Ademir Sartim

MATEMÁTICA BÁSICA

VOLUME 1

EDUFES

Série Didáticos, 3

Ademir Sartim

MATEMÁTICA BÁSICA

VOLUME 1

EDUFES

Vitória, 2021

UFES
Universidade Federal
do Espírito Santo

Reitor
Paulo Sergio de Paula Vargas

Vice-reitor
Roney Pignaton da Silva

Chefe de Gabinete
Cláudia Patrocinio Pedroza Canal

EDUFES
EDITORA

Editora Universitária – Edufes

Filiada à Associação Brasileira
das Editoras Universitárias (Abeu)

Av. Fernando Ferrari, 514
Campus de Goiabeiras
Vitória – ES · Brasil
CEP 29075-910

+55 (27) 4009-7852
edufes@ufes.br
www.edufes.ufes.br

Preparação e revisão de texto
Fernanda Scopel, George Vianna

Projeto gráfico e capa
Laboratório de Design Instrucional - SEAD/UFES

Diagramação
Ana Elisa Poubel

Revisão final
O autor, George Vianna, Jussara Rodrigues

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S249m Sartim, Ademir.
Matemática básica [recurso eletrônico] : volume 1 / Ademir Sartim. - Dados eletrônicos. – Vitória, ES : EDUFES, 2021.
204 p. : il. – (Didáticos ; 3)

Inclui bibliografia.
ISBN: 978-65-88077-48-1
Também publicado em formato impresso.
Modo de acesso: http://repositorio.ufes.br/handle/10/774

1. Matemática – Estudo e ensino. I. Título. II. Série.

CDU: 51

Elaborado por Maria Giovana Soares – CRB-6 ES-000605/O

Esta obra foi composta com as famílias tipográficas Times New Roman e Roboto.

Para Rafael, Marco Aurélio e Thaisa.

APRESENTAÇÃO

Este livro originou-se da disciplina Matemática Básica, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), a partir de 1994. Ele contém uma fundamentação geométrica informal dos principais conceitos da matemática básica: números e funções.

Não é intenção apresentar a axiomatização dos números, muito menos abstrações do conceito de função, mas, sim, expor um modo didático de ver a matemática com um rigor maior que o da forma como ela é apresentada nos textos do ensino médio.

Acredito que, com essa fundamentação, podemos fazer uma ponte entre a matemática do ensino médio e a do superior, tornando mais suave o impacto que os estudantes sentem ao iniciarem a graduação.

Portanto, estas notas têm como um dos objetivos fazer o elo entre o ensino médio e o ensino superior, por meio da fundamentação dos conceitos e propriedades básicas dos números e das principais funções elementares, necessários para a compreensão do cálculo diferencial e integral. Além disso, a matemática básica estudada através da conceituação será útil também em toda atividade intelectual que tem a matemática como modelo.

Em resumo, este livro apresenta o essencial de matemática para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável.

AO ESTUDANTE

O conteúdo de ***Matemática básica*** foi escrito para um curso de noventa horas-aula, sendo distribuídas trinta horas para cada volume. Para a compreensão dos assuntos abordados, não é necessário que o estudante tenha conhecimento da matemática do ensino médio, pois esta obra é autossuficiente. No entanto, pela quantidade de temas abordados, é um curso mais rápido do que normalmente é feito na educação básica.

Os temas aqui expostos são apenas as partes da matemática do ensino médio extremamente necessárias para uma boa compreensão do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável real. Porém este livro não é uma simples revisão rápida de assuntos do ensino médio, mas, sim, uma exposição mais criteriosa dos temas tratados, acrescentada das justificativas necessárias para a verdadeira compreensão da matemática.

O volume 1 trata dos conjuntos numéricos, com o objetivo de apresentar o conjunto dos números reais de um ponto de vista geométrico. Na sequência, temos o estudo das funções reais, suas propriedades, gráficos e suas inversas.

O volume 2 tem como objeto as funções trigonométricas. Iniciamos com a trigonometria no triângulo e na circunferência. Apresentamos as equações trigonométricas principais e, finalmente, as funções trigonométricas e suas inversas.

O volume 3 apresenta os números complexos, operações, propriedades e alguns exemplos de funções complexas, sempre com foco nas suas representações geométricas. Continua com uma introdução ao estudo dos polinômios definidos no conjunto dos números complexos e encerra com as equações algébricas.

Os exercícios propostos ao fim das seções são suficientes para a fixação do conteúdo. Para manter o texto enxuto, não há muitos exercícios de repetição de técnicas de resolução. O estudante que necessitar de mais exercícios repetitivos deve consultar as Referências no final de cada volume.

Ainda para aumentar o elenco de exercícios e problemas de dificuldade mediana, foram acrescentadas, no final de cada volume, as questões das provas da disciplina Matemática Básica I, ministrada pelo autor no curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em anos anteriores. Também estão, ao fim, as respostas e sugestões dos exercícios propostos.

Recomendamos ao estudante que se esforce ao máximo para resolver as questões escolhidas antes de consultar a resposta/sugestão, porque um exercício ou problema resolvido por conta própria tem um valor extraordinário para o desenvolvimento do raciocínio individual. Vale mais resolver sozinho um único exercício/problema que olhar centenas deles prontos.

SUMÁRIO

PARTE I - NÚMEROS

1 Números naturais 17

1.1 Histórico 17
1.2 O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e a ordem em $\mathbb{N}$ 20
1.3 Números primos 21
1.4 Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética) 21
1.5 Teorema 2 22

2 Números inteiros 25

2.1 O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números Inteiros........ 25
2.2 Operações em $\mathbb{Z}$ 26
2.3 Exercícios 28

3 Números racionais e números irracionais 29

3.1 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais 29
3.2 Operações em $\mathbb{Q}$ 30
3.3 Representação decimal de um número racional........ 31
3.4 Segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis 36
3.5 A irracionalidade de $\sqrt{3}$ 39

4 Números reais 41

4.1 Números reais e a reta real 41
4.2 Interpretações geométricas para a ordem, a soma e o produto em $\mathbb{R}$ 43
4.3 Igualdades e desigualdades em $\mathbb{R}$ 48
4.4 Intervalos 50
4.5 Valor absoluto 51
4.6 Exercícios 54
4.7 Exercícios complementares 57

PARTE II - FUNÇÕES

5 Funções 61

5.1 O conceito de função 61
5.2 Gráfico de uma função 62
5.3 O plano cartesiano 63
5.4 Distância entre dois pontos do plano 64
5.5 Estabelecendo o domínio 68

6 Função afim 69

6.1 Zeros da função afim 74
6.2 Crescimento e decrescimento 75
6.3 Estudo do sinal da função afim 77
6.4 Exercícios 80

7 Função quadrática 83

7.1 Casos particulares 83
7.2 Forma geral (trinômio do 2º grau) 96
7.3 Zeros da função quadrática 97
7.4 Forma fatorada 100
7.5 Sinal da função quadrática 101
7.6 Máximos e mínimos 102
7.7 Problemas de máximos ou mínimos 104
7.8 Exercícios........ 107

8 Estudo básico de funções 111

8.1 Operações com funções 111
8.2 Função par e função ímpar 112
8.3 Reflexão 117
8.4 Translação 118
8.5 Contração e expansão 120
8.6 Outras funções essenciais 126
8.7 Função composta 144
8.8 Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras 150
8.9 Função inversa e gráfico 151
8.10 Exercícios 157
8.11 Exercícios complementares 160

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS.. 167

COLEÇÃO DAS PRIMEIRAS PROVAS DO PROCESSO SELETIVO ESTENDIDO PARA O CURSO DE MATEMÁTICA DA UFES DE 1998 A 2012 173

1. Primeiras provas de Matemática Básica I 173
2. Respostas das questões das primeiras provas... 191

REFERÊNCIAS 203

I

NÚMEROS

1

NÚMEROS NATURAIS

1.1 Histórico

Qualquer que seja a atividade da vida moderna, de alguma forma, faz uso dos números. Os números estão presentes desde uma simples ideia da hora do dia até um complexo cálculo de correção da trajetória de uma nave espacial. Observe no dia a dia: o relógio, o telefone, o extrato de uma conta bancária, os preços num supermercado, as estatísticas nas páginas de um jornal, o número da linha do ônibus, o troco da passagem, o volume da garrafa de refrigerante etc. Todos eles estão relacionados com os números.

Historicamente, os números provêm das atividades de contagens e medições. A necessidade do aperfeiçoamento dessas atividades é que trouxe o desenvolvimento no estudo dos números.

Muitos animais possuem um "senso numérico". Isso não quer dizer que eles sabem contar, mas sim que eles tem uma noção de pequenas quantidades. Por exemplo, alguns pássaros têm o domínio da quantidade de seus ovos, até três ou quatro no máximo.

Se observarmos uma criança antes de aprender a contar (por volta de 1 ano de idade), vemos que ela tem a noção de pequenas quantidades, tanto para mais quanto para menos. Experimente dando-lhe três ou quatro bombons, ou brinquedos de que ela goste. Num momento de distração de sua atenção, retire um bombom e verá que ela procurará por ele ao seu redor.

O homem aprendeu a contar, mas essa evolução foi lenta. Usou como instrumentos de contagem os dedos das mãos (*digitus*, em latim), pequenas pedras (*calculus*) e marcas em ossos ou madeira para fazer associação com o quantitativo de objetos e animais que possuía. Hoje, esse processo é denominado de *correspondência biunívoca* entre elementos de dois conjuntos. Quem já não ouviu dizer: "Para cada ovelha, uma pedrinha"?

Os números um, dois, três, quatro, e assim por diante, surgem naturalmente para representar quantidades. Os símbolos 1, 2, 3, 4, ..., *n*..., utilizados para representar os números naturais, são resultado de um processo evolutivo de numeração, em que se usam dez algarismos num “sistema de numeração posicional” para representar qualquer número natural e, consequentemente, fazer cálculos. Nesse sistema de numeração, os algarismos têm valor pela posição que ocupam. Por exemplo, no símbolo 235, o algarismo 2 vale duzentos, o algarismo 3 vale trinta e o 5 vale cinco. Com os mesmos algarismos 2, 3 e 5, variando as suas posições, podemos representar diferentes números, como 325, 352, 523, etc.

Historicamente, quem primeiro usou um sistema de numeração baseado no princípio da posição dos símbolos foram os povos da Mesopotâmia (2000 a.C.). Os sábios babilônicos criaram um sistema de numeração que usava posicionamento com agrupamento na base dez ou sessenta. Para números menores do que sessenta, usavam a base dez; para maiores ou iguais, usavam a base sessenta. Também usaram o princípio da posição em seus sistemas de numeração os chineses (século I a.C.) e os sacerdotes-astrônomos da civilização maia (século IV d.C.).

Os egípcios e os gregos não usavam sistema posicional. Os egípcios usavam um sistema de numeração por agrupamento simples com base dez. Assim, por exemplo, por volta do ano de 2500 a.C., para representar o número dois mil duzentos e trinta e cinco, os egípcios escreviam:

Para representar o número 966, eles escreviam: 

No sistema sexagesimal cuneiforme dos sumérios (2500 a.C.), o número cento e quatorze era escrito assim:

Os babilônios (2000 a.C.) não usavam símbolos para o zero, mas cada casa vazia (espaço entre agrupamento) representava uma potência de 60.

Assim,  poderia ser uma representação de $4x60+5x1=245$ ou $4x60^2+5x1=14.405$.

Os gregos usaram vários sistemas de numeração. No ano 600 a.C., eles usavam **I** para o um, **Γ** para o cinco, **Δ** para o dez, **H** para o cem, **X** para o mil e **M** para dez mil. Assim, **ΓΔ** representa 50, **ΓH** era 500 e **MΓH ΔΓII** era 10.517.

Outro sistema de numeração usado pelos gregos, chamado sistema jônico, entrou em vigor por volta do ano 200 a.C. O sistema jônico era aditivo, de base dez e empregava 27 letras (sendo 24 do alfabeto grego e mais 3 do fenício): α, β, γ, δ, ε,... Para denotar números grandes, eles usavam alguns recursos, como /β, que denotava o número 2.000, $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ para 20.000, entre outros.

Os números romanos, por volta de 500 a.C., eram I, V, X, L, C, D, M, etc. Por exemplo, o número 1.952 era representado por MDCCCCLII.

O zero pode ser incluído no conjunto dos números naturais, mas, nesse caso, tomada essa decisão, ele deve ser usado todas as vezes que se referir aos naturais. Na verdade, o zero não nasceu da necessidade de contagem propriamente dita, e sim para facilitar a escrita dos números. Veja que, nesse sistema de numeração decimal de posicionamento dos algarismos, o zero tem um papel importantíssimo na representação numérica e nos cálculos. Ex.: 2010, 2001, etc.

Embora as noções do vazio, do nada, do nulo ou do zero tenham sido creditadas à cultura indiana antiga, outros povos, como os babilônios, na Mesopotâmia, e os maias, nas Américas, usaram diversas representações gráficas para o nulo. No entanto, o símbolo “0” foi criado pelos hindus já na Era Cristã (300-500 d.C.) para representar o zero.

Dessa forma, os matemáticos hindus criaram um sistema de numeração posicional na base dez com os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Esse sistema foi de suma importância para o desenvolvimento da aritmética, pela sua simplicidade, eficácia sem igual, elegância e facilidade que ofereceram para a prática de todas as operações da aritmética.

Por volta do século VIII da Era Cristã, os árabes conheceram e usaram o sistema de numeração dos hindus, aperfeiçoando apenas a grafia dos algarismos. Esse sistema tornou-se conhecido na Europa através da literatura árabe e recebeu o nome de sistema de numeração indo-arábico. Os dez símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 são chamados de algarismos indo-arábicos.

O nome algarismo, adotado hoje para os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0, origina-se do sobrenome **al-Khowarizmi**. *Abu Ja'far Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi* foi um matemático, astrônomo e geógrafo árabe do século IX, que muito contribuiu para a divulgação do sistema de numeração dos hindus através de suas obras matemáticas, que foram traduzidas para o latim e difundidas na Europa.

Diversos povos tiveram seus sistemas de escrita para representar os números e calcular. No entanto, o mundo moderno adotou o indo-arábico por ser um sistema inteligente, racional e de fácil operacionalização.

1.2 O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e a ordem em $\mathbb{N}$

Os números naturais 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1,... formam uma sucessão infinita, na qual dizemos que o 2 é o sucessor do 1, o 3 é o sucessor do 2, e assim por diante. Dessa forma, o $n+1$ é o sucessor de n.

Na sucessão de números naturais, se um número m precede um número n, dizemos que m é menor do que n, e escrevemos $m < n$; ou, equivalentemente, que n é maior do que m. Isto é: $m < n \Leftrightarrow n > m$.

O conjunto de todos os números naturais é denotado por:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...,n,...\}$

Observe que não vamos adotar o zero para o conjunto $\mathbb{N}$.

Um conjunto numérico é fechado em relação a uma operação se a operação com dois quaisquer elementos desse conjunto resulta num elemento desse mesmo conjunto. Nesse caso, também dizemos que o conjunto possui a propriedade do fechamento em relação àquela operação. O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação às operações de adição e multiplicação.

Quando multiplicamos o número natural m por um número natural n, dizemos que o produto $m.n$ é um múltiplo de n e de m. Portanto, um número natural a é um múltiplo do número natural m se $a = m.n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, dizemos que m e n são divisores de a, ou que m e n dividem a.

1.3 Números primos

Um número primo é um número natural maior do que 1, cujos únicos divisores são o 1 e ele próprio.

Os primeiros números primos em ordem crescente são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47...

O número 12, por exemplo, não é primo, pois possui divisores diferentes de 1 e de 12. Os números 2, 3, 4 e 6 são divisores de 12. Observe que ele pode ser escrito como um produto de dois ou mais divisores:

12 = 2.6 = 3.4 = 2.2.3

Outro exemplo: 30 = 2 x 15 = 2 x 3 x 5

Observe também que tanto 12 como 30 podem ser decompostos em produtos cujos fatores são números primos. Pode-se perguntar: quais números naturais podem ser decompostos em produtos cujos fatores são números primos? A resposta está no Teorema Fundamental da Aritmética, que anunciamos a seguir.

1.4 Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética)[1]

Todo número natural n maior do que 1, não primo, pode ser decomposto como produto de números primos. Essa decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.

DEMONSTRAÇÃO[2]:

Vamos esboçar uma demonstração pelo método indireto.

Suponhamos que existam números naturais maiores do que 1, não primos e que não podem ser decompostos em fatores primos. Chamamos de M o subconjunto dos naturais formado por esses números. Seja m o menor elemento do conjunto M. Como m não é primo, ele possui divisores, isto é: $m = p.q$, em que $p, q \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $q > 1$, $p < m$ e $q < m$.

Como $p < m$, então $p \notin M$. Analogamente, $q \notin M$. Portanto, p e q são primos ou produtos de primos. Assim, p é primo ou $p = p_1.p_2.\ldots.p_s$, e q é primo ou $q = q_1.q_2.\ldots.q_r$.

[1] Teorema é uma relevante afirmação matemática que pode ser provada/demonstrada.

[2] Demonstrar é convencer, é fazer ver, é provar, usando argumentos lógicos e fatos matemáticos sabidos serem verídicos, que a afirmação proposta é verdadeira.

Portanto, $m = p.q$ ou

$$m = p.q_1.q_2.\dots.q_r \text{ ou}$$
$$m = p_1.p_2.\dots.p_s.q \text{ ou}$$
$$m = p_1.p_2.\dots.p_s.q_1.q_2.\dots.q_r$$

Em qualquer caso, m é um produto de números primos, o que implica que $m \notin M$, isto é, M é um conjunto vazio. Assim, concluímos que um número natural $n > 1$ ou é primo ou é escrito como produto de números primos.

Devemos agora provar a unicidade. Para isso, usaremos o fato: *sendo a e b números naturais, e p número primo, se p é divisor do produto ab, então p é divisor de a ou p é divisor de b.*

Suponhamos que exista um número natural n com duas decomposições em fatores primos: $n = p_1.p_2.\dots.p_r$ e $n = q_1.q_2.\dots.q_s$.

Observe que p_1 é um divisor de $p_1.p_2.\dots.p_r = n = q_1.q_2.\dots.q_s$. Logo, p_1 é um divisor de q_1 ou de $q_2.\dots.q_s$.

Se p_1 divide q_1, como p_1 e q_1 são primos, temos $p_1 = q_1$.

Se p_1 divide $q_2.\dots.q_s$, então p_1 divide algum dos fatores $q_2, q_3, \dots, q_s$, digamos q_j, e como p_1 e q_j são números primos, temos $p_1 = q_j$. Nesse caso, faríamos uma reordenação (propriedade comutativa) e colocaríamos o q_j como o primeiro dos fatores na decomposição $q_1.q_2.\dots.q_s$; teríamos $p_1 = q_1$.

Dividindo as duas decomposições por $p_1 = q_1$, temos $p_2.p_3.\dots.p_r = q_2.q_3.\dots.q_s$. Prosseguindo por indução, podemos concluir, depois de conveniente reordenação dos primos $q_1, q_2, \dots, q_s$, que $r = s$ e $p_1 = q_1$; $p_2 = q_2$; $p_3 = q_3$; ....; $p_r = q_r$, concluindo assim a prova da unicidade da decomposição em fatores primos.

Quantos números primos existem?

1.5 Teorema 2

Existem infinitos números primos.

A prova que usaremos aqui é chamada demonstração indireta, também conhecida como demonstração por contradição, ou, ainda, por redução ao absurdo. Usando a linguagem matemática de nossos dias, apresentamos a seguir uma adaptação da demonstração dada por Euclides (300 a.C.).

Suponhamos que exista apenas um número finito de números primos e sejam $p_1, p_2, \dots, p_k$ todos os números primos, sem exceção.

Construímos o número natural $n = p_1 . p_2 ._{...} . p_k + 1$. Observe que n foi construído multiplicando-se todos os números primos e somando 1 ao resultado.

Como $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, temos, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, duas alternativas:

1ª) n é primo; ou

2ª) n é um produto de números primos.

Se ocorrer a 1ª alternativa, teremos n um número primo diferente de $p_1, p_2,_{...}, p_k$, por ser maior que todos eles. Logo, uma contradição.

Se ocorrer a 2ª alternativa, teremos n escrito como um produto de primos. Logo, n seria divisível por algum dos números primos $p_1, p_2, ..., p_k$. No entanto, isso não ocorre, pois na divisão de n por p_j sobra resto 1, qualquer que seja o primo p_j, $j = 1, 2, ..., k$. Logo, uma contradição.

Portanto, o fato de admitirmos a existência de um número finito de primos nos leva a uma contradição. Assim se conclui que há infinitos números primos.

Exemplos

Responda as questões abaixo, justificando sua resposta:

1. O conjunto P das potências de 2, isto é, $\mathrm{P} = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ...\}$, é fechado em relação à multiplicação?

2. O conjunto P das potências de 2 é fechado em relação à adição?

3. Se 7 for um divisor de dois números naturais, então ele será divisor da soma desses números?

4. Se d for um divisor de a e de b, então d será um divisor de $a + b$ e de $a - b$?

5. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é fechado em relação à subtração?

Respostas:

1. Sim. Mas para justificar a resposta teríamos que efetuar todas as possíveis multiplicações entre dois elementos de P e verificar se o produto é ainda uma potência de 2, isto é, se pertence ao conjunto P.

Exemplo:

$2^1 \mathrm{x} 2^2 = 2^3 \in \mathrm{P}$

$2^1 \mathrm{x} 2^3 = 2^4 \in \mathrm{P}$, e assim por diante.

No entanto, não é possível completar o experimento, uma vez que há uma infinidade de potências a serem testadas para verificarmos a veracidade da propriedade em apreço.

Para contornarmos essa missão aparentemente impossível, escrevemos as potências de 2 de maneira genérica, isto é, de maneira que elas representem todos os elementos de P, e então fazemos o teste dessa propriedade para duas potências genéricas. A isso chamamos de *demonstração em matemática*. Vejamos:

"Um elemento de P é sempre da forma 2^n com $n \in \mathbb{N}$, logo, P $= \left\{2^n; n \in \mathbb{N}\right\}$. Quaisquer que sejam dois elementos de P, $2^m e\ 2^n$, com *m, n* $\in \mathbb{N}$, então o produto $2^m.2^n = 2^{m+n}$ é um elemento de P, pois $m + n \in \mathbb{N}$. Portanto, P é fechado em relação à multiplicação. Em outras palavras, P tem a propriedade do fechamento em relação à multiplicação".

2. Não. Para justificar essa resposta negativa, basta exibir um único exemplo de dois elementos de P que não possuem a propriedade de a sua soma pertencer a P.

Vejamos: 2^1 e $2^2 \in \text{P}$, mas $2^1 + 2^2 = 6 \notin \text{P}$

Isso é uma demonstração de que o conjunto P não é fechado em relação à adição, pois vimos um exemplo que nega a propriedade.

3. Sim.

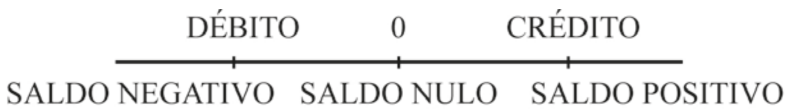
DEMONSTRAÇÃO:

Sendo 7 um divisor de *a* e também um divisor de *b*, devemos provar que 7 é divisor de *a* + *b*. Como 7 é divisor de *a* e de *b*, então *a* = 7 .*m* , com $m \in \mathbb{N}$, e *b* = 7.*n* , com $n \in \mathbb{N}$ (isto é, *a* e *b* são múltiplos de 7). Logo, *a* + *b* = 7*m* + 7*n* = 7(*m* + *n*), e, como $m + n \in \mathbb{N}$, então (*a* + *b*) é um múltiplo de 7. Portanto, 7 é um divisor de (*a* + *b*). Isso conclui a demonstração.

2

NÚMEROS INTEIROS

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é fechado em relação à subtração. Sendo *m* e *n* números naturais, a diferença $m - n$ é um número natural somente quando *m* é maior do que *n* ($m > n$). Mas em determinadas situações concretas, como cálculos envolvendo créditos e débitos, escalas de temperatura etc., há necessidade de se subtrair números maiores de números menores, como é o caso de saldo bancário. Nesse caso, encontramos um débito, também conhecido por saldo "negativo", que é representado por um número acrescido de um sinal "-".

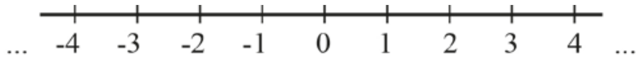


2.1 O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros

O conjunto formado por todas as diferenças entre números naturais na forma acima é conhecido como conjunto dos números inteiros. É representado por $\mathbb{Z} = \{0, 1, \text{-}1, 2, \text{-}2, 3, \text{-}3, 4, \text{-}4, ...\}$, cujos elementos são todos os números naturais, mais o zero e os naturais acrescidos do sinal "**-**", denominados inteiros negativos.

No conjunto $\mathbb{Z}$, os números naturais são também denominados de inteiros positivos.

Uma representação de $\mathbb{Z}$ numa reta é dada por:



A representação acima também é chamada de orientação ou ordem em $\mathbb{Z}$, em que qualquer elemento à esquerda é menor do que o elemento à sua direita, tendo o zero como o ponto de origem ou referência.

Em símbolos: ... < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < ...

Observação 1: o símbolo $\mathbb{Z}$, que denota o conjunto dos números inteiros, é inspirado na palavra *Zahl*, da língua alemã, que significa *número*.

Observação 2: os números naturais quando considerados elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser representados com o sinal "+", desta forma: +1, +2, +3, +4, ...

Ao serem definidas as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$, deseja-se que estas sejam coincidentes com a adição e a multiplicação já estabelecidas para os números naturais, quando se tratar dessas operações com os números naturais $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Mais ainda, deseja-se que em $\mathbb{Z}$ sejam válidas as propriedades do fechamento e o máximo possível das propriedades operatórias (comutativa, associativa, distributiva), além da existência dos elementos neutro e simétrico.

2.2 Operações em $\mathbb{Z}$

ADIÇÃO em $\mathbb{Z}$ (analogia com o sistema crédito-débito)

1. Para números inteiros positivos, é a mesma soma de números naturais.

Ex.: (+2) + (+3) = +5 (soma de dois créditos)

2. Para números inteiros negativos, é a soma de naturais acrescidos do sinal "-".

Ex.: (-2) + (-3) = -5 (soma de dois débitos)

3. Para adicionar inteiros positivos com negativos, faz-se a diferença entre eles e mantém-se o sinal do maior.

Ex.: (-2) + (+5) = +3 (débito com crédito)

(-5) + (+2) = -3

MULTIPLICAÇÃO em $\mathbb{Z}$

1. Multiplicar dois números inteiros positivos é o mesmo que multiplicar em $\mathbb{N}$, e, como $\mathbb{N}$ é fechado em relação à multiplicação, então o produto de dois inteiros positivos é um inteiro positivo.

Ex.: (+3) x (+2) = (+2) + (+2) + (+2) = 2 + 2 + 2 = 6 = 3 x 2

4 x 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20

Logo, (+) x (+) = +

2. Ao multiplicarmos um número positivo por um número negativo, devemos ter um número negativo, pois estaremos somando várias vezes um mesmo número negativo.

Ex.: (+3) x (-2) = 3 x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6

(+4) x (-5) = 4 x (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20

Logo, (+) x (-) = -

3. Ao multiplicarmos um número negativo por um número positivo, devemos ter um número negativo, para valer a propriedade comutativa e o item 2.

Ex.: (-2) x (+3) = -6 pois, (-2) x (+3) = (+3) x (-2) = 3 x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = -6

4. Ao multiplicarmos um número negativo por outro número negativo, devemos ter como resultado um número positivo, se desejamos fazer valer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a associativa, a comutativa e a existência do elemento simétrico.

Usando a propriedade distributiva, veremos inicialmente que $a \text{ x } 0 = 0, \ \forall a \in \mathbb{Z}$.

$a + (a \text{ x } 0) = a \text{ x } 1 + a \text{ x } 0 = a \text{ x } (1 + 0) = a \text{ x } 1 = a$

Sendo $a + (a \text{ x } 0) = a$, então a x 0 só pode ser zero.

Agora temos 0 = (-1) x [(+1) + (-1)] = (-1) x (+1) + (-1) x (-1) = (-1) + [(-1) x (-1)]

Assim, (-1) + [(-1) x (-1)] = 0.

E pela existência do simétrico ($a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$), temos (-1) x (-1) = +1.

Portanto, $(-a) \text{ x } (-b) = ((-1) \text{ x } a) \text{ x } ((-1) \text{ x } b) = (-1) \text{ x } (-1) \text{ x } ab = ab$

Logo, (-) x (-) = +

Obs.: Há apenas duas possibilidades de sinais a serem adotados no produto de dois inteiros negativos: “+” ou “–”. Uma boa razão para adotarmos como definição o sinal “+” (positivo) é a necessidade de manter verdadeira a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a existência do elemento simétrico.

EXERCÍCIO: Escreva as tabuadas para -1, -2, -3, etc.

Inteiros pares e inteiros ímpares

Um número inteiro é par se for divisível por 2; caso contrário, ele se diz ímpar.

Os números inteiros pares são: ..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...; e os ímpares são: ..., -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...

Portanto, qualquer número inteiro par pode ser escrito na forma $2k$, sendo que k representa um número inteiro. Assim, o conjunto dos números pares pode ser representado por $\{2k; k \in \mathbb{Z}\}$; e o dos ímpares, por $\{2k+1; k \in \mathbb{Z}\}$.

2.3 Exercícios

Prove que:

1. O conjunto dos inteiros pares e o conjunto dos inteiros ímpares são fechados em relação à multiplicação.
2. O conjunto dos inteiros pares é fechado em relação à adição.
3. O conjunto dos inteiros ímpares não é fechado em relação à adição.
4. A soma de dois inteiros ímpares é um inteiro par.
5. A soma de um inteiro par com um inteiro ímpar é um inteiro ímpar.
6. Um número inteiro é par se e somente se o seu quadrado é par.
7. Um número inteiro é ímpar se e somente se o seu quadrado é ímpar.
8. Um número inteiro é divisível por 3 se e somente se o seu quadrado é divisível por 3.
9. Seja $p \in \mathbb{Z}$:

   Se p é par, então p^n é par, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Se p é ímpar, então p^n é ímpar, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3

NÚMEROS RACIONAIS E NÚMEROS IRRACIONAIS

3.1 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação às operações de adição e multiplicação. O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação à adição, multiplicação e subtração. No entanto, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são fechados em relação à divisão.

Aqui é entendida a divisão de a por b como sendo o número c tal que $a = b.c$ (isto é, a é múltiplo de b).

DEFINIÇÃO: $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc.$ Observe que é necessário considerar $b \neq 0$. Mesmo quando $a = 0$, devemos ter $b \neq 0$ para que a operação de divisão não seja ambígua.

Denominemos de frações as expressões (razões) da forma $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

As razões e frações surgiram muitos séculos antes da ideia de número negativo. Problemas práticos de partilhas, heranças e medições de grandezas levaram ao uso e desenvolvimento das frações.

Por exemplo, medir a quantidade de laranjas de uma cesta, com a unidade de medida *dúzia*, é saber quantas dúzias de laranjas há na cesta. Assim, se esta contém 100 laranjas, então $\frac{100}{12}$ é a quantidade de dúzias de laranjas da cesta. Portanto, $\frac{100}{12} = 8 + \frac{1}{3}$ significa que há 8 dúzias e $\frac{1}{3}$ de uma dúzia; ou equivalentemente: 100 laranjas correspondem a 8 dúzias mais 4 laranjas.

Chamamos de conjunto dos números racionais o conjunto $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n};\ m,n\in\mathbb{Z}\ \text{ e }\ n\neq 0\right\}$

Observemos que $\frac{6}{3}=2$, pois 6 = 3 x 2, mas também $\frac{8}{4}=2$, pois 8 = 4 x 2. Daí vemos que as frações $\frac{6}{3}$ e $\frac{8}{4}$ representam o mesmo número racional 2, apenas são escritas com expressões distintas.

Analogamente, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}=\frac{8}{16}=\ldots$ etc.

DEFINIÇÃO: *Duas frações* $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ $(b\neq 0\ \text{ e }\ d\neq 0)$ *que representam o mesmo número racional* r *são ditas frações equivalentes.*

Podemos escrever o conjunto $\mathbb{Q}$ sem a repetição dos mesmos elementos escritos com frações equivalentes. Assim: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q};\ p,q\in\mathbb{Z},\ \text{e}\ \ q\neq 0,\ \text{sendo } p \text{ e } q \text{ primos entre si}\right\}$.

DEFINIÇÃO: *Dois números p e q são primos entre si se p e q não têm divisores comuns, com exceção do 1.*

3.2 Operações em $\mathbb{Q}$

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, definimos a soma por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e o produto por $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Por analogia com as operações em $\mathbb{Z}$, concluímos que a subtração é definida por $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(\frac{-c}{d}\right)=\frac{ad-bc}{bd}$.

Observação: Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são duas frações equivalentes, então $\frac{a}{b}=r\ \in\mathbb{Q}$ e $\frac{c}{d}=r\in\mathbb{Q}$.

Logo, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Leftrightarrow\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=0\Leftrightarrow\frac{ad-bc}{bd}=0\Leftrightarrow ad-bc=0\Leftrightarrow ad=bc.$

Portanto, concluímos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se e somente se $ad=bc$.

Notação: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Leftrightarrow ad=bc$.

Sendo b, c, d inteiros não nulos, temos a divisão:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{mc}{nd} \Leftrightarrow adn = bcm \Leftrightarrow adn = (bc)m \Leftrightarrow \frac{adn}{bc} = m \Leftrightarrow \frac{ad}{bc} \cdot \ n = m$$

$\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{ad}{bc}$ assim $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Logo, a divisão é definida por $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Concluímos, assim, que o conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado em relação às quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão, acima definidas.

Observação1: Uma ampliação de um conjunto numérico e a de suas operações devem ser extensões definidas livremente, porém somente serão úteis se criadas de modo que as regras e propriedades anteriormente válidas no conjunto original sejam preservadas no conjunto ampliado.

Observação 2: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

3.3 Representação decimal de um número racional

No sistema de numeração posicional decimal que utilizamos, o símbolo 3.659 significa $3 \times 1000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 9 \times 1$, que representa o número inteiro três mil seiscentos e cinquenta e nove.

Os números racionais também podem ser expressos por notação decimal. Basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

EXEMPLOS: $\frac{32}{5} = 6,4$ que significa $6 + \frac{4}{10}$

$$\frac{1}{80} = 0,0125 = \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10.000} = 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-4}$$

$$\frac{62523}{1000} = 62,523 = 6 \times 10 + 2 \times 1 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} = 6 \times 10 + 2 \times 10^{0} + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$

Sendo $\frac{a}{b}$ um número racional, ao efetuarmos a divisão de Euclides $a \,|\underline{\ b\ \ }$, obtém-se uma decimal finita ou infinita.

EXEMPLOS:

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{1}{80} = 0,0125$$

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

$$\frac{5}{11} = 0,454545...$$

Quando o número racional é representado por uma fração cujo denominador é uma potência de 10, fazer a divisão para obter a forma decimal é equivalente a contar o número de casas da direita para a esquerda e colocar a vírgula entre os algarismos do numerador.

Assim: $\frac{125}{1000} = 0,125$; $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{75}{10} = 7,5$; $\frac{5}{1000} = 0,005$

Reciprocamente, qualquer número racional na forma decimal finita pode ser escrito na forma de fração $\frac{a}{b}$ com denominador 10, 100, 1.000 ou outra potência de 10.

EXEMPLO: $0,379 = \frac{379}{1000}$

$3,25 = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$ forma de fração irredutível

Dizemos que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível se p e q são primos entre si.

Pode-se perguntar: quais frações $\frac{m}{n}$, com $m,n \in \mathbb{Z}\left(n \neq 0\right)$, têm uma representação decimal finita?

Por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$ tem a representação decimal finita 0,125.

No entanto, a fração $\frac{1}{9}$ tem uma representação decimal infinita 0,111...

Do mesmo modo, temos $\frac{1}{7} = 0,142857142857...$, $\frac{1}{6} = 0,1666...$ e $\frac{1}{5} = 0,2$.

A proposição a seguir responde de modo geral à pergunta acima.

Proposição[3]

Um número racional, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, tem uma representação decimal finita se e somente se *b* não tiver na sua decomposição outros fatores primos além de 2 e 5.

DEMONSTRAÇÃO: Faremos a demonstração para números racionais positivos; para os números racionais negativos a demonstração não se altera.

Seja r um número racional que possui representação decimal finita, logo $r = m_1 m_2 \ldots m_s , n_1 n_2 \ldots n_t = \frac{m_1 m_2 \ldots m_s n_1 n_2 \ldots n_t}{10^t}$, em que $s \geq 1$, $t \geq 0$ e $m_j n_j \in \mathbb{Z}_+$.

Cancelando-se os fatores comuns do numerador e do denominador, obtemos uma fração irredutível $\frac{a}{b}$. Como *b* é um divisor de 10^t, logo *b* não possui fatores primos além de 2 e de 5.

Reciprocamente, seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível cujo denominador *b* possua, no máximo, os fatores primos 2 e 5. Assim, $b = 2^m \cdot 5^n$ com $m, n \in \mathbb{Z}_+$ (observe que *m* ou *n*, ou ambos, podem ser nulos).

Assim $n \leq m$ ou $n > m$.

Admitimos que $n \leq m$. Logo, $m - n \geq 0$ e, portanto, 5^{m-n} é um número inteiro.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{(10)^m} = \frac{c}{10^m} \ ; \ c \in \mathbb{Z}$$

Para dividir *c* por 10^m, basta contar *m* algarismos da direita para a esquerda no número inteiro *c* e colocar a vírgula (completando com zeros se necessário).

Assim, $\frac{c}{10^m}$ fica representado por uma decimal finita.

Resultado análogo obtém-se considerando $n > m$.

EXEMPLOS:

1) $$\frac{7}{625} = \frac{7}{5^4} = \frac{7 \cdot 2^4}{5^4 \cdot 2^4} = \frac{7 \cdot 2^4}{10^4} = \frac{112}{10^4} = 0{,}0112$$

[3] Proposição é uma sentença matemática, de menor relevância que um teorema.

2) $\dfrac{9321}{200} = \dfrac{9321}{2^3 \cdot 5^2} = \dfrac{9321 \cdot 5}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 5} = \dfrac{46605}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{46605}{10^3} = 46{,}605$

3) $452{,}32 = \dfrac{45232}{100} = \dfrac{11308}{25}$

4) $0{,}724 = \dfrac{724}{1000} = \dfrac{181}{250} = \dfrac{181}{5^3 \cdot 2}$

A representação decimal de um número racional $\dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ é obtida da divisão de a por b. Baseando-se na proposição anterior, para obtermos uma decimal infinita através desse processo de divisão, é preciso que o denominador b da fração irredutível $\dfrac{a}{b}$ possua fatores primos diferentes de 2 e de 5.

No entanto, essa decimal infinita será periódica, isto é, haverá repetição de algum algarismo ou grupo deles.

EXEMPLOS:

1) $\dfrac{4}{3} = 1{,}333...$ pois

$$\begin{array}{l|l} 4 & \underline{3\quad\quad} \\ 10 & 1{,}333... \\ \ \ 10 & \\ \quad 10 & \\ \quad\ \ 1 & \\ \quad\ \ ... & \end{array}$$

2) $\dfrac{23}{6} = 3{,}8333...$ pois

$$\begin{array}{l|l} 23 & \underline{6\quad\quad} \\ \ \ 50 & 3{,}8333... \\ \ \ \ 20 & \\ \quad 20 & \\ \quad\ \ 20 & \\ \quad\quad 20 & \\ \quad\quad ... & \end{array}$$

3) $\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857...$ pois

$$\begin{array}{l|l} 1 & \underline{7\quad\quad} \\ \ \ 30 & 0{,}142857... \\ \ \ \ 20 & \\ \quad 60 & \\ \quad\ \ 40 & \\ \quad\quad 50 & \\ \quad\quad\ \ 1 & \\ \quad\quad ... & \end{array}$$

No caso geral, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, ao efetuarmos a divisão de *a* por *b*, os únicos restos possíveis são $0,1,2,...,b-1$. Portanto, se obtivermos resto zero, a divisão termina e então teremos uma decimal finita. Se não obtivermos resto zero, após um número finito de operações, aparecerá repetição de algum resto e assim haverá um ciclo de repetição.

Com essas informações, concluímos que:

Todo número racional tem uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Vale a recíproca:

Toda decimal finita ou infinita periódica pode ser expressa por uma fração que é a sua geratriz.

Conclusão:

Todo número racional, se representado na forma decimal, será uma decimal finita ou infinita periódica.

Observação: Decimal infinita periódica é chamada de *dízima periódica*.

EXERCÍCIO: Escreva as decimais na forma de frações:

a) 32,65
b) 0,028
c) 1,222...
d) 0,666...
e) 1,677...
f) 2,53232...
g) 0,11212121...

3.4 Segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis

Seja AB um segmento de reta. Medir esse segmento é comparar seu comprimento com o de um segmento-padrão PQ, chamado de segmento unitário. Geometricamente significa justapor segmentos congruentes a PQ sobre AB e contar quantas vezes PQ cabe em AB. Se PQ couber *n* vezes em AB, dizemos que a medida de AB é o número natural *n*.

Notação: $\overline{\mathrm{AB}} = n$

Se o segmento padrão não couber um número exato de vezes em AB, então a medida de AB não será um número natural. Nesse caso, podemos procurar um outro segmento MN que caiba *n* vezes em PQ e *m* vezes em AB. Assim, $\overline{\mathrm{AB}} = m$ e $\overline{\mathrm{PQ}} = n$ (isso significa que os segmentos AB e PQ foram medidos com o segmento MN). Portanto, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = \dfrac{m}{n}$ é um número racional e dizemos $\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{m}{n}\,\overline{\mathrm{PQ}}$.

DEFINIÇÃO: *Dois segmentos de reta* AB *e* CD *são comensuráveis se ambos podem ser medidos com um mesmo segmento-padrão* EF. *Isto é,* AB *e* CD *são comensuráveis se existir um segmento* EF *que caiba m vezes em* AB *e n vezes em* CD.

Dois segmentos não comensuráveis são ditos *incomensuráveis*.

Observe que, se AB e CD são comensuráveis, então o quociente $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \dfrac{m}{n}$ é um número racional.

Na Antiguidade, durante alguns milênios, pensava-se que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis; essa crença durou até o quarto século antes de Cristo.

Contam que Pitágoras de Samos (585-500 a.C.), nascido em Samos, uma ilha do mar Egeu, recebeu as primeiras instruções matemáticas e filosóficas de Tales e seus discípulos. Viajou para o Egito, onde permaneceu 22 anos praticando astronomia e geometria, até sua deportação para a Babilônia como prisioneiro de guerra, devido à invasão do Egito pelo rei da Pérsia. Na Babilônia alcançou o auge da perfeição na aritmética, na música e em outras ciências matemáticas ensinadas pelos babilônios, permanecendo ali até uma idade aproximada de 56 anos (MILIES; BUSSAB, 1999).

De volta do exílio, estabeleceu-se na colônia grega de Crotona, na Magna Grécia, hoje sul da Itália, onde fundou uma escola dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos. A Escola

Pitagórica constituía, na verdade, uma sociedade ou seita secreta e aristocrática, e um dos pontos fundamentais de sua doutrina era: “Os números governam o mundo”.

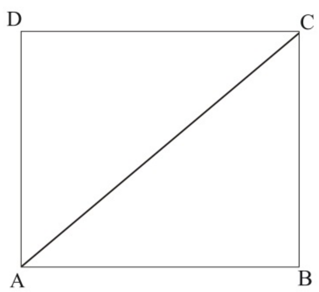
Seus membros noviços (calouros) recebiam uma educação formal baseada em quatro disciplinas: aritmética, geometria, astronomia e música. Após essa etapa, os alunos escolhidos seguiam um currículo avançado, tornando-se discípulos do mestre. De todos exigia-se um juramento de segredo absoluto quanto aos ensinamentos recebidos, cuja revelação constituía, portanto, um ato de impiedade.

Na Escola Pitagórica, o ensino era aberto também às mulheres, que eram tidas como modelo de educação e virtudes.

Para os pitagóricos, números eram os naturais, mas admitiam-se também as razões entre eles para formar as frações, conhecidas hoje por números racionais.

Devido à crença de que “tudo é número”, uma descoberta, atribuída a algum de seus discípulos, que pode ter abalado esse pensamento pitagórico, foi a de que *“o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis*”.

A seguir, apresentamos uma demonstração clássica desse fato:



Seja ABCD um quadrado.

Suponha por contradição que a diagonal AC e o lado AB sejam comensuráveis.

Isto é, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

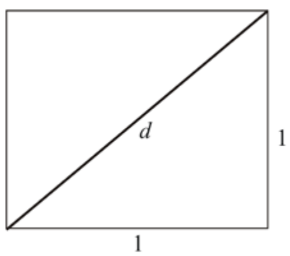
Sendo $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$ e portanto $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 2$, o que acarreta $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ e então $m^2 = 2n^2$. Aplicando-se o Teorema Fundamental da Aritmética para os números naturais *m* e *n*, vemos que o número de vezes que o fator primo 2 ocorre no primeiro membro é par e no segundo membro é ímpar, o que é uma contradição.

Conclusão: os segmentos AC e AB não são comensuráveis.

Assim, se o lado AB do quadrado for a unidade, então a medida $\overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ não pode ser escrita como um quociente de dois inteiros. Isso mostra a existência de segmentos de reta cujas medidas não podem ser expressas com os números racionais.

Admitindo que qualquer segmento de reta possa ter uma medida numérica, introduzem-se os números irracionais positivos para representar as medidas numéricas de todos os segmentos de reta incomensuráveis com o segmento-padrão, chamado unitário.

Exemplo: Num quadrado cujo lado mede 1, a medida da diagonal d é dada por:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional por ser a medida da diagonal, que é incomensurável com a unidade.

Observação: Platão, no *Teeteto*, conta que Teodoro de Cirene (discípulo de Pitágoras e mestre de Platão) provou a irracionalidade de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$. (MILIES; BUSSAB, 1999).

Aristóteles se referiu a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, que se baseava na distinção entre pares e ímpares. Se levarmos em consideração o misticismo sobre números cultuados em períodos anteriores e levados ao extremo pela escola pitagórica – que acreditava até que os números ímpares tinham atributos masculinos e os pares, femininos –, fica fácil aceitar para aquela época um tipo de argumentação seguinte:

Sejam *d* e ℓ a medida da diagonal e do lado do quadrado, respectivamente, que suponhamos sejam comensuráveis. Logo, $\frac{d}{\ell} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{d}{\ell} = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos primos entre si (isto é, *p* e *q* não possuem divisores comuns, exceto o 1). Usando-se o teorema de Pitágoras, então $d^2 = \ell^2 + \ell^2$ e, assim, $d^2 = 2\ell^2$, o que acarreta $\left(\frac{d}{\ell}\right)^2 = 2$. Substituindo, temos $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$, o que significa que p^2 é par e, portanto, *p* é par. Como *p* e *q* não têm fatores comuns, então *q* é ímpar.

Sendo p um número par, temos $p = 2k,\ k \in \mathbb{Z}_+$; e voltando em $p^2 = 2q^2$, temos $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$. Isto é: q^2 é par e, portanto, q é par, o que implica que q é ímpar e par simultaneamente. Porém isso não pode ocorrer nos números inteiros. Logo, conclui-se que a hipótese de d e ℓ serem comensuráveis é falsa.

Observação: Para ver outra demonstração interessante de que $\sqrt{2}$ é irracional, baseada em argumentos geométricos, consulte-se a *Revista do Professor de Matemática*, n. 57, p. 16 (RPM, 2005).

3.5 A irracionalidade de $\sqrt{3}$

Com um argumento semelhante, provemos que $\sqrt{3}$ não é um número racional.

Suponha que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, digamos $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, com $p,\ q \in \mathbb{Z}^*$, sendo p e q primos entre si (isto é, $\dfrac{p}{q}$ é fração irredutível).

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{e} \quad p^2 = 3q^2$$

Assim, vemos que p^2 é divisível por 3 e, pelo exercício 8 da seção 2.3, vimos que p é divisível por 3, o que significa que $p = 3n,\ n \in \mathbb{Z}^*$. Substituindo $p = 3n$ na equação $p^2 = 3q^2$, vemos que $9n^2 = 3q^2$ e que $q^2 = 3n^2$ é divisível por 3; e, novamente usando o exercício 8, vemos que q é divisível por 3. Concluímos que p e q são ambos divisíveis por 3, fato que contraria a hipótese de p e q serem primos entre si. Portanto, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 1:

a) Sejam α um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Prove que são irracionais os seguintes números: $-\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ r\alpha,\ r \pm \alpha\ ,\ \frac{\alpha}{r}\ e\ \frac{r}{\alpha}$.

b) Conclua que existem infinitos números irracionais.

Exercício 2:

Prove que o conjunto dos números irracionais não é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

4

NÚMEROS REAIS

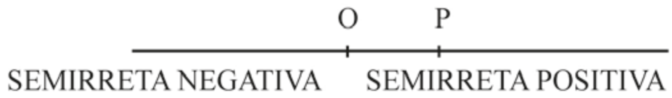
Atribui-se também aos pitagóricos a descoberta da *razão áurea*, que consiste na divisão de um segmento de reta em extrema e média razão e, consequentemente, na secção áurea, aparece o número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Sabiam os pitagóricos que esse número não era racional?

Na mesma ocasião, quando se descobriu que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis, também foi provado que o mesmo fato ocorre com a diagonal e a aresta de um cubo ou a diagonal e o lado de um pentágono regular. Esses fatos mostravam que os números inteiros mais as frações (números racionais positivos) eram insuficientes para medir todos os comprimentos e, consequentemente, as áreas e os volumes, o que prenunciava a necessidade de outros números para representar essas medidas.

Dessa forma, amplia-se o conceito de número, introduzindo os números que não são inteiros nem razão de inteiros para representar os comprimentos dos segmentos incomensuráveis com um segmento arbitrário padrão, chamado segmento unitário ou unidade de medida.

4.1 Números reais e a reta real

Para localizarmos geometricamente os irracionais em relação aos racionais já conhecidos, imaginemos uma reta e um ponto O nela fixado, que chamamos de Origem. Esse ponto divide a reta em duas semirretas: a semirreta à direita da origem, que será chamada de semirreta positiva; e a outra, à esquerda da origem, chamada de semirreta negativa. Tomando um outro ponto arbitrário P na semirreta positiva, considere o segmento padrão OP como sendo a unidade de comprimento.



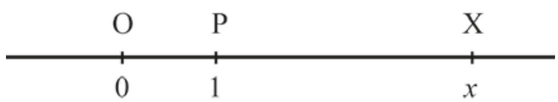
Para todo ponto X sobre essa reta, temos duas possibilidades:

1ª. O segmento OX é *comensurável* com o segmento unitário OP. Nesse caso, a medida do segmento OX é um número *racional* x, que denominaremos de abscissa do ponto X, se X estiver na semirreta positiva; e de $-x$, se X estiver na semirreta negativa. Isto é: $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

2ª. O segmento OX é *incomensurável* com o segmento unitário OP. Nesse caso, denominaremos de medida do segmento OX um novo número x, que chamaremos de número *irracional* e será a abscissa do ponto X, se X estiver na semirreta positiva; e $-x$ para X na semirreta negativa.

Quando X estiver na semirreta positiva, a sua abscissa será um número racional ou irracional que se denominará número *real positivo*; e quando X estiver na semirreta negativa, sua abscissa será um número *real negativo*.

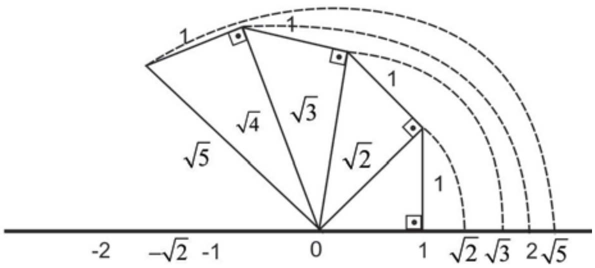
A reta assim estabelecida será chamada de *reta real*.



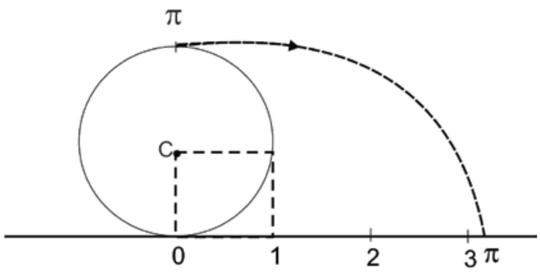
Observe que os pontos X, tais que OP caiba um número exato de vezes em OX, terão como abscissa um número inteiro.

Chamamos de *conjunto dos números reais* o conjunto $\mathbb{R}$ formado por todos os números *racionais* e todos os números *irracionais*. Dessa forma, temos uma correspondência biunívoca entre a reta real e o conjunto dos números reais, que a cada ponto X da reta corresponde à sua abscissa x, que é um número real.

A construção geométrica de segmentos de reta de medidas $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$,... pode ser feita assim:



A metade do comprimento da circunferência abaixo tem medida π .



O ponto de abscissa π na reta real pode ser obtido intuitivamente, "rolando-se" a circunferência sobre a reta.

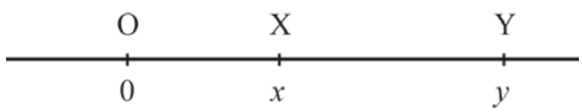
4.2 Interpretações geométricas para a ordem, a soma e o produto em $\mathbb{R}$

Sejam X e Y pontos sobre a reta real, cujas abscissas são x e y , respectivamente.

ORDEM:

Diz-se que $x < y$ (x é menor do que y) quando X está à esquerda de Y.

Equivalentemente, diz-se que $y > x$ (y é maior do que x) quando $x < y$.



Assim, quando o ponto X está à direita da origem O, sua abscissa x é maior do que zero ($x > 0$); e, quando o ponto X está à esquerda da origem, sua abscissa x é menor do que zero ($x < 0$).

NOTAÇÕES:

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ é chamado de conjunto dos números reais positivos, que geometricamente corresponde à semirreta positiva da reta real.

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$ é o conjunto dos números reais negativos e corresponde à semirreta negativa da reta real.

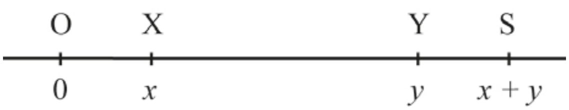
Assim, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$.

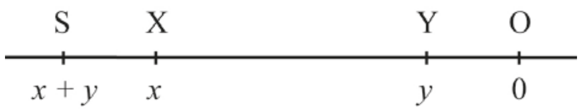
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0 \text{ ou } x = 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x < 0 \text{ ou } x = 0\}$$

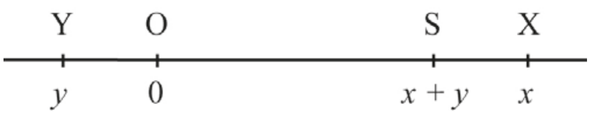
SOMA:

$x + y$ é a abscissa do ponto S, tal que o segmento XS tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido do segmento OY.



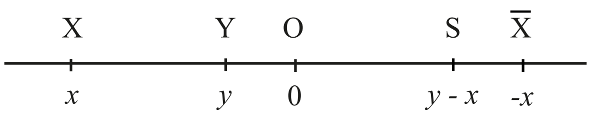


Observa-se que, quando o ponto Y está à esquerda do ponto O, o ponto S tem como abscissa uma diferença entre dois números reais, x e y.



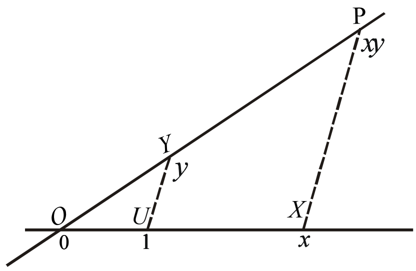
Portanto, se x e y são números reais, então $x < y$ significa que $y - x > 0$

Exemplificando: $y - x = (-x) + y$ e, somando como na figura abaixo, temos $y - x > 0$



PRODUTO:

Sejam $x > 0$ e $y > 0$ (x e y números reais positivos):



Pelo teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OX}} \Leftrightarrow \frac{y}{1} = \frac{\overline{OP}}{x}$$

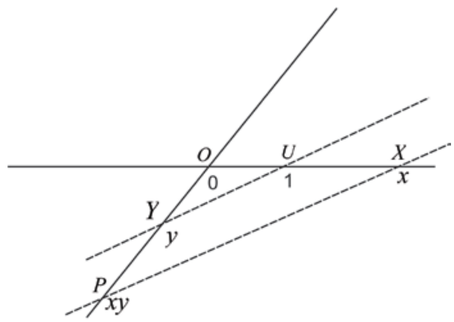
Logo, $\overline{OP} = xy$

Portanto, a medida do segmento $\overline{OP}$ é xy, que é definido como sendo sua abscissa.

Observe que, quando x e y têm sinais contrários $(x > 0 \text{ e } y < 0 \text{ ou } x < 0 \text{ e } y > 0)$, o ponto P de abscissa xy estará na semirreta negativa.

Para $x > 0$ e $y < 0$, temos a figura:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OU}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OP}}{x} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = xy$$



É importante atentar-se para o fato de que as notações $\overline{OP}$ e $\overline{OY}$ são medidas com sinais, chamadas de medidas algébricas.

Como exercício, faça uma figura interpretando o produto xy quando $x < 0$ e $y < 0$.

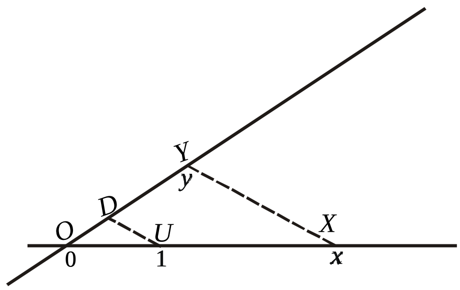
Veja que a multiplicação em $\mathbb{R}$ é uma extensão da multiplicação definida em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Q}$. Portanto, esta amplia aquela também para os irracionais, mantendo suas regras operatórias.

Devido às considerações acima temos:

1) Para todo $x \in \mathbb{R}$, somente uma das possibilidades ocorre: $x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x = 0$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$

2) Se x, $y \in \mathbb{R}$, então $x + y \in \mathbb{R}$ e $xy \in \mathbb{R}$

Veja na figura abaixo uma interpretação geométrica para o quociente em $\mathbb{R}$. Se x e y são números reais positivos, então o ponto D obtido tem como abscissa o número real $\dfrac{y}{x}$.



Pelo teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OU}} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \overline{OD}$$

Exemplos:

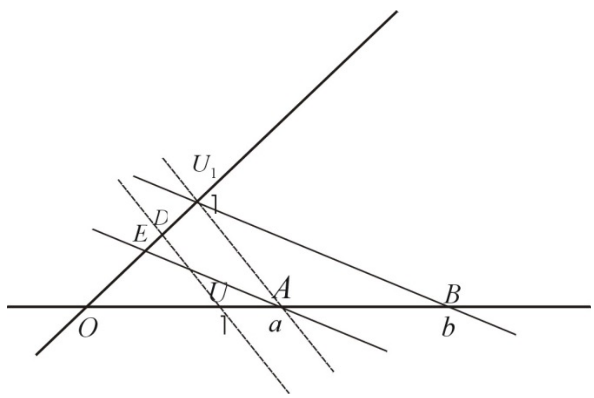
1) Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, então $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

De fato:

Sendo $0 < a < b \Rightarrow b - a > 0$ e $ab > 0$, logo $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} > 0$; logo $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} > 0$, o que significa que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Podemos ver esse fato geometricamente:

Tomando $\overline{OU} = \overline{OU_1} = 1$ unidade na reta, temos:



Pelo teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OU_1}} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{\overline{OD}}{1} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{1}{a}$$

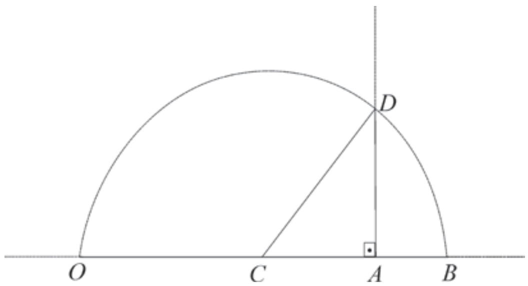
Novamente o teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OU_1}} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \frac{1}{b}$$

Agora observe na figura que $\overline{OD} > \overline{OE}$, confirmando geometricamente que $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

2) Dado um segmento de reta OA de medida $a \in \mathbb{R}_+$, construa o segmento de comprimento $\sqrt{a}$, usando somente o compasso e a régua sem escalas.

No prolongamento do segmento OA, marque o segmento unitário AB. Assim, $\overline{OA} = a$ e $\overline{AB} = 1$. Trace a semicircunferência de diâmetro OB. A seguir, por *A*, trace uma perpendicular a esse diâmetro.



Observe que, sendo C o centro da circunferência, então:

$$\overline{OC} = \overline{CD} = \frac{a+1}{2} \text{ e } \overline{AC} = \left| \frac{a-1}{2} \right|$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos $\overline{AD} = \sqrt{a}$

Exercício: faça uma figura para o caso 0 < *a* < 1

Apenas a título de informação, faremos o comentário que segue.

O conjunto dos números reais é fechado em relação às quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Possui também as propriedades operatórias: associativa, comutativa, distributiva da multiplicação em relação à adição, elemento neutro, elemento inverso e elemento simétrico. Incluindo a relação de ordem definida no conjunto $\mathbb{R}$, ele recebe o *status* de *corpo ordenado.*

O conjunto dos números racionais também é um corpo ordenado. No entanto, o corpo dos números reais, além de possuir “mais” elementos, possui uma importantíssima propriedade, denominada de completeza. Por isso ele é chamado de *corpo ordenado completo*. O corpo dos números racionais não é completo.

A axiomatização dos números reais foi estabelecida por matemáticos do século XIX.

O assunto comentado acima será estudado com detalhes em disciplinas mais avançadas, como Análise Matemática e Estruturas Algébricas.

4.3 Igualdades e desigualdades em $\mathbb{R}$

Propriedades da igualdade

Sejam a, b e c números reais.

1) Se $a = b$, então $a + c = b + c$ e $a - c = b - c$

2) Se $a = b$, então $ac = bc$; e se $c \neq 0$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

3) Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$

Resolver uma equação (inequação) em $\mathbb{R}$ significa encontrar todos os números reais tais que, se substituídos pela incógnita, mantenham verdadeira a igualdade (desigualdade).

Uma maneira de resolver uma equação ou inequação é transformá-la, através de operações e propriedades dos números reais, numa outra equação ou inequação que tenha as mesmas soluções daquela dada inicialmente e apresente a variável explicitada num de seus membros.

Exemplo

Resolvendo em $\mathbb{R}$ as equações, temos:

1) $2x + 3 = 5$

$2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x + 3 - 3 = 5 - 3$ (aplicamos a propriedade 1)

$2x = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$ (propriedade 2)

$\Leftrightarrow x = 1$

Portanto, a equação $2x + 3 = 5$ é equivalente à equação $x = 1$ e escrevemos:

$2x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Conclusão: $x = 1$ é a solução da equação dada. Isto é, $S = \{1\}$

2) $(x - 2)(3x - 5) = 0$

Usando a propriedade 3, temos:

$(x-2)(3x-5)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $3x-5=0 \Leftrightarrow x-2+2=0+2$ ou $3x-5+5=0+5$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $3x=5 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=\frac{5}{3}$.

Logo, o conjunto solução da equação dada inicialmente é $S=\left\{\frac{5}{3},\ 2\right\}$

Propriedades da desigualdade

Sejam a,b e c números reais.

1) Se $a<b$, então $a+c<b+c$ e $a-c<b-c$

2) Se $a<b$ e $b<c$, então $a<c$

3) Se $a<b$ e $c>0$, então $ac<bc$ e $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

Se $a<b$ e $c<0$, então $ac>bc$ e $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

4) Se $ab>0$, então $a>0$ e $b>0$ ou $a<0$ e $b<0$

Se $ab<0$, então $a>0$ e $b<0$ ou $a<0$ e $b>0$

Justificativas dessas propriedades:

1) Se $a<b$, temos por definição de ordem que $b-a>0$, logo

$(b+c)-(a+c)=b+c-a-c=b-a>0$. Portanto, $a+c<b+c$.

2) $a<b \Rightarrow b-a>0$

$b<c \Rightarrow c-b>0$

Logo, $(b-a)+(c-b)>0 \Rightarrow b-a+c-b>0 \Rightarrow c-a>0 \Rightarrow a<c$.

3) $a<b \Rightarrow b-a>0$. E, como $c>0$, temos pela regra de sinais e pela propriedade distributiva

$(b-a)c>0 \Rightarrow bc-ac>0 \Rightarrow ac<bc$.

Exemplos:

Resolva as inequações ou desigualdades abaixo:

1ª) $5-3x<8$

2ª) $(5-x)\ (x+2)>0$

Solução da 1ª inequação: $5-3x<8 \Leftrightarrow 5-3x-5<8-5 \Leftrightarrow -3x<3 \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{-3}>\dfrac{3}{-3} \Leftrightarrow x>-1$

$S=\{x\in\mathbb{R};\ x>-1\}$

Solução da 2ª inequação: $(5-x)\ (x+2)>0$, temos $5-x>0$ e $x+2>0$ ou $5-x<0$ e $x+2<0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5-x>0\\ x+2>0\end{cases} \text{ou } \begin{cases}5-x<0\\ x+2<0\end{cases} \Leftrightarrow x<5 \text{ e } x>-2 \text{ ou } x>5 \text{ e } x<-2 \Leftrightarrow -2<x<5 \text{ ou } x\in\varnothing$$

$S=\{x\in\mathbb{R};\ -2<x<5\}$.

4.4 Intervalos

Sejam *a, b* números reais, com $a\le b$. O conjunto de todos os números reais compreendidos entre *a* e *b* é denominado intervalo aberto (a,b). Se incluirmos os números reais *a* e *b*, temos o intervalo fechado $[a,b]$.

NOTAÇÃO:

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x<b\}$: intervalo aberto.

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a\le x\le b\}$: intervalo fechado.

Os seguintes conjuntos também são chamados intervalos:

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R};\ a\le x<b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R};\ a<x\le b\}$

$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R};\ x\le a\}$

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a\le x\}$

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ a<x\}$

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R};\ x<a\}$

$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Quando $a = b$, o intervalo $[a,b]$ é denominado intervalo degenerado e $[a,b] = \{a\}$: conjunto unitário.

O intervalo (a,a) é um conjunto vazio.

Outra notação usada para o intervalo aberto (a,b) é $]a,b[$ e analogamente para $[a,b[$ etc.

Observação: *A notação de intervalo não serve para denotar o conjunto dos inteiros compreendidos entre dois inteiros. Também não é adequada para representar conjuntos de racionais compreendidos entre dois números quaisquer.*

Será provado, em disciplinas mais adiante no curso, que entre dois racionais distintos quaisquer há sempre uma infinidade de irracionais, e também que entre dois irracionais distintos há infinitos racionais. E em geral vale: entre dois números reais distintos há sempre uma infinidade de números racionais e de irracionais. Em outras palavras: o conjunto dos racionais e dos irracionais são densos em $\mathbb{R}$.

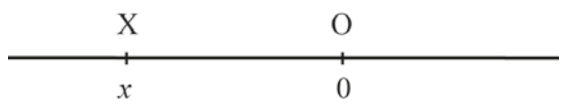
Exercício: Prove que entre dois racionais distintos a e b existem infinitos números racionais.

4.5 Valor absoluto

O valor absoluto (ou módulo) de um número real x, denotado por $|\,x\,|$, é definido por

$$|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sendo $x \in \mathbb{R}$ a abscissa do ponto X na reta real, o valor absoluto de x representa o comprimento do segmento OX. Isto é, a distância do ponto O até o ponto X:



Definimos o símbolo $\sqrt{a}$ com $a \in \mathbb{R}_+$ como sendo $b \in \mathbb{R}_+$ tal que $b^2 = a$.

Observe que, na definição acima, tanto a quanto b são positivos ou nulos.

Propriedades do valor absoluto:

1. $|x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| \geq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3. $|x| = \max\{-x, x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. $|x| = \sqrt{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5. $|xy| = |x||y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

6. $|x+y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Justificativas: As propriedades 1, 2 e 3 decorrem direto da definição de valor absoluto.

Propriedade 4:

Da definição de $\sqrt{\ }$ decorre: $\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x \\ x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x \end{cases}$. Portanto, $|x| = \sqrt{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 5:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|.$$

Propriedade 6:

Analisando-se separadamente as situações:

i) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos $x+y \geq 0$. Logo, $|x| = x$, $|y| = y$ e $|x+y| = x+y$. Portanto, $|x+y| = x+y = |x|+|y|$.

ii) Se $x < 0$ e $y < 0$, temos $x+y < 0$. Logo, $|x| = -x$, $|y| = -y$ e $|x+y| = -(x+y)$. Portanto, $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y|$.

iii) Se $x > 0$ e $y < 0$, temos $|x| = x$ e $|y| = -y$.

Sendo $y < 0$, então $(-y) > 0$. Logo, $x - y = x + (-y)$ é uma soma de números reais positivos.

Por outro lado, $x+y$ é uma soma de um número positivo com um número negativo, que também pode ser vista como uma diferença entre números reais positivos.

Assim, $x+y \le |x+y| < x-y = x+(-y) = |x|+|y|$.

Portanto, $|x+y| < |x|+|y|$.

iv) Se $x<0$ e $y>0$ (análogo ao item iii)

De i, ii, iii e iv, concluímos que: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \le |x|+|y|$.

Usando as propriedades anteriores e o exercício 11, item (iii), da seção 4.6, vamos fazer abaixo outra demonstração da propriedade 6 do valor absoluto.

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$xy \le |xy|$ (usamos a propriedade 2)

$xy \le |xy| = |x|.|y|$ (propriedade 5)

$2xy \le 2|x|.|y|$

$x^2+y^2+2xy \le x^2+y^2+2|x|.|y|$ (propriedades das desigualdades)

$(x+y)^2 \le (|x|+|y|)^2$

$\sqrt{(x^2+y^2)^2} \le \sqrt{(|x|+|y|)^2}$ (exercício 11, item (iii), seção 4.6)

$|x+y| \le \big||x|+|y|\big| = |x|+|y|$ (propriedade 4)

Portanto, $|x+y| \le |x|+|y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Decorre ainda da definição de valor absoluto que $|x|=|y|$ se e somente se $x=y$ ou $x=-y$.

Da interpretação geométrica do valor absoluto, vemos que:

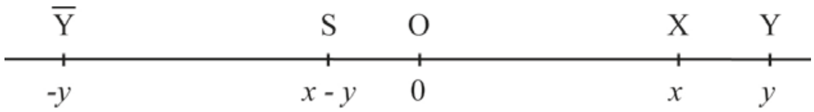
1) Se $a>0$ é um número real fixo, então podemos escrever os conjuntos:

$\{x \in \mathbb{R};\ |x| \le a\} = \{x \in \mathbb{R};\ -a \le x \le a\} = [-a, a]$ e

$\{x \in \mathbb{R};\ |x| \ge a\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \ge a \text{ ou } x \le -a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

Exemplo: O conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 1\}$ é o intervalo $[-1,1]$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq 1\} = (-\infty,-1\,] \cup [\,1,+\infty\,)$

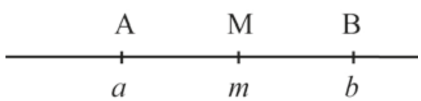
2) Se x e y são respectivamente as abscissas dos pontos X e Y na reta real, então $|x-y|$ é a distância do ponto X ao ponto Y.



$x-y$ é abscissa do ponto S obtido da soma de x com $-y$.

Logo, $\overline{OS} = \overline{XY} \Rightarrow |x-y| =$ distância de X até Y.

3) Se a e b são respectivamente as abscissas dos pontos distintos A e B da reta real e M é o ponto médio do segmento AB, então a abscissa de M é $\dfrac{a+b}{2}$.



$$\overline{AM} = \overline{MB} \Leftrightarrow |a-m| = |m-b| \ \ e \ \ a \neq b \Leftrightarrow m-a = b-m \Leftrightarrow m = \frac{a+b}{2}$$

4.6 Exercícios

1) Assinale Verdadeiro ou Falso nas proposições abaixo:

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ c) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ d) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

2) Responda V ou F, justificando sua resposta.

a) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.

b) Existem números inteiros cuja diferença é um número racional.

c) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

d) Existem $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $\beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ tais que $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$.

3) Sendo *m* e *n* números ímpares, mostre que:

a) $n+1$ é par b) $m+n$ é par c) $m(n+1)$ é par d) $m^2 + n^2$ é par

4) Prove que os números abaixo são irracionais.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-3\right)$

5) Existem dois números irracionais α e β tais que o quociente $\dfrac{\alpha}{\beta}$ seja um número inteiro?

6) Existem dois números irracionais α e β cuja diferença $\alpha - \beta$ é um número racional?

7) Seja α um número irracional positivo. Mostre que $\sqrt{\alpha}$ é irracional.

8) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando sua resposta:

a) Todo número natural escrito na forma $2n^2 + 3$ é ímpar, $(n \in \mathbb{N})$.

b) Todo número natural escrito na forma $n^2 + 2$ é par, $(n \in \mathbb{N})$.

c) Todo número natural par pode ser escrito na forma $2n+4$ com $n \in \mathbb{N}$.

d) α é um número racional se e somente se α^2 é racional.

e) O número 0,123456789101112131415... não é racional.

9) Prove que $\sqrt[3]{2}$ não é um número racional.

10) Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ com $a > b$, considere os números $r = 7a^2 + 8b^2$ e $s = 8a^2 + 7b^2$. Qual é maior: *r* ou *s*? Justifique.

11) Se *a* e *b* são números reais com $0 < a < b$, prove que:

i) $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ iii) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

ii) $a^2 < b^2$ iv) $a < \sqrt{ab} < b$

12) Se a e b são reais positivos, demonstre que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Obs.: $\sqrt{ab}$ é chamada média geométrica de a e b.

$\dfrac{a+b}{2}$ é chamada média aritmética de a e b.

13) Use o exercício 12 para mostrar que, num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual à metade da hipotenusa. Em que condições se dá a igualdade?

14) Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, prove que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

15) Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, prove que $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

16) Mostre que $a^2+ab+b^2 \geq 0$ para todo a e b reais.

17) Considere os intervalos da forma $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe um número real comum a todos esses intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos $\left]0, \dfrac{1}{n}\right[$?

18) Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $x^2-4=0$ b) $4+x^2=0$ c) $|x-1|=4$

d) $(x-1)^2=4$ e) $x+\dfrac{5}{x-5}=5+\dfrac{5}{x-5}$

19) Resolva geometricamente as equações e inequações em $\mathbb{R}$.

a) $|x-1|+|x-2|=5$ b) $|x-1|+|x-2|=1$

c) $|x-1|<|x-5|$

20) Resolva as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $3x+4 \leq 2x+5$ b) $\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\,x<2$ c) $\dfrac{x-3}{5+x} \geq 0$

d) $x^2(x-2)>0$ e) $x^4(5-2x) \leq 0$ f) $|x-2| \leq 3$

g) $|x-2|>3$ h) $\dfrac{1}{2x+1}<\dfrac{1}{1-x}$ i) $x^2-1 \geq 0$

4.7 Exercícios complementares

1) (OCM-2004) Ache todos os números inteiros positivos m e n que satisfazem a equação $mn - m - n = 12$.

2) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que p^2 seja primo? Justifique.

3) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, prove que $n^2 + n$ é um número inteiro par.

4) Se n é um número inteiro ímpar, então mostre que n^2 pode ser escrito na forma $8k+1$ com $k \in \mathbb{Z}$.

5) Se m e n forem números inteiros ímpares, mostre que $m^2 - n^2$ é divisível por 8.

6) Mostre que todo número inteiro ímpar pode ser escrito como diferença de dois quadrados.

7) Prove que 7 é o único número primo escrito na forma $n^3 - 1$ com $n \in \mathbb{N}$.

8) Quais números primos p podem ser escritos na forma $n^5 - 1$ com $n \in \mathbb{N}$?

9) (OCM-2008 – nível 1) Para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$ com $a > b > c$, mostre que o produto $N = (a-b)(a-c)(b-c)$ é sempre um número inteiro par.

10) Existem dois números irracionais α e β tais que $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$ e $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$?

11) Se $n \in \mathbb{N}$, então prove que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{n}$ é um número irracional. Conclua que $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$ são números irracionais.

12) Se $m, n \in \mathbb{N}$, prove que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt[n]{m}$ é um número irracional.

13) Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

14) Se $r \in \mathbb{Q}$ e $r < \sqrt{2}$, então mostre que existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < \sqrt{2}$.

15) Sendo α um número irracional, dê condições sobre os números racionais a, b, c e d para que $\dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$ seja número racional.

16) Dados quaisquer dois números racionais r, s com $r < s$, mostre que $\alpha = r + \dfrac{(s-r)}{2}\sqrt{2}$ é um número irracional e $r < \alpha < s$.

17) Se $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a < c < b$, então mostre que $|\, c \,| < |\, a \,| + |\, b \,|$.

18) Sejam a,b e c números reais positivos. Prove que $\dfrac{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}{abc} \geq 8$.

19) Definição: *diz-se que o ponto C, sobre o segmento AB, divide AB* ***em média e extrema razão*** *quando* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Prove que, se C divide AB em média e extrema razão, então AB e AC são segmentos incomensuráveis.

20) Dados dois segmentos AB e CD de medidas a e b respectivamente, construa um segmento de medida $\sqrt{ab}$, usando somente o compasso e a régua sem escalas.

21) Construa geometricamente a solução para a equação $x^2 = ax + b$ em que a , b $\in \mathbb{R}_+^*$

II

FUNÇÕES

5

FUNÇÕES

5.1 Conceito de função

O conceito de função é de extrema importância em matemática e em outras ciências. O uso de funções está incorporado à cultura de todos os povos da atualidade. Para um iniciante ter uma ideia da amplitude do uso das funções, basta ver a palavra "função" num dicionário da língua portuguesa, e encontrará uma quantidade elevada de nomes de funções. Isso só para citar as mais familiares.

Embora o primeiro a utilizar a palavra "função" tenha sido Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a ideia da dinâmica que hoje vemos no conceito de função é muito antiga. Basta lembrarmos das tabelas de valores que aparecem em obras da Antiguidade. Um exemplo são "as tabelas de cordas" encontradas no *Almagesto* de Ptolomeu (150 d.C). Hoje sabemos que aquelas tabelas eram o princípio das funções trigonométricas.

Uma função pode ser representada de diversas formas: por uma tabela, por uma equação, por um gráfico ou mesmo por meio de palavras. A função é muito usada também para representar modelos matemáticos de fenômenos físicos, biológicos, sociais, etc.

Em qualquer acontecimento em que uma quantidade *depende* de outra, podemos utilizar o conceito de função.

Exemplos:

1) A área de um quadrado *depende* da medida de seu lado.
2) A população humana mundial *depende* do tempo.
3) O custo para enviar um objeto pelo correio *depende* do seu peso e da distância em que se encontra o destinatário.

Neste livro, usaremos funções que relacionam quantidades que podem ser expressas numericamente.

Definição: *Chama-se função toda correspondência* f *que associa a cada valor da variável* x *de um conjunto* X *um único valor da variável* y *num conjunto* Y.

Notação: $f: X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

O conjunto X é chamado de domínio da função f, e Y é o contradomínio. A letra x representa a variável independente e y, a variável dependente. O valor y é chamado de imagem de x pela função f, que é denotada por $y = f(x)$.

O conjunto Im(f) = $\{f(x);\ x \in X\}$ é chamado imagem da função f. Denotamos o domínio de f por Dom(f).

5.2 Gráfico de uma função

Sejam X e Y dois conjuntos e $f{:}X \to Y$ uma função.

Chamamos de gráfico de f *o conjunto dos pares ordenados* $\{(x, f(x));\ x \in X\}$, *que denotamos por Gr(* f *).*

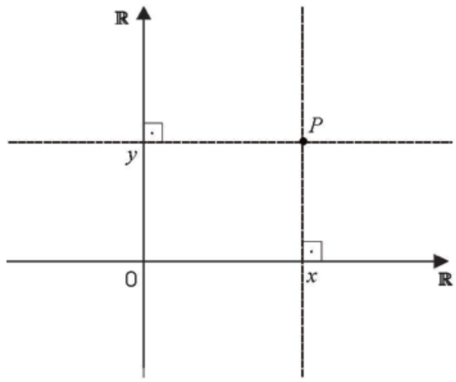
Observe que o *Gr(* f *)* é um subconjunto do produto cartesiano X x Y = $\{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$.

5.3 O plano cartesiano

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados de números reais (x, y) em que $x \in \mathbb{R}$ é a abscissa e $y \in \mathbb{R}$ é a ordenada desse par.

Sendo a reta real um modelo geométrico do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, podemos interpretar geometricamente o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sendo o plano geométrico determinado por duas cópias perpendiculares da reta real, chamado sistema de eixos ortogonais.

Assim teremos uma correspondência biunívoca entre o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e o plano geométrico, em que a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associamos um ponto P desse plano, determinado pela interseção das retas perpendiculares às cópias da reta real (eixos), passando por suas coordenadas x e y, como na figura:

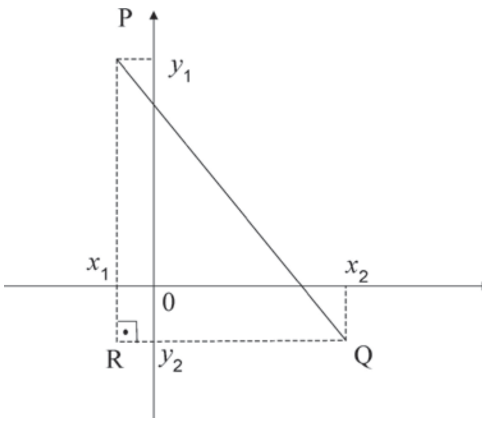


Reciprocamente, em cada ponto P do plano baixamos as perpendiculares às cópias da reta real, encontrando as coordenadas $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ nos eixos e, por conseguinte, o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

O plano geométrico assim identificado com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é chamado *plano cartesiano* e denotado por $\mathbb{R}^2$. Seus pontos P de coordenadas (x, y) são denotados por $P(x, y)$.

5.4 Distância entre dois pontos do plano

A distância entre dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é a medida do segmento de reta PQ, que pode ser dada em função de suas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como segue:



Denotamos a distância entre P e Q por d(P,Q) e a medida do segmento PQ por $\overline{PQ}$. Portanto, d(P,Q) = $\overline{PQ}$.

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo RQP, temos $\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$.

Observe que $\overline{PR} = |y_2 - y_1|$ e $\overline{QR} = |x_2 - x_1|$, conforme definido na seção 4.5.

Assim $\overline{PQ}^2 = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2$, logo $\overline{PQ} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

Conclusão: $d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Exemplos:

1) A circunferência

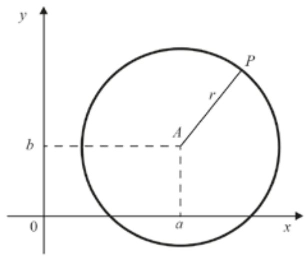
Dado um ponto *A* no plano e um número real positivo *r*, chamamos de circunferência de centro em *A* e raio *r* o conjunto *S* formado pelos pontos *P* desse plano que estão à distância *r* do ponto *A*.

Em símbolos: $S = \{P \,/\, d(P, A) = r\}$.

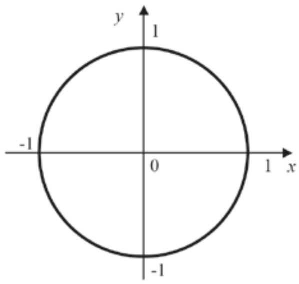
No plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, se *A* tem coordenadas (*a,b*) e *P* tem coordenadas (*x,y*), então escrevemos

$$S = \{(x,y) / \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\} = \{(x,y) / (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

Representação geométrica de *S* no plano cartesiano



Em particular, a circunferência com centro na origem O (*0,0*) do sistema cartesiano e de raio 1 é o conjunto $S^1 = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}$, chamada também de círculo unitário.

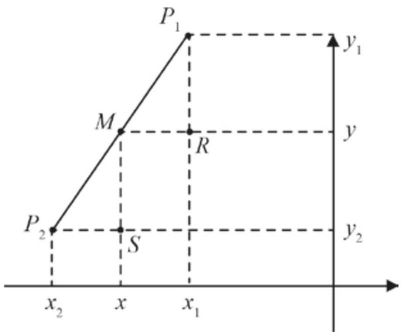


2) O ponto médio

Dados dois pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2\,(x_2,y_2)$ no plano cartesiano, vamos mostrar que as coordenadas do ponto médio *M* (*x,y*) do segmento P_1P_2 são $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ e $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Se o segmento $P_1\ P_2$ for paralelo a um dos eixos coordenadas, então o caso se reduz ao ponto médio entre dois pontos na reta real observado no final da seção 4.5.

Caso geral



Os triângulos P_1MR e MP_2S têm os ângulos correspondentes congruentes. Logo, eles são semelhantes. Sendo M o ponto médio de P_1P_2, temos $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$. Portanto os triângulos são congruentes.

Assim $\overline{P_1R} = \overline{MS}$. Logo $y_1 - y = y - y_2$, o que acarreta $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ de modo análogo $\overline{MR} = \overline{P_2S}$.

Logo $x_1 - x = x - x_2$, o que acarreta $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Conclusão: O ponto médio do segmento P_1P_2 é $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

3) A notação $\quad f : \{0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto y = x^2$$

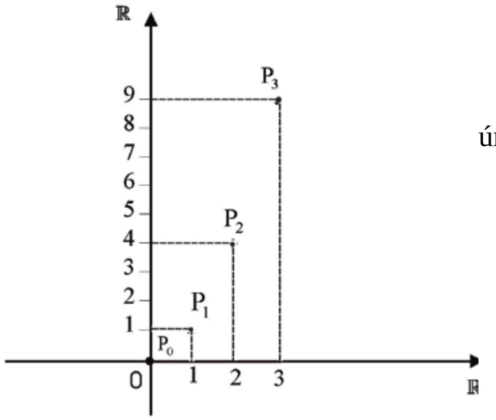
representa a função que, a cada elemento do conjunto $X = \{0,1,2,3\}$, associa o seu quadrado, o qual pertence a $\mathbb{R}$.

Dom $f = \{0,1,2,3\}$

$\text{Im}(f) = \{0,1,4,9\}$: conjunto Imagem de *f*.

$Gr(f) = \{(0,0);(1,1);(2,4);(3,9)\}$

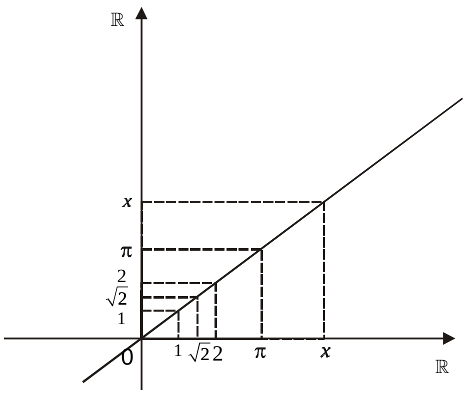
Geometricamente, podemos representar o $Gr(f)$ no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.



Observe que os pontos P_0, P_1, P_2 e P_3 são os únicos pontos do $Gr(f)$.

4) Se $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada pela expressão $f(x) = x,$ temos $Gr(f) = \{(x,x);\ x \in \mathbb{R}\}.$

No plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, o $Gr(f)$ é representado por:



O conjunto de todos os pontos $(x,x) \in \mathbb{R}^2$ é a reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Essa função é chamada de *função identidade*.

Observemos, no exemplo 4 acima, que o gráfico de f é constituído de tantos pontos quantos há no domínio da função que é a reta real $\mathbb{R}$.

5.5 Estabelecendo o domínio

Para caracterizar de fato uma função, é preciso estabelecer uma lei de correspondência *f*, um domínio Dom(f) e um contradomínio CDom.

No entanto, para funções reais, quando não é dado explicitamente o domínio, convenciona-se tomar para domínio dessa função o conjunto dos números reais, excluídos apenas os números para os quais a lei não faz sentido.

Exemplos:

1) Sendo f dada pela expressão $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, devemos tomar $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

2) Sendo $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, temos $\mathrm{Dom}(g)=\{x\in\mathbb{R};\ x>-1\}$

3) Sendo $a(x)$ dada pela área de um quadrado de lado x cm, temos para domínio de $a(x)$ o conjunto $\mathrm{Dom}(a)=\{x\in\mathbb{R};\ x>0\}$

4) A função $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ tem domínio $\mathrm{Dom}(h)=\{x\in\mathbb{R};-1\leq x\leq 1\}$

6

FUNÇÃO AFIM

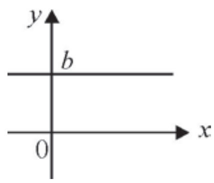
Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuja lei de correspondência pode ser dada na forma $f(x)=ax+b,$ em que a e b são números reais constantes, é chamada de *função afim*.

Exemplos de função afim:

1. Caso $a=0$:

A função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=b$ é denominada função constante.

$Gr(f)=\{(x,b);\ x\in\mathbb{R}\}$



2. Caso $b=0$ e $a=1$:

A função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem a forma $f(x)=x$ e recebe o nome de *função identidade*.

3. Caso $b=0$: A função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax$ recebe o nome de *função linear*.

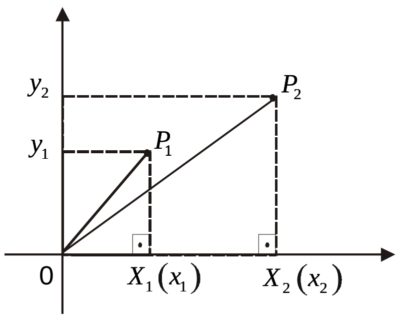
Obs.: A função identidade é um caso particular de função linear.

O gráfico da função linear $f(x)=ax$, representado no plano cartesiano, é uma reta que contém a origem do sistema de eixos.

De fato:

Primeiro observamos que o ponto origem O $(0,0)$ pertence ao gráfico.

Para quaisquer outros dois pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ do $Gr(f)$, temos $y_1=ax_1$ e $y_2=ax_2$; portanto, $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=a$. Observemos, com isso, que P_1 e P_2 não podem estar em quadrantes consecutivos.

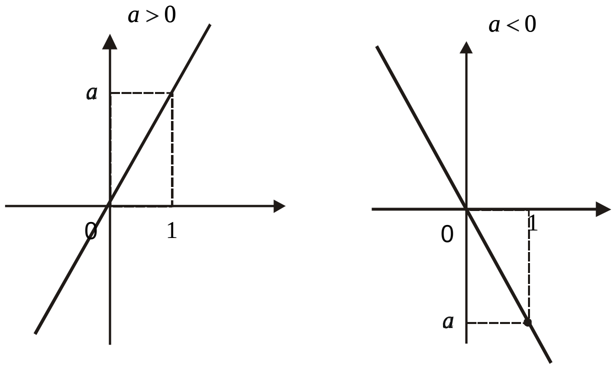


Na figura, os pontos X_1 e X_2 sobre o eixo X possuem coordenadas na reta iguais a x_1 e x_2, respectivamente.

A condição $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=a$ nos garante que os triângulos retângulos $O\,P_1X_1$ e $O\,P_2X_2$ são semelhantes e, por conseguinte, possuem os ângulos correspondentes congruentes. Assim, o ângulo P_1OX_1 coincide com o ângulo P_2OX_2, ou eles são opostos pelo vértice O.

Portanto, os pontos O, P_1 e P_2 são colineares, do que concluímos que os pontos do $Gr(f)$ constituem uma reta que contém a origem.

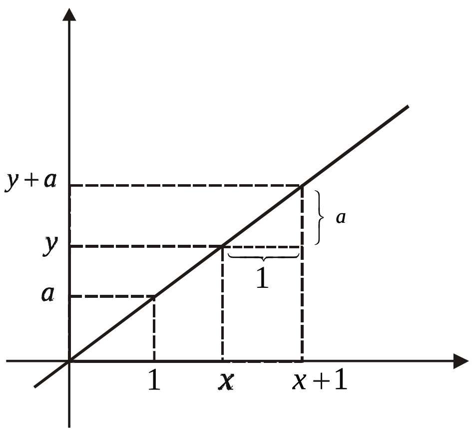
A função linear $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax$ possui gráfico:



Portanto, o coeficiente "a" determina a inclinação ou declividade da reta que é o gráfico da função.

Quando $a>0$, vemos geometricamente, que a função é crescente, isto é: conforme aumentamos valores de x, aumentam também os valores de $f(x)$ na proporção $a=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x\neq 0)$.

A partir de qualquer valor de *x*, se aumentamos uma unidade, o aumento correspondente na imagem será a.



Quando $a<0$, a função é decrescente, pois aumentando os valores para *x*, diminui os valores correspondentes de *y*, na razão "a".

A constante "a" na função linear é também denominada de "passo" da função ou taxa de variação da função.

Exemplos:

A função linear é o modelo adequado para tratar questões de proporcionalidade.

1) O valor y a ser pago ao abastecer um carro num posto de combustível é função da quantidade x de litros solicitado.

Os valores das variáveis x e y são exemplos de grandezas, denominadas de grandezas diretamente proporcionais, isto é, o valor y varia na proporção em que a quantidade x aumenta ou diminui. A proporção é $\frac{y}{x} = \mathrm{K}$, em que K é o preço por litro de gasolina.

Se K = R$ 3,70 (três reais e setenta centavos), temos $y = 3{,}70.x$

Quantidades que podem ser expressas numericamente são, às vezes, chamadas de grandezas. Por exemplo: medidas de comprimento, áreas, volumes, temperaturas, tempos, velocidades, energia, juros, volumes de poupança, arrecadação, etc.

2) O volume V de um tanque de combustível de um automóvel, ao ser abastecido por uma bomba que injeta 12 litros por minuto, é função do tempo t em que a bomba estiver ligada.

$$V = 12t \Leftrightarrow \frac{V}{t} = 12 \quad \text{(constante)}$$

$\frac{V}{t}$ é a razão de proporcionalidade nesse abastecimento.

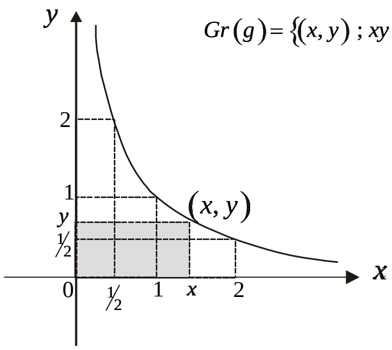
Há também a noção de grandezas inversamente proporcionais. *Dizemos que duas grandezas representadas pelas variáveis x e y são inversamente proporcionais se essas variáveis se relacionam segundo a expressão* $xy = \mathrm{K}$ *(constante).*

Nesse caso, o modelo não é linear, e sim nesta forma $y = \frac{\mathrm{K}}{x}$ (para x *e* y não nulos).

Para que o produto xy se mantenha constante igual a K, as grandezas x *e* y variam na razão inversa, isto é, se x aumenta, y deve diminuir, e vice-versa.

Por exemplo: Na construção de retângulos de área constante igual a 1, a base x e a altura y podem variar, mas o produto xy se mantém constante igual à área.

No plano cartesiano, se construímos todos os retângulos de área constante 1, com lados x e y apoiados nos eixos coordenados, vemos que os pontos (x, y) determinam nesse plano uma curva que é a representação do gráfico da função $g:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$. Assim, $xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$.

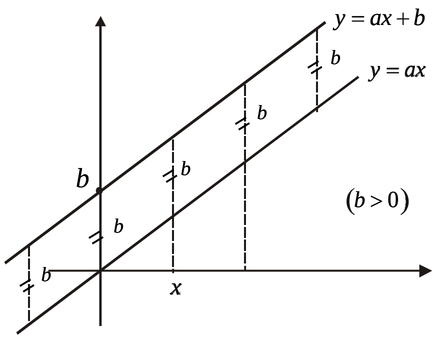


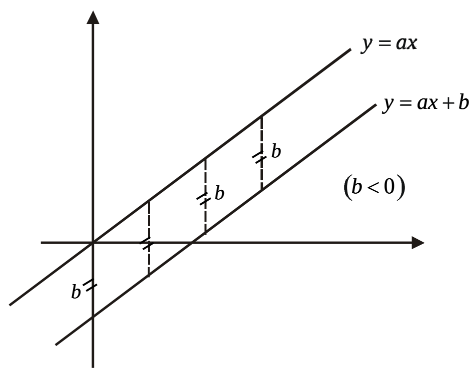
A curva acima é um ramo da curva chamada "hipérbole equilátera".

Voltemos à função afim $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$.

Observe que as imagens $ax + b$ da função *f* nada mais são do que as imagens ax da função linear $y = ax$, somadas com uma constante b.

Portanto, o gráfico da função afim é o gráfico da função linear transladado para cima ou para baixo da quantidade b.





Conclusão: o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta paralela à reta dada pelo gráfico da função linear $y = ax$. Portanto, têm a mesma declividade.

Exercícios:

1) Esboce o gráfico de:

   a) $y = 2x + 3$

   b) $y = -3x + 1$

   c) $y = -x + 1$

2) Sendo $f(x) = ax + b$, $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, encontre os valores de a e de b e esboce o $\mathrm{Gr}(f)$.

3) Sendo $f(x) = 2005x + \sqrt{2}$, determine o valor de $f(2007) - f(2006)$.

4) Sendo $f(x) = ax + b$, determine a variação $f(x+1) - f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5) Sendo $f(x) = ax + b$, determine a taxa de variação $\Delta f = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$.

6.1 Zeros da função afim

Dizemos que um elemento x_0 *do domínio da função* f *é um zero da função se* $f(x_0) = 0$. *Nesse caso, também dizemos que* x_0 *é uma raiz da equação* $f(x) = 0$.

Assim, encontrar os zeros da função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é encontrar as raízes da equação $ax + b = 0$.

Resolvendo a equação:

$$ax + b = 0 \iff ax + b - b = -b \iff ax = -b \iff \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \iff x = \frac{-b}{a}$$

Portanto, $x_0 = \dfrac{-b}{a}$ é o único zero da função afim $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$.

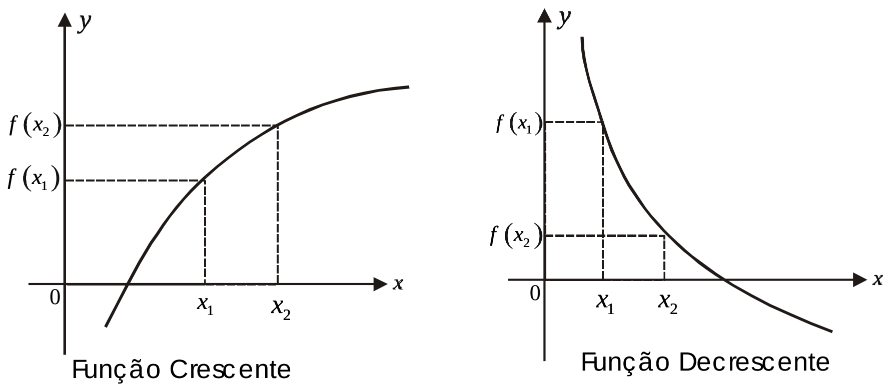
Observemos que a função afim (não identicamente nula) possui um zero se $a \neq 0$.

Geometricamente, o zero da função afim é o ponto do eixo x no qual o gráfico (reta) intersecta esse eixo.

6.2 Crescimento e decrescimento

Seja $f: A \to \mathbb{R}$; *com* $A \subset \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* f *é crescente quando, para todo* $x_1, x_2 \in A$ *com* $x_1 < x_2$, *temos* $f(x_1) < f(x_2)$. *Dizemos que f é decrescente quando, para todo* $x_1, x_2 \in A$, *com* $x_1 < x_2$, *temos* $f(x_1) > f(x_2)$.

Similarmente, dizemos que *f* é *não decrescente* quando $x_1 < x_2$ acarreta $f(x_1) \leq f(x_2)$ e que *f* é não crescente quando $x_1 < x_2$ acarreta $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Obs.: *nos quatro casos descritos, a função f é dita monótona*.

Seja a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$.

a) Se $a > 0$, então *f* é crescente.

b) Se $a < 0$, então *f* é decrescente.

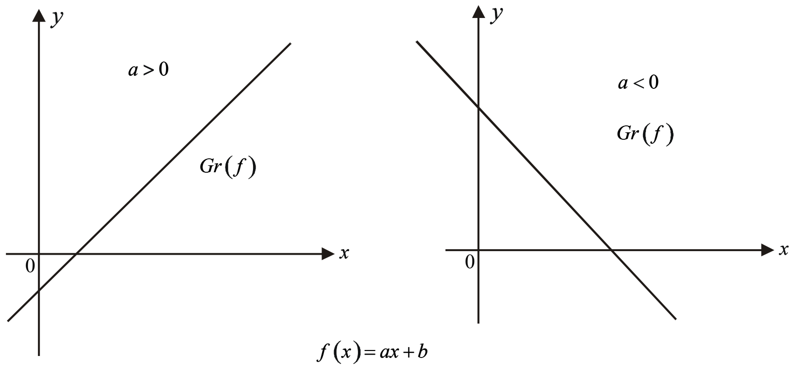
De fato: Fazendo uso das propriedades da desigualdade de números reais, estudadas na seção 4.3, temos:

a) Sendo $a > 0$; $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com

$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, do que se conclui que *f* é crescente.

b) Sendo $a < 0$; $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com

$x_1 < x_2 \;\; \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, do que se conclui que *f* é decrescente.



O coeficiente a da expressão da função afim $f(x) = ax + b$ é denominado de *taxa de variação* da função *f* (taxa de crescimento ou de decrescimento de f). Isto é, o valor de a determina quanto o $Gr(f)$ está inclinado em relação ao eixo *x*.

Uma vez que o gráfico da função afim é uma reta, o número a é também denominado de declividade ou coeficiente angular da reta, referindo-se ao ângulo de inclinação que essa reta forma com o eixo *x*.

Se $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ são dois pontos do gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, então $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Portanto $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é a declividade da reta P_1P_2.

Seja *r* a reta que passa pelo ponto $P_0(x_0,y_0)$ e tem declividade *a*. Se $P(x,y)$ é qualquer ponto dessa reta, então $a = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$. Assim $y - y_0 = a(x - x_0)$. Logo, $y = y_0 + a(x - x_0)$ é a função que possui como gráfico a reta *r*.

Obs: A expressão $y - y_0 = a(x - x_0)$ é conhecida como a equação da reta *r* que passa pelo ponto (x_0,y_0) e tem declividade *a*.

Exemplo

A equação da reta *r* que passa pelo ponto $P(1,2)$ e tem declividade (coeficiente angular) igual a 3, pode ser expressa por $y - 2 = 3(x - 1)$. Assim $y = f(x) = 3x - 1$ é a função que tem como gráfico a reta *r*.

6.3 Estudo do sinal da função afim

Estudar o sinal de uma função *f* é encontrar os valores da variável $x \in Dom(f)$ para os quais as imagens correspondentes $f(x)$ são positivas e os valores de *x* para os quais as imagens $f(x)$ são negativas.

O conhecimento sobre os sinais das imagens $f(x)$ de uma função é útil para obtermos informações sobre o gráfico dessa função e de outras funções, de alguma forma, relacionadas com ela. Também é de grande utilidade na resolução de inequações ou nos estudos de desigualdades.

Seja $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$. Podemos estudar o sinal de *f* resolvendo as inequações $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Assim:

Se $a > 0$, temos $f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0 \Leftrightarrow ax - b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$.

Analogamente, se $a < 0$, temos $f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$.

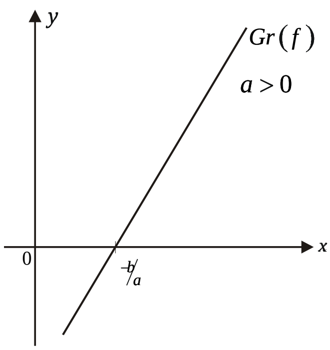
Resumindo:

Se $a > 0$, temos $f(x) > 0$ quando $x > \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0$ quando $x < \frac{-b}{a}$.

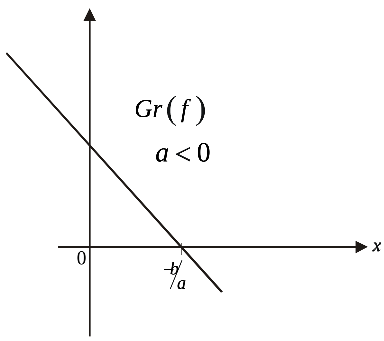
Se $a < 0$, temos $f(x) > 0$ quando $x < \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0$ quando $x > \frac{-b}{a}$.

Observe que, em qualquer dos dois casos, $a > 0$ ou $a < 0$, temos $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$.

No entanto, se olharmos para o gráfico, as informações procuradas tornam-se imediatas.



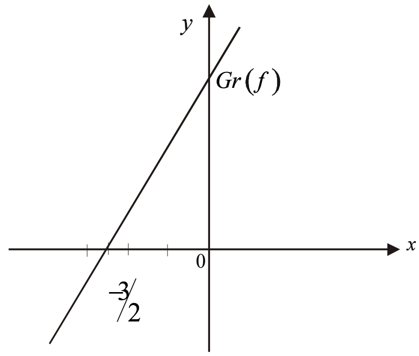
$f(x) > 0$ se $x > \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0$ se $x < \frac{-b}{a}$



$f(x) > 0$ se $x < \frac{-b}{a}$ e $f(x) < 0$ se $x > \frac{-b}{a}$

Ainda vemos que o único zero da função é o número no qual o gráfico intersecta o eixo x.

Exemplo 1:

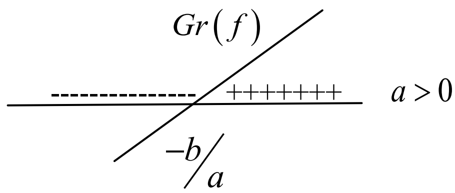


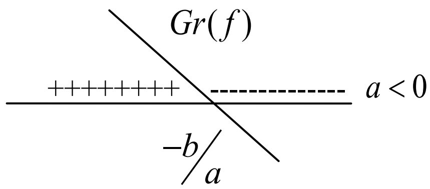
Seja $f(x) = 2x + 3$.

Como a taxa de variação $a = 2 > 0$, temos uma função crescente.

Olhando o $Gr(f)$, vemos que $f(x) > 0$ para todo $x > \frac{-3}{2}$, $f(x) < 0$ para todo $x < \frac{-3}{2}$ e $f(x) = 0$ quando $x = \frac{-3}{2}$

Obs.: Uma maneira prática de reconhecermos o sinal da função quando observamos o seu gráfico é fazendo o resumo:





Exemplo 2:

Resolva as inequações:

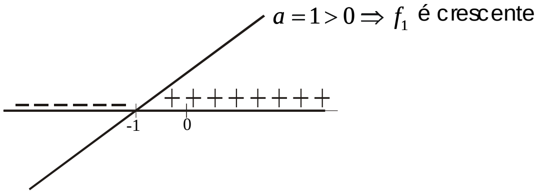
a) $(x+1)(4-2x) \geq 0$

b) $(3x-4)^5 (x-3) > 0$

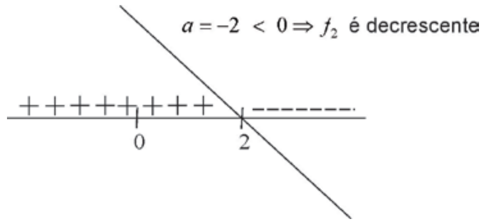
Soluções:

a) Temos um produto de $f_1(x) = x + 1$ com $f_2(x) = 4 - 2x$ e queremos determinar todos os valores x que tornam o produto $f_1(x) \cdot f_2(x) \geq 0$.

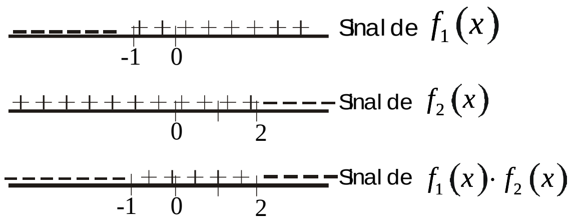
Estudo de $f_1(x) = x + 1$:



Estudo de $f_2(x) = 4 - 2x$:



Resumindo:



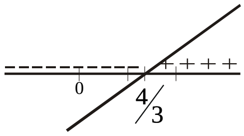
Assim vemos que $f_1(x) \cdot f_2(x) \geq 0$ quando $-1 \leq x \leq 2$ e $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$ quando $x < -1$ ou $x > 2$

Finalmente, o conjunto solução da inequação $(x+1)(4-2x) \geq 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$.

b) Chamando $g_1(x) = 3x - 4$ e $h(x) = (3x-4)^5$, vemos que o zero de h e os sinais das imagens $h(x)$ são idênticos aos da função real $g_1(x)$. Portanto, para estudar o sinal do produto $(3x-4)^5 \cdot (x-3)$, basta estudar o sinal de $(3x-4) \cdot (x-3)$.

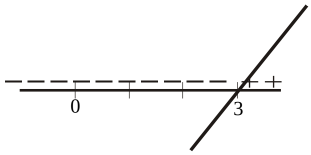
Sinal de $g_1(x) = 3x - 4$:

Como $a = 3 > 0$, então g_1 é crescente e $x = \dfrac{4}{3}$ é o seu único zero.

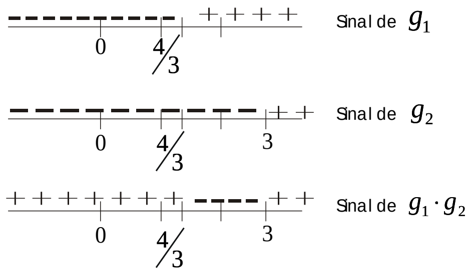


Sinal de $g_2(x) = x - 3$:

Como $a = 1 > 0$, então g_2 é crescente e possui um único zero em $x = 3$.



Resumo:



A solução da inequação $(3x-4)^5 \cdot (x-3) > 0$ é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < \dfrac{4}{3} \text{ ou } x > 3 \right\} = \left(-\infty, \dfrac{4}{3} \right) \cup (3, +\infty)$.

6.4 Exercícios

1) Para a limpeza da cisterna (reservatório de água) de um condomínio, com capacidade de 30.000 litros, foi ligada uma bomba de sucção às 6:00 horas da manhã. Às 9:00 horas do mesmo dia, o nível da cisterna marcava que ela ainda continha 87,5% de sua capacidade total.

a) Escreva uma função que forneça o volume de água da cisterna em função do tempo em que a bomba ficar ligada.

b) Quanto tempo a bomba deve ficar ligada para esvaziar completamente a cisterna?

2) Um retângulo tem área a m^2. Se a base for aumentada em 50%, qual o decréscimo percentual necessário na altura para manter a mesma área a m^2?

3) Responda Verdadeiro ou Falso:

a) O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional ao comprimento do seu lado.

b) A área de um quadrado é diretamente proporcional ao comprimento do seu lado.

c) O comprimento de uma circunferência é inversamente proporcional ao comprimento do seu raio.

d) A área de um círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio.

e) O volume de um cubo é inversamente proporcional ao comprimento de sua aresta.

4) Esboce os gráficos das funções:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = -\frac{1}{x}$

5) Determine o domínio de:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x}$ d) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-4}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-7}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-7}}$

6) Esboce o gráfico de:

a) $y = \frac{-x}{3} + 1$ c) $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $y = ax - \sqrt{2}$ d) $y = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ x+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 4 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

7) Sendo $f(x) = ax + b$, determine a e b para que o $Gr(f)$ contenha os pontos $A(1,2)$ e $B(2,3)$.

8) Resolva as inequações:

a) $(x-1)^3(4-2x) \geq 0$ b) $\frac{x-1}{(4-2x)^5} \geq 0$ c) $(x+1)^2(x-3) > 0$

d) $(x+1)^4 \cdot (3x+5) \leq 0$ e) $(x-2)^2(x-1) > 0$

9) Prove que o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma linha reta.

10) Prove que toda reta contida no plano cartesiano, não perpendicular ao eixo x, é gráfico de uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$.

11) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(xy) = xf(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, então mostre que $f(x) = ax$ em que a é uma constante.

7

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, em que $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, é chamada de *função quadrática*.

O estudo das funções quadráticas tem inspiração na resolução de problemas muito antigos, desde os tempos dos babilônios (2000 a.C.). Tais resoluções utilizavam igualdades envolvendo o quadrado da incógnita, hoje conhecidas como equações do 2º grau.

É bom lembrar que as notações algébricas usadas atualmente não existiam naquela época. As resoluções eram numéricas.

Problemas do tipo "*dividir um segmento de reta em duas partes, de modo que o produto das medidas dessas partes seja igual a um número fixado*" ou "*encontrar o lado de um quadrado se a área menos o lado resulta em um número dado a princípio*" aparecem, com as respectivas soluções na forma de receita numérica, em registros babilônicos de aproximadamente 4.000 anos atrás.

7.1 Casos particulares

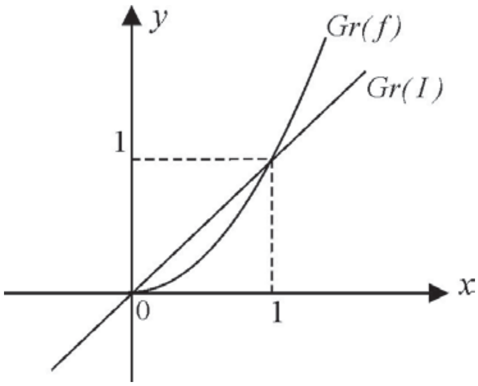
Vamos iniciar o estudo das funções quadráticas por alguns casos particulares:

1º) Quando $a=1$ e $b=c=0,$ temos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$.

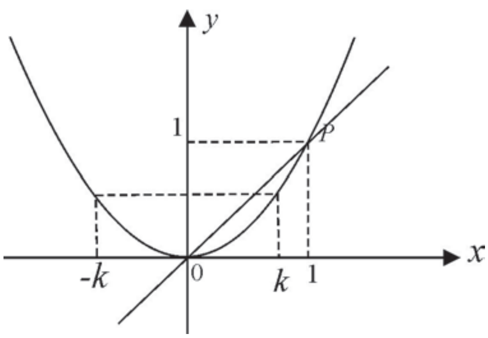
Começamos observando que $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ e $f(x)>0\quad \forall x\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$.

Também $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, logo o seu gráfico será simétrico em relação ao eixo *y*. Portanto, para representar o gráfico de f no sistema cartesiano, basta conhecermos as imagens $f(x)$ para $x > 0$, devido à simetria acima observada.

Os pontos $O(0,0)$ e $P(1,1)$ pertencem ao gráfico de f e, mais, quando $0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2$ e quando $x > 1 \Rightarrow x < x^2$. Desse modo, se comparamos o $Gr(f)$ com o gráfico da função identidade $I(x) = x$, que é uma reta passando por *O* e *P*, vemos que o $Gr(f)$ está abaixo do $Gr(I)$ para $0 < x < 1$ e acima para $x > 1$.



Levando em conta que :



- $f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$
- $f(x) < I(x)$ para $0 < x < 1$
- $f(x) > I(x)$ para $x > 1$
- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- Se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f$, é crescente em $\mathbb{R}_+$
- Se $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f$, é decrescente em $\mathbb{R}_-$

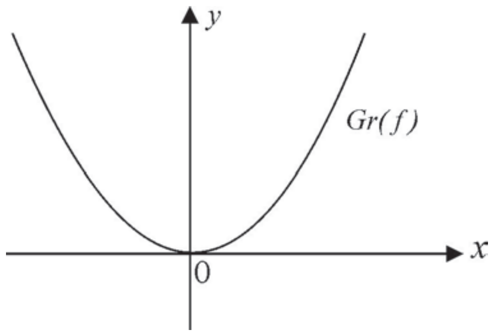
A figura traçada pode ser o gráfico de uma função f que tem as propriedades listadas ao seu lado. No entanto, somente essas propriedades não nos garantem que o gráfico é o da figura, pois elas não nos fornecem informações sobre possíveis mudanças, na concavidade e inflexões do seu gráfico. Informações sobre concavidades e inflexões de gráficos de funções serão estudadas na disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Com o que foi estudado até agora e marcando alguns pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano, aceitemos como gráfico da função $f(x) = x^2$ o traçado:

Observe que:

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_+$



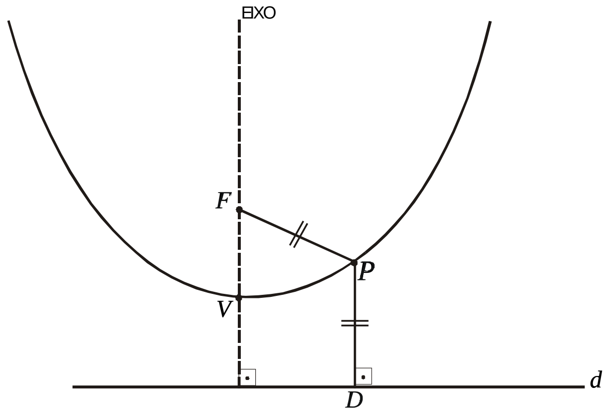
A curva dada pelo $Gr(f)$ é chamada *parábola* e o ponto $O(0,0)$ do gráfico é denominado *vértice da parábola*.

Apolônio de Perga (262-190 a.C.) em sua obra fundamental, intitulada *Cônicas*, denominou de parábola a curva plana obtida da seção, do cone circular reto, por um plano paralelo à sua geratriz (BOYER, 1996; MILIES; BUSSAB, 1999).

A propriedade geométrica caracterizadora da parábola de Apolônio é também satisfeita pelo gráfico da função quadrática. Daí o nome parábola dado ao gráfico dessa função.

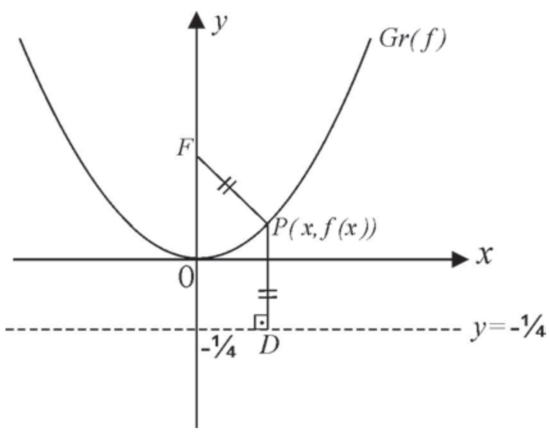
Da geometria, temos a definição de parábola: *dados um ponto F e uma reta d que não o contém, chama-se parábola o conjunto dos pontos P do plano equidistantes de F e de d*.

F é o *foco* e d é a *diretriz* da parábola. A reta perpendicular a d que passa por F é o eixo da parábola, e o ponto V de interseção da parábola com o eixo é o vértice.



$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

No plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = x^2$ é a parábola de foco no ponto $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$, e a diretriz da definição geométrica citada acima é a reta horizontal $y = \frac{-1}{4}$. Para justificar, basta provar que $\overline{PF} = \overline{PD}$, em que P é um ponto sobre o $GR(f)$ e D é o ponto da diretriz obtido da projeção vertical de P sobre d.



Sendo $P\left(x, x^2\right)$, temos:

$$\overline{PD} = f(x) + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{1}{4} \ e \ \overline{PF} = \sqrt{(x-o)^2 + \left(f(x) - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}.$$

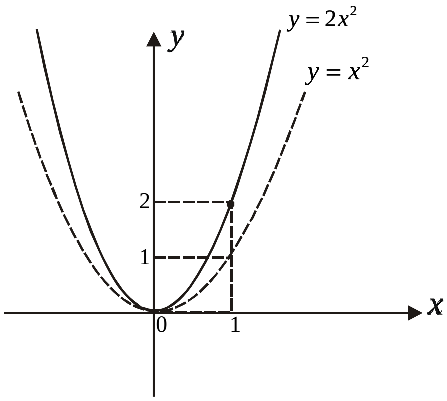
Assim, $\overline{PD} = \overline{PF}$. Portanto, os pontos P do gráfico de f são os pontos da parábola de Apolônio.

A partir do gráfico de $f(x) = x^2$, podemos traçar o gráfico de $g(x) = ax^2 \quad (a \neq 0)$, multiplicando por a o valor de $f(x)$. Isto é: $g(x) = a \cdot f(x)$.

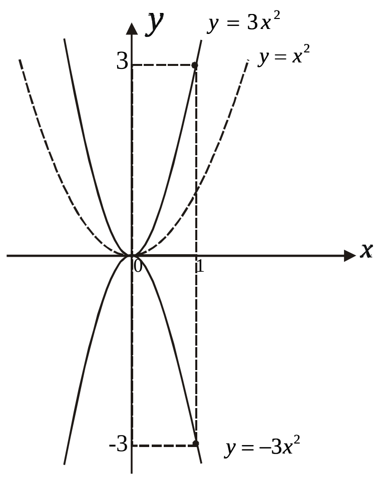
Assim o *Gr (g)* será uma contração ou expansão vertical do *Gr (f)*, conforme 0 < *a* < 1 ou *a* >1.

Exemplo:

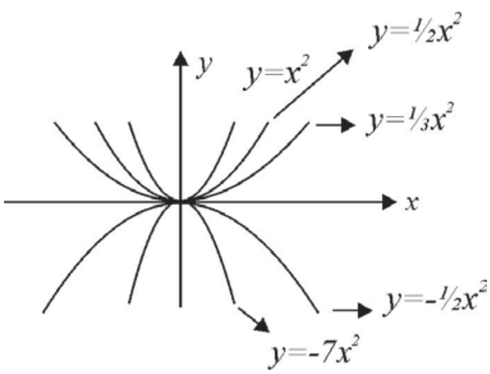
a) $y = 2x^2$



b) $y = -3x^2$



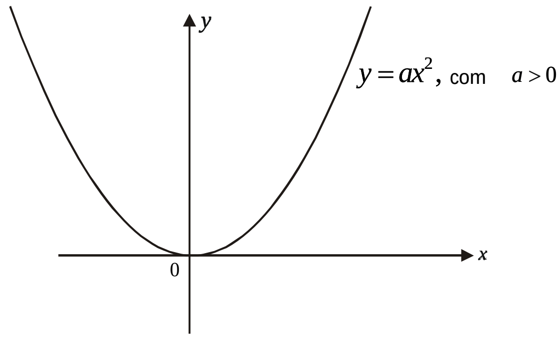
c) $y = ax^2$



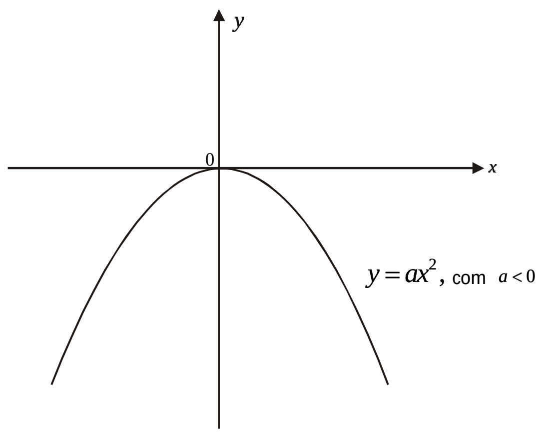
..

Assim, temos:

- Se $a > 0$, então $y = ax^2 \geq 0 \ \ \forall \, x \in \mathbb{R}$, e o conjunto imagem da função é $\mathbb{R}_+$. Nesse caso, dizemos que o gráfico tem concavidade voltada para cima ou simplesmente concavidade para cima.



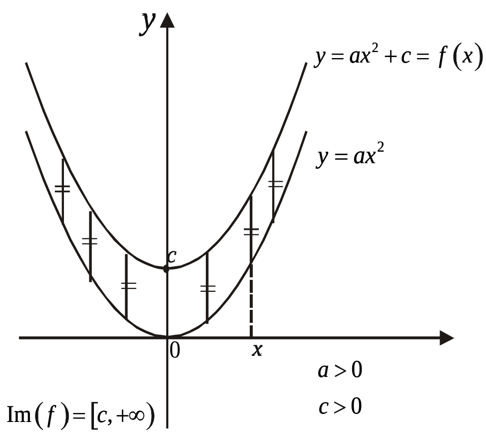
- Se $a < 0$, então $y = ax^2 \leq 0 \ \ \forall \, x \in \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $\mathbb{R}_-$. Nesse caso, dizemos que o gráfico tem concavidade voltada para baixo ou simplesmente concavidade para baixo.

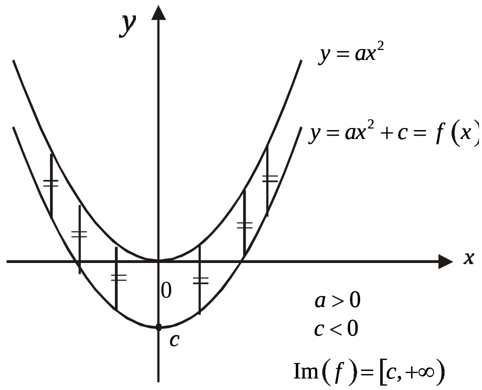


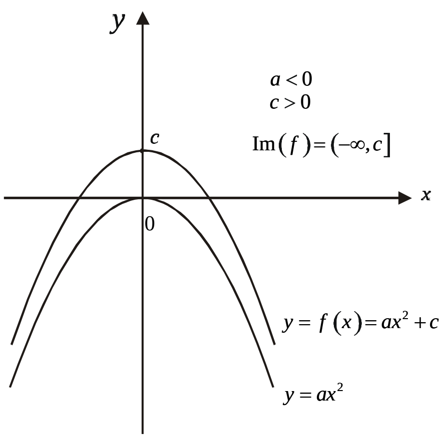
Em ambos os casos, temos o vértice V da parábola na origem $O(0,0)$.

2º) Quando $a \neq 0$, $c \neq 0$ e $b = 0$, temos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + c$.

Para obter o gráfico de *f*, construímos o gráfico de $y = ax^2$ e adicionamos o valor *c* nas imagens de cada ponto. Assim, estaremos fazendo uma translação para cima $(c > 0)$ ou para baixo $(c < 0)$ no gráfico de $y = ax^2$ para obter o gráfico de $f(x) = ax^2 + c$.



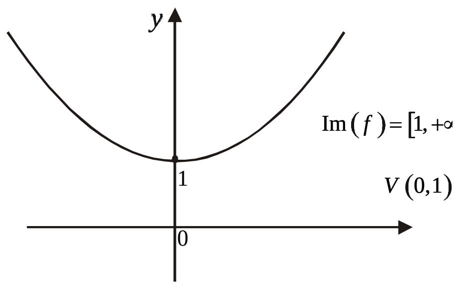




O vértice da parábola dada pelo $Gr(f)$ tem coordenadas $V(0, c)$.

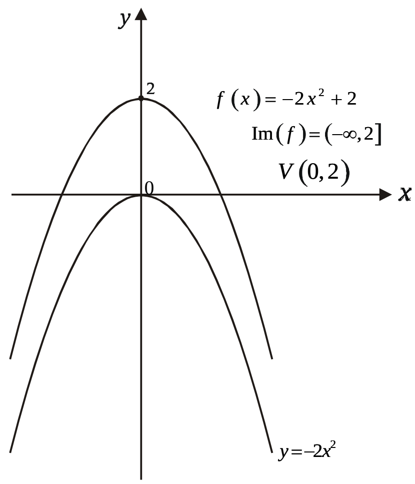
Exemplo 1:

$f(x) = x^2 + 1$



Exemplo 2:

$f(x) = -2x^2 + 2$



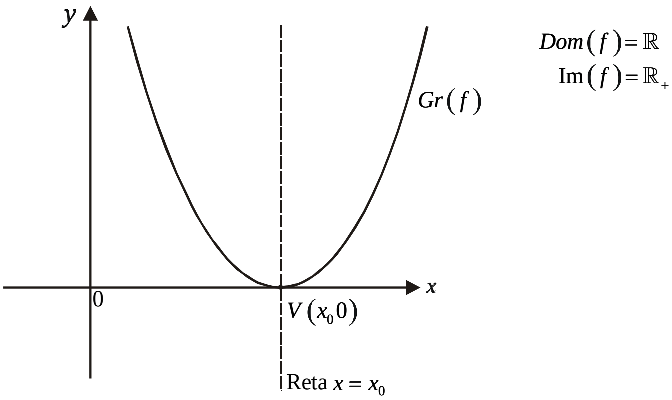
3º) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a(x-x_0)^2$, em que x_0 é um número real fixado e $a\neq 0$. Vamos começar tomando $a=1$. Assim, temos $f(x)=(x-x_0)^2$.

Observemos que:

- O único zero da função f é o número x_0. Isto é: $f(x_0)=0$;
- $f(x)\geq 0 \ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$;
- $f(x_0+k)=f(x_0-k)$, $\forall\, k\in\mathbb{R}$, o que significa que o gráfico de *f* é simétrico em relação à reta $x=x_0$;
- se chamamos $x-x_0=t$, temos: se $x\in\mathbb{R}$, então $t\in\mathbb{R}$ e $f(x)=g(t)=t^2$, do que se conclui que o gráfico de *f* é uma parábola com vértice em $t=0$ e $y=0$, mas $t=0\Leftrightarrow x-x_0=0\Leftrightarrow x=x_0$. Portanto o vértice é $V(x_0,0)$.

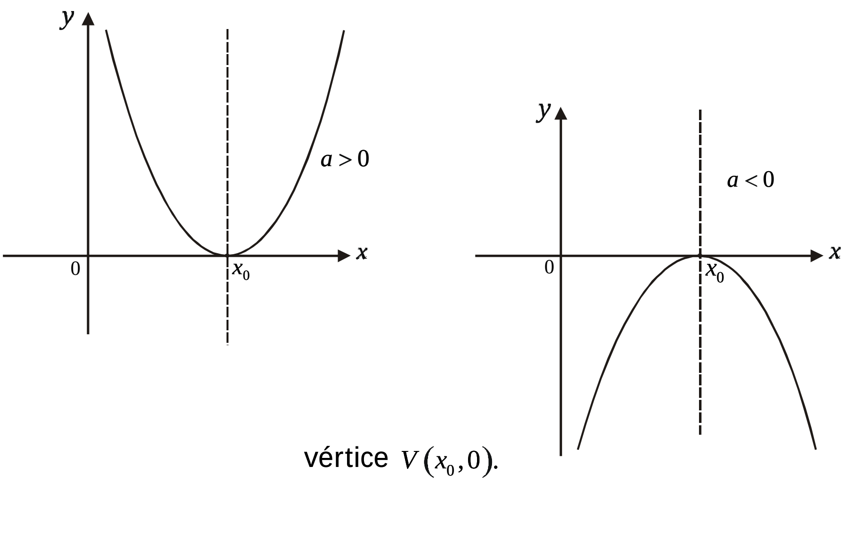
Isso significa que o vértice $V(x_0,0)$ é um translado horizontal do vértice $V(0,0)$.

Com as informações acima, temos o gráfico de $f(x)=(x-x_0)^2$, assim:



No caso em que $f(x)=a(x-x_0)^2$, temos um gráfico semelhante ao anterior, mas agora as imagens estão multiplicadas por a.

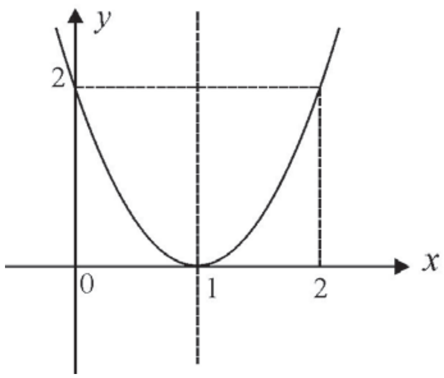
Gráfico de $f(x)=a(x-x_0)^2$.



vértice $V(x_0, 0)$.

Exemplo 1:

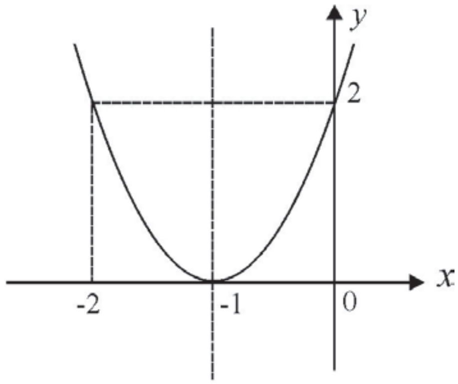
$y = f(x) = 2(x-1)^2$



Eixo de simetria $x = 1$

Exemplo 2:

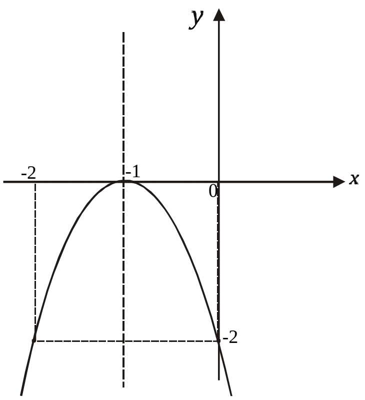
$y = f(x) = 2(x+1)^2$



Eixo de simetria $x = -1$

Exemplo 3:

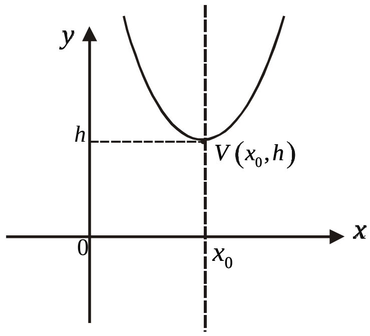
$y = f(x) = -2(x+1)^2$



4º) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a(x-x_0)^2+h$, em que a, h e x_0 são números reais fixados.

O gráfico da função *f* pode ser obtido do gráfico de $y=a(x-x_0)^2$ do caso **3º**, adicionando-se o valor *h* em todas suas imagens. Desse modo, obtém-se para gráfico de *f* o gráfico de $y=a(x-x_0)^2$ transladado para cima $(h>0)$ ou para baixo $(h<0)$.

Gráfico de *f* para $a > 0,\ x_0 > 0$ e $h > 0$.



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im}(f) = [h, +\infty)$

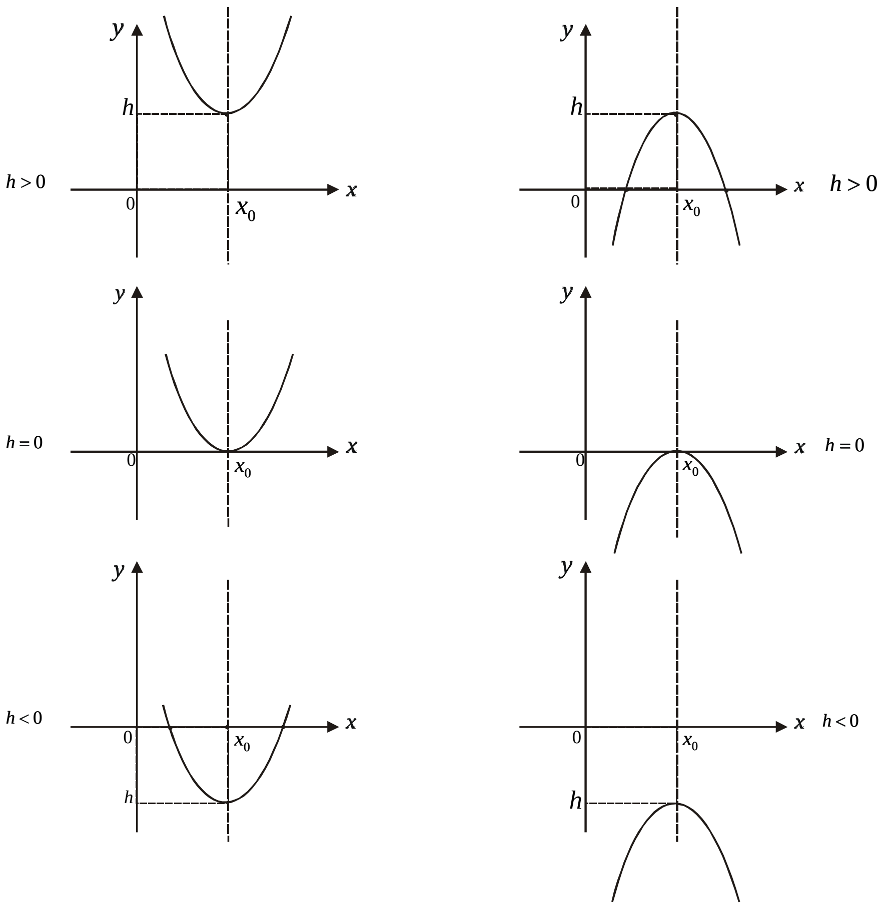
$x = x_0$ é o eixo de simetria.

$V(x_0, h)$ é o vértice da parábola.

Observe que o vértice $V(x_0, h)$ é tal que $h = f(x_0)$; logo, $V(x_0, h) = V(x_0, f(x_0))$.

Variando os sinais de *a* e *h*, temos os possíveis gráficos para $f(x) = a(x - x_0)^2 + h$:

$a > 0$ $a < 0$



De acordo com as possibilidades de gráficos da página anterior, temos:

i) O $Gr(f)$ não intersecta o eixo x quando $a > 0$ e $h > 0$ ou $a < 0$ e $h < 0$.

ii) O $Gr(f)$ intersecta o eixo x num único ponto quando $h = 0$.

iii) O $Gr(f)$ intersecta o eixo x em dois pontos distintos quando $a > 0$ e $h < 0$ ou $a < 0$ e $h > 0$.

Resumindo:

i) Se a e h têm o mesmo sinal, então $Gr(f)$ não intersecta o eixo x. Isso significa que a função f não possui zeros.

ii) Se $h = 0$, então $Gr(f)$ intersecta o eixo x num único ponto. Significa que a função f possui um único zero $x = x_0$.

iii) Se a e h têm sinais contrários, então $Gr(f)$ intersecta o eixo x em dois pontos distintos, significando que a função f possui dois zeros distintos.

Obs: As representações no plano cartesiano dos gráficos das funções $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$ e $y = a(x - x_0)^2 + h$ foram obtidas através de translações, reflexões, contrações ou expansões do gráfico de $y = x^2$. Esse assunto será estudado com mais detalhes no capítulo 8.

Exemplo 1:

$y = f(x) = (x+2)^2 - 1$

Sabemos que:

a) O gráfico é uma parábola de concavidade para cima, com eixo de simetria $x = -2$ e vértice $V(-2,-1)$.

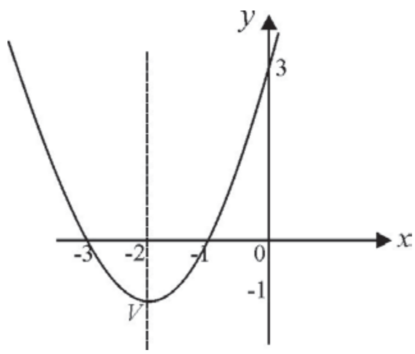
b) O $Gr(f)$ intersecta o eixo y no ponto $(0,3)$.

c) Os zeros da função f são raízes da equação $f(x)=0$. Logo, $(x+2)^2-1=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{1} \Leftrightarrow |x+2|=1 \Leftrightarrow x+2=1$ ou $x+2=-1 \Leftrightarrow$
$x=-1$ ou $x=-3$

d) O $Gr(f)$ intersecta o eixo x no ponto $(-3,0)$ e em $(-1,0)$.

Esboço do gráfico:



Exemplo 2:

Resolva a equação $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$

Solução: para $x \neq 2$, temos: $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x-2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{(x+2)(x-2)+4+x-2}{2(x-2)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{2(x-2)}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \text{ ou } x+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-2$$

Conjunto solução $S=\{-2,1\}$.

7.2 Forma geral (trinômio do 2º grau)

Voltemos agora para o caso geral da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c,$ em que a, b, c são constantes reais e $a\neq 0$.

Mostremos que toda função dada pela lei $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ pode ser expressa na forma $f(x)=a(x-x_0)^2+h$ (x_0 e h constantes).

Consequentemente, terá como gráfico uma parábola com eixo de simetria a reta $x=x_0$ e com vértice $V(x_0,h)$.

O método que usaremos para obter o resultado pretendido é conhecido como *método de completar o quadrado*.

$$f(x)=ax^2+bx+c= \; a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]= \; a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\overbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]= \; a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]= \; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}= \; a(x-x_0)^2+h$$

Como a, b e c são constantes com $a\neq 0$, chamamos $-\dfrac{b}{2a}=x_0$ e $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=h$, as quais são constantes reais.

Conclusão: $f(x)=ax^2+bx+c= \; a(x-x_0)^2+h$, em que $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ e $h=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Concluímos, então, que o $Gr(f)$ é uma parábola com eixo de simetria $x_0=-\dfrac{b}{2a}$,

vértice $V(x_0,h)= \left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right),$ concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

7.3 Zeros da função quadrática

Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ são os elementos $x \in Dom(f)$ tais que $f(x) = 0$. Isto é, os zeros da função f são as raízes da equação $f(x) = 0$.

O conjunto dos zeros de f é denotado por $z(f) = \{x \in Dom(f);\ f(x) = 0\}$ e coincide com o conjunto solução da equação $f(x) = 0$.

Resolvendo-se a equação $f(x) = 0$ pelo método do completamento do quadrado, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sendo que $a \neq 0$, temos $4a^2 > 0$. E, como na última igualdade acima, o primeiro membro é um quadrado perfeito, devemos ter $b^2 - 4ac \geq 0$ para que a equação tenha solução.

Portanto, considerando $b^2 - 4ac \geq 0$, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \iff \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \iff \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|\,a\,|} \iff \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right|$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \iff x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim, temos os zeros $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$z(f) = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

Chamando $b^2 - 4ac = \Delta$, temos:

Se $\Delta = 0,$ então $z(f) = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.

Se $\Delta > 0,$ então $z(f) = \{x_1, x_2\}$.

Se $\Delta < 0,$ a função f não possui zeros.

Obs.: Quando $\Delta \geq 0,$ os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dados pela expressão $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, chamada de fórmula geral da solução da equação do 2º grau, também conhecida por fórmula de Bhaskara.

Bhaskara (1114-1185 d.C.) foi um matemático hindu, que, entre outros feitos, difundiu a fórmula acima, que já era conhecida quase um século antes pelo matemático hindu Sridhara.

Obs.: Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + h$, em que $x_0 = \frac{-b}{2a}$ e $h = \frac{4ac - b^2}{4a}$, temos então $h = \frac{-\Delta}{4a} \Leftrightarrow \Delta = -4ah$.

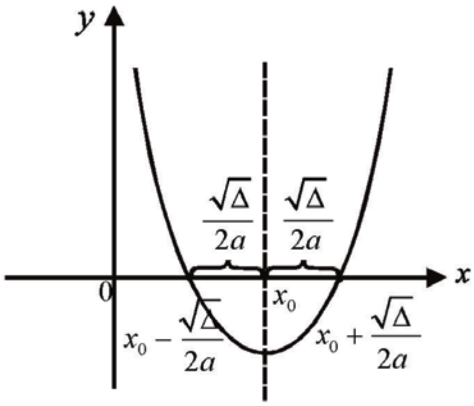
Daí concluímos que:

i) a e h terem o mesmo sinal equivale a ter $\Delta < 0$;

ii) Ter $h = 0$ equivale a ter $\Delta = 0$;

iii) a e h terem sinais contrários equivale a ter $\Delta > 0$.

Obs.: Quando $\Delta > 0$, os dois zeros são distintos e simétricos em relação ao eixo de simetria $x = \frac{-b}{2a}$.

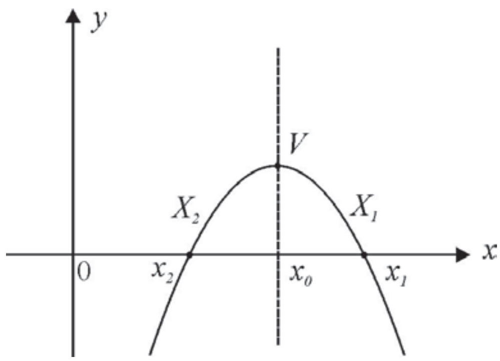


$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Em outras palavras, $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} = x_0$: dizemos que x_0 é o ponto médio entre x_1 e x_2 e, nesse caso, o eixo de simetria, dado por $x = x_0$, é a mediatriz do segmento $\overline{X_1X_2}$, em que $X_1(x_1, 0)$ e $X_2(x_2, 0)$.



7.4 Forma fatorada

A expressão que define a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma fatorada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são os zeros da função.

De fato:

Se $\Delta = 0$ significa $h = 0$, logo $f(x) = a(x - x_0)^2 + h$. Sendo $h = 0$, temos:

$f(x) = a(x - x_0)^2 = a(x - x_0)(x - x_0)$.

Nesse caso, $x_1 = x_2 = x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ é o único zero.

Se $\Delta > 0$, temos dois zeros distintos, $x_1 = \dfrac{-b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, logo

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{\Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Assim, temos a soma dos zeros $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ e o produto deles $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Substituindo, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2\right] =$$

$$a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Conclusão: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são os zeros da função *f*.

Exemplo:

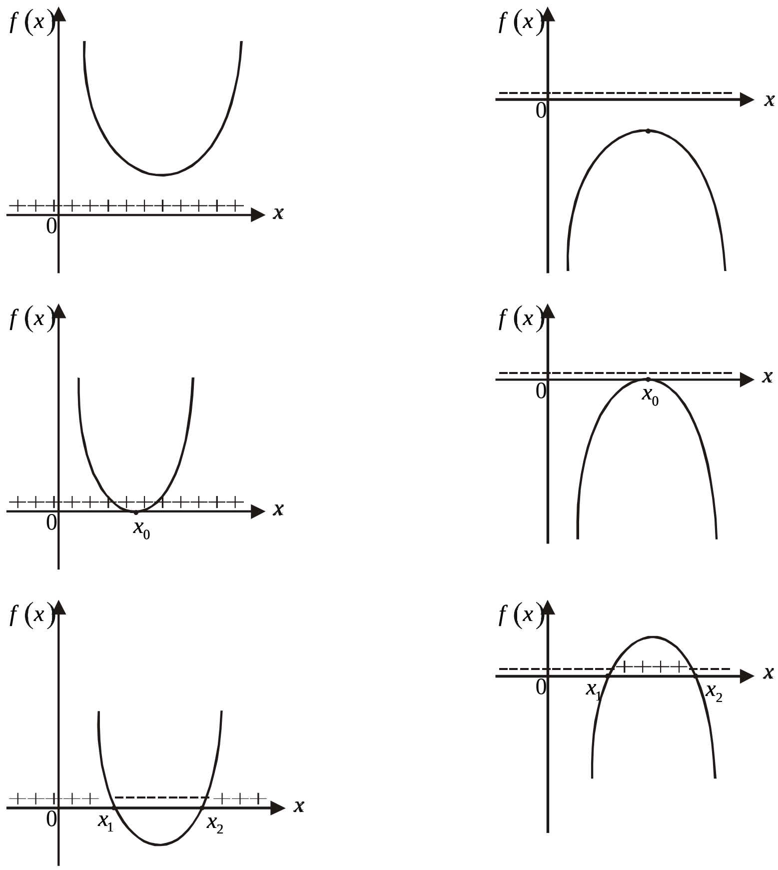
Seja $f(x) = -3x^2 - 3x + 18$.

Temos $a = -3$, e os zeros são $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$. Logo:

$f(x) = -3x^2 - 3x + 18 = -3(x - 2)(x + 3)$

7.5 Sinal da função quadrática

Uma maneira muito prática para se estudar o sinal da função quadrática f é esboçar o seu gráfico e observar nele quais pontos $x \in \mathbb{R}$ têm imagem $f(x) > 0$ e quais pontos $x \in \mathbb{R}$ têm imagem $f(x) < 0$.



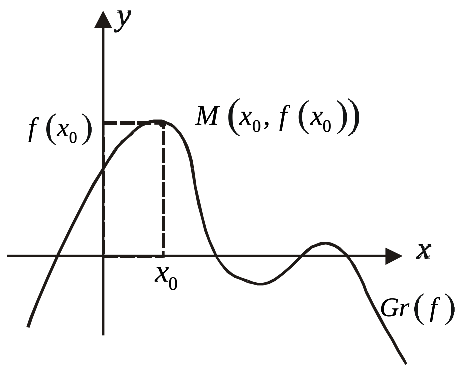
Exemplo:

Resolva a inequação: $\dfrac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 0$. Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R};\ |x| > 2\}$.

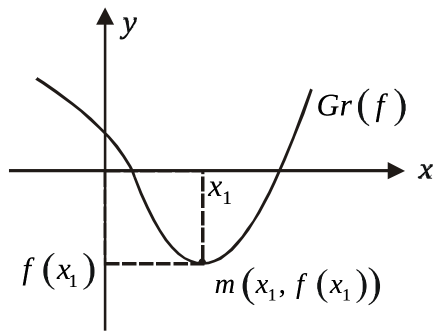
7.6 Máximos e mínimos

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.

Dizemos que $x_0 \in A$ é um *ponto de máximo* da função f se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in A$. Nesse caso, dizemos que $f(x_0)$ é o *valor máximo* da função, e o ponto $M(x_0, f(x_0))$ do plano cartesiano é um ponto máximo do $Gr(f)$.



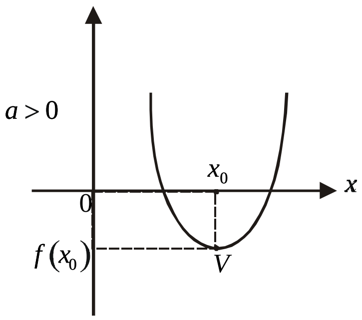
Dizemos que $x_1 \in A$ é um *ponto de mínimo* da função *f* se $f(x_1) \leq f(x)$ $\forall x \in A$. Nesse caso, dizemos que $f(x_1)$ é o *valor mínimo* da função, e o ponto $m(x_1, f(x_1))$ do plano cartesiano é um ponto mínimo do $Gr(f)$.

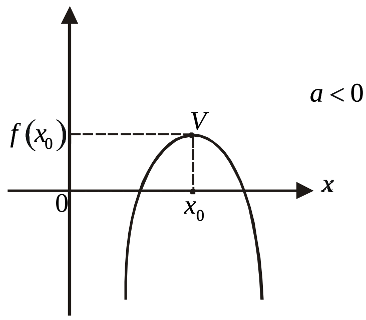


Exemplos:

1) Uma função quadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, quando escrita na forma $f(x)=a(x-x_0)^2+h$, mostra claramente que:

- Se $a>0$, então o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima e, portanto, $x_0=\dfrac{-b}{2a}$ é ponto de mínimo da função. Assim, o vértice da parábola $V(x_0, f(x_0))$ nos dá o ponto de mínimo e o valor mínimo correspondente.





- Se $a<0$, então o $Gr(f)$ tem concavidade voltada para baixo e $x_0=\dfrac{-b}{2a}$ é ponto de máximo da função. O vértice da parábola $V(x_0, f(x_0))$ nos dá o ponto máximo do gráfico da função quadrática.

Conclusão: O vértice $V(x_0, f(x_0))$ do gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ será ponto máximo se $a<0$ e ponto mínimo se $a>0$.

2) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2-4x+4$. Observe que $x_0=2$ é o ponto de mínimo de f e o valor mínimo é $f(2)=0$. Essa função f não possui máximo. No entanto, a função $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x^2-4x+4$ possui máximo e mínimo no seu domínio, a saber: $x_0=0$ é o ponto de máximo e $x_1=1$ é o ponto de mínimo de g. Esboce o $Gr(g)$.

7.7 Problemas de máximos ou mínimos

Problema 1

Encontre dois números reais cuja soma seja 16 e o produto, o maior possível.

Solução:

Transformaremos o problema do contexto num modelo matemático.

Sejam x e y os números procurados. Logo, $x+y=16$ e $xy=P$. Portanto, $P=x(16-x)$. Devemos procurar o valor de x que torna máximo o valor de P. Isso é equivalente a encontrar o ponto de máximo da função $P=16x-x^2$.

Sendo P uma função quadrática com zeros $x_1=0$ e $x_2=16,$ o seu vértice será $V(x_0,y_0)$ com $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{0+16}{2}=8$ e $y_0=P(x_0)=P(8)=64$.

Assim, o valor de x que torna máximo o produto P é $x=x_0=8$. Sendo $x=8$, temos $x+y=16$. Logo, $y=8$.

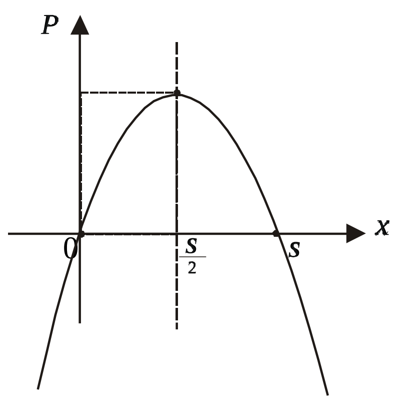
Resposta: os dois números procurados são 8 e 8.

Esse problema pode ser enunciado e resolvido de modo genérico, conforme segue.

Determine dois números com soma s tal que o produto seja máximo.

Modelo: $\begin{cases} x+y=s \\ xy=P \end{cases}$

Logo, $P=x(s-x)$.



P será máximo quando

$x=\dfrac{s}{2}$ e $y=\dfrac{s}{2}$.

O valor do produto máximo será $\dfrac{s^2}{4}$.

Problema 2

Prove que, dentre todos os retângulos de perímetro fixado, o de maior área é o quadrado.

Solução:

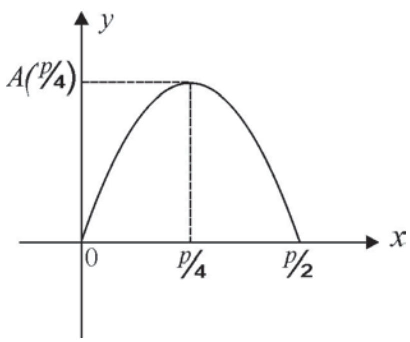
Representemos por x e y as medidas dos lados desse retângulo. Logo, o seu perímetro p fixado pode ser expresso por $p = 2x + 2y$ e sua área, por $A = xy$. Portanto, temos as condições:

$$\begin{cases} 2x + 2y = p \\ xy = A \end{cases} \qquad \text{(} p \text{ constante fixada } \textit{a priori}\text{)}$$

Desejamos encontrar os valores x e y com a condição $2x + 2y = p$ que tornam a função A máxima.

Assim, de $2x + 2y = p$ temos $0 \leq x, \; y \leq \dfrac{p}{2}$ e $A = \dfrac{x(p-2x)}{2}$.

Como A é uma função quadrática, com domínio $Dom(A) = \left[0, \dfrac{p}{2}\right]$, o seu máximo fica determinado conhecendo-se as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função. Geometricamente temos:



Logo o vértice terá coordenadas

$$V\left(\frac{p}{4}, A\left(\frac{p}{4}\right)\right) = \left(\frac{p}{4}, \frac{p^2}{16}\right)$$

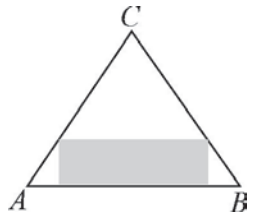
Resposta: Os lados do retângulo de área máxima serão $x = \dfrac{p}{4}$ e $y = \dfrac{p}{4}$, do que se conclui que, para qualquer perímetro fixado, tem-se $x = y$ e, portanto, o retângulo de área máxima é o quadrado.

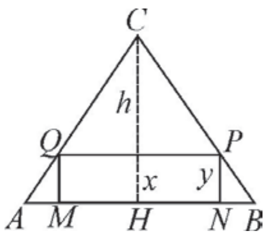
Problema 3

Encontre as dimensões do retângulo de área máxima, que se pode inscrever num triângulo equilátero, de modo que um lado do retângulo esteja sobre um dos lados do triângulo.

Solução:

Seja ABC o triângulo equilátero de lado medindo ℓ cm.

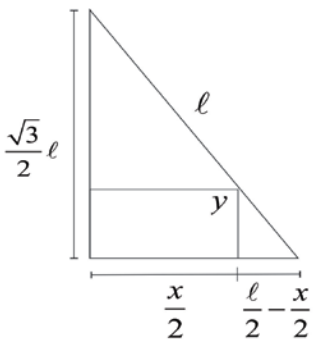




Denominamos de x e de y, respectivamente, a base e a altura do retângulo inscrito.

A área do retângulo é dada por $A = xy$.

Procuremos uma relação entre as variáveis x e y a fim de expressar a área A em função de uma só variável.

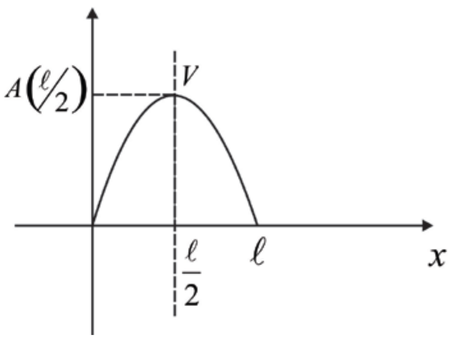


A altura h do triângulo é $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$. Da semelhança dos triângulos CHB e PNB, temos:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BN}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{y} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell}{2}-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}{y} = \frac{\ell}{\ell - x} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}(\ell - x)$$

Portanto, $A = \frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot(\ell - x)$ com $0 \leq x \leq \ell$.

Determinemos o valor de x que maximiza a função $A:[0,\ell]\to\mathbb{R}$ dada por $A(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot(\ell-x)$. A função A é quadrática. Esboçando o gráfico, temos:



Zeros da função:

$\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot(\ell-x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ ou $x=\ell$

A reta $x=\frac{\ell}{2}$ é o eixo de simetria do $Gr(f)$.

Logo, o ponto de máximo da função está em $x=\frac{\ell}{2}$ e o valor da área máxima é $A\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}\ell^2}{8}$.

Sendo $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\ell-x)$, temos $x=\frac{\ell}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell$.

Resposta: O retângulo inscrito de área máxima tem lados medindo $\frac{\ell}{2}$ cm e $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell$ cm.

7.8 Exercícios

1) Mostre que a função $f(x)=ax^2+c \;\; (a\neq 0 \text{ e } c\neq 0)$ só possui zeros se o produto ac for um número negativo.

2) Dê os pontos em que o gráfico de $f(x)=(x-2)^2-9$ corta o eixo x.

3) O gráfico de $f(x)=(x-3)^2-h$ corta o eixo x no ponto $(1,0)$. Determine o valor de h e o outro ponto em que o gráfico corta o eixo x.

4) (MACHADO, 1988) Determine a e b reais para que o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + 1$ encontre o eixo x em um único ponto $x_0 = 3$.

5) Prove que, no plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = a(x - x_0)^2 + h$ é a parábola de foco $F = \left(x_0, h + \dfrac{1}{4a}\right)$ e de diretriz a reta horizontal de equação $y = h - \dfrac{1}{4a}$. Conclua então que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ é a parábola com foco $F(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a} + \dfrac{1}{4a})$ e diretriz a reta $y = \dfrac{-\Delta}{4a} - \dfrac{1}{4a}$

6) Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $(x^2)^{\frac{1}{6}} = 3$

b) $(x^3 + 3x^2 + x)^2 = x^4$

7) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 3x \leq 0$

b) $x(3x^2 + 10x + 3) > 0$

c) $(x-9)^3.(x^2 - 3x + 5) < 0$

d) $\dfrac{x^2 - 4}{7 + x^2} \geq 0$

e) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4} \geq 0$

f) $-1 \leq \dfrac{x^2 + 4}{4x} \leq 1$

8) Aos 22 anos de idade, Maria teve seu único filho. Qual era a idade do filho quando o produto de sua idade pela da mãe foi 203?

9) Se $f(x) = x^2$, então mostre que $f(\dfrac{x_1 + x_2}{2}) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

10) Escreva a função que dá a distância do ponto A (3,0) a qualquer ponto da parábola de equação $y = x^2$.

11) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ uma função quadrática. Escreva uma expressão para a função $g(x)$ em termos de a, b e c, cujo gráfico seja a figura obtida do gráfico de f por uma rotação de 180° em torno do seu vértice.

12) Represente geometricamente no plano cartesiano todos os pontos $P(x,y)$ equidistantes do eixo x e do ponto $Q(2,-2)$.

13) Com uma tela de arame de 50m de comprimento, deseja-se cercar um terreno retangular, aproveitando a parede de um armazém como um dos lados da cerca. Determine o comprimento dos lados do retângulo de modo que a área da região cercada seja máxima.

14) (MACHADO, 1988) Em um quadrado $ABCD$ de lado 10 m, inscreve-se um outro quadrado $A'B'C'D'$, de modo que $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = x$. Determine o valor de x que torna mínima a área do quadrado $A'B'C'D'$.

15) Deseja-se construir uma pista de atletismo com 400 metros de comprimento, acoplando-se duas semicircunferências a um retângulo que deverá ser um campo de futebol. Quais as dimensões do retângulo de maior área que poderá ser construído nessas condições?

16) Um sitiante precisa cercar um terreno com formato de um setor circular. Ele dispõe de 360 metros de arame para cercá-lo, dando 3 voltas. Qual deve ser o raio do setor para que a área cercada seja a maior possível? Qual é essa área máxima?

17) Um pedaço de arame de 1 metro de comprimento deve ser cortado em duas partes. Uma parte será dobrada de modo a formar um quadrado, e a outra parte formará uma circunferência. Qual a medida de cada parte do arame a ser cortado para que a soma das áreas das duas figuras formadas seja:

a) máxima? b) mínima?

18) Uma janela normanda tem formato de um retângulo com um semicírculo acoplado na sua base superior. Se o perímetro da janela for p metros, encontre as dimensões da janela que deixa passar a maior quantidade possível de luz.

19) Para participarem do Colóquio de Matemática, os alunos do Camat pretendem alugar um ônibus de 50 lugares. Como normalmente, em toda excursão, nem todos que combinam de fato viajam, será feito um contrato com o proprietário do ônibus: cada um que viajar pagará R$ 80,00 pelo seu lugar mais R$ 5,00 para cada lugar não ocupado no ônibus. Financeiramente, qual quantitativo de lugares ocupados é melhor para o proprietário do ônibus?

8

ESTUDO BÁSICO DE FUNÇÕES

8.1 Operações com funções

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ funções reais definidas no mesmo conjunto *A*. As funções *soma f + g, diferença f - g, produto fg e quociente* $\frac{f}{g}$ das funções *f* e *g* são denotadas e definidas assim:

$(f + g) : A \to \mathbb{R}$ é definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in A$

$(f - g) : A \to \mathbb{R}$ é definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \ \forall x \in A$

$(fg) : A \to \mathbb{R}$ é definida por $(fg)(x) = f(x) \,.\, g(x) \ \forall x \in A$

Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, definimos a função quociente $(\frac{f}{g}) : A \to \mathbb{R}$ por $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in A$.

No entanto, se $g(x) = 0$ para algum valor de $x \in A$, então o domínio da função quociente $\frac{f}{g}$ deverá ser restrito a um subconjunto de *A* no qual a função *g* não se anula.

Assim *Dom* $(\frac{f}{g}) = \{x \in A / g(x) \neq 0\}$ e escrevemos $(\frac{f}{g}) : D \to \mathbb{R}$ é dada por $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \forall x \in D$ em que $D = \{x \in A / g(x) \neq 0\}$.

Exemplo

Se $f(x)=2x+1$ e $g(x)=x^2-4$, temos $Dom(f)=Dom(g)=\mathbb{R}$. Logo,

a) $Dom(f+g)=\mathbb{R}$ e $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x+1+x^2-4=x^2+2x-3$

b) $Dom(f-g)=\mathbb{R}$ e $(f-g)(x)=5+2x-x^2$

c) $Dom(fg)=\mathbb{R}$ e $(fg)(x)=(2x+1)(x^2-4)=2x^3+x^2-8x-4$

d) Para definir a função quociente $\dfrac{f}{g}$, devemos tomar para o domínio um subconjunto que não contém os números -2 e 2. Assim $Dom(\dfrac{f}{g})$ pode ser $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ e $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

8.2 Função par e função ímpar

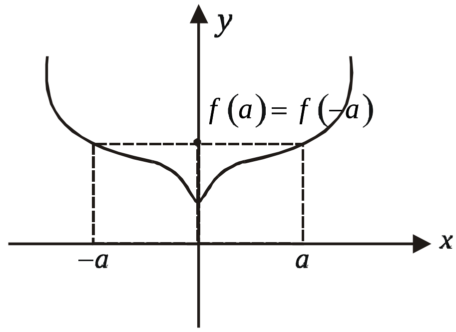
Seja $A\subset\mathbb{R}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, tal que para todo $x\in A$ o seu simétrico $-x\in A$.

a) Dizemos que $f:A\to\mathbb{R}$ é uma função *par* se $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in A$.

b) Dizemos que $f:A\to\mathbb{R}$ é uma função *ímpar* se $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in A$.

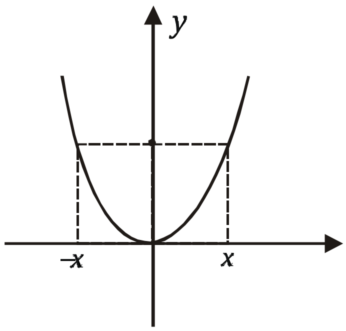
Definições:
Dois pontos P e Q do plano são simétricos em relação a uma reta r desse plano se r é a mediatriz do segmento PQ.
Dois pontos P e Q são simétricos em relação a um ponto O se ele é o ponto médio do segmento PQ.

Observe que, sendo *f* uma função par, $f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in Dom(f)$. Logo, se (a,b) for um ponto qualquer do gráfico de *f*, isto é, $(a,b)\in Gr(f)$, então $b=f(a)=f(-a)$ significa que $(-a,b)\in Gr(f)$. Veja que os pontos (a,b) e $(-a,b)$ são simétricos em relação ao eixo *y*. Então, o $Gr(f)$ é simétrico em relação ao eixo *y*.

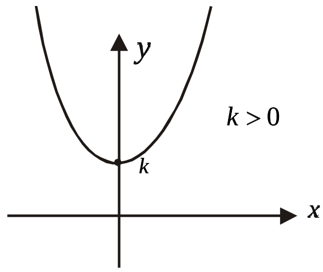


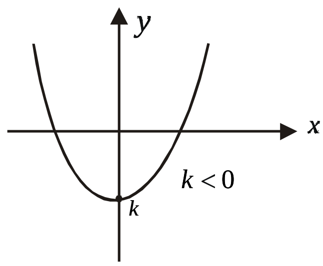
Exemplos de funções pares:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2$

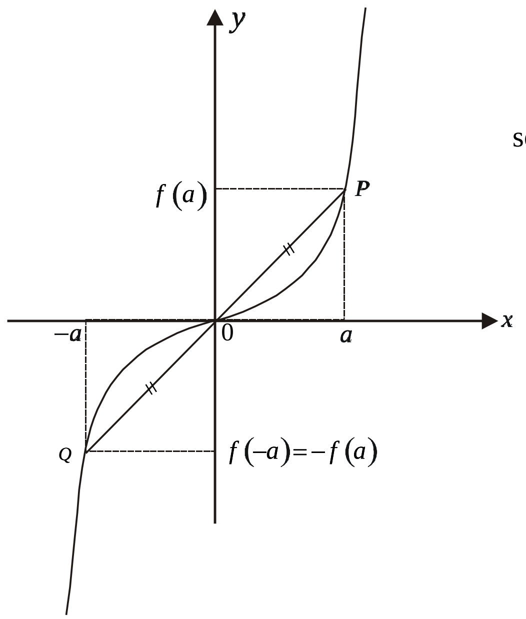


b) $f(x)=x^2+k$ (k constante real)





Para uma função ímpar $f: A \to \mathbb{R}$, temos $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in Df$. Logo, se $(a,b) \in Gr(f)$, então $b = f(a)$. Daí, $-b = -f(a)$ e $-f(a) = f(-a)$. Isto é, $-b = f(-a)$, o que significa que $(-a,-b) \in Gr(f)$. No plano cartesiano, os pontos (a,b) e $(-a,-b)$ são simétricos em relação à origem *O*. Sendo (a,b) um ponto genérico do $Gr(f)$, concluímos que o $Gr(f)$ é simétrico em relação à origem $O(0,0)$.

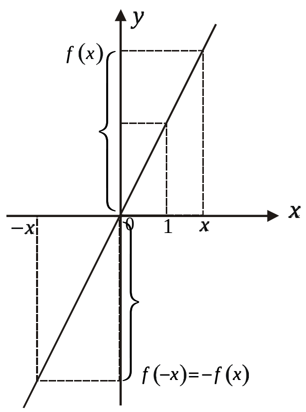


$P(a, f(a))$ e $Q(-a, -f(a))$.

A origem *O* é o ponto médio do segmento *PQ*.

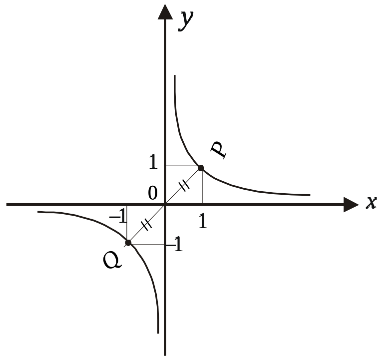
Exemplos de funções ímpares:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x$



$$f(-x) = 2(-x) = -(2x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

As funções abaixo não são pares nem ímpares:

a) $f(x) = x+1$

b) $g(x) = x^2 + x$

c) $h(x) = (x-1)^2$

Justificativas: b) $g(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$; logo, $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$ para muitos valores de x.

A única função que é simultaneamente par e ímpar é a função nula.

Prova:

Suponha que f seja par e ímpar; logo, $f(-x) = f(x)$ e $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom(f)$.

Portanto, $f(x) = -f(x)$ $\forall x \in Dom(f)$. Assim, $2f(x) = 0$, o que acarreta $f(x) = 0, \ \forall x \in Dom(f)$. Isto é, f é a função nula.

Exercícios

1) Se f é uma função ímpar e $0 \in Dom(f)$, então prove que $f(0) = 0$.

2) Se f é uma função par ou função ímpar, então prove que $g(x) = |f(x)|$ é uma função par.

3) Responda se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa, justificando.

A função g dada por $g(x) = |f(x)|$ é uma função par, qualquer que seja a função f.

4) Seja $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq 0 \\ h(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Determine $h(x)$ para que f seja função par.

b) Dê outra expressão para definir a função f.

Resposta: a) $h(x) = -x + 2$ b) $f(x) = |x| + 2$

5) Se f e g são duas funções pares, então prove que:

a) A função soma $f + g$ é par.

b) A função produto fg é par.

6) Se f e g são funções ímpares, então prove que:

a) A função soma $f + g$ é ímpar.

b) A função produto fg é par.

7) Prove que a função produto de uma função par com uma função ímpar é uma função ímpar.

8) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, então mostre que f é ímpar.

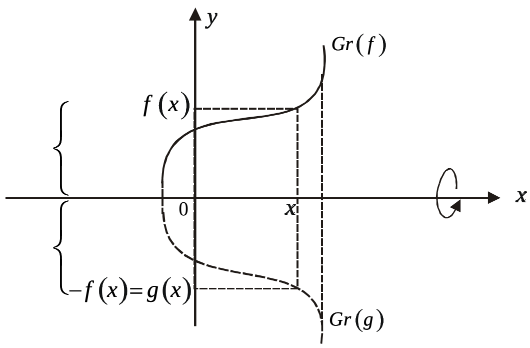
8.3 Reflexão

a) Em relação ao eixo OX

Dada uma função f, dizemos que o gráfico de g é uma reflexão do gráfico de f em torno do eixo OX se $g(x) = -f(x)$ para todo x dos seus domínios.

Para cada ponto $(x, f(x)) \in Gr(f)$, temos o ponto $(x, -f(x)) = (x, g(x)) \in Gr(g)$.

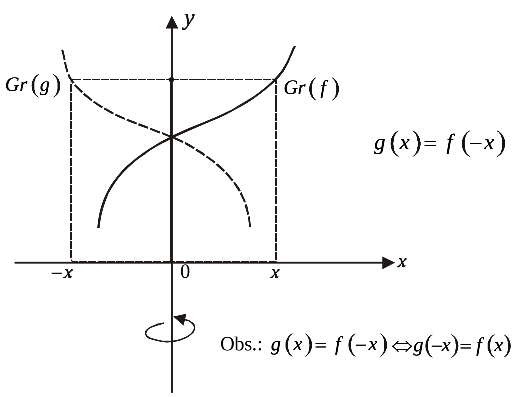
Como $(x, f(x))$ e $(x, -f(x))$ são simétricos em relação ao eixo x, dizemos que $Gr(g)$ é uma reflexão do $Gr(f)$ em torno do eixo x.



b) Em relação ao eixo OY

Dada uma função f, dizemos que o gráfico de g é uma reflexão do gráfico de f em torno do eixo OY se $g(x) = f(-x)$ para todo x do domínio da função.

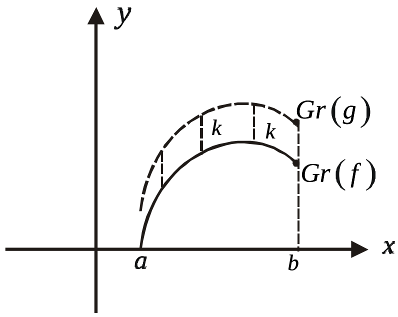
Cada ponto $(x, f(x)) \in Gr(f)$ é simétrico ao ponto $(-x, f(x))$ em relação ao eixo y. Observe que $(-x, f(x)) = (-x, g(-x)) \in Gr(g)$. Portanto, o $Gr(g)$ é uma reflexão do $Gr(f)$ em torno do eixo y.



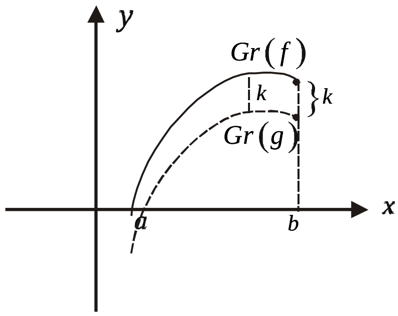
8.4 Translação

a) Vertical

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(x)+k$, sendo $k\in\mathbb{R}$ uma constante. Assim, $P\big(x, f(x)\big)\in Gr(f)$ se e somente se $P'\big(x, f(x)+k\big)\in Gr(g)$, o que significa que cada ponto P' do gráfico de *g* é um translado vertical de um ponto P do gráfico de *f*.

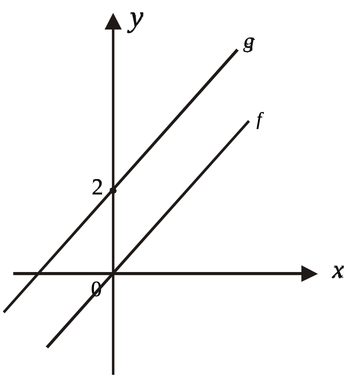


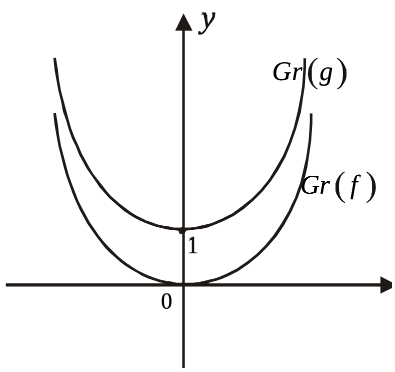
$k>0$



$k<0$

Exemplos: 1) $f(x)=x$ e $g(x)=x+2$ 2) $f(x)=x^2$ e $g(x)=x^2+1$





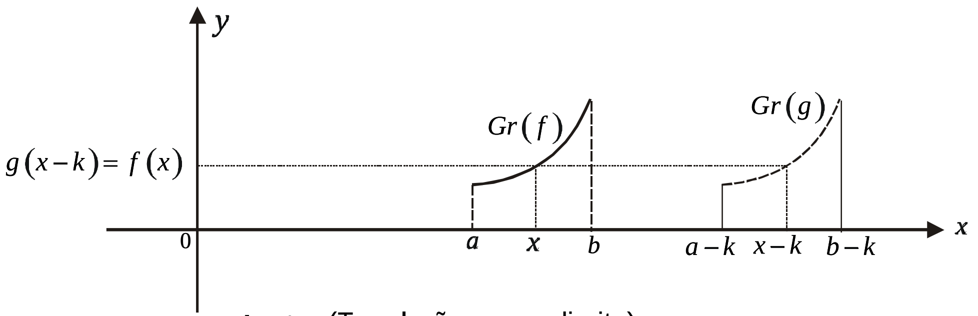
b) Horizontal

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função e $k\in\mathbb{R}$ uma constante. A função definida por $g(x)=f(x+k)$ tem como domínio o intervalo $[a-k,b-k]$, pois $Dom(g)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+k\in Dom(f)\}$. Se $x+k\in[a,b]$, temos $a\le x+k\le b\Leftrightarrow a-k\le x\le b-k$. Logo, $x\in[a-k,b-k]$.

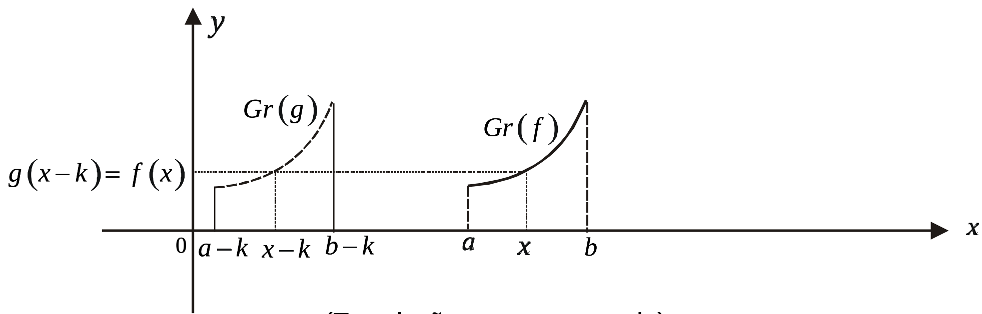
O conjunto $\mathrm{Im}(g)=\{g(x);x\in[a-k,b-k]\}=\{f(x+k);\ x\in[a-k,b-k]\}$. Chamando $x+k=t$, temos $x=t-k$ e, se $x\in[a-k,b-k]$, então $a-k\le x\le b-k\Leftrightarrow a\le x+k\le b$. Portanto, o conjunto acima $\{f(x+k);\ x\in[a-k,b-k]\}=\{f(t);\ \mathrm{t}\in[a,b]\}=\mathrm{Im}(f)$. Isto é, $\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(f)$.

O gráfico de g difere do gráfico f por uma translação de domínios, pois os comprimentos dos intervalos $[a,b]$ e $[a-k,b-k]$ são iguais e cada ponto $(x,f(x))\in Gr(f)$ é transladado para o ponto $(x-k,f(x))=(x-k,g(x-k))\in Gr(g)$, pois $f(x)=g(x-k)$.

Conclusão: o $Gr(g)$ é uma *translação horizontal* do $Gr(f)$.



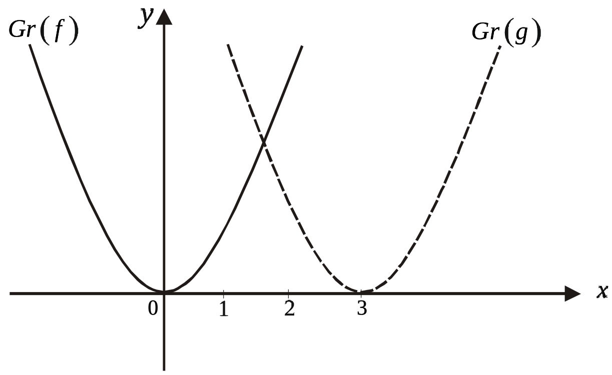
$k<0$ (Translação para a direita)



$k>0$ (Translação para a esquerda)

Exemplo:

1) $f(x)=x^2$ e $g(x)=(x-3)^2$



8.5 Contração e expansão

a) Horizontal

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função e $k\in\mathbb{R}_+^*$ uma constante. Definimos uma outra função por $g(x)=f(kx)$.

Como kx deve pertencer ao $Dom(f)=[a,b]$, temos $a\le kx\le b \Leftrightarrow \frac{a}{k}\le x\le\frac{b}{k}$. Logo, o domínio de g é o intervalo $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$.

Afirmativa:

$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}(g)$

De fato:

Se $w\in\operatorname{Im}(f)\Rightarrow\exists\, x\in[a,b]$ tal que $w=f(x)$.

Mas, se $x\in[a,b]$, então $\frac{x}{k}\in\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$, e $g\left(\frac{x}{k}\right)=f\left(\frac{kx}{k}\right)=f(x)=w$.

Assim, w é a imagem de um elemento de $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ pela função g. Logo, $w \in \mathrm{Im}(g)$ e, portanto, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Reciprocamente:

Se $w \in \mathrm{Im}(g)$, existe $x \in \left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ tal que $g(x) = w$.

Daí, $t = kx \in [a,b]$ e $f(t) = f(kx) = g(x) = w$. Logo, $w \in \mathrm{Im}(f)$ e, portanto, $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Como $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$ e $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$, concluímos que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

Outro modo de ver que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$:

$$\mathrm{Im}(g) = \left\{ g(x) / x \in \left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]\right\} = \left\{ g(x) / \frac{a}{k} \le x \le \frac{b}{k}\right\} = \{g(x) / a \le kx \le b\} = \{f(kx) / kx \in [a,b]\} =$$

$$= \{f(t) / t \in [a,b]\} = \mathrm{Im}(f)$$

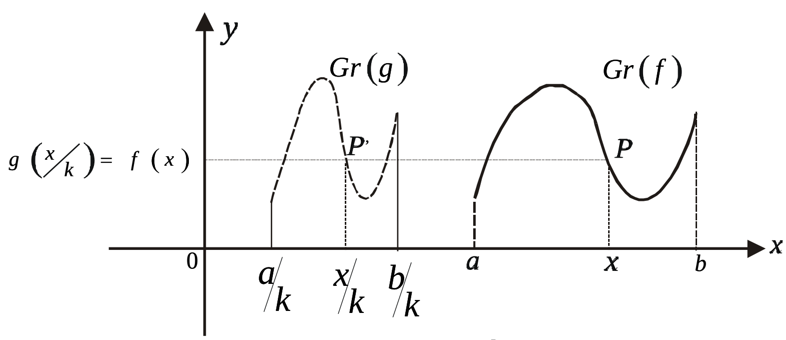
No entanto, os domínios das funções são diferentes.

$Dom(f) = [a,b]$ e $Dom(g) = \left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$

Oserve que o comprimento do intervalo $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ é $\dfrac{b-a}{k}$

O intervalo $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ é uma expansão do intervalo $[a,b]$ se $0 < k < 1$ e é uma contração se $k > 1$. Se $P(x, f(x)) \in Gr(f)$, então $P'\left(x/k, f(x)\right) = \left(x/k, g\left(x/k\right)\right) \in Gr(g)$.

Portanto, o $Gr(g)$ é uma contração horizontal ou expansão horizontal do $Gr(f)$.



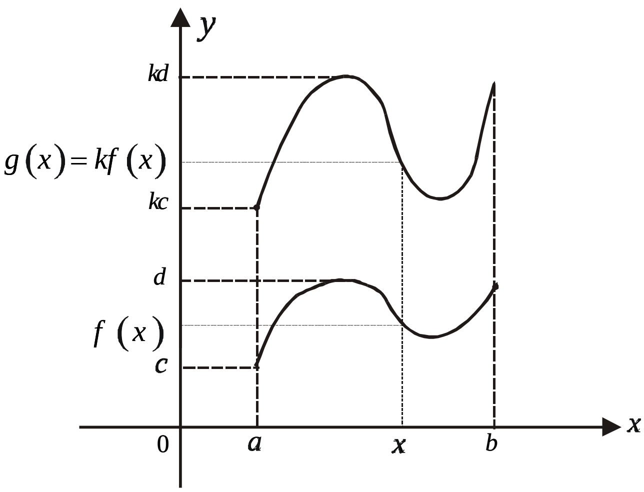
$k > 1$

b) Vertical

Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função e $k\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ uma constante. Definimos uma outra função g por $g(x)=kf(x)$.

Observamos que o domínio da função g é o mesmo domínio da função f. E se $\mathrm{Im}(f)=[c,d]$, então $\mathrm{Im}(g)=[kc,kd]$. Ainda, se $P(x,f(x))\in Gr(f)$ então $P'(x,kf(x))=(x,g(x))\in Gr(g)$.

Assim, $Gr(g)$ é uma expansão vertical ou contração vertical do $Gr(f)$, conforme $k>1$ ou $0<k<1$.



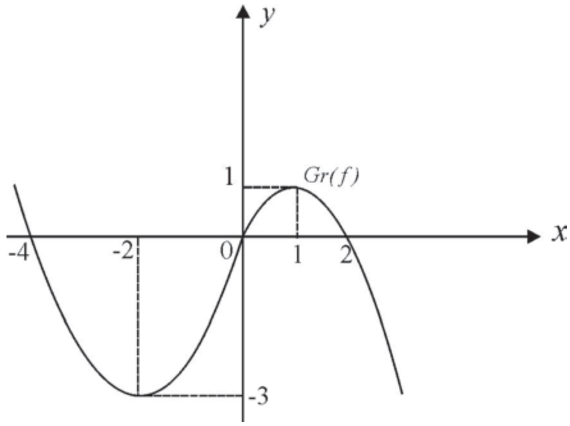
Observação:

Atente-se para o fato de que, se duas funções f e g têm o mesmo conjunto imagem, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$, não significa que elas têm o mesmo gráfico. Comprove isso fazendo os gráficos de $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=x$ e $g(x)=x^2$

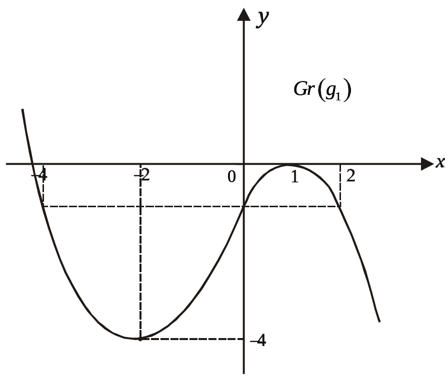
Exemplo

Considerando a função f, cujo gráfico é dado na figura abaixo, esboçaremos o gráfico de cada uma das funções:

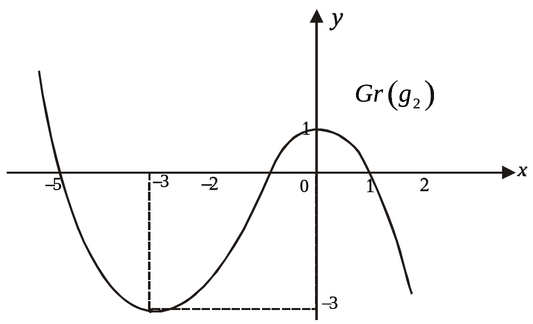
1) $g_1(x) = f(x) - 1$
2) $g_2(x) = f(x+1)$
3) $g_3(x) = 2f(x)$
4) $g_4(x) = -f(x)$
5) $g_5(x) = f(-x)$
6) $g_6(x) = f(2x)$
7) $g_7(x) = f(2x+2)$



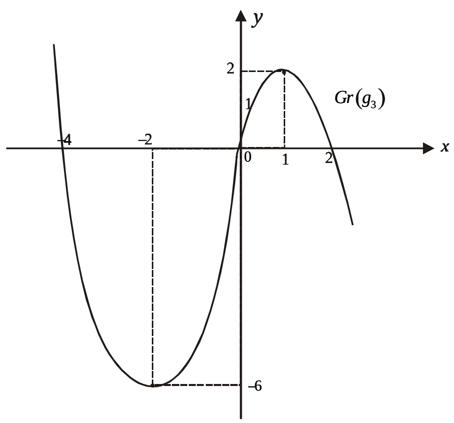
1) $g_1(x) = f(x) - 1$



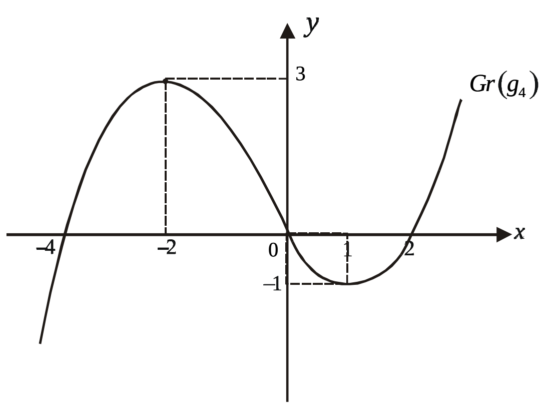
2) $g_2(x) = f(x+1)$



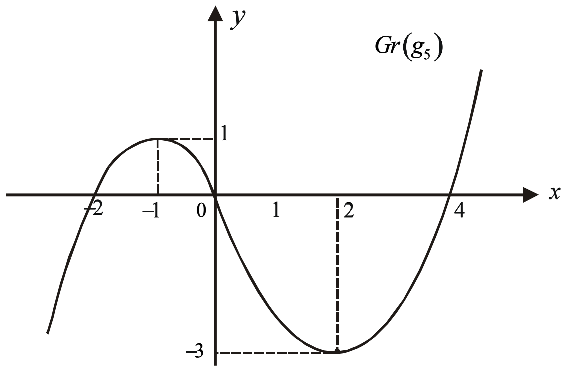
3) $g_3(x) = 2f(x)$



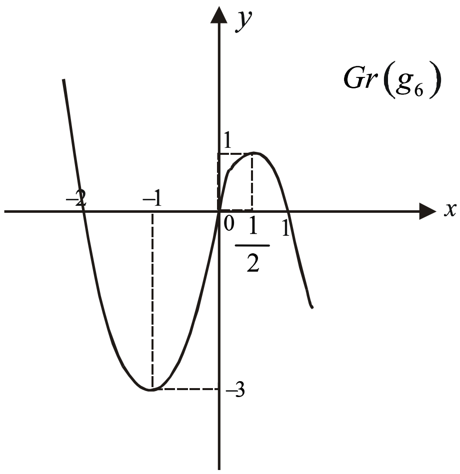
4) $g_4(x) = -f(x)$



5) $g_5(x) = f(-x)$



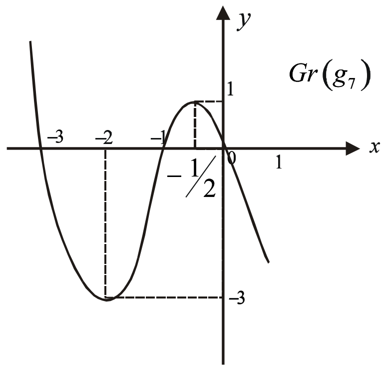
6) $g_6(x) = f(2x)$



7) $g_7(x) = f(2x+2)$

Observando que $f(2x+2) = f\left[2(x+1)\right] = g_6(x+1)$, vemos que o gráfico da função g_7 é uma translação horizontal de 1 unidade para a esquerda do gráfico da função g_6.

Assim, o gráfico de $g_7(x) = f[2(x+1)]$ é uma contração horizontal seguida de uma translação horizontal do gráfico de *f*.



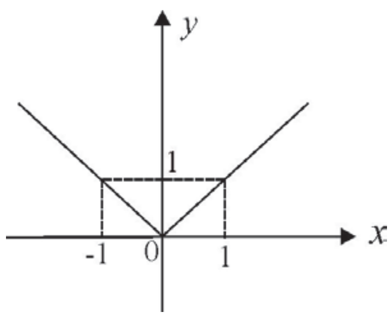
8.6 Outras funções essenciais

8.6.1 Função valor absoluto

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\, x \,|$ é chamada função *valor absoluto*.

$$f(x) = |\, x \,| = \begin{cases} x & , \text{ se } x \geq o \\ -x & , \text{ se } x < o \end{cases}$$

Como $f(-x) = |-x\,| = |\, x \,| = f(x)$, $\forall \mathrm{x} \in \mathbb{R}$, então f é uma função par; logo, tem um gráfico simétrico em relação ao eixo *y*.



$Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

Exemplo

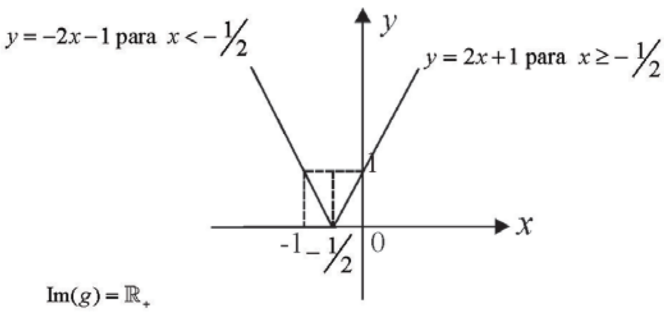
Esboçar os gráficos das funções:

a) $g(x) = |\ 2x+1\ |$

1º modo

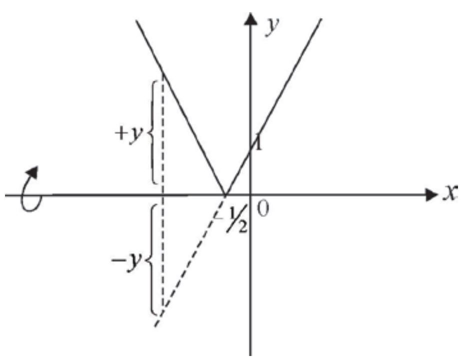
$$g(x) = |\ 2x+1\ | = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1), & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq \dfrac{-1}{2} \\ -2x-1 & \text{se } x < \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$Dom(g) = \mathbb{R}$



2º modo

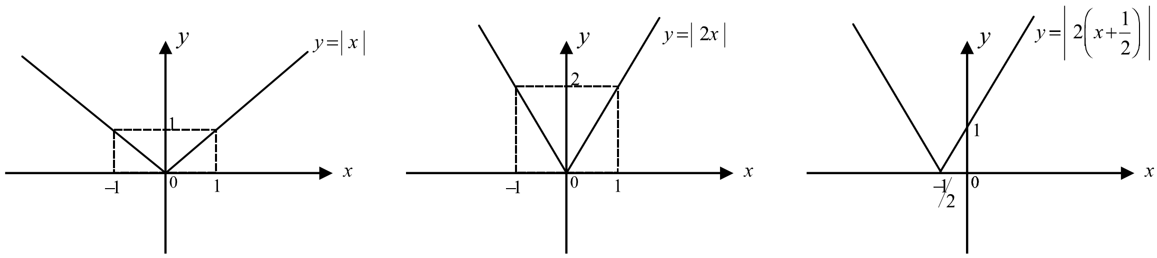
Esboça-se o gráfico de $y = 2x+1$ e faz-se uma reflexão, em torno do eixo *x*, dos pontos do gráfico que possuem ordenadas negativas.



3º modo

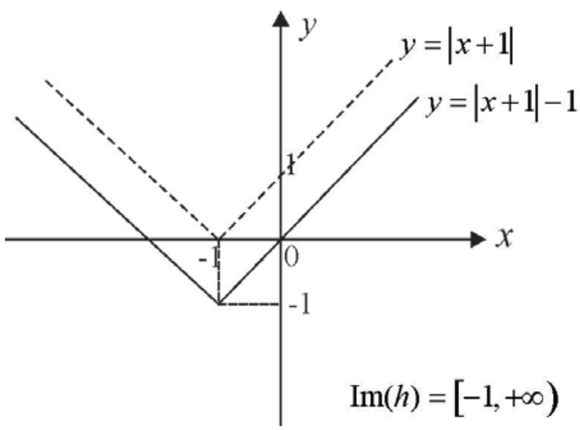
$$g(x) = |\ 2x+1\ | = \left|\ 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\ \right|$$

O $Gr(g)$ é uma contração horizontal de $k=2$ seguida de uma translação horizontal de $a=\frac{1}{2}$ do gráfico de $f(x)=|\ x\ |$.



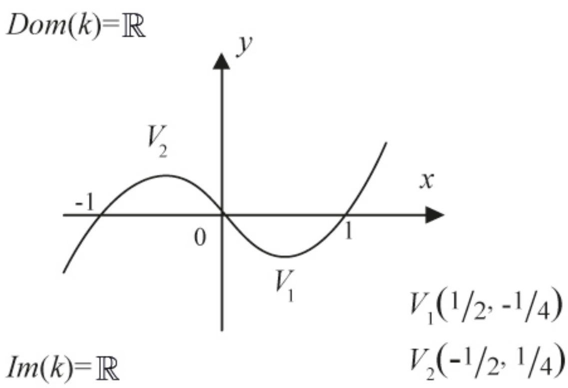
b) $h(x)=|\ x+1\ |-1$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(\mathrm{h})=\mathbb{R}$

$Gr(h)$ é translação horizontal seguida de translação vertical do $Gr(f)$.



c) $k(x) = x|x| - x$

$$k(x) = x|x| - x = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 - x & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x-1), & x \geq 0 \\ -x(x+1), & x < 0 \end{cases}$$



8.6.2 A semicircunferência como gráfico de função

A circunferência com centro na origem $O(0,0)$ e de raio unitário é representada por $S^1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$. Isso significa que S^1 é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ e por conseguinte $-1 \leq x, y \leq 1$.

Explicitando *y* como função de *x* na equação, temos: $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$

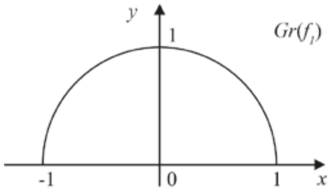
$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y = +\sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$

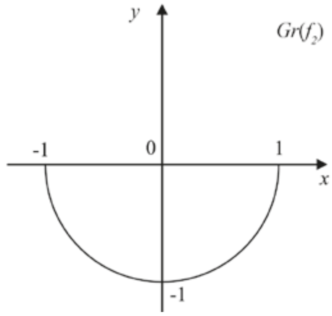
A função $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ tem $Dom(f_1) = [-1,1]$, $\text{Im}(f_1) = [0,1]$ e

$Gr(f_1) = \{(x, y) / y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}\} = \{(x, y) / y = \sqrt{1-x^2}\} = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\} = S^1_+$

Assim vemos que o $Gr(f_1)$ é a semicircunferência superior S^1_+

De modo análogo o gráfico de $Gr(f_2)$ é a semicircunferência inferior S^1_-

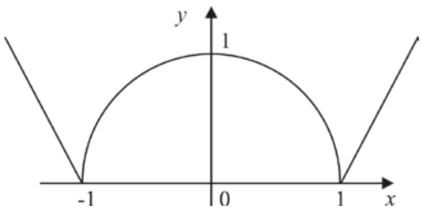




Obs: Costuma-se dizer que a equação $x^2 + y^2 = 1$ define implicitamente as funções f_1 e f_2 , pois $x^2 + [f_1(x)]^2 = 1$ e $x^2 + [f_2(x)]^2 = 1$ para $x \in [-1,1]$.

Exemplos:

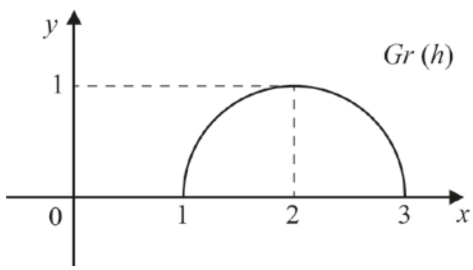
1) A representação no plano cartesiano do gráfico de $g(x) = \begin{cases} x-1 & se \quad x > 1 \\ \sqrt{1-x^2} & se \quad |x| \le 1 \\ -x-1 & se \quad x < -1 \end{cases}$ é



2) Vamos representar, no plano cartesiano, o gráfico de $h(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

Como $-x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2$, temos $h(x) = \sqrt{1-(x-2)^2} = f(x-2)$, em que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Portanto o gráfico de *h* pode ser obtido pela translação horizontal do gráfico de *f*. Assim:



8.6.3 Função maior inteiro

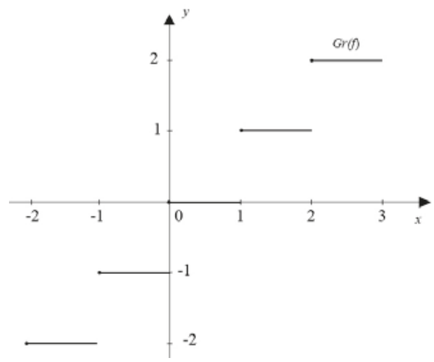
Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=[x]$, em que o símbolo $[x]$ representa o maior número inteiro que é menor ou igual a x.

Exemplificando temos:

$[0]=0$; $[1]=1$; $[2]=2$; $[2,5]=2$; $[\sqrt{3}]=1$; $[\pi]=3$; $\left[\frac{-1}{3}\right]=-1$ etc.

Assim o $Dom(f)=\mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{Z}$

Representação do $Gr(f)$ no plano cartesiano



Obs:

1ª) A função maior inteiro também é denotada por $f(x)=[x]=máx\{n\in\mathbb{Z}\,/\,n\leq x\}$

2ª) Pelo formato do gráfico, a função maior inteiro é, às vezes, chamada de função escada.

3ª) Como exercício, verifique que:

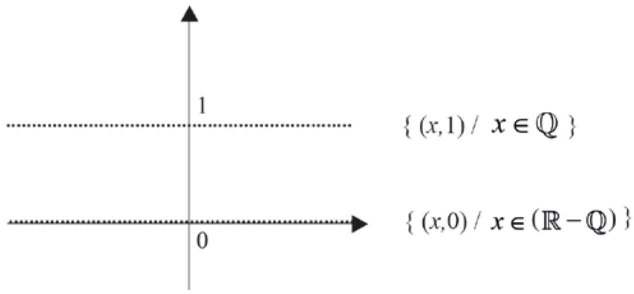
Se f é a função maior inteiro, então para cada $k\in\mathbb{Z}$, $f(x+k)=f(x)+k$

8.6.4 Função de Dirichlet[4]

A Função de Dirichlet $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1 & se \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & se \quad x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\end{cases}$$

$Dom(f)=\mathbb{R}$ e $\operatorname{Im}(f)=\{0,1\}$



Exercício

Mostre que a função de Dirichlet é uma função par.

8.6.5 Funções definidas por $f(x)=kx^n$ com n e k constantes, $n\in\mathbb{Z}$ e $k\in\mathbb{R}$

Para $n=0,1$ ou 2, temos as funções conhecidas:

$y=k$ (função constante)

$y=kx$ (função linear)

$y=kx^2$ (função quadrática)

[4] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) – discípulo de Gauss, amigo e professor de Riemann, professor de Dedekind e orientador de Eisenstein, Kronecker, Lipschitz, entre outros – foi um matemático alemão que fez muitas contribuições valiosas na Teoria dos Números e na Análise Matemática.

Para $n = 3$, consideremos a função $f(x) = x^3$, $(n = 3 \text{ e } k = 1)$.

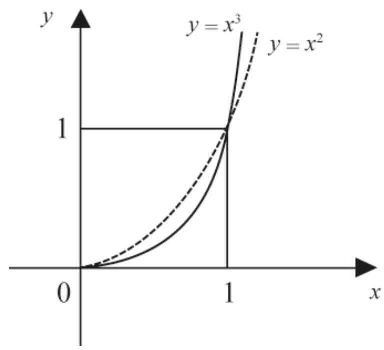
$Dom(f) = \mathbb{R}$, e como $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que *f* é uma função ímpar. Isso nos garante que o gráfico de *f* é simétrico em relação à origem.

Observamos também que:

se $0 < x < 1$, então $x > x^2 > x^3$ e

se $x > 1$, então $x < x^2 < x^3$

Portanto, no intervalo (0,1) o gráfico de $y = x^3$ está abaixo do gráfico de $y = x^2$, enquanto no intervalo $(1, +\infty)$ o gráfico de $y = x^3$ está acima do gráfico de $y = x^2$, e nos pontos (0,0) e (1,1) os gráficos coincidem.



A função $f(x) = x^3$ é sempre crescente.

De fato:

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, temos $x_2 - x_1 > 0$. Como sabemos, $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1) \cdot (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)$. Se provarmos que $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$, concluiremos que $x_2^3 - x_1^3 > 0$ e, portanto, $x_1^3 < x_2^3$.

Vamos mostrar que $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$.

Sendo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, temos as possibilidades:

a) $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$; logo, $x_1 x_2 = 0$ e, portanto, $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$;

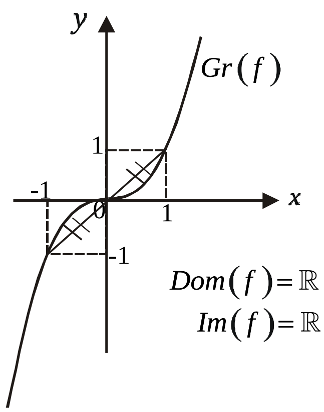
b) $x_1 < x_2 < 0$; logo, $x_1 x_2 > 0$ e, portanto, $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$;

c) $0 < x_1 < x_2$; logo, $x_1 x_2 > 0$ e, portanto, $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$;

d) $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$; logo, $x_1 x_2 < 0$ e $0 \leq (x_2 + x_1)^2 = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_1^2 < x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2$

e, portanto, $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$.

Considerando a simetria em relação à origem, temos o gráfico de *f*.



Para $n = 4$ e $k = 1$, temos a função $y = x^4$, a qual possui domínio igual a $\mathbb{R}$.

A função $y = x^4$ é função par (verifique). Logo, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo *y*.

Ainda, nos pontos (0,0) e (1,1) os gráficos de $y = x$; $y = x^2$, $y = x^3$ e $y = x^4$ coincidem.

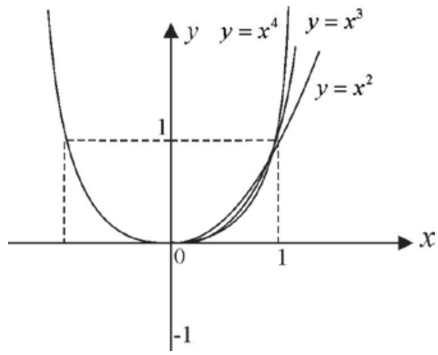
Se $0 < x < 1$, então $x > x^2 > x^3 > x^4$

Se $x > 1$, então $x < x^2 < x^3 < x^4$

Logo, o gráfico de $y = x^4$ está abaixo do gráfico de $y = x^3$ se $x \in (0,1)$ e está acima se $x \in (1, +\infty)$.

Também é fácil mostrar que $f(x)=x^4$ é decrescente no intervalo $(-\infty,0)$ e crescente no intervalo $[\,0,+\infty)$.

Para provar isso, basta observar que $x_2^4-x_1^4=\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(x_2^2+x_1^2\right)=\left(x_2-x_1\right)\cdot\left(x_2+x_1\right)\cdot\left(x_2^2+x_1^2\right)$.

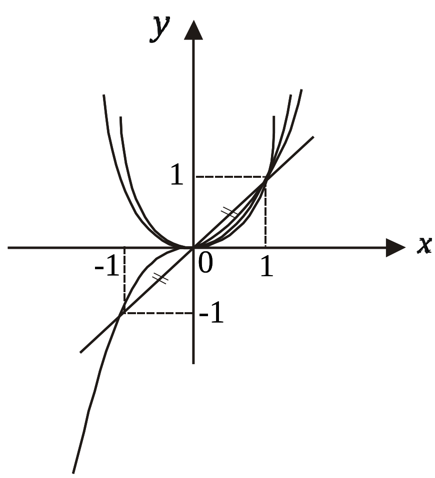


Domínio = $\mathbb{R}$

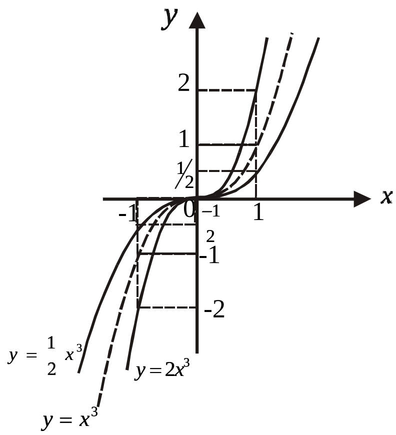
Imagem = $\mathbb{R}_+$

Analogamente, para $n=5,6,7,\ldots$ e $k=1$.

$y=x^n$ será função par se *n* for um número par e será função ímpar se *n* for um número ímpar.



O gráfico da função $y = kx^3$ é uma dilatação ou contração vertical do gráfico de $y = x^3$.

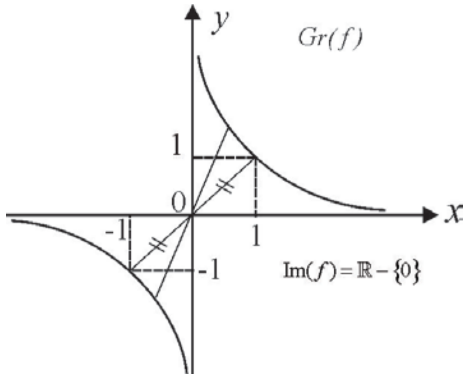


Em resumo, podemos dizer que os gráficos das funções $f(x) = kx^n$ são dilatações ou contrações verticais dos gráficos das funções $g(x) = x^n$, se $k > 0$ e serão contrações ou dilatações verticais, seguidas de reflexão em torno do eixo *x*, se $k < 0$.

Para $n = -1$ e $k = 1$, temos a função dada pela expressão $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Logo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Isto é, *f* é uma função ímpar e, portanto, tem gráfico com simetria em relação à origem.

Se considerarmos primeiramente a parte do domínio $(0, +\infty)$, vemos que $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uma expressão entre variáveis que representam grandezas inversamente proporcionais, a qual já estudamos no capítulo 6. Devido às considerações acima e à simetria anunciada, temos que o $Gr(f)$ é a “hipérbole equilátera”.



Obs. 1: A função é decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$.

De fato:

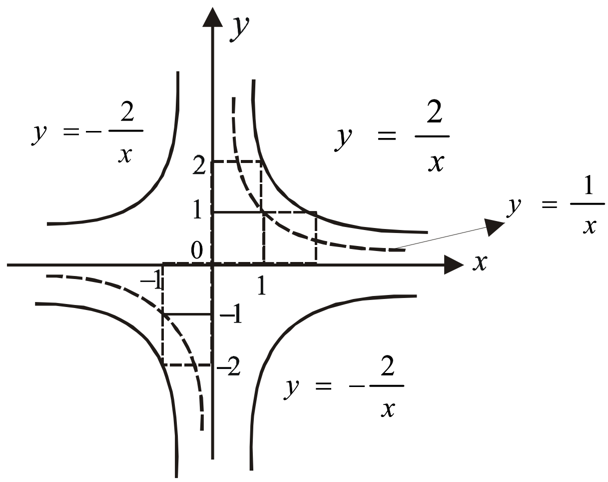
$\forall\ x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ com $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

e $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$; assim, $f(x_1) > f(x_2)$. De modo análogo, verifica-se para todo $x_1, x_2 \in (-\infty,0)$.

Obs. 2: Conforme provado na observação 1 acima, *f* é decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$. No entanto, não podemos dizer que *f* é decrescente no seu domínio $\mathbb{R}^*$. Por quê? Justifique.

Obs. 3: Nesse gráfico, dizemos que o eixo x é uma assíntota horizontal e que o eixo *y* é uma assíntota vertical.

Para $n = -1$ e $k = 2$ ou $k = -2$, temos os respectivos gráficos:



Para $n=-2$ e $k=1$, temos a função $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

$Dom(g)=\mathbb{R}-\{0\}$. $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ temos $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{x^2}=g(x)$, portanto g é uma função par. Consequentemente, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo *y*.

Se $0<x<1$, temos $x>x^2$ e $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x^2}$

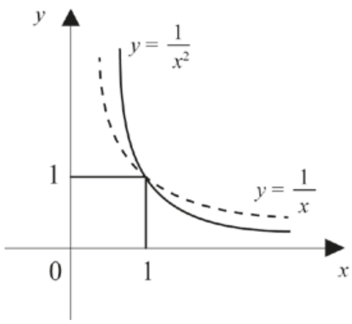
Se $x>1$, temos $x<x^2$ e $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{x^2}$.

Assim o $Gr(g)$ está acima do gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quando $0<x<1$ e abaixo quando $x>1$.

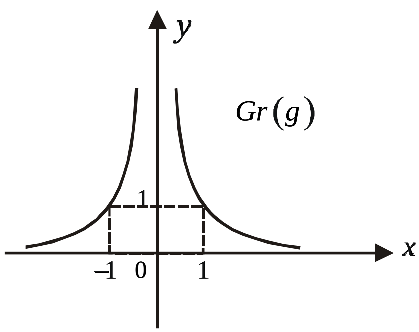
A função $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ acima definida é crescente no intervalo $(-\infty,0)$.

De fato:

$\forall\, x_1,x_2\in(-\infty,0)$ com $x_1<x_2\Rightarrow x_1^2>x_2^2\Rightarrow\dfrac{1}{x_1^2}<\dfrac{1}{x_2^2}$; logo, $g(x_1)<g(x_2)$. Analogamente, verifica-se que g é decrescente em $(0,+\infty)$.



Para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, consideramos a simetria do $Gr(g)$ e, portanto, temos:



Exemplo:

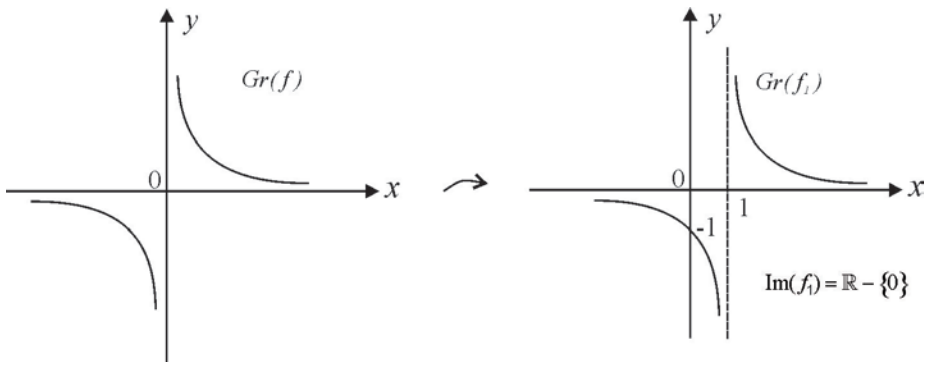
Estabeleça o domínio e esboce o gráfico das funções dadas por:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Solução:

$Dom(f_1) = \mathbb{R} - \{1\}$

Inicialmente, consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cujo gráfico é a hipérbole equilátera e observemos que $f(x-1) = \dfrac{1}{x-1} = f_1(x)$. Logo, vemos que o $Gr(f_1)$ é obtido do $Gr(f)$ após uma translação horizontal de 1 unidade para a direita no eixo x.

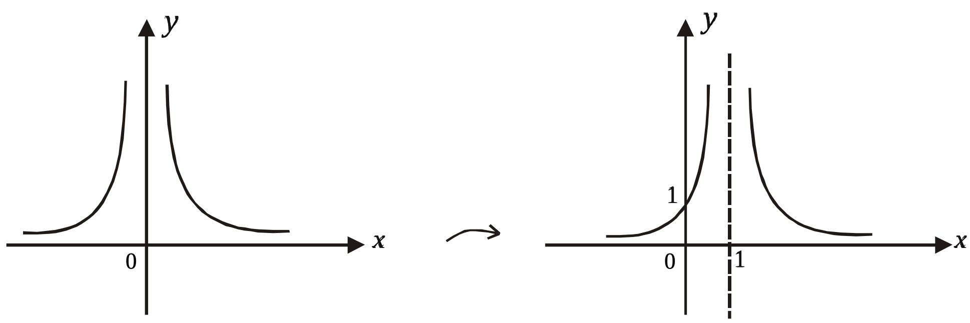


b) $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Solução:

$Dom(f_2) = \mathbb{R} - \{1\}$

Analogamente ao item a), o gráfico de f_2 é obtido de uma translação horizontal do gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

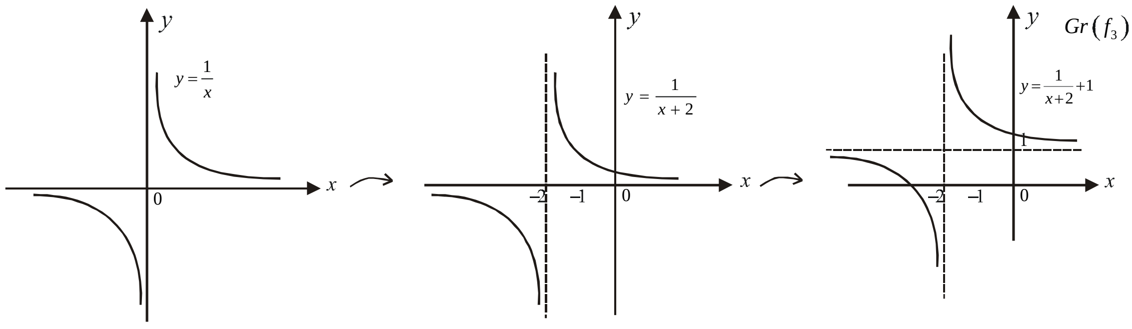


c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x+2} + 1$

Solução:

$Dom(f_3) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$Gr(f_3)$ é obtido do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ por uma translação horizontal de 2 unidades à esquerda, seguida de uma translação vertical de uma unidade para cima.



$\text{Im}(f_3) = \mathbb{R} - \{1\}$

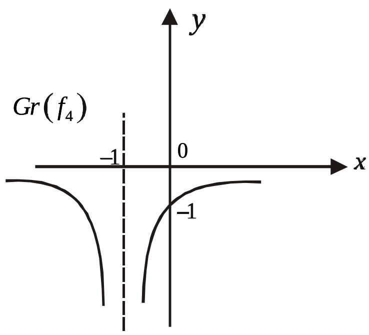
Obs.: A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical e a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f_3.

d) $f_4(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

Solução:

$Dom(f_4) = \mathbb{R} - \{-1\}$

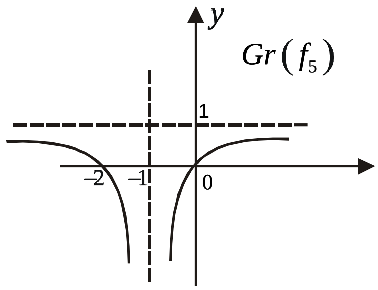
$\text{Im}(f_4) = \mathbb{R}_-^*$



e) $f_5(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + 1$

$Dom(f_5) = \mathbb{R} - \{-1\}$

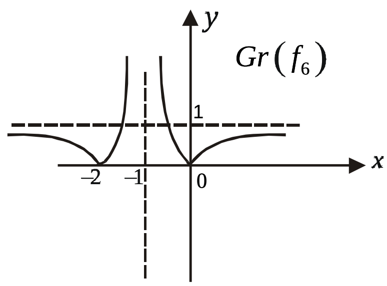
$\operatorname{Im}(f_5) = (-\infty, 1)$



f) $f_6(x) = \left| \frac{-1}{(x+1)^2} + 1 \right|$

$Dom(f_6) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\operatorname{Im}(f_6) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$



As retas $x = -1$ e $y = 1$ são assíntotas, respectivamente, vertical e horizontal do gráfico da função f_6.

g) $f_7(x) = \frac{1}{x^3}$

$Dom(f_7) = \mathbb{R}^*$

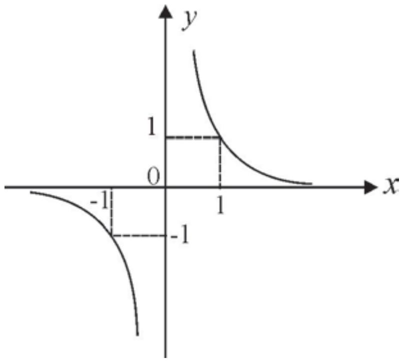
$\operatorname{Im}(f_7) = \mathbb{R}^*$

Verifique que f_7 é ímpar e que é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$

Se $0 < x < 1$, então $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3}$.

Se $x > 1$, então $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^3}$ e $f_7(1) = 1$.

Portanto, comparando-se com o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, temos o $Gr(f_7)$ abaixo.

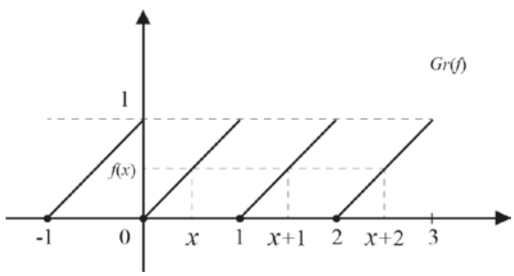


8.6.6 Função periódica

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe um número real $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ é chamado de período da função.

Exemplos

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - [x]$ é chamada de Função Dente de Serra.



Observe no *Gr*(*f*) que $\forall x \in \mathbb{R} \qquad ... = f(x-2) = f(x-1) = f(x) = f(x+1) = f(x+2) = ...$

Isto é, $f(x+k) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$

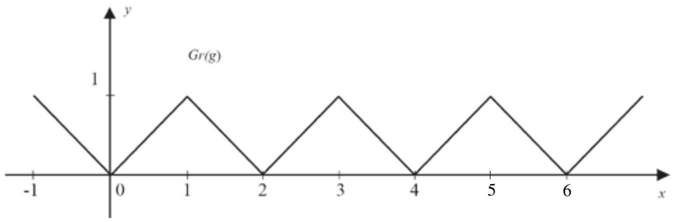
O menor $k > 0$ é $k = 1$. Logo, o período é $p = 1$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x - 2n & , \quad se \quad 2n \le x < 2n+1 \\ -x + 2n + 2 & , \quad se \quad 2n+1 \le x < 2n+2 \end{cases}$$

é periódica de período p=2.

O *Gr(g)* é chamado de Onda Triangular.



Exercícios

1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $p > 0$. Prove que $f(x+kp) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$

2) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções periódicas de mesmo período T. Prove que são periódicas as funções:

a) $f + g$

b) αf , ($\alpha \in \mathbb{R}$, constante)

c) fg

3) A função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica? Qual é o conjunto solução da equação $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ na incógnita p?

4) A Função de Dirichlet $f(x)=\begin{cases}1 & se \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & se \quad x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\end{cases}$ é periódica?

Qual é o conjunto solução da equação $f(x+p)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$, na incógnita p?

5) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função periódica de período T. Se a e b são constantes reais, então prove que também são periódicas as funções:

a) $f_1(x)=f(x)+a$ com período T

b) $f_2(x)=f(x+a)$ com período T

c) $f_3(x)=a\ f(x)+b$ com período T

d) $f_4(x)=f(ax)$ com período $\dfrac{T}{|a|}$

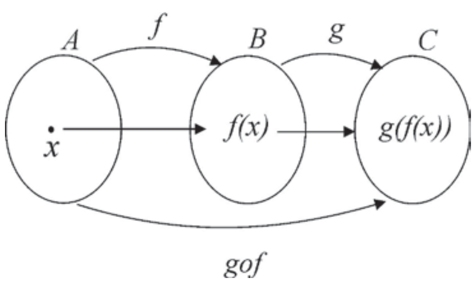
e) $f_5(x)=f(ax+b)$ com período $\dfrac{T}{|a|}$

8.7 Função composta

Dadas as funções $f:A\to B$ e $g:B\to C,$ denominamos *função composta* de g com f a função $gof:A\to C$ definida por $(gof)(x)=g\big(f(x)\big),$ para todo $x\in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gof"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$x\mapsto f(x)\mapsto g\big(f(x)\big)=(gof)(x)$$



Observe que, para encontrar $g(f(x))$, precisamos inicialmente calcular $f(x)$; logo, x deve pertencer ao domínio da função f. Em seguida, precisamos calcular $g(f(x))$, o que exige que o elemento $f(x)$ pertença ao domínio de g.

Portanto, para que seja possível efetuar a composta gof, é preciso que o conjunto imagem da função f esteja contido no domínio da função g. Isto é, $\text{Im}(f) \subseteq Dom(g)$. Assim, devemos ter $Dom(gof) = \{x \in Dom(f) \ / \ f(x) \in Dom(g)\}$.

As funções cujos gráficos foram obtidos por reflexões, translações, contrações e expansões de gráficos de outras funções, estudadas nas seções 8.3, 8.4, e 8.5, são exemplos de composição de funções.

Exemplos:

1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada.

a) Se tomarmos a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -x$, então a função composta $(hof)(x) = h(f(x))$ é a função $g_1(x) = -f(x)$ cujo gráfico é a reflexão em torno do eixo x do gráfico da função f. A composta $(foh)(x) = f(h(x))$ é a função $g_2(x) = f(-x)$ cujo gráfico é a reflexão do gráfico de f em torno do eixo y;

b) Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for dada por $h(x) = x + k$ (k constante não nula), as compostas $g_1(x) = h(f(x)) = f(x) + k$ e $g_2(x) = f(h(x)) = f(x+k)$ são funções, cujos gráficos são as translações vertical e horizontal do gráfico da função f estudadas na seção 8.4;

c) Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for dada por $h(x) = kx$ (k constante não nula), então $g_1(x) = (hof)(x) = h(f(x)) = kf(x)$ e $g_2(x) = (foh)(x) = f(h(x)) = f(kx)$ são as funções, cujos gráficos são as contrações ou expansões do gráfico da função f estudadas na seção 8.5, quando $k \in \mathbb{R}_+^*$;

d) Se $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função afim dada por $h(x)=ax+b,$ então a composta $g_1(x)=(hof)(x)=h\big(f(x)\big)=a\,f(x)+b$ tem gráfico que pode ser obtido do gráfico da função f por expansão/contração vertical, seguida de reflexão em torno do eixo x $(se\ a<0)$ e ainda uma translação vertical. Analogamente, a função composta $g_2(x)=f\big(h(x)\big)=f(ax+b)=f\left[a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)\right]$ tem como gráfico uma expansão/contração horizontal de a, seguida de reflexão em torno do eixo $y(se\ a<0)$ e translação horizontal de $\dfrac{b}{a}$ do gráfico de f .

2) Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+2$ e $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\sqrt{x}$.

Como $\operatorname{Im}(g)=\mathbb{R}_+\ e\ Dom(f)=\mathbb{R}$, temos $\operatorname{Im}(g)\subseteq Dom(f)$, logo, existe a função composta $fog:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ definida por $(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}+2.$

Assim, $(fog)(x)=\sqrt{x}+2$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}_+$.

Não é possível efetuar a composta gof com os domínios dados acima, pois $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$ não está contido no $Dom(g)=\mathbb{R}_+$.

Tome como exemplo $x=-3$, que está no domínio da função f. Logo, se tentarmos obter $(gof)(-3)$, teremos $(gof)(-3)=g\big(f(-3)\big)=g(-1)$. Não é possível prosseguir, pois $-1\notin Dom(g)$.

No entanto, para que exista o cálculo da expressão de $g\big(f(x)\big)$, é preciso tomar para domínio da função f um conjunto $A\subset\mathbb{R}$, tal que o conjunto $f(A)$ das imagens de f esteja contido no $Dom(g)=\mathbb{R}_+$. Isto é, deve-se exigir que, se $x\in A$, então $f(x)\in\mathbb{R}_+$.

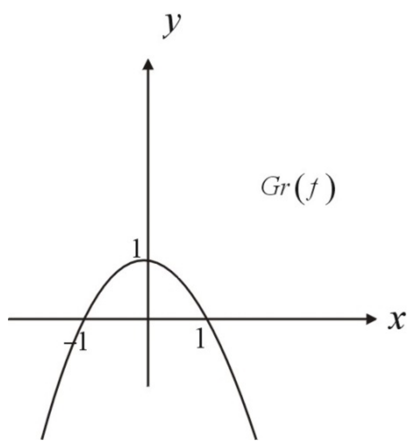
Assim, A=$\{x\in\mathbb{R}\ \text{tal que}\ f(x)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -2\}=[-2,+\infty)$.

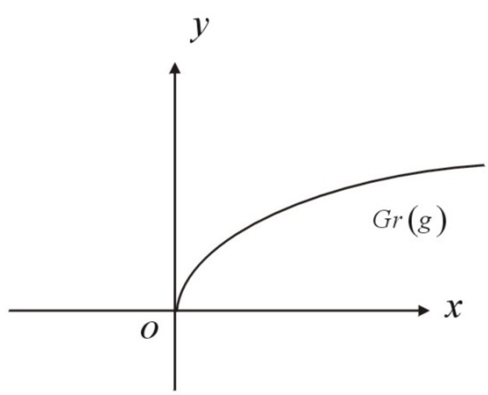
Conclusão: se tomamos $f:[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+2$ e $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\sqrt{x}$, temos $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}_+$, $\operatorname{Im}(f)\subseteq Dom(g)$, e a composta $gof:[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ existirá, porque $[-2,+\infty)\xrightarrow{f}\mathbb{R}_+\xrightarrow{g}\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=x+2\mapsto g(f(x))=g(x+2)=\sqrt{x+2}$ existe, pois $x\geq -2$.

3) Se $f(x)=1-x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$, determine domínios para a função *f* e para a função *g* de modo que seja possível efetuar a composta gof.

Solução: para a existência da composta gof, é preciso que $\operatorname{Im}(f)\subseteq Dom(g)$. E como $g(x)=\sqrt{x}$, o "maior" domínio possível para g é $\mathbb{R}_+$.





Logo, para que $\operatorname{Im}(f)\subseteq Dom(g)=\mathbb{R}_+$, devemos tomar para domínio de f um subconjunto do intervalo $[-1,1]$. Portanto, tomando $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1-x^2$ e $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\sqrt{x}$, podemos efetuar a composta $gof:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $(gof)(x)=g(f(x))=g(1-x^2)=\sqrt{1-x^2}$.

Observe que o gráfico da função composta *gof* é a semicircunferência superior S^1_+ estudada na seção 8.6.2.

4) Sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

e $g(x) = x - 2$

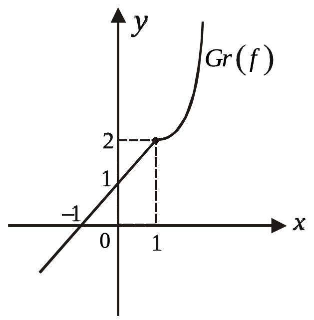
a) Esboce o gráfico de *f* e o de *g*.

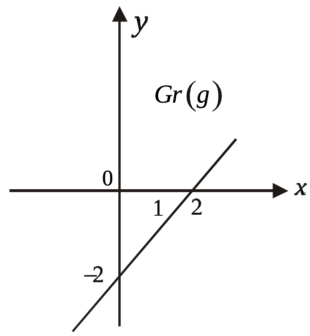
b) Determine *gof* e esboce seu gráfico.

c) Determine *fog* e o seu gráfico.

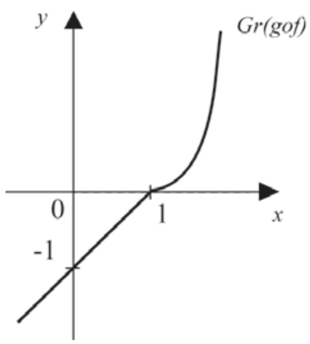
Solução:

a)





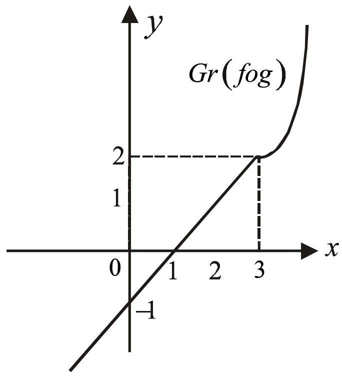
b) $(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2 - 2x + 3) & \text{se } x \geq 1 \\ g(x+1) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$



c)

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}[g(x)]^2-2g(x)+3 & \text{se } g(x)\geq 1\\ g(x)+1 & \text{se } g(x)<1\end{cases}=\begin{cases}(x-2)^2-2(x-2)+3 & \text{se } x-2\geq 1\\ (x-2)+1 & \text{se } x-2<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2-6x+11 & \text{se } x\geq 3\\ x-1 & \text{se } x<3\end{cases}$$

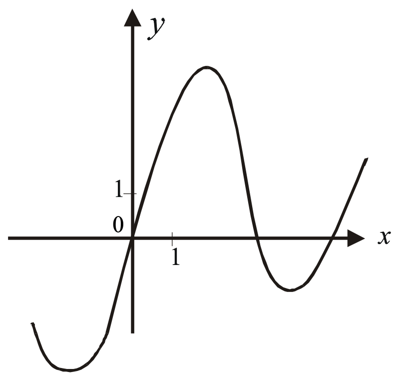


Observe que o $Gr(gof)$ também pode ser obtido por uma translação vertical do $Gr(f)$, pois $(gof)(x)=g(f(x))=f(x)-2$, e o $Gr(fog)$, por uma translação horizontal do $Gr(f)$, porque $(fog)(x)=f(g(x))=f(x-2)$.

5) Seja $f(x)=|x|$ e $g(x)=x^2-2x$

Determine fog, gof e esboce seus respectivos gráficos.

6) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função *f*. Marque no eixo *y* da figura o ponto correspondente ao valor de $(fofof)(1)$.



Resposta: $y=0$

8.8 Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Uma função $f: A \to B$ *é dita injetora se quaisquer* x_1, $x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ *implicam que* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo 1. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetora, pois existem $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$; isto é, $f(-1) = f(1) = 1$.

Exemplo 2. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 2$ é injetora.

De fato: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, temos $g(x_1) = x + 2$ e $g(x_2) = x_2 + 2$; logo, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x + 2 \neq x_2 + 2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.

Uma função $f: A \to B$ *é dita sobrejetora se* $\mathrm{Im}(f) = B$. *Em outras palavras,* $f: A \to B$ *é sobrejetora se, para todo elemento* $y \in B$, *existe pelos menos um elemento* $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Exemplo 4. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 2$ é sobrejetora.

De fato: Dado qualquer $b \in \mathbb{R}$, existe $a = b - 2 \in \mathbb{R} = Dom(g)$ tal que $g(a) = g(b-2) = (b-2) + 2 = b$. Isto é, $g(a) = b$.

Dizemos que uma função $f: A \to B$ *é bijetora quando ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Em outras palavras,* $f: A \to B$ *é bijetora se, dado um elemento qualquer* $y \in B$, *existe um único elemento* $x \in A$, *tal que* $f(x) = y$.

Observe que a existência do elemento *x* dá a sobrejetividade, e a unicidade dá a injetividade da função *f*.

Exercício:

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções.

1) Se f e g são injetoras, então prove que a composta gof é injetora.
2) Se f e g são sobrejetoras, então prove que a composta gof é sobrejetora.

Conclua que, se f e g são bijetoras, a composta gof é bijetora.

8.9 Função inversa e gráfico

Uma função $g: B \to A$ *é a inversa da função* $f: A \to B$ *quando se tem* $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ *para quaisquer* $x \in A$ e $y \in B$.

Consequentemente, g é a inversa de f se e somente se f é a inversa de g.

Dizemos também que uma função f é inversível quando ela possui inversa.

Proposição:

Uma função $f: A \to B$ *possui inversa se e somente se* f *é bijetora.*

Demonstração: Se a função $f: A \to B$ possui inversa, $g: B \to A$, vamos provar que f é bijetora.

Se existirem $x_1, x_2 \in A$ com $f(x_1) = f(x_2) \in B,$ então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e como g é a inversa temos $x_1 = x_2$. Portanto, f é injetora.

Dado $y \in B$ arbitrário, temos $g(y) = x \in A$ e $f(x) = f(g(y)) = y$. Logo, $\operatorname{Im}(f) = B$ e, portanto, f é sobrejetora.

Reciprocamente:

Se a função $f: A \to B$ é bijetora, vamos mostrar que ela possui uma inversa.

Definimos a função $g: B \to A$ como se segue. Para cada $y \in B$, como f é bijetora, existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Portanto, definimos a imagem de y por g como sendo esse x. Assim, $g(y) = x \in A$. A existência do $x \in A$ é justificada pela sobrejetividade de f, e a unicidade, pela injetividade de f.

A função $g: B \to A$ acima definida é a inversa de f, pois $f(g(y)) = f(x) = y; \ \forall y \in B$ e $g(f(x)) = g(y) = x, \ \forall x \in A$.

Exercício:

Prove que, se $f: A \to B$ possui uma inversa $g: B \to A$, então a inversa é única.

Observação:

Devido à unicidade da inversa anunciada no exercício acima, denotamos a inversa de $f: A \to B$ por $f^{-1}: B \to A$. Assim, temos $f^{-1}of = I_A$ e $fof^{-1} = I_B$, em que I_A é a função identidade definida no conjunto A por $I_A(x) = x, \ \forall x \in A$ e I_B é a função identidade definida no conjunto B por $I_B(y) = y, \ \forall y \in B$.

Resumindo:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto f^{-1}f(x) = x$$
$$f^{-1}of = I_A$$

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) \mapsto f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$
$$fof^{-1} = I_B$$

Exemplo 1. Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$.

A função $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é tal que $(fog)(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$ e $(gof)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |\,x\,| = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$

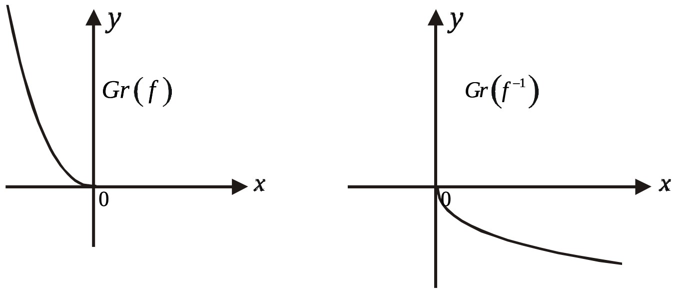
Logo, $gof = fog = I$; portanto, g é a inversa de f.

Exemplo 2. A função $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é bijetora. Logo, possui inversa $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$ definida por $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

De fato:

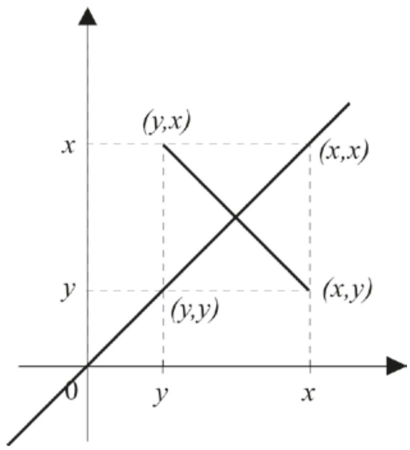
$\forall x \in \mathbb{R}_- = Dom(f)$, temos $f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(x^2\right) = -\sqrt{x^2} = -|\,x\,| = -(-x) = x$, pois, como $x \in \mathbb{R}_-$, temos $|\,x\,| = -x$.

$\forall y \in \mathbb{R}_+ = Dom\left(f^{-1}\right)$, temos $f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(-\sqrt{y}\right) = \left(-\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$; portanto, $f^{-1}of = I$ e $fof^{-1} = I$.



O gráfico da função inversa

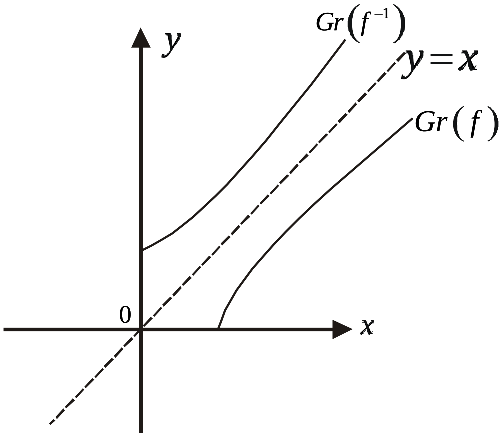
Observe no sistema cartesiano que o ponto $P(x,y)$ é o simétrico do ponto $Q(y,x)$ em relação à reta $y = x$. O segmento *PQ* é a diagonal do quadrado de vértices (y,y), (x,y), (x,x), (y,x). Portanto, a reta de equação $y = x$ é a mediatriz do segmento *PQ*. (Veja um exemplo na figura)



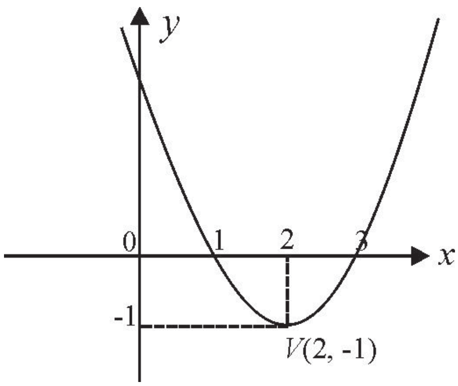
Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Se $f^{-1} : B \to A$ é a inversa de $f : A \to B$, então o $Gr\left(f^{-1}\right)$ é o simétrico do $Gr(f)$ em relação à reta de equação $y = x$.

De fato, temos

$$(x,y)\in Gr(f)\Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow (y,x)\in Gr(f^{-1})$$



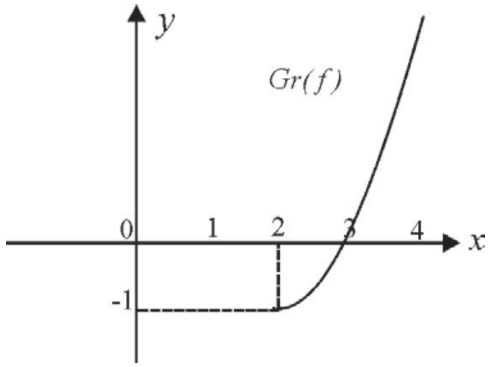
Exemplo 3. Sendo $f(x)=x^2-4x+3$, vemos que $f(1)=f(3)=0$. Logo, *f* não é injetora se tomamos $Dom(f)=\mathbb{R}$.



Vamos tomar um domínio para a função *f* de modo que ela seja injetora. Observamos na figura acima que *f* nunca será injetora em intervalos que contenham $x=2$ no seu interior.

Tomando $Dom(f)=[2,+\infty)$ ou $Dom(f)=(-\infty,2]$, temos *f* injetora.

Seja $f:[2,+\infty)\to[-1,+\infty)$ dada por $f(x)=x^2-4x+3$. Assim, f é uma bijeção (veja o $Gr(f)$).

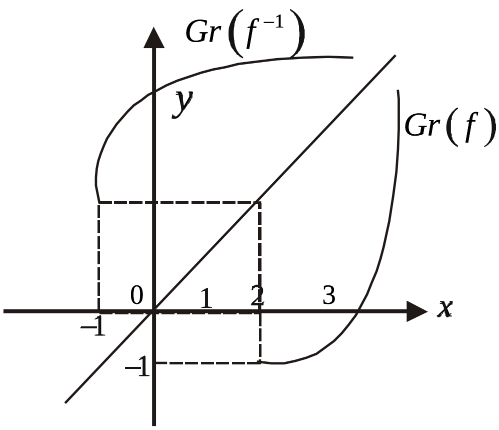


Logo, f possui inversa $\quad f^{-1}:[-1,+\infty)\to[2,+\infty)$

$$y\mapsto x=f^{-1}(y)$$

Para encontrar uma expressão para a inversa, fazemos $y=f(x)=x^2-4x+3$. Logo, temos $y=x^2-4x+4-1=(x-2)^2-1$. Sendo $y=(x-2)^2-1$, temos $y+1=(x-2)^2$ e $\sqrt{y+1}=|x-2|$ e, portanto, $x-2=\begin{cases}\sqrt{y+1} & \text{se } y+1\geq 0\\ -\sqrt{y+1} & \text{se } y+1<0\end{cases}$. Então, $x-2=\begin{cases}\sqrt{y+1} & \text{se } y\geq -1\\ -\sqrt{y+1} & \text{se } y<-1\end{cases}$, mas, como $y\in[-1,+\infty)$, temos $x-2=\sqrt{y+1}$ e $x=2+\sqrt{y+1}$. Assim, $f^{-1}(y)=x=2+\sqrt{y+1}$ é uma expressão para a inversa de f.

Num mesmo sistema cartesiano, tracemos o $Gr(f)$ e o $Gr(f^{-1})$.

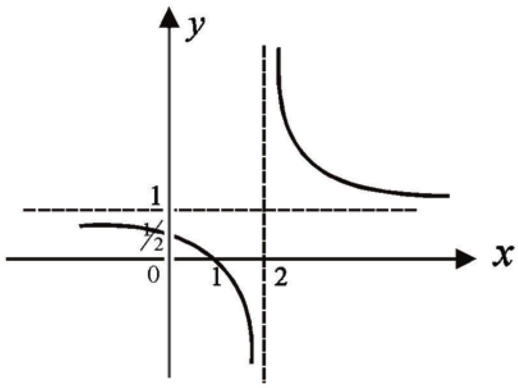


$f(x)=x^2-4x+3$ e $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$ verifique que, de fato, $f^{-1}of=I_{[2,+\infty)}$ e $fof^{-1}=I_{[-1,+\infty)}$.

Exemplo 4. Sendo $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$, determinemos a sua inversa:

Observe que $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$.

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{2\}$ e $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, como podemos observar no seu gráfico.



Logo, $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ dada por $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ é uma função bijetora; portanto, possui inversa $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$. Para encontrar uma expressão para a inversa, f^{-1}, calculemos x em função de y na equação $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. Assim: $y=\dfrac{x-1}{x-2}\Leftrightarrow y(x-2)=x-1\Leftrightarrow xy-x=2y-1\Leftrightarrow$

$x(y-1)=2y-1\Leftrightarrow x=\dfrac{2y-1}{y-1}$.

Conclusão: Uma expressão para a inversa é $f^{-1}(y)=\dfrac{2y-1}{y-1}$.

De fato: $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$ é a função inversa de f, porque

$$y\to\frac{2y-1}{y-1}=f^{-1}(y)$$

$$\left(f^{-1}of\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\frac{2\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)-1}{\dfrac{x-1}{x-2}-1}=x\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

$$\left(fof^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{2y-1}{y-1}\right) = \frac{\dfrac{2y-1}{y-1}-1}{\dfrac{2y-1}{y-1}-2} = y\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}-\{1\}\ .$$

Isto é: $f^{-1}of$ = função identidade em $\mathbb{R}-\{2\}$ e fof^{-1} = função identidade em $\mathbb{R}-\{1\}$.

Uma prova algébrica de que f é injetora pode ser escrita assim:

Se existirem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{2\}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, então

$$\frac{x_1-1}{x_1-2} = \frac{x_2-1}{x_2-2} \Rightarrow (x_1-1)(x_2-2) = (x_1-2)(x_2-1) \Rightarrow -2x_1 - x_2 = -2x_2 - x_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(x_2-x_1) = (x_2-x_1) \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exercício: Dada $f(x) = x^4 - 1$. Determine:

a) Um domínio e a respectiva imagem para que a função f possua inversa.

b) Um domínio e uma expressão para a inversa.

c) Um esboço do gráfico de f e o gráfico da inversa num mesmo sistema de eixos ortogonais.

8.10 Exercícios

1) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta.

a) Se f é uma função par, então a função $g(x) = |f(x)|$ é par.

b) Se f é uma função ímpar, então a função $g(x) = |f(x)|$ é ímpar.

c) Se existe a composta gof, e se f é uma função par, então gof é uma função par.

d) Se existe a composta gof, e se f é uma função ímpar, então gof é uma função ímpar.

e) Se f é a função maior inteiro, então $f(f(x)) = f(x)$, $\forall \in \mathbb{R}$.

f) Se f é a função de Dirichlet, então $f(f(x)) = 1$, $\forall \in \mathbb{R}$.

2) Seja $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{se } x \geq 0 \\ g(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Determine a função g para que f seja uma função par e escreva f com apenas uma expressão.

3) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções afins. Mostre que fog e gof são funções afins, e seus gráficos são duas retas paralelas. Qual é a relação entre a declividade do $Gr(fog)$ e as declividades do $Gr(f)$ e do $Gr(g)$?

4) Quantas soluções reais possui a equação $(x-1)^4 = x^3$?

5) Esboce o gráfico de

a) $y = \dfrac{1}{x-2}$ b) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ c) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2} - 1$

d) $y = \dfrac{-1}{(x-2)^2} + 1$ e) $y = \left| \dfrac{1}{x+1} - 1 \right|$

6) Sendo $f(x) = |\, x \,|$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, determine a composta gof e esboce o seu gráfico.

7) Sejam $f(x) = |\, x \,| + 1$ e $g(x) = |\, x-2 \,|$. Determine domínios e expressões para as funções $f+g$, $f-g$, fg e $\dfrac{f}{g}$.

8) Sejam $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^2 - 1$ definidas em $\mathbb{R}$. Resolva a inequação $|\, g(f(x)) \,| > g(f(x))$.

9) Esboce o gráfico de:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2 - x}$ b) $g(x) = |\, x^2 - |\, x \,| \,|$

c) $h(x) = \left| \sqrt{|\, x \,|} - 1 \right|$ d) $j(x) = \dfrac{|x-1| - |x+1|}{x}$

10) Justifique a afirmativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}; \quad x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$.

11) Mostre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale

a) $|x-y| \geq |x|-|y|$

b) $|x-y| \geq |y|-|x|$

c) Conclua de a) e b) que $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

12) Dê o domínio e esboce o gráfico das funções:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b) $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

c) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$

Obs.: Para esboçar os gráficos em b) e c) observe que $\sqrt{x^2+1}-|x|=\dfrac{1}{|x|+\sqrt{x^2+1}}$ e, portanto, para valores de x ou de $-x$ "muito grandes", implica que a diferença das imagens $\left(\sqrt{x^2+1}-|x|\right)$ é "muito pequena". Em símbolos: $|x|\to\infty \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-|x|\right)\to 0$.

Nesse caso, dizemos que o gráfico de $y=|x|$ é assintótico ao gráfico da função $g(x)=\sqrt{x^2+1}$.

13) Para cada uma das funções f, g e h do exercício 12, determine: um domínio para que a função possua inversa, uma expressão para a inversa e o gráfico da inversa.

14) Esboce os gráficos das funções:

a) $f(x)=[x+2]$, em que o símbolo $[x]$ representa o maior número inteiro menor ou igual a x.

b) $g(x)=\dfrac{[x]}{x}$

c) $h(x)=\sqrt{x-[x]}$

d) $k(x)=\dfrac{x}{[x]}$

e) $d(x)=\{x\}$ em que o símbolo $\{x\}$ denota a distância do número real x ao inteiro mais próximo.

f) $q(x)=\{4x\}$.

8.11 Exercícios complementares

1) (LIMA, 1996) Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?

2) Num reservatório com 1.000 litros de água pura, abre-se uma torneira que despeja dentro dele 10 litros de água salgada por minuto. Sendo que a água salgada contém 20 gramas de sal por litro, expresse em função do tempo t, no reservatório:

a) O volume de água.
b) A quantidade de sal.
c) A concentração de sal por litro d'água.

Depois de quanto tempo a concentração de sal na água do reservatório será de 18 gramas por litro?

3) Um pequeno comerciante de produtos importados adquiriu um lote de latas de azeite por R$ 1.500,00. Retirou 12 latas para o consumo próprio, aumentou o preço da dúzia de latas em R$ 75,00 e vendeu o restante conseguindo obter o mesmo valor que pagou pelo lote todo. Por quanto vendeu cada lata de azeite e quantas latas havia no lote inicial?

4) Se $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é uma função qualquer, então mostre que a função dada por $h(x)=f(x)-f(-x)$ é impar e a função $g(x)=f(x)+f(-x)$ é par.

5) Toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar. Prove isso!

6) Dê o domínio, a imagem e o gráfico da função dada pela expressão $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x-3|}{x-3}$.

7) Considere a função real de variável real dada por $f(x)=\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{1-2x+x^2}$, determine domínio, imagem e gráfico de *f*.

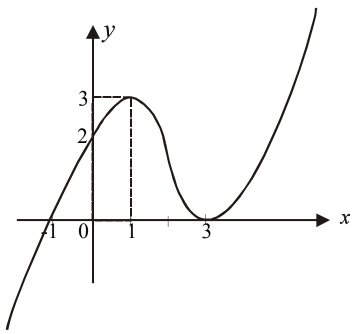
8) A figura abaixo representa o gráfico da função $f(x)$. Esboce os gráficos das funções:

a) $h(x)=-f(x)$

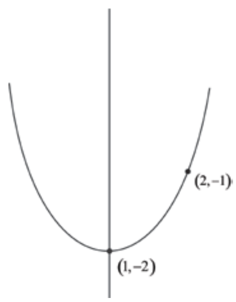
b) $g(x)=f(-x)$

c) $k(x)=f(1-x)$

d) $q(x)=f(|x|)$



9) Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado por:

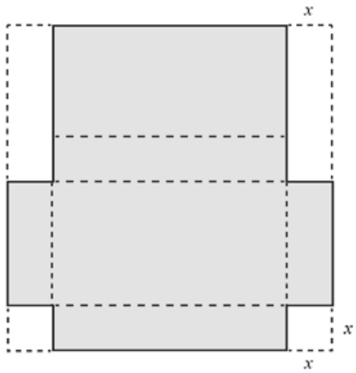


10) Um balão está subindo verticalmente numa velocidade constante de 2m/s. Um atleta corre por uma estrada reta na direção do balão numa velocidade de 4m/s. Quando passa debaixo do ba-

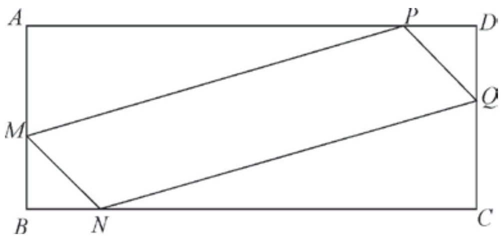
lão, o atleta está 20m abaixo dele. Dê uma expressão para a distância entre o balão e o atleta, em função do tempo, *t* segundos após a passagem por baixo do balão.

11) Com uma folha quadrada de papelão, de 40cm de lado, deseja-se construir uma caixa com tampa, retirando pequenos retângulos e quadrados, conforme modelo na figura. A seguir dobra-se as abas para cima, para formar as laterais e a tampa.

Escreva uma expressão para o volume da caixa em função do lado *x* do quadradinho a ser retirado da folha.



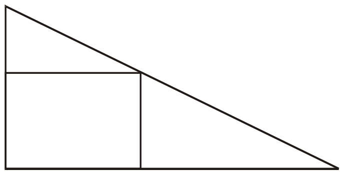
12) No retângulo *ABCD*, temos *AB*=6 cm, *BC*=10 cm e *MB*=*BN*=*PD*=*QD*. Qual é a área máxima que o quadrilátero *MNQP* pode ter?

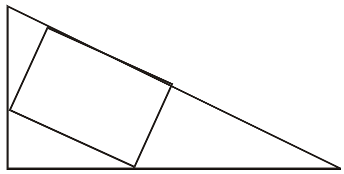


13) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Mostre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ com } x_1 \neq x_2 .$$

14) (LIMA, 1996) Numa vidraçaria, há um pedaço de espelho com a forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 100cm. A partir dele, quer-se recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelos menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo (veja figura). Em cada caso, determine as dimensões do retângulo de maior área. Qual é essa área?





15) (LIMA, 1996) Um restaurante a quilo vende 100kg de comida por dia, a R\$12,00 o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

16) Determine o ponto P do gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto $A(4,0)$. Qual é a distância mínima?

17) a) Resolva a equação $\sqrt{x-1}=a-x$ no conjunto dos números reais, determinando os valores de a para que a equação tenha efetivamente solução e dê a solução em função do número a.

b) Esboce os gráficos de $y=\sqrt{x-1}$ e $y=a-x$ e confirme a solução encontrada em a).

18) Considere a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2-4x+3$. Sejam A e B os pontos nos quais o $Gr(f)$ intersecta o eixo das abscissas e V o vértice do gráfico.

a) Calcule a área do triângulo AVB.

b) Determine o ponto $P(a,b)$ do $Gr(f)$ de modo que o triângulo APB tenha área igual a 15

19) Considere a parábola dada pelo gráfico de $f(x)=x^2$. Para cada ponto P dessa parábola, seja M o ponto médio do segmento PV, em que V é o vértice da parábola.

a) Esboce no plano cartesiano a figura geométrica formada por todos esses pontos *M*.

b) Dê a função que tem como gráfico essa figura geométrica.

20) Sejam A e B dois pontos sobre a parábola de equação $y = x^2$ e I o ponto de interseção da reta AB como o eixo y. Mostre que a ordenada de I é $-ab$, em que a e b são as abscissas de A e B respectivamente.

21) Resolva a equação $x^2 - 10x + 23 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

22) Sejam $g(x) = 3x - 2$ e $fog(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determine a lei da função *f*.

23) Sejam $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = x - 3$. Determine a lei da função *fog*.

24) Seja $f : [1, +\infty[\to [2, +\infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Mostre que *f* é bijetora.

b) Determine f^{-1}.

25) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Mostre que *f* é bijetora.

b) Determine f^{-1}.

26) Sejam $f : [-2, +\infty[\to [-4, +\infty[$ e $g : [-4, +\infty[\to [-1, +\infty[$ definidas por $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Existe $(gof)^{-1}$? Justifique.

27) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x>0\end{cases}$

a) Esboce o gráfico de *f*.

b) Determine um domínio no qual f possua inversa.

c) Dê a expressão da inversa.

d) Esboce o gráfico da inversa.

28) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função bijetora.

Se *f* é ímpar, então prove que a sua inversa f^{-1} é ímpar.

29) Seja $f(x)=x^2$ e $g(x)=2x-1$. Esboce o gráfico de $h(x)=f(g(x))$:

a) Efetuando a composta.

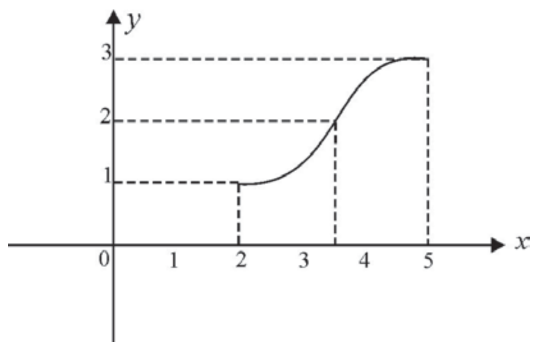
b) Usando translações, contrações ou expansões do gráfico de f.

30) Seja *f* uma função bijetora e *g* uma função dada por $g(x)=f(x+k)$ em que *k* é uma constante.

a) Mostre que *g* é bijetora.

b) Dê uma expressão para a inversa g^{-1}.

c) Se a figura abaixo representa o gráfico de f no intervalo $[2,5]$ e $k=5$, então esboce o gráfico de f^{-1}, de *g* e de g^{-1}.



RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

NÚMEROS

Exercícios – 4.6

1) a) V b) F c) V d) V

2) a) V b) V c) F d) F(Justificar)

5) Sim; $\alpha = 3 + 6\sqrt{2}$ e $\beta = 1 + 2\sqrt{2}$

6) Sim; $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ e $\beta = 1 + \sqrt{3}$

8) a) V b) F c) F d) F e) V (Justificar)

10) $s > r$

18) a) $S = \{-2, 2\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \{-3, 5\}$

d) $S = \{-1, 3\}$ e) $S = \varnothing$

19) a) $\{-1, 4\}$ b) $[1, 2]$ c) $(-\infty, 3)$

20) a) $(-\infty, 1]$ b) $x > \dfrac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

c) $(-\infty, -5) \cup [3, +\infty)$

d) $(2, +\infty)$ e) $\{0\} \cup \left[5/2, +\infty\right)$

f) $[-1, 5]$ g) $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

h) $\left(-\infty, -1/2\right) \cup (0, 1)$

i) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Exercícios – 4.7

1) $\{(2,14); (14,2)\}$

8) $p = 31$

9) (sugestão: a diferença entre dois números pares ou dois números ímpares é um número par).

14) Se $r = \dfrac{m}{n}(m, n \in \mathbb{N})$, tome $s = \dfrac{m+n}{\frac{m}{2} + n}$

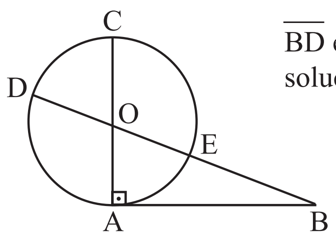
15) $ad = bc$

18) sugestão:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0$$

20) sugestão: use raciocínio análogo ao do exemplo 2 da seção 4.2.

21) $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = \sqrt{b}$



$\overline{BD}$ e $-(\overline{BE})$ são as soluções

FUNÇÕES

Exercícios – 6.4

1) a) V=30.000 - 1250t b) 24 horas

2) (33,333....)%

3) a) V b) F c) F d) V e) F

5) a) $\mathbb{R}-\{2,3\}$

b) $[2,4]$

c) ϕ

d) $[2,+\infty)$

e) $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{R}-\{1,7\}$

7) 1 e 1

8) a) $[1,2]$

b) $[1,2)$

c) $(3,+\infty)$

d) $\left(-\infty,\frac{-5}{3}\right]\cup\{-1\}$

e) $(1,2)\cup(2,+\infty)$

9) *Sugestão:* Tome três pontos quaisquer P_1, P_2 e P_3 sobre o gráfico de f e mostre que $d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=d(P_1,P_3)$. Conclua que P_1, P_2 e P_3 são colineares.

10) *Sugestão:* Tome $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ dois pontos distintos da reta. Como qualquer outro ponto $P(x,y)$ da reta está alinhado com P_1 e P_2, conclua que existe $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$ tal que $y=ax+b$

11) Dica: $a=f(1)$

Exercícios – 7.8

2) $\{-1,5\}$

3) h=4 e (5,0)

4) $a=0$ e $b=\frac{-1}{3}$

$a=\frac{1}{9}$ e $b=\frac{-2}{3}$

6) a) $S=\{-27,27\}$

b) $S=\left\{0,-1,-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right\}$

7) a) $[0,3]$

b) $\left(-3,-1/3\right)\cup(0,+\infty)$

c) $(-\infty,9)$

d) $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

e) $\mathbb{R}$

f) $\{-2,2\}$

8) 7

10) $d(x)=\sqrt{x^4+x^2-6x+9}$

11) $g(x)=-ax^2-bx-(\frac{2b^2-4ac}{4a})$

12) Parábola $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2-1$

13) 25m x 12,5m

14) 5m

15) 100m x $\frac{200}{\pi}$ m

16) r =30m e A=900 m^2

17) a) $(0,1)$ b) $\left(\frac{4}{4+\pi},\frac{\pi}{4+\pi}\right)$

18) $\left(\frac{2p}{4+\pi}\text{x}\frac{p}{4+\pi}\right)$

19) 33.

Exercícios – 8.10

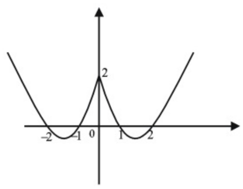
1) a) V b) F c) V d) F e) V f) V

2) $f(x) = 3|x| + 2$

3) A declividade da composta dessas funções é igual ao produto das declividades delas.

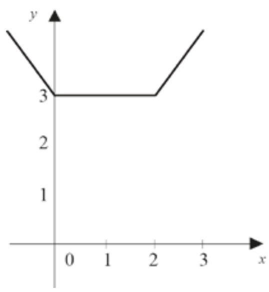
4) Duas (sugestão: esboce gráficos)

6)

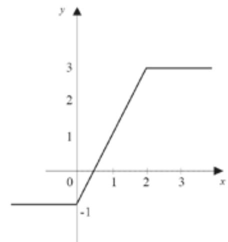


7)

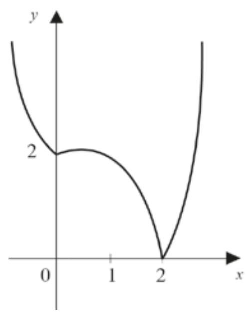
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ se \quad x \geq 2 \\ 3 & , \ se \quad 0 \leq x < 2 \\ -2x+3 & , \ se \quad x < 0 \end{cases}$$



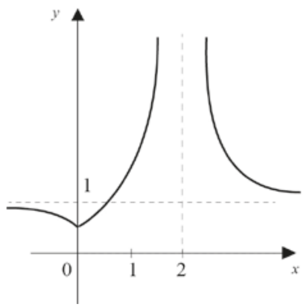
$$(f-g)(x) = \begin{cases} 3 & , \ se \quad x \geq 2 \\ 2x-1 & , \ se \quad 0 \leq x < 2 \\ -1 & , \ se \quad x < 0 \end{cases}$$



$$(fg)(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & , \ se \quad x \geq 2 \\ -x^2 + x + 2 & , \ se \quad 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 & , \ se \quad x < 0 \end{cases}$$

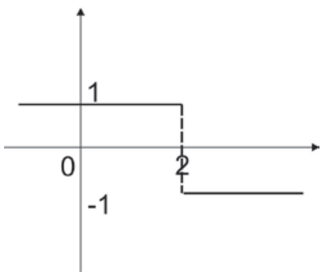


$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{3}{x-2} & , \ se \quad x > 2 \\ -1 + \dfrac{3}{2-x} & , \ se \quad 0 \leq x < 2 \\ 1 - \dfrac{1}{2-x} & , \ se \quad x < 0 \end{cases}$$

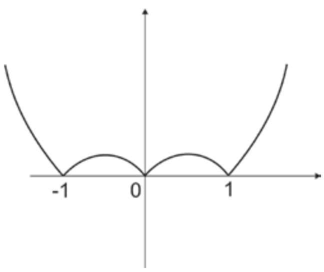


8) $]1,3[$ (sugestão: esboce gráficos das compostas)

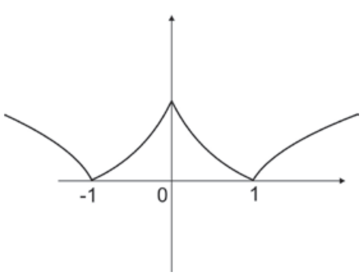
9) a)



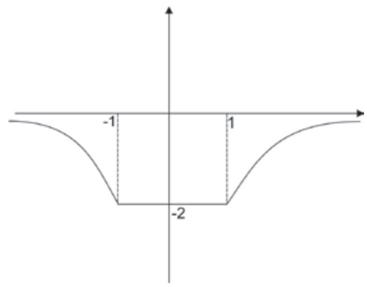
b)



c)

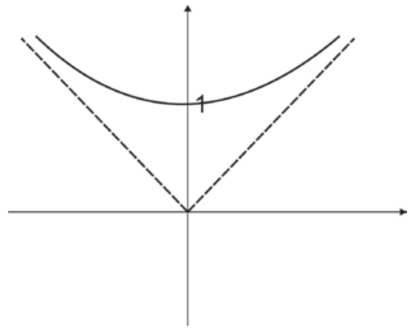


d)

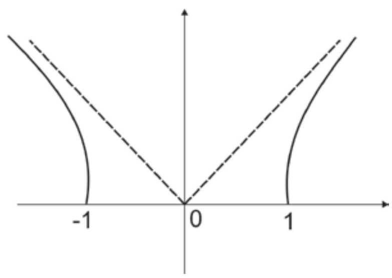


12) a) semicircunferência

b)



c)



13)

Para $Dom(f)=[0,1]$, temos $f^{-1}(x)=f(x)$

Para $Dom(f)=[-1,0]$, temos $f^{-1}(x)=-f(x)$

Para $Dom(g)=[0,+\infty]$, temos $g^{-1}(x)=h(x)$

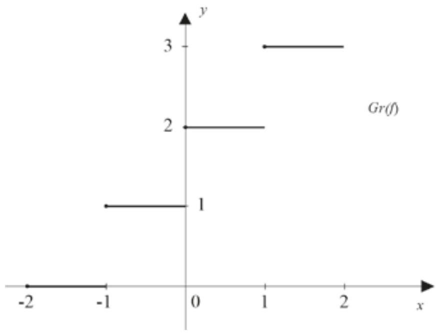
Para $Dom(g)=[-\infty,0]$, temos $g^{-1}(x)=-h(x)$

Para $Dom(h)=[1,+\infty]$, temos $h^{-1}(x)=g(x)$

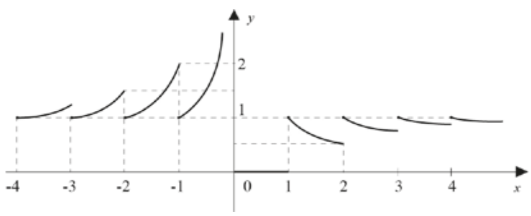
Para $Dom(h)=[-\infty,-1]$, temos $h^{-1}(x)=-g(x)$

14)

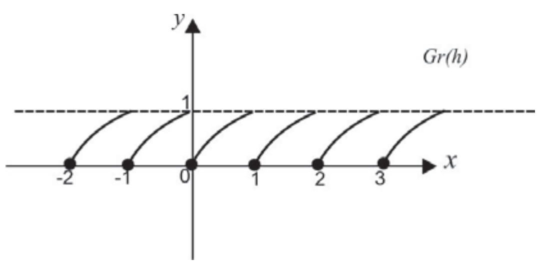
a) $f(x) = [x+2]$



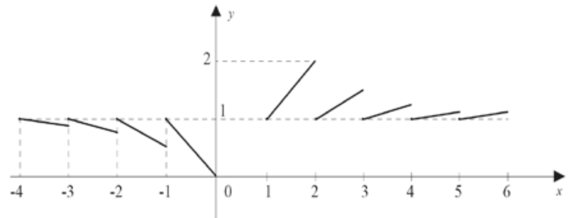
b) $g(x) = \dfrac{[x]}{x}$



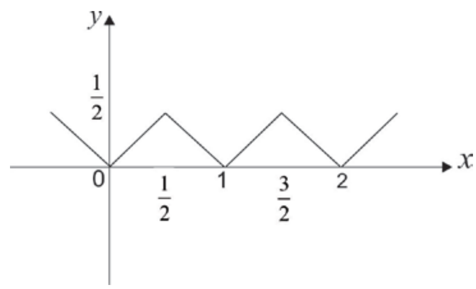
c)



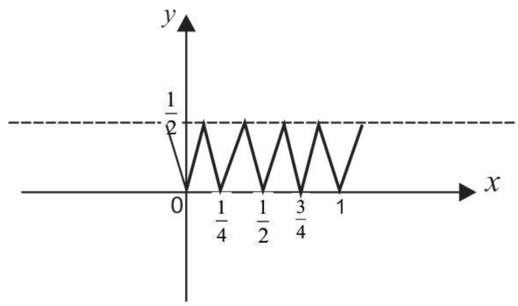
d) $k(x) = \dfrac{x}{[x]}$



e)



f)



Exercícios – 8.11

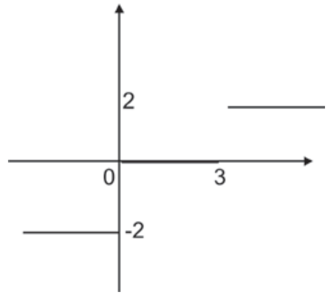
1) 20 degraus e 40 segundos

2) a) V(t)=1.000+10t b) s(t)=200t

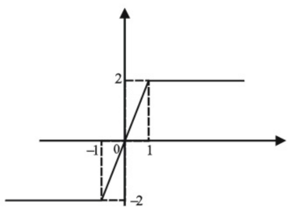
c) c(t)= $\dfrac{20t}{100+t}$ t=900 horas

3) R$31,25 e 60

6)



7)



9) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

10) $d(t) = \sqrt{20(t^2 + 4t + 20)}$

11) $V(x) = 2x^3 - 80x^2 + 800x$

$Dom(V) = [0, 20]$

12) 32

14) 40cm x 30cm=1.200cm^2

50cm x 24cm=1.200cm^2

15) R$ 16,00

16) $P = \left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ e $d = \frac{\sqrt{15}}{2}$

17) $a \geq 1$ e $x = \frac{1}{2} + a - \sqrt{a - \frac{3}{4}}$

18) $P_1 = (-2, 15)$ e $P_2 = (6, 15)$

19) a) Parábola b) $g(x) = 2x^2$

21) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

(Dica: faça $x + \frac{1}{x} = t$)

22) $f(x) = x^2 + 3x + 3$

23) $fog(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se} \quad x \geq 4 \\ 3x - 5 & \text{se} \quad x < 4 \end{cases}$

30) b) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - k$

COLEÇÃO DAS PRIMEIRAS PROVAS DO PROCESSO SELETIVO ESTENDIDO PARA O CURSO DE MATEMÁTICA DA UFES DE 1998 A 2012

1 - Primeiras provas de Matemática Básica I

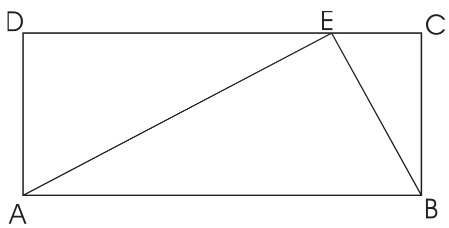
1998

1) Dar domínio, imagem e gráfico da função dada por:

a) $f(x) = \left| \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1 \right|$

b) $g(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ |x-1| & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

2) Quais as dimensões do retângulo ABCD de perímetro 16 cm, para que o triângulo inscrito ABE tenha área máxima? Qual é essa área máxima? Qual deve ser a medida do segmento DE?



3) a) Para quais valores de t a inequação $x^2 + 2x + t > 10$ é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$?

b) Resolver a inequação $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \geq 0$.

4) a) Encontre a expressão da função quadrática que possui um zero (raiz) igual a 1 e cujo gráfico tem vértice V(2,3).

b) Resolva a equação $|\, x+2 \,| = |\, 3x^2 + 3x - 6 \,|$.

5) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando cada resposta:

a) A raiz quadrada de um número irracional positivo é sempre irracional.

b) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $1 + \frac{1}{x} = 1$.

c) Se p e q são números naturais ímpares, então $p^2 + q^2$ é um número natural par.

d) Existem infinitos números racionais no intervalo $[\, 0, 1 \,]$.

1) a) Resolva a inequação $\dfrac{x^2-2}{x} < 1$.

b) Se $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ calcule $f\left(f(x)\right)$.

2) Quais as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito num triângulo isósceles de altura 4 cm e base 6 cm, de modo que a base do retângulo esteja sobre a base do triângulo? Qual é a área desse retângulo?

3) Esboçar o gráfico de:

a) $y=\left|1-\dfrac{1}{x-2}\right|$

b) $y=\left|x^2-4|x|+3\right|$

4) Dada a função $f(x)=(x-2)^2$,

a) determine um domínio no qual f seja inversível.

b) determine a inversa de f nos domínios apropriados.

c) esboce o gráfico de f e o de sua inversa num mesmo sistema cartesiano.

5) a) Resolva $|x-1|=|x|$.

b) Determine o domínio da função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}+\dfrac{1}{x-2}$.

2000

1) a) Resolva a inequação $\dfrac{x-1}{x-2} > \dfrac{x-3}{x-4}$.

b) Há falha na "demonstração"? Se houver, diga onde e por quê.

$$-20=-20 \Leftrightarrow 16-36=25-45 \Leftrightarrow 4^2-4.9=5^2-5.9 \Leftrightarrow$$

$$4^2-4.9+\frac{81}{4}=5^2-5.9+\frac{81}{4} \Leftrightarrow \left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2} \Leftrightarrow 4=5$$

2) Responda Verdadeiro ou Falso para os itens abaixo, justificando sua resposta.

a) A soma de dois números inteiros consecutivos é ímpar.

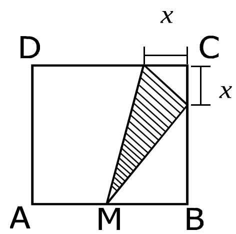
b) Se α é um número irracional e β é um número racional, então $\alpha\beta$ é irracional.

c) Se $x<0$ e $y \neq 0$, então $(x-1)\,|y| < 0$.

d) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \geq y$, então $|x| \geq |y|$.

3) Sejam $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+4 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 3x+4 & \text{se} \quad x<1 \end{cases}$ e $g(x)=x-3$, determine $g(f(x))$ e $f(g(x))$.

4) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 4 cm e M é ponto médio do lado AB. Determine a medida x para que a área do triângulo hachurado seja máxima. Qual é essa área máxima?



5) Esboce o gráfico e dê a imagem de cada função.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$

b) $g(x)=\left|x^2-1\right|-2(x+1)$

2001

1) Sendo x e y números reais com $x < y < 0$, prove que:

a) $x^2 > xy > y^2$

b) $\sqrt{xy} > -y$

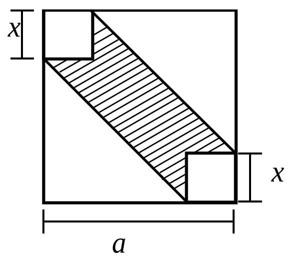
2) Resolver as inequações:

a) $x^4 - x^2 \geq 0$

b) $\dfrac{1}{1-x} > 1{,}6363...$

3) Dê o domínio, a imagem e o gráfico da função h definida por $h(x) = \dfrac{|\,(gof)(x)\,|}{(gof)(x)}$, em que $f; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas por $f(x) = x - 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.

4) De dois vértices opostos do quadrado de lado a cm, são retirados dois quadradinhos de lado x cm (ver figura). Qual deve ser a medida x para que a área do hexágono hachurado seja máxima? Qual é essa área máxima?



5) Seja $f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$ a função dada por $f(x) = x^2$. Encontre f^{-1}, se existir, e trace o seu gráfico.

6) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando.

a) Se α e β são raízes da equação $x^2 - 3x + 1 = 0$, então $\alpha^2 + \beta^2$ é um número irracional.

b) A distância entre os pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = 10 - x$ e $y = 10 - x^2$ é um número irracional.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ é um número par.

d) Se α^2 é um número irracional, então α também é um número irracional.

1) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta.

a) Se g é uma função par e $h = fog$, então h é sempre uma função par.

b) Se um círculo e um quadrado têm perímetros iguais, então a área do círculo é maior que a área do quadrado.

c) Se $r \in \mathbb{Q}^*$ e $s \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então $\frac{s}{r} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

d) $10^{-98} > 9.10^{-99}$.

2) Resolva:

a) $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x+1} = -1$

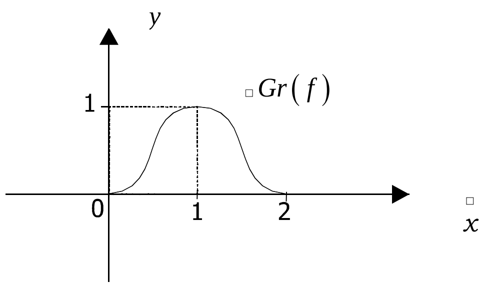
b) $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$

3) Dada a função $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} \right| - 1$, determine:

a) Domínio, imagem e intersecções com os eixos coordenados.

b) Um esboço do gráfico.

4) Se a figura abaixo é a representação, no plano cartesiano, do gráfico da função $f : [0,2] \to [0,1]$, então esboce o gráfico da função h dada pela expressão $h(x) = 1 - f(x+1)$.



5) Dada $f(x)=x^2+4x+3$, determine:

a) Um domínio no qual f possui inversa e dê a expressão da inversa.

b) Um esboço do gráfico de f e de sua inversa f^{-1} num mesmo sistema cartesiano.

6) Se a função quadrática $f(x)=x^2+px+q$ possui dois zeros reais maiores do que 1, então prove que $1+p+q$ é positivo.

2003

1) Resolver:

a) $\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{2x+7}{3}+\dfrac{4-6x}{x-1}+1=0$

b) $x^3-2x^2+x\leq 0$

c) $\dfrac{x-1}{x+3}\leq x+5$

d) $\sqrt{x+3}>\sqrt{2x-5}$

2) Se $m,n\in\mathbb{N}^*$ e $\sqrt{mn}$ é um número irracional, prove que $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ é irracional.

3) Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ tais que $(x+y)^3=x^3+y^3$. Mostre que $x=0$ ou $y=0$ ou $x=-y$.

4) Dada $f(x)=\sqrt{|\,x\,|}$, determine:

a) Domínio, imagem e paridade de f.

b) Esboço do gráfico de f.

5) Dada a função $y = \left|\,|x+1|-1\,\right|+1$, determine:

a) Esboço do gráfico.

b) Os pontos de interseção do gráfico com a reta $y = 3$.

6) Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + 1$ uma função. Determine os valores de a e b para que o gráfico de f intersecte o eixo x em um único ponto $P(3,0)$.

7) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta:

a) Se $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x < y < 0$, então $x^2 > y^2$.

b) Se $x \in \mathbb{R}_+$, então $\sqrt{(-x)^2} = -x$.

c) Se $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

d) Se f é uma função crescente, então a sua inversa f^{-1} é uma função decrescente.

2004

1) a) Resolva a inequação $\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{x} \geq \dfrac{-1}{x}$.

b) Encontre dois números inteiros positivos e consecutivos sabendo que a soma de seus quadrados é 481.

2) a) Se n é um número natural ímpar, então prove que $n^2 - 1$ é divisível por 8.

b) Determine os pontos P do gráfico da função $f(x) = 2x + 3$ que estão 3 unidades distantes da origem do sistema cartesiano.

3) De um mesmo ponto O serão lançados um foguete cuja trajetória plana é uma parábola e, posteriormente, um míssil teleguiado com trajetória retilínea para atingir o foguete no ponto mais alto

de sua trajetória. Sabe-se que o foguete, se não destruído, atingirá o solo novamente no ponto P distante 200 km do ponto O. Encontre as expressões das duas funções cujos gráficos são respectivamente a trajetória do foguete e do míssil.

4) Dada a função $f(x) = x|x| - x$, determine:

a) O domínio, a imagem e os zeros de f.

b) Um esboço do gráfico de f.

c) O valor máximo e o mínimo da função no intervalo $[-1, 1]$.

5) Dadas as funções reais $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$,

a) determine domínios para f e g nos quais seja possível efetuar a composta gof.

b) dê a expressão da composta $(gof)(x)$.

c) resolva a inequação $g\left(f(x)\right) < g(x)$.

2005

1) Resolva:

a) $(x-1)^2 = |x+2|$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 30}{x+1} > 5$

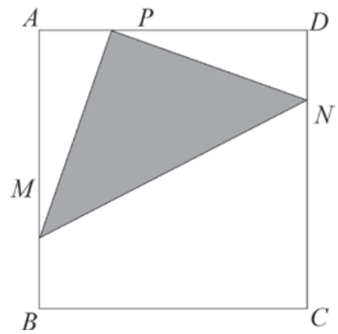
c) $\dfrac{x+2}{2} \leq \dfrac{2}{x-2}$

2) Dê domínio, imagem, zeros e gráfico da função $f(x) = \left| 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} \right|$.

3) Para acomodar os candidatos ao curso de Matemática, numa sala retangular, procedeu-se assim: colocaram 150 carteiras, em filas, de modo que o número de carteiras de cada fila supera em 5 o número de filas. Quantas carteiras foram colocadas em cada fila?

4)

Na figura ao lado, $ABCD$ é um quadrado de lado 10 metros e $x = \overline{BM} = \overline{AP} = \overline{DN}$. Determine a medida x de modo que a área do triângulo hachurado MNP seja:



a) Mínima. Qual é essa área mínima?

b) Máxima. Qual é essa área máxima?

5) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando sua resposta:

a) Se p é um número primo, então p^2 é um número primo.

b) Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}^*$, então $a + b\sqrt{2}$ é sempre irracional.

c) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par ou ímpar, a função $g(x) = | f(x) |$ é sempre par.

d) Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então a equação $f(x) = 0$ possui uma única raiz.

2006

1) Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x+1}{x-2} > 3$

b) $| x^2 - 5x + 5 | \leq 1$

2) Dada $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } |x| \leq 1 \\ |x| - 1, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$:

a) Esboce o gráfico da função f e dê os pontos de interseção com os eixos.

b) Esboce o gráfico da função g dada por $g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ e dê os pontos de interseção com os eixos.

3) Uma janela normanda tem formato de um retângulo com um semicírculo acoplado na sua base superior. Se o perímetro da janela for 2 metros, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

4) Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, determine:

a) Um domínio e respectivo conjunto imagem para que f seja inversível.

b) Uma expressão para a inversa de f.

c) Uma justificativa de que a expressão encontrada em (b) é a lei da inversa de f.

d) Um esboço do gráfico da inversa de f.

5) Responda Falso ou Verdadeiro, justificando sua resposta:

a) Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n^2 + n$ é um número inteiro par.

b) A soma de um número racional com um número irracional pode resultar um número racional.

c) Se α é um número irracional e $r \in \mathbb{Q}^*$, então $r\alpha$ é número irracional.

d) O conjunto solução da inequação $x\sqrt{3} - x\sqrt{5} < 7$ é $S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x < \dfrac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right\}$.

2007

1) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, prove que $n^2 + n + 1$ é um inteiro ímpar.

2) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 6$ é uma parábola. Fazendo uma rotação de 180º dessa parábola em torno do seu vértice, obtém-se outra parábola. Dê uma função que tenha como gráfico essa outra parábola.

3) Esboce o gráfico de:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x>0\end{cases}$

b) $g(x)=\left|\,-x^2+3|x|-2\,\right|$

4) Dada a função $f(x)=x^2+4x+4$, determine:

a) Um domínio para o qual f possua inversa.

b) Uma expressão para a inversa.

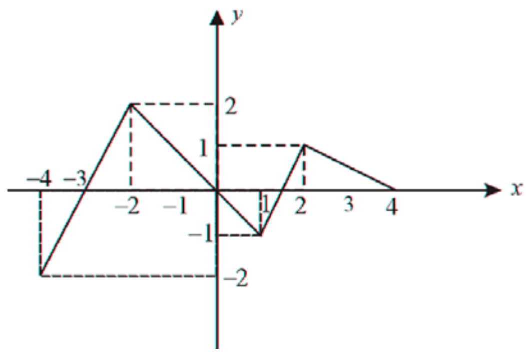
c) O gráfico da inversa.

5) O gráfico da função f é dado abaixo. Esboce o gráfico de:

a) $g(x)=f(-x)$

b) $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\le 0\\ |f(x)| & \text{se } x>0\end{cases}$

c) $k(x)=\left|\,f(x-2)\,\right|$



6) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta:

a) Sejam $m,n\in\mathbb{Z}$. Se mn é um número inteiro ímpar, então m e n são números ímpares.

b) Existem números reais x tais que $\sqrt{x^2}=-x$.

c) Se $\alpha\beta$ é irracional, então α e β são irracionais.

d) Se n é um número ímpar qualquer, então existe algum $k\in\mathbb{Z}$, tal que $n=2k^2+2k+1$.

2008

1) Resolver a equação e a inequação abaixo:

a) $x^2 + 3x + 2 = |x+1|$

b) $\dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x+4)} \leq 0$

2) a) Se n é um número inteiro ímpar, então mostre que n^2 pode ser escrito na forma $8k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. Prove que $a < \sqrt{ab} < b$.

3) Seja f uma função real dada por $f(x) = 1 - |x^2 - 4x + 3|$. Determine os zeros, o gráfico e o conjunto imagem de f.

4) Determine (em função de c) as coordenadas do ponto P do gráfico de $y = c - 2x$ (c =constante), de modo que o retângulo de vértices na origem, no ponto P e lados sobre os eixos tenha área máxima. Qual é o valor de c para que a área máxima seja 2?

5) Responda Verdadeiro ou Falso em cada sentença e justifique:

a) Sejam α e β números irracionais com $(\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}$. Então $(\alpha - \beta)$ só pode ser um número irracional.

b) A decimal 0,11212121... é um número real que pode ser expresso pela fração $\dfrac{111}{999}$.

c) $1 < 2 \Rightarrow 1 + a < 2 + a \Rightarrow \dfrac{1}{1+a} > \dfrac{1}{2+a}, \quad \forall a \neq -1$ e $a \neq -2$

d) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ somente quando $x = 0$ ou $y = 0$.

2009

1) a) Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $0 \le a \le b$. Prove que $\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b}$.

b) Resolva a inequação $\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{1-x}$.

2) Seja $g(x) = \left|x^2 - 2x\right| - 1$.

a) Dê os zeros de g.

b) Esboce o gráfico de g.

3) Seja $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

a) Prove que f é injetora.

b) Prove que $f(x).f(-x) = 1$ se $x \ne -1$.

c) Prove que $f(x) + f\left(1/x\right) = 0$ se $x \ne 0$.

d) Esboce o gráfico de f. (Sugestão: Observe que $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$)

4) Seja $f(x) = x^{-3}$ uma função. Determine:

a) Domínio, zeros e imagem de f.

b) Paridade de f (par/ímpar).

c) Intervalos de crescimento e de decrescimento de f.

d) Esboço do gráfico de f.

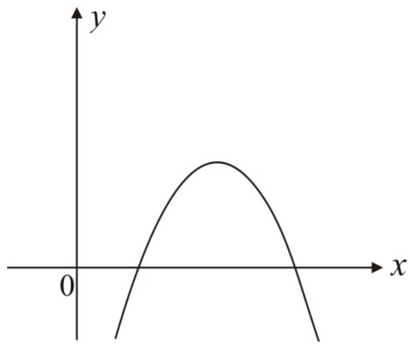
5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta:

a) Se α^2 é um número irracional, então α é irracional.

b) Seja x_0 um zero da função afim $f(x) = ax + b$. Se $x_0 < 0$, então $ab > 0$.

c) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função qualquer e $g(x)=f(x)+f(-x)$. O gráfico de g é simétrico em relação ao eixo y.

d) Se a figura é o gráfico da função $f(x)=ax^2+bx+c$, então o produto abc é positivo.



2010

1) a) Seja $f(x)=(x-a)^2-b^2$. Determine os zeros de f, esboce o gráfico e dê as coordenadas do ponto mínimo ou máximo do gráfico em função dos valores a e b.

b) Resolva a inequação: $\dfrac{|x+1|(x^2-3x+2)}{x}\geq 0$.

2) Esboce os gráficos das funções:

a) $f(x)=\left|\sqrt{x^2-2x+1}-1\right|$

b) $g(x)=|h(x)|$ sendo $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x\geq 0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x<0\end{cases}$

3) Seja $f(x)=\sqrt{|x|}$.

a) Determine o domínio, verifique se f é par ou ímpar e esboce o $gr(f)$.

b) Dê um domínio para que f seja inversível, dê a inversa f^{-1} e esboce o seu gráfico.

4) Quais as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimento 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos?

5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando a resposta:

a) Se $n\in\mathbb{Z}$, então n^2+n é sempre um inteiro par.

b) $\sqrt{5}$ é um número racional.

c) Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções. Se f e g são funções pares, então as funções compostas fog e gof são pares.

d) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função inversível, então a equação $f(x)=b$ possui uma única solução.

2011

1) Resolva as equações e inequações:

a) $1-\sqrt{1-x^2}=x^2$

b) $\dfrac{x-1}{x+1}\leq x+2$

2) Dê o domínio, imagem, zeros e esboce o gráfico da função:

a) $f(x)=\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

b) $g(x)=(x-1)^3+1$

3) Sendo $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ uma função:

a) Dê o domínio de f, os zeros e mostre que $f(x)<|x| \quad \forall x\in Dom(f)$.

b) Verifique se f é par ou ímpar e prove que f é decrescente no intervalo $(-\infty,-1]$ e crescente em $[1,+\infty)$.

4) Seja $f(x) = -x^2 + 2x$. Escolha um domínio no qual f possua inversa, determine uma expressão para a inversa e esboce o seu gráfico.

5) Responda as perguntas abaixo, justificando sua resposta:

a) Se m e n são inteiros ímpares, então $m^2 + n^2$ é um inteiro par?

b) Se α é um número irracional e r um racional não nulo, então o produto pode ser um número racional?

c) Se a,b,c e r são números racionais e $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f(r)$ pode ser um número irracional?

d) Quais números primos p podem ser escritos na forma $p = n^2 - 1$ com $n \in \mathbb{N}$?

2012

1) a) Prove que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

b) Um turista jogador foi a Las Vegas para se divertir nos cassinos. Com receio de que o dinheiro acabasse rapidamente nos jogos, decidiu que gastaria, em cada dia, somente a metade do que possuía. Depois de 5 dias, nenhum ganho obteve, pagou 80 dólares de táxi até o aeroporto e verificou que lhe restavam apenas 45 dólares. Que quantia o turista tinha inicialmente?

2) A soma dos perímetros de um triângulo equilátero e de um quadrado é igual a 1 metro. Encontre as dimensões do triângulo e do quadrado que minimizam a área total.

3) a) Seja $f(x)=\frac{1}{|x-1|}-1$. Determine: $Dom\,(f)$; $Im\,(f)$; $z(f)$ e $Gr(f)$.

b) Sendo $g(x)=(x-1)^3$, esboce o gráfico de $h(x)=|g(-x)|$.

4) Seja $f(x)=\sqrt{2x-1}$:

a) Determine o domínio, o gráfico e a imagem de f .

b) Determine uma expressão para f^{-1} e esboce o seu gráfico.

5) Responda Verdadeiro ou Falso, justificando:

a) Todo número natural $n>1$ admite um divisor primo.

b) Para todo $x\in\mathbb{R}$, temos $2x^4+3x^2<10x^5+1000$.

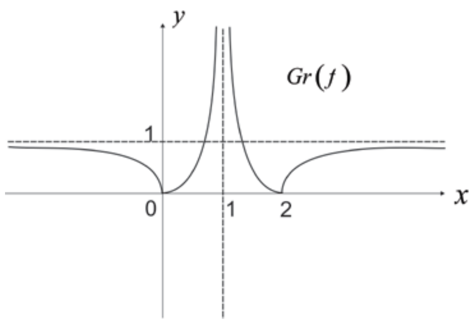
c) Se $\frac{2}{x+1}<1$, então $|x|>1$.

d) Se $\alpha\neq 0$ é um zero da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, então o seu inverso $\frac{1}{\alpha}$ é um zero da função quadrática $g(x)=cx^2+bx+a$.

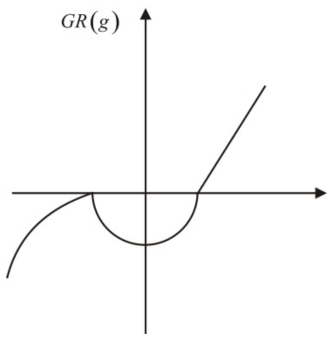
2 - Respostas das questões das primeiras provas

1998

1) a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$



b) $Dom(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$



2) Quadrado 4x4. Área triângulo=8 e não depende da posição do ponto E.

3) a) $(11,+\infty)$

b) $\left(0,\tfrac{1}{2}\right]\cup(1,2)$

4) a) $y=-3x^2+12x-9$

b) $\left\{-2,\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3}\right\}$

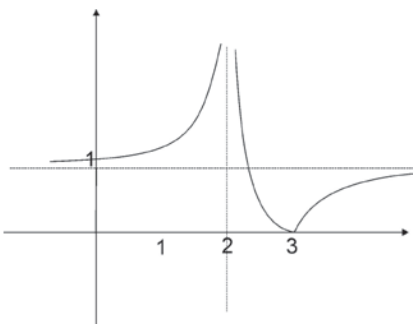
5) a) V b) F c) V d) V (Justificar)

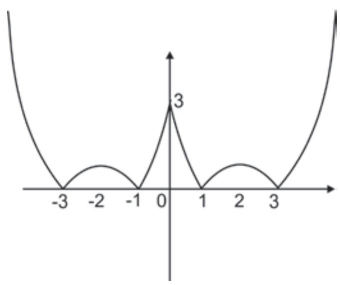
1999

1) a) $(-\infty,-1)\cup(0,2)$ b) $f\left(f(x)\right)=x$

2) $b=3,\quad a=2,\quad$ S=6

3) a) b)





4) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{2}$ ou $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x}$ (conforme o domínio escolhido)

5) a) $\left\{\tfrac{1}{2}\right\}$ b) $Dom(f)=(1,3)-\{2\}$

2000

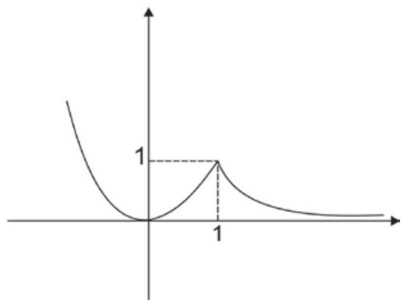
1) a) $(2,4)$

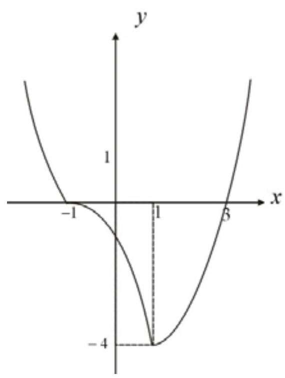
2) a) V b) F c) V d) F (justificar)

3) $g(f(x))=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{se } x\ge 1\\ 3x+1 & \text{se } x<1\end{cases}$ $\quad f(g(x))=\begin{cases}(x-2)^2+3 & \text{se } x\ge 4\\ 3x-5 & \text{se } x<4\end{cases}$

4) $x=3$; $S=9/2$

5) a) b)



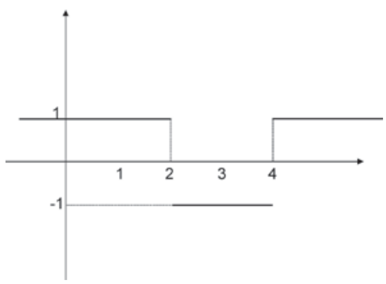


2001

2) a) $(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$

b) $\left(\frac{7}{18},1\right)$

3)



4) $x = \frac{a}{3}$ e $S_H = \frac{a^2}{3}$

5) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

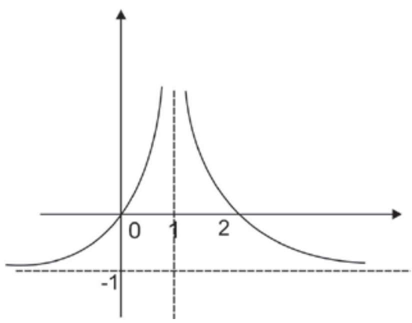
6) a) F b) V c) V d) V (justificar)

2002

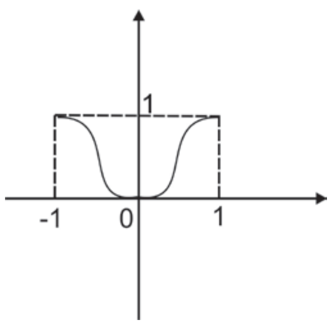
1) a) V b) V c) V d) V (justificar)

2) a) $\{0\}$ b) $(-4,-2)$

3)



4)

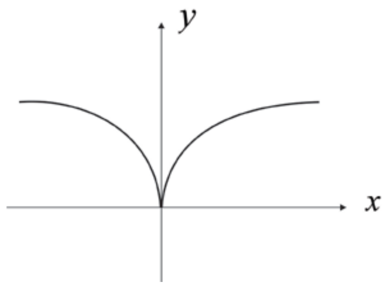


5) $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+1}$ ou $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+1}$ (conforme o domínio escolhido)

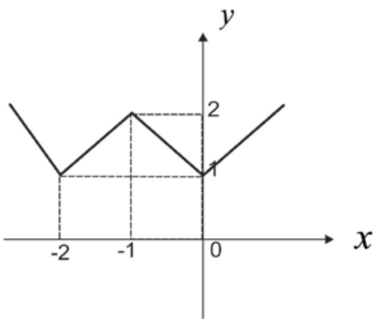
2003

1) a) $\{4\}$ b) $(-\infty,0]\cup\{1\}$ c) $(-3,+\infty)$ d) $\left[\frac{5}{2},8\right)$

4)



5) a)



b) $P_1=(-4,3)$; $P_2=(2,3)$

6) $a=0$ e $b=-\frac{1}{3}$ ou $a=\frac{1}{9}$ e $b=-\frac{2}{3}$

7) a) V b) F c) V d) F (justificar)

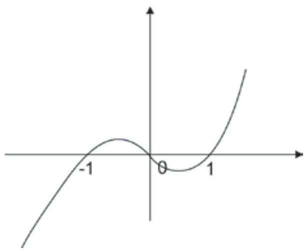
2004

1) a) $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$ b) 15 e 16

2) b) $P_1=(0,3)$; $P_2=\left(\dfrac{-12}{5},\dfrac{-9}{5}\right)$

3) $f(x)=ax^2-200ax \quad (a<0)$; $g(x)=-100ax \quad (a<0)$

4) b)



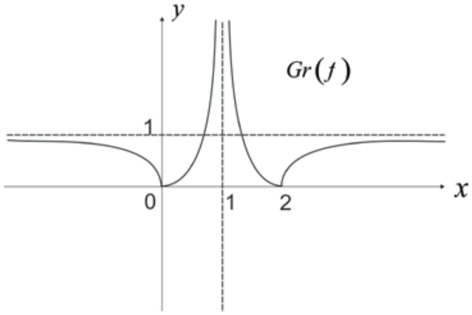
c) $\dfrac{1}{4}$ e $-\dfrac{1}{4}$

5) c) $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$

2005

1) a) $\left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$ b) $(-1,+\infty)-\{5\}$ c) $\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right]\cup\left(2,2\sqrt{2}\right]$

2)



3) 15

4) a) $x = 5$ e $S = 25$ b) $x = 0$ ou $x = 10$ e $S = 50$

5) a) F b) V c) V d) V (justificar)

2006

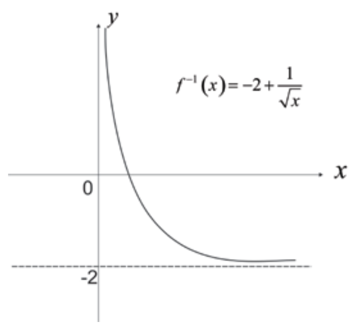
1) a) $\left(2, \frac{7}{2}\right)$ b) $[1,2] \cup [3,4]$

2) a) $A(-1,0),\ B(1,0),\ C(0,1)$ b) $A'(-2,0),\ B'(2,0),\ C'(-1,0)$

3) $\dfrac{4}{4+\pi} \text{ x } \dfrac{2}{4+\pi}$ (dimensões do retângulo)

4) b) $f^{-1}(x) = -2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ou $f^{-1}(x) = -2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (conforme o domínio escolhido)

d)

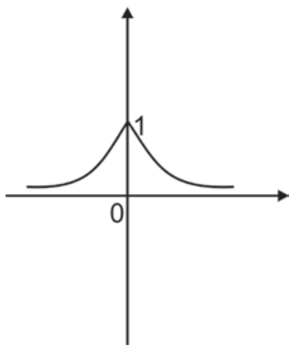


5) a) V b) F c) V d) F (justificar)

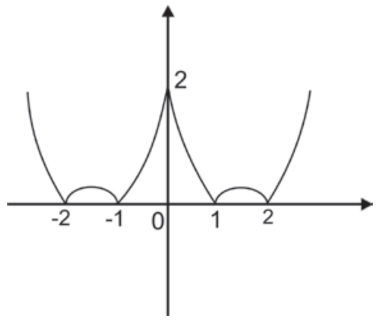
2007

2) $g(x) = -(x-2)^2 + 2$

3) a)



b)

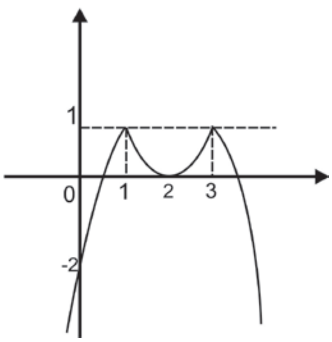


6) a) V b) V c) F d) F (justificar)

2008

1) a) $\{-3, -1\}$ b) $(-4, -1]$

3)



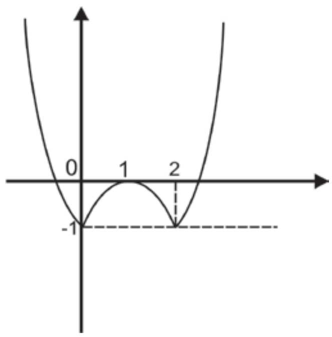
4) c = 4 ou c = –4

6) a) V b) F c) F d) F (justificar)

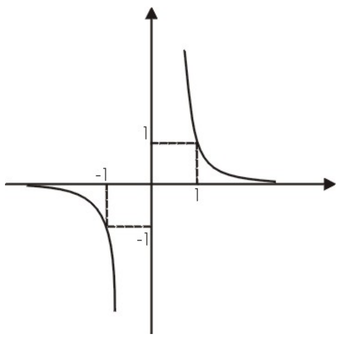
2009

1) b) $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup(0,1)$

2)



4)

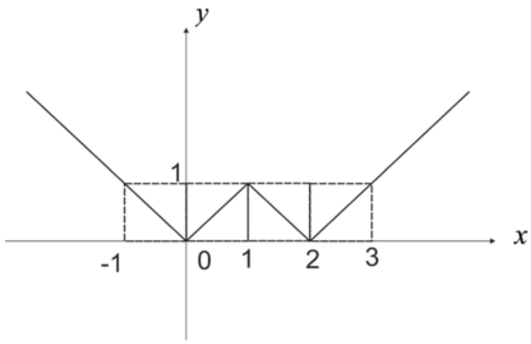


5) a) V b) V c) V d) V (justificar)

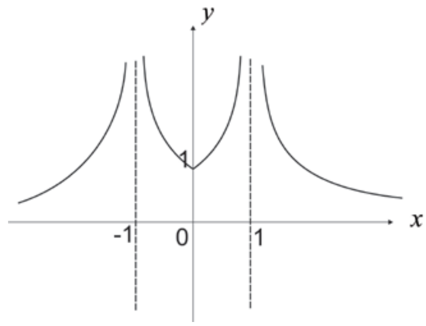
2010

1) a) $V\left(a,-b^2\right)$ b) $\{-1\}\cup\left(0,1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

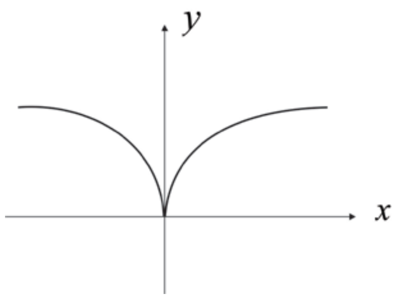
2) a)



b)



3)



4)

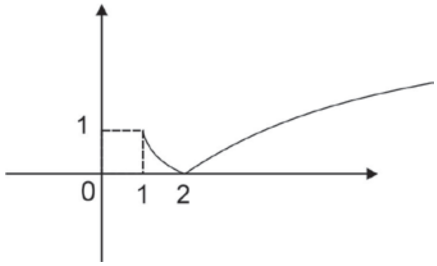
$\frac{3}{2}$ 2 x

5) a) V b) F c) V d) V (justificar)

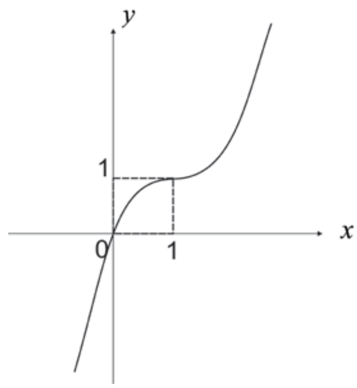
2011

1) a) $\{-1,0,1\}$ b) $(-1,+\infty)$

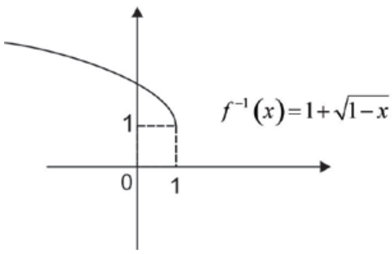
2) a)



b)



4) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$ ou $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}$ (conforme o domínio escolhido)



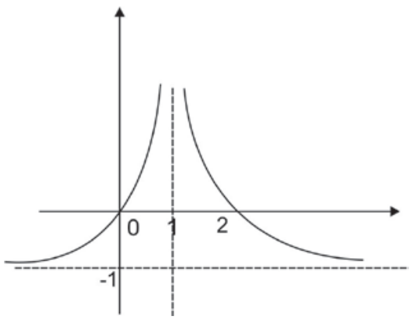
5) a) Sim b) Não c) Não d) $p=3$

2012

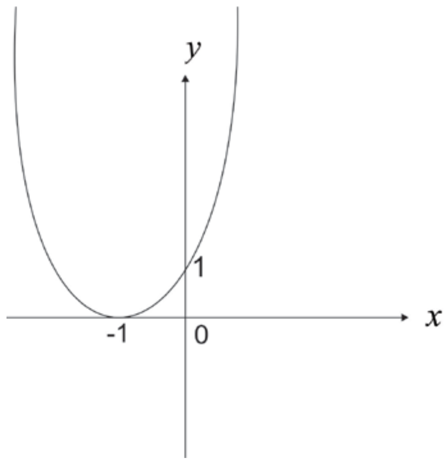
1) b) 4.000

2) $\dfrac{3}{9+4\sqrt{3}}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$

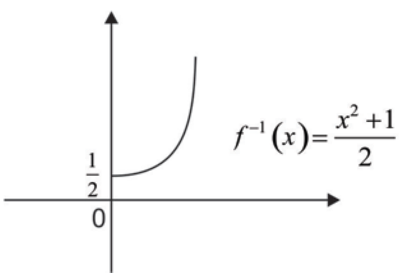
3) a)



b)



4) b)



5) a) V b) F c) V d) V (justificar)

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

FERNANDES, Ângela Maria V. *et al*. **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1993.

LANG, Serge. **Estruturas algébricas**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 3 v.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: Impa/Vitae, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1987. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

MACHADO, Nilson J. **Matemática por assunto**. São Paulo: Scipione, 1988. v. 1.

MALTA, Iaci *et al*. **Cálculo a uma variável**. Rio de Janeiro: PUC, 2002.

MILIES, Francisco C. Polcino; BUSSAB, José H. **A geometria na antiguidade clássica**. São Paulo: FTD, 1999.

NIVEN, Ivan M. **Números**: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

RPM – REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 1982-2017.


EDUFES