

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT**

RAFAEL SILVA RIBEIRO

**TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA, ANALÍTICA E
ESFÉRICA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DE
ATIVIDADES**

Vitória - ES

2015

RAFAEL SILVA RIBEIRO

**TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA, ANALÍTICA E
ESFÉRICA ATRAVÉS DE UMA SEQUÊNCIA DE
ATIVIDADES**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Fábio Júlio da Silva Valentim.

Vitória - ES

2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

**“Tópicos de Geometria Plana, Analítica e Esférica através de
uma Sequência de Atividades”**

Rafael Silva Ribeiro

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 26/05/20015 por:

Fábio Julio da Silva Valentim
Orientador - UFES

Fabiano Petronetto do Carmo
Examinador Interno - UFES

Juan Elmer Villanueva Zevallos
Examinador Externo - UFMT

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

R484t Ribeiro, Rafael Silva, 1979-
Tópicos de geometria plana, analítica e esférica através de
uma sequência de atividades / Rafael Silva Ribeiro. – 2015.
64 f. : il.

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria plana. 2. Geometria analítica. 3. Geometria não-
euclidiana. I. Valentim, Fábio Júlio da Silva. II. Universidade
Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

“O bom nome vale mais do que muita riqueza”.

Provérbios de Salomão 22:1

Aos meus pais Teresinha e Marilvio(in memorian), por nunca pouparem esforços em educar seus filhos. Ao meu filho Miguel e a minha esposa Clara por todo amor e confiança.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, pela vida e por mais esta oportunidade que Ele me proporcionou.

A minha família, por todos os bons momentos que passamos juntos. A minha mãe, em especial, por suas orações e por toda educação que acumulei desde o berço. Ao meu filho Miguel que foi uma das maiores motivações em não desistir e a minha esposa Clara por estar junto comigo ao longo desses anos.

Aos colegas e professores do Profmat, com os quais passamos boa parte dos fins de semana juntos, compartilhando conhecimento e dificuldades. Em especial ao professor Fábio Júlio pela orientação e pelo profissionalismo.

Aos colegas de trabalho e alunos das escolas estaduais Irmã Maria Horta e Belmiro Teixeira Pimenta que contribuíram muito para que eu terminasse este trabalho e pelo enriquecimento profissional que me proporcionaram.

Resumo

Este trabalho sugere uma sequência de atividades complementares para a geometria. As atividades para a geometria euclidiana plana trabalham com a utilização de régua, compasso, transferidor, telefone celular e também do software de geometria dinâmica GeoGebra. Adicionalmente para a geometria analítica, sugerimos atividades práticas de algumas definições e propriedades do plano cartesiano e de vetores. Na geometria esférica, as atividades estão relacionadas com a distância entre dois pontos e áreas na superfície do nosso planeta. O objetivo principal é trazer tanto para professores quanto para alunos um aumento qualitativo no aprendizado da geometria.

Palavras-chave: geometria plana, geometria analítica e geometria esférica.

Abstract

This work suggests a sequence of complementares activities to geometry. The plan euclidian geometry activities to make use of ruler, compass, transferor, cellphone and also the dynamic geometry software Geogebra. Additionally, to analytic geometry, we suggest activities of some definitions and properties of cartesian plan and vectors. In espheric geometry, the activities are related to the distance between two points and areas in the surface of our planet. The principal object is trazer both the teachers and students a qualitative increase in the learning of geometry.

Keywords: plan geometriy, analytic geometry, spheric geometry.

Sumário

Introdução	15
1 Geometria Euclidiana Plana	19
1.1 Resgate histórico	19
1.2 Elementos básicos	20
1.2.1 Atividade 1: Conceitos básicos com o software GeoGebra	22
1.2.2 Atividade 2: Geometria dinâmica com o GeoGebra	24
1.2.3 Atividade 3: Baricentro de um triângulo	26
1.2.4 Atividade 4: Circuncentro de um triângulo	29
1.2.5 Atividade 5: Ponto de Fermat em um triângulo	31
1.3 Semelhança de polígonos	33
1.3.1 Atividade 6: Noções de semelhança	34
1.3.2 Atividade 7: Estabelecendo escalas	36
2 Geometria Analítica	39
2.1 Resgate histórico	39
2.2 Coordenadas no plano: Conceitos básicos	40
2.3 Vetores	43
2.4 Atividade 8: Conceitos de geometria analítica	47
3 Geometria esférica	50
3.1 Resgate histórico	50
3.1.1 Atividade 9: Distância entre dois pontos numa superfície esférica	50
3.2 Atividade 10: Verificando distâncias	54
Considerações finais	61
Referências bibliográficas	63

Lista de Figuras

1	Reta, semirreta e segmento de reta	21
2	Triângulo	21
3	Hexágono regular	21
4	Segmentos paralelos e perpendiculares	22
5	Circunferência de centro O e raio \overline{AO}	22
6	Escolha de elemento a construir com o GeoGebra	23
7	Instrução de construção de elemento escolhido com o GeoGebra	23
8	Triângulo regular inscrito na circunferência feito no GeoGebra	24
9	Polígonos regulares de n lados inscrito na circunferência	25
10	Encontrando valor de π	26
11	Planta de situação da atividade 3.[3]	27
12	Solução com régua	28
13	Solução com geogebra	28
14	Ponto de encontro das cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF}	28
15	Mediatriz do segmento \overline{AB}	30
16	Solução com compasso	31
17	Solução com GeoGebra	31
18	Solução com transferidor	32
19	Solução com GeoGebra	32
20	Solucionando o Problema 2.2.5.1	33
21	Ponto de Fermat em um triângulo.	33
22	Polígonos semelhantes	34
23	Planta da localidade da atividade 6	34
24	Questão 137 - Prova amarela - ENEM 2012	35
25	Maptools - medida real	37
26	Medida no desenho	37
27	Medidas sem escalas	38
28	Medidas com escalas	38
29	Correspondência entre pontos em π e seus respectivos pares ordenados	41
30	Distância entre os pontos A e B	42
31	Representação dos segmentos orientados \vec{u} e \vec{v}	43

32	Segmentos equipolentes	44
33	Segmentos não equipolentes	44
34	Vetores no plano cartesiano	45
35	Soma de vetores	45
36	Regra do paralelogramo	46
37	Ângulo entre vetores	46
38	Coordenadas do ponto P no espaço	47
39	Localização dos pontos A, B, C e D no plano cartesiano.	47
40	Localização do ponto E no plano cartesiano.	48
41	Coordenadas cartesianas e a relação com latitude e longitude.	52
42	Ângulo entre vetores	54
43	Projeção cilíndrica de Mercator. Fonte:www.almanaque.cnt.br	55
44	Medindo no globo	56
45	Medindo no mapa	56
46	Triângulos com cidades escolhidas como vértices.	58
47	Área de um fuso.	59
48	Triângulo esférico.	59

Lista de Tabelas

1	Coordenadas geográficas de Buenos Aires e New York	53
2	Coordenadas geográficas. Fonte: pt.wikipidea.org	56
3	Distâncias no mapa e distâncias reais entre as cidades escolhidas.	57

Introdução

A matemática pode ser entendida como uma construção de conhecimentos, inseridos no meio social, político e econômico em que vivemos. Como exemplo disso, podemos citar a Grécia, que por volta do ano 300 a.C, importou mestres do conhecimento de outras regiões para criar um grande centro de estudos, mais precisamente na região de Alexandria. Entre os conhecedores da matemática estava Euclides, que foi autor de várias publicações importantes. Sem dúvida, a que obteve maior destaque foi “Os elementos”, que nada mais nada menos resistiu até os dias de hoje. Esta obra era dividida em livros, enunciados, definições e postulados que resumem os conceitos básicos da geometria, que ensinamos até os dias de hoje em nossas escolas. Nela, vemos um tratamento diferenciado a geometria, como Boyer[5] nos mostra.

Em seu tempo, “Os elementos” evidentemente, constituiu o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado de matemática que já fora exigido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante este longo intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.

Outro grande exemplo de transformação social foi vivida pela Europa no século XVII. E um dos que muito contribuíram para esta revolução foi o francês René Descartes. Inicialmente de forma filosófica, mas posteriormente matematicamente. Em sua obra “O discurso do método”, Descartes resumiu basicamente sua filosofia numa frase: “Penso, logo existo”. Esta frase introduz de certa forma o princípio da dúvida e o questionamento da verdade, sugerindo uma boa base para uma investigação científica. Nesta mesma obra, Descartes[16] discursa que seria possível integrar em um mesmo estudo partes importantes da matemática como a lógica, a geometria e a álgebra.

O maior desafio era resolver problemas encontrados na natureza que poderiam ser explorados por estas regras filosóficas e matemáticas. Essa nova forma de encarar um problema foi a base para o desenvolvimento da geometria analítica, que adicionou à

geometria em geral, por reunir princípios de lógica e álgebra, uma importante ferramenta na resolução de problemas. E também por proporcionar ao estudante, através de uma experiência de investigação, um meio organizado e sistematizado de conhecer a vida transformando-o em um agente atuante na sociedade. Para isso, devemos levar em conta que o processo histórico da matemática tem tornado esta tarefa mais difícil, pois ao longo dos anos vemos a matemática se dividindo em duas correntes, como relata Machado[27].

Hoje, muito frequentemente, a matemática tem sido tratada como se duas dimensões a esgotassem: a técnica, destinada a especialistas, e a lúdica. Ao cidadão comum, não especialista, restaria apenas a dimensão lúdica. Nada há mais equivocado.[...] Quando se pensa no papel que a matemática desempenha no conjunto das ciências, é inevitável que se tenha que se enfrentar o questionamento de uma arraigada distinção dicotômica entre a realidade empírica e sua apreensão teórica.

Esta dualidade no ensino da matemática, traz como consequência outros problemas que nossos alunos apresentam no ensino médio. Historicamente, alguns conceitos matemáticos são ensinados de maneira muito técnica, o que em certos casos, como afirma Cardoso[10], faz com que os alunos percam o estímulo e a criatividade na busca da solução de um problema.

Desde o início do século XX as aulas de Matemática têm sido na maioria das vezes limitadas ao estudo dos conteúdos trazidos nos livros didáticos, onde os métodos de ensino são mais centrados na memória, fazendo assim vigorar no aluno um comportamento de passividade e conformismo. Acreditamos que na realidade a melhor opção seria dosar a memória, lógica e criatividade, colocando em prática atividades que suscitam a curiosidade e desencadeiam um comportamento de pesquisa, tornando o aprendizado muito mais eficaz, já que o ensino lúdico e desafiador prolongam a aprendizagem para fora do ambiente escolar, estendendo-a pelo cotidiano do aluno.

A maneira que achamos para lidar com todos esses problemas levantados na aprendizagem da matemática foi criar uma sequência didática para o estudo da geometria. Por isso optamos em pesquisar e sugerir atividades que possam enriquecer o aprendizado do aluno e as aulas do professor de matemática, seguindo os Parâmetros Curriculares Nacionais[9].

A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos.

No capítulo 1, explanamos sobre conceitos básicos da geometria euclidiana plana. Algumas atividades desse capítulo buscam um melhor entendimento desses conceitos por parte dos alunos, utilizando para isso recursos tecnológicos, como o computador e o telefone celular. Com isso, pretendemos dar uma utilidade para o telefone celular em sala de aula, visto que grande parte dos nossos alunos possuem este equipamento e permitir ao aluno manusear de forma mais dinâmica os conceitos da geometria plana, através do software GeoGebra, que é de uso gratuito e de fácil manuseio.

Ainda nesse capítulo, as demais atividades envolvem construções geométricas feitas com régua, compasso e transferidor, além dos recursos citados no parágrafo anterior. Na forma de resolução de problemas, buscamos explorar a descoberta de conhecimentos por parte dos alunos ao encontrar a solução de um problema. O maior desafio é mostrar que o mesmo problema pode apresentar mais de uma resposta. O objetivo aqui é que eles usem a criatividade para encontrar uma solução. É bem provável que eles apresentem erros conceituais e isso vem de encontro ao pensamento de Cury[13] no que diz respeito a usar os erros cometidos pelos alunos com o objetivo de explorar a criatividade principalmente na resolução de problemas.

De acordo com o objetivo didático a que se propõem os pesquisadores que fazem análise de erros, podemos agrupar os trabalhos realizados em dois grupos: aqueles que procuram diagnosticar as causas dos erros para eliminá-los e aqueles que utilizam os erros para exploração e descoberta. O professor, ao analisar as respostas dos alunos às questões por ele propostas, está fazendo análise de erros, e a forma de considerar esses erros e utilizá-los no decorrer do processo de ensino evidencia, também, suas concepções filosóficas e pedagógicas.

No capítulo 2, ao trabalharmos com a geometria analítica, seguimos uma linha de pensamento que a valoriza e promove o desenvolvimento do raciocínio e da linguagem matemática. Além de conceitos básicos, introduzimos também o estudo dos vetores e das coordenadas no espaço, pois propõe subsídios para aulas de Matemática que não estão em nossos livros didáticos. O estudo de vetores permite, por exemplo, o uso de diversas propriedades que podem ser usadas em assuntos com ampla importância como é o caso da geometria esférica. Já as coordenadas tridimensionais, dão uma interpretação mais fiel da nossa realidade. As atividades propostas desse capítulo contemplam todos estes conceitos e contam também com o auxílio do software GeoGebra

Por fim, o capítulo 3 indica atividades que discute um tema que eles nunca viram no ensino básico, mas é totalmente pertinente por se tratar de algo que faz parte da vida de todos e por ter o objetivo da pesquisa. Apresentaremos a geometria esférica de maneira que os alunos tenham uma visão crítica de que a representação de nosso planeta pode ter uma interpretação equivocada através dos mapas em que estudamos.

Ressaltando que o foco principal deste trabalho são as atividades propostas. Para uma fundamentação maior tanto na história da Matemática como nas definições matemáticas sugerimos uma bibliografia bem consistente. Mas veremos que o empirismo e os padrões matemáticos se unirão para mostrar que a Matemática deve ser estudada como linguagem universal e patrimônio cultural de uma sociedade.

1 Geometria Euclidiana Plana

Neste capítulo buscamos as raízes históricas da geometria euclidiana plana e explanamos conceitos matemáticos que servirão de base para resolução de algumas atividades que envolvem propriedades dos triângulos e semelhança com o uso de instrumentos auxiliares como o compasso, a régua, o transferidor, o software geogebra e o telefone celular.

1.1 Resgaste histórico

Segundo Boyer[5], o grande império macedônio liderado por Alexandre, o grande, sofreu sérias transformações após a sua morte. O governo ficou dividido entre disputas por generais gregos e a parte egípcia ficou por conta de Ptolomeu I, que tratou de voltar a atenção para esforços construtivos. E uma destas construções foi a criação de um centro de estudos que pode ser comparado a uma universidade nos dias de hoje.

Este centro de estudos ficava na região de Alexandria e foi necessário a contratação de vários professores para lecionar neste recinto. Entre eles estava Euclides que escreveu várias obras matemáticas, sendo que algumas se perderam e não se têm registros históricos delas. Entre as suas publicações estava a obra “Os Elementos”, que resistiu ao longo do tempo e até os dias de hoje é lembrada e citada. A sua estrutura era composta por treze livros sendo que nos seis primeiros livros o assunto tratado é a geometria elementar e nos quatro seguintes tratam de teoria dos números com um destaque para o livro X que fala de incomensurabilidade. Os três últimos livros versam sobre a geometria no espaço.

A escrita é composta de uma série de definições e enunciados que em algumas vezes usam elementos matemáticos não definidos previamente. Mas é em seguida destas definições que Euclides lista cinco postulados que servem como base para qualquer curso básico de geometria plana. Os cinco postulados são:

- Existe uma única reta contendo dois pontos dados;
- Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções;

- Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados;
- Todos os ângulos retos são iguais entre si;
- Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Esta listagem forma um conjunto de postulados ou um sistema axiomático que consiste num conjunto de verdades sobre a geometria. A partir deles, demonstrações de teoremas e definições são feitas, até chegarmos nos conceitos básicos da geometria, que utilizamos prontos, em nossas aulas, sem muitos questionamentos dos alunos. Não é nosso intuito fazer deste trabalho um material axiomático e sim de sugerir atividades que possam fazer um aluno de ensino médio apropriar-se de conceitos e propriedades de uma forma mais baseada na experimentação e na descoberta do conhecimento.

1.2 Elementos básicos

Pontos, retas e planos são os elementos básicos da geometria euclidiana plana. Segundo Barbosa[2], “o plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano”.

Os pontos são identificados com letras maiúsculas e as retas com letras minúsculas. Já os planos são identificados com letras gregas. Como podemos garantir, por um axioma de Euclides, que por dois pontos segue apenas uma única reta, outros elementos relevantes podem ser definidos a partir disso, como mostra a Figura 1. À esquerda temos uma reta que passa pelos pontos A e B . Como a reta é um conjunto de pontos, podemos escrever que $A, B \in r$. Ao centro, temos uma semirreta, que possui origem no ponto C e que têm sua direção orientada pelo ponto D . E à direita é o segmento de reta \overline{EF} , que é uma parte da reta que está compreendida pelos pontos E e F .

Olhando para a Figura 2, os pontos A e B por estarem no mesmo segmento de reta são chamados de colineares. Como D não pertence a \overline{AB} , A , B e D são pontos não

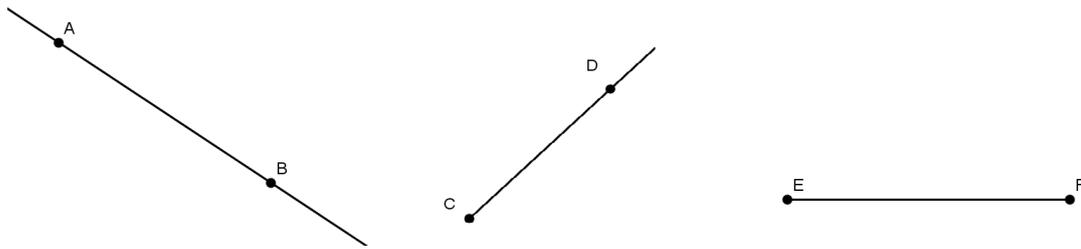


Figura 1: Reta, semirreta e segmento de reta

colineares. Se ligarmos três pontos não colineares teremos uma região limitada, que denominamos de triângulo, onde esses três pontos serão chamados de vértices. Tomando uma sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n onde n é um número natural e $n \geq 3$, os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, formarão também uma região que denominamos de polígono, desde que cada um desses segmentos não contenham os outros pontos da sequência. A Figura 3, mostra um polígono regular de 6 lados, sendo que G, H, I, J, K e L são os vértices e seus respectivos segmentos são do mesmo tamanho.

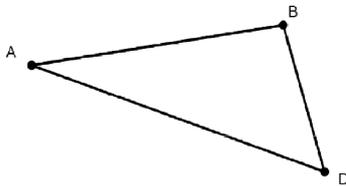


Figura 2: Triângulo

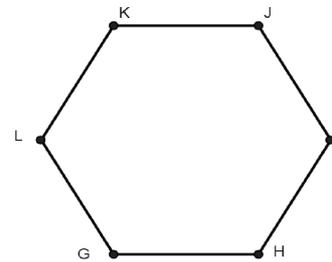


Figura 3: Hexágono regular

Na construção de alguns desses polígonos, muitas vezes se faz necessário o uso de retas paralelas e perpendiculares. Quando temos retas no plano ou elas se intersectam, em apenas um ponto, ou elas não se intersectam. Nesse último caso as retas são paralelas e no primeiro caso as retas são concorrentes. Quando as retas que se intersectam formam um ângulo de 90 graus entre elas, elas são chamadas de perpendiculares. O quadrilátero da Figura 4 mostra que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos e que os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} são perpendiculares aos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

Por fim, tomando qualquer ponto O do plano, uma circunferência é o conjunto de pontos em que a distância entre eles e o ponto O , será sempre a mesma. Nesse caso, os

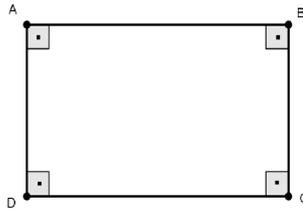


Figura 4: Segmentos paralelos e perpendiculares

pontos A e B pertencem a uma circunferência. Essa distância é denominada de raio, que terá um valor real positivo. Na Figura 5, vemos que os segmentos \overline{AO} e \overline{BO} tem a mesma medida, por isso os pontos A e B pertencem a circunferência de centro O e de raio \overline{AO} .

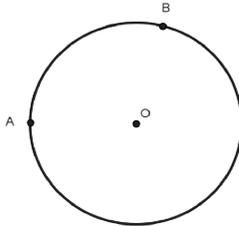


Figura 5: Circunferência de centro O e raio \overline{AO}

Para melhor entendimento desses conceitos básicos, a Atividade 1 sugere que os próprios alunos manuseiem o software geogebra e com ele possam compreender todos elementos descritos anteriormente, observando suas respectivas construções e propriedades que serão usadas ao longo do estudo da geometria euclidiana plana.

1.2.1 Atividade 1: Conceitos básicos com o software GeoGebra

Usando o software geogebra, construa os seguintes elementos básicos:

- Localize os pontos A , B , C , D , E , F e G ;
- Uma reta que passe pelo pontos fixados A e B ;
- A semirreta \overrightarrow{CD} ;
- O segmento \overline{EF} ;

- Um polígono regular com 6 lados;
- Uma circunferência de centro em E e raio igual ao segmento \overline{EG} .

O principal objetivo desta atividade é a fixação de conceitos básicos e também o manuseio do geogebra. O software de geometria dinâmica GeoGebra, versão 4.2, é livre e pode ser encontrado no site www.geogebra.org. Também é possível encontrar vários tutoriais na internet, inclusive em vídeo. Uma sugestão é o site <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/> do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, que também fornece suporte técnico. O software permite fazer construções geométricas, e no caso dos conceitos básicos que foram pedidos, todos eles possuem o comando correspondente, bastando clicar e escolher a opção pedida, como mostra a Figura 6.



Figura 6: Escolha de elemento a construir com o GeoGebra

Ao selecionar a opção desejada, basta colocar o mouse no botão selecionado que ele dará as instruções necessárias para fazer o que foi pedido, indicado pela Figura 7.



Figura 7: Instrução de construção de elemento escolhido com o GeoGebra

Esta atividade destinada aos alunos da primeira série do Ensino Médio visa, também, dar condições ao professor de utilizar o recurso do GeoGebra nas séries seguintes, como por exemplo no terceiro ano do Ensino Médio, que pode ser muito utilizado no ensino da geometria analítica.

1.2.2 Atividade 2: Geometria dinâmica com o GeoGebra

Através da área de um polígono de n lados inscrito em uma circunferência, encontre o valor aproximado para o número π .

O objetivo desta atividade é trabalhar com o recurso dinâmico que o software GeoGebra oferece. Com as animações produzidas pretende-se mostrar visualmente como se encontra o valor aproximado de π .

Inicialmente selecionamos a opção controle deslizante, que denominados pela letra n , que vai identificar quantos lados terá o polígono regular. Definimos que ele vai variar de 3 a 360 com incremento de 1, pois n terá que ser um número natural maior ou igual a três. A seguir, traçamos uma circunferência de centro em O e raio igual a uma unidade de comprimento. Escolhendo um ponto A qualquer da circunferência, rotacionamos-o em torno de O com um ângulo de 360° dividido por n , onde encontramos o ponto B pertencente a essa mesma circunferência. O segmento \overline{AB} será o lado do polígono de n lados.

Selecionando a opção polígono regular, de lado igual a \overline{AB} , o software vai perguntar quantos lados terá o polígono. Assim, de acordo com o valor de n , será construído um polígono regular inscrito na circunferência de raio igual a 1, como vemos na Figura 8.

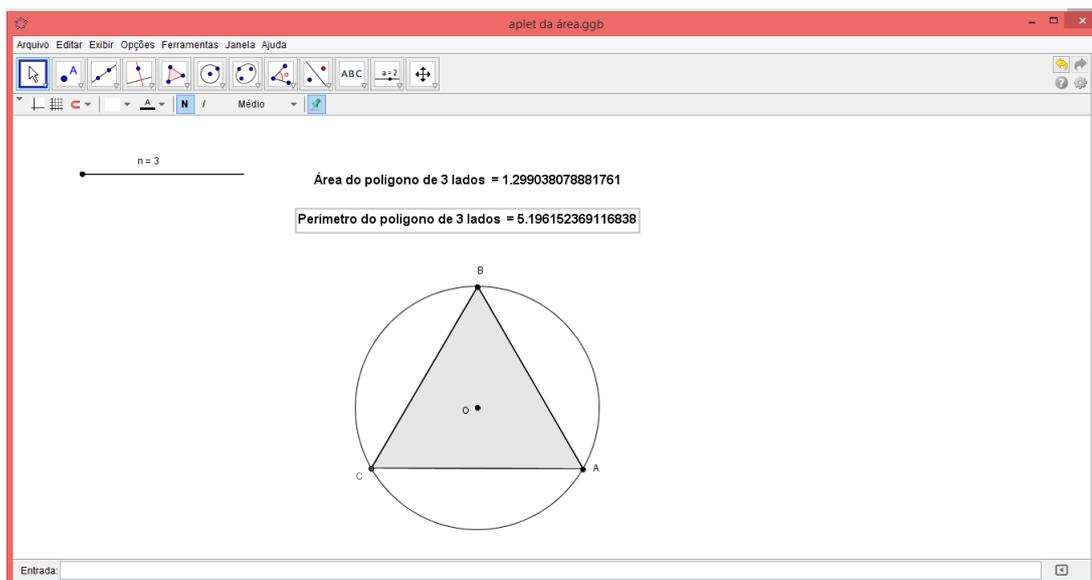


Figura 8: Triângulo regular inscrito na circunferência feito no GeoGebra

O primeiro polígono será um triângulo. Escolhendo a opção área e clicando nele, o geogebra a calculará. Com o perímetro procedemos da mesma forma. Clicando no controle deslizante n , colocando na opção animar, os outros polígonos regulares inscritos serão construídos um após o outro e suas respectivas áreas e perímetros serão calculados automaticamente. Podemos observar que quanto mais se aumenta o valor de n , o polígono inscrito vai ficando da mesma forma da circunferência, a área se aproxima de π radianos e o perímetro de 2π radianos, como mostra a Figura 9.

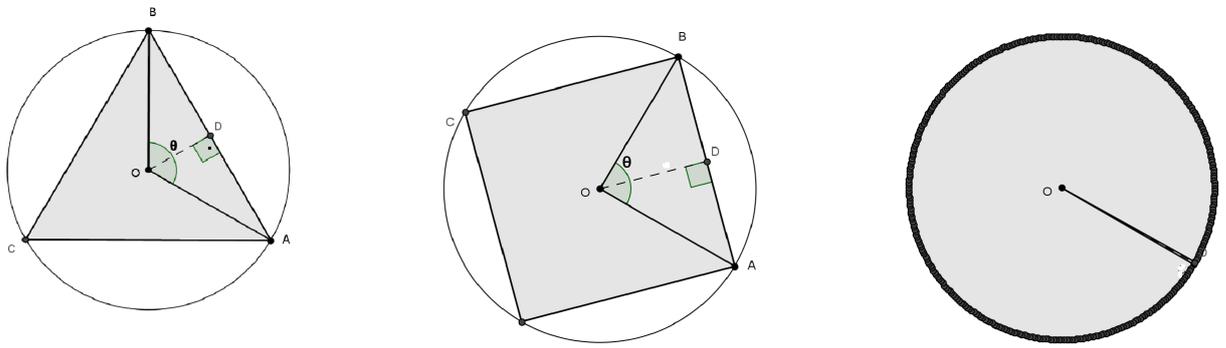


Figura 9: Polígonos regulares de n lados inscrito na circunferência

Sabendo que a área A de um círculo é igual a $\pi \times R^2$, onde R é o raio da circunferência e que estamos usando o raio igual a 1, temos que $\pi \approx 3,14$.

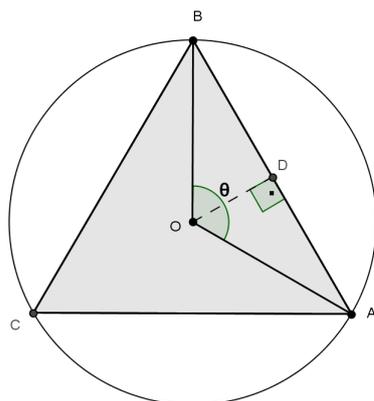
Para provarmos esta relação, partiremos da área A do triângulo AOB da Figura 10. O ângulo $AOB = \theta = \frac{2\pi}{n}$, sendo n o número de lados do polígono regular inscrito. Assim $A = \frac{l \times a}{2}$, onde $l = \overline{AB}$, indica a medida do lado de um polígono regular.

Do triângulo AOD na figura 10, tiramos duas relações trigonométricas

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{R} \quad e \quad \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{R}$$

Onde vemos que $l = 2 \times R \times \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e que $a = R \times \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Como o triângulo inscrito é regular, a área total dele será três vezes o valor da área do triângulo AOB . Para um polígono regular inscrito de n lados, sua área será n vezes a área do triângulo AOB . Como $\theta = \frac{2\pi}{n}$ radianos e substituindo esses valores na fórmula da área temos que

$$A = n \times \frac{2 \times R \times \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \times R \times \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = n \times R^2 \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \text{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Figura 10: Encontrando valor de π .

Quanto maior for o valor de n , a área do polígono aproxima-se melhor da área do círculo.

Neste caso,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times R^2 \times \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \times \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

Só que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right) = \text{cos} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \right) = 1$$

$$A = R^2 \times \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

A expressão acima significa que a medida que n assume valores cada vez maiores, veremos $n \times \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$ aproximar-se de um valor fixo $\frac{A}{R^2}$, isto é, o valor de π .

Sugerimos como atividade complementar, calcular a área e o perímetro de um polígono circunscrito a uma circunferência e comparando com o resultado acima, estimar o erro aproximado do valor de π .

1.2.3 Atividade 3: Baricentro de um triângulo

A Figura 11 mostra três casas em uma comunidade. Eles estão diante de um problema: querem colocar um poço, mas não sabem exatamente onde ele será localizado. Qual a melhor localização para este poço?

A solução para um problema como este visa incentivar o aluno a pensar em uma resposta e depois partir para sua execução. Uma discussão interessante que se abre aqui é

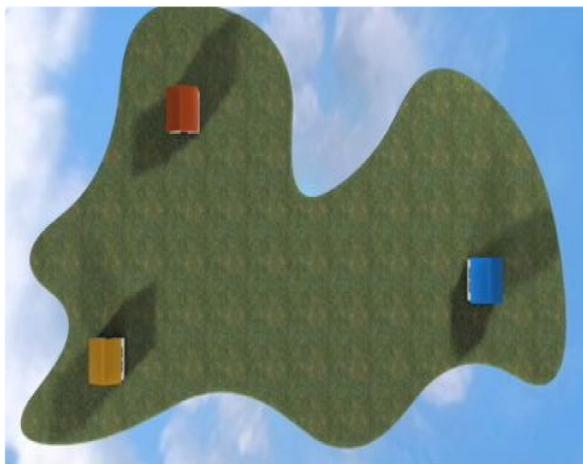


Figura 11: Planta de situação da atividade 3.[3]

que a melhor localização depende das possibilidades que podem solucionar este problema. Neste caso, é bem provável que os alunos respondam intuitivamente que a melhor localização para a horta seria “no meio”. A partir daí lança-se a indagação de como achar o “meio”, para a localização do poço.

Esse ponto que indicaria o meio da região é a mesma ideia de um ponto de equilíbrio. Segundo Boyer[5], o grego Arquimedes por volta de 250 a.C. desenvolveu muitos estudos sobre alavancas e equilíbrio de corpos planos, onde ele descreve matematicamente o centro de gravidade de um triângulo. Este ponto é denominado de baricentro e particularmente no caso de um triângulo é o ponto de interseção entre as suas medianas.

Considerando as três casas como os pontos A , B e C , temos um triângulo ao traçarmos os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . Com o auxílio de uma régua medimos o segmento \overline{AB} , onde localizamos o ponto D , de forma que $\overline{AD} = \overline{BD}$, ou seja, D é ponto médio do segmento \overline{AB} . De semelhante modo, encontramos os pontos médios E e F respectivamente localizados nos segmentos \overline{AC} e \overline{BC} . Os segmentos \overline{CD} , \overline{BE} e \overline{AF} são as medianas do triângulo ABC , que são segmentos de reta que encontramos ao ligar o vértice de um triângulo com o ponto médio do lado oposto. Nas figuras abaixo, o ponto de interseção das três medianas está representado pelo ponto G . Este ponto é o baricentro do triângulo, que neste problema seria a localização do poço.

Construindo geometricamente podemos perceber que as medianas se encontram em

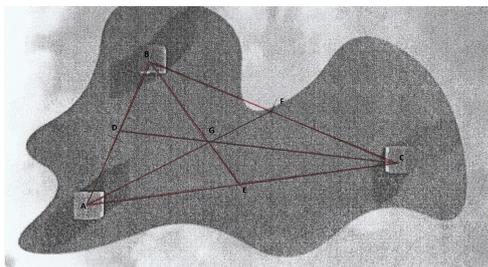


Figura 12: Solução com régua

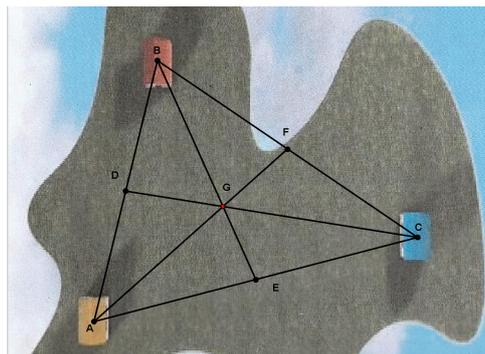
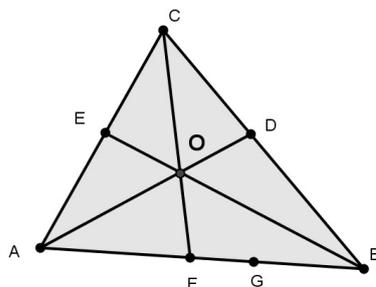


Figura 13: Solução com geogebra

um único ponto. Podemos garantir isso matematicamente por causa do teorema de Ceva. Santos e Viglioni[31] mostram que este teorema foi provado em 1678 por Leonardo Ceva e por isso mesmo os segmentos referidos no teorema abaixo são chamadas de cevianas.

Teorema 1.2.3.1. *Seja ABC um triângulo qualquer e D , E e F pontos sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes em um único ponto se, e somente se, $\overline{AF} \times \overline{BD} \times \overline{AE} = \overline{FB} \times \overline{DC} \times \overline{EC}$*

Figura 14: Ponto de encontro das cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF}

Demonstração. Inicialmente, observando a Figura 14, denotemos por A_1, A_2, A_3 e A_4 as áreas dos triângulos AFC , BFC , AFO e BFO respectivamente. E chamaremos de H a altura dos triângulos AFC e BFC e de h a altura dos triângulos AFO e BFO , sendo que O é o ponto de interseção entre os segmentos \overline{CF} , \overline{BE} e \overline{AD} . Nestes triângulos estamos considerando como base os lados \overline{AF} e \overline{BF} . Desse modo temos que:

$$A_1 = \frac{\overline{AF} \times H}{2}, A_2 = \frac{\overline{BF} \times H}{2}, A_3 = \frac{\overline{AF} \times h}{2}, A_4 = \frac{\overline{BF} \times h}{2}$$

Tomemos agora A_5 , A_6 e A_7 como as áreas dos triângulos AOC , BOC e AOB respectivamente. Pela figura 14, vemos que $A_5 = A_1 - A_3$ e $A_6 = A_2 - A_4$. Portanto:

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{\overline{AF} \times H}{2} - \frac{\overline{AF} \times h}{2} \\ A_6 &= \frac{\overline{BF} \times H}{2} - \frac{\overline{BF} \times h}{2} \\ \frac{A_5}{A_6} &= \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \end{aligned}$$

Analogamente para os triângulos com bases \overline{BD} e \overline{CD} e com bases \overline{AE} e \overline{EC} teremos que:

$$\frac{A_7}{A_5} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \quad e \quad \frac{A_6}{A_7} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

Multiplicando as três relações encontradas:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{A_5}{A_6} \times \frac{A_7}{A_5} \times \frac{A_6}{A_7}$$

Onde concluímos que $\overline{AF} \times \overline{BD} \times \overline{AE} = \overline{FB} \times \overline{DC} \times \overline{EC}$.

Também vale a recíproca, ou seja, se as três cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} satisfazem a propriedade $\overline{AF} \times \overline{BD} \times \overline{AE} = \overline{FB} \times \overline{DC} \times \overline{EC}$, então elas são concorrentes.

O ponto O é a interseção entre \overline{AD} e \overline{BE} . Temos que provar \overline{FC} também passa pelo ponto O . Na Figura 14, prolongando \overline{CO} encontramos o ponto $G \in \overline{AB}$. Desse modo, como mostramos anteriormente, teremos que $\overline{AG} \times \overline{BD} \times \overline{AE} = \overline{GB} \times \overline{DC} \times \overline{EC}$. Mas a nossa hipótese aponta que $\overline{AF} \times \overline{BD} \times \overline{AE} = \overline{FB} \times \overline{DC} \times \overline{EC}$. Desta forma temos que, $\overline{AF} = \overline{AG}$ e portanto $F = G$.

□

Com o teorema de Cevas provado, podemos garantir que as medianas de um triângulo vão se encontrar em um único ponto.

1.2.4 Atividade 4: Circuncentro de um triângulo

Encontre uma solução diferente para o mesmo problema anterior.

Mais uma vez procuramos estimular a criatividade dos alunos na hora de sua resolução. Apropriando-se da definição de circunferência, é plausível considerar que uma opção é o poço ser equidistante às três casas. Basta que o poço seja o centro de uma circunferência que passe pelas três casas.

Primeiramente vamos considerar que cada casa seja um ponto do plano, no caso os pontos A, B e C . Como vimos nos conceitos básicos, basta que estes pontos não estejam alinhados para que se forme uma região triangular. O desafio é encontrar um ponto O tal que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Para que isso aconteça, precisamos encontrar uma circunferência de centro no ponto O e que passe pelos pontos A, B e C .

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a este segmento que passa pelo seu respectivo ponto médio. Para encontrar a mediatriz relativa ao segmento \overline{AB} , com um compasso colocamos a ponta seca no ponto A e traçamos a circunferência que passa pelo ponto B . Analogamente e com a mesma abertura, fixando a ponta seca do compasso em B traçamos a circunferência que passa pelo ponto A . As duas circunferências estão tracejadas. Elas possuem dois pontos de interseção, G e H , como mostra a figura 15. Unindo os pontos A, G, B e H temos um losango, pois os segmentos formados por esses pontos têm a mesma medida. Assim, \overline{GH} é a mediatriz do segmento \overline{AB} .

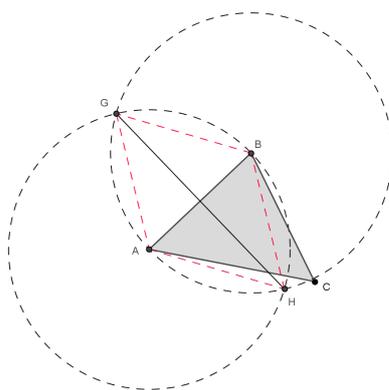


Figura 15: Mediatriz do segmento \overline{AB}

Repetindo o mesmo processo para os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} , encontraremos as outras mediatrizes deste triângulo. As três mediatrizes terão um único ponto de interseção, que é denominado de circuncentro. O ponto O na Figura 16, é a localização do poço referente

ao triângulo ABC , que indicam as três casas do problema. Com a ponta seca do compasso em O , construímos a circunferência que vai passar pelos pontos A, B e C . Já na Figura 17, o circuncentro foi encontrado com a utilização do GeoGebra. Como a mediatriz não é uma ceviana, não podemos garantir que a localização do poço será dentro do triângulo cujos vértices são as casas. Para exemplificar, mudamos de posição umas das casas e copiamos a imagem alterada para o GeoGebra e traçamos os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} , tendo assim o triângulo ABC . A seguir, selecionamos a opção mediatriz de um segmento para cada lado do triângulo, encontrando o ponto D .

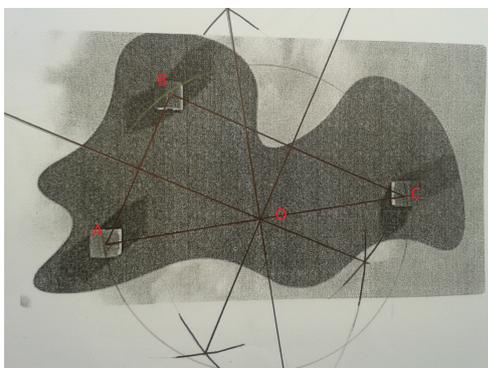


Figura 16: Solução com compasso

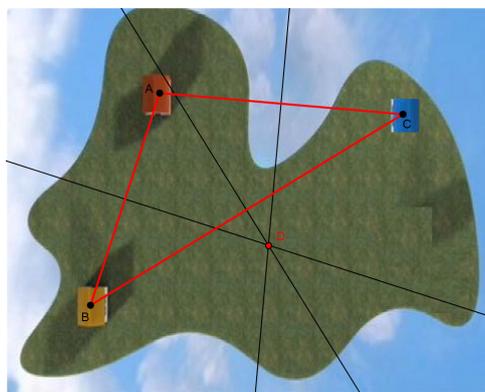


Figura 17: Solução com GeoGebra

1.2.5 Atividade 5: Ponto de Fermat em um triângulo

A comunidade continua com o mesmo problema. Achar a localização exata do poço, que será equipado de modo que a água seja bombeada a cada uma das casas. Além de encontrar a posição do poço, as três famílias terão juntos que custear todo encanamento necessário. Qual seria a melhor localização diante de mais esse empecilho?

O problema aqui é o mesmo, mas surge um fator que muda a sua resolução. Como agora está incluído o fato do custo, a melhor opção é a que seja mais econômica. Para que isso ocorra, a soma dos encanamentos construídos deve ser a menor possível. Com auxílio do transferidor e externamente a cada lado deste triângulo, construímos um triângulo equilátero. Neste caso encontraremos o triângulo ABD sobre o segmento \overline{AB} , o triângulo ACE sobre o lado \overline{AC} e o triângulo BCF no lado \overline{BC} . Basta agora traçar um segmento que une o ponto D ao ponto B , outro segmento que liga o ponto E ao ponto C e outro

segmento que vai do ponto F ao ponto A . O ponto de interseção destes três segmentos nos dá a localização do poço. Com o GeoGebra a tarefa se torna simples pois existe o comando polígono regular. Repetindo o processo descrito acima temos a solução desta atividade.

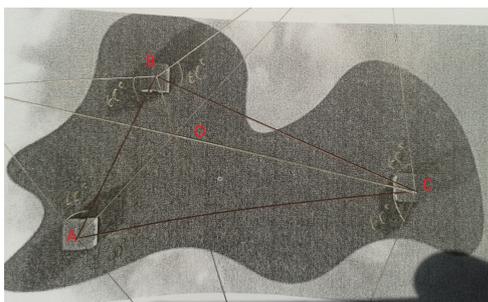


Figura 18: Solução com transferidor

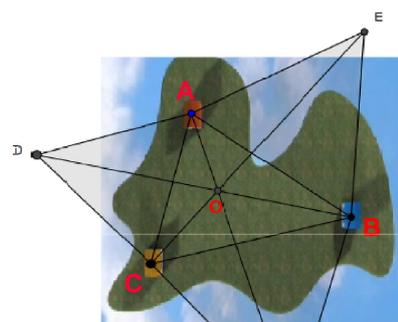


Figura 19: Solução com GeoGebra

Esse ponto que encontramos é conhecido como ponto de Fermat. Conforme Junior[20], ele também é conhecido como ponto de Torricelli e é usado para solucionar o problema abaixo, que é o caso genérico do problema apresentado na Atividade 5.

Problema 1.2.5.1. *Em um triângulo ABC , localize um ponto O cujas distâncias a A , B e C têm a menor soma possível.*

A solução desse problema é a seguinte. Na Figura 20, sobre o segmento \overline{AC} construímos um triângulo equilátero ACD . Tome um ponto O interior ao triângulo ABC . Queremos encontrar a localização desse ponto O , de modo que a soma $\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}$ seja a menor possível. Rotacionando o triângulo AOC em 60° no sentido anti-horário, encontramos o triângulo ADE , onde $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{AO} = \overline{AE}$ e $\overline{OC} = \overline{DE}$. Como $\overline{AO} = \overline{AE}$, o triângulo AOE é isósceles. Mas o ângulo EOA vale 60° , então o triângulo AOE é equilátero. Consequentemente, $\overline{AO} = \overline{AE} = \overline{OE}$.

Para que a soma $\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}$ seja a menor possível, os pontos B, E, O e D devem ser colineares. Para que isso ocorra, o ângulo BOA tem que ser igual a 120° , uma vez que o ângulo EOA vale 60° . Desse modo, $\overline{BD} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{AC}$ será retilíneo, que é a menor distância possível. Repetindo o mesmo processo com os outros lados do triângulo ABC , como mostra a Figura 21, encontramos o ponto O , que é o ponto de Fermat.

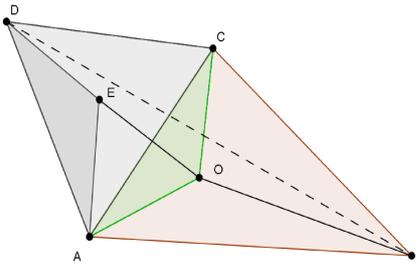


Figura 20: Solucionando o Problema 2.2.5.1

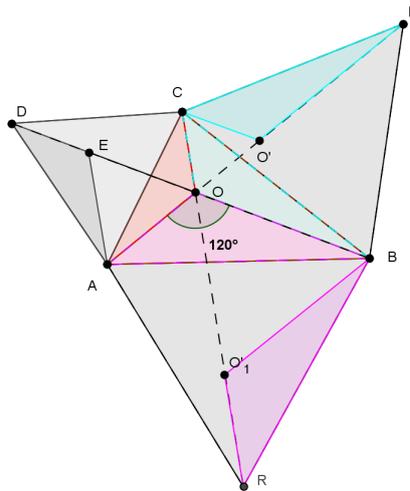


Figura 21: Ponto de Fermat em um triângulo.

1.3 Semelhança de polígonos

Nesta seção, ao definirmos semelhança de polígonos, visamos sugerir ao professor de matemática que trabalhe este conteúdo de uma forma diferente da abordada em livros didáticos, através de duas atividades. Este assunto é em sua grande maioria, tratada apenas com problemas de semelhança de triângulos. Trataremos então de casos mais gerais.

Segundo Barbosa[2], “diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais”. Mais geralmente, essa definição vale para outros polígonos. A Figura 22 mostra dois polígonos que são semelhantes.

Podemos ver que os ângulos possuem a mesma medida e os lados são proporcionais, uma vez que as medidas dos lados do triângulo 2 são exatamente o dobro do valor das

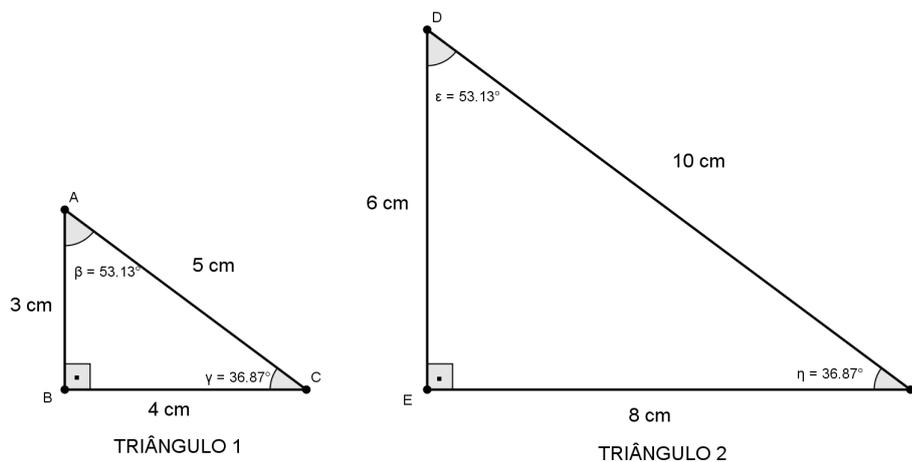


Figura 22: Polígonos semelhantes

medidas dos lados do triângulo 1. Para uma fixação maior neste tópico, as atividades 6 e 7 exploram uma maior participação do aluno na construção de conceitos matemáticos.

1.3.1 Atividade 6: Noções de semelhança

Em posse da planta dada (Figura 23), localize e dê as dimensões dos seguintes estabelecimentos: um shopping center, um terminal de ônibus, três escolas, dois supermercados, um posto policial, quatro condomínios, um corpo de bombeiros, um clube com estádio de futebol, um teatro, uma indústria, uma universidade, um hospital e 10 galerias comerciais, que englobarão todo tipo de comércio.



Figura 23: Planta da localidade da atividade 6

Percebemos que o aluno, principalmente no ensino médio, possui um certo temor de errar ao tentar solucionar um problema. Isso acaba prejudicando muito o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Provavelmente eles questionarão se o que eles fizeram está certo ou errado. Essa resposta será respondida pelo próprio aluno quando ele conseguir se apropriar do conteúdo em questão que é a semelhança.

Uma aplicação da semelhança está nas representações de plantas baixas, mapas, atlas e maquetes. Esta representação é chamada de escala, que apresenta a razão entre a medida no desenho e a medida real. Para exemplificar o assunto, tomamos a questão 137 da prova amarela do Exame Nacional do Ensino Médio de 2012.

Exemplo 1.3.1.1. *Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.*

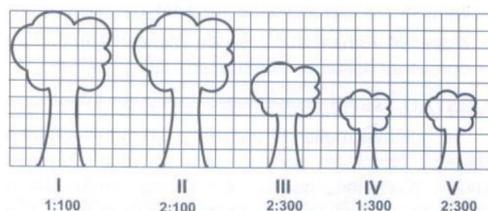


Figura 24: Questão 137 - Prova amarela - ENEM 2012

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

- a) I b) II c) III d) IV e) V

Considerando que na malha acima a largura de cada quadrado seja 1 cm. A figura I está representada na escala 1:100. Isso indica que a cada 1 cm do desenho, temos 100 cm no desenho real. No caso da figura I, a árvore tem 9 cm de altura no desenho.

$$Escala = \frac{Desenho}{Real} = \frac{1}{100} = \frac{9cm}{x}$$

Multiplicando-se os extremos pelos meios teremos que $x = 900$ cm. Portanto a árvore I tem 9 metros de altura. Procedendo de igual modo calculamos a medida da árvore nos

outros desenhos.

$$\begin{array}{cccc}
 \textit{Arvore II} & \textit{Arvore III} & \textit{Arvore IV} & \textit{Arvore V} \\
 \frac{2}{100} = \frac{9}{y} & \frac{2}{300} = \frac{6}{x} & \frac{1}{100} = \frac{4,5}{w} & \frac{2}{300} = \frac{4,5}{v} \\
 2y = 900 & 2z = 1800 & 1w = 1350 & 2v = 1350 \\
 y = 4,5 \text{ metros} & z = 9 \text{ metros} & w = 13,5 \text{ metros} & v = 6,25 \text{ metros}
 \end{array}$$

Assim, a árvore IV é a mais alta.

1.3.2 Atividade 7: Estabelecendo escalas

Com o auxílio do telefone celular, estabeleça a escala em que a planta da atividade anterior foi desenhada. A seguir, verifique se as medidas usadas por você na atividade anterior estão coerentes.

Inicialmente, o mapa em questão é do bairro Laranjeiras, no município de Serra, no estado do Espírito Santo. Para determinar a escala da planta, basta escolher qualquer distância do desenho e medir com uma régua. Em seguida, temos que fazer a medição da mesma distância correspondente ao desenho, só que na realidade. Neste caso, teríamos a possibilidade de medir no local ou usar o aparelho de telefone celular.

Indicamos o aplicativo para telefone celular Maptools, que é baixado gratuitamente da internet e é muito útil para a realização da Atividade 7. O aplicativo mostra fotos por satélites e tem algumas funcionalidades. Uma delas é que ele permite calcular distâncias na própria tela do aparelho, como mostra a Figura 25. Na Figura 26, a medição é feita no desenho nos dando dados suficientes para determinação da escala da planta que utilizaremos.

Com o telefone celular a medida escolhida tem 237,47 metros. Fazendo a medição correspondente no desenho encontramos 2,75 centímetros. De posse desses dados temos que:

$$\textit{Escala} = \frac{\textit{Desenho}}{\textit{Real}} = \frac{2,75\text{cm}}{237,47\text{m}} = \frac{1}{8635,27}$$

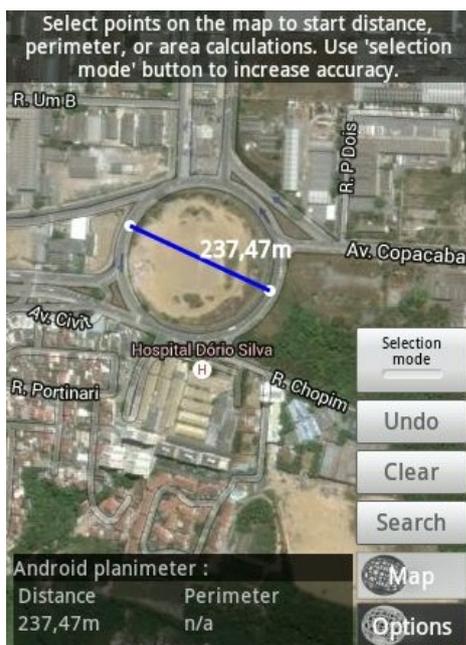


Figura 25: Maptools - medida real

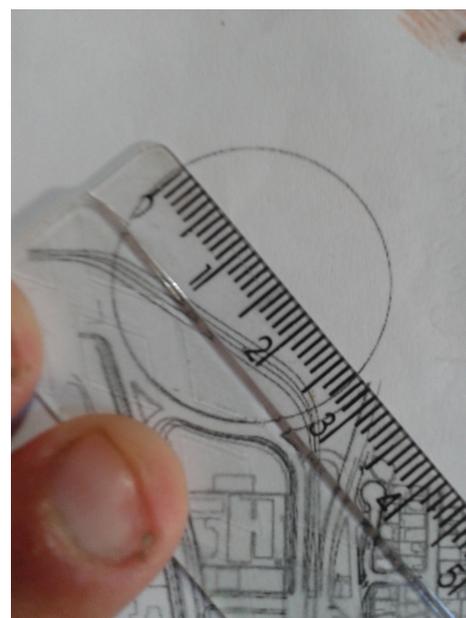


Figura 26: Medida no desenho

Com a escala determinada, podemos comparar se a medida escolhida está coerente ou não.

Com auxílio da internet, os alunos buscaram medidas usadas na construção de um dos estabelecimentos pedidos. Tomaremos como exemplo um hospital que segundo umas das pesquisas de um grupo de alunos deveria ter entre 50.000 m² e 60.000 m² de área. Na Figura 28, medindo com uma régua, vemos que as dimensões escolhidas para o hospital são 1,85 cm de comprimento por 0,80 cm de largura. Utilizando a escala encontrada

$$Escala = \frac{1}{8635,27} = \frac{1,85}{y}.$$

Daí temos que $y = 159,75$ metros de comprimento, que é a medida real do hospital. Analogamente, calculamos a largura, obtendo 69,08 metros de largura. Assim o hospital, na Atividade 7, como mostra a Figura 24, está com uma área de 11035,53 m², que significa que a figura não está semelhante com o hospital com a área desejada.

Olhando para a Figura 28, vemos que o mesmo grupo corrigiu as dimensões para o hospital. Também com uma régua, verificamos que agora o hospital passou a ter 3 cm de comprimento por 2,5 cm de largura. Verificando se as dimensões estão coerentes

$$Escala = \frac{1}{8635,27} = \frac{3}{a}$$

Daí temos que $a = 259,05$ metros, que indica o comprimento do hospital. Da mesma forma, calculamos a largura, onde encontramos 215,88 metros. Então o hospital da figura 28 está com $55.924,16 \text{ m}^2$ de área, dimensões que são coerentes para o tamanho de um hospital.



Figura 27: Medidas sem escalas



Figura 28: Medidas com escalas

2 Geometria Analítica

A intenção deste capítulo é trabalhar alguns conceitos que terão muita utilidade nas atividades envolvendo geometria esférica. Além disso, abordamos alguns tópicos de coordenadas no espaço e de vetores, pois no ensino médio não são explorados nem por professores nem por livros didáticos de Matemática. No final, concluímos com a sugestão de uma atividade que visa exemplificar melhor os conceitos trabalhados.

2.1 Resgate histórico

Passando da metade do século XVII, a França passou a ser referência em Matemática. Entre os que se destacaram nesta época estava René Descartes. Ele era de uma boa família que lhe proporcionou uma boa educação e além disso, ele viajou por diversas cidades conhecendo pessoas sábias e adquirindo conhecimento. Mas foi em Paris que ele desenvolveu seu lado filosófico que mais tarde lhe renderia o título de “pai da filosofia moderna”.

O seu mais brilhante trabalho foi “O Discurso do método”, onde ele esperava por meio da dúvida chegar a conclusões claras e precisas. Por essa linha de pensamento, ele desenvolveu uma maneira de resolver problemas através de construções geométricas, como é possível ver no livro I, desta mesma obra, uma solução para uma equação quadrática.

A geometria analítica que estudamos hoje, não é exatamente aquilo que Descartes escreveu em suas obras. Para se ter uma ideia, nem o par de eixos ortogonais era usado da mesma maneira que temos hoje. Porém a associação da álgebra com a geometria que ele e outros matemáticos da época desenvolveram, como Fermat por exemplo, serviram para dar início a uma nova forma de solucionar problemas, que podemos ver em Boyer[5].

O objetivo de seu método, portanto, era duplo:(1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas. Seu método consistia então de partir de um problema geométrico, traduzí-lo em linguagem de equação algébrica e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente.

2.2 Coordenadas no plano: Conceitos básicos

Pontos, retas e planos são os elementos básicos para o estudo da geometria analítica. Uma reta é dita orientada, quando se estabelece um sentido para ela. Esse sentido denominamos positivo e o sentido oposto é considerado negativo. Fixando um ponto O nesta reta, que chamaremos de origem, ela passa a ser um eixo orientado E . A cada ponto que pertence a este eixo, fixando uma unidade de comprimento, associamos um número real, sendo que o ponto O faz-se corresponder o número real zero. Sendo A um ponto à direita da origem, dizemos que ele tem coordenada igual ao número real x , sendo que x é a distância do ponto O ao ponto A . Denotamos esta distância por $d(O, A) = x$. Caso este ponto A esteja à esquerda de O , ele terá coordenada igual a $x = -d(O, A)$. Para quaisquer pontos X e Y pertencentes a E , temos que $d(X, Y) = |x - y|$, que representa o valor absoluto ou o módulo do número real $x - y$, independentemente da posição dos pontos X e Y em relação a origem O .

Tomemos agora um plano π e considere um par de eixos ortogonais contidos neste plano. Teremos um sistema de eixos com origem no ponto O , que denominamos sistema OXY . Os eixos não precisam ser necessariamente ortogonais. Corroboramos com Lima[23] que afirma que “na maior parte dos casos não há motivos para se optar por um sistema de eixos não-ortogonais, mas há situações que pode ser vantajoso”. No nosso caso, como temos objetivos geográficos, usaremos o sistema de eixos ortogonais.

Um sistema de eixos ortogonais estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e pares ordenados de números reais. Esses pares ordenados são da forma (x, y) , com x e y reais. Eles pertencem ao conjunto \mathbb{R}^2 . Nesses pares ordenados, o x é a primeira coordenada, que é chamada de abscissa e o y é a segunda coordenada, que

é chamada de ordenada, ambas relacionadas com um ponto $P \in \pi$. Utilizar coordenadas no plano é uma ferramenta muito útil na Matemática, como mostra Lima[23].

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é o de atribuir um significado geométrico (e com isto dar um maior conteúdo intuitivo) a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas da Geometria. Este é o objetivo da Geometria Analítica.

A Figura 29 mostra essa correspondência.

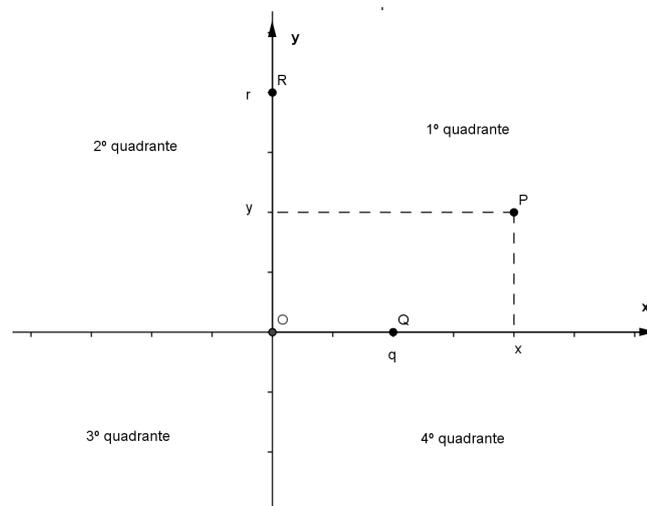


Figura 29: Correspondência entre pontos em π e seus respectivos pares ordenados

Ao ponto P está associado o par ordenado (x, y) . Isto quer dizer que x é a abscissa de P e y é a ordenada de P . Isto é análogo aos demais pontos. O ponto Q tem coordenadas $(q, 0)$ e o ponto R tem coordenadas $(0, r)$. O ponto O é a origem no sistema de eixos ordenados ortogonais e tem coordenadas $(0, 0)$.

Também pela Figura 29, é possível observar que o sistema de eixos ortogonais divide o plano em quatro regiões que são chamadas de quadrantes. No primeiro quadrante, todo

ponto tem abscissa e ordenada positivas. No segundo, a abscissa é negativa e a ordenada positiva. Já no terceiro, ambas as coordenadas são negativas. E no quarto quadrante a abscissa é positiva, mas a ordenada é negativa. A este sistema de eixos orientados ortogonais damos o nome de plano cartesiano, onde suas respectivas coordenadas são denominadas cartesianas.

Observando a Figura 30, vamos determinar uma fórmula para calcular distância entre dois pontos através de suas coordenadas. Temos os pontos $A = (x, y)$ e o ponto $B = (z, w)$ localizados no plano cartesiano. Para determinarmos a distância entre esses dois pontos, usaremos um ponto auxiliar C , cuja abscissa vale x e sua ordenada vale w . Esse ponto $C = (x, w)$ é obtido pela interseção do segmento que sai do ponto A verticalmente em direção ao eixo das abscissas e do segmento que sai do ponto B horizontalmente para a direita.

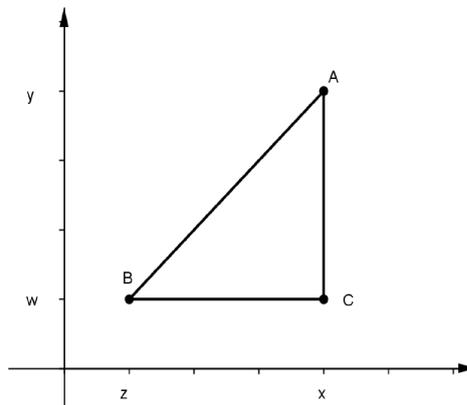


Figura 30: Distância entre os pontos A e B

Vemos que os pontos A , B e C formam um triângulo retângulo no ponto C , uma vez que C tem a mesma abscissa de A e a mesma ordenada de B . Para determinarmos as medidas dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , usaremos as definições que vimos anteriormente. Neste caso, $d(A, C) = |y - w|$ e $d(B, C) = |x - z|$. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $d(A, B)^2 = d(B, C)^2 + d(A, C)^2$. Daí, temos que $d(A, B)^2 = |y - w|^2 + |x - z|^2$. Portanto, temos que $d(A, B) = \sqrt{(y - w)^2 + (x - z)^2}$.

2.3 Vetores

Vetor é um assunto que não é trabalhado nos livros de Matemática do ensino básico, nem pelos professores de Matemática de um modo geral. Silva[32], aponta em sua dissertação a relação entre vetores e a geometria analítica.

Vetores é um assunto de fácil introdução, já é abordado no estudo de Física e tem várias aplicações em diversos campos. De igual modo, observou-se que os livros didáticos utilizados no Ensino médio, alguns analisados em 2001, continuaram com muitos de seus vícios em 2012 e, portanto, pouco se mudou na abordagem do ensino e, naturalmente, sua evolução na aprendizagem foi limitada. Ainda se nota a ausência de vetores em Geometria Analítica.

Quando temos um segmento \overline{AB} orientado por um sentido, o representamos por uma seta, onde A é a extremidade inicial e B é a extremidade final. Escrevemos então que o segmento $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Da mesma forma temos $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, como mostra a Figura 31.

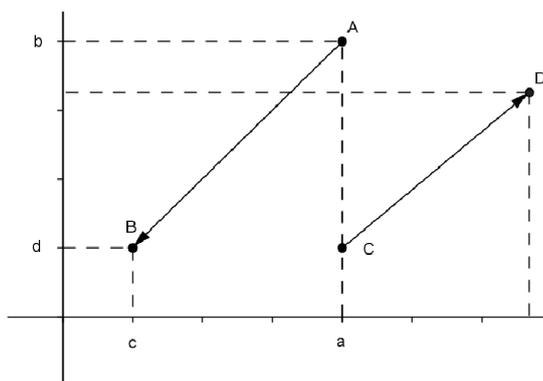


Figura 31: Representação dos segmentos orientados \vec{u} e \vec{v}

Se no mesmo plano tivermos segmentos orientados que possuem o mesmo comprimento, o mesmo sentido e forem paralelos ou colineares dizemos que eles são equipolentes. Consideremos a Figura 32. Para que os segmentos orientados \overline{AB} e \overline{CD} sejam equipolentes é necessário e suficiente que o ponto médio de \overline{AD} coincida com o ponto médio de \overline{BC} ,

no caso em que A, B, C e D formam um paralelogramo. Pelas propriedades do paralelogramo, os segmentos orientados \vec{u} e \vec{v} são equipolentes.

Agora se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overleftarrow{CD}$ a relação de equipolência não é válida. Repare que os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} tem o mesmo ponto médio. Contudo os segmentos orientados \vec{u} e \vec{v} estão em sentidos opostos, logo a relação de equipolência não é válida e portanto eles são não equipolentes, como mostra a Figura 33.

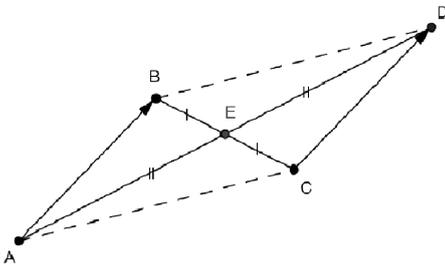


Figura 32: Segmentos equipolentes

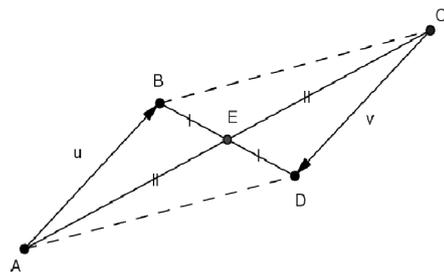


Figura 33: Segmentos não equipolentes

Dado um segmento orientado \vec{u} , vamos considerar o conjunto de todos os possíveis segmentos orientados que são equipolentes a \vec{u} . Com isto, conseguimos alocar todos os segmentos orientados do plano em conjuntos, em que seus respectivos elementos, são caracterizados por terem igual direção, sentido e comprimento, isto é, os separarmos por classes de equivalência. Cada um destes conjuntos (ou classes de equivalência) é o que chamamos de vetor. Assim, se um segmento orientado \vec{v} é equipolente a \vec{u} , temos que \vec{u} e \vec{v} pertencem a mesma classe de equivalência e representam um mesmo vetor.

Analisemos agora um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, como mostra a Figura 34. Os pontos A, B, C e D pertencem ao plano cartesiano, sendo O a origem.

Os números reais $x = (b - a)$, $y = (h - e)$, $z = (d - c)$, $w = (g - f)$ são as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, que escrevemos $\vec{v} = (x, y)$ e do vetor $\vec{u} = (z, w)$. Podemos definir a adição dos vetores \vec{v} e \vec{u} como a adição de suas coordenadas. Assim, o vetor $\overrightarrow{u + v}$ tem coordenadas $(x + z, y + w)$. Geometricamente, podemos representar a soma de dois vetores de duas formas. Na figura 35, o vetor $\overrightarrow{u + v}$ é obtido quando o início dele coincide

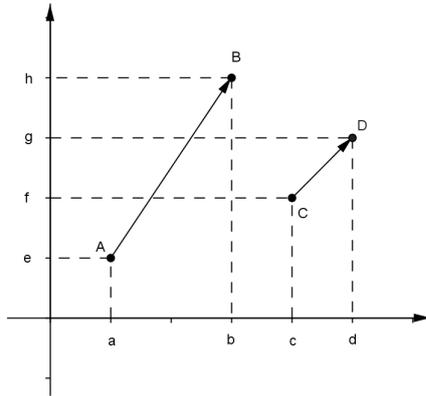


Figura 34: Vetores no plano cartesiano

com a extremidade inicial do primeiro vetor (neste caso vetor \vec{u}) e seu ponto final é igual ao ponto final do segundo vetor (neste caso vetor \vec{v}). Isso é possível porque o vetor \vec{w} é equipolente ao vetor \vec{u} .

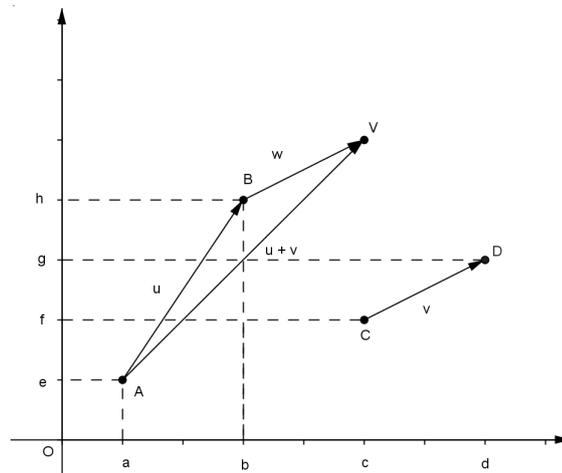


Figura 35: Soma de vetores

Na Figura 36, temos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$. O vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é dado pela diagonal do paralelogramo $ABVE$.

Dados os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, o produto interno de \vec{u} e \vec{v} , representado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ac + bd$. Para termos uma interpretação geométrica precisamos definir a norma de um vetor e ângulos entre vetores.

A norma ou comprimento de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ é dado

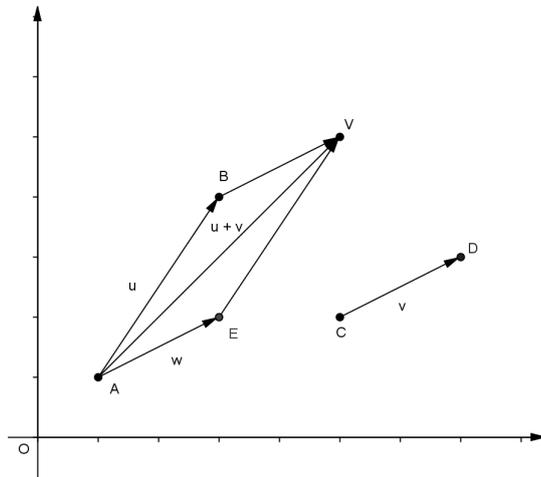


Figura 36: Regra do paralelogramo

por $\|\vec{v}\| = d(A, B)$. Já o ângulo entre dois vetores \vec{u} e \vec{v} , é o menor ângulo formado pelos segmentos \overline{AB} e \overline{AD} , como mostra a Figura 37.

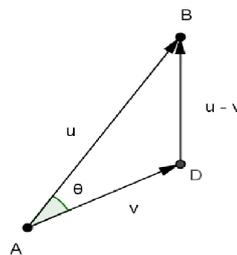


Figura 37: Ângulo entre vetores

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABD temos que:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \\ 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta &= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - (a - c)^2 + (b - d)^2 \\ \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta &= ac + bd \\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \end{aligned}$$

O estudo das coordenadas no espaço se faz de modo similar às coordenadas no plano. Conforme Lima[22], fixando um ponto O como origem, estabelecemos os eixos orientados OX, OY e OZ ortogonais entre si. O sistema $OXYZ$ determina uma correspondência que a cada ponto P associa-se um terço (x, y, z) de números reais que serão suas coordenadas.

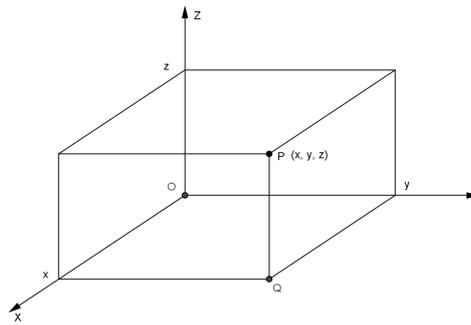


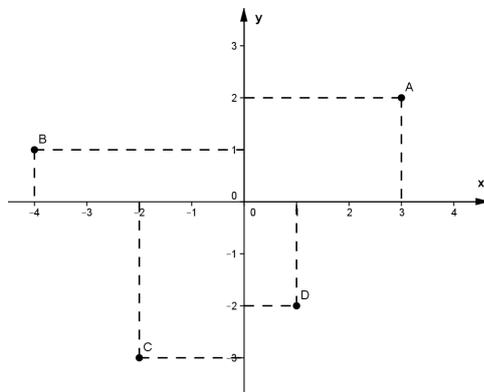
Figura 38: Coordenadas do ponto P no espaço

2.4 Atividade 8: Conceitos de geometria analítica

Dados os pontos $A = (3, 2)$, $B = (-4, 1)$, $C = (-2, -5)$ e $D = (1, -2)$ do espaço bidimensional e $E = (4, 3, -2)$, $F = (2, -3, 1)$ e $G = (-1, 2, 0)$ do espaço tridimensional, faça o que se pede:

- Localize os pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano.
- Calcule a distância entre os pontos A e B e entre os pontos E e F .
- Dê as coordenadas dos vetores $\vec{v} = \vec{BC}$, $\vec{t} = \vec{EG}$ e $\vec{s} = \vec{FG}$.
- Calcule o ângulo entre \vec{v} e \vec{s} .

O primeiro item, podemos verificar pelas figuras abaixo.

Figura 39: Localização dos pontos A, B, C e D no plano cartesiano.

Para o segundo item, utilizamos a fórmula deduzida da distância entre dois pontos, uma vez que temos as coordenadas dos pontos.

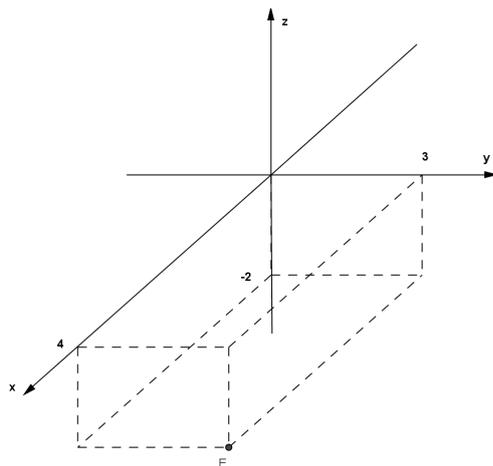


Figura 40: Localização do ponto E no plano cartesiano.

$$\begin{aligned}
 d(A, B) &= \sqrt{(3 - (-4))^2 + (2 - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(7)^2 + (1)^2} \\
 &= \sqrt{50}.
 \end{aligned}$$

Ela é semelhante para o plano cartesiano em três dimensões

$$\begin{aligned}
 d(E, F) &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - (-3))^2 + (-2 - (-1))^2} \\
 &= \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-1)^2} \\
 &= \sqrt{41}.
 \end{aligned}$$

As coordenadas dos vetores $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{t} = \overrightarrow{EF}$ e $\vec{s} = \overrightarrow{FG}$ são determinadas facilmente como mostra o esquema abaixo:

$$\begin{array}{lll}
 \vec{v} = \overrightarrow{BC} & \vec{t} = \overrightarrow{EG} & \vec{s} = \overrightarrow{FG} \\
 \vec{v} = (-2 - (-4), -5 - 1) & \vec{t} = (-1 - 4, 2 - 3, 0 - (-2)) & \vec{s} = (-1 - 2, 2 - (-3), 0 - 1) \\
 \vec{v} = (2, -6) & \vec{t} = (-5, -1, 2) & \vec{s} = (-3, 5, -1)
 \end{array}$$

Finalmente para o último item calculamos o ângulo θ entre dois vetores, através do produto interno $\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \|\vec{s}\| \times \|\vec{t}\| \times \cos \theta$, sendo que as coordenadas dos vetores foram encontradas no item anterior. Dessa forma teremos

$$\begin{aligned}\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \\ (15 - 5 - 2) &= [(-5)^2 + (-1)^2 + 2^2] \times [(-3)^2 + (5)^2 + (-1)^2] \times \cos \theta \\ 8 &= (30) \cdot (35) \times \cos \theta \\ \cos \theta &= 0,00762.\end{aligned}$$

Usando a função $\arccos(0,00762)$, descobrimos que $\theta \cong 90^\circ$.

3 Geometria esférica

Neste capítulo, além de um breve histórico de geometria não-euclidiana, estudaremos de forma analítica, conceitos que envolvem a esfera e relacionaremos com termos geográficos, como a latitude e a longitude. A seguir, trazemos a proposta de duas atividades que servirão para investigarmos se a representação plana da Terra através dos mapas trazem deformações da realidade.

3.1 Resgate histórico

A geometria é a parte da Matemática que mais sofreu transformações de um período para o outro. Neste mesmo trabalho vimos uma transição grande da geometria plana de Euclides para a geometria analítica iniciada por Descartes e muito mais para meados do século XIX quando começaram a surgir publicações de uma nova geometria.

Boyer[5] nos mostra que, simultaneamente, o russo Lobachevski, o húngaro Bolyai e o alemão Gauss desenvolveram teorias sobre uma nova geometria, que mostravam que a “geometria euclidiana não era a verdade absoluta que se suponha ser”. Em 1829, Lobachevski publicou um artigo em que ele mostrava uma negação ao quinto postulado de Euclides, o axioma das paralelas, o que marcou oficialmente o início da geometria não-euclidiana.

Muitas dessas descobertas desse período são até evidentes para os dias de hoje, mas matematicamente apresentou um grande progresso no estudo da geometria. A geometria do nosso planeta é um grande exemplo disso, pois os paralelos se encontram nos pólos e um triângulo em sua superfície pode ter a soma de seus ângulos internos maior que 180° .

3.1.1 Atividade 9: Distância entre dois pontos numa superfície esférica

Escolhendo duas cidades de nosso planeta, calcule a distância entre elas na superfície terrestre.

Essa atividade começa a ser resolvida através de um bom questionamento feito por Alves[1]

A distância entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A e B . No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta \overline{AB} e o seu comprimento é a distância entre A e B . Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta, uma vez que ela é curvada em todas as direções e túneis através da Terra não são permitidos. Como medir a menor distância entre dois pontos nesse caso?

O planeta em que vivemos é praticamente esférico, logo a distância de qualquer ponto de sua superfície ao seu centro é sempre a mesma. Muitas vezes ele é representado por globos terrestres ou de forma plana, como vemos nos mapas. Nas duas representações vemos a Terra sendo dividida em linhas imaginárias que são denominadas de paralelos e meridianos. O paralelo máximo é conhecido como linha do Equador por dividir a esfera terrestre em dois hemisférios iguais, norte e sul. Da mesma forma o meridiano de Greenwich separa a Terra em leste e oeste.

Estes elementos são fundamentais para definirmos as coordenadas geográficas de um ponto P na superfície da Terra que são chamadas de latitude e longitude, mostradas na Figura 41. A medida do arco do meridiano que passa por P e está entre o paralelo que contém P e a linha do Equador é chamada de latitude. Ela é expressa em graus e mede de 0° a 90° para o norte e 0° e 90° para o sul. Também usa-se a latitude para o norte como positiva e para o sul como negativa. A longitude é a medida do arco do paralelo que passa pelo ponto P e está entre o meridiano que possui o ponto P e o meridiano de Greenwich. Ela também é expressa em graus, mas varia de 0° a 180° para leste ou para oeste. Elas podem ser descritas de forma positiva para leste e negativa para oeste.

O grande desafio é transformar as coordenadas geográficas em coordenadas esféricas. Para isso vamos usar um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto O no espaço, que representa o centro da Terra. A distância de um ponto $P = (x, y, z)$, que equi-

vale a qualquer ponto da superfície terrestre, até a origem se dá por $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Esta distância que chamaremos de r , é o raio da Terra.

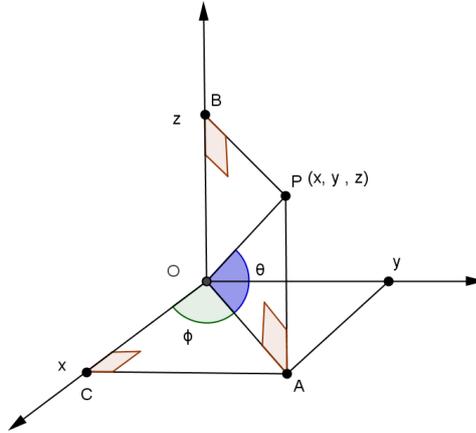


Figura 41: Coordenadas cartesianas e a relação com latitude e longitude.

Na figura 41, o plano XOZ corresponde ao meridiano de Greenwich e o plano XOY equivale a linha do Equador. Assim ϕ é a longitude e θ é a latitude do ponto P na superfície da Terra. No triângulo retângulo OAP da mesma figura, retiramos as seguintes relações trigonométricas

$$\text{sen } \theta = \frac{z}{\overline{OP}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\overline{OP}}$$

Logo,

$$z = r \times \text{sen } \theta \quad \text{e} \quad r \times \text{cos } \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Olhando para o triângulo retângulo AOC , temos as seguintes relações

$$\text{sen } \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Consequentemente,

$$y = r \times \text{cos } \theta \times \text{sen } \phi \quad \text{e} \quad x = r \times \text{cos } \theta \times \text{cos } \phi.$$

Assim, conseguimos transformar coordenadas geográficas em cartesianas.

Na Tabela 1, temos as coordenadas geográficas de duas cidades bem conhecidas. Através desses dados é possível transformar suas coordenadas geográficas em cartesianas.

CIDADE	LATITUDE	LONGITUDE
BUENOS AIRES	- 34 °30'	- 58 °30'
NEW YORK	40 °40'	- 74 °

Tabela 1: Coordenadas geográficas de Buenos Aires e New York

Tomando as relações determinadas anteriormente, sabendo que $r = 6400km$ é o raio da Terra, θ é a latitude e ϕ é a longitude, Buenos Aires terá como coordenadas

$$\begin{aligned}
 x &= r \times \cos \theta \times \cos \phi & y &= r \times \cos \theta \times \sin \phi & z &= r \cdot \sin \theta \\
 x &= r \times \cos(-34,5) \times \cos(-58,5) & y &= r \times \cos(-34,5) \times \sin(-58,5) & z &= r \times \sin(-34,5) \\
 x &= 2775,79 & y &= -4496,81 & z &= -3624,96
 \end{aligned}$$

Para a cidade de New York, repetimos o procedimento

$$\begin{aligned}
 x &= r \times \cos \theta \times \cos \phi & y &= r \times \cos \theta \times \sin \phi & z &= r \times \sin \theta \\
 x &= r \times \cos(40,67) \times \cos(-74) & y &= r \times \cos(40,67) \times \sin(-74) & z &= r \times \sin(40,67) \\
 x &= 1337,69 & y &= -4665,43 & z &= 4170,88
 \end{aligned}$$

Para calcularmos a distância entre as duas cidades, atribuímos a localização da cidade de Buenos Aires o ponto $B = (2775,79; -4496,81; -3624,96)$ e para a localização da cidade de New York o ponto $N = (1337,69; -4665,43; 4170,88)$. Recorreremos ao produto interno de dois vetores para encontrarmos o ângulo θ que é o menor ângulo formado entre os vetores \vec{OB} e \vec{ON} . Pela quantidade de cálculos, o uso de uma calculadora científica é primordial para esta atividade e sabendo que a norma dos dois vetores corresponde ao raio da Terra, temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{OB}, \vec{ON} \rangle &= \|\vec{OB}\| \times \|\vec{ON}\| \times \cos \theta \\
 \langle \vec{OB}, \vec{ON} \rangle &= 2775,79 \times 1337,69 + (-4496,81) \times (-4665,43) + 3624,96 \times (-4170,88) \\
 \langle \vec{OB}, \vec{ON} \rangle &= 6400 \times 6400 \times \cos \theta \\
 9548380,62 &= 40960000 \times \cos \theta \\
 \cos \theta &= \frac{9548380,62}{40960000} = 0,23
 \end{aligned}$$

Aplicando a função arco cosseno, encontramos que $\theta = 76,5^\circ$. A figura 42, ilustra os vetores e o ângulo entre eles.

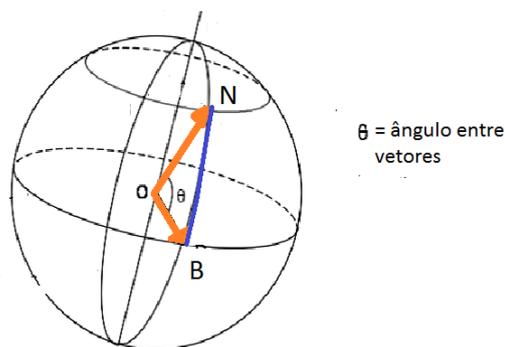


Figura 42: Ângulo entre vetores

Ainda na Figura 42, vemos uma representação bem interessante do que queremos calcular. O ângulo θ , que calculamos acima, é o mesmo do arco feito sobre a esfera terrestre. Este arco é uma parte de uma circunferência máxima que passa por esses dois pontos e será proporcional a seu valor. Para um ângulo de 360° , a distância percorrida será igual ao comprimento da circunferência que é dado por $2 \times \pi \times r$, onde $r = 6400$ km é o raio da Terra. Assim temos que:

$$d(B, N) = \frac{2 \times \pi \times 6400 \times 76,5}{360}$$

$$d(B, N) = 8546 \text{ km}$$

3.2 Atividade 10: Verificando distâncias

Verifique através de um mapa e de um globo terrestre, se a distância entre as cidades calculada na atividade anterior possuem valores semelhantes.

Esta atividade é um exemplo em que verificamos como o conhecimento matemático pode fazer diferença em nossa sociedade. A representação de nosso planeta via mapa de projeção cilíndrica de Mercator, que é a mais utilizada, apresenta muitos erros se não houver um bom fundamento matemático para explicar estas questões. Isso porque a esfera terrestre é planificada da seguinte forma, como mostra o esquema da Figura 43.

Vamos exemplificar como esta projeção traz distorções com as cidades que utilizamos na atividade anterior. Com uma régua, medimos no mapa qual seria a distância em linha

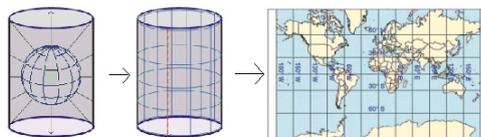


Figura 43: Projeção cilíndrica de Mercator. Fonte:www.almanaque.cnt.br

reta entre New York e Buenos Aires, como mostra a Figura 45. Ela seria de 27,1 cm. A escala do mapa é 1:36500000. Tomando como referência o exemplo 2.3.1.1 temos que

$$\begin{aligned} Escala &= \frac{Desenho}{Real} \\ \frac{1}{36500000} &= \frac{27,1cm}{x} \\ x &= 9851,5km \end{aligned}$$

Que é uma diferença bem grande para a realidade.

Olhando agora para o globo terrestre de escala 1:42000000, encontramos uma pequena dificuldade. Como medir na superfície curva de uma esfera utilizando uma régua? Neste caso usamos como instrumento de medida uma fita métrica, muito usada por costureiras por fazer medições nas partes do corpo que não são planas. Entre as cidades citadas, como mostra a figura 44, a distância no globo foi de 20,4 cm. Repetindo o cálculo com escalas, temos que

$$\begin{aligned} Escala &= \frac{Desenho}{Real} \\ \frac{1}{42000000} &= \frac{20,4cm}{x} \\ x &= 8568km \end{aligned}$$

Distância que é bem próxima do valor encontrado no cálculo da atividade anterior.

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos concluam que há um enorme erro na interpretação na representação dos mapas. Para isso, sugerimos uma investigação mais aprofundada, seguindo uma orientação das novas diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio (DCNEM), que é trabalhar a pesquisa como princípio pedagógico. Isto significa “buscar situações de interesse que permitam questionamentos. A partir destes, os estudantes poderão protagonizar investigações que levem a um entendimento mais completo da situação questionada” [6].

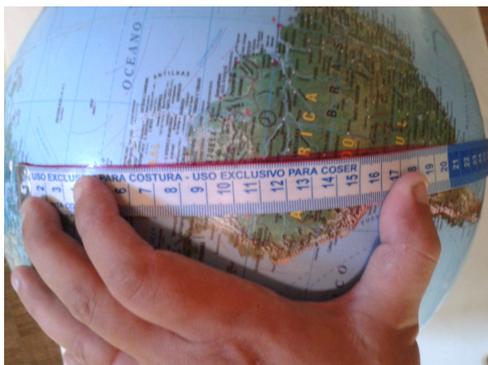


Figura 44: Medindo no globo



Figura 45: Medindo no mapa

Tomamos para investigação, três cidades próximas a linha do Equador, sendo elas Guayaquil no Equador, Bogotá na Colômbia e Manaus no Brasil, cujas coordenadas geográficas estão na Tabela 2. Medindo com uma régua no mapa, encontramos as distâncias entre elas. Usaremos a mesma escala usada na atividade anterior, ou seja, 1:36500000. Inicialmente, tomamos por exemplo, Bogotá e Manaus que distam entre si 5 cm no mapa. Isto significa que $Escala = \frac{Desenho}{Real} \Rightarrow \frac{1}{36500000} = \frac{5cm}{x} \Rightarrow x = 1825$ quilômetros. Na Atividade 10 vimos que a distância retilínea calculada no mapa é bem diferente da distância na superfície terrestre que é um arco de uma circunferência. Para calcularmos as distâncias na superfície esférica transformaremos as coordenadas geográficas em cartesianas.

CIDADE	LATITUDE	LONGITUDE
GUAYQUIL	2° 20' S	79° 45' O
BOGOTÁ	4° 36' 35" N	74° 4' 54" O
MANAUS	3° 6' S	60° 1' O
OSLO	59° 56' 58" N	10° 45' 23" L
BUDAPESTE	47° 28' 19" N	19° 3' 1" L
KIEV	50° 27' 16" N	30° 31' 25" L

Tabela 2: Coordenadas geográficas. Fonte: pt.wikipedia.org

Dessa forma, apropriando-se das definições feitas anteriormente temos que a cidade de Bogotá tem longitude $\phi_1 = -74,08^\circ$ e a latitude $\theta_1 = 4,61^\circ$ e a cidade de Manaus tem longitude $\phi_2 = -60,02^\circ$ e latitude $\theta_2 = -3,1^\circ$. Transformando em coordenadas esféricas, temos que Bogotá terá coordenadas no ponto $B = (1749, 63; -6134, 67; 514, 36)$ e Manaus

no ponto $M = (3193, 71; -5536, 38; -346, 10)$. Os vetores \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OM} , onde $O = (0, 0, 0)$, possuem norma de comprimento igual ao raio da esfera, uma vez que o ponto O é o centro da Terra. Pelo produto interno temos que

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM} \rangle &= 6400 \times 6400 \times \cos \alpha \\ \cos \alpha &= 0,9878.\end{aligned}$$

Assim, a medida do ângulo $\alpha = 16,03^\circ$.

Seguindo o modelo da Atividade 9, calculamos que a distância real entre Bogotá e Manaus é de 1790,46 km. Basta repetir o mesmo processo para sabermos a distância entre as outras cidades. Elas estão descritas na Tabela 3.

CIDADE	CIDADE	DISTÂNCIA NO MAPA	DISTÂNCIA REAL
GUAYAQUIL	BOGOTÁ	1095 km	1000,86 km
GUAYAQUIL	MANAUS	2226,50 km	2203,38 km
BOGOTÁ	MANAUS	1825 km	1790,46 km
OSLO	BUDAPESTE	1825 km	1495 km
OSLO	KIEV	2226,50 km	1635,82 km
BUDAPESTE	KIEV	1095 km	903,79 km

Tabela 3: Distâncias no mapa e distâncias reais entre as cidades escolhidas.

Entre as cidades escolhidas estão Budapeste na Hungria, Kiev na Ucrânia e Oslo na Noruega que foram escolhidas por apresentarem entre elas, as mesmas distâncias que as cidades perto da linha do Equador. Teoricamente, deveriam ter a mesma distância real, mas como vemos na tabela anterior não foi isso que ocorreu. Mas isso foi o que verificamos na atividade anterior.

Considerando agora a área formada por dois triângulos onde um deles terá como vértices as cidades europeias e o outro as cidades sulamericanas, podemos calcular a área dos triângulo pela fórmula de Heron, como nos mostra Dalcin[14], onde utilizamos que a Área = $\sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$, onde p é o semiperímetro e a, b e c são as

medidas dos lados dos triângulo. Substituindo na relação encontramos

$$A = \sqrt{2573,25 \times (1428,35) \times (748,25) \times (2346,75)} = 993451,18 \text{ km}^2.$$

É trivial concluir que o triângulo formado pelas capitais europeias visto na Figura 43 terá a mesma área pois possui as mesmas medidas.

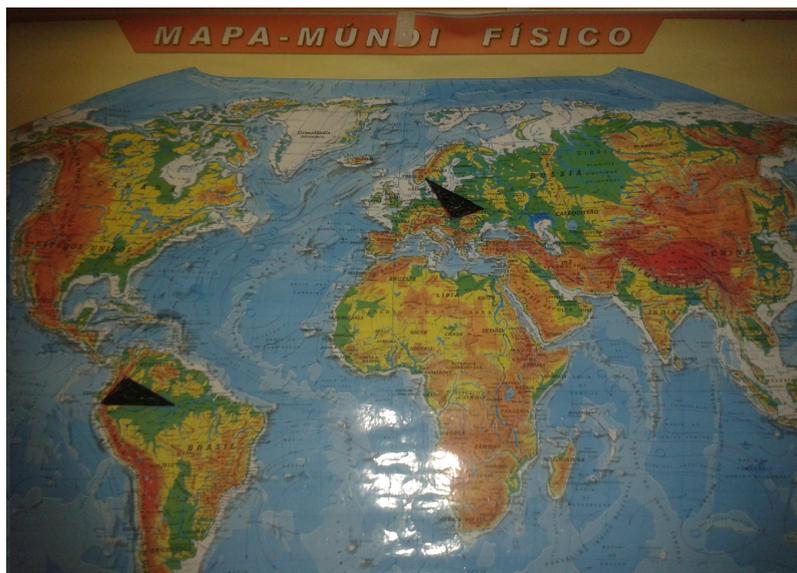


Figura 46: Triângulos com cidades escolhidas como vértices.

Como mostramos anteriormente, o mapa acaba deformando as distâncias na superfície esférica. Essa investigação envolvendo áreas tem por objetivo mostrar que esta deformação é maior com países perto dos pólos. Iremos então calcular a área real, ou seja, do triângulo esférico formado entre as três cidades.

Segundo Lima[21] e observando a Figura 48 vemos um fuso numa esfera, que tem o ângulo α formado entre dois círculos máximos. Se este ângulo $\alpha = \pi$, isso corresponde a metade da área de superfície de uma esfera, ou seja, $\text{Área} = 2 \times \pi \times R^2$, onde R é o raio da esfera. Proporcionalmente para um ângulo α , a $\text{Área} = 2 \times \alpha \times R^2$. Tomando um triângulo nesta superfície esférica de ângulos internos α , β e γ , como mostra a Figura 48, cada fuso gerado por um destes ângulos tem como área $2 \times \alpha \times R^2$, $2 \times \beta \times R^2$ e $2 \times \gamma \times R^2$, respectivamente. Se somarmos a área destes fusos, teremos um hemisfério com o acréscimo duplo da área A do triângulo esférico. Assim temos que:

$$2 \times \pi \times R^2 + 2A = 2 \times \alpha \times R^2 + 2 \times \beta \times R^2 + 2 \times \gamma \times R^2$$

$$2A = 2 \times \alpha \times R^2 + 2 \times \beta \times R^2 + 2 \times \gamma \times R^2 - 2 \times \pi \times R^2$$

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Neste caso, os ângulos são medidos em radianos.

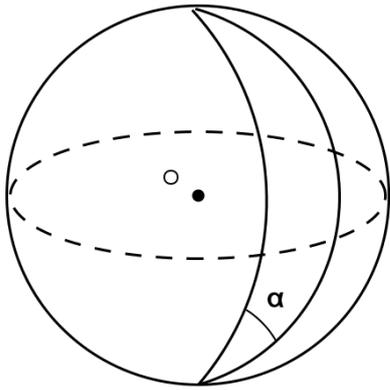


Figura 47: Área de um fuso.

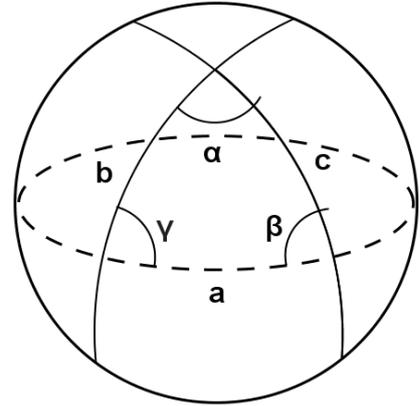


Figura 48: Triângulo esférico.

Vieira[34], mostra que, pela lei dos cossenos, $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$, sendo essa lei válida para triângulos esféricos e com os ângulos em radianos. Como exemplo, voltamos ao triângulo cujos vértices são as cidades sulamericanas. Dessa forma, o ângulo descrito pelas distâncias entre elas, serão os valores dos ângulos encontrados na Atividade 9, pois trata-se de um ângulo central. Entre Manaus e Bogotá, o arco que representa a distância entre as duas cidades $\alpha = 16,03^\circ$, que equivale a $\alpha = 0,28$ radianos. De maneira equivalente temos $0,3443$ radianos entre Guayaquil e Manaus e $0,1564$ radianos entre Guayaquil e Bogotá. Com esses dados é possível determinar a medida do ângulo α . Substituindo na fórmula, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \times \cos c}{\sin b \times \sin c}$$

Consequentemente, teremos que

$$\cos \alpha = \frac{\cos 0,3443 - \cos 0,1564 \times \cos 0,28}{\sin 0,1564 \times \sin 0,28} = \frac{0,9413 - 0,9878 \times 0,9611}{0,1557 \times 0,2761}$$

Como o valor de $\cos \alpha = 0,8914$, temos que $\alpha = \arccos(0,8914) = 0,47$ radianos. Analogamente, encontramos que $\beta = 1,76$ radianos e $\gamma = 0,93$ radianos. Utilizando agora a fórmula para área que vimos anteriormente, temos que $A = 6400^2 \cdot (0,47 + 1,76 + 0,93 - \pi)$, de onde tiramos que a área equivale a $888131,46 \text{ km}^2$. Procedendo da mesma forma

com o triângulo europeu, a área encontrada foi igual a 672936,70 km².

Isso nos leva a concluir que a representação da superfície terrestre por um mapa plano pode nos levar a conclusões erradas em sua observação. Não há erro nos mapas e sim na sua interpretação e uso. No caso acima, a deformação da área dos países europeus causada pelo mapa chegou a aumentar cerca de 47%, enquanto que nos países próximos a linha do Equador ampliou aproximadamente 11%.

Considerações finais

Todas essas atividades foram desenvolvidas nos anos de 2013 e 2014 com alunos das primeiras e terceiras séries do ensino médio. Vale ressaltar que isso foi possível porque a escola possuía condições físicas e tecnológicas adequadas para este objetivo. O laboratório de informática, ambiente usado em grande parte de nosso trabalho, estava em boas condições de uso. A função dele é apoiar no atendimento de aulas e outros fazeres que necessitem das tecnologias. Infelizmente não é a realidade de todas escolas.

Outro aspecto importante a analisar é que a maioria dos alunos da primeira série do ensino médio dessa escola, são oriundos do ensino fundamental da mesma escola, que funciona no turno contrário. Com isso, os casos graves de indisciplina são raros e é possível identificar com mais rapidez quais as maiores dificuldades dos alunos antes mesmos de entrarem no ensino médio. Além disso, está no perfil deles de serem mais curiosos e isso faz com que o desafio da descoberta seja maior ainda.

A escolha pela geometria não foi feita aleatoriamente. Itzcovich[19] relata que a geometria vem perdendo espaço não só nas salas de aulas de nossas escolas, mas também na formação docente dos professores de Matemática. É importantíssimo um professor dominar os conceitos matemáticos que ele pretende ensinar a seus alunos. O planejamento nem sempre é executado como pensamos. Às vezes somos surpreendidos pela aceitação e participação dos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais [9] indicam que o professor precisa ter mobilidade para ajustar o que ele planeja e o que de fato acontece na sala de aula com os alunos.

As atividades propostas, envolveram enriquecimento cultural, práticas investigativas, novas metodologias, diferentes materiais de apoio e trabalho em equipe, como indicam as diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica. Também salientamos que as atividades que aplicamos foram uma ótima oportunidade de fixar conteúdos que foram aprendidos ou que precisariam ser reforçados, mas por outro lado exigiu muita determinação e paciência do professor. Atividades assim, movimentam a escola e os alunos, às vezes, causam transtornos para a coordenação.

Por fim, é necessário que essas atividades passem por um momento de avaliação. O que foi sugerido neste material, tem o objetivo de qualificar tanto o ensinamento do professor quanto o aprendizado do aluno. Na avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, os aspectos qualitativos devem prevalecer sobre os aspectos quantitativos, seguindo orientações da lei de diretrizes e bases da educação brasileira.

Referências bibliográficas

Referências

- [1] ALVES, Sérgio. **Geometria no globo terrestre**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em www.bienasbm.ufba.br.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana plana**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. (Coleção do Professor de matemática).
- [3] BARRICHELO, Leonardo. **A comunidade**. M³ - Matemática Multimídia. Disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074>.
- [4] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática. Pesquisa em movimento**. São Paulo, 2005.
- [5] BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática**. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1974.
- [6] BRASIL/SEB. **Formação de professores do ensino médio. Etapa II. Caderno 5. Matemática**. Curitiba, Universidade federal do Paraná, 2014.
- [7] BRASIL/CNE. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de educação plena**. Brasília, 2001. Disponível em portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf
- [8] BRASIL/MEC. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, 1996. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>
- [9] BRASIL/MEC. **PCN Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Nacionais Curriculares. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília, MEC/SENTEC, 2002.
- [10] CARDOSO, Maria Dolores Costa Lhamas. **De Euclides e os elementos aos nossos dias**. Apresentação de trabalho/comunicação, 2009. Disponível em [http://www.sbemrn.com.br/site/II %20 erem/comunica/doc/comunica19.pdf](http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica19.pdf)

- [11] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [12] COSTA, Sueli Irene. **O experimento: onde fica a lixeira?**. M³ - Matemática Multimídia. Disponível em m3.ime.unicamp.br/dl/1IMX2RqMwNQMDA7cef3
- [13] CURY, Helena Noronha. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. Porto Alegre, Tese de doutorado apresentada a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.
- [14] DALCIN, Mário. **A demonstração feita por Heron BRASIL/SEB**. *Explorando o ensino da Matemática - Capítulo 3 - Geometria*. Brasília, 2004.
- [15] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas, Papirus, 1996.
- [16] DESCARTES, René. **O discurso do método**. São Paulo, Martins Fontes, 1996.
- [17] EEEFM BELMIRO TEIXEIRA PIMENTA. **Proposta Pedagógica**. Serra - ES, 2013.
- [18] GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO. Sedu - Secretaria estadual de educação. **Currículo básico comum da escola estadual. Área de Matemática e suas tecnologias**. Vitória, 2009.
- [19] ITZCOVICH, Horácio. **Iniciação ao estudo didático da geometria. Das construções às demonstrações..** São Paulo, Anglo, 2012.
- [20] JUNIOR, Nelson Claudiano da Silva. **Uma abordagem introdutória ao estudo de triângulos com o software geogebra**. Fortaleza-CE. Dissertação de mestrado pela Universidade Federal do Ceará, 2014.
- [21] LIMA, Elon Lages. **Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos**. Revista do professor de Matemática número 5. Disponível em <http://www.ime.usp.br/pleite/pub/artigos/elon/rpm5.pdf>
- [22] LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- [23] LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.
- [24] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino médio. Volume 1**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de matemática).
- [25] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino médio. Volume 2**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de matemática).
- [26] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do ensino médio. Volume 3**. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de matemática).
- [27] MACHADO, Nilton José. **Matemática e educação: alegorias, tecnologias e termos afins**. São Paulo, Cortez, 2001.
- [28] MACHADO, Nilton José. **Matemática e linguagem materna - análise de uma impregnação mútua**. São Paulo, Cortez, 2002.
- [29] MACHADO, Nilton José. **Matemática e realidade**. São Paulo, Cortez, 2002.
- [30] POLYA, George. **A arte de resolver problemas. Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro, Interciência, 1995.
- [31] SANTOS, Almir Rogério Silva VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros. **Geometria Euclidiana Plana**. Universidade Federal de Sergipe, 2011. Disponível em <http://w3.impa.br/arss/cursos/GEP/Geometria%20Euclidiana%20Plana.pdf>
- [32] SILVA, Robson Vieira da. **Geometria Analítica no Ensino Médio: uma proposta com tratamento vetorial**. Vitória - ES. Dissertação de mestrado pela Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, 2013.
- [33] SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas, Papirus, 2001.
- [34] VIEIRA, Mário José. **Geometria esférica**. Santo André - SP. Dissertação de mestrado pela Universidade Federal do ABC - UFABC, 2013.