:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}\mu\rho\nu. \tag{3.7}$$

O termo gama é denominado *conexão*, que neste caso usaremos os **símbolos de Christoffel** dado por:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \tag{3.8}$$

onde a virgula é a derivada parcial. Pode-se calcular todos os termos de conexão não nulos fazendo uso da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e o resultado encontrado [19] será dado por:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{11} = a\dot{a}/(1-kr^2) \quad &; \quad \Gamma^{1}_{22} = -r(1-kr^2) \\
\Gamma^{0}_{22} = a\dot{a}r^2 \quad &; \quad \Gamma^{1}_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta \\
\Gamma^{0}_{33} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta \quad &; \quad \Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{3}_{13} = 1/r \\
\Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{2}_{02} = \Gamma^{3}_{03} = \dot{a}/a \quad &; \quad \Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{1}_{11} = kr/(1-kr^2) \quad &; \quad \Gamma^{3}_{23} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De posse das respectivas conexões e tomando a componente temporal (ou seja, $\mu\nu = 0$) nas equações de Einstein encontramos uma expressão para a aceleração do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{3.10}$$

Fazendo a mesma abordagem para as componentes espaciais (ou seja, $\mu\nu = 1, 2, 3$) e fazendo uso ainda da equação anterior obtemos a evolução de um Universo homogêneo e isotrópico:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{3.11}$$

Estes resultados são denominados as **equações de Friedmann**[1] e está relacionado à dinâmica do universo.

[1]Iremos adotar o sistema de coordenadas onde $c = 1$

3.1.3 Equação de Estado

No capítulo anterior derivamos a equação de estado mais geral que pode ser utilizada em qualquer situação para quaisquer tipos de fluido. Pode-se agora derivar a mesma expressão no contexto cosmológico para um universo descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker através de suas conexões (3.9) levando em conta o fluxo de Hubble.

Ao considerar as **identidades de Bianchi** ela implicará na condição de conservação local do tensor energia-momento [20] que matematicamente será representada por:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{3.12}$$

onde ∇_μ é a **derivada covariante** do tensor energia-momento com respeito às coordenadas μ sendo definida de forma geral como

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} + \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} + \ldots \\ &- \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_k} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_k} - \ldots \end{aligned} \tag{3.13}$$

Antes de efetivamente calcularmos (3.12) podemos atuar a métrica em $T^{\mu\nu}$ afim de obtermos um tensor **misto** para a seguir usarmos a equação da conservação. Teremos portanto:

$$T^\mu{}_\nu = diag(\rho, -p, -, p, -p), \tag{3.14}$$

que é a representação matricial do tensor. Do último resultado calculamos o traço desta matriz, dado por:

$$T = T^\mu{}_\mu = \rho - 3p \tag{3.15}$$

Finalmente, usando a condição da conservação do tensor energia-momento particularizando para a componente $\nu = 0$ temos que:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_0 = 0$$

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda = 0$$

$$\partial_0 T^0{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0{}_0 - \Gamma^0_{\mu 0} T^\mu{}_0 - \Gamma^i_{\mu 0} T^\mu{}_i = 0$$

$$\partial_0 T^0{}_0 + \Gamma^i_{i0} T^0{}_0 - \Gamma^i_{i0} T^i{}_i = 0$$

Das conexões não nulas e da equação (3.14) tiramos que:

$$\partial_0\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho - \frac{\dot{a}}{a}(-3p) = 0$$

$$\partial_0\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{3.16}$$

Vemos portanto que a equação da continuidade é uma consequência direta da conservação do tensor energia-momento.

3.2 Função de Massa

Um importante problema cosmológico refere-se à contagem de estruturas cósmicas que estejam confinadas em uma região específica do universo e possuam uma massa no intervalo entre M e M+dM. Para realizar este cálculo utiliza-se a definição dada por:

$$dN = n(M)dM, \tag{3.17}$$

onde:
dN é o número de estruturas em questão por unidade de volume;
n(M) é definida como sendo a **função de massa**, também chamada função multiplicidade.

Para solução da equação (3.17) é fundamental utilizar uma expressão analítica para a função de massa e nesta seção, para um bom entendimento desta quantidade faremos duas abordagens importantes no que diz respeito à forma da sobre-densidade: o primeiro caso esférico e o segundo elipsoidal.

3.2.1 O Formalismo Press-Schechter

No ano de 1974 é proposta, através do trabalho [21] uma função de massa descrita por um simples modelo teórico e analítico apropriado [2] que veio a ficar conhecido como **formalismo Press-Schechter (1974)**. Este formalismo enfatiza a utilidade dos modelos de colapso esférico ao considerar um **campo de densidade** inicial suave para determinar as abundâncias relativas das perturbações em diferentes escalas. Na teoria PS, conforme o universo evolui, a densidade da flutuações no regime linear cresce gravitacionalmente até atingir a sobre-densidade esférica crítica, onde o colapso gravitacional não-linear ocorre [22].

Quando combinada com a *overdensity* crítica para o colapso ele fornece um modelo estatístico para a formação de estruturas do Universo: flutuações suaves levam às massas de objetos que colapsaram enquanto que o modelo de perturbação esférica dá a época do colapso para as perturbações suficientemente densas [23].

Seguindo os princípios do formalismo PS consideramos o campo de densidade das flutuações como sendo $\delta(\vec{x}, R) \equiv \delta_M$ de forma que se tomarmos este campo descrito pela estatística Gaussiana podemos escrever a distribuição de probabilidade desta flutuação como sendo:

$$\mathcal{P}(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M}\exp\left(\frac{-\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right)d\delta_M, \tag{3.18}$$

onde σ_M é a variância da massa.

Pode-se a seguir obter por integração a probabilidade de que a flutuação exceda o valor crítico δ_c:

$$P_{>\delta_c}(M) = \int_{\delta_c}^{\infty}\mathcal{P}(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M}\int_{\delta_c}^{\infty}\exp\left(\frac{-\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right)d\delta_M. \tag{3.19}$$

Definindo a seguinte mudança de variáveis $t = \dfrac{\delta_M}{\sqrt{2}\sigma_M}$ com $dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma_M}d\delta_M$ reescrevemos (3.19) na forma:

$$P_{>\delta_c}(M) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta_c/\sqrt{2}\sigma_M}^{\infty} e^{-t^2}dt. \tag{3.20}$$

Para resolver esta integral, utilizamos a definição da **função erro complementar** para um argumento x de acordo com [24], a saber

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt, \tag{3.21}$$

onde $erf(x)$ é a *função erro* definida por:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt.$$

Comparando as equações (3.20) e (3.21) concluímos que:

$$P_{>\delta_c}(M) = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M}\right) \tag{3.22}$$

que é o mesmo resultado apresentado em [8].

É admissível que na referida região de estudo haja uma quantidade de objetos com massa menor do que M de forma que é possível definir uma grandeza representando a fração de massa dos objetos que colapsaram e cujas massas excedam M. Essa grandeza será dada por $F(> M)$ e segundo o *ansatz* do formalismo P-S deverá ser igual a probabilidade: $F(> M) = P_{>\delta_c}(M)$.

A medida que tomamos a massa no interior dessa região se aproximando de zero, a sua variância tende ao infinito e portanto a probabilidade deverá satisfazer $P_{>\delta_c}(M) = 1/2$. Este resultado sugere que apenas metade da massa no Universo faz parte desses objetos que colapsam e portanto é necessária a normalização da probabilidade pelo fator 2 [2,8]. Logo: $F(> M) = 2P_{>\delta_c}(M)$. Esta relação resulta em uma densidade numérica de objetos que colapsaram e possuem massa entre M e $M + dM$. Podemos então, a partir da definição de dN escrever que

$$dN = \frac{dF(> M)}{V},$$

onde V é o volume da região onde vale ainda que: $V = M/\rho$. Então:

$$dN = \frac{\rho}{M}\frac{dF(> M)}{dM}dM$$

$$dN = 2\frac{\rho}{M}\frac{dP_{>\delta_c}}{dM}dM. \tag{3.23}$$

Como $dN = n(m)dM$ tem-se que:

$$n(m)dM = 2\frac{\rho}{M}\frac{dP_{>\delta_c}}{dM}dM$$

$$n(m)dM = 2\frac{\rho}{M}\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M}\frac{d\sigma_M}{dM}dM \tag{3.24}$$

<u>Cálculo da derivada de $P_{>\delta_c}$</u>

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = \frac{d}{d\sigma_M}\left[\frac{1}{2}erfc\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma_M}\left[1 - erf\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M}\right)\right]$$

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma_M}\left[erf\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M}\right)\right]$$

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma_M}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\delta_c/\sqrt{2}\sigma_M} e^{-t^2}dt\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d\sigma_M}\int_0^{\delta_c/\sqrt{2}\sigma_M} e^{-t^2}dt.$$

Definimos: $x = \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M}$ onde $dx = -\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M^2}d\sigma_M$, temos:

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{dx}{d\sigma_M}\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo [25]:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt = e^{-x^2},$$

encontramos

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma_M^2}\right)e^{-x^2}$$

$$\frac{dP_{>\delta_c}}{d\sigma_M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\delta_c}{\sigma_M^2}\exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}\right) \tag{3.25}$$

Por fim, substituindo este resultado na equação (3.24) encontramos uma expressão para a função de massa:

$$\boxed{n(m)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\rho}{M}\frac{\delta_c}{\sigma_M^2}\exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2}\right)\frac{d\sigma_M}{dM}dM} \tag{3.26}$$

Vale lembrar que ρ é a densidade de matéria contida na região considerada e σ_M^2 é a variância do campo de densidade das flutuações.

Podemos ainda reescrever (3.26) na forma:

$$n(m)dM = \frac{\rho}{M^2}f_{PS}(\nu)\left|\frac{d\ln\nu}{d\ln M}\right|dM, \tag{3.27}$$

onde definimos $\nu \equiv \delta_c/\sigma_M$ e a função multiplicidade de Press-Schechter como sendo

$$f_{PS}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\nu\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \tag{3.28}$$

3.2.2 O Formalismo Sheth-Tormen

O formalismo de Press-Schechter apresentado acima tem sido bem sucedido e ainda provê bons resultados para o processo de trabalhar com formação de estruturas. Entretanto, trata-se de um modelo simples e que obviamente irá falhar em alguns detalhes, como por exemplo quando o objetivo é tratar um colapso gravitacional assimétrico [23]. Neste caso há uma necessidade de extensão do formalismo

PS afim de quantificar esses problemas, o que foi feito em [26, 27] e trata-se do formalismo Sheth-Tormen que é aplicado para o caso de colapso elipsoidal.

A conveniência em usar o modelo de colapso elipsoidal homogêneo reside no fato de que ele pode ser facilmente resolvido por via de integração numérica de um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem. Sob o ponto de vista cosmológico para usar o colapso elipsoidal a estratégia correta é extrair uma elipsoide de um universo de Friedmann-Robertson-Walker perturbado [28].

No contexto de estender o formalismo PS para conter um colapso além do esférico, reescrevemos a função de massa obtida anteriormente afim de incluir também a possibilidade de um colapso elipsoidal. Então, neste caso a função multiplicidade de acordo com [8] para Sheth-Tormen será:

$$f_{ST}(\nu) = A\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}^{2q}}\right) f_{PS}(\tilde{\nu}), \tag{3.29}$$

onde $\tilde{\nu} = 0,84\nu$, $q = 0,3$ e a $A \approx 0.322$ é uma constante de normalização que requer este valor para que o resultado da integral $f_{ST}(\nu)/\nu$ sobre a variável ν seja igual a 1. A implicação física é que neste caso toda a matéria está em objetos que colapsam com qualquer massa.

Capítulo 4

COLAPSO ESFÉRICO

4.1 Introdução

Como o próprio nome sugere, o colapso esférico é um modelo de colapso gravitacional simplificado pela suposição de uma simetria esférica. Neste modelo, uma região superdensa esfericamente simétrica com uma densidade uniforme evolui para uma configuração de densidade infinita sob sua própria gravidade e um objeto gravitacionalmente ligado é formado [29].

O modelo de colapso esférico foi construído originalmente sob a suposição de um universo de Einstein-de Sitter e futuramente (nos anos 80 e 90) foi estendido para incluir a constante cosmológica [30–32], aqui designada como a contribuição da energia escura.

Neste capítulo estudaremos alguns casos de colapso esférico usando como base o modelo *top hat* que será discutido a seguir.

4.2 Modelo 'Top Hat'

4.2.1 Descrição do Modelo

Este modelo consiste em um universo homogêneo de base (background) com uma determinada densidade de matéria dada por ρ onde encontra-se uma pequena região que possui um "salto"na densidade em relação ao universo. Visto globalmente esta região pode ser considerada como uma perturbação do background e sua densidade será igual a ρ_p, alem do fato de apresentar uma forma particular esférica como consequência da isotropia do universo. A seguir segue a aplicação deste modelo.

4.3 Resultados da Teoria Linear

Da teoria linear das flutuações cosmológicas, que aplica-se nos casos onde $\delta <<$ 1, vale que para o universo de Einstein-de Sitter podemos reescrever as equações para a flutuação e para a velocidade utilizando as equações (2.44) e (2.46) como seguem:

$$\delta(t) = \delta_{+}(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3} + \delta_{-}(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1} \tag{4.1}$$

e

$$V = i\frac{\dot{\delta}}{k} = \frac{i}{k_i t_i}\left[\frac{2}{3}\delta_{+}(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1/3} - \delta_{-}(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{-2}\right] \tag{4.2}$$

onde:
$\delta \equiv$ flutuação na densidade de matéria;
$\delta_{+}(t_i) \equiv$ modo crescente;
$\delta_{-}(t_i) \equiv$ modo decrescente;
$V \equiv$ velocidades peculiares.

A medida que o tempo evolui vemos de (4.1) que o modo decrescente eventualmente será muito pequeno em comparação com o modo crescente, podendo assim ser negligenciado. Neste caso a densidade de perturbação crescerá á uma taxa $\delta \propto t^{2/3}$ desde que tenhamos $|\delta| << 1$.

4.3.1 Parâmetro de Hubble

Devido à natureza homogênea do universo e da perturbação elas satisfazem às equações de Friedmann tal que o parâmetro de Hubble inicial vale H_i. Neste caso o parâmetro de densidade inicial para a perturbação será:

$$\Omega_p(t_i) = \Omega(t_i)(1 + \delta_i), \tag{4.3}$$

onde $\Omega(t_i)$ é referente ao background.

Inicialmente temos pela definição que $H_p = \frac{\dot{R}}{R}$, onde $R \propto \frac{1}{\rho_p^{1/3}}$ é o fator de escala da região perturbada e ρ_p é a densidade de matéria contida em seu interior. Logo, tem-se que:

$$H_p = -\frac{\dot{\rho}_p}{3\rho_p}. \tag{4.4}$$

Analogamente para o background:

$$H = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho}. \tag{4.5}$$

Tem-se ainda que:

$$\rho_p = \rho(1+\delta), \tag{4.6}$$

e assim

$$\dot{\rho}_p = \dot{\rho}(1+\delta) + \rho\dot{\delta}. \tag{4.7}$$

Substituindo (4.6) e (4.7) em (4.4):

$$H_p = -\frac{\dot{\rho}(1+\delta)+\rho\dot{\delta}}{3\rho(1+\delta)}$$

$$H_p = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho} - \frac{\dot{\delta}}{3(1+\delta)}.$$

$$H_p = H - \frac{\dot{\delta}}{3(1+\delta)},$$

onde para o instante $t = t_i$:

$$H_p(t_i) = H(t_i) - \frac{\dot{\delta}_i}{3(1+\delta_i)}.$$

Ao impormos a condição de que as velocidades peculiares nas bordas regiões sejam **nulas** no instante inicial teremos que a condição $\dot{\delta}_i = 0$ deverá ser satisfeita. Neste caso concluímos que

$$H_p(t_i) = H(t_i) \tag{4.8}$$

4.3.2 Densidade de Matéria da Perturbação

No contexto da cosmologia em que observamos o Universo em expansão reescrevemos a equação da continuidade de forma a englobar o parâmetro de Hubble. Logo, o resultado obtido é:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \tag{4.9}$$

onde p é a equação de estado do respectivo componente que preenche este Universo e que satisfaz $p = \omega\rho$, uma vez que consideramos tal componente assumindo um comportamento de fluido ideal. Resolvendo (4.9) encontramos uma expressão que satisfaz a densidade ρ para este fluido.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + \omega\rho) = 0$$

$$\dot{\rho} = -3\rho\frac{\dot{a}}{a}(1+\omega)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\rho}{a}\frac{da}{dt}(1+\omega)$$
$$d\rho = -3\rho\frac{da}{a}(1+\omega)$$
$$\int\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+\omega)\int\frac{da}{a}$$
$$\ln\rho = -3(1+\omega)\ln a + C',$$

onde C' é uma constante de integração.

$$\exp(\ln\rho) = \exp(\ln a^{-3(1+\omega)} + C')$$

$$\rho = \exp(\ln a^{-3(1+\omega)})\exp C'$$
$$\rho = a^{-3(1+\omega)}C$$
$$\rho a^{3(1+\omega)} = C.$$

Em outras palavras, tem-se que o termo $\rho a^{3(1+\omega)}$ é constante, e neste caso podemos fixar um instante $t = t_i$ que satisfaça:

$$\rho a^{3(1+\omega)} = \rho_i a_i^{3(1+\omega)}$$

$$\rho = \rho_i\left(\frac{a_i}{a}\right)^{3(1+\omega)}. \tag{4.10}$$

Portanto, sempre é possível estabelecer uma relação entre as densidades de um fluido ideal para instantes de tempos diferentes usando os respectivos valores do fator de escala.

Capítulo 5

MODELOS DE COLAPSO

5.1 Modelo CDM

Inicialmente pode-se tomar o background como sendo descrito pelo modelo de Einstein-de Sitter, ou seja, plano e com dominância de poeira (matéria escura fria, ou apenas CDM). Como ponto de partida podemos assumir o caso especial em que a perturbação, a princípio, acompanhe essa expansão e a partir daí calcular a evolução do seu fator de escala $R(t)$.

5.1.1 Evolução da Perturbação

Nosso objetivo é encontrar uma equação que nos permita discutir acerca de como evolui esta perturbação e para isso faremos uso das equações de Friedmann para o background e para a própria perturbação. Estas são dadas respectivamente por:

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{5.1}$$

e

$$H_p^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_p - \frac{k}{R^2}. \tag{5.2}$$

O termo k é referente ao termo de curvatura para o qual podemos encontrar uma expressão explícita em termos das grandezas associadas ao fundo. Logo, tomando um instante de tempo inicial $t = t_i$ reescrevemos (5.2):

$$H_{pi}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{pi} - \frac{k}{R_i^2}$$

$$k = R_i^2\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{pi} - H_{pi}^2\right).$$

Sabendo que para este instante inicial vale a relação (4.8), então

$$k = R_i^2\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{pi} - H_i^2\right)$$

$$k = R_i^2\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{pi} - \frac{8\pi G}{3}\rho_i\right).$$

Sabemos ainda que da equação (4.6) reescrevemos k da forma:

$$k = R_i^2\left[\frac{8\pi G}{3}\rho_i(1+\delta_i) - \frac{8\pi G}{3}\rho_i\right]$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}R_i^2\left[\rho_i(1+\delta_i) - \rho_i\right]$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}\rho_i\delta_i R_i^2.$$

Portanto, pode-se substituir a última equação em (5.2):

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_p - \frac{8\pi G}{3}\rho_i\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

Dividindo toda a equação acima por H_i^2:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{8\pi G}{3H_i^2}\rho_p - \frac{8\pi G}{3H_i^2}\rho_i\delta_i\frac{R_i^2}{R^2},$$

onde definimos a densidade crítica para a matéria no instante inicial como sendo $\rho_{ci} = 3H_i^2/8\pi G$. Neste caso:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{\rho_p}{\rho_{ci}} - \frac{\rho_i}{\rho_{ci}}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}.$$

A partir de (4.10), sabendo que para um fluido de matéria escura $w = 0$, tiramos que $\rho_p = \rho_{pi}\left(\frac{R_i}{R}\right)^3$ e assim podemos escrever que:

$$\rho_p = \rho_{pi}\left(\frac{R_i}{R}\right)^3 = \rho_i(1+\delta_i)\left(\frac{R_i}{R}\right)^3,$$

e portanto:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{\rho_i}{\rho_{ci}}(1+\delta_i)\frac{R_i^3}{R^3} - \frac{\rho_i}{\rho_{ci}}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{\rho_i}{\rho_{ci}}\frac{R_i^2}{R^2}\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R_i^2 H_i^2} = \Omega_i \left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i \right] \tag{5.3}$$

Mudança de variável

Todas as funções acima são dependentes da variável t e agora é possível reescrevê-las como função do fator de escala do background a. Para isso, note inicialmente que:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dt} = R'\dot{a},$$

onde o ponto é derivada com respeito ao tempo e a linha é derivada com respeito ao fator de escala. Sob essa abordagem, usando a definição do parâmetro de Hubble obtemos a seguinte relação:

$$\dot{R} = R'aH.$$

Temos portanto:

$$\frac{(R'aH)^2}{R_i^2 H_i^2} = (1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i$$

$$\frac{R'^2}{R_i^2 H_i^2} = \frac{1}{a^2 H^2}\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i \right].$$

Utilizando ainda a equação para o background:

$$\frac{R'^2}{R_i^2 \rho_i} = \frac{1}{a^2 \rho}\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i \right]$$

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{\rho_i}{a^2 \rho}\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i \right].$$

Note ainda que

$$\rho a^3 = \rho_i a_i^3$$

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \frac{a^3}{a_i^3}.$$

Logo

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{a}{a_i^3}\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} - \delta_i \right].$$

Definindo: $\bar{R} \equiv R/R_i$, então:

$$\boxed{\bar{R}'^2(a) = \frac{a}{a_i^3}\left[(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}(a)} - \delta_i \right].} \tag{5.4}$$

Este resultado nos permite estudar o comportamento da perturbação em termos da evolução do background. Devido à simplicidade do modelo *CDM* é possível encontrar uma solução analítica para esta equação diferencial e faremos isso a seguir. Também discutiremos a solução numérica para este modelo.

5.1.2 Solução Analítica

Dividiremos esta análise em dois casos: o primeiro será para o tempo em que a esfera atinge o seu maior volume e o segundo para quando ela inicia o processo de colapso a partir deste ponto.

5.1.2.1 Fator de escala máximo

Na seção anterior derivamos a expressão que nos mostra o comportamento da perturbação em termos das informações referentes ao background. Em particular, consideramos agora o seu crescimento a partir de um instante inicial até atingir seu volume máximo, que ocorrerá em um tempo $t = t_m$ denominado *turn around*. Algebricamente iremos manipular (5.4) como segue:

$$\frac{d\bar{R}}{da} = \sqrt{\frac{a}{a_i^3}\left[(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i\right]}$$

$$d\bar{R} = \sqrt{\frac{a}{a_i^3}\left[(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i\right]}da$$

$$\sqrt{\frac{a}{a_i^3}}da = \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}d\bar{R}$$

Integrando a expressão acima, temos

$$\int_{a_i}^{a_m} \sqrt{\frac{a}{a_i^3}}da = \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_m} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}.$$

Os limites de integração segunda integral serão

$$\bar{R}_i = 1$$

e

$$\bar{R}_m = \frac{1+\delta_i}{\delta_i}$$

Note que o resultado para $\bar{R}_i$ veio diretamente da própria definição de $\bar{R}$ enquanto que para $\bar{R}_m$ usamos o fato de que neste instante $\dot{R}_m = 0$.

$$\int_{a_i}^{a_m} \sqrt{\frac{a}{a_i^3}}da = \int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}$$

$$\frac{2}{3}\left[\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} - 1\right] = \int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}$$

$$\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}} = 1 + \frac{3}{2}I_1, \tag{5.5}$$

onde por simplificação chamamos a integral acima de I_1 para resolvê-la separadamente.

Cálculo da integral

A integral acima será resolvida por manipulação algébrica usual.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}} \\ &= \int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{\bar{R}^{1/2}}{\sqrt{(1+\delta_i) - \delta_i\bar{R}}}d\bar{R}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

A integral acima tem resultado tabelado [33] e aqui usaremos esta solução que é dada por:

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2mb}{(2m+1)a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}dx, \tag{5.7}$$

onde em comparação com a equação (5.6) associamos:

$$m = 1/2;$$

$$a = -\delta_i;$$

$$b = 1 + \delta_i.$$

Logo, reescrevendo I_1 no formato da conhecida solução obtemos:

$$I_1 = \left.\frac{2\bar{R}^{1/2}\sqrt{-\delta_i\bar{R} + (1+\delta_i)}}{[2(1/2)+1](-\delta_i)}\right|_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} - \frac{2(1/2)(1+\delta_i)}{[2(1/2)+1](-\delta_i)}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{\bar{R}^{1/2-1}}{\sqrt{-\delta_i\bar{R} + (1+\delta_i)}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \left(-\frac{2\left(\frac{1+\delta_i}{\delta_i}\right)^{1/2}\sqrt{(-\delta_i)(\frac{1+\delta_i}{\delta_i}) + (1+\delta_i)}}{2\delta_i} + \frac{2\sqrt{-\delta_i + (1+\delta_i)}}{2\delta_i}\right) + \frac{1+\delta_i}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{\bar{R}^{-1/2}}{\sqrt{-\delta_i\bar{R} + (1+\delta_i)}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{1+\delta_i}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}^1\bar{R}^{-1/2}\sqrt{-\delta_i\bar{R} + (1+\delta_i)}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{1+\delta_i}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{-\delta_i + (1+\delta_i)\bar{R}^{-1}}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{1+\delta_i}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{(1+\delta_i)\left[\bar{R}^{-1} - \frac{\delta_i}{1+\delta_i}\right]}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{1+\delta_i}{2\delta_i}\frac{1}{\sqrt{1+\delta_i}}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{\bar{R}^{-1} - \frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{\bar{R}^{-1} - \frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}d\bar{R}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{2\delta_i}\int_1^{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{(\sqrt{\bar{R}^{-1}})^2 - \left(\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}\right)^2}}d\bar{R}.$$

Consideremos agora uma mudança de variáveis reescrevendo a nova variável e a constante, respectivamente, como

$$y = \sqrt{\bar{R}^{-1}} \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{y^2},$$

que implica em $d\bar{R} = -\frac{2}{y^3}$. E ainda:

$$u = \sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}.$$

Daí:

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{2\delta_i} \int_1^{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}} \frac{(-2)}{y^3 \frac{1}{y^2} \sqrt{y^2 - u^2}} dy$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} - \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i} \int_1^{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}} \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - u^2}},$$

de onde sabemos que esta última integral é tabelada [25] e portanto tem como resultado:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - u^2}} = \frac{1}{u} \sec^{-1}\left(\frac{y}{u}\right) + C, \tag{5.8}$$

onde C é a constante de integração. Então, calculando a integral temos que:

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} - \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i} \left[\frac{1}{u} \sec^{-1}\left(\frac{y}{u}\right)\right]\Bigg|_1^{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} - \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i} \sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}} \left[\sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}} \sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\right) - \sec^{-1}\left(1 \sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\right)\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} - \frac{1+\delta_i}{\delta_i} \frac{1}{\sqrt{\delta_i}} \left[\sec^{-1}(1) - \sec^{-1}\left(1 \sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\right)\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \frac{1+\delta_i}{\delta_i} \frac{1}{\sqrt{\delta_i}} \sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{\delta_i} + \left(1 + \frac{1}{\delta_i}\right) \frac{1}{\sqrt{\delta_i}} \sec^{-1}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\delta_i}}\right) \tag{5.9}$$

Por fim, substituindo este resultado na expressão (5.5) concluímos que

$$\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2\delta_i} + \frac{3}{2\sqrt{\delta_i}} \left(1 + \frac{1}{\delta_i}\right) \sec^{-1}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\delta_i}}\right). \tag{5.10}$$

Esta solução estabelece uma relação entre o fator de escala inicial e aquele correspondente para o volume máximo da esfera e a partir dele calcularemos o contraste de densidade (χ) no instante de *turn around*, definido por:

$$\chi \equiv \frac{\rho_p(t_m)}{\rho(t_m)}. \tag{5.11}$$

Temos então:

$$\chi = \frac{\rho_{pi}}{\rho_m} \left(\frac{R_i}{R_m}\right)^3 = \frac{\rho_i}{\rho_m} (1 + \delta_i) \left(\frac{R_i}{R_m}\right)^3$$

$$\chi = (1+\delta_i)\left(\frac{R_i}{R_m}\right)^3\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^3$$

No referido instante temos a implicação de que $\dot{R}_m = 0$ e da equação (5.3) tiramos

$$\dot{R}_m^2 = \Omega_i R_i^2 H_i^2\left[(1+\delta_i)\frac{R_i}{R_m} - \delta_i\right] = 0$$

$$(1+\delta_i)\frac{R_i}{R_m} - \delta_i = 0$$

$$\frac{R_i}{R_m} = \frac{\delta_i}{1+\delta_i}$$

Logo, a equação correspondente ao contraste de densidade fica:

$$\chi = (1+\delta_i)\left(\frac{\delta_i}{1+\delta_i}\right)^3\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^3$$

$$\chi = \frac{\delta_i^3}{(1+\delta_i)^2}\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^3 \tag{5.12}$$

De posse do resultado (5.10) a equação (5.12) assume a forma

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\delta_i^3}{(1+\delta_i)^2}\left(1+\frac{3}{2\delta_i}+\frac{3}{2\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\delta_i^3}{(1+\delta_i)^2}\left[1+\frac{3}{\delta_i}+\frac{9}{4\delta_i^2}+\frac{3}{\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)+\right. \\ &\left. +\frac{9}{2\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)+\frac{9}{4\delta_i}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)^2(\sec^{-1})^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)\right]\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ao fazer uma expansão em potências de δ_i obtemos que:

$$\chi = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{3\pi}{10}\delta_i^{5/2} - \frac{3\pi}{7}\delta_i^{7/2} + O(\delta_i^{9/2}) \tag{5.14}$$

Para o caso em que δ_i seja muito pequeno, então

$$\chi \simeq 5,6, \tag{5.15}$$

e portanto a flutuação na densidade de matéria será

$$\delta_m = \chi - 1 \simeq 5,6 - 1$$

$$\boxed{\delta_m \simeq 4,6} \tag{5.16}$$

5.1.2.2 Tempo do colapso

Como dito anteriormente, no instante de *turn around* a esfera começa a colapsar até que seu volume seja **nulo**. Neste caso repetimos os cálculos anteriores até que encontremos uma valor para a_c para o qual a condição $\bar{R}_c = 0$ seja satisfeita. Portanto, as integrais neste ponto de vista ficam:

$$\int_{a_m}^{a_c} \sqrt{\frac{a}{a_i^3}} da = -\int_{\bar{R}_m}^{\bar{R}_c} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}} = -\int_{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}^{0} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}$$

$$\frac{2}{3}\left[\left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{3/2} - \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2}\right] = -\int_{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}^{0} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}}$$

$$\left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{3/2} = \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\int_{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}^{0} \frac{d\bar{R}}{\sqrt{(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}} - \delta_i}} = \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} - \frac{3}{2} I_2 \tag{5.17}$$

A integral I_2 acima é a mesma de (5.6), exceto pelos limites de integração. Logo, utilizaremos o mesmo resultado fazendo apenas as devidas mudanças nesses limites.

$$I_2 = \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{2\delta_i}\int_{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}^{0} \frac{1}{\bar{R}\sqrt{(\sqrt{\bar{R}^{-1}})^2 - \left(\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}\right)^2}} d\bar{R}$$

Algebricamente, usando mesma mudança de variáveis e as mesmas definições do caso anterior encontramos que I_2 assume a forma:

$$I_2 = \frac{\sqrt{1+\delta_i}}{2\delta_i}(-2)\int_{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - u^2}}$$

$$I_2 = -\frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i}\int_{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - u^2}}$$

Novamente de posse do mesmo resultado tabelado [25] usado anteriormente encontramos

$$I_2 = -\frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i}\left[\frac{1}{u}\sec^{-1}\left(\frac{y}{u}\right)\right]\Bigg|_{\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}}^{\infty}$$

$$I_2 = -\frac{\sqrt{1+\delta_i}}{\delta_i}\sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\left[sec^{-1}(\infty) - sec^{-1}\left(\sqrt{\frac{\delta_i}{1+\delta_i}}\sqrt{\frac{1+\delta_i}{\delta_i}}\right)\right]$$

$$I_2 = -\frac{(1+\delta_i)}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left[sec^{-1}(\infty) - sec^{-1}(1)\right] = -\frac{(1+\delta_i)}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\frac{(1+\delta_i)}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}$$

Assim, substituindo I_2 em (5.17) concluímos que

$$\left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{3/2} = \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2} + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}} \tag{5.18}$$

Um importante resultado é obtido a partir da expressão anterior ao usar (5.10) e fazer uma expansão em torno de $\delta_i = 0$:

$$\frac{a_c}{a_i} = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\frac{1}{\delta_i} + \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^{1/3} - \frac{\pi^{2/3}}{3\cdot 12^{1/3}}\delta_i + \frac{2}{15}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3}\delta_i^{3/2} + O(\delta_i^2) \tag{5.19}$$

Este é uma expressão para o fator de escala do colapso obtida analiticamente. Para o caso em que o conteúdo da perturbação em questão fosse matéria bariônica teríamos $a_i = 10^{-3}$ bem como $\delta_i = 10^{-5}$ e portanto encontraríamos $a_c = 281$, que está em completo acordo para a existência de matéria escura.

5.1.3 Solução Numérica

Para resolver numericamente a equação (5.4) é conveniente trabalhar com a sua segunda derivada assim como feito em [23, 34] uma vez que desta forma pode-se eliminar a possibilidade de duas soluções devida à raiz quadrada originada do termo $\bar{R}'^2$. Portanto, a equação a ser trabalhada será:

$$\bar{R}''(a) = \frac{1}{2a_i^3}\left[\left(\frac{1+\delta_i}{\bar{R}(a)} - \delta_i\right)\frac{1}{\bar{R}'(a)} - a\left(\frac{1+\delta_i}{\bar{R}^2(a)}\right)\right] \tag{5.20}$$

As condições de contorno necessárias para resolução desta equação diferencial serão referentes ao instante inicial e à definição de $\bar{R}$ e portanto

$$\bar{R}_i = 1, \tag{5.21}$$

assim como

$$\bar{R}_i'^2 = \frac{a_i}{a_i^3}\left[(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}_i} - \delta_i\right] = \frac{1}{a_i^2}\left[1+\delta_i-\delta_i\right]$$

$$\bar{R}_i' = \frac{1}{a_i}. \tag{5.22}$$

Fixando os seguintes parâmetros $a_i = 0,01$ e $\delta_i = 0,09$ obtemos a evolução da perturbação dada pela figura (5.1).

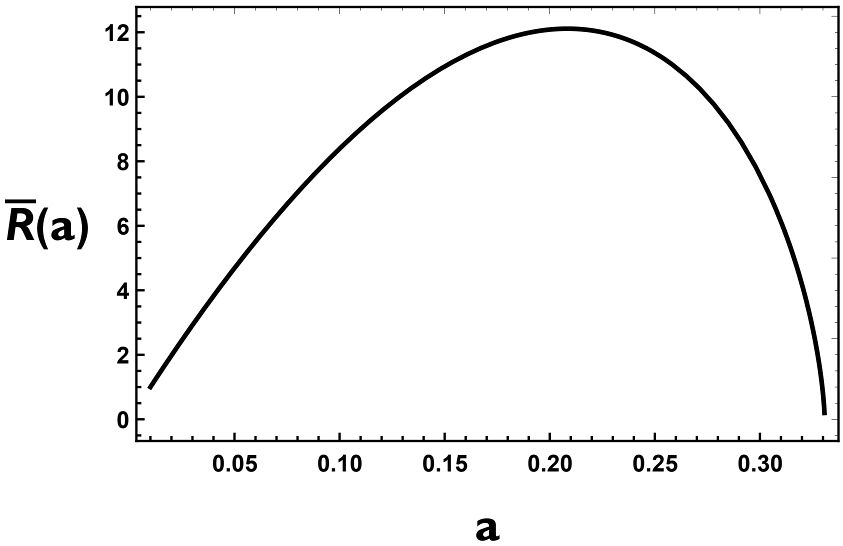


Figura 5.1. Comportamento do fator de escala da perturbação para o modelo CDM.

Do gráfico é possível tirar que o valor máximo atingido pela perturbação ocorre para $\bar{R} \approx 12,11$ correspondendo à um valor de aproximadamente $a \approx 0,21$ para o background.

5.1.4 Virialização

A partir do momento em que a perturbação atinge o fator de escala máximo ela começará o movimento de contração. Entretanto colapsar em um ponto exigiria uma densidade infinita e portanto seria uma situação não física e consequentemente as partículas começarão a colidir umas com as outras dando origem a um gradiente de pressão em seu interior. Essas colisões irão converter energia cinética do colapso em calor e o resultado final será uma configuração estável com um volume "mínimo".

Aplicando então o teorema do Virial ao sistema encontra-se que a energia total da flutuação será:

$$E_{vir} = -\frac{1}{2}\frac{3GM^2}{5\bar{R}_c},$$

onde $\bar{R}_c$ é o raio da esfera nessa configuração de estabilidade.

Para o volume máximo da esfera sua energia será:

$$E_m = -\frac{3GM^2}{5\bar{R}_m}.$$

Se durante a fase do colapso puder ser ignorado possíveis perdas de energia (via radiação térmica) e de massa (devidas às colisões) então segue que:

$$
\begin{aligned}
E_c &= E_m \\
-\frac{1}{2}\frac{3GM^2}{5\bar{R}_{vir}} &= -\frac{3GM^2}{5\bar{R}_m} \\
\bar{R}_m &= 2\bar{R}_c.
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Pela definição $M = \rho V$ encontra-se que:

$$
\begin{aligned}
\rho_p(a_c)V_{vir} &= \rho_p(a_m)V_m \\
\rho_p(a_c)\frac{4\pi}{3}\bar{R}_c^3 = \rho_p(a_m)\frac{4\pi}{3}\bar{R}_m^3 &= \rho_p(a_m)\frac{4\pi}{3}(2\bar{R}_c)^3 \\
\rho_p(a_c) &= 8\rho_p(a_m).
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Podemos dividir (3.36) por $\rho(a_c)$ e a seguir manipular esta equação como segue:

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_p(a_c)}{\rho(a_c)} = 8\frac{\rho_p(a_m)}{\rho(a_c)} &= 8\chi\frac{\rho(a_m)}{\rho(a_c)} \\
\frac{\rho_p(a_c)}{\rho(a_c)} &= 8\chi\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^3
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Para calcularmos esta equação precisamos encontrar o valor de $\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^3$. Então, da equação (5.18) podemos tirar que:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{3/2} &= \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{3/2}\left[1 + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{3/2}\right] \\
\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^{3/2} &= 1 + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{3/2} \\
\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^{3} = \left[1 + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{3/2}\right]^2 &= \left[1 + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{-3/2}\right]^2,
\end{aligned}
$$

onde o termo a_m/a_i ja foi calculado via equação (5.10). Assim:

$$
\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^3 = \left[1 + \frac{3\pi}{4}\frac{1+\delta_i}{\delta_i\sqrt{\delta_i}}\left(1 + \frac{3}{2\delta_i} + \frac{3}{2\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)\right)^{-1}\right]^2
$$

de modo que ao expandirmos esta expressão em termos de δ_i muito pequeno encontramos que

$$\left(\frac{a_c}{a_m}\right)^3 = 4 - \frac{16}{15\pi}\delta_i^{5/2} + \frac{32}{21\pi}\delta_i^{7/2} + O(\delta_i^4),$$

que por sua vez resultará em

$$a_m = a_c\left[4 - \frac{16}{15\pi}\delta_i^{5/2} + \frac{32}{21\pi}\delta_i^{7/2} + O(\delta_i^4)\right]^{-1/3} = 281\left[4 - \frac{16}{15\pi}\delta_i^{5/2} + \frac{32}{21\pi}\delta_i^{7/2} + O(\delta_i^4)\right]^{-1/3}$$

$$a_m \simeq 178, \tag{5.26}$$

que é um valor já esperado [2].

5.1.5 Comparação com a Teoria Linear

Todo o cálculo até aqui desenvolvido leva em conta que para haver formação de estruturas a perturbação deve evoluir de forma que em algum momento ela atinja um regime não linear. Agora podemos então comparar os resultados nas seções anteriores com aqueles previstos pela teoria linear das perturbações.

Começaremos usando o fato que $a \propto t^{2/3}$ para reescrever (4.1) em termos da nossa variável a:

$$\delta_L = \delta_+(a_i)\frac{a}{a_i} + \delta_-(a_i)\left(\frac{a}{a_i}\right)^{-3/2}, \tag{5.27}$$

onde o índice L refere-se à teoria linear.

Ao assumir a condição de que as velocidades peculiares iniciais nas extremidades da esfera sejam **nulas**[1] concluímos que $\dot{\delta}_L = 0$ e a combinação entre os modos crescente e decrescente deverá satisfazer:

$$\dot{\delta}_{Li} = \frac{2}{3}\delta_+(a_i) - \delta_-(a_i) = 0$$

$$\delta_-(a_i) = \frac{2}{3}\delta_+(a_i).$$

Substituindo na equação (5.27) no instante inicial

$$\delta_L(a_i) = \delta_+(a_i) + \frac{2}{3}\delta_+(a_i)$$

$$\delta_L(a_i) = \delta_i = \frac{5}{3}\delta_+(a_i), \tag{5.28}$$

Note ainda que podemos reescrever a equação para flutuação em termos de δ_i

[1] Estamos considerando que inicialmente a perturbação segue o fluxo de Hubble.

como segue:

$$\delta_L(a) = \frac{3}{5}\delta_i \frac{a}{a_i} + \frac{2}{5}\delta_i \left(\frac{a}{a_i}\right)^{-3/2} \tag{5.29}$$

Esta extrapolação linear será feita para os dois instantes de interesse: para o tempo de *turn around* e também para o tempo do colapso.

5.1.5.1 Fator de escala máximo

Avaliando inicialmente a última equação no instante de tempo que inicia o colapso temos que:

$$\delta_L(a_m) = \frac{3}{5}\delta_i \frac{a_m}{a_i} + \frac{2}{5}\delta_i \left(\frac{a_m}{a_i}\right)^{-3/2},$$

onde ainda usamos a expansão para a_m/a_i obtida anteriormente:

$$\begin{aligned}\delta_L(a_m) = &\frac{3}{5}\delta_i \left[1 + \frac{3}{2\delta_i} + \frac{3}{2\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)\right]^{2/3} \\ &+\frac{2}{5}\delta_i \left[1 + \frac{3}{2\delta_i} + \frac{3}{2\sqrt{\delta_i}}\left(1+\frac{1}{\delta_i}\right)\sec^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\delta_i}}\right)\right]^{-1}\end{aligned}$$

Novamente, expandindo a expressão acima em torno de $\delta_i = 0$ encontramos

$$\delta_L(a_m) = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} + \frac{(3\pi)^{2/3}}{5\cdot 2^{1/3}}\delta_i - \frac{\pi^{2/3}}{10\cdot 6^{1/3}}\delta_i^2 + O(\delta_i^{5/2}), \tag{5.30}$$

de onde obtemos que para $\delta_i \simeq 0$ a flutuação será igual a

$$\delta_L(a_m) = \frac{3}{5}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3}$$

$$\boxed{\delta_L(a_m) = 1,06} \tag{5.31}$$

Este resultado está em completo acordo com a literatura [2]. A seguir faremos a mesma análise para o caso do colapso.

5.1.5.2 Tempo do colapso

Repetiremos o mesmo calculo feito anteriormente para instante de colapso da perturbação que neste caso terá uma flutuação igual a

$$\delta_L(a_c) = \frac{3}{5}\delta_i \frac{a_c}{a_i} + \frac{2}{5}\delta_i \left(\frac{a_c}{a_i}\right)^{-3/2},$$

onde, usando (3.29) chegamos a

$$\delta_L(a_c) = \frac{3}{5}\delta_i\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\frac{1}{\delta_i}+\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^{1/3}-\frac{\pi^{2/3}}{3\cdot 12^{1/3}}\delta_i+\frac{2}{15}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3}\delta_i^{3/2}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\delta_i\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}\frac{1}{\delta_i}+\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^{1/3}-\frac{\pi^{2/3}}{3\cdot 12^{1/3}}\delta_i+\frac{2}{15}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3}\delta_i^{3/2}\right]^{-3/2}$$

$$\delta_L(a_c) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}+\left[\frac{2^{1/3}}{5}(3\pi)^{2/3}+\frac{2}{25}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/3}\right]\delta_i-\frac{1}{5\cdot 3^{1/3}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\delta_i^2+O(\delta_i^{5/2}) \quad (5.32)$$

Aqui usamos novamente uma expansão em δ_i. Ao considerarmos este valor muito pequeno o primeiro termo passa a ser dominante em relação aos demais, de forma que a flutuação será

$$\delta_L(a_c) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3}$$
$$\boxed{\delta_L(a_c) = 1,69} \quad (5.33)$$

que mais uma vez está de acordo com o resultado esperado [2].

5.2 Modelo ΛCDM

Pode-se agora fazer o mesmo estudo do caso anterior para uma situação que envolva um universo de background com presença de matéria escura e ainda com um novo componente, denominado energia escura o qual chamamos de modelo *ΛCDM*. A seguir então reescrevemos as equações necessárias para este tipo de modelo em suas formas apropriadas.

5.2.1 Equações de Friedmann

Como dito anteriormente, agora o universo contará com um componente a mais e assim não poderemos mais descrever as evoluções do background e da perturbação segundo às usadas na seção anterior. Temos assim que tais equações serão dadas por:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m+\rho_\Lambda), \quad (5.34)$$

para o background e

$$H_p^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{pm}+\rho_{p\Lambda})-\frac{k}{R^2}, \quad (5.35)$$

para a perturbação, onde:
ρ_m é a densidade de matéria;
ρ_{pm} a densidade de perturbação referente à matéria; e
$\rho_{p\Lambda}$ é o termo referente à energia escura.

Assim como no modelo CDM queremos encontrar a evolução do fator de escala $R(t)$ neste novo contexto. Tomando então um instante de tempo dado por $t = t_i$ temos:

$$H_{pi}^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i}) - \frac{k}{R_i^2}$$

$$k = R_i^2\left[\frac{8\pi G}{3}(\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i}) - H_{pi}^2\right]$$

Novamente, como $H_i = H_{pi}$:

$$k = R_i^2\left[\frac{8\pi G}{3}(\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i}) - H_i^2\right]$$

$$k = R_i^2\left[\frac{8\pi G}{3}(\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i}) - \frac{8\pi G}{3}(\rho_{mi} + \rho_{\Lambda i})\right]$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}R_i^2[\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i} - \rho_{mi} - \rho_{\Lambda i}].$$

Como o termo de energia escura não é perturbado, então $\rho_{p\Lambda i} = \rho_{\Lambda i}$. Portanto:

$$k = \frac{8\pi G}{3}R_i^2[\rho_{pmi} - \rho_{mi}]$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}R_i^2[\rho_{mi}(1 + \delta_i) - \rho_{mi}]$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}\rho_{mi}\delta_i R_i^2.$$

Substituindo este resultado na equação (5.35):

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{pm} + \rho_{p\Lambda}) - \frac{8\pi G}{3}\rho_{mi}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

Dividindo a equação acima por H_i^2:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2 H_i^2} = \frac{8\pi G}{3H_i^2}(\rho_{pm} + \rho_{p\Lambda}) - \frac{8\pi G}{3H_i^2}\rho_{mi}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2 H_i^2} = \frac{\rho_{pm}}{\rho_{ci}} + \frac{\rho_{p\Lambda}}{\rho_{ci}} - \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ci}}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{\rho_{pmi}}{\rho_{ci}}\frac{R_i^3}{R^3} + \frac{\rho_{p\Lambda i}}{\rho_{ci}} - \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ci}}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ci}}(1+\delta_i)\frac{R_i^3}{R^3} + \frac{\rho_{\Lambda i}}{\rho_{ci}} - \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ci}}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i^3}{R^3} + \Omega_\Lambda - \Omega_{mi}\delta_i\frac{R_i^2}{R^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2H_i^2} = \frac{R_i^2}{R^2}\left[\Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda\frac{R^2}{R_i^2} - \Omega_{mi}\delta_i\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R_i^2H_i^2} = \Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda\frac{R^2}{R_i^2} - \Omega_{mi}\delta_i.$$

Mudança de variável:

Assim como no modelo *CDM* podemos mudar a variável para que todas as grandezas dependam apenas do fator de escala. O processo é análogo ao caso anterior e portanto também é válido $\dot{R} = R'aH$:

$$\frac{(R'aH)^2}{R_i^2H_i^2} = \Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda\frac{R^2}{R_i^2} - \Omega_{mi}\delta_i$$

$$\frac{R'^2}{R_i^2H_i^2} = \frac{1}{a^2H^2}\left[\Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda\frac{R^2}{R_i^2} - \Omega_{mi}\delta_i\right]$$

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{1}{a^2H^2/H_i^2}\left[\Omega_{mi}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda\frac{R^2}{R_i^2} - \Omega_{mi}\delta_i\right]. \tag{5.36}$$

Note que ainda podemos encontrar a relação H^2/H_i^2 a partir da equação do background. Neste caso obtemos então:

$$\frac{H^2}{H_i^2} = \frac{8\pi G}{3H_i^2}(\rho_m + \rho_\Lambda) = \frac{8\pi G}{3H_i^2}\left(\rho_{mi}\frac{a_i^3}{a^3} + \rho_{\Lambda i}\right)$$

$$\frac{H^2}{H_i^2} = \frac{\rho_{mi}}{\rho_{ci}}\frac{a_i^3}{a^3} + \frac{\rho_{\Lambda i}}{\rho_{ci}} = \Omega_{mi}\frac{a_i^3}{a^3} + \Omega_\Lambda.$$

Como $\Omega_{mi} = \Omega_{m0}/a_i^3$, onde Ω_{m0} é o parâmetro de massa medido atualmente. Logo, encontramos:

$$\frac{H^2}{H_i^2} = \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_\Lambda \tag{5.37}$$

Logo, substituindo (5.37) na equação (5.36) para obter

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{a}{\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda a^3}\left[\frac{\Omega_{m0}}{a_i^3}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_\Lambda \frac{R^2}{R_i^2} - \frac{\Omega_{m0}}{a_i^3}\delta_i\right]$$

Podemos ainda definir $\bar{R} \equiv \dfrac{R}{R_i}$ e daí:

$$\boxed{\bar{R}'^2(a) = \frac{a}{a_i^3(\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda a^3)}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}(a)} + \Omega_\Lambda \bar{R}^2(a) a_i^3 - \Omega_{m0}\delta_i\right]} \tag{5.38}$$

Note que neste contexto é válido que $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{m0}$.

5.2.2 Solução Numérica

Diferentemente de um universo preenchido apenas por matéria escura (*CDM*) tratamos agora do caso onde há dois componentes preenchendo a região de estudo e no processo de resolução das equações referentes ao modelo se faz necessária a utilização de métodos numéricos para obtenção das respectivas soluções. Começaremos então pelo cálculo do fator de escala máximo da perturbação e a seguir estudaremos o seu comportamento durante o processo de colapso.

5.2.2.1 Volume Máximo da Perturbação

Como visto anteriormente na seção (5.1.2) no instante de *turn around* temos a condição $\bar{R}'_m = 0$ e assim a perturbação atinge seu fator de escala máximo que será calculado, a partir de (5.38), pela expressão:

$$\bar{R}'^2_m = \frac{a_m}{a_i^3(\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda a_m^3)}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}_m} + \Omega_\Lambda \bar{R}_m^2 a_i^3 - \Omega_{m0}\delta_i\right] = 0$$

$$\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}_m} + \Omega_\Lambda \bar{R}_m^2 a_i^3 - \Omega_{m0}\delta_i = 0$$

$$\Omega_\Lambda a_i^3 \bar{R}_m^3 - \Omega_{m0}\delta_i \bar{R}_m + \Omega_{m0}(1+\delta_i) = 0 \tag{5.39}$$

Podemos fixar os parâmetros desta equação com os mesmos valores usados no modelo anterior e também variar os possíveis valores de Ω_Λ afim de analisar como o colapso é sensível à presença de energia escura. Logo, os resultados para $\bar{R}_m$ foram organizados e podem ser vistos na tabela 5.1 e na figura (5.2).

Ω_{m0}	$\bar{R}_m$
0,3	12,1577
0,4	12,1409
0,5	12,1309
0,6	12,1243
0,7	12,1196
0,8	12,1161
0,9	12,1133
1,0	12,1111

Tabela 5.1. Valores de $\bar{R}_m$ para suas respectivas quantidades de matéria.

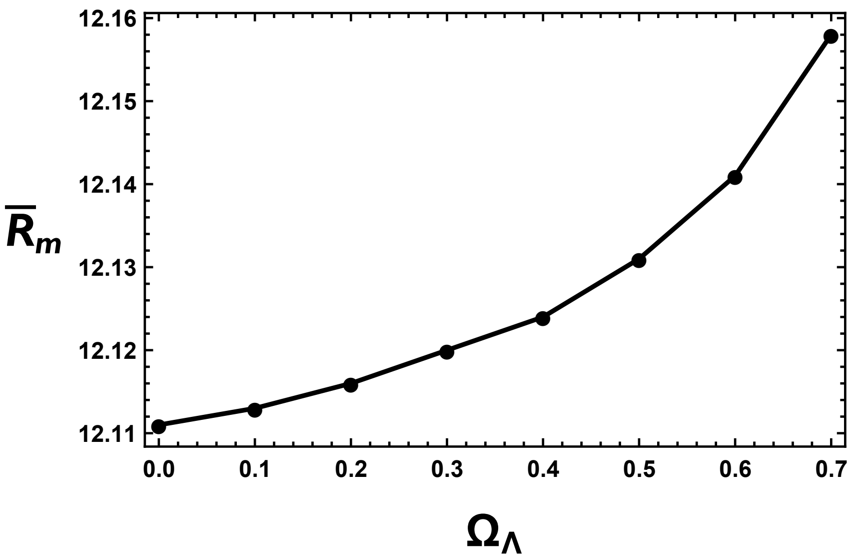


Figura 5.2. Relação entre o fator de escala máxima e a quantidade de energia escura.

Analisamos o comportamento do fator de escala a partir do modelo CDM até a proporção de energia escura observada atualmente.

5.2.2.2 Comportamento da Perturbação

Para observarmos como a perturbação se comporta durante este processo, novamente usamos a segunda derivada da equação correspondente que assumirá a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
2\bar{R}'\bar{R}'' &= \frac{a}{a_i^3(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a^3)}\left[-\frac{\Omega(1+\delta_i)}{\bar{R}^2}+2\Omega_\Lambda a_i^3\bar{R}\right]\bar{R}' + \\
&+ \left[\frac{1}{a_i^3(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a^3)}-\frac{3\Omega_\Lambda a^3}{a_i^3(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a^3)^2}\right]\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}}+\Omega_\Lambda\bar{R}^2 a_i^3-\Omega_{m0}\delta_i\right]
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

As condições de contorno, assim como no modelo anterior serão:

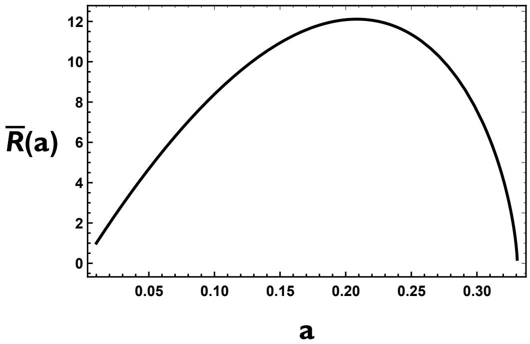
$$\bar{R}_i = 1 \tag{5.41}$$

e também:

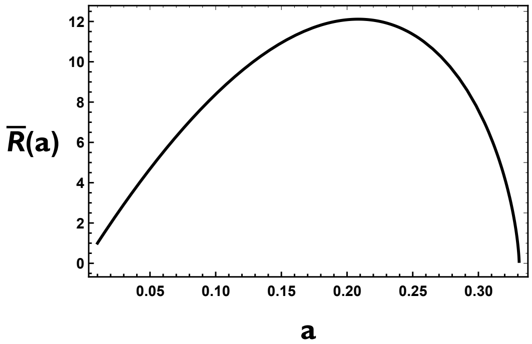
$$
\begin{aligned}
\bar{R}_i'^2 &= \frac{a_i}{a_i^3(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a_i^3)}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}_i}+\Omega_\Lambda\bar{R}_i^2 a_i^3-\Omega_{m0}\delta_i\right] \\
\bar{R}_i'^2 &= \frac{1}{a_i^2(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a_i^3)}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)+\Omega_\Lambda a_i^3-\Omega_{m0}\delta_i\right] \\
\bar{R}_i'^2 &= \frac{1}{a_i^2(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a_i^3)}\left(\Omega_{m0}+\Omega_\Lambda a_i^3\right)=\frac{1}{a_i^2} \\
\bar{R}_i' &= \frac{1}{a_i}
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

Usando os mesmos valores fixados na subseção anterior é possível plotar várias representações gráficas do comportamento da perturbação em função da quantidade de matéria presente nela e que podem ser vistas a seguir.

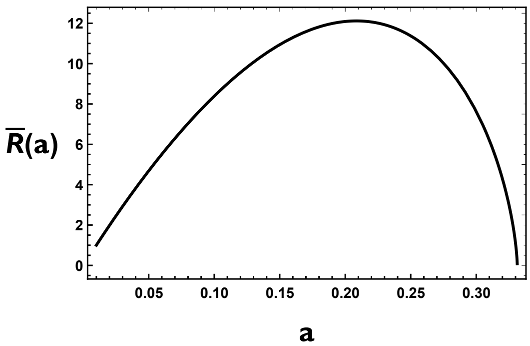
Como vemos nos resultados dos gráficos da figura (5.3) o colapso desta região esférica é afetado pela proporção entre a matéria e a energia escura de forma que a medida que a quantidade de matéria aumenta (o que equivale dizer que a quantidade de energia escura diminui) tem-se uma redução do volume desta esfera, ou seja, o seu fator de escala máximo fica cada vez menor. Tal conclusão já era esperada uma vez que tais componentes apresentam uma tendência oposta pois enquanto a matéria é auto-atrativa e desta forma favorece o colapso, a energia escura é responsável por acelerar a expansão do universo e assim tende a ir contra o colapso.



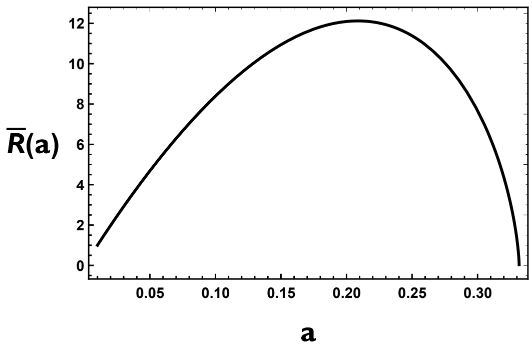
(a) $\Omega_m = 1; \Omega_\Lambda = 0$



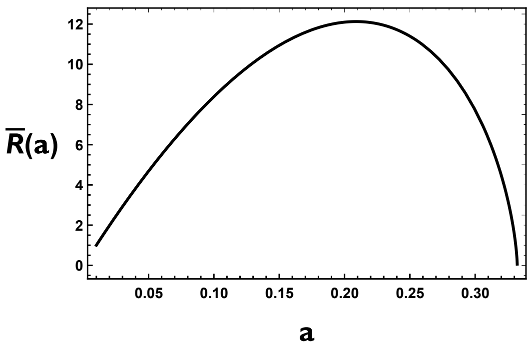
(b) $\Omega_m = 0.9; \Omega_\Lambda = 0,1$



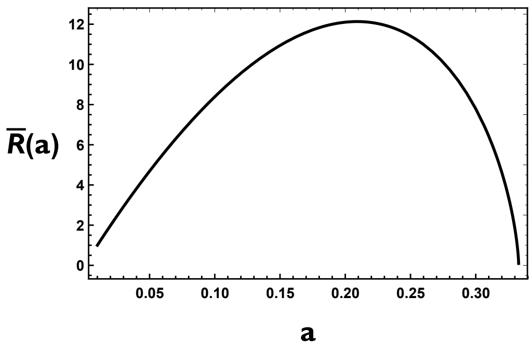
(c) $\Omega_m = 0,8; \Omega_\Lambda = 0,2$



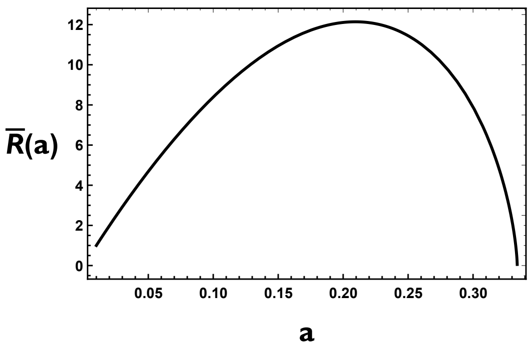
(d) $\Omega_m = 0,7; \Omega_\Lambda = 0,3$



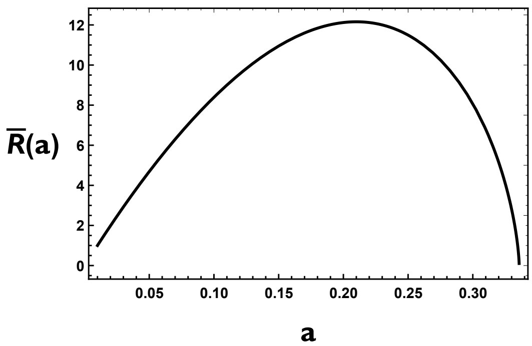
(e) $\Omega_m = 0,6; \Omega_\Lambda = 0,4$



(f) $\Omega_m = 0,5; \Omega_\Lambda = 0,5$



(g) $\Omega_m = 0,4; \Omega_\Lambda = 0,6$



(h) $\Omega_m = 0,3; \Omega_\Lambda = 0,7$

Figura 5.3. Colapso para proporção de energia escura.

5.3 Modelo wCDM

5.3.1 Evolução da Perturbação

Neste modelo consideramos um caso geral onde w é uma constante. Assim como nos casos anteriores escrevemos as equação para o background e para perturbação respectivamente:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_w, \tag{5.43}$$

e

$$H_p^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{pw} - \frac{k}{R^2}. \tag{5.44}$$

Para o instante de tempo inicial o termo de curvatura será calculado da forma:

$$H_{pi}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{pwi} - \frac{k}{R_i^2}$$

$$H_i^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{pwi} - \frac{k}{R_i^2}$$

$$k = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_{pwi} - H_i^2\right)R_i^2$$

$$k = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{pwi} - \rho_{wi}\right)R_i^2$$

Note que usamos novamente o fato de que $H_{pi} = H_i$. Reescrevendo (5.44) com o valor de k acima encontramos

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{pw} - \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{pwi} - \rho_{wi}\right)\left(\frac{R_i}{R}\right)^2$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{pw} - \left(\rho_{pwi} - \rho_{wi}\right)\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

Separando os termos em w em suas respetivas dependências de matéria e energia escura, temos:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{pm} + \rho_{p\Lambda} - \left(\rho_{pmi} + \rho_{p\Lambda i} - \rho_{mi} - \rho_{\Lambda i}\right)\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{pm} + \rho_{p\Lambda} - \left(\rho_{pmi} - \rho_{mi}\right)\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{pmi}\left(\frac{R_i}{R}\right)^3 + \rho_{p\Lambda} - \left(\rho_{pmi} - \rho_{mi}\right)\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{mi}(1+\delta_i)\left(\frac{R_i}{R}\right)^3 + \rho_\Lambda - (\rho_{mi}(1+\delta_i) - \rho_{mi})\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{mi}(1+\delta_i)\left(\frac{R_i}{R}\right)^3 + \rho_\Lambda - \rho_{mi}\delta_i\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

Dividindo a expressão acima por H_0^2:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\left[\frac{\rho_{m0}}{a_i^3}(1+\delta_i)\left(\frac{R_i}{R}\right)^3 + \frac{\rho_{\Lambda 0}}{a^{3(1+w)}} - \frac{\rho_{m0}}{a_i^3}\delta_i\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2 H_0^2} = \frac{R_i^2}{R^2}\left[\frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}\frac{(1+\delta_i)}{a_i^3}\frac{R_i}{R} + \frac{\rho_{\Lambda_0}}{\rho_{c0}}\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 a^{-3(1+w)} - \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}\frac{\delta_i}{a_i^3}\right]$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R_i^2 H_0^2} = \frac{1}{a_i^3}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_{\Lambda 0}a_i^3\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right]$$

Mudança de Variável:

Assim como nos casos anteriores usaremos a definição $\dot{R} = R'aH$ para escrever a última expressão com dependência do fator de escala do background a. Portanto:

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{1}{a_i^3 a^2 H^2/H_0^2}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_{\Lambda 0}a_i^3\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right] \tag{5.45}$$

Calculando ainda o termo H^2/H_0^2:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_m + \rho_\Lambda) = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\left(\rho_{m0}\frac{1}{a^3} + \rho_{\Lambda 0}\frac{1}{a^{3(1+w)}}\right)$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}a^{-3} + \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}}a^{-3(1+w)} = \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda 0}a^{-3(1+w)}.$$

De posse do resultado acima, a equação (5.45) toma a forma:

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{1}{a_i^3 a^2(\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda 0}a^{-3(1+w)})}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_{\Lambda 0}a_i^3\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right]$$

$$\frac{R'^2}{R_i^2} = \frac{a}{a_i^3(\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0}a^{-3w})}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{R_i}{R} + \Omega_{\Lambda 0}a_i^3\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right]$$

Por fim, com a definição $\bar{R} \equiv R/R_i$ e considerando ainda que $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0}$, a evolução da perturbação será:

$$\boxed{\bar{R}'^2(a) = \frac{a}{a_i^3[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})a^{-3w}]}\left[\Omega_{m0}(1+\delta_i)\frac{1}{\bar{R}(a)} + (1-\Omega_{m0})a_i^3\bar{R}^2(a)a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right]} \tag{5.46}$$

5.3.2 Solução Numérica

Seguindo o mesmo processo dos modelos anteriores, encontraremos numericamente uma solução para o fator de escala através da derivada segunda de (5.46). Então, ao derivar a equação anterior chegamos a

$$\begin{aligned}
2\bar{R}'\bar{R}'' = \frac{a}{a_i^3\,[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})a^{-3w}]}\left[-\frac{\Omega_{m0}(1+\delta_i)}{\bar{R}^2}\bar{R}' + (1-\Omega_{m0})a_i^3(2\bar{R}a^{-3(1+w)}\bar{R}'\right. \\
\left. -3(1+w)\bar{R}^2a^{-(4+3w)})\right] + \left[\frac{1}{a_i^3\,[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})a^{-3w}]} + \right. \\
\left. \frac{3w(1-\Omega_{m0})a^{-3w}}{a_i^3\,[\Omega_{m0} + (1-\Omega_{m0})a^{-3w}]^2}\right]\left[\frac{\Omega_{m0}(1+\delta_i)}{\bar{R}} + (1-\Omega_{m0})a_i^3\bar{R}^2a^{-3(1+w)} - \Omega_{m0}\delta_i\right]
\end{aligned} \tag{5.47}$$

O resultado desta equação pode ser visto na figura (5.3) bem como a comparação com os outros modelos.

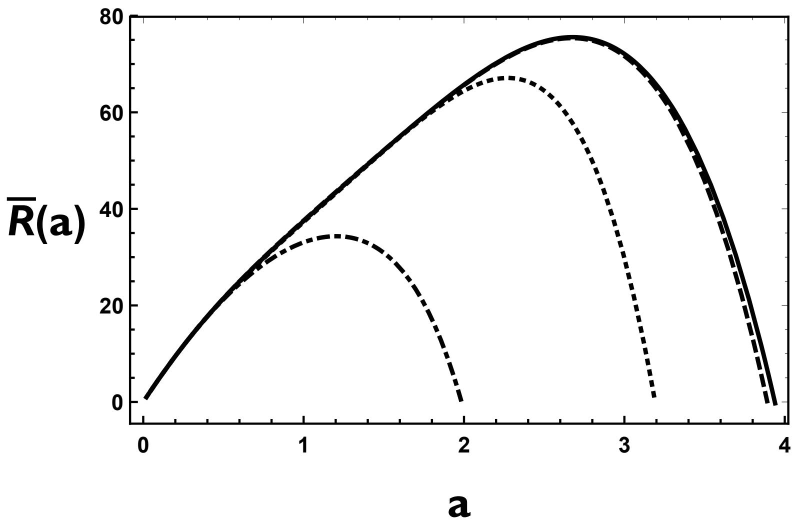


Figura 5.4. Comparação entre os modelos CDM,ΛCDM e wCDM. A curva com ponto e traço representa o modelo CDM; As curvas pontilhada e a tracejada são referentes ao modelo wCDM com $w = -1,099$ e $w = -0,994$ (da esquerda para direita) respectivamente; A curva contínua refere-se ao ΛCDM para $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_m = 0,7$.

No caso deste modelo os valores para os parâmetros que melhor se ajustaram para um plot do gráfico foram $a_i = 0,02$ e $\delta_i = 0,03$ enquanto que os valores utilizados para w foi o da contribuição de Planck, dados por $w = -1,019^{+0,075}_{-0,080}$ através de [35]. Com o resultado obtido vemos que o colapso só ocorre quando o fator de escala do background excede a unidade, ou seja, o processo de colapso da sobredensidade só ocorrerá no futuro.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A possibilidade de formação de estruturas cósmicas leva ao interesse no estudo do colapso esférico e neste trabalho tivemos a intensão de aplicar a sua teoria baseando-se no modelo "*top hat*", que apesar de ser um simples modelo fornece boas informações acerca das estruturas que vem a ser formadas.

Iniciamos o trabalho fazendo uma introdução no capítulo 1 sobre o tema proposto a ser trabalhado e um breve resumo do que seria estudado nos capítulos seguintes foi apresentado.

Após esta apresentação inicial foi feita uma abordagem da dinâmica da cosmologia no contexto newtoniano no capítulo 2 onde foi discutido o universo em expansão e estático juntamente com a questão da instabilidade gravitacional e a introdução da teoria de perturbações com o intuito de iniciarmos o estudo objetivado propriamente dito.

O capítulo 3 foi reservado para uma breve introdução a alguns conceitos importantes associados à teoria de formação de estruturas. Começamos discutindo alguns aspectos importantes da relatividade geral como a métrica no Universo de Friedmann-Robertson-Walker e a consideração da equação de estado reformulada para o contexto cosmológico.

Após essa introdução, a partir do capítulo 4 iniciou-se de fato o estudo do colapso esférico onde começamos com uma breve descrição do modelo "*top hat*". Apesar de o grande interesse no assunto residir no fato de analisarmos a evolução não-linear da perturbação se fez necessária uma curta discussão dos resultados previstos pela teoria linear. Um estudo sobre o parâmetro de Hubble e a obtenção de uma expressão para a densidade ρ no contexto cosmológico foi fundamental para aplicarmos nos modelos que viriam a seguir.

No capítulo 5 aplicamos toda a teoria vista ate então nos modelos de colapso esférico de interesse. Inicialmente estudamos os aspectos do Universo de Einstein-de Sitter e trabalhamos em duas soluções para a evolução da perturbação: analítica e numérica. A seguir adicionamos o componente energia escura e estudamos a solução numérica variando a quantidade de desta energia presente na região de estudo. Por fim realizamos o mesmo processo para o modelo wCDM onde tomamos os valores de w dados pela contribuição de Planck.

Este modelo ainda há boas possibilidades para ser explorado estudando outros valores para w ou num contexto de um universo inomogêneo. Outra perspectiva de futuro pode ser a aplicação do colapso esférico utilizando gravitação modificada.

Referências Bibliográficas

[1] d'Inverno, R. *Introducing Einstein's Relatvity* (Oxford University Press, USA, 1899).

[2] Coles, P. & Lucchin, F. *COSMOLOGY The Origin and Evolution of Cosmic Structure* (John Wiley and Sons, Ltd, 2002).

[3] Mukhanov, V. *Physical foundations of cosmology* (Cambridge university press, 2005).

[4] Knobel, C. An introduction into the theory of cosmological structure formation. *arXiv preprint arXiv:1208.5931* (2012).

[5] Guth, A. H. & Pi, S.-Y. Fluctuations in the new inflationary universe. *Physical Review Letters* **49**, 1110 (1982).

[6] Starobinsky, A. A. Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations. *Physics Letters B* **117**, 175–178 (1982).

[7] Hawking, S. W. The development of irregularities in a single bubble inflationary universe. *Physics Letters B* **115**, 295–297 (1982).

[8] Mo, H., Van den Bosch, F. & White, S. *Galaxy formation and evolution* (Cambridge University Press, 2010).

[9] Del Popolo, A. Some improvements to the spherical collapse model. *Astronomy & Astrophysics* **454**, 17–26 (2006).

[10] Gunn, J. E. & Gott III, J. R. On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution. *The Astrophysical Journal* **176**, 1 (1972).

[11] Li, W. & Xu, L. Spherical top-hat collapse of a viscous unified dark fluid. *The European Physical Journal C* **74**, 2870 (2014).

[12] BATISTA, J. & FERRACIOLI, L. Da physis à física, uma história da evolução do pensamento da física. *EDUFES, Vitória-ES* (2003).

[13] Ryden, B. S. *Introduction to cosmology*, vol. 4 (Addison-Wesley San Francisco USA, 2003).

[14] Dodelson, S. *Modern cosmology* (Academic press, 2003).

[15] Wald, R. M. *General relativity* (University of Chicago press, 2010).

[16] SEARS, F., ZEMANSKY, M., YOUNG, H. & FREEDMAN, R. *Física II: Termodinâmica e Ondas* (São Paulo, SP: Addison Wesley, 10ª edição, 2003).

[17] Stewart, J. & Cálculo, V. 2, 5a edição. *Thomson, São Paulo* (2006).

[18] Griffiths, D. J. & College, R. *Introduction to electrodynamics*, vol. 3 (prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999).

[19] Carroll, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, vol. 1 (2004).

[20] Schutz, B. *A first course in general relativity* (Cambridge university press, 2009).

[21] Press, W. H. & Schechter, P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *The Astrophysical Journal* **187**, 425–438 (1974).

[22] Reed, D. *et al.* Evolution of the mass function of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **346**, 565–572 (2003).

[23] Percival, W. J. Cosmological structure formation in a homogeneous dark energy background. *Astronomy & Astrophysics* **443**, 819–830 (2005).

[24] Lehtinen, N. G. Error functions.

[25] Finney, R. L., Weir, M. D., Giordano, F. R., Thomas, G. B. & Asano, C. H. *Cálculo de George B. Thomas Jr* (Pearson Addison Wesley, 2008).

[26] Sheth, R. K. & Tormen, G. Large-scale bias and the peak background split. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308**, 119–126 (1999).

[27] Jenkins, A. *et al.* The mass function of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **321**, 372–384 (2001).

[28] Monaco, P. The cosmological mass function. *Fundamentals of Cosmic Physics* **19**, 157–317 (1998).

[29] Basse, T., Bjælde, O. E. & Wong, Y. Y. Spherical collapse of dark energy with an arbitrary sound speed. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011**, 038 (2011).

[30] Peebles, P. Tests of cosmological models constrained by inflation. *Inflationary Cosmology* **403**, 84 (1986).

[31] Weinberg, S. Anthropic bound on the cosmological constant. *Physical Review Letters* **59**, 2607 (1987).

[32] Lahav, O., Lilje, P. B., Primack, J. R. & Rees, M. J. Dynamical effects of the cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **251**, 128–136 (1991).

[33] Eqworld: The world of mathematical equations. URL `http://www.sosmath.com/tables/integral/integ4/integ4.html`.

[34] Pereira, T., Rosenfeld, R. & Sanoja, A. Evolution of spherical non-uniform perturbations in the universe. *EPL (Europhysics Letters)* **92**, 39001 (2010).

[35] Ade, P. *et al.* Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics* **594**, A13 (2016).

Apêndice A

Códigos Para Solução Numérica

Neste apêndice segue uma especificação de como foram obtidas as soluções numéricas apresentadas nos capítulos anteriores, utilizando como base para efetuá-los o programa *Wolfram Mathematica 11*.

A.1 Modelo CDM

Para este caso o algorítimo utilizado é dado por:

$$\text{CDMsphcolleq}(\text{ai\_}, \text{deltai\_}){:=}\text{NDSolve}\left[\left\{R'(x)R''(x) = \frac{(-(\text{deltai}+1))xR'(x)}{\left(2\text{ai}^3\right)R(x)^2} + \frac{\frac{\text{deltai}+1}{R(x)} - \text{deltai}}{2\text{ai}^3}, R(\text{ai}) = 1, R'(\text{ai}) = \frac{1}{\text{ai}}\right\}, R, \{x, \text{ai}, 1\}\right], \tag{A.1}$$

onde plot da função é obtido a partir de:

$$\begin{aligned}&\text{Plot}[\text{Evaluate}[R(x)/.\,\text{CDMsphcolleq}(0.02, 0.03)], \{x, 0.02, 1.98\},\\ &\text{PlotStyle} \to \{\text{Thick}, \text{Black}, \text{DotDashed}\}, \text{Frame} \to \text{True}, \text{FrameLabel} \to\\ &\{\text{a}, \bar{R}(\text{a})\}, \text{RotateLabel} \to \text{False}, \text{LabelStyle} \to\\ &\text{Directive}[\text{Bold}, \text{Black}], \text{FrameStyle} \to \text{Directive}[\text{Black}]]\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Modelo ΛCDM

Seguindo a mesma lógica de anteriormente, a equação utilizada neste caso é

$$\text{LCDMsphcolleq(ai\_, Om\_, deltai\_):=}$$
$$\text{NDSolve}\left[\left\{R'(x)R''(x) = \frac{xR'(x)\left(2\text{ai}^3(1-\text{Om})R(x) - \frac{(\text{deltai}+1)\text{Om}}{R(x)^2}\right)}{2\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^3+\text{Om}\right)} + \right.\right.$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^3+\text{Om}\right)} - \frac{3(1-\text{Om})x^3}{\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^3+\text{Om}\right)^2}\right)\left(\text{ai}^3(1-\text{Om})R(x)^2 + \right.$$
$$\left.\left.\frac{(\text{deltai}+1)\text{Om}}{R(x)} - \text{deltaiOm}\right), R(\text{ai}) = 1, R'(\text{ai}) = \frac{1}{\text{ai}}\right\}, R, \{x, \text{ai}, 1\}\Big], \tag{A.3}$$

Os gráficos referentes ao modelo foram obtidos via expressão:

$$\text{Plot[Evaluate[}R(x)\text{/. LCDMsphcolleq(0.02, 0.3, 0.03)]}, \{x, 0.02, 3.94\},$$
$$\text{PlotStyle} \to \{\text{Thick, Black}\}, \text{Frame} \to \text{True}, \text{FrameLabel} \to \{\text{a}, \bar{R}(\text{a})\}, \text{RotateLabel} \to$$
$$\text{False, LabelStyle} \to \text{Directive[Bold, Black], FrameStyle} \to \text{Directive[Black]]} \tag{A.4}$$

Para a solução numérica para os valores de $\bar{R}_m$:

$$\text{Table}\left[\text{NSolve}\left[\text{ai}^3(1-\text{Om})\text{Rm}^3 - \text{deltaiOmRm} + (\text{deltai}+1)\text{Om} = 0/.\right.\right.$$
$$\{\text{ai} \to 0.01, \text{deltai} \to 0.09\}, \text{Rm}], \{\text{Om}, 0.3, 1, 0.1\}] \tag{A.5}$$

A.3 Modelo wCDM

Analogamente aos anteriores o código numérico utilizado para os resultados deste modelo serão similares aos anteriores. Desta forma:

$$\text{wCDMsphcolleq(ai\_, Om\_, deltai\_, w\_):=}$$
$$\text{NDSolve}\left[\{R'(x)R''(x) = \right.$$
$$\frac{x\left(\text{ai}^3(1-\text{Om})\left(2R(x)x^{-3(w+1)}R'(x) - 3(w+1)R(x)^2x^{-(3w+4)}\right) - \frac{((\text{deltai}+1)\text{Om})R'(x)}{R(x)^2}\right)}{2\left(\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^{-3w}+\text{Om}\right)\right)} +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3(1-\text{Om})wx^{-3w}}{\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^{-3w}+\text{Om}\right)^2} + \frac{1}{\text{ai}^3\left((1-\text{Om})x^{-3w}+\text{Om}\right)}\right)\left(\text{ai}^3(1-\text{Om})R(x)^2x^{-3(w+1)} + \right.$$
$$\left.\left.\frac{(\text{deltai}+1)\text{Om}}{R(x)} - \text{deltaiOm}\right), R(\text{ai}) = 1, R'(\text{ai}) = \frac{1}{\text{ai}}\right\}, R, \{x, \text{ai}, 1\}\Big], \tag{A.6}$$

é o código referente à solução.

Os gráficos serão gerados pela função:

$$\begin{aligned}
&\text{Plot}[\text{Evaluate}[R(x)/.\,\text{wCDMsphcolleq}(0.02, 0.3, 0.03, -0.944)], \{x, 0.05, 3.89\},\\
&\text{PlotStyle} \to \{\text{Thick}, \text{Black}, \text{Dashed}\}, \text{Frame} \to \text{True}, \text{FrameLabel} \to \{\text{a}, \text{R(a)}\}, \text{RotateLabel} \to\\
&\text{False}, \text{RotateLabel} \to \text{False}, \text{LabelStyle} \to \text{Directive}[\text{Bold}, \text{Black}],\\
&\text{FrameStyle} \to \text{Directive}[\text{Black}]]
\end{aligned} \tag{A.7}$$