

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTRATÉGIAS PARA MELHORIA DA COMPLETIDADE
DA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO
EMPREGADAS NA FORMULAÇÃO QUASE-DUAL
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

ALLAN COSTA JARDIM
VITÓRIA, JUNHO DE 2006

ALLAN COSTA JARDIM

**ESTRATÉGIAS PARA MELHORIA DA COMPLETIDADE
DA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO
EMPREGADAS NA FORMULAÇÃO QUASE-DUAL
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

ORIENTAÇÃO : PROF. DR. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO

VITÓRIA, JUNHO DE 2006

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Jardim, Allan Costa, 1981-

J373e Estratégias para melhoria da completude da sequência
de funções de interpolação empregadas na formulação Quase-Dual
do Método dos Elementos de Contorno

Allan Costa Jardim.-2006.

72 f. :il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.

Dissertação (mestrado)- Universidade Federal do Espírito Santo,
Centro Tecnológico

Métodos de Elementos de Contorno. 2. Análise Numérica. 3. Análise
Térmica. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito
Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU:621

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ESTRATÉGIAS PARA MELHORIA DA COMPLETIDADE
DA SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO
EMPREGADAS NA FORMULAÇÃO QUASE-DUAL
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Allan Costa Jardim

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
UFES - Universidade Federal do Espírito Santo (Orientador)

Prof. Dr. Joccitiel Dias da Silva
UFES - Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Webe João Mansur
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 30 de junho de 2006

*A medida de um homem
não está naquilo
que ele alcançou*

*Mas sim,
naquilo que almeja alcançar.
(Gibran Kahlil Gibran)*

A Neuza, Laís, Bruna,
a Almerinda, Almiro, Lucas, Silas,
ao Professor Carlos Loeffler e
a todos aqueles que acreditam que
a vida é um eterno sonhar-realizar-sonhar.

Agradecimentos

Um conjunto fica inteiramente determinado por uma propriedade satisfeita por seus elementos. Espero, lançando mão desse fato, agradecer à todos aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho, e que fizeram das minhas vitórias, suas também.

Agradeço a meus pais pelo apoio constante em todos os momentos de minha vida, à família Zanotelli Dias da Silva, cujo apoio foi indispensável, ao Prof. Dr. Joccitiel, pela amizade e inigualável atenção a mim dispensada, aos colegas de curso, cuja amizade espero não findar-se aqui, à secretaria do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pelo apreço e consideração para comigo, aos ex-colegas e hoje amigos do peito, entre eles Exedito, Edinelço, Riedson, Antônio Carlos Telau, Helder, Fabrício, Fernanda, Wagner, Sérgio, Rone Mauri (fico feliz pelo espaço ser insuficiente). Agradeço ainda à Marina e Bruna, pessoas que passei a admirar muito, a todos os meus ex-professores, especialmente José Antônio da Rocha Pinto (o Rocha), Jamil Ferreira, Iracy Baltar e tantos outros que me mostraram o caminho da Ciência.

Agradeço ainda à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro, à UFES (Universidade Federal do Espírito Santo), ao orientador Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto pela intocável e constante orientação, ao Prof. M.Sc. Markcilei Lima Dan e M.Sc. Wagner Dalvi Santolin pelas várias horas de discussão.

Finalmente, agradeço principalmente a Deus, não por ter colocado tanta gente maravilhosa no meu caminho, mas sim, por ter me colocado no caminho de tanta gente maravilhosa.

Resumo

Um considerável avanço na aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em muitas classes de problemas pertinentes à teoria de campo escalar foi introduzida por Nardini e Brebbia, quando apresentaram a Formulação da Dupla-Reciprocidade. Casos transientes, dinâmicos e convectivos puderam ser abordados. De modo geral, outras parcelas da equação de governo, além do Laplaciano, são consideradas como ações de domínio.

Recentemente, Loeffler e Mansur (2003) desenvolveram a técnica da Quase-Dupla Reciprocidade. Tal técnica utiliza-se de uma condição de incompressibilidade para transformar parte do termo que representa as ações de domínio em um termo que pode ser representado por integrais ao longo do contorno.

A parcela restante é aproximada por uma combinação linear de funções e, através de operações matemáticas, chega-se a expressões contendo somente integrais ao longo do contorno.

O presente texto sugere uma outra aproximação de domínio, mais completa, visto que as aproximações usuais não geram bons resultados em alguns casos nos quais fluxos ou forças sejam constantes. A expectativa é que o uso de funções mais completas traga melhorias significativas na aplicação do método em todos os casos.

Abstract

The Quase-Dual formulation is a new technique to allow the applications of Boundary Element approach to solve efficiently mathematical models associated to physical problems in which it is difficult to obtain the inverse integral form.

The advective-diffusive problems and non-homogeneous problems are some of the important problems in this class. The current model uses a set of auxiliary independent functions and has difficulties to simulate two dimensional problems with constant fluxes. The reason of this deficient behavior is probably due to absence of completeness.

The present text presents a strategy to try to eliminate this problem, based on the introduction of new terms in the set of auxiliary functions. The aim is to improve completeness condition.

As a result of proposed procedures, reciprocal matrices are generated at the final discretized equation system, in a similar way to Dual Reciprocity technique. Examples of constant fluxes are simulated with the new procedures and their results are discussed and analysed with details.

Lista de Figuras

2.1	Caracterização geométrica de um contorno anguloso	24
4.1	Escoamento bidimensional através de um tubo	45
4.2	Erro Percentual Médio em Função da Constante Delta	45
4.3	Erro Médio Percentual da QDRT com o aumento de Velocidade	46
4.4	Erro Médio Percentual da nova função com o aumento de Velocidade	47
4.5	Placa Quadrada cujas Temperaturas no contorno obedecem à equação 4.18	48
4.6	Erro Percentual Médio com o Aumento de Velocidade no Problema Descrito na Figura 4.5	48
4.7	Erro (%) Médio no Fluxo com o Refinamento	50
4.8	Erro (%) Médio na Temperatura com o Refinamento	50
4.9	Erro (%) Médio no Fluxo com o Aumento de Velocidade	51
4.10	Erro (%) Médio na Temperatura com o Aumento de Velocidades (I)	52
4.11	Erro (%) Médio na Temperatura com o Aumento de Velocidades (II)	52

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Modelagem e Aproximação	1
1.2	Composição dos Métodos Numéricos	4
1.3	O Método dos Elementos de Contorno	7
1.4	A Dupla Reciprocidade	10
1.5	A Quase-Dupla Reciprocidade	13
1.6	Objetivo deste Trabalho	14
2	Fundamentos do Método dos Elementos de Contorno	16
2.1	Modelos Diferenciais e Integrais	16
2.2	Equações Integrais	18
2.3	Formulação Integral Inversa	20
2.4	O Método dos Resíduos Ponderados	24
2.5	Relação Formulas Integrais - Método dos Resíduos Ponderados	26
2.6	Discretização e Implementação Computacional	28
3	Formulações com Dupla-Reciprocidade	30
3.1	Considerações Preliminares	30
3.2	Formulação com Dupla-Reciprocidade Tradicional	32
3.3	Formulação com Quase-Dupla Reciprocidade	35

4	Funções Radiais no Método dos Elementos de Contorno	39
4.1	Funções de Aproximação na Quase-Dupla	
	Reciprocidade	42
4.2	Comportamento das Funções de Aproximação na QDR	43
4.3	Novas Tentativas	46
	4.3.1 Implementação de Uma Função Constante	46
	4.3.2 Implementação de uma Função Generalizada	47
5	Considerações Finais	53
	Referências Bibliográficas	56

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelagem e Aproximação

A idéia de aproximação já está presente na Matemática há muitos e muitos anos. O próprio Isaac Newton ao montar as bases do Cálculo Diferencial, tentava encontrar velocidades instantâneas através de sucessivas aproximações de um quociente, que também é conhecido por razão incremental, até que numa situação limite tal quociente gera a taxa de variação buscada.

Em verdade toda Ciência visa o encontro da verdade. Dizia Henri Poincaré (1854-1912): *‘A busca da verdade deve ser o objetivo de nossa atividade; é o único fim digno dela’*[35]. O conceito de ‘verdade’ na Engenharia consiste na solução satisfatória de problemas físicos do mundo real, seja através de modelos matemáticos ou experimentais.

Um problema físico real usualmente é complexo demais para ser analisado, devendo ser substituído por outro que é idealizado intelectualmente. Esta substituição pode ser o passo mais difícil ou crucial na análise, pois os dois sistemas devem ter comportamento semelhante sob a ação dos diversos agentes externos. Portanto, para um mesmo sistema físico são muitas as idealizações possíveis. O mesmo vale para qualquer outra área da engenharia ou disciplina científica na qual se insira o objeto a ser analisado, como os fenômenos da química, os processos econômicos, os mecanismos sociológicos etc.

A idealização física do problema, comumente denominada de modelo físico, é apenas a primeira etapa de um processo elaborado de compreensão e busca de solução ou respostas. Muitas outras se seguem conforme mostra o diagrama a seguir. Na área da Engenharia, foram e ainda são muito comuns e importantes investigações nas quais se constrói um modelo laboratorial, no qual se simulam experimentalmente os fenômenos desejados. Testes envolvendo protótipos e peças em escalas reduzidas tentam reproduzir o comportamento nas condições operacionais de fato.

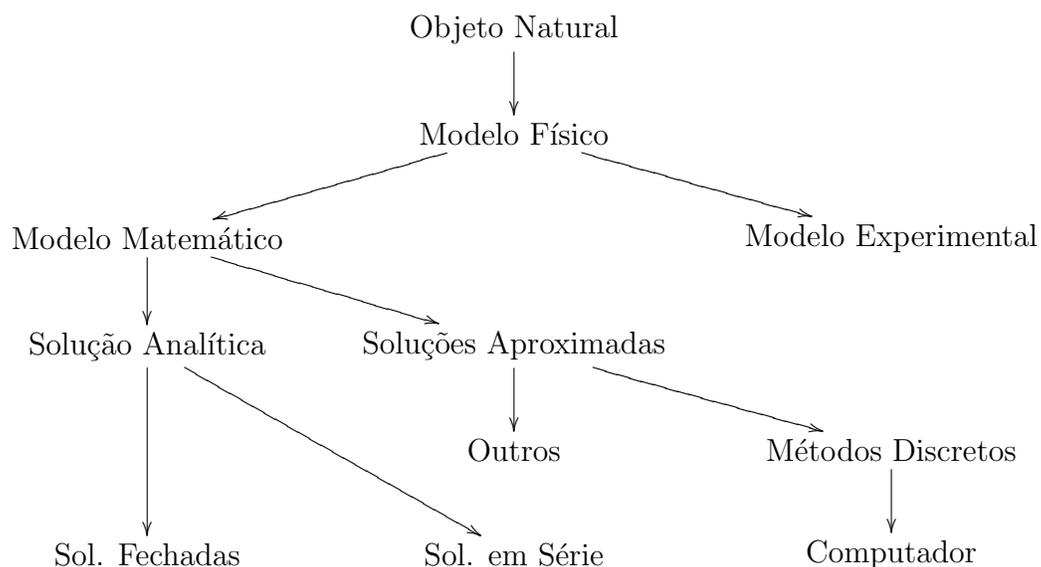


Diagrama 1.1: Etapas da Modelagem Matemática de um Problema Físico

No caso da idealização matemática, contexto no qual se insere o presente trabalho, a partir da especificação do fenômeno físico que se deseja examinar, tenta-se descrevê-lo da melhor maneira possível através de expressões algébricas, equações diferenciais ou sentenças integrais, lançando mão de certas restrições ou hipóteses simplificadoras cuja finalidade é disponibilizar uma solução possível, de complexidade acessível ao seu uso prático.

Tais simplificações tornam-se necessárias porque muitos problemas resultam em mode-

lagens nas quais surgem equações diferenciais parciais, muitas delas não-lineares, e dependendo da situação até mesmo sistemas compostos de tais equações. Infelizmente mesmo diante dos avanços conquistados pela Matemática até os dias atuais, modelos com tamanha complexidade não possuem solução analítica conhecida.

Por outro lado, as demandas crescentes e cada vez mais arrojadas da tecnologia contemporânea ligadas ao atendimento de necessidades industriais, produtivas e sócio-econômicas, forçaram o estudo de modelos físicos mais arrojados e, desse modo, imperativamente os modelos matemáticos não mais puderam comportar simplificações excessivas.

Assim, para resolver esse dilema tornou-se necessário encontrar soluções aproximadas para os problemas matemáticos mais elaborados. Nesse contexto apareceram os Métodos Numéricos que tiveram grande impulso principalmente devido ao advento do computador. Na realidade tais métodos já existiam há muito tempo, mas seu uso não era generalizado, pois havia soluções analíticas satisfatórias na maior parte dos casos então abordados. Graças a notável invenção dos processadores eletrônicos, a Matemática passou, então, a desempenhar um novo papel, além da tradicional necessidade de se apresentar as melhores representações matemáticas para os problemas físicos propostos, ou seja, solucionar o problema matemático de uma forma aproximada, mas a mais satisfatória possível.

É fato digno de menção a eficiência demonstrada por tal estratégia. Ao longo das últimas décadas a quantidade de diferentes problemas de Engenharia cresceu enormemente, assim como o grau de dificuldade destes, mas a qualidade das soluções aproximadas tem sido perfeitamente aceitável. As respostas aproximadas mostraram-se extremamente coerentes com o comportamento observado nos objetos do mundo físico, apesar das restrições e simplificações que distanciam as coisas do mundo real dos modelos idealizados. Diante de tamanha eficiência, o próprio campo de aplicação dos métodos numéricos se ampliou a tal ponto que não apenas a Engenharia, mas também a Física, a Biologia, a Economia e outras diferentes áreas se beneficiaram grandemente do emprego de soluções aproximadas por Métodos Numéricos.

1.2 Composição dos Métodos Numéricos

Na conceituação de Mello e Souza [40], os métodos numéricos são aqueles que permitem obter a solução de um problema matemático com uma precisão desejada, num número finito de etapas racionais.

No entanto, após décadas de intensas pesquisas no setor a própria essência desses métodos se alterou. Se no passado estes métodos geralmente não produziam equações relacionando a dependência entre as diversas variáveis envolvidas, ocupando-se basicamente de processar os valores numéricos das variáveis nos diversos estágios do cálculo, atualmente os métodos numéricos mais poderosos se caracterizam por formulações matemáticas que culminam com relações especiais entre as variáveis, típicas de cada método.

Entre os Métodos Numéricos mais gerais e conhecidos destacam-se o Método dos Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Volumes Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. Todos esses atuam a partir do estabelecimento de uma ou mais equações, que modelam matematicamente o problema físico e são denominadas equações de governo.

As equações de governo podem ser expostas principalmente de dois modos distintos:

- Através de uma formulação diferencial;
- Sob uma formulação integral.

Considerando que o modelo matemático representa um problema físico, pode-se afirmar que a formulação diferencial deriva da aplicação de princípios inaugurados pela Mecânica Newtoniana, fundamentados na existência de equilíbrio (ou princípio equivalente) local em todas as partes do domínio ou sistema considerado. Apesar da naturalidade dos seus conceitos, em problemas mais sofisticados é comum o aparecimento de equações bastante complicadas de modo que o emprego de técnicas aproximadas é imprescindível.

A formulação integral surge de maneira mais comum, não como expressão de modelagem, mas sim como técnica de resolução. As transformadas (Laplace, Fourier, Hankel etc.) são os exemplos mais destacados. Na realidade, toda solução analítica ou semi-analítica de equações diferenciais resultou de alguma integração ou da postulação de uma função

que seja parte integrante da solução. Assim, é óbvio que o caráter de obediência local do modelo diferencial seja encontrado também na sua solução.

Por outro lado, é possível modelar um problema físico diretamente em termos de uma formulação integral. Isto ocorre normalmente quando se aborda um problema a partir de princípios de conservação de energia (ou correlatos em outras disciplinas) implicando em expressões escalares nas quais o equilíbrio é exigido em termos globais, e não locais. Como exemplos têm-se os princípios dos Trabalhos Virtuais, da Ação Mínima e de Hamilton [13]. O Cálculo Variacional [36] é a maior expressão do esforço matemático segundo esse enfoque. Evidentemente, na maior parte dos problemas assim postulados também será necessário empregar algum recurso numérico que viabilize a solução das sentenças integrais nos casos menos elementares.

Não obstante as distinções entre as formulações diferencial e integral, há uma equivalência entre ambas que não será aqui discutida. O Método dos Resíduos Ponderados, que será exposto com mais detalhe em capítulo posterior, é uma estratégia matemática bastante poderosa e geral, capaz de unificar os dois enfoques anteriormente discutidos.

É a partir da forma com que é expressa a equação de governo que os principais métodos numéricos já se diferenciam entre si. Daí por diante cada um deles propõe procedimentos e adaptações à formulação da equação de governo, seguindo certos paradigmas, que resultam em expressões matemáticas próprias. A sofisticada elaboração desses métodos torna impossível apresentar sequer um resumo deles nesse texto.

Não obstante as distinções, a partir de uma certa etapa tais métodos voltam a apresentar basicamente os mesmos procedimentos operacionais. O primeiro deles é a estratégia de discretização do domínio contínuo. Resumidamente: discretizar significa substituir o domínio de análise contínuo por um número finito de pontos representativos do mesmo, nos quais se efetiva o controle das variáveis descritivas do problema. Apesar de arbitrária a escolha de tais pontos obedece a determinados critérios e formalismos matemáticos. Impõe-se naturalmente a adoção de um sistema de coordenadas generalizadas para a melhor descrição do problema. Entre outros aspectos destaca-se o que resulta do processo

de discretização, a substituição das relações diferenciais entre as variáveis por equações algébricas, o que implica uma enorme simplificação na formulação do problema.

Da fase de discretização em diante, os procedimentos tradicionais usados com as técnicas de aproximação podem ser usados, dependendo do tipo de problema que está sendo resolvido. Problemas estacionários de propagação ou de valor característico têm tratamento específico, problemas cujas equações de governo são não-lineares requerem procedimentos recursivos. As principais técnicas nessa fase são conhecidas como algoritmos de solução. Agrupam-se em duas principais categorias os algoritmos iterativos e os incrementais.

Os algoritmos incrementais caracterizam-se pelo uso de fórmulas de recorrência que a partir do conhecimento de valores num dado ponto, permitem se calculem valores de interesse em pontos adjacentes. São muito usados em problemas transientes nos quais havendo obediência a certas relações, se calculam valores futuros a partir de valores presentes.

Os algoritmos iterativos resolvem sucessivamente o problema a partir do arbítrio de valores preliminares para as variáveis incógnitas. Em outros termos, nos métodos iterativos propõem-se soluções parciais que atendam certas condições como compatibilidade e continuidade, por exemplo, e sirvam como referência para a determinação da solução definitiva após algumas tentativas. São bastante úteis nos casos não-lineares quando certas propriedades do sistema dependem das próprias variáveis de estado. A estimativa inicial também é importante para que haja uma rápida convergência no processo.

Independentemente do tipo de problema, mesmo que seja resolvido recursivamente ou iterativamente, após a etapa de discretização é possível gerar um sistema linear do tipo

$$Ax = b. \tag{1.1}$$

Na expressão anterior x é um vetor que representa as quantidades físicas desconhecidas do problema em cada parcela do domínio físico, enquanto A é uma matriz composta de propriedades físicas e geométricas. O vetor b contém a solução do sistema numa iteração ou passo incremental. Sistemas Lineares são resolvidos computacionalmente de

forma corriqueira e não apresentam qualquer impasse na implementação dos Métodos Numéricos.

O bom condicionamento do sistema linear a ser resolvido dependerá em grande parte do método escolhido. No Método dos Elementos Finitos por exemplo [18], existem procedimentos apropriados com a finalidade de tornar menor a dimensão do sistema de equações. Em outras palavras, obter a matriz A (em geral simétrica) de forma mais compacta, com a menor largura de banda possível, já que em tal método a dimensão da mesma pode ser suficientemente grande tornando necessária tal procura com a finalidade de diminuir o custo computacional. Os procedimentos do Método dos Elementos Finitos que cumprem esse papel dizem respeito à conectividade dos elementos e à ordem das funções de interpolação usadas. A escolha adequada das mesmas gera matrizes compactas que, em geral, dão origem a sistemas lineares bem condicionados.

Já no Método dos Elementos de Contorno (MEC) o problema é diferente. A discretização é limitada ao contorno do problema, o que diminui substancialmente o tamanho das matrizes. No entanto, de acordo com as formulações mais comuns, geram-se matrizes cheias e sem simetria. Ressente-se a falta de algoritmos de solução otimizada que operem eficazmente matrizes com tais características, de forma que a solução dessas matrizes geradas pelo MEC tende ser mais custosa do que aquelas geradas com o MEF, a partir de uma determinada dimensão.

1.3 O Método dos Elementos de Contorno

A escolha de um método numérico é sempre um ponto discutível pois são muitas as questões aí envolvidas, e a pesquisa em torno deles está longe de cessar. Embora não seja o mais popular, o MEC vem se firmando como uma das técnicas mais precisas e vantajosas. Baseando-se em diferentes princípios matemáticos, seja pela teoria das equações integrais ou por formulação de resíduos ponderados, numerosas simulações já ratificaram o alcance do método e sua supremacia em importantes classes de problemas, especialmente nos casos onde o campo físico é de natureza escalar.

De acordo com Brebbia e Walker [4], os fundamentos do Método dos Elementos de Contorno encontram-se na Teoria das Equações Integrais tópicos este pertinente as disciplinas da Física Matemática (Butkov [5], Menzel [30], Courant & Hilbert [6]) e Matemática Superior (Sneddon [39], Kreiszig [16]). As bases matemáticas dessas disciplinas são encontradas nos trabalhos dos matemáticos russos e alemães no final do século dezenove. Primeiramente estes estudos fundamentaram uma área de conhecimento denominada Teoria dos Potenciais, centralizada nos conceitos de campo escalar e campo vetorial. Nos seus primórdios, essa disciplina tinha com um dos seus principais objetivos a busca de soluções analíticas gerais, a partir da integração de soluções singulares conhecidas como Funções de Green. Por força da formulação integral fundamental nessa teoria, o teorema da divergência era sistematicamente empregado como principal estratégia de solução, por estabelecer o problema em termos de integrais de contorno, mais fáceis de se resolver.

De acordo com Brebbia [1], credita-se a Fredholm a contribuição mais significativa no sentido de formalizar uma abordagem eficiente nos moldes descritos por volta do ano de 1900. Contudo a dificuldade em se encontrar uma função de Green para os casos mais complexos, aliada aos entraves da resolução dos problemas de valor de contorno para geometrias mais complicadas, fez com que esse procedimento se limitasse unicamente à abordagem de casos simples. Isso restringiu essa metodologia aos estudos analíticos da Física Matemática, compondo praticamente mais uma área de conhecimentos isolada sem grandes atrativos para a engenharia. Somente com o advento do computador tais teorias puderam ser introduzidas num contexto de maior aplicação. Ainda segundo Brebbia, a contribuição de Jaswon e Symm em 1963 foi pioneira no sentido de apresentar as formulações integrais de modo similar ao atualmente empregado na modelagem numérica. Especificamente com o MEC deve-se citar os nomes de Rizzo, Cruse e Brebbia pelas contribuições significativas prestadas ao aperfeiçoamento e divulgação do método em nível mundial.

O contexto da teoria das equações integrais abarca temas bastante comuns como os Teoremas de Divergência e de Stokes, e também tópicos já mencionados como as identidades de Green e as funções de Green. Vale destacar que tais técnicas inspiraram procedimen-

tos bem conhecidos na engenharia civil, como o método dos coeficientes de influência no cálculo de estruturas reticuladas. No que tange ao MEC, naturalmente a dedução da sua formulação integral pode ser feita empregando-se os princípios da teoria citada, que operacionalmente resulta no emprego da técnica de integração por partes juntamente com a aplicação do Teorema da Divergência.

Existe entretanto uma segunda maneira de deduzir o método, utilizando-se uma sentença de resíduos ponderados. Esta última forma é também metodologicamente poderosa e está ligada ao emprego de técnicas numéricas de solução. Conceitualmente se fundamenta na idéia de ortogonalização entre a solução aproximada e seus resíduos [1].

A primeira abordagem emprega recursos operacionais que facilitam a aplicação das formulações com reciprocidade e, por isso, foi aqui escolhida e posteriormente (capítulo 2) será apresentada em maiores detalhes. Daí também resultam as Identidades de Green anteriormente mencionadas. Outra vantagem desta abordagem, é a facilidade com que são descritas as operações matemáticas que a partir da equação diferencial de governo, geram o modelo composto de expressões integrais adequadas a discretização exclusiva do contorno. O modelo integral final é usualmente denominado de forma integral inversa conforme Brebbia & Walker[4].

Conforme foi dito, diferentemente dos outros principais Métodos Numéricos, o MEC fundamenta-se no fato da discretização ser efetivada apenas no contorno. Apenas com essa peculiaridade é possível entrever vantagens comparativas com relação às “técnicas de discretização de domínio”, sejam elas, menor entrada de dados, simplicidade nos procedimentos operacionais da abordagem matemática do problema, análise de problemas de fronteira variável e de Mecânica da Fratura. Uma série de outros predicados, menos evidentes, também podem ser listados:

- melhor representação de ações concentradas e gradientes elevados;
- adequação para problemas de domínio infinito e semi-infinito;
- cálculo simultâneo da variável básica e sua derivada no contorno;

- elevada precisão de resultados particularmente em pontos situados no interior do domínio.

O MEC também possui suas desvantagens, problemas com propriedades físicas heterogêneas, corpos de conformação geométrica esbelta e casos em que ações são aplicadas no interior do domínio (fontes, sorvedouros, cargas internas) não são representados com elevada precisão, apesar de muitos progressos já terem sido empreendidos nessas áreas nos últimos anos. Certos casos governados por teorias como as cascas e cabos, além do problema da esbeltez, são complicados em sua formulação. Além disso, pela sua essência, o método pode não ser estendido genericamente a problemas cujo operador diferencial não possua certas propriedades, tal como ser auto-adjunto.

Apesar das limitações, as vantagens são preponderantes e o campo de aplicação do MEC é vasto e diversas áreas tem sido beneficiadas com aplicações bem sucedidas tais como problemas de contato entre superfícies, estudos de proteção catódica, casos diversos da Mecânica da Fratura, da Aerodinâmica, da Mecânica dos Solos, da Teoria da Elasticidade e problemas difusivos em geral.

1.4 A Dupla Reciprocidade

Assim como também ocorre com outras técnicas numéricas de grande amplitude, o MEC possui algumas formulações mais apropriadas para tratar certas classes de problemas cujas peculiaridades exigem um tratamento diferenciado. Isto está relacionado ao comportamento físico do problema examinado. Mello e Souza classifica os problema de engenharia em problemas de equilíbrio, de valor característico ou de propagação, comentando que essas três categorias de problemas necessariamente precisam ser tratadas por métodos numéricos que respeitem suas especificidades. Classificação algo similar pode ser encontrada em abordagens mais matemáticas, nas quais as Equações Diferenciais Parciais de Governo são classificadas como Elípticas, Hiperpólicas ou Parabólicas (Stephenson [41]). Tais tipos de equações possuem comportamentos físicos e matemáticos bem particulares, demandando técnicas de solução bem próprias.

No caso de problemas que sejam dependentes do tempo (inclui-se neste rol os problemas de propagação dinâmica ou de calor), os trabalhos iniciais com o MEC utilizaram como recurso a Transformada de Laplace. Numa etapa posterior, empregaram-se soluções fundamentais dependentes do tempo (Wrobel [43], Mansur [27]). Esse último procedimento embora possua elevada precisão, implica em desenvolvimento matemático bastante elaborado, demandando em certas aplicações considerável esforço computacional.

Também na classe de problemas que consiste na presença de cargas ou fluxos aplicados no interior do corpo ou sistema, o procedimento pioneiramente utilizado com o MEC consistia na discretização do domínio matemático em células, exigindo integrações que fugiam à filosofia do método, pois não eram limitadas ao contorno.

Para os problemas de valor característico, até o ano de 1981 não havia um procedimento adequado e competitivo disponível com o MEC. As frequências naturais de um sistema mecânico eram obtidos dentro de uma formulação estabelecida com vistas à obtenção de respostas dinâmicas em problemas com vibrações forçadas[9].

Todas essas categorias de problemas puderam ser resolvidas de modo mais simples apesar da precisão mais reduzida, com o emprego da formulação com Dupla Reciprocidade, apresentada por Nardini e Brebbia em 1982, abordando precisamente o cálculo de autovalores e autovetores.

Motivados pela propriedade da formulação e pelos bons resultados obtidos, em seguida foi feita uma aplicação para obtenção da resposta em problema de elastodinâmica transiente publicada em 1983 [2].

Em 1986, Valcharova [42] e Wrobel et al [44] publicaram artigos com aplicações bem sucedidas a problemas de transmissão de calor não-estacionários.

Em 1987, Loeffler e Mansur [20] publicaram um trabalho no qual a Dupla Reciprocidade é examinada em suas aplicações na dinâmica escalar, enfatizando a importância do esquema de integração numérica na precisão dos resultados. No mesmo ano esses autores apresentaram um trabalho no qual a Dupla Reciprocidade é aplicada com êxito

na eliminação de integrações de domínio no caso de ações internas de qualquer natureza, apresentando duas técnicas com essa finalidade [20].

Ainda em 1987, também Loeffler e Mansur [21], calcados nos bons resultados da Dupla Reciprocidade para domínios fechados, apresentaram uma extensão da técnica para análise de problemas transientes em meios infinitos, com desempenho apenas razoável. Uma melhor resenha das publicações e também apresentação de testes em casos de placas, domínios delgados e casos de propagação de onda com cargas impulsivas podem ser colhida na tese de doutorado de Loeffler, defendida 1988 [19].

Em 1991, Partridge, Brebbia e Wrobel [34] publicaram um livro sobre a formulação com Dupla Reciprocidade, obra que contém não apenas um resumo do esforço de pesquisa realizado até então, mas mostra muitas outras aplicações da técnica, entre as quais se destaca a possibilidade de abordagem de problemas advectivos.

Esta categoria de problemas é de grande importância na engenharia. Os casos mais comuns consistem na transferência de calor junto à camada limite em escoamentos laminares, típico em aletas e aerofólios, e o transporte de fluidos incompressíveis com baixa viscosidade em tubulações. No entanto, existem outras situações de grande importância, como dispersão poluentes ou misturas de meios aquosos, a extração de fluidos em meios porosos e processos de solidificação de produtos metalúrgicos.

São muito frequentes na engenharia industrial os problemas que envolvem transporte de massa ou energia através de difusão associada a advecção forçada em escoamentos, misturas ou deslocamento de partículas. Porém, existem situações menos tradicionais mas não menos importantes, como a dispersão superficial de poluentes ou misturas em meio aquosos homogêneos, a absorção de líquidos em região não saturada ou extração do mesmo em meio poroso, este último problema atualmente de grande interesse na indústria de extração de petróleo. E ainda situações bem mais complexas e arrojadas, como o processo de solidificação de produtos siderúrgicos por lingotamento contínuo, os quais envolvem mudança de fase. Esse mesmo fenômeno ocorre em processos de secagem de grão e resfriamento de chocolate e produtos alimentícios processados industrialmente.

A formulação proposta por Partridge et al usa uma solução fundamental difusiva e promove aproximação do campo advectivo através de uma combinação linear de funções de interpolação, tal como o procedimento tradicional da Dupla Reciprocidade faz com os casos transientes e de cargas domínio. No entanto, trata as derivadas espaciais relacionadas a advecção através de uma nova interpolação. Embora supere as limitações das formulações clássicas precedentes, que somente resolvem sem artifícios problemas nos quais o campo de velocidade é constante, o uso conjunto de duas interpolações promovem resultados de limitada precisão. Em termos práticos, a formulação é aplicável quando o número de Peclet é baixo.

1.5 A Quase-Dupla Reciprocidade

Visando a superação das dificuldades observadas na formulação precedente, Loeffler e Mansur [24] aprimoraram a técnica de aproximação contida na Dupla Reciprocidade e aplicaram-na à equação da Difusão-Advecção, obtendo resultados bem melhores do que os resultados apresentados pela Formulação da Dupla Reciprocidade. Usando seqüências de funções radiais especiais e evitando o emprego reiterado de interpolações no tratamento das derivadas espaciais, foi possível a simulação de casos unidimensionais onde a velocidade de transporte atinge valores correspondentes a um número de Peclet da ordem de 80 [29]. A nova tática, denominada de Quase-Dupla Reciprocidade é direcionada para aplicações nas quais a equação de governo contenha termos em que haja derivadas espaciais de primeira ordem, como ocorre nos problemas advectivos e também em problemas não homogêneos [26].

Os resultados animadores da Quase Dupla Reciprocidade motivaram a continuidade das pesquisas nessa linha de formulações alternativas, empregando a mesma idéia básica da Dupla Reciprocidade, embora com adaptações. É o caso da formulação harmônica, desenvolvida por Dan em sua dissertação de mestrado [7], e a formulação Quase-Dual Híbrida (Loeffler e Dan [8]).

A criação da formulação Quase-Dual foi motivada pela necessidade de melhorar o desem-

penho do MEC nesta classe de problemas, empregando uma técnica simples e flexível. Baseando-se também na idéia da Dupla Reciprocidade, usa funções auxiliares de interpolação, mas com um tratamento especial dos termos advectivos, para ampliar a precisão dos resultados para números de Peclet medianos. A restrição atual é que o escoamento seja potencial, o que implica num problema incompressível e irrotacional. O campo de velocidades pode então ser variável, mas esta variação deve ser compatível com o caráter potencial do campo.

1.6 Objetivo deste Trabalho

Uma série de problemas-teste já foi resolvida com êxito nas classes de problemas de convecção forçada e meios heterogêneos, todos comparando os resultados numéricos obtidos pela formulação Quase-Dual com soluções analíticas disponíveis. Foram conduzidos testes de convergência dos resultados em função do refinamento da malha e também foram realizadas experiências numéricas alterando-se as propriedades físicas do modelo. Na grande maioria dessas simulações, foram atestadas a consistência do modelo, a existência de vantagens operacionais com relação a outras formulações e sua aplicabilidade em problemas práticos, nos quais se deseja operacionalidade e precisão de engenharia.

No entanto, em alguns casos específicos bidimensionais, a precisão do modelo proposto foi relativamente deficiente. Embora apenas de modo informal e nada conclusivo, suspeitou-se que, fisicamente, em tais problemas a distribuição do campo de fluxos ou forças no domínio é preponderantemente constante. Em termos matemáticos, isto poderia significar que a estrutura da seqüência de funções radiais especiais empregadas no modelo atualmente proposto teria dificuldade de representar esse comportamento das variáveis do problema, tal como historicamente aconteceu nos casos de problemas estruturais em que há movimentos de corpo rígido. Em outras palavras, o baixo desempenho da formulação nestes problemas seria provavelmente originado de uma deficiência nas suas características de completude.

O problema numérico observado é curioso e possui algumas outras peculiaridades. Primei-

ramente, inexistente na simulação de problemas unidimensionais de qualquer espécie, não obstante o tipo de condição de contorno e a geometria irregular do domínio. Isto sugeriu a postulação de algumas hipóteses explicativas para tal dificuldade numérica. Por exemplo, poderia estar ligada ao fato de a representação matemática de certos problemas não admitir a existência de uma função primitiva que gere o campo de temperaturas (nos casos convectivos) ou o campo de propriedades constitutivas (no caso de problemas não-homogêneos). Outra possibilidade, não completamente independente da primeira, seria o fato de que tais casos de difícil simulação sejam aqueles nos quais o balanço de fluxo ou equilíbrio de forças, conforme o caso, exija interação em ambas as direções. Logicamente, nos casos unidimensionais isto é automaticamente evitado. Haveria então ausência de completude na seqüência de funções nestes casos em que se demandaria interação em duas dimensões de fluxo ou forças.

O objetivo primordial desta dissertação é desenvolver estudos nos quais se aprimore o procedimento de interpolação empregado na formulação Quase-Dual, especialmente com o propósito de melhor atender aos quesitos de completude necessários à seqüência de funções empregada, pois que as aproximações anteriormente empregadas não geraram resultados satisfatórios em alguns casos específicos bidimensionais, nos quais se apresentam fluxos e forças constantes em partes do domínio.

Capítulo 2

Fundamentos do Método dos Elementos de Contorno

2.1 Modelos Diferenciais e Integrais

Uma estratégia que tem se mostrado bastante eficiente na tentativa de resolver problemas físicos de forma aproximada é o estabelecimento de uma formulação integral que os equacione matematicamente. Tais representações estão no cerne da maioria dos Métodos Numéricos mais conhecidos atualmente.

De fato, o modelo matemático representativo de um problema físico pode ser exposto através de uma formulação diferencial ou de uma formulação integral.

A formulação diferencial deriva da aplicação de princípios inaugurados pela Mecânica Newtoniana, fundamentados na exigência de equilíbrio local (ou princípio equivalente) expressado esquematicamente em termos de um elemento infinitesimal, representativo do sistema ou volume de controle analisado. O equacionamento postulado localmente é válido para todo o domínio. Apesar da naturalidade dos seus conceitos, em problemas mais sofisticados é comum o aparecimento de equações muito complicadas.

A formulação integral surge, de modo mais comum, não como expressão de modelagem, mas sim como técnica de resolução. As transformadas (Laplace, Hankel, Fourier etc)

são os exemplos mais destacados. Na realidade, muitas táticas de solução analíticas ou semi-analíticas de equações diferenciais consistem de alguma integração. Assim sendo, é óbvio que o caráter de obediência local do modelo diferencial é encontrado também na sua solução.

Por outro lado, é possível modelar um problema físico diretamente em termos de uma formulação integral. Isto ocorre normalmente quando se aborda um problema a partir de princípios de conservação de energia (ou correlatos), implicando em expressões escalares nas quais o equilíbrio é exigido em termos globais, e não locais. O Cálculo Variacional é a maior expressão do esforço matemático segundo esse enfoque.

A postulação da forma integral na modelagem matemática permite realizar operações nas quais resultam expressões de menor complexidade, principalmente pelo fato da ordem das derivadas contidas no equacionamento integral ser menor. Isso é possível porque quase toda modelagem integral emprega, de algum modo, uma função auxiliar nos seus núcleos. Essa maior simplicidade matemática também facilita o uso de técnicas de aproximação. Não é possível um aprofundamento maior desse tema nessa dissertação, mas mesmo os modelos diferenciais, caso sejam resolvidos aproximadamente por estratégias discretas, são postas preferentemente na forma

$$\int_{\Omega} (L(u) - p)\omega d\Omega = 0. \quad (2.1)$$

Nesta última equação, u é a variável básica ou primal, Ω é o domínio do sistema, $L(u)$ representa o operador diferencial representativo do problema físico, p é uma função conhecida e ω é uma função auxiliar. Essa função auxiliar pode ser entendida de modo distinto, dependendo da técnica matemática empregada ou do princípio físico que gerou a modelagem. Segundo os princípios variacionais, ω é uma variação admissível da variável básica, que deve resultar nula em condições de estacionariedade. Já de acordo com o Método dos Resíduos Ponderados, ω é uma função que projeta para fora os “resíduos” num espaço de funções construído para representar a solução aproximada. É curioso perceber que todas as técnicas de transformação usam uma estrutura matemática similar. Por exemplo, a Transformada de Laplace consiste em

$$\ell(u) = \int_0^{\infty} u e^{-st} dt. \quad (2.2)$$

Na transformada de Fourier tem-se

$$\mathfrak{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-ist} dt. \quad (2.3)$$

Nas equações anteriores percebe-se que a função auxiliar corresponde a e^{-st} na Transformada de Laplace e a e^{-ist} na Transformada de Fourier. Naturalmente, o processo de solução no caso das transformadas segue um caminho bem específico, diferente daquele tomado pelos métodos numéricos mais importantes. Enquanto as transformadas geram equações algébricas no espaço de transformação, que após resolvidas devem ser reescritas em termos das variáveis originais, os métodos numéricos tentam realizar operações que viabilizem o uso de funções de aproximação que possam ser integradas e certos coeficientes determinados após a discretização, conforme será visto mais à frente.

2.2 Equações Integrais

De acordo com Hildebrand [12], uma equação integral consiste de uma equação na qual uma função a ser determinada aparece representada sob integração. Considerando as equações lineares, embora possa haver outros tipos mais gerais, são duas as principais categorias em que as equações integrais podem ser divididas, as equações de Fredholm e Volterra.

Tomando por simplicidade apenas a Equação de Fredholm, cuja expressão unidimensional é dada por

$$\alpha(x)u(x) = F(x) + \lambda \int_a^b u(\xi)\omega(x; \xi)d\xi, \quad (2.4)$$

tem-se α , F e ω como funções dadas e λ , a e b como constantes. A função $u(x)$ é a variável básica, a ser determinada. A função ω depende da variável independente x bem como da função auxiliar ξ e é chamada núcleo da integral. Com vistas a futuros desenvolvimentos,

a equação anterior pode ser reescrita de modo mais conveniente, alterando-se o papel das variáveis, na forma

$$\alpha(\xi)u(\xi) = F(\xi) + \lambda \int_a^b u(x)\omega(\xi; x)dx. \quad (2.5)$$

A equação integral (2.5) pode ser generalizada e escrita em termos de duas ou mais variáveis independentes

$$\alpha(\xi, \eta)u(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \lambda \int \int_A u(x, y)\omega(\xi, \eta; x, y)dxdy. \quad (2.6)$$

Alterando o papel das variáveis na última equação, direcionado a objetivos vindouros, tem-se que

$$\alpha(\xi)u(\xi) = F(\xi) + \lambda \int \int_A u(X)\omega(\xi; X)dA(x), \quad (2.7)$$

onde $X=X(x,y)$ e $\xi = \xi(\xi, \eta)$.

Desde que certas condições de continuidade sejam obedecidas [12], se pode associar equações integrais com equações diferenciais. É possível, então, deduzir uma equação integral a partir de uma determinada equação diferencial. Na obra citada existem alguns exemplos unidimensionais nos quais se faz tal associação.

As funções de Green são núcleos de equações integrais que possuem propriedades especiais, entre as quais inserem-se a obediência às condições de contorno, simetria, continuidade e o tipo de decaimento ao longo do intervalo de integração. O uso de tais funções no núcleo das equações integrais simplifica sua expressão matemática. No caso de equações diferenciais sujeitas a condições de contorno essenciais homogêneas, representadas por

$$L(u(x)) = p(x). \quad (2.8)$$

A equação integral correspondente é

$$u(x) = \int_a^b G(x; \xi)p(\xi)d\xi. \quad (2.9)$$

As equações integrais lineares aparecem muito freqüentemente em problema físicos como resultado da possibilidade de superposição de efeitos devido a causas diversas. As funções

de Green $G(x; \xi)$ nestes casos representam o efeito em x devido a uma causa concentrada unitária agindo em ξ . São então freqüentemente conhecidas como funções de influência do problema, muito tradicionais e úteis em certas disciplinas da engenharia, como o Cálculo de Estruturas, seja na análise estática quanto na dinâmica, conforme mostram Hurty e Rubinstein [13] e também Butkov [5].

2.3 Formulação Integral Inversa

Conhecida a equação diferencial de um problema, desde que os operadores nela envolvidos possuam certas propriedades, em especial a propriedade de adjunção, é possível encontrar uma forma integral associada, na qual a aplicação de um método numérico com vistas à obtenção de uma solução aproximada seja mais acessível.

Particularmente a aplicação do Método dos Elementos de Contorno se viabiliza de modo bastante simples e eficaz quando se obtém uma equação integral chamada de “Forma Integral Inversa”. Com o intuito de demonstrá-la, considere a equação diferencial apresentada anteriormente na equação (2.8) reapresentada a seguir por conveniência

$$L(u(x)) - p(x) = 0. \quad (2.10)$$

Considere Ω como sendo a região do espaço matemático que representa o domínio físico de um problema de engenharia. Embora o procedimento que será doravante apresentado seja mais abrangente, por conveniência admite-se que o domínio físico consista de um meio contínuo, homogêneo e bidimensional, de modo que $d\Omega$ representa a superfície infinitesimal de um corpo em que as variáveis bidimensionais expressas por $X=X(x1,x2)$ descrevem sua posição com relação a um sistema de coordenadas cartesianas.

A equação (2.10), em termos físicos, é denominada de Equação de Governo, e é usualmente construída considerando o equilíbrio e a compatibilidade de uma função escalar u , que genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar.

Para que o problema seja matematicamente bem posto, é preciso que sejam impostas condições de contorno ou iniciais. Considerando casos estacionários e o operador $L(\cdot)$ como sendo de segunda ordem, genericamente, condições de primeiro ou segundo tipo, também conhecidas como condições de contorno essenciais e naturais devem ser prescritas. Estas são definidas por:

$$u(X) = \bar{u} \quad \text{para } X \in \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (2.11)$$

$$u(X)_{,i} n(X)_i = \bar{q} \quad \text{para } X \in \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (2.12)$$

Nas equações (2.11) e (2.12), $\Gamma_u(X)$ e $\Gamma_q(X)$ representam as fronteiras do meio contínuo e $n_i(X)$ caracteriza o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos q adquire o significado de deformação aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser associado ao fluxo imposto de energia difusiva.

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC consiste do estabelecimento da equação diferencial de governo numa forma integral, usando a solução fundamental $u^*(\xi; X)$ como função auxiliar [16], resultando na seguinte expressão, onde foram omitidos os argumentos por simplicidade

$$\int_{\Omega} (L(u(x)) - p(x)) u^*(\xi; X) d\Omega = 0. \quad (2.13)$$

Tal formulação é conhecida por ‘Forma Integral Forte’, onde $u^*(\xi; X)$ representa a função auxiliar citada anteriormente. No contexto do MEC, u^* também é conhecida por “Solução Fundamental”. Percebe-se que a integral anterior é calculada sobre todo o domínio Ω . Por simplicidade, tomando particularmente a Equação de Laplace, na qual $p(X)=0$, tem-se que

$$L_4(u) \cdot u^* = \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

onde o ponto no primeiro membro da equação refere-se ao produto interno

$$u \cdot v = \int_{\Omega} u(X) v(X) d\Omega, \quad (2.15)$$

$L_4(u)$ representa o Laplaciano de $u(X)$ e $u^*(\xi; X)$ é tomada neste caso como a solução do problema

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X). \quad (2.16)$$

A equação anterior é uma Equação de Poisson. Em termos físicos, significa um problema no qual uma carga (ou fonte) concentrada unitária é aplicada no ponto ξ , denominado ponto fonte, em um domínio espacial infinito [4]. Para casos bidimensionais tem-se

$$u^*(\xi, X) = -(1/2\pi) \ln r(\xi; X). \quad (2.17)$$

A derivada normal de $u^*(\xi; X)$ é dada por

$$q^*(\xi; X) = - \left[\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \right] \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n}. \quad (2.18)$$

Na equação anterior, $r(\xi; X)$ representa a distância euclidiana entre os pontos ξ e X . Procedendo a integração por partes e aplicação do Teorema da Divergência, vem

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é chamada ‘Forma Integral Fraca’ e percebe-se na mesma uma integral de domínio, o que inviabiliza, pelo menos por hora, a correta aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Porém a forma como está posta a segunda integral do lado direito da equação acima, permite que sejam realizados novamente os procedimentos usuais, sejam eles a Integração por Partes e o Teorema da Divergência. Assim, chega-se à equação

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega. \quad (2.20)$$

onde q e q^* são respectivamente as derivadas normais de u e u^* .

Se as condições de contorno fossem homogêneas teria-se para o operador Laplaciano a seguinte igualdade:

$$L_4(u).u^* = u.L_4(u^*), \quad (2.21)$$

o que mostra que tal operador linear é dito auto-adjunto. Tal propriedade é essencial para a correta implementação do Método dos Elementos de Contorno.

Utilizando a equação (2.16) e as propriedades da função Delta de Dirac, pode-se reescrever a equação (2.20) como

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - c(\xi)u(\xi), \quad (2.22)$$

o que fornece

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - c(\xi)u(\xi) = 0. \quad (2.23)$$

A equação (2.23) é conhecida como “Forma Integral Inversa” associada a equação diferencial expressa pela equação de Laplace.

A constante $c(\xi)$ refere-se às possibilidades do ponto fonte situar-se no interior ou fora do domínio Ω , assim como sobre contorno Γ , o que resulta em valores distintos em cada circunstância.

É muito comum com o MEC considerar-se o ponto ξ situado sobre o contorno, para posteriormente, com a discretização, formar um sistema de equações algébricas resolvível. Para geometrias suaves, a obtenção do valor de $c(\xi)$ obedece a um formalismo matemático rigoroso, que não será apresentado aqui, mas pode ser obtido na literatura especializada mais clássica [3]. Curiosamente, resulta o valor de $c(\xi) = 0,5$ para contornos suaves sobre os quais se posiciona o ponto.

Embora não sejam usados nas simulações numéricas realizadas nessa dissertação, nos casos em que o contorno é anguloso, outros valores são obtidos. Para problemas bidimensionais tem-se, segundo a mesma fonte citada

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (2.24)$$

A variável α corresponde ao ângulo entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, conforme mostra a figura a seguir. Os casos em que o ponto ξ se situa dentro ou fora do

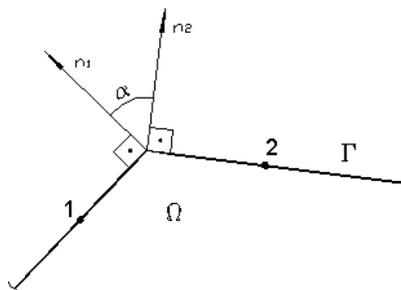


Figura 2.1: Caracterização geométrica de um contorno anguloso

domínio são mais simples de se examinar. O valor de $c(\xi)$ é igual a 1 no caso em que o ponto ξ está localizado no interior do domínio, pois aí vale a propriedade bem conhecida da Distribuição Delta de Dirac

$$\int_{\Omega} f(X) \Delta(\xi; X) d\Omega = f(\xi). \quad (2.25)$$

Caso o ponto ξ esteja interno ao domínio Ω . Este caso ocorre principalmente quando se desejam calcular valores das variáveis básicas do problema no interior do corpo. Com o MEC, a equação integral inversa discretizada é reutilizada, considerando o ponto fonte no interior e as variáveis de contorno já calculadas como dados de entrada.

Por fim, seguindo o mesmo raciocínio, o valor de $c(\xi)$ é igual zero no caso em que o ponto ξ está fora do domínio físico do problema. Este posicionamento externo do ponto fonte é útil para se gerar equações integrais inversas sem singularidades, por não haver coincidência entre a posição do ponto fonte e os pontos nodais de contorno. Uma quantidade de pontos fonte externos iguais a quantidade de pontos de contorno é então necessária para formação de um sistema matricial resolvível.

2.4 O Método dos Resíduos Ponderados

Considere mais uma vez a Equação Diferencial abaixo

$$L(\cdot) - p = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.26)$$

onde $L(\cdot)$ é um operador diferencial e p é uma função conhecida de X .

Admitindo a impossibilidade do conhecimento da solução analítica (u), o Método dos Resíduos Ponderados aproxima o espaço das soluções da equação por um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno definido pela equação (2.15).

Nesse sentido convém considerar um subespaço V_m gerado por um conjunto de m elementos do espaço vetorial de funções considerado, ou seja:

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m], \quad (2.27)$$

onde as funções φ_i são linearmente independentes.

Deseja-se obter uma função de aproximação (u_0) para u em V_m , ou seja¹,

$$u \approx u_0 = \alpha_i \varphi_i \text{ com } i=1,2,\dots,m. \quad (2.28)$$

A aplicação da equação (2.26) com a aproximação descrita em (2.28) introduz um erro ou resíduo (ϵ)

$$\epsilon = L(u_0) - p \neq 0. \quad (2.29)$$

A próxima etapa consiste na escolha de funções de ponderação (Ψ). Tais funções obedecem às mesmas condições impostas sobre as funções de aproximação (φ). A seguir, admite-se a seguinte expressão de ponderação:

$$\epsilon \cdot \Psi^j = \int_{\Omega} \epsilon \Psi^j d\Omega = 0. \quad (2.30)$$

Tal expressão indica na verdade a ortogonalização de tais funções através das constantes (α_i), fazendo com que o resíduo (ϵ) seja ortogonal às funções escolhidas (Ψ).

É importante ressaltar que a escolha do tipo de função de ponderação Ψ^j caracteriza diversos tipos de Método dos Resíduos Ponderados existentes (Colocação, Sub-Regiões, Galerkin, etc..).

¹Em Notação Indicial

2.5 Relação Formulas Integrais - Método dos Resíduos Ponderados

As formulações Integrais do Método dos Elementos de Contorno, contém estrutura matemática equivalente à presente numa resolução via Método dos Resíduos Ponderados, na qual ocorre ponderação dos resíduos no contorno, caso a aproximação efetuada não satisfaça às condições de contorno naturais, essenciais ou ambas. Tal equivalência será apresentada para a Equação de Laplace aplicada a um domínio físico (Ω) limitado com contorno $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$$u_{,ii} = 0. \quad (2.31)$$

com condições de contorno,

$$\begin{cases} u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_1 \\ q = \bar{q} \text{ em } \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.32)$$

Seguem-se os procedimentos usuais do Método dos Elementos de Contorno utilizando as Formulações Integrais. Primeiramente multiplicando a equação anterior por uma solução fundamental (w) e integrando-a num domínio Ω , tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} w d\Omega = 0. \quad (2.33)$$

Procedendo agora a Integração por Partes e aplicando o Teorema da Divergência obtém-se

$$\int_{\Omega} u_{,ii} w d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i w d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} w_{,i} d\Omega, \quad (2.34)$$

que é a ‘Forma Integral Fraca’ da Equação de Laplace.

Utilizando o fato de que $q = u_{,i} n_i$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ o lado direito da equação anterior pode ser escrito como

$$\int_{\Gamma_1} q w d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma_2 - \int_{\Omega} u_{,i} w_{,i} d\Omega = 0. \quad (2.35)$$

Utilizando a Integração por Partes na última integral da equação anterior, vem que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} qwd\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \bar{q}wd\Gamma_2 - \int_{\Gamma} qwd\Gamma + \int_{\Omega} u_{,ii} wd\Omega = 0 \\ \int_{\Gamma_1} qwd\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \bar{q}wd\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1} qwd\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} qwd\Gamma_2 + \int_{\Omega} u_{,ii} wd\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Lançando mão das aproximações

$$\begin{cases} u \approx u_0 \\ q \approx q_0, \end{cases} \quad (2.37)$$

a equação (2.36) torna-se

$$\int_{\Omega} u_{,ii} wd\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})wd\Gamma_2. \quad (2.38)$$

A equação acima é a expressão do Método dos Resíduos Ponderados nas condições de contorno naturais que por sua vez, é equivalente à Forma Integral Fraca da equação de Laplace. Percebe-se na mesma uma ponderação dos resíduos de um possível erro presente nas condições de contorno naturais da aproximação (2.37). Da mesma forma, pode-se chegar à uma expressão semelhante para a forma Integral Inversa.

A partir da equação (2.34) que é a Forma Integral Fraca da Equação de Laplace, pode-se operar de forma análoga à efetuada até então.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} q_0wd\Gamma - \left[\int_{\Omega} (u_0w_{,i})_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_0w_{,ii} d\Omega \right] = 0 \\ \int_{\Gamma} q_0wd\Gamma - \int_{\Gamma} u_0w_{,i} n_i d\Omega + \int_{\Omega} u_0w_{,ii} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

que é a Forma Integral Inversa da Equação de Laplace. Prescrevendo as condições de contorno conhecidas, usando as aproximações e operando de forma parecida ao tratamento dado à Forma Integral Fraca, segue a equação de Resíduos Ponderados equivalente.

$$\int_{\Omega} u_{,ii} wd\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{u} - u)\bar{w}d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})wd\Gamma_2 \quad (2.40)$$

onde $\bar{w} = w_{,i} n_i$.

2.6 Discretização e Implementação Computacional

Conforme exposto no capítulo 1, os principais métodos numéricos empregam o procedimento de discretização. Embora esse procedimento não seja objeto de maiores atenções na presente dissertação pois que aqui são enfocados outros aspectos ligados à formulação, alguns comentários serão feitos a seguir relacionados à discretização com o Método dos Elementos de Contorno.

Em linhas gerais, a discretização implica na transformação das equações diferenciais em equações algébricas. No caso do MEC, esta discretização conduz a um sistema de equações algébricas envolvendo valores nodais da variável básica e sua derivada normal.

Assim, uma vez obtida a equação integral geral de contorno, equação (2.23) repetida a seguir por conveniência, é preciso discretizá-la para então resolvê-la aproximadamente,

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - c(\xi)u(\xi) = 0. \quad (2.41)$$

Inicialmente divide-se o contorno numa série de elementos sobre os quais se interpolam as grandezas u e q em termos dos valores nodais.

$$u = N^e u^e \quad (2.42)$$

$$q = N^e q^e \quad (2.43)$$

onde N^e é o vetor das funções de interpolação, u^e e q^e são os vetores das variáveis básicas e sua derivada normal no ponto nodal X .

Neste trabalho empregam-se elementos de contorno constantes retilíneos. Neles, a aproximação das variáveis básicas ou primais é constante ao longo do elemento, enquanto a descrição geométrica do elemento é linear. É portanto um típico elemento hipoparamétrico. Comumente o posicionamento dos pontos nodais é centralizado no elemento de contorno. O uso de tal tipo de elemento é bastante comum em problemas escalares, oferecendo precisão satisfatória.

Assim, substituindo (2.42) e (2.43) em (2.41) tem-se a seguinte expressão:

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} q^* N d\Gamma \right) u^{(e)} = \sum_{j=1}^{Ne} \left(\int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma \right) q^{(e)}, \quad (2.44)$$

onde Ne é o número de elementos da discretização.

A geometria de cada elemento é definida em termos de uma função interpolante, de forma que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas. As coordenadas cartesianas dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como mostra-se a seguir:

$$x_i = M^e x_i^e \quad (2.45)$$

onde M^e é a matriz contendo as funções de interpolação e x_i^e o vetor de coordenadas nodais do elemento.

Durante a montagem do sistema de equações indicado em (2.44), cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dará através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^P f(\eta_i) w_i. \quad (2.46)$$

Na equação anterior η_i é a coordenada adimensional do i -ésimo ponto de integração, w_i é o fator de peso associado ao ponto i , e P é o número total de pontos de integração utilizado.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da equação (2.44) como segue:

$$\int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} q^* N |J| d\eta \approx \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k q_k^* \quad (2.47)$$

$$\int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} u^* N |J| d\eta \approx \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k u_k^*. \quad (2.48)$$

$$(2.49)$$

Nas equações precedentes os NPI são o número de pontos de integração de Gauss. A equação integral discretizada é aplicada repetidamente considerando o ponto ξ situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de t equações algébricas é gerado e envolve os t valores nodais de variáveis básicas e derivadas normais. Ainda é interessante levar este sistema para uma forma matricial e para isso coloca-se da forma na equação (1.1) mostrada no capítulo 1.

Capítulo 3

Formulações com Dupla-Reciprocidade

3.1 Considerações Preliminares

Diferentemente dos demais métodos numéricos, o MEC trabalha como a Forma Integral Inversa associada à equação diferencial que governa o problema, o que faculta a sua representação em termos de integrais ao longo do contorno (Γ), para quaisquer tipos de condições impostas na fronteira, homogêneas ou não, sem perda de generalidade.

No entanto, nem sempre é possível expressar o problema em termos de uma forma integral inversa. O caso em que a equação diferencial do problema é heterogênea envolvendo fontes ou ações de domínio é típico. Estas funções apesar de conhecidas, não são sempre redutíveis a integrais de contorno. Nos primórdios do MEC, a solução desse problema implicava necessariamente em procedimentos tais como a integração em células, estratégia similar a empregada pelo método dos Elementos Finitos e outras técnicas de domínio.

A Formulação com Dupla Reciprocidade (DRT) concebida originalmente por Nardini e Brebbia em 1982, para resolver problemas de vibração livre e resposta dinâmica, acabou por difundir-se como a principal formulação do MEC para resolver problemas nos quais existem ações de domínio em geral. Graças a DRT é sempre possível transformar tais termos em integrais de contorno, usando funções de interpolação auxiliares que resul-

tam numa aproximação bastante satisfatória, cuja precisão se amplia com o aumento do número de pontos interpolantes. A convergência de tal procedimento já foi objeto de diversos trabalhos de pesquisa.

De qualquer modo, a DRT afigura-se como uma formulação alternativa do MEC para solução de outros tipos de problemas, que apesar de possuírem uma forma integral inversa, resultam num modelo matemático relativamente complicado apesar da elegância da formulação e da elevada precisão dos seus resultados. É o caso dos problemas dependentes do tempo, transientes e dinâmicos, já citados anteriormente no primeiro capítulo. A DRT embora produza resultados de menor precisão, permite se estabelecer uma forma integral inversa aproximada de fácil modelagem e simples resolução.

O mesmo acontece para os casos relativos à difusão-advecção, problemas de grande importância na engenharia. Existem formulações do MEC que resolvem tais problemas de modo mais elegante e preciso, não obstante algumas restrições ao campo de velocidade, que podem ser superados de modo aproximado. Todavia, Partridge et al. entenderam que a DRT também poderia ser empregada com êxito em tal classe de problemas, oferecendo soluções satisfatórias, através de um modelo matemático mais simples. Assim, aproveitando-se da generalidade da DRT, nela adaptaram um esquema engenhoso para simular a advecção. Infelizmente, o procedimento proposto por esses autores resulta limitado a números de Peclet reduzidos. Pode-se constatar que esse desempenho apenas regular se deve a uma segunda aproximação existente no modelo, que será destacada mais à frente.

A Formulação com Quase-Dupla Reciprocidade (QDR) criada por Loeffler e Mansur, intenta ampliar a capacidade de solução do modelo calcado em funções de interpolação, usando uma estratégia particularizada para os problemas de difusão-advecção ou outros que possuam a mesma estrutura matemática, na qual haja um operador gradiente aplicado ao campo de variáveis básicas.

Esse capítulo mostra as etapas de formação dos modelos matemáticos gerados pelas formulações citadas (DRT e QDR) quando aplicadas aos problemas de difusão-advecção,

cuja equação diferencial de governo é apresentada a seguir, em notação indicial:

$$K\theta_{,ii} - \theta_{,i} v_i = 0. \quad (3.1)$$

Considerando as peculiaridades dos problemas difusivos-advectivos, admita que a equação anterior seja válida num volume de controle bidimensional, tal que $d\Omega$ represente uma região infinitesimal do mesmo. Juntamente com diferenciais de temperatura θ , haja nesse volume de controle um escoamento potencial estacionário e que a posição de uma partícula seja dada por $X = X(x_1, x_2)$. Figuram na equação anterior a condutividade térmica K e o vetor velocidade da particular v , de componentes v_i . As condições de contorno essenciais e naturais são definidas pelas duas equações a seguir,

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} & \text{em } \Gamma_\theta \text{ (condição essencial)} \\ \theta_{,i} n_i - \theta v_i n_i = \bar{f} & \text{em } \Gamma_q \text{ (condição natural)}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nessas últimas equações, Γ representa a fronteira do volume de controle e n_i representa o vetor unitário normal à superfície.

3.2 Formulação com Dupla-Reciprocidade Tradicional

Para se iniciar a abordagem da DRT, a equação (3.1) é escrita na forma integral forte usando como função auxiliar a solução fundamental difusiva θ^* , resultando na seguinte equação,

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} \theta^* d\Omega = \int_{\Omega} \theta_{,i} v_i \theta^* d\Omega. \quad (3.3)$$

O lado esquerdo da equação (3.1) corresponde à Equação de Laplace, e pode ser reescrito em termos de integrais de domínio conforme foi mostrado anteriormente. O modelo proposto por Partridge resolve o lado direito através do procedimento típico da Dupla Reciprocidade, considerando o termo advectivo tal como fosse uma ação de domínio, isto é,

$$b = \theta_{,i} v_i = p(X) = \alpha^j F^j(X) = \alpha^j \Psi^j_{,ii}. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4) F^j são funções de interpolação linearmente independentes, α^j são coeficientes escalares e Ψ^j são funções primitivas de F^j . A escolha destas funções de interpolação tem sido objeto de muitas pesquisas interessantes. Entre o conjunto de funções admissíveis, a mais importante de todas são as funções radiais. Estas são compostas por potências envolvendo a distância euclidiana entre dois pontos, usualmente escolhidos como os pontos de contorno X e pontos de interpolação X^j . Deve ser ressaltado que nessa fase inicial do procedimento as derivadas espaciais não requerem nenhum tratamento especial. Também deve ser enfatizado que a solução fundamental relacionada ao problema difusivo é dada por

$$\theta^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; X). \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), $r(\xi; X)$ significa a distância entre um ponto particular do domínio, o ponto fonte ξ e um ponto genérico do domínio X , usualmente tomado como um ponto pertinente ao contorno. Cabe ressaltar que a solução fundamental difusiva é uma função que satisfaz a uma Equação de Poisson imediatamente abaixo, cujo domínio é infinito:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X). \quad (3.6)$$

Na equação anterior $\Delta(\xi; X)$ é o Delta de Dirac. Considerando a aproximação dada pela equação (3.4), a integral (3.3) pode ser operada convenientemente, transformando-se em duas novas integrais, cujos núcleos são expressos em termos de funções harmônicas,

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} \theta^* d\Omega = \int_{\Omega} \alpha^j \Psi^j_{,ii} \theta^* d\Omega. \quad (3.7)$$

É possível agora proceder de forma semelhante ao tratamento da equação de Laplace, obtendo assim

$$\alpha^j \int_{\Omega} F^j u^* d\Omega = \alpha^j \left\{ c \Psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} \Psi^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta u^* d\Gamma \right\}, \quad (3.8)$$

onde $\eta^j = \Psi^j_{,i} n_i$.

Para domínios finitos, a escolha para as funções F^j pode ser feita de forma arbitrária, embora se deva evitar funções complicadas e descontínuas. Visando escolher as mais simples, Brebbia optou por funções radiais do tipo

$$F^j(X) = r(X^j; X). \quad (3.9)$$

Escolhida a expressão para F^j , pode-se agora determinar Ψ^j e η^j através das equações (3.4) e (3.9). Resulta então em coordenadas polares que

$$\frac{d^2\Psi^j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi^j}{dr} = r. \quad (3.10)$$

Uma solução particular fornece

$$\Psi^j = r^3/9 \quad e \quad \eta^j = \frac{r^2}{2} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (3.11)$$

Efetuando-se uma série de procedimentos algébricos, alguns bastante tradicionais no MEC com o processo de discretização, é possível chegar à seguinte equação matricial:

$$HU - GQ = \frac{1}{k} [H\Psi - G\eta]\alpha. \quad (3.12)$$

Procedendo alguns detalhes operacionais, que podem ser melhor observados especialmente em Partridge et al. Assim sendo, a equação matricial do sistema fica com a forma a seguir

$$HU - GQ = P. \quad (3.13)$$

O valor do coeficiente α pode ser calculado por

$$\alpha = F^{-1}V_i\theta_{,i}, \quad (3.14)$$

então,

$$P = [H\Psi - G\eta]F^{-1}V_i\theta_{,i}. \quad (3.15)$$

Na equação (3.15) aparecem as matrizes H e G relacionadas à difusão, a inversa da matriz F constituída pelas funções de interpolação, as matrizes construídas por primitivas das funções F^j , as funções auxiliares Ψ^j e η^j , uma matriz diagonal constituída pelas

velocidades v_i e finalmente, um vetor relacionado às derivadas espaciais da temperatura expresso indicialmente por $\theta_{,i}$.

A partir daqui é feito um tratamento particular nestas derivadas espaciais, empregando novas interpolações. O campo de temperaturas expresso em forma matricial, será reescrito através de nova combinação linear de funções F^j , usando escalares β diferentes de α . Matricialmente, tem-se:

$$\theta = F\beta. \quad (3.16)$$

As derivadas direcionais podem ser facilmente obtidas através de

$$\theta_{,i} = F_{,i}\beta. \quad (3.17)$$

Considerando que

$$\beta = F^{-1}\theta, \quad (3.18)$$

pode-se escrever

$$\theta_{,i} = F_{,i}F^{-1}\theta. \quad (3.19)$$

Finalmente chega-se a expressão matricial definitiva

$$H\Theta - GQ = [H\Psi - GN]F^{-1}V_iF_{,i}F^{-1}\theta = R\theta. \quad (3.20)$$

Este procedimento é bastante engenhoso mas emprega nos casos convectivos uma interpolação adicional, além da aproximação usualmente empregada pela DRT quando aplicada aos problemas de ações de domínio. Pode-se perceber claramente que a nova aproximação é feita no modelo discretizado para eliminar as derivadas espaciais presentes na temperatura.

3.3 Formulação com Quase-Dupla Reciprocidade

Conforme já exposto, a Quase-Dupla Reciprocidade (QDR) é uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno voltada para solução de problemas difusivos-advectivos ou afins. No caso específico de problemas de convecção, tal formulação requer

a obediência da condição de incompressibilidade [38], para poder ser aplicada e assim tornar possível os procedimentos usuais do MEC que conduzem a uma formulação integral inversa. Assim sendo, os escoamentos nos quais a QDR é aplicável precisam ser potenciais.

Recentemente em sua dissertação de mestrado, Massaro [28] mostrou toda a eficiência da QDR para problemas de transferência de calor difusivos-advectivos com escoamento potencial. Comparou o desempenho da QDR com a DRT e com a formulação do MEC que usa solução fundamental difusiva-advectiva. Atualmente tal formulação vem sendo aplicada a problemas não-homogêneos com bons resultados, vide [25], [26] e [37]. A extensão para problemas heterogêneos dinâmicos também foi efetivada por Dalvi [37], mas seus resultados foram apenas sofríveis, de modo que a modelagem precisa ainda ser estudada com mais profundidade.

Para ilustrar a aplicação da formulação, considere mais uma vez a equação diferencial de governo para problemas difusivos-advectivos escrita em notação indicial como

$$K\theta_{,ii} = \theta_{,i} v_i \quad (3.21)$$

Lançando mão da condição de incompressibilidade, típica de um fluido em escoamento potencial, tem-se

$$v_{i,i} = 0. \quad (3.22)$$

E a equação (3.21) pode ser reescrita como

$$K\theta_{,ii} = (\theta v_i)_{,i}. \quad (3.23)$$

A partir desse ponto utilizam-se os procedimentos usuais do MEC. Inicialmente multiplica-se a equação anterior por u^* , a solução fundamental de um problema exclusivamente difusivo. Assim sendo a equação (3.23) fica

$$K\theta_{,ii} \theta^* = (\theta v_i)_{,i} \theta^*. \quad (3.24)$$

Integrando em um domínio elementar de controle, vem

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} \theta^* d\Omega = \int_{\Omega} (\theta v_i)_{,i} \theta^* d\Omega. \quad (3.25)$$

A equação anterior corresponde à “Forma Integral Forte” associada à equação de governo do problema difusivo-advectivo.

Os próximos passos são dados na direção da eliminação das integrais de domínio, fazendo aparecer integrais referentes ao contorno do domínio elementar. Os procedimentos usualmente empregados são a integração por partes, o Teorema da Divergência e as propriedades do Delta de Dirac. O lado esquerdo da equação anterior já tem forma integral inversa conhecida,

$$K \int_{\Omega} \theta_{,ii} \theta^* d\Omega = K \left\{ c(\xi)\theta(\xi) + \int_{\Gamma} [\theta q^* - q\theta^*] d\Gamma \right\}, \quad (3.26)$$

onde q e q^* são respectivamente as derivadas normais de θ e θ^* .

Atenção especial deve ser dada ao lado direito da equação de governo ou termo advectivo. Começando pela aplicação da integração por partes, vem:

$$\int_{\Omega} (\theta v_i)_{,i} \theta^* d\Omega = \int_{\Omega} (v_i \theta \theta^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i \theta \theta^*_{,i} d\Omega. \quad (3.27)$$

Utilizando-se agora o Teorema da Divergência, tem-se que

$$\int_{\Omega} (\theta v_i)_{,i} \theta^* d\Omega = \int_{\Gamma} v_i n_i \theta \theta^* d\Gamma - \int_{\Omega} (v_i \theta) \theta^*_{,i} d\Omega. \quad (3.28)$$

A forma como está posta a equação anterior, não permite escrever o problema exclusivamente em termos de integrais a valores de contorno. Na tentativa de contornar tal problema a seguinte aproximação é requerida,

$$b_i = \theta v_i \approx \alpha_p^j \Psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j. \quad (3.29)$$

A forma diádica das funções η , mais complexas do que aquelas encontradas em problemas escalares se deve a requerimentos operacionais.

Então, usando a equação (3.29), tem-se

$$\int_{\Omega} (\theta v_i) \theta^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^i \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j \theta^*_{,i} d\Omega, \quad (3.30)$$

novamente usando a Integração por Partes segue que

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j \theta^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} (\Psi_{p,i}^j \theta^*_{,i})_{,i} d\Omega - \alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j \theta^*_{,ii} d\Omega. \quad (3.31)$$

A primeira integral do 2º membro da equação anterior, transforma-se numa integral ao longo do contorno (Γ) graças à aplicação do Teorema da Divergência, já na segunda integral, aplica-se a identidade presente na equação (3.6). Assim, após o tratamento matemático apresentado, a segunda integral da equação (3.25), pode ser expressa por:

$$\int_{\Omega} (\theta v_i)_{,i} \theta^* d\Omega = - \int_{\Gamma} v_i n_i \theta \theta^* d\Gamma + \alpha \left[\int_{\Gamma} \Psi_p^j \theta^*_{,i} n_i d\Gamma + c(\xi) \Psi_p^j(\xi) \right] \quad (3.32)$$

Assim, em conjunto com a equação (3.26) gera a equação integral definitiva para o problema:

$$K \left\{ c(\xi) \theta(\xi) + \int_{\Gamma} [\theta q^* - q \theta^*] d\Gamma \right\} = - \int_{\Gamma} v_i n_i \theta \theta^* d\Gamma + \alpha \left[\int_{\Gamma} \Psi_p^j \theta^*_{,i} n_i d\Gamma + c(\xi) \Psi_p^j(\xi) \right]. \quad (3.33)$$

A equação (3.33) está totalmente escrita em integrais ao longo do contorno do problema, fato este que está na essência do MEC. A próxima etapa é a discretização, e já que a equação integral envolve somente o contorno (Γ), aplica-se o método da colocação sobre o mesmo a fim de gerar a equação matricial abaixo

$$H\Theta - GQ = -B\Theta + H\Psi\alpha. \quad (3.34)$$

Para a correta implementação do MEC, torna-se necessário eliminar o vetor (α) da equação matricial (3.34). Com essa finalidade, utilizando a equação (3.29), pode-se escrever

$$\alpha = \eta^{-1}[\theta v], \quad (3.35)$$

substituindo tal expressão na equação matricial (3.34), tem-se que

$$H\Theta - GQ = -B\Theta + H\Psi(\eta^{-1}V\Theta) \quad (3.36)$$

Utilizando a seguinte convenção

$$M = H\Psi(\eta^{-1}V), \quad (3.37)$$

a equação matricial definitiva fica

$$[H + B - M]\Theta = GQ \quad (3.38)$$

Capítulo 4

Funções Radiais no Método dos Elementos de Contorno

A eficiência e a convergência da Dupla Reciprocidade Tradicional depende, dentre outros fatores, da escolha adequada de funções de interpolação presentes na equação (3.4). No trabalho original de Nardini e Brebbia, quatro possibilidades para as funções de aproximação são listadas:

- função distância ou função cônica (r);
- a função constante 1;
- funções trigonométricas seno e cosseno
- polinomiais x , y , xy , etc.

Os autores citados usaram preferentemente as funções radiais, de modo que os resultados das simulações apresentadas no trabalho pioneiro e nos demais subseqüentes empregaram tais funções. Outros estudiosos e pesquisadores da Dupla Reciprocidade seguiram a mesma linha de trabalho e adotaram a função radial em seus trabalhos, como os já citados Wrobel [44] e Loeffler e Mansur [24]. No entanto, um estudo detalhado e matematicamente criterioso das características das funções radiais dentro do contexto da formulação com Dupla Reciprocidade ainda não havia sido empreendido.

Até então, os pesquisadores mesmo não conhecendo as propriedades formais de convergência da função cônica, utilizavam-na preferencialmente. Antes do trabalho de Partridge et. al. [34] sobre a Dupla Reciprocidade, poucas foram as tentativas de buscar alternativas para a função radial. Uma das poucas exceções nesse sentido foi proposta por Loeffler e Mansur em 1990 [22] para um problema no qual o domínio é infinito. Nesse trabalho, os autores sugerem

$$f = \frac{2C - r}{(r + C)^4}. \quad (4.1)$$

O primeiro trabalho a tratar da convergência da Formulação da Dupla-Reciprocidade foi elaborado por Yamada et. al. em 1994 [17], onde é feita uma análise apurada da convergência na Dupla Reciprocidade. Golberg, Chen e Bowman (1999) [11] definem funções radiais conforme exposto abaixo

Definição 4.1 (Funções Radiais). *Sejam $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ e $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $\varphi(0) \geq 0$. Uma função radial em \mathbb{R}^n é uma função da forma*

$$\varphi(\|P - Q\|), \quad (4.2)$$

onde $(P, Q) \in \mathbb{R}^n$ e $(\|\cdot\|)$ denota a distância euclidiana entre P e Q .

Caso sejam escolhidos m pontos em \mathbb{R}^n $\{Q_j\}_{j=1}^m$, então a expressão

$$g(P) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(\|P - Q_j\|), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

também é chamada função radial.

Embora a equação (4.2) permita infinitas escolhas, as aplicações práticas têm utilizado um número limitado de funções. Tradicionalmente na Dupla Reciprocidade Tradicional, $\varphi(r) = r$ e $\varphi(r) = 1 + r$ vêm sendo utilizadas quase que exclusivamente. Porém, alguns artigos sugerem também:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= r^2 \log(r) && (\textit{Thin Plate Splines}), \\ \varphi(r) &= (r^2 + c^2)^{\beta/2} && (\textit{Multiquadrica}), \\ \varphi(r) &= e^{-r^2/\sigma^2} && (\textit{Gaussiana}). \end{aligned}$$

No caso das multiquádricas e Gaussianas, é necessária a escolha adequada dos parâmetros c e σ^2 respectivamente, o que torna necessário algum procedimento especial no sentido de encontrar valores que forneçam convergência ótima para a Dupla Reciprocidade.

No artigo de Yamada et. all(1994)[17] encontram-se as condições para uma série aproximativa representar uma interpolação local. Para tanto divide-se o domínio (Ω) do problema em duas regiões A e B , onde A é um disco de raio R centrado no ponto campo (P) (R deve ser escolhido de forma a tender a zero à medida que o número de pontos (N) tende a infinito), e B é o restante de Ω .

Definição 4.2 (Série de Interpolação Local). *Uma série de aproximação da forma*

$$b(X) = \sum_{i=1}^n N_i(X)b_i + E_n(X) \quad (4.4)$$

consistindo de funções $N_i(X_p)$ satisfazendo:

$$(C1) \quad N_i(X_p) = 0 \text{ para } i \in B$$

$$(C2) \quad \sum_{i \in A} N_i(X_p) = 1$$

$$(C3) \quad \sum_{i \in A} |N_i(X_p)| < M < \infty$$

onde M é constante, é chamada série de interpolação local.

No mesmo trabalho, demonstra-se que se uma função radial (N) obedece às três condições acima, a função $E_n(X)$ tende a zero à medida que n tende a infinito. Além do mais, a função $f(r) = \chi + r$ onde χ é uma constante real, obedece à todas as condições, fazendo assim com que o uso de tal função produza convergência na técnica da Dupla Reciprocidade.

No ano de 2000 Partridge [33] publicou um trabalho no qual realiza uma série de experimentos com funções em diferentes tipos de aplicação, casos estacionários, transientes, convectivos e aqueles nos quais a ação de domínio é conhecida. O autor tenta sintetizar suas conclusões elegendo certos procedimentos e funções mais adequadas em cada caso, mas verifica que de modo geral a função cúbica radial r^3 apresenta desempenho superior às demais.

4.1 Funções de Aproximação na Quase-Dupla Reciprocidade

No contexto dos problemas convectivos, a principal diferença entre a DRT e a QDR está presente na forma como cada formulação trata as integrais referentes ao termo advectivo. Na primeira, a integral referente ao termo advectivo é aproximada por funções radiais, e daí desdobrada em três termos (vide equação (3.4)), enquanto que na QDR a condição de incompressibilidade permite que se faça o desdobramento do termo advectivo em dois, e em apenas um termo se faça a aproximação. Também deve-se ressaltar que na QDR aproxima-se uma função vetorial, ao passo que na DRT o campo a ser aproximado é de natureza escalar. Mas a mais significativa diferença provém do fato que as derivadas espaciais do termo advectivo são naturalmente absorvidas pela única aproximação efetuada, sem necessidade de uma posterior interpolação, de conseqüências danosas à precisão dos resultados.

Diferentemente da DRT, não é fácil encontrar alternativas radiais para as funções η_{pi}^j e ρ_{pi}^j , pois elas se relacionam conforme mostra a equação (2.10), repetida aqui por conveniência,

$$b_i = uv_i \approx \alpha_p^j \eta_{pi}^j = \alpha_p^j \Psi_{p,i}^j, \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\eta_{pi}^j = \Psi_{p,i}^j. \quad (4.6)$$

Para problemas uni ou bidimensionais, as seguintes expressões para η e Ψ e foram empregadas.

$$\eta_{pi}^j = 3RR_iR_p + R^3\delta_{ip}, \quad (4.7)$$

$$\Psi_p^j = R^3R_p. \quad (4.8)$$

4.2 Comportamento das Funções de Aproximação na QDR

Conforme mostrado, apesar das diferenças entre as formulações DRT e QDR, Loeffler [24] utilizou também funções radiais, e os resultados foram bastante bons especialmente para os casos unidimensionais, ou seja, nos quais uma única componente de velocidade atravessa o volume de controle. Esses resultados satisfatórios para diversas simulações de casos unidimensionais podem ser colhidos na bibliografia. Problemas dessa natureza puderam ser resolvidos com boa precisão para valores do número de Peclet próximos de 100, com malhas com menos de uma centena de elementos constantes.

No entanto, para problemas bidimensionais, houve o surgimento de algumas dificuldades no modelo. Curiosamente, foram resolvidos com ótima precisão casos em que se prescreviam condições de contorno do 1º tipo da forma

$$u(x, y) = e^{vx+wy},$$

onde v e w são componentes da velocidade do fluido. Todavia a QDR resolveu de forma apenas sofrível o problema bidimensional onde a condição de contorno do 1º tipo era da forma

$$u(x, y) = e^{vx} + e^{wy}.$$

Considerando que os problemas são parecidos, mas têm comportamento físico bem distinto, em que este último possui fluxos normais constantes em $X(0, y)$ e $X(x, 0)$, propôs-se a implantação de um conjunto mais completo de funções de interpolação. Diante do fato que a interpolação original, através da função η_{pi}^j na equação (3.29), produz apenas uma matriz H no termo advectivo (vide equação (3.34), Loeffler et. al. [23], trabalharam com uma nova idéia de aproximação na qual se pudesse surgir também com uma matriz G na expressão final. Para tanto, utilizaram

$$b_i \approx \alpha_p^j [\eta_{pi}^j + \rho_{pi}^j]. \quad (4.9)$$

Considerando a aproximação do termo advectivo composta de duas classes de funções, esperava-se com isso atender ao quesitos de completude. No entanto, a introdução da

função ρ_{pi}^j implicou no aparecimento de uma nova integral de domínio na equação (3.30),

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \rho_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} (\rho_{pi}^j u^*)_{,i} d\Omega - \alpha_p^j \int_{\Omega} \rho_{pi,i}^j u^* d\Omega. \quad (4.10)$$

Para eliminar a última integral de domínio no lado direito da equação (4.10), requereu-se como propriedade para a função ρ que esta tivesse divergência nula, expressa indicialmente por

$$\rho_{pi,i}^j = 0. \quad (4.11)$$

Graças à essa condição, a segunda integral do lado direito da equação (4.10) anula-se, e procedendo a aplicação do Teorema da Divergência, tem-se

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \rho_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \rho_{pi}^j n_i u^* d\Omega, \quad (4.12)$$

fazendo $\lambda_p^j = \rho_{pi}^j n_i$ tem-se a seguinte equação matricial:

$$HU - GQ = -BU + (H\Psi + G\Lambda)\alpha. \quad (4.13)$$

Nota-se agora a presença das matrizes H e G no lado direito da equação matricial. Operando com α da mesma forma descrita na equação (3.14), ou seja

$$HU - GQ = (-B + T)U. \quad (4.14)$$

A propriedade requerida para a função ρ , descrita na equação (4.11), permite várias possibilidades para expressão da mesma. Dentre todas elas, Massaro [28] utilizou

$$\rho_{pi}^j = \Delta(3RR_i R_p - 4R^3 \delta_{ip}), \quad (4.15)$$

onde Δ é uma constante real positiva.

A título de teste da nova formulação, Massaro resolveu um problema de escoamento bidimensional através de um tubo. Os dados do problema encontram-se na figura abaixo.

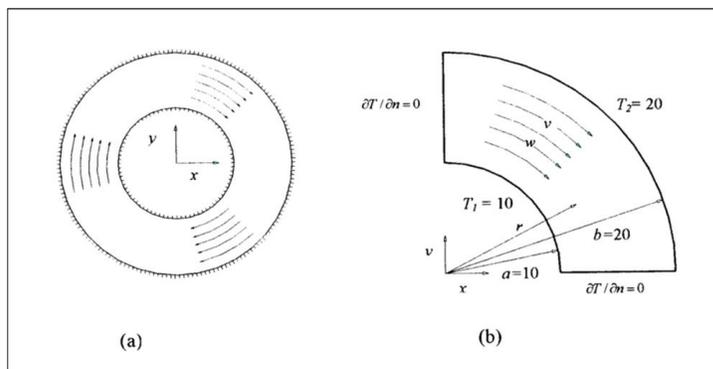


Figura 4.1: Escoamento bidimensional através de um tubo

Os resultados foram satisfatórios para os vários valores de velocidade, a formulação apresentou um erro médio menor do que na DRT. Destaca-se o fato de que tais resultados são influenciados diretamente pelos valores da constante Δ . Como pode ser observado, a

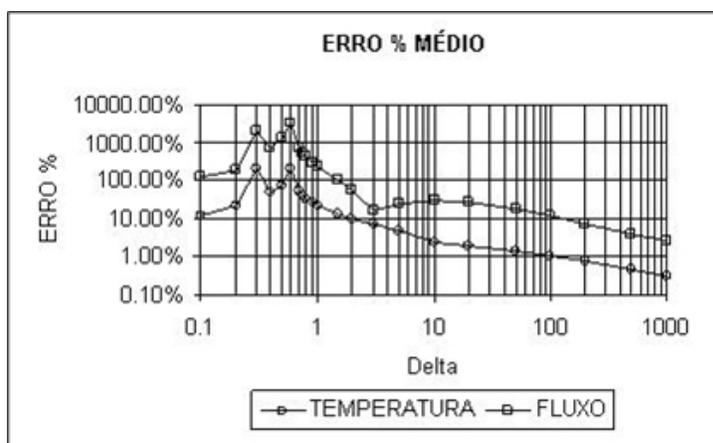


Figura 4.2: Erro Percentual Médio em Função da Constante Delta

ampliação do valor do coeficiente Delta reduz o valor do erro médio percentual pelo menos nesse exemplo. De certo modo, valores de Delta significativos estão ligados à dominância da matriz G com relação a matriz H na composição matricial do termo advectivo construído pela QDR. Outros testes não mostrados aqui, indicaram que em outros problemas especialmente os bem resolvidos pela QDR usando apenas a aproximação (4.5), ficaram com baixa precisão para valores altos da constante Delta, o que mostrou a limitação deste procedimento.

De qualquer modo, uma boa formulação não pode depender de um fator arbitrário,

com relação ao qual não se conseguiu estabelecer nenhuma relação geométrica ou com a quantidade de nós da discretização.

4.3 Novas Tentativas

4.3.1 Implementação de Uma Função Constante

A principal consideração acerca das novas funções de interpolação era a de que deveriam melhorar as aproximações quando o campo de variáveis tivesse algum conteúdo dito constante, tal como o fluxo ou temperatura. Algo similar ao que acontece em problemas de Mecânica dos Sólidos quando há movimentos de corpo rígido. Com esse propósito e baseando-se na equação (4.11), a primeira tentativa foi

$$b_i = uv_i = \alpha_p^j (\eta_{pi}^j + \delta_{pi}^j), \quad (4.16)$$

onde δ é o delta de Kronecker. Tal função não melhorou satisfatoriamente os resultados obtidos por Massaro. As figuras abaixo mostram o comportamento da formulação com a inserção da função constante no tratamento de um problema de escoamento bidimensional, semelhante ao apresentado na figura (4.5), que a Quase-Dupla Reciprocidade já havia obtido resultados satisfatórios. Nota-se que a adição do termo constante nesse caso, não forneceu qualquer melhora significativa nos resultados para os diversos valores de velocidade testados.

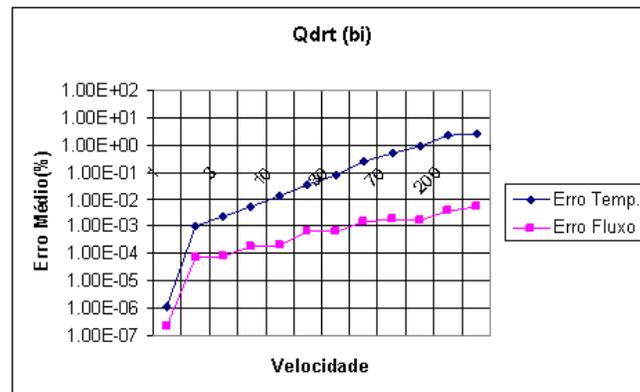


Figura 4.3: Erro Médio Percentual da Qdrt com o aumento de Velocidade

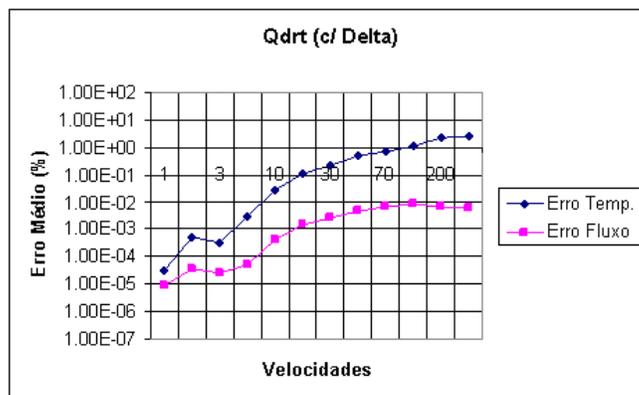


Figura 4.4: Erro Médio Percentual da nova função com o aumento de Velocidade

4.3.2 Implementação de uma Função Generalizada

A principal e aquela que obteve maior êxito trata-se meramente de uma generalização da função adicionada por Massaro.

Massaro utilizou expressões cúbicas para η e ρ . Pode-se perceber que tais funções são de mesma classe, ou seja, são linearmente dependentes. A idéia então é trabalhar com funções de ordem distintas que sejam linearmente independentes, e para isso deve-se ir além e aquém daquelas de grau 3.

Assim, novamente utilizando a equação (4.11) para as novas funções, chegou-se a uma expressão um pouco mais geral, e, em função de um parâmetro n que determina o grau da mesma,

$$\rho_{pi}^j = nR^{n-2}R_iR_p - (n+1)R^n, \quad (4.17)$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e é maior que ou igual a 2.

A função acima expressa, possui a propriedade de divergência nula, porém para os casos analisados a expressão forneceu convergência adequada apenas para $n=3,4,5$ e 6. Observando que para $n=3$, obtem-se a função (4.15), e ante à dependência dessas funções da constante Δ , preferiu-se não exibir os resultados para tal formulação.

O primeiro problema a ser testado trata de um escoamento bidimensional de um fluido incompressível, onde as temperaturas ao longo do contorno obedecem à

$$u(x, y) = e^{vx} + e^{wy}. \quad (4.18)$$

Este era um dos problemas que a QDR não resolvia satisfatoriamente. Por simplicidade, as componentes de velocidade v e w são consideradas iguais. Para este problema as

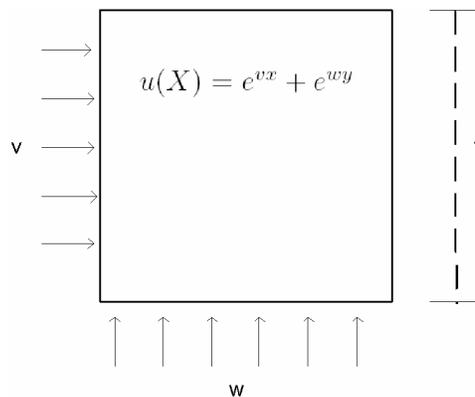


Figura 4.5: Placa Quadrada cujas Temperaturas no contorno obedecem à equação 4.18

temperaturas são dadas e a formulação fornece os resultados para o fluxo em cada elemento. Na figura abaixo, $gr(n)$ refere-se à formulação com a nova função com grau n , drt e $qdrt$, referem-se respectivamente às formulações da Dupla Reciprocidade Tradicional e Quase-Dupla Reciprocidade Tradicional sem a função auxiliar ρ .

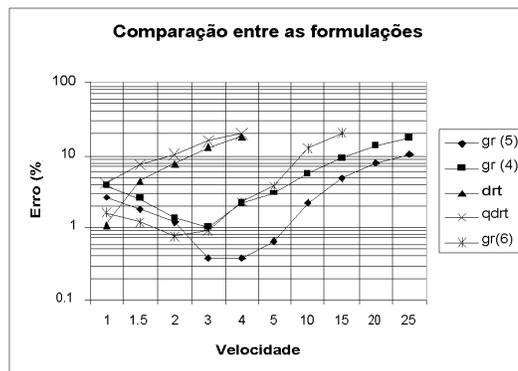


Figura 4.6: Erro Percentual Médio com o Aumento de Velocidade no Problema Descrito na Figura 4.5

Vê-se que as duas novas formulações melhoraram de forma satisfatória os resultados obtidos para o fluxo pelas formulações tradicionais, visto que quando as velocidades são maiores do que 4 a Dupla Reciprocidade Tradicional e a Quase-Dupla Reciprocidade Tradicional apresentaram erros grandes suficientemente para distorcer graficamente os resultados, e por isso foram omitidos. Para tal simulação foi utilizada uma malha com 96 Elementos de Contorno e nenhum ponto interno. O cálculo do erro médio foi realizado de acordo com a expressão

$$E_m\% = 100 \times \sum_{i=1}^{96} |(F.A.(i) - F.C.(i))/F.A.(i)| / 96 \quad (4.19)$$

onde $F.A.(i)$ representa o Fluxo Analítico no Elemento i e, $F.C.(i)$ representa o Fluxo Calculado pela formulação em questão no mesmo elemento.

Um segundo problema que contém as mesmas dificuldades de convergência é descrito na figura (4.1). Porém o problema analisado contém raio interno (a) igual a 1 e raio externo (b) igual a 2, levemente diferente do problema estudado por Massaro.

Fisicamente, tal situação é dita pseudo-convectiva visto que a velocidade teoricamente não influi na variação das temperaturas. Trata-se de um fluido que escoar em um tubo circular onde estão prescritas velocidades circunferenciais e um diferencial de temperatura é aplicado aos raios interno e externo.

A primeira bateria de testes examina o comportamento do refinamento da malha na precisão dos resultados. Para a análise das formulações foram utilizadas malhas com 39, 75 e 107 elementos de contorno. A velocidade angular considerada é igual à unidade.

São mostrados sucessivamente os erros médios percentuais para o fluxo e para a temperatura em cada malha, figuras (4.6) e (4.7) respectivamente.

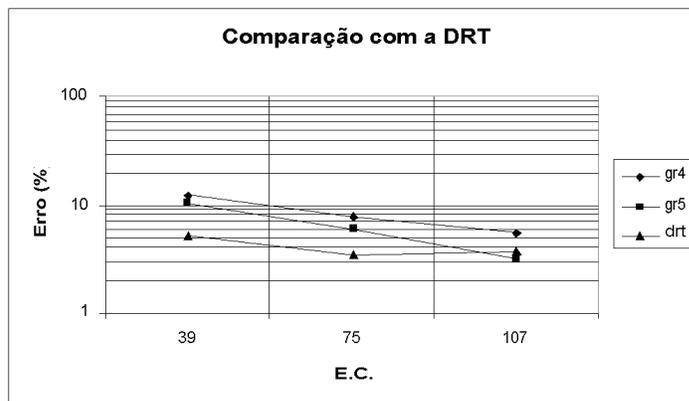


Figura 4.7: Erro (%) Médio no Fluxo com o Refinamento

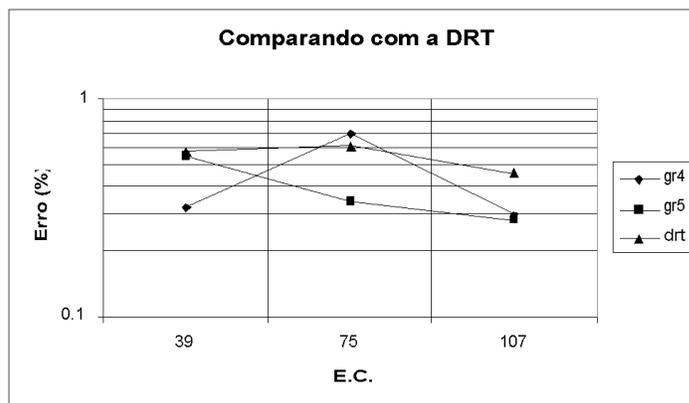


Figura 4.8: Erro (%) Médio na Temperatura com o Refinamento

Verifica-se um comportamento algo anômalo dos resultados com o refinamento da malha para as formulações $gr(4)$ e drt . Não há melhoramento monotônico dos resultados com o aumento do número de pontos nodais. Os valores são aceitáveis, em princípio; considerando que nas formulações com Dupla Reciprocidade (tanto a DRT quanto a QDR) existe a tendência de aproximar mal valores pouco representativos, por conta da interpolação global. Também as funções radiais apresentam erros significativos em pontos de quina, que distorcem o valor do erro cometido na simulação numérica. De qualquer modo, com a malha mais refinada os resultados são os melhores das novas formulações, sendo que o desempenho da formulação $gr(5)$ supera inclusive a Dupla Reciprocidade Tradicional.

Os piores resultados para o fluxo ficaram com erros em torno de 5% ao passo que o erro médio percentual na temperatura ficou em aproximadamente 0,5%. Percebe-se que a formulação da Dupla Reciprocidade apresenta convergência inferior às duas novas formulações testadas. Ante à superioridade da malha com 107 Elementos de Contorno, os testes comparativos efetuados a partir de então utilizarão tal malha.

Os gráficos mostrados na figura (4.9) refletem os resultados obtidos com o aumento de velocidade do fluido. Para velocidades menores que ou iguais a 5, as formulações comportaram-se de forma semelhante, sendo que a formulação gr(4) forneceu erros percentuais ligeiramente maiores do que a Dupla Reciprocidade, que por sua vez foi superada pela formulação gr(5).

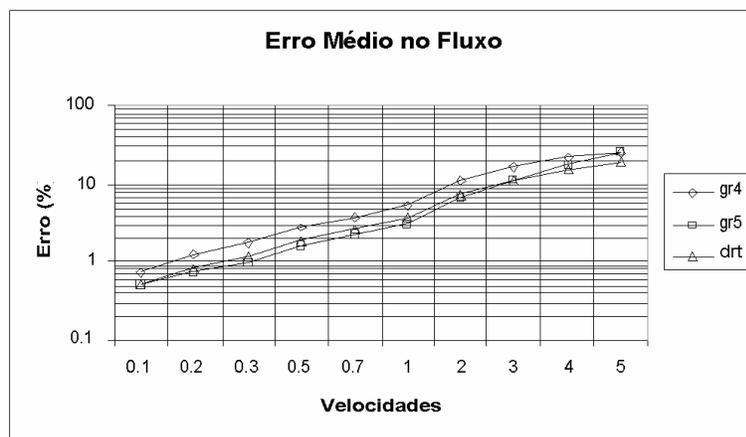


Figura 4.9: Erro (%) Médio no Fluxo com o Aumento de Velocidade

Percebe-se com os gráficos abaixo que as novas formulações superam a Dupla Reciprocidade Tradicional para os valores de temperatura com velocidades menores que ou iguais a 5, sendo que os erros médios percentuais ficaram próximos entre si.

Para valores maiores de velocidade, a formulação gr(4) mostrou-se notavelmente mais eficiente do que as outras duas, com a formulação gr(5) apresentando comportamento bem próximo ao da Dupla Reciprocidade Tradicional.

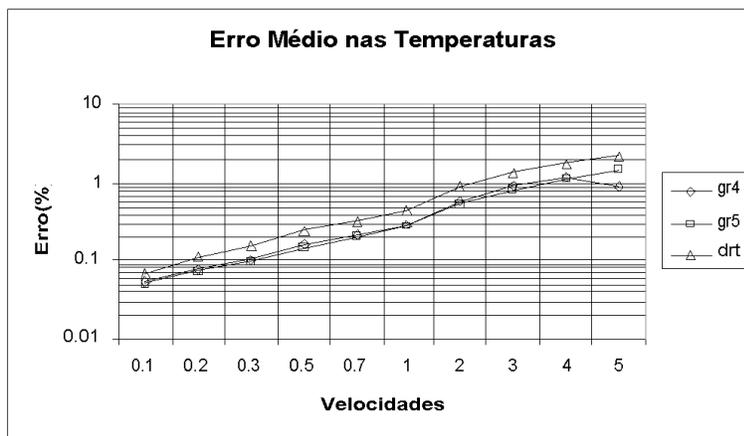


Figura 4.10: Erro (%) Médio na Temperatura com o Aumento de Velocidades (I)

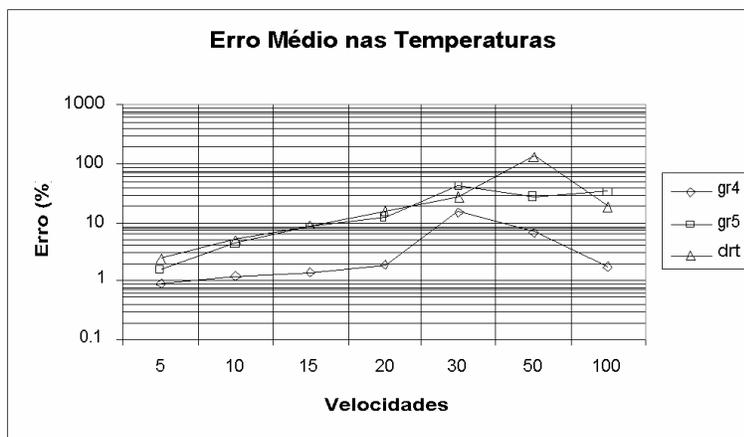


Figura 4.11: Erro (%) Médio na Temperatura com o Aumento de Velocidades (II)

Capítulo 5

Considerações Finais

O estudo da convergência dos métodos computacionais mais conhecidos passa atualmente por um tratamento matemático formal suficientemente profundo. No caso do Método dos Elementos Finitos, por ser uma técnica mais difundida, tais estudos estão bastante avançados e novas formulações tem sido propostas segundo orientações eminentemente matemáticas para abordagem de problemas não pertinentes à área de Mecânica Estrutural, na qual o método sempre foi bastante popular.

No caso do Método dos Elementos de Contorno, o esforço neste sentido é bem mais reduzido. Especificamente no que se refere à aplicação de formulação da Dupla-Reciprocidade, análises de cunho mais matemático podem ser encontradas em Chen, Power, Bowman e Yamada, entre poucos outros.

No caso da Quase-Dupla Reciprocidade, podem-se citar fatores que comprometem uma análise matemática mais profunda acerca da convergência de tal método:

- Interpolação de um campo vetorial ao invés de um campo escalar como ocorre na DRT;
- O uso de funções radiais é um ramo ainda recente da Teoria da Aproximação.

O Método dos Elementos de Contorno, no que tange particularmente às formulações integrais que usam interpolação adicional, podem ganhar significativo avanço caso critérios de convergência sejam encontrados para essas formulações alternativas. Em princípio

os trabalhos matemáticos citados tão somente informam a existência de um conjunto gerador de funções radiais que representam o campo a ser interpolado, enquanto outros demonstram a convergência da formulação caso seja escolhida uma determinada função radial[17].

Na ausência de um critério específico para esse fim, o presente trabalho mostra alguns resultados obtidos com algumas funções que satisfazem a propriedade (4.11) usando como instrumento de pesquisa a simulação computacional, de maneira a verificar a convergência da formulação de modo experimental.

O uso da função $\rho_{pi}^j = \delta_{pi}^j$ forneceu resultados muito próximos daqueles obtidos com a Quase-Dupla Reciprocidade Tradicional. O que sugere que a adição de funções características ou teor constantes não afetam de forma significativa os resultados.

Diante dessa situação a função generalizada (4.17) apresentou grande mobilidade, visto que, a alteração de um fator de controle gerava novas funções de interpolação do campo. Isso permitiu uma análise mais profunda acerca dos possíveis graus das mesmas. Além do mais, verificou-se numericamente que o uso de funções linearmente independentes forneceu melhor representatividade do campo a ser interpolado. Como consequência natural, a convergência da formulação melhorou para os casos problemáticos anteriormente identificados. Porém, deve-se observar que as novas interpolações não repetiram os excelentes resultados obtidos com a Quase-Dupla Reciprocidade Tradicional no trabalho de Loeffler e Mansur [24].

A menos que haja alguma alternativa que evite a aproximação, a Quase-Dupla Reciprocidade, bem como a Dupla-Reciprocidade Tradicional, ainda dependem de uma pesquisa matemática mais profunda no que se refere à aproximação presente na equação (3.29) visto que a presente dissertação não conseguiu esgotar o assunto.

Dado o caráter recente da Quase-Dupla Reciprocidade, bem como os avanços produzidos para a Dupla-Reciprocidade, nota-se que ainda há muito a explorar. E o progresso das pesquisas nesse campo dependem de conteúdos matemáticos que podem ser identificados tanto através de análises matemáticas mais formais provindas da Análise Funcional,

quanto das originadas de simulações computacionais, nas quais aspectos físicos sugerem as modificações a serem efetivadas. Nestas particularidades, o esforço de engenheiros e matemáticos pode se conjugar e contribuir de forma decisiva para o progresso das pesquisas nessa área.

O presente trabalho indica que há uma linha divisória entre o ‘matematicamente suficiente’ e o ‘numericamente eficiente’. Procurar definir rigorosamente os limites entre tais idéias trará frutos valiosos para o pleno desenvolvimento dos Métodos Numéricos, em especial ao Método dos Elementos de Contorno.

Referências Bibliográficas

- [1] BREBBIA C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, UK (1978).
- [2] BREBBIA C.A., NARDINI D., *Dynamic Analysis in Solid Mechanics by an Alternative Boundary Element Procedure*, International Journal Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol II, 228-233 (1983).
- [3] BREBBIA C.A., TELLES J.C.F., WROBEL L.C., *Boundary Element Techniques Theory And Applications in Engineering*, Springer-Verlag, New York (1984).
- [4] BREBBIA C.A., WALKER S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, U.K. (1980).
- [5] BUTKOV E., *Mathematical Physics*, Addison Wesley, Massachussets, (1973).
- [6] COURANT R., HILBERT D., *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, New York, (1953).
- [7] DAN M.L., *Duas Novas Formulações do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Advectivos-Difusivos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Depto de Engenharia Mecânica (2004).
- [8] DAN M.L., LOEFFLER C.F., *Comparação entre Duas Técnicas do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade para Problemas de Difusão-Advecção em Escoamentos Potenciais*, Anais do VI CIBEM, Lisboa (2003).
- [9] DOMINGUEZ J., ALARCÒN E., *Elastodynamics - Progress in Boundary Element Methods*, Vol. I, Pentech Press, London (1981).

- [10] GOLBERG M.A., CHEN C.S., BOWMAN H., POWER H., *Some comments on the use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method*, Computational Mechanics 21, Springer-Verlag (1998)
- [11] GOLBERG M.A., CHEN C.S., BOWMAN H., *Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol 23, pg 285-296 (1999)
- [12] HILDEBRAND F.B., *Methods of Applied Mathematics*, Dover Publications, New York (1965).
- [13] HURTY W.C., RUBINSTEIN M.F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, New Jersey, (1964).
- [14] JARDIM A.C., LOEFFLER C.F., *Uma Nova Técnica de Interpolação de Ações de Domínio na Técnica da Quase-Dupla Reciprocidade*, CNMAC - São Paulo (2005)
- [15] JARDIM A.C., LOEFFLER C.F., *Proposição de Uma Função Auxiliar Completa na Formulação Quase-Dual do Método dos Elementos de Contorno*, SIMMEC - Araxá/MG (2006)
- [16] KREISZIG E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York (1968).
- [17] YAMADA T., WROBEL L.C., POWER H., *On The Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 13, pp 291-298 (1994)
- [18] LIU, I.-S, RINCON, M. A., *Introdução ao Método de Elementos Finitos: Análise e Aplicação*, IM-UFRJ (2001)
- [19] LOEFFLER C.F., *Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar*, Tese de Doutorado - UFRJ (1988).
- [20] LOEFFLER C.F., MANSUR W.J., *Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems*, Boundary Element

- Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer. Computational Mechanics Publishing, UK, pp 105-124 (1987).
- [21] LOEFFLER C.F., MANSUR W.J., *Uma Nova Abordagem com o Método dos Elementos de Contorno para Solução de Problemas com Cargas de Domínio*, Anais do VIII Congresso Latino Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Vol B, pg 347-362, Rio de Janeiro (1987).
- [22] LOEFFLER C.F., MANSUR W.J., *Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Potential Problems in Infinite Domains*, Boundary Elements X, vol 2, Computational Mechanics Publications and Springer Verlag (1990).
- [23] LOEFFLER C.F., MASSARO C.A.M., JARDIM A.C., *A New Technique to Improve Completeness Conditions in Quasi Dual Boundary Element Formulation*, COBEM - Ouro Preto (2005).
- [24] LOEFFLER C.F., MANSUR W.J., *Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 58, Issue 8, pag 1167-1186, John Wiley and Sons, New York (2003).
- [25] LOEFFLER C.F., PEREIRA R.D., *Aplicação da Técnica da Quase Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno aos Meios Contínuos não-Homogêneos*, XXV CILAMCE - Recife (2004).
- [26] LOEFFLER C.F., PEREIRA R.D., *O Método dos Elementos de Contorno com Quase-Dupla Reciprocidade Aplicada aos Meios Contínuos não-Homogêneos*, SIMMEC - Itajubá (2004).
- [27] MANSUR W.J., *Time Stepping Technique to Solve Transient Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*, PhD. Thesis, University of Southampton (1983).

- [28] MASSARO C.A.M., *O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos*, Dissertação de Mestrado, PPGEM-UFES (2001).
- [29] MASSARO C.A.M., LOEFFLER C.F., *Boundary Element Formulation Applied to Solution of Convective-Diffusive Heat Transfer Problems*, COBEM - Uberlândia (2001).
- [30] MENZEL D.H., *Mathematical Physics*, Dover Publ. (1961).
- [31] NARDINI D., BREBBIA C.A., *A New Approach to free Vibration Analysis using Boundary Elements*, Proceeding of the Fourth International Seminar - Boundary Element Methods in Engineering, Southampton (1982).
- [32] PARTIDGE P.W., *Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method*, 1st Brazilian Seminar on the Boundary Element Method in Engineering (1991)
- [33] PARTRIDGE P.W., *Towards Criteria for Selecting approximation functions in the Dual Reciprocity Method*, Engineering Analysis with Boundary Elements (24), pg 519-529, (2000).
- [34] PARTRIDGE P.W., BREBBIA C.A., WROBEL L.C., *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, London (1992).
- [35] POINCARÉ H., *O Valor da Ciência*. Trad. Maria Helena Franco Martins - Rio de Janeiro - Contraponto Editora, (1995).
- [36] SAGAN H., *Boundary and Eigenvalue problems in Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, New York, (1963).
- [37] SANTOLIN W.D., LOEFFLER C.F., *Análise Dinâmica de Problemas Escalares não-Homogêneos Através do Método dos Elementos de Contorno*, Anais do XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC, São Paulo (2005).
- [38] SHAMES I.H., *Mecânica dos Fluidos*, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1993).

-
- [39] SNEDDON I., *Elements of Partial Differential Equations*, Mc-Graw-Hill International Editions, Singapore (1957).
- [40] SOUZA, J.M., *Cálculo Numérico de Estruturas*, Edições Loyola, São Paulo, (1981).
- [41] STEPHENSON G., *Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1975).
- [42] VALCHAROVA J., *Application of the Boundary Element Method in Heat Conduction Problems*, Boundary Element Methods VII , Springer Verlag, berlin, (1985).
- [43] WROBEL L.C., *Potential and Viscous Flow Problem Using the Boundary Element Method*, PhD. Thesis, University of Southampton (1981).
- [44] WROBEL L.C., BREBBIA C.A., NARDINI D., *The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Tansient Heat Conduction*, VI International Conference on Finite Elements in Water Resources, Lisboa (1986).