UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VICTOR HUGO NOLASCO

SISTEMAS SEMIDINÂMICOS IMPULSIVOS

VITÓRIA
2013

VICTOR HUGO NOLASCO

SISTEMAS SEMIDINÂMICOS IMPULSIVOS

Dissertação apresentada ao Programam de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo - PPGMAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Daniela Paula Demuner.

VITÓRIA

2013

VICTOR HUGO NOLASCO

SISTEMAS SEMIDINÂMICOS IMPULSIVOS

Dissertação apresentada ao Programam de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo - PPGMAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Daniela Paula Demuner
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
Universidade Federal do Espírito Santo

Em memória do meu pai,

Angelo Renato.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade que me foi dada e por sempre estar comigo dando forças para superar todas as dificuldades.

Agradeço a minha mãe Creuza pelo voto de confiança e amor constante. Você é meu exemplo de vida!

Agradeço e dedico este trabalho ao meu pai Angelo Renato que infelizmente não pode estar presente em vida neste momento de tanta felicidade.

Agradeço a meu irmão Renato por ser meu melhor amigo nesta caminhada.

Agradeço a minha futura esposa Fernanda pelo amor, confiança e amizade.

Agradeço aos meus avós, tias e primos. Em especial as minhas duas tias-mães: Pingo e Isa.

Agradeço aos amigos Silvano e Oscar pela amizade e pelos cafés e conversas.

Agradeço a Profª. Drª.Daniela pela amizade, disponibilidade, paciência e determinação com que orientou este trabalho.

Agradeço também a todos professores, amigos e funcionários do PPGMAT/UFES.

Agradeço aos amigos da minha república Marcos e Valter.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos.

"E aqueles que foram vistos dançando foram julgados insanos por aqueles que não podiam escutar a música."

Friedrich Nietzsche

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria dos sistemas semidinâmicos impulsivos. Tais sistemas são uma generalização natural da teoria clássica dos sistemas semidinâmicos contínuos. Na primeira parte deste trabalho, apresentamos a teoria dos sistemas semidinâmicos contínuos. Na segunda parte, apresentamos os sistemas semidinâmicos impulsivos e estudamos algumas de suas propriedades. Interessados em estudar o comportamento assintótico de um sistema semidinâmico impulsivo, na terceira e quarta parte deste trabalho, estudamos conceitos como invariância, dissipatividade, atrator global entre outros conceitos. O estudo destes conceitos para sistemas impulsivos nos fornece garantias que um determinado processo aproxima-se de um padrão no futuro. Além disso, o centro de Levinson é definido para um sistema semidinâmico compacto dissipativo e algumas de suas propriedades topologicas como, por exemplo, compacidade e conexidade são estudadas.

Palavras-chave: sistemas semidinâmicos - sistemas impulsivos - dissipatividade - atrator global - centro de Levinson.

Abstract

This work is an introduction the theory of impulsive semidynamical systems. Impulsive systems are a natural generalization of the classical theory of continuous semidynamical systems. First chapter presents the theory of continuous semidynamical systems. The second chapter is devoted to impulsive semidynamical systems theory. In this chapter, we study some properties of the impulsive systems. Interested in studying the asymptotic behavior of a impulsive semidynamical systems, in the third and fourth chapters of this work concepts like invariance, dissipativity and global attractor are presented. The study of these concepts for impulsive systems provides us with assurances that a particular process approaches of a standard in the future. Moreover, the center of Levinson is defined for compact dissipative impulsive semidynamical systems and some of it's topological properties, for example, compactness and connectedness are studied.

Keywords: semidynamical systems - impulsive systems - dissipativity - global attractor - Levinson's center.

Sumário

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos nasceu no estudo da mecânica celeste e ganhou seu espaço na matemática a partir de Poincaré, Liapunov e Birkhoff. Hoje, esta teoria representa uma área extremamente fértil e diversificada na matemática. Diversificada tanto no campo de aplicações de seus conceitos, tanto nas ferramentas utilizadas para seu estudo.

Existem sistemas que são caracterizados pelo fato de sofrerem mudanças abruptas de estado. Estes sistemas são submetidos a pertubações cuja duração é insignificante em comparação a duração do processo. Por isso, é natural assumir que estas pertubações são instantâneas. Tais sistemas representam uma generalização para a teoria clássica dos sistemas dinâmicos contínuos. Seus conceitos são aplicados em áreas como biologia, medicina, economia, engenharia, física e entre muitas outras.

Neste trabalho, apresentamos alguns aspectos da teoria dos sistemas semidinâmicos impulsivos. Nosso estudo visa generalizar conceitos e resultados sobre sistemas semidinâmicos contínuos que foram exibidos em [4]. Para desenvolver tal estudo utilizamos como principais referências os trabalhos [3] e [14].

No primeiro capítulo, desenvolvemos a teoria básica dos sistemas semidinâmicos contínuos. Definimos conceitos de órbita, trajetória, conjunto positivamente invariante, conjunto limite e, além disso, provamos resultados envolvendo tais conceitos. As referências para este capítulo são [1], [2] e [7].

No segundo capítulo, introduzimos os sistemas semidinâmicos impulsivos. Definimos a função ϕ (que representa o menor tempo que a trajetória intersecta o conjunto impulsivo), órbita positiva impulsiva, conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, conjunto I-invariante e conjunto limite impulsivo. Entre os resultados deste capítulo podemos destacar os Lemas 2.5 e 2.6, as Proposições 2.1, 2.3 e 2.9 e os Teoremas 2.4 e 2.7. As referências para este capítulo são [1], [5], [7] e [13].

No terceiro capítulo, desenvolvemos a teoria dos sistemas semidinâmicos impulsivos dissipativos. Introduzimos vários tipos de dissipatividade como: pontual, compacta, local e limitada. Para um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo, definimos o conceito de centro de Levinson e estudamos suas propriedades topológicas. Apresentamos também condições necessárias e suficientes para obter dissipatividade. Além disso, são abordados assuntos como a variedade estável e alguns tipos de estabilidade. As referências para este capítulo são [3] e [4].

No último capítulo, estudamos a conexidade do centro de Levinson de um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Definimos os seguintes conceitos para um sistema semidinâmico impulsivo: atrator global, fracamente b-dissipativo, fracamente k-dissipativo, condição de Ladyzhenskaya, completamente contínuo e indecomponível. Estudamos alguns resultados que relacionam estes conceitos com sistemas dissipativos (ponto, compacto, local e limitado). Finalmente, aplicamos nossos resultados em um sistema impulsivo em $\mathbb{R}^n$. As referências para este capítulo são [4] e [14].

Notações

Vamos apresentar as notações que serão usados neste texto.

Nosso ambiente de trabalho será o par (X, ρ), onde X é um conjunto e ρ é uma métrica em X.

- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos;
- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais (sem o zero);
- $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Z}_+$ é o conjunto dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{B}(X)$ é a coleção de todos os conjuntos limitados em X;
- $\mathbb{K}(X)$ é a coleção de todos os conjuntos compactos em X;
- $\mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$ é a coleção de todos os conjuntos não vazios, compactos, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e atratores da família $\mathbb{K}(X)$;
- $\mathbb{K}_{GA}(X)$ é a coleção de todos conjuntos não vazios, compactos, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estáveis;

- $C(X,Y)$ é o conjunto das funções contínuas definidas em X e tomando valores em Y;
- $C^1(X,Y)$ é o conjunto das funções cuja derivada está em $C(X,Y)$;
- $\overline{A}$ representa o fecho do conjunto A em X;
- ∂A representa a fronteira do conjunto A em X;
- $A\backslash B = \{x \in X : x \in A, x \notin B\}$;
- $A^c = X\backslash A$;
- $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A\}$, com $A \subset X$ não vazio;
- $\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A,\ \ b \in B\}$, com $A, B \subset X$ não vazios;
- $\beta(A, B) = \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$, com $A, B \subset X$ não vazios;
- $B(x; \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$;
- $\overline{B(x; \varepsilon)} = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$;
- $B(A; \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, A) < \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$;
- $\overline{B(A; \varepsilon)} = \{y \in X : \rho(y, A) \leq \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$;
- $\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano n-dimencional;
- $\mathbb{H}(X) = \{f : f : X \to X \text{ é homeomorfismo}\}$.

Escrevemos $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ para indicar que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em X indexada no conjunto $\mathbb{N}$. Vamos escrever $x_n \to x$, para representar o limite

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Sistemas semidinâmicos

Neste capítulo definimos o que é um sistema semidinâmico e exibimos alguns exemplos sobre esta teoria. Introduzimos o conceito de órbita positiva de um ponto e o conceito de invariância. Provamos alguns resultados sobre tais conceitos e definimos os conjuntos limites $L^+(x)$, $J^+(x)$ e $D^+(x)$, $x \in X$. Tais conjuntos são de grande relevância, pois através deles podemos extrair propriedades para o sistema. Para mais informações sobre sistemas semidinâmicos indicamos [1], [2] e [7].

Definição 1.1. Seja (X, ρ) um espaço métrico. Um *sistema dinâmico* em X é uma tripla ordenada $(X, \pi, \mathbb{R})$ onde a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \pi : & X \times \mathbb{R} & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longmapsto & \pi(x,t) \end{array}$$

é contínua e satisfaz:

(1) $\pi(x, 0) = x$, para todo $x \in X$;

(2) $\pi(x, t + s) = \pi(\pi(x, t), s)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$.

Se $(X, \pi, \mathbb{R})$ é um sistema dinâmico, então dizemos que o conjunto X é o *espaço de fase* e que a aplicação π é a *aplicação de fase.*

É importante observar que a Definição 1.1 pode ser generalizada no seguinte sentido: o grupo aditivo $\mathbb{R}$ pode ser trocado por um grupo topológico G qualquer (ver [6]).

Para um sistema dinâmico $(X, \pi, \mathbb{R})$, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\pi_t : X \to X$ definida por $\pi_t(x) = \pi(x, t)$, $x \in X$, é um homeomorfismo.*

Prova: Ver [2] página 6.

Seja $\mathbb{H}(X) = \{f : f : X \to X$ é homeomorfismo$\}$. Pelo Teorema 1.1, $\pi_t \in \mathbb{H}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, munido da composição de funções, $\circ$, o par $(\mathbb{H}(X), \circ)$ é um grupo. Dado $x \in X$. Como $\pi(x, t+s) = \pi(\pi(x,t), s)$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$, isto é, $\pi_{t+s} = \pi_t \circ \pi_s$, então o conjunto $\{\pi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathbb{H}(X)$ munido com a composição de funções é um subgrupo de $\mathbb{H}(X)$.

Trocando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}_+$ na Definição 1.1, dizemos que a tripla $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ é um *sistema semidinâmico* em X. Ou ainda, se considerarmos no lugar de $\mathbb{R}$ na Definição 1.1, $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}_+$), obtemos um *sistema dinâmico discreto* (ou um *sistema semidinâmico discreto*) em X.

Exemplo 1.1. Uma *equação de diferenças homogênea de primeira ordem* é dada por:

$$\begin{cases} x(n+1) = T(x(n)), \\ \dot{x} = T(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um aplicação contínua e $\dot{x}(n) = x(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Uma solução para (1.1) é uma sequência $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}^n$ que a satisfaz para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Um fato na teoria das equações de diferenças é que a equação de diferenças (1.1) define o sistema semidinâmico discreto $(\mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{Z}_+)$, onde $\pi(x, n) := T^n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $n \in \mathbb{Z}_+$, com $T^n(x)$ definido de maneira indutiva por:

$$\begin{cases} T^0(x) = x, \\ T^{n-1}(T(x)), \qquad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Reciprocamente, dado o sistema semidinâmico discreto $(\mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{Z}_+)$ definimos a equação de diferença

$$\dot{x} = T(x),$$

onde $T(x) := \pi(x,1)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para mais informações sobre equações de diferenças e sistemas semidinâmicos discretos indicamos [15].

Para o caso contínuo temos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1.2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é contínua e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Assuma que para cada $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a equação (1.2) possua uma única solução $\varphi(t; t_0, x_0)$, $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$, $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, dada por $\pi((x,t),s) = (\varphi(s+t; t, x), s+t)$. Então π define um sistema dinâmico em X.

Neste trabalho, a tripla ordenada $(X, \pi, \mathbb{R}_+)$ será designada somente pelo par ordenado (X, π). Se (X, π) é um sistema semidinâmico, para cada $x \in X$, a aplicação contínua

$$\begin{array}{rccl} \pi_x & : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \pi_x(t) := \pi(x,t), \end{array}$$

é chamada de *trajetória* de x. Na sequência faremos algumas definições.

Definição 1.2. Seja (X, π) um sistema semidinâmico em X. Dado $x \in X$, a *órbita positiva* de x é o conjunto

$$\pi^+(x) = \{\pi_x(t) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Para quaisquer conjuntos $A \subset X$ e $B \subset \mathbb{R}_+$ definimos

$$\pi^+(A) = \bigcup_{x \in A} \pi^+(x) \ \text{ e } \ \pi^+(A, B) = \bigcup_{x \in A} \{\pi_x(t) : t \in B\}.$$

Definição 1.3. Um conjunto $A \subset X$ é dito *positivamente π-invariante*, se $\pi^+(A) \subset A$.

Definição 1.4. Um ponto $x \in X$ é dito *ponto crítico*, se $\pi(x,t) = x$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Definição 1.5. Um ponto $x \in X$ é dito *ponto periódico*, se existe $T > 0$ tal que $\pi(x,T) = x$.

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre invariância.

Proposição 1.1. *Sejam* (X,π) *um sistema semidinâmico e* $\{A_i\}_{i\in I}$ *uma família de subconjuntos positivamente* π*-invariantes em* X*. Então,*

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ e } \ \tilde{A} = \bigcap_{i\in I} A_i,$$

são positivamente π*-invariantes em* X*.*

Prova: Como $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, podemos escrever

$$\bigcup_{x\in A} \pi^+(x) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{x\in A_i} \pi^+(x)\right).$$

Juntando esta informação com a hipótese dos A_i serem positivamente π-invariantes, segue da definição de $\pi^+(A_i)$ que

$$\pi^+(A) = \bigcup_{x\in A} \pi^+(x) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{x\in A_i} \pi^+(x)\right) = \bigcup_{i\in I}\pi^+(A_i) \subset \bigcup_{i\in I} A_i = A.$$

Para provar que $\pi^+(\tilde{A}) \subset \tilde{A}$, note que

$$\bigcup_{x\in\tilde{A}} \pi^+(x) \subset \bigcap_{i\in I}\pi^+(A_i) \subset \bigcap_{i\in I} A_i.$$

■

Proposição 1.2. *Seja* (X,π) *um sistema semidinâmico. Se* $A \subset X$ *é um subconjunto positivamente* π*-invariante, então o fecho de* A *também é positivamente* π*-invariante.*

Prova: Dado $y_0 \in \pi^+(\bar{A})$, mostremos que $y_0 \in \bar{A}$. Pela definição de $\pi^+(\bar{A})$, existem $x_0 \in \bar{A}$ e $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$y_0 = \pi(x_0, t_0).$$

Como $x_0 \in \bar{A}$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ de modo que $x_n \to x_0$. Usando a continuidade de π temos

$$\lim_{n\to+\infty} \pi(x_n, t_0) = \pi(x_0, t_0) = y_0.$$

Sendo $\pi^+(A) \subset A$, segue que $\pi(x_n, t_0) \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $y_0 \in \bar{A}$, finalizando a demonstração. ■

Proposição 1.3. *Seja (X,π) um sistema semidinâmico. Para todo $x \in X$, $\pi^+(x)$ é positivamente π-invariante.*

Prova: O resultado segue da seguinte sequência de igualdades:

$$\pi^+(\pi^+(x)) = \bigcup_{y\in\pi^+(x)} \{\pi(y,t) : t \in \mathbb{R}_+\} = \bigcup_{t_0\in\mathbb{R}_+} \{\pi(\pi(x,t_0),t) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

$$= \bigcup_{t_0\in\mathbb{R}_+} \{\pi(x,t_0+t) : t \in \mathbb{R}_+\} \subset \pi^+(x).$$

■

Seja $x \in X$, e considere o conjunto

$$L^+(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\pi(t,[0,+\infty))}.$$

O lema abaixo mostra uma caraterização através de sequências para o conjunto $L^+(x)$.

Lema 1.1. *Sejam (X,π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Então,*

$$L^+(x) = \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+,$$

$$\text{com } t_n \to +\infty \text{ e } \pi(x,t_n) \to y\}.$$

Prova: Seja $W = \{y \in X : \text{existe uma sequência } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+, \text{ com } t_n \to +\infty \text{ e } \pi(x,t_n) \to y\}$. Vamos mostrar primeiro que $W \subset L^+(x)$. Dado $y \in W$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \to +\infty$ e $\pi(x,t_n) \to y$. Para cada $\tau \in (0,+\infty)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in [\tau,+\infty)$, $\forall n > n_0$. Assim, $\pi(x,t_n) \in \pi(x,[\tau,+\infty))$, $\forall n > n_0$. Portanto, $y \in \overline{\pi(x,[\tau,+\infty))}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}_+$. Isso implica que $y \in \bigcap_{t>0} \overline{\pi(x,[t,+\infty))}$. Logo, $W \subset L^+(x)$. Agora vamos provar a outra inclusão. Dado $z \in L^+(x)$, então $z \in \overline{\pi(x,[t,+\infty))}$ para todo $t > 0$. Em particular, $z \in \overline{\pi(x,[t_n,+\infty))}$ para a sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \to +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n \in [t_n,+\infty)$ tal que $\rho(\pi(x,\lambda_n),z) < \frac{1}{n}$. Por construção, $\lambda_n \to +\infty$ em $\mathbb{R}_+$. Além disso,

$$\pi(x,\lambda_n) \to z.$$

Assim $z \in W$ e, portanto, $L^+(x) \subset W$. ■

Motivados pelo Lema 1.1 faremos a seguinte definição.

Definição 1.6. Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um ponto $y \in X$ é chamado *ponto limite positivo* de x, se existe uma sequência $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que:

(1) $t_n \to +\infty$;

(2) $\pi(x, t_n) \to y$.

Logo, $L^+(x)$ é conjunto de todos os pontos limites positivos do ponto $x \in X$. Dizemos que $L^+(x)$ é o *conjunto limite positivo* de $x \in X$.

Exemplo 1.3. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

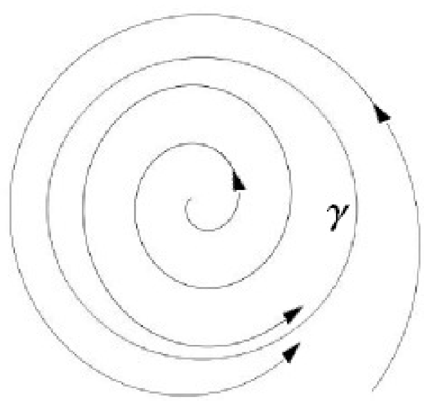

Figura 1.1 Trajetória do sistema (1.3).

O retrato de fase do sistema (1.3) consiste da trajetória fechada γ que coincide com o círculo unitário $r = 1$, do ponto $r = 0$ e de trajetórias espirais que se aproximam da curva γ, quando $t \to +\infty$. Note que a menos ponto $r = 0$, o conjunto limite positivo de todas as trajetórias para o sistema (1.3) é a curva fechada γ. Para $r = 0$, o conjunto limite positivo é o ponto $r = 0$.

O próximo teorema estabelece alguns resultados sobre a órbita positiva e o conjunto limite positivo de um ponto.

Teorema 1.2. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Então,*

(a) $\overline{\pi^+(x)} = \pi^+(x) \cup L^+(x)$*;*

(b) $L^+(x)$ *é fechado e positivamente* π*-invariante;*

(c) se X *é localmente compacto,* $L^+(x)$ *é compacto e* $L^+(x) \neq \emptyset$*, então* $L^+(x)$ *é conexo.*

Prova: (a) É suficiente mostrar que $\overline{\pi^+(x)} \subset \pi^+(x) \cup L^+(x)$. Dado $y_0 \in \overline{\pi^+(x)}$, existe uma sequência $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \pi^+(x)$ tal que $y_n \to y_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $y_n = \pi(x, t_n)$. Se $t_n \to +\infty$, então $y_0 \in L^+(x) \subset \pi^+(x) \cup L^+(x)$. Caso $\{t_n\}_{n \geq 1}$ seja uma sequência limitada, podemos obter uma subsequência convergente. Para facilitar a notação vamos supor que tal subsequência é a própria $\{t_n\}_{n \geq 1}$. Seja $t_n \to \tau$. Pela continuidade da aplicação π, temos

$$y_n = \pi(x, t_n) \to \pi(x, \tau).$$

Pela unicidade do limite, $\pi(x, \tau) = y_0$. Então, $y_0 \in \pi^+(x) \subset \pi^+(x) \cup L^+(x)$. Portanto, o resultado está provado.

(b) Por definição, $L^+(x)$ é fechado. Provemos que $L^+(x)$ é positivamente π-invariante. Para mostrar isto, basta provar que $\pi^+(y) \subset L^+(x)$, para todo $y \in L^+(x)$, já que $\pi^+(L^+(x)) = \bigcup_{y \in L^+(x)} \pi^+(y)$. Dado $y \in L^+(x)$, existe uma sequência $t_n \to +\infty$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $\pi(x, t_n) \to y$. Seja $\tau \in \mathbb{R}_+$ qualquer. Pela continuidade de π, temos

$$\pi(x, t_n + \tau) = \pi(\pi(x, t_n), \tau) \to \pi(y, \tau).$$

Como $t_n + \tau \to +\infty$, então $\pi(y, \tau) \in L^+(x)$. Portanto, $\pi^+(y) \subset L^+(x)$.

(c) Suponha por absurdo, que $L^+(x)$ não seja conexo. Sejam $A, B \subset L^+(x)$ fechados, não vazios e disjuntos tais que $L^+(x) = A \cup B$. Como $L^+(x)$ é compacto e $A, B \subset L^+(x)$ são fechados, então A e B são compactos. Sendo X localmente compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B(A, \epsilon)}$ e $\overline{B(B, \epsilon)}$ são compactos e disjuntos em X. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Assim, existem sequências $t_n \to +\infty$ e $h_n \to +\infty$ em $\mathbb{R}_+$ tais que $\pi(x, t_n) \to a$ e $\pi(x, h_n) \to b$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\pi(x, t_n) \in B(A, \epsilon)$, $\pi(x, h_n) \in B(B, \epsilon)$ e $h_n - t_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o segmento de trajetória $\{\pi(x, t) : t_n \leq t \leq h_n\}$ é um conjunto conexo e compacto. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe γ_n com $t_n < \gamma_n < h_n$, tal que $\pi(x, \gamma_n) \in$

$\partial B(A,\epsilon)$. Como $\partial B(A,\epsilon)$ é compacto a sequência $\{\pi(x,\gamma_n)\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\pi(x,\gamma_n) \to z \in \partial B(A,\epsilon)$. Por outro lado, $t_n, h_n \to +\infty$ implicam que $\gamma_n \to +\infty$. Portanto, $z \in L^+(x)$, contradizendo o fato de $L^+(x) = A \cup B$. Logo, $L^+(x)$ é conexo. ■

Introduziremos agora o prolongamento do conjunto limite positivo e o conjunto prolongado.

Definição 1.7. Sejam (X,π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. O *prolongamento do conjunto limite positivo* de x é

$$J^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon),\tau)}.$$

O *conjunto prolongado* de x é

$$D^+(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \pi(B(x;\epsilon),t)}.$$

No próximo lema, segue uma caracterização através de sequências para o prolongamento do conjunto limite positivo e o conjunto prolongado.

Lema 1.2. *Seja $x \in X$. Então,*

(*a*) $J^+(x) = \{y \in X :$ existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ *e* $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$x_n \to x, \;\; t_n \to +\infty \text{ e } \pi(x_n,t_n) \to y\};$$

(*b*) $D^+(x) = \{y \in X :$ existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que

$$x_n \to x \;\; e \;\; \pi(x_n,t_n) \to y\}.$$

Prova: Para facilitar a notação seja $W = \{y \in X :$ existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $\pi(x_n,t_n) \to y\}$. Vamos provar inicialmente que $W \subset J^+(x)$. Dado $y \in W$, existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $\pi(x_n,t_n) \to y$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ é uma sequência estritamente crescente. Dados $\epsilon > 0$ e $t \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(x_n,t_n) \in \bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon),\tau)$, $\forall n > n_0$. Logo, $y \in \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon),\tau)}$ para todo $\epsilon > 0$ e todo

$t \geq 0$. Isso implica que $y \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon),\tau)}$. Então, $y \in J^+(x)$. Portanto, $W \subset J^+(x)$. Vamos mostrar a outra inclusão. Seja $z \in J^+(x)$ qualquer. Então, $z \in \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \pi(B(x;\epsilon),\tau)}$ para todo $\epsilon > 0$ e todo $t \geq 0$. Em particular, $z \in \overline{\bigcup_{\tau\geq n} \pi(B(x;\frac{1}{n}),\tau)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{\pi(x_m^n, t_m^n)\}_{m\geq 1}$ tal que $x_m^n \in B(x;\frac{1}{n})$, $m \in \mathbb{N}$, $t_m^n \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\pi(x_m^n, t_m^n) \stackrel{m\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Podemos escolher para $n \in \mathbb{N}$, $x_{m_n}^n = y_n$, $t_{m_n}^n = h_n$ tais que $y_n \to x$, $h_n \to +\infty$ e $\rho(\pi(y_n,h_n),z) < \frac{1}{n}$. Isso implica que $\pi(y_n,h_n) \to z$. Portanto, $J^+(x) \subset W$. Para provar o item (b) repetimos o argumento da demonstração do item (a). ■

Observe que utilizando os Lemas 1.1 e 1.2 concluímos que $L^+(x) \subset J^+(x)$ e que $J^+(x) \subset D^+(x)$, para todo $x \in X$. O próximo teorema estabelece algumas propriedades dos conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$.

Teorema 1.3. *Sejam (X,π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Então,*

(a) os conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$ são positivamente π-invariantes e fechados;

(b) $\overline{\pi^+(x)} \subset D^+(x)$;

(c) $D^+(x) = \pi^+(x) \cup J^+(x)$.

Prova: (a) Queremos provar que $\pi^+(J^+(x)) \subset J^+(x)$. Dado $y \in J^+(x)$, mostremos que $\pi^+(y) \subset J^+(x)$. De fato, seja $z \in \pi^+(y)$. Existe $t \geq 0$, tal que $\pi(y,t) = z$. Por $y \in J^+(x)$, existem $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to +\infty$, e $x_n \to x$ tais que $\pi(x_n,t_n) \to y$. Daí,

$$\pi(x_n, t_n + t) = \pi(\pi(x_n,t_n),t) \to \pi(y,t) = z,$$

com $t_n + t \to +\infty$ e $x_n \to x$. Isso implica que $z \in J^+(x)$. Logo, $\pi^+(y) \subset J^+(x)$. Portanto, $\pi^+(J^+(x)) \subset J^+(x)$. Analogamente provamos que $D^+(x)$ é positivamente π-invariante. O fato dos conjuntos $D^+(x)$ e $J^+(x)$ serem fechados segue diretamente da Definição 1.7.

(b) Observe que $x \in D^+(x)$ (basta escolher $x_n = x$ e $t_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Pelo item (a), temos

$$\pi^+(x) \subset \pi^+(D^+(x)) \subset D^+(x) \Rightarrow \overline{\pi^+(x)} \subset D^+(x).$$

(c) Segue do item (b) e da definição dos conjuntos $J^+(x)$ e $D^+(x)$ que, $\pi^+(x) \subset D^+(x)$ e $J^+(x) \subset D^+(x)$. Isso implica que $\pi^+(x) \cup J^+(x) \subset D^+(x)$. Provemos a inclusão contrária. Dado $z \in D^+(x)$, existem sequências $x_n \to x$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\pi(x_n, t_n) \to z$. Se $t_n \to +\infty$ então $z \in J^+(x)$. Caso contrário, existe uma subsequência convergente, digamos $t_{n_k} \stackrel{k\to+\infty}{\to} \bar{t}$. Assim,

$$\pi(x_{n_k}, t_{n_k}) \stackrel{k\to+\infty}{\to} \pi(x, \bar{t}) \Rightarrow z = \pi(x, \bar{t}) \Rightarrow z \in \pi^+(x).$$

Portanto, $D^+(x) = \pi^+(x) \cup J^+(x)$. ■

Abaixo segue uma aplicação do Teorema 1.3.

Exemplo 1.4. Considere o sistema em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1, \\ \dot{x_2} = x_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Utilizando o Teorema 1.3, podemos escrever $D^+(x) = \pi^+(x) \cup J^+(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Assim, para determinarmos $D^+(x)$ basta conhecer o conjunto $J^+(x)$. Para $x \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, temos $J^+(x) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$. Já para $x \notin \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ o conjunto $J^+(x)$ é vazio.

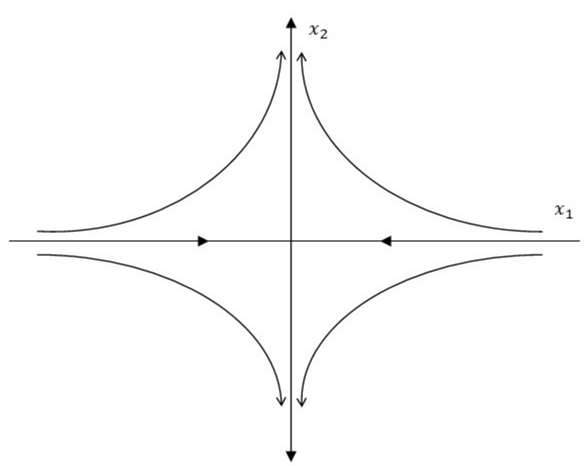

Figura 1.2 Retrato de fase do sistema (1.4).

CAPÍTULO 2

Sistemas semidinâmicos impulsivos

Neste capítulo, introduzimos o tema principal deste trabalho: sistema semidinâmico impulsivo. A teoria que apresentamos é uma generalização para a teoria clássica de sistema semidinâmico que foi vista no Capítulo 1. Na primeira seção é dada a definição de sistema semidinâmico impulsivo, da função ϕ e da órbita positiva impulsiva. Já na segunda seção, mostramos que sobre certas hipóteses a função ϕ é contínua. Em seguida, na terceira seção, definimos a noção de conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e conjunto I-invariante em um sistema semidinâmico impulsivo e provamos, por exemplo, que a órbita positiva impulsiva é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Na última seção deste capítulo, apresentamos os conjuntos $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$ e obtemos algumas propriedades para tais conjuntos. As principais referências para este capítulo são [1], [5], [7] e [13].

2.1 Sistemas semidinâmicos impulsivos

Nesta seção vamos definir o que é um sistema semidinâmico impulsivo.

Definição 2.1. Sejam (X, π) um sistema semidinâmico, $x \in X$ e $t \geq 0$. Definimos os conjuntos

$$F(x,t) = \{y \in X : \pi(y,t) = x\} \;\text{ e }\; F(D,\Delta) = \bigcup_{x\in D}\left(\bigcup_{t\in\Delta} F(x,t)\right),$$

para $D \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$.

Agora, defimos o que é um sistema semidinâmico impulsivo.

Definição 2.2. Um *sistema semidinâmico impulsivo*, $(X,\pi;M,I)$, consiste de um sistema semidinâmico (X,π), um subconjunto fechado e não vazio $M \subset X$ e uma aplicação $I : M \to X$ contínua que cumprem as seguintes propriedades: para cada $x \in M$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$F(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset \;\text{ e }\; \pi(x,(0,\varepsilon_x)) \cap M = \emptyset.$$

Dizemos que M é o *conjunto impulsivo* e que I é a *aplicação impulso*.

Definição 2.3. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto inicial*, se $F(x,t) = \emptyset$ para todo $t > 0$.

Lema 2.1. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$ satisfaz $(\pi^+(x)\cap M)\backslash\{x\} \neq \emptyset$, então existe $s_x > 0$ tal que $\pi(x,t) \notin M$, para $0 < t < s_x$ e, $\pi(x,s_x) \in M$.*

Prova: Dado $x \in X$ satisfazendo $(\pi^+(x)\cap M)\backslash\{x\} \neq \emptyset$. Como $(\pi^+(x)\cap M)\backslash\{x\} \neq \emptyset$, existe $t_1 > 0$ tal que $\pi(x,t_1) \in M$. Sendo M fechado e $\pi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ contínua, segue que o conjunto $[0,t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ é compacto. Então, $[0,t_1] \cap \pi_x^{-1}(M)$ possui um menor elemento, digamos $s_x > 0$. Portanto, $s_x > 0$ satisfaz a propriedade desejada. ■

Em vista do lema acima somos motivados a fazer as duas definições abaixo.

Definição 2.4. Seja $\phi : X \to (0,+\infty]$ uma função definida da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \begin{cases} +\infty, & \textit{se} \;\; M^+(x) = \emptyset, \\ s_x, & \textit{se} \;\; M^+(x) \neq \emptyset, \end{cases}$$

onde $M^+(x) = (\pi^+(x)\cap M)\backslash\{x\}$ e s_x é o número real positivo determinado pelo Lema 2.1.

Note que caso $M^+(x) \neq \emptyset$, o número positivo $\phi(x)$ representa o menor tempo no qual a trajetória de x encontra o conjunto impulsivo M.

Definição 2.5. Dado $x \in X$ com $\phi(x) < +\infty$, dizemos que $\pi(x, \phi(x))$ é o *ponto impulsivo* de x.

Definição 2.6. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $x \in X$, a *trajetória impulsiva* de x é definida indutivamente a seguir:

Se $M^+(x) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x, t)$ para todo $t \geq 0$ e $\phi(x) = +\infty$. Caso $M^+(x) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x, t), & 0 \leq t < \phi(x), \\ x_1^+, & t = \phi(x), \end{cases}$$

onde $x_1^+ = I(x_1)$, com $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in M$. Denote $x = x_0^+$.

Note que neste caso, o sistema tem um salto. Agora, vamos continuar nossa descrição a partir do ponto x_1^+. Se $M^+(x_1^+) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x_1^+, t - \phi(x_0^+))$ para $\phi(x_0^+) \leq t < +\infty$, e $\phi(x_1^+) = +\infty$. Caso $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - \phi(x_0^+)), & \phi(x_0^+) \leq t < \phi(x_0^+) + \phi(x_1^+), \\ x_2^+, & t = \phi(x_0^+) + \phi(x_1^+), \end{cases}$$

onde $x_2^+ = I(x_2)$, com $x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in M$.

Suponha que $\widetilde{\pi}_x$ esteja definida no intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ e que $\widetilde{\pi}_x(t_n) = x_n^+$ onde $t_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \phi(x_i^+)$, $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. Se $M^+(x_n^+) = \emptyset$, então $\widetilde{\pi}_x(t) = \pi(x_n^+, t - t_n)$ para $t_n \leq t < +\infty$ e $\phi(x_n^+) = +\infty$. Caso $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, então

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_n^+, t - t_n), & t_n \leq t < t_{n+1}, \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases}$$

onde $x_{n+1}^+ = I(x_{n+1})$ com $x_{n+1} = \pi(x_n^+, \phi(x_n^+)) \in M$ e $t_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi(x_i^+)$. Assim, $\widetilde{\pi}_x$ está definida no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ e, com isso, no intervalo $[0, t_{n+1}]$. O processo acima é finito se $M^+(x_n^+) = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Caso contrário, $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então $\widetilde{\pi}_x$ está definida no intervalo $[0, T(x))$, onde $T(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \phi(x_i^+)$.

Definição 2.7. A *órbita positiva impulsiva* de $x \in X$ é o conjunto:

$$\widetilde{\pi}^+(x) = \{\widetilde{\pi}(x, t) : t \in [0, T(x))\}.$$

Dado $x \in X$ uma das três condições é satisfeita:

(1) $M^+(x) = \emptyset$;

(2) para algum $n \in \mathbb{N}$, x_k^+ está definido para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ e $M^+(x_n^+) = \emptyset$;

(3) $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Na primeira condição acima, $\widetilde{\pi}_x$ é contínua; na segunda $\widetilde{\pi}_x$, possui um número finito de descontinuidades; já na terceira, $\widetilde{\pi}_x$ possui infinitas descontinuidades. Além disso, se valem a primeira ou a segunda condição acima, $T(x) = +\infty$. Caso seja válida a terceira condição então ou $T(x) = +\infty$ ou $T(x) < +\infty$.

Hipótese $(\mathcal{H}1)$: Neste trabalho vamos admitir que para todo $x \in X$, $T(x) = +\infty$.

Definição 2.8. Dados $A \subset X$ e $\Delta \subset \mathbb{R}_+$. Sejam

$$\widetilde{\pi}^+(A) = \bigcup_{x \in A} \widetilde{\pi}^+(x) \ \text{ e } \ \widetilde{\pi}^+(A, \Delta) = \bigcup_{x \in A} \{\widetilde{\pi}(x,t) : t \in \Delta\}.$$

Para $x \in X$ escrevemos

$$\widetilde{\pi}_x(t) = \widetilde{\pi}(x,t), \ \ t \in [0, +\infty).$$

Note que dado $t \geq 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+) + t'$ com $\phi(x_{-1}^+) = 0$ e $0 \leq t' < \phi(x_{k-1}^+)$. Assim podemos escrever $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x_{k-1}^+, t')$.

Proposição 2.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in X$, então:*

(a) $\widetilde{\pi}(x, 0) = x$;

(b) para $t, s \in [0, +\infty)$ tem-se $\widetilde{\pi}(x, t+s) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t), s)$.

Prova: Se $\widetilde{\pi}$ é contínua nada temos para provar, já que não existe ação impulsiva. Caso contrário, o item (a) segue do fato de $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x,t)$, para $0 \leq t < \phi(x)$.

(b) Sejam $t, s \in [0, +\infty)$ e $y = \widetilde{\pi}(x,t)$. Note que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x_{k-1}^+, t')$, com $0 \leq t' < \phi(x_{k-1}^+)$ e $t = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+) + t'$. Analogamente, podemos escrever $\widetilde{\pi}(y,s) = \pi(y_{l-1}^+, s')$ para algum $l \in \mathbb{N}$, com $0 \leq s' < \phi(y_{l-1}^+)$ e $s = \sum\limits_{i=0}^{l-1} \phi(y_{i-1}^+) + s'$. Como $y = \widetilde{\pi}(x,t) = \pi(x_{k-1}^+, t')$, então

$$\phi(y) = \phi(x_{k-1}^+) - t'$$

e

$$y_j^+ = x_{k-1+j}^+,$$

para $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$s = \sum_{i=0}^{l-1} \phi(y_{i-1}^+) + s',$$

$$s = \phi(y_0^+) + \phi(y_1^+) + \ldots + \phi(y_{l-2}^+) + s',$$

$$s = \phi(x_{k-1}^+) - t' + \phi(x_k^+) + \ldots + \phi(x_{k+l-3}^+) + s',$$

onde $y_{-1}^+ = 0$ e $y_0^+ = y$. Somando t e s

$$t + s = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+) + t' \right) + \left(\sum_{i=k}^{k+l-2} \phi(x_{i-1}^+) + s' - t' \right)$$

$$t + s = \sum_{i=0}^{k+l-2} \phi(x_{i-1}^+) + s',$$

com $0 \leq s' < \phi(x_{k+l-2}^+)$. Para $l = 1$, temos $s = s'$. Sendo $t + s = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+) + s' = (t - t') + s'$ obtemos $t' = 0$ e, então, podemos escrever

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t),s) = \widetilde{\pi}(y,s) = \pi(y_0^+, s') = \pi(x_{k-1}^+, s') = \pi(x_{k-1}^+, t' + s)$$

$$= \pi\left(\pi\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+)\right), t' + s\right) = \pi\left(x, \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+) + t' + s\right) = \pi(x, t+s) = \widetilde{\pi}(x, t+s),$$

já que $t = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \phi(x_{i-1}^+)$ e $0 \leq s < \phi(x_{k-1}^+)$. Para $l > 1$ temos

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t),s) = \widetilde{\pi}(y,s) = \pi(y_{l-1}^+, s') = \pi(x_{k+l-2}^+, s') = \pi\left(\pi\left(x, \sum_{i=0}^{k+l-2} \phi(x_{i-1}^+)\right), s'\right)$$

$$= \pi\left(x, \sum_{i=0}^{k+l-2} \phi(x_{i-1}^+) + s'\right) = \pi(x, t+s) = \widetilde{\pi}(x, t+s),$$

uma vez que $0 \leq s' < \phi(x_{k+l-2}^+)$, finalizando a demonstração. ■

Exemplo 2.1. Considere a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & X \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & X \\ & ((z,t),s) & \longmapsto & \pi((z,t),s) = (z, t+s), \end{array}$$

onde $X = E \times \mathbb{R}_+$ com $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Seja $M = E \times \{2; 3\}$ e, para $z = re^{i\theta}$, seja $\lambda(z) = re^{i(\theta+\alpha)}$, onde α é um número irracional. Defina a aplicação impulsiva $I : M \to X$ por $I(z, j) = (\lambda(z), j-2)$. Assim, $(X, \pi; M, I)$ determina um sistema semidinâmico impulsivo.

2.2 Continuidade da função ϕ

Em seguida, estabelecemos alguns resultados que garantem a continuidade da função ϕ fora do conjunto impulsivo.

Definição 2.9. Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Um conjunto fechado S contendo x é dito *seção* (ou λ-*seção*), se existem $\lambda > 0$ e um conjunto fechado L tais que:

(1) $F(L, \lambda) = S$;

(2) $F(L, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de $x \in X$;

(3) $F(L, \vartheta) \cap F(L, \mu) = \emptyset$ para $0 \leq \vartheta < \mu \leq 2\lambda$.

Denominamos o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ de *tubo* (ou λ-*tubo*) e o conjunto L de *barra* (ou λ-*barra*).

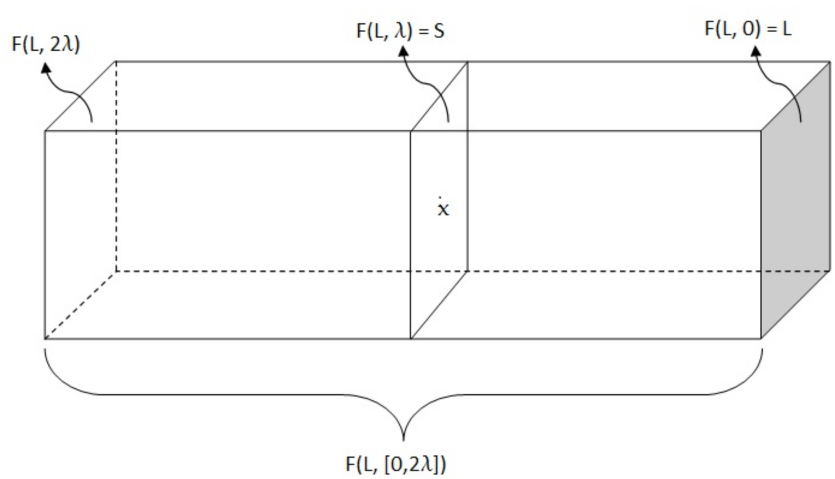

Figura 2.1 λ-tubo com seção S através de x.

A seguir vamos provar dois lemas essenciais para discutirmos sobre a continuidade da aplicação ϕ.

Lema 2.2. *Sejam (X, π) um sistema semidinâmico e $x \in X$. Se S é uma λ-seção através de $x \in X$, $\lambda > 0$, e $0 < \mu \leq \lambda$, então S também é uma μ-seção.*

Prova: Se $\mu = \lambda$ nada temos a provar. Sejam $0 < \mu < \lambda$ e $L_\mu = F(L_\lambda, \lambda - \mu)$. Como π é contínua, então L_μ é fechado. Provemos que S é uma μ-seção através de x, ou seja, que são válidas as condições (1), (2) e (3) da Definição 2.9. De fato, a condição (1) segue de

$$y \in F(L_\mu, \mu) \Leftrightarrow \pi(y, \mu) \in L_\mu \Leftrightarrow \pi(\pi(y, \mu), \lambda - \mu) \in L_\lambda \Leftrightarrow \pi(y, \lambda) \in L_\lambda \Leftrightarrow y \in S.$$

Vamos mostrar que (2) é válida. Como S é uma λ-seção através x, existe um aberto U_1 contendo x tal que $U_1 \subset F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$. Seja $T = F(L_\lambda, [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda])$. Mostremos que T é fechado. Se $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset T$ com $z_n \to z$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ tal que $\pi(z_n, t_n) \in L_\lambda$. Sendo $[0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$ compacto, podemos supor sem perda de generalidade que, $t_n \to \bar{t} \in [0, \lambda - \mu] \cup [\lambda + \mu, 2\lambda]$. Pela continuidade da aplicação π, obtemos

$$\pi(z_n, t_n) \to \pi(z, \bar{t}).$$

Note que $S \subset T^c = X \backslash T$ e T^c é aberto. Então existe um abeto $U_2 \subset T^c$ contendo x. Assim, $x \in U_1 \cap U_2$ com $U_1 \cap U_2$ aberto. Provemos que $U_1 \cap U_2 \subset F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Dado $w \in U_1 \cap U_2$, temos que $w \in F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ e que $w \in T^c$. Isso implica que $\pi(w, t) \in L_\lambda$ para algum $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$. Considere o número $s = t + \mu - \lambda$. Segue de $\lambda - \mu < t < \lambda + \mu$ que $s = t + \mu - \lambda > 0$ e $0 < t + \mu - \lambda < 2\mu$. Usando que

$$\pi(\pi(w, t + \mu - \lambda), \lambda - \mu) = \pi(w, t) \in L_\lambda,$$

temos

$$\pi(w, t + \mu - \lambda) \in L_\mu.$$

Portanto, $w \in F(L_\mu, [0, 2\mu])$. Provemos que vale (3). Suponha por absurdo, que existam $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\mu$ tais que $F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta) \neq \emptyset$. Seja $\gamma \in F(L_\mu, \alpha) \cap F(L_\mu, \beta)$. Assim, $\pi(\gamma, \alpha) \in L_\mu$ e $\pi(\gamma, \beta) \in L_\mu$. Daí,

$$\pi(\gamma, \alpha + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \alpha), \lambda - \mu) \in L_\lambda \;\; e \;\; \pi(\gamma, \beta + \lambda - \mu) = \pi(\pi(\gamma, \beta), \lambda - \mu) \in L_\lambda.$$

Então, $\gamma \in F(L_\lambda, \alpha+\lambda-\mu) \cap F(L_\lambda, \beta+\lambda-\mu)$ com $0 \leq \alpha+\lambda-\mu < \beta+\lambda-\mu \leq 2\lambda$, absurdo. Portanto, vale (3) e o lema está provado. ■

A próxima definição introduz os conceitos de TC-tubo e STC-tubo.

Definição 2.10. Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Um tubo $F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ cuja seção S através do ponto x satisfaz $S \subset M \cap F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ é chamado de *TC-tubo* através de x. Dizemos que um ponto $x \in X$ satisfaz a *condição de tubo*, ou satisfaz a *condição (TC)*, se existe um TC-tubo $F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ através de x. O conjunto $F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$ é dito um *STC-tubo* através de x se $S = M \cap F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$. Se existe um STC-tubo através de x, $F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$, dizemos que x satisfaz a *condição forte de tubo* ou de maneira abreviada a *condição (STC)*.

O próximo exemplo ilustra a diferença entre as condições (TC) e (STC).

Exemplo 2.2. Vamos considerar em $\mathbb{R}^2$ o sistema semidinâmico

$$\pi((x, y), t) = (x + t, y), \tag{2.1}$$

e o conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y,\ x \geq 0\}$. Note que o ponto $(0, 0)$ satisfaz a condição (TC) mas não satisfaz a condição (STC).

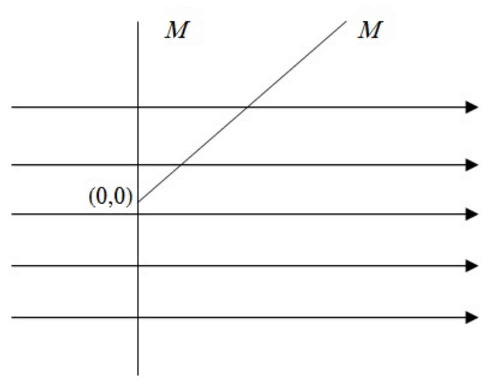

Figura 2.2 Esboço das trajetórias do sistema 2.1 no Exemplo 2.2.

O lema seguinte, prova que dado um TC-tubo (STC-tubo) através de x, $F(L, [0, 2\lambda])$, com λ-seção S, podemos "diminuir" $F(L, [0, 2\lambda])$ preservando a seção S.

Lema 2.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Suponha que exista um ponto $x \in X$ que satisfaça a condição TC (STC) com uma λ-seção S através de x. Para qualquer $\eta < \lambda$ o conjunto S também é uma η-seção com um TC-tubo (STC-tubo).*

Prova: Dado $\mu < \lambda$. Pelo Lema 2.2, S é uma μ-seção através de $x \in X$ com o tubo $F(L_\mu, [0, 2\mu])$, isto é, $F(L_\mu, \mu) = S$. Sendo $S \subset M \cap F(L_\lambda, [0, 2\lambda])$, em particular, $S \subset M$. Portanto, $S \subset M \cap F(L_\mu, [0, 2\mu])$. ■

Na próxima definição vamos explorar um tipo mais fraco de continuidade de uma função.

Definição 2.11. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *semicontínua superiormente* em $a \in X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(a, x) < \delta$ implica que $f(x) < f(a) + \varepsilon$. Uma função é dita *semicontínua superiormente* em X, se o for para todo $a \in X$.

Analogamente, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *semicontínua inferiormente* em $a \in X$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(a, x) < \delta$ implica que $f(x) > f(a) - \varepsilon$. Uma função é dita *semicontínua inferiormente* em X, se o for para todo $a \in X$.

Proposição 2.2. (*a*) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente em $a \in X$, se para toda sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ com $x_n \to a$, $\lim_{n \to +\infty} \sup f(x_n) \leq f(a)$.*

(*b*) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em $a \in X$, se para toda sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ com $x_n \to a$, $\lim_{n \to +\infty} \inf f(x_n) \geq f(a)$.*

(*c*) *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente neste ponto.*

O teorema a seguir estabelece a semicontinuidade inferior da função ϕ sobre $X \backslash M$.

Teorema 2.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Então, ϕ é semicontínua inferiormente em $X \backslash M$.*

Prova: Dado $x \in X \backslash M$. Suponha inicialmente que $\phi(x) = +\infty$. Assim, $\widetilde{\pi}(x, t) = \pi(x, t)$, para $t \geq 0$. Seja $t_1 = 1$. Como $\pi(x, [0, t_1]) \cap M = \emptyset$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\pi(x, [0, t_1]); \varepsilon) \cap M = \emptyset$. Isso implica que $B(\pi(x, s); \varepsilon) \cap M = \emptyset$, para $s \in [0, t_1]$. Pelo Teorema da dependência contínua das soluções em relação às condições iniciais ([17]), existe $\delta_1 > 0$ tal que $\rho(x, y) < \delta_1$

implica que $\rho(\pi(x,t),\pi(y,t)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $t \in [0,t_1]$. Assim, $B(\pi(y,[0,t_1]);\varepsilon) \cap M = \emptyset$, para $y \in B(x;\delta_1)$. Daí concluímos que $\phi(y) > t_1 = 1$, para $y \in B(x;\delta_1)$. Repetindo o raciocínio acima podemos construir uma sequência decrescente $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0$ de modo que $\delta_n \to 0$ e, para $y \in B(x;\delta_n)$, $\phi(y) > n$, $n \in \mathbb{N}$. Dada uma sequência $x_k \to x$ qualquer. Provemos que $\phi(x_k) \to +\infty$. De fato, dado $\Gamma > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \Gamma$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(x;\delta_{k_0})$, $k > k_0$. Isso implica que $\phi(x_k) > n_0 > \Gamma$, para $k > k_0$. Então, $\phi(x_k) \to +\infty$. Portanto, $\liminf \phi(x_k) = +\infty \geq \phi(x)$. Agora, suponha que $\phi(x) < +\infty$. Seja $z_n \to x$. Se $\liminf \phi(z_n) = +\infty$, então, $\liminf \phi(z_n) = +\infty \geq \phi(x)$. Considere o caso que $t = \liminf \phi(z_n) < +\infty$. Seja $\{z_{n_j}\}_{j\geq 1}$ uma subsequência de $\{z_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\phi(z_{n_j}) \overset{j\to+\infty}{\to} t$. Como $x \notin M$ e M é fechado, para j suficientemente grande, $z_{n_j} \notin M$. Sendo $\pi(z_{n_j},\phi(z_{n_j})) \in M$, M fechado e π contínua, segue que

$$\pi(z_{n_j},\phi(z_{n_j})) \overset{j\to+\infty}{\to} \pi(x,t) \in M.$$

Assim, $\phi(x) \leq t$. Portanto, ϕ é semicontínua inferiormente em $X \backslash M$. ■

Teorema 2.2. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $x \in M$ não é ponto inicial, então ϕ não é semicontínua inferiormente em x.*

Prova: Dado $x \in M$ um ponto não inicial. Existem $\varepsilon > 0$ e $y \in X$ tais que $\pi(y,\varepsilon) = x$. Note que podemos escolher $y \notin M$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\pi(y,[0,\varepsilon)) \cap M = \emptyset$. Seja $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência crescente tal que $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon_n \to \varepsilon$. Provemos que $\phi(\pi(y,\varepsilon_n)) = \varepsilon - \varepsilon_n$, para $n \in \mathbb{N}$. De fato, inicialmente observamos que $\pi(\pi(y,\varepsilon_n),\varepsilon - \varepsilon_n) = \pi(y,\varepsilon) \in M$, para $n \in \mathbb{N}$. Suponha por absurdo, que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(\pi(y,\varepsilon_{n_0})) = t_{n_0} < \varepsilon - \varepsilon_{n_0}$. Assim,

$$\pi(y,\varepsilon_{n_0} + t_{n_0}) = \pi(\pi(y,\varepsilon_{n_0}),t_{n_0}) \in M,$$

com $0 < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon_{n_0} + t_{n_0} < \varepsilon$, contradizendo o fato de $\pi(y,[0,\varepsilon)) \cap M = \emptyset$. Então $\phi(\pi(y,\varepsilon_n)) = \varepsilon - \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\phi(\pi(y,\varepsilon_n)) = \varepsilon - \varepsilon_n \to 0 < \phi(x).$$

Portanto, ϕ não é semicontínua inferiormente em M. ■

Nosso próximo resultado da condições suficientes para a semicontinuidade da função ϕ em X.

Teorema 2.3. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo tal que todo $x \in M$ satisfaz a condição (TC), então ϕ é semicontínua superiormente em X.*

Prova: Dado $w \in X$, mostremos que ϕ é semicontínua superiormente em w. Se $\phi(w) = +\infty$, então para toda sequência $\{w_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $w_n \to w$, $\lim_{n\to+\infty} \sup \phi(w_n) \leq +\infty = \phi(w)$. Isto implica que ϕ é semicontínua superiormente em w. Agora, suponha que $\phi(w) \in (0, +\infty)$. Seja $\gamma = \phi(w) > 0$. Assim, $y = \pi(w, \gamma) \in M$ e $\pi(w, (0, +\infty)) \cap M \neq \emptyset$. Usando o Lema 2.3 juntamente com a hipótese que todo ponto em M satisfaz a condição (TC), existem $0 < \varepsilon < \gamma$ e L fechado tais que $F(L, [0, 2\varepsilon])$ é um TC-tubo através de $y \in M$ com seção $S = F(L, \varepsilon)$. Como $F(L, [0, 2\varepsilon])$ é uma vizinhança de y e π_γ é contínua, existe uma vizinhança V contendo w tal que $\pi(V, \gamma) = \pi_\gamma(V) \subset F(L, [0, 2\varepsilon])$. Para todo $z \in V$, existe $t_z \in [0, 2\varepsilon]$ tal que $\pi(z, \gamma + t_z) = \pi(\pi(z, \gamma), t_z) \in L$. Uma vez que

$$\pi(\pi(z, \gamma + t_z - \varepsilon), \varepsilon) = \pi(z, \gamma + t_z) \in L,$$

com $0 < \gamma + t_z - \varepsilon$. Então $\pi(z, \gamma + t_z - \varepsilon) \in S = F(L, \varepsilon) \subset M$. Daí,

$$\phi(z) \leq \gamma + t_z - \varepsilon \leq \gamma + \varepsilon = \phi(w) + \varepsilon.$$

Portanto, ϕ é semicontínua superiormente em X. ■

O teorema abaixo é fruto da junção dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3.

Teorema 2.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se todo ponto em M não é ponto inicial e satisfaz a condição (TC) então, ϕ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $x \in X \backslash M$.*

Prova: Suponha que ϕ seja contínua em $x \in X$. Mostremos que $x \in X\backslash M$. De fato, se $x \in M$, então ϕ é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente em x. Por hipótese x não é ponto inicial. Logo pelo Teorema 2.2, ϕ não é semicontínua inferiormente em x, contradição. Logo, $x \in X\backslash M$.

Por outro lado, seja $x \in X\backslash M$. Usando os Teoremas 2.1 e 2.3 segue que ϕ é contínua em x. ■

Hipótese $(\mathcal{H}2)$: Em vista do Teorema 2.4, vamos admitir ao longo deste trabalho que M satisfaça a condição (STC) e que não existam pontos iniciais sobre M.

2.3 Invariância

Nesta seção, apresentamos a definição de positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e de I-invariante. Provamos que órbita positiva impulsiva e as componentes conexas I-invariantes de conjuntos compactos e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes.

Definição 2.12. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Um conjunto $A \subset X$ é dito *positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante*, se $\widetilde{\pi}^+(A) \subset A$. Se $I(A \cap M) \subset A$, dizemos que A é *I-invariante*.

O próximo exemplo mostra que os conceitos positivamente π-invariante, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e I-invariante são independentes.

Exemplo 2.3. Considere o sistema semidinâmico em $\mathbb{R}_+$ dado por $\pi(x,t) = t + x$ e sejam $A = [0, +\infty)$, $M = \{1\}$ e $I(x) = -1$. Assim, o conjunto A é positivamente π-invariante mas não é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e nem I-invariante. O conjunto $B = [-1, 1)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante mas não é positivamente π-invariante. Já o conjunto $[-2, 2]$ é I-invariante mas não é positivamente π-invariante nem positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Vamos provar agora um resultado análogo a Proposição 1.3 para o caso com ação impulsiva.

Proposição 2.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Para todo $x \in X$, a órbita positiva impulsiva $\widetilde{\pi}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Seja $x \in X$. Se x não sofre ação impulsiva, então $\widetilde{\pi}^+(x) = \pi^+(x)$ é positivamente π-invariante pela Proposição 1.3. Caso x sofra impulso, então vamos provar que $\widetilde{\pi}^+\left(\widetilde{\pi}^+(x)\right) \subset \widetilde{\pi}^+(x)$. Dado $y \in \widetilde{\pi}^+(x)$, existe $t \geq 0$ tal que $y = \widetilde{\pi}(x,t)$. Usando a propriedade de fluxo temos, para todo $s \geq 0$, que

$$\widetilde{\pi}(y, s) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,t), s) = \widetilde{\pi}(x, t+s).$$

Daí, $\widetilde{\pi}^+(y) \subset \widetilde{\pi}^+(x)$. Como y é qualquer, segue que

$$\widetilde{\pi}^+(\widetilde{\pi}^+(x)) = \bigcup_{y \in \widetilde{\pi}^+(x)} \widetilde{\pi}^+(y) \subset \widetilde{\pi}^+(x).$$

Portanto, $\widetilde{\pi}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ■

Em vista do Exemplo 2.3, as próximas duas proposições abaixo mostram uma forma de relacionar os tipos de invariância.

Proposição 2.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $A \subset X$ é um conjunto positivamente π-invariante e I-invariante, então A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dado $x \in A$, vamos mostrar que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset A$. Se x não sofre ação impulsiva, então nada temos a provar, pois por hipótese A é positivamente π-invariante. Suponha que x sofra ação impulsiva. Como $\widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) = \pi(x, [0, \phi(x))) \subset A$ e $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in A \cap M$, então $x_1^+ = I(x_1) \in A$. Analisando a órbita de x_1^+, se não ocorrer a ação impulsiva então nada temos a provar. Caso tenha ação impulsiva, sendo $\widetilde{\pi}(x, [\phi(x), \phi(x)+\phi(x_1^+))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset A$ e $x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in A \cap M$, então $x_2^+ = I(x_2) \in A$. Logo, $\widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x) + \phi(x_1^+)]) \subset A$. Indutivamente obtemos que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset A$. Isso mostra que A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ■

Proposição 2.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto fechado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Então, A é positivamente π-invariante.*

Prova: Suponha por absurdo, que A não seja positivamente π-invariante. Assim, existem $x \in A$ e $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que $\pi(x, t_0) \notin A$. Seja $X_A = \{t \in \mathbb{R}_+ : \pi(x, t) \notin A\}$. Note que X_A é limitado inferiormente ($X_A \subset \mathbb{R}_+$) e $X_A \neq \emptyset$ ($t_0 \in X_A$). Seja $w = \inf X_A$. Sendo $\pi(x, [0, \phi(x))) = \widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) \subset A$, então $w > 0$. Pela definição de w temos, $\pi(x, [0, w)) \subset A$. Utilizando a continuidade de π e o fato de A ser fechado obtemos $\pi(x, w) \in \overline{A} = A$. Daí,

$$\pi(\pi(x, w), [0, \phi(\pi(x, w)))) = \widetilde{\pi}(\pi(x, w), [0, \phi(\pi(x, w)))) \subset A.$$

Logo, $\pi(x, [w, w + \phi(\pi(x, w)))) \subset A$. Isto significa que $\pi(x, s) \in A$, para $s \in [w, w + \phi(\pi(x, w)))$, contradizendo o fato de w ser o ínfimo de X_A. Portanto, A é positivamente π-invariante. ■

A seguir, vamos mostrar que sobre certas hipóteses uma componente conexa de um conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Proposição 2.6. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Se E é uma componente conexa de A que é I-invariante, então E é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dado $x \in E$. Por hipótese temos, $\pi(x, [0, \phi(x))) = \widetilde{\pi}(x, [0, \phi(x))) \subset A$. Sendo $[0, \phi(x))$ conexo e π contínua, então $\pi(x, [0, \phi(x))) \subset E$. Se $\phi(x) = +\infty$, nada mais temos a provar. Suponha que $\phi(x) < +\infty$. Assim, $x_1 = \pi(x, \phi(x)) \in \overline{E} = E$ pela continuidade de π. Usando a hipótese que E é I-invariante, temos $x_1^+ = I(x_1) \in E$. Logo,

$$\widetilde{\pi}(x, [\phi(x), \phi(x) + \phi(x_1^+))) = \pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+))) \subset E.$$

Se $\phi(x_1^+) = +\infty$, nada temos a provar. Considere $\phi(x_1^+) < +\infty$. Do fato $\pi(x_1^+, [0, \phi(x_1^+)) \subset E$, temos $x_2 = \pi(x_1^+, \phi(x_1^+)) \in \overline{E} = E$ e $x_2^+ = I(x_2^+) \in E$. Prosseguindo com o raciocínio, obtemos que $\widetilde{\pi}^+(x) \subset E$. Portanto, E é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ■

2.4 Conjuntos limites

A seguir, apresentamos os conjuntos limites impulsivos. Tais conjuntos são importantes para o estudo sobre dissipatividade que desenvolveremos no Capítulo 3. Provamos, por exemplo, que estes conjuntos são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante quando não intersectam o conjunto impulsivo. Além disso, usando o conjunto limite positivo impulsivo mostramos que a órbita positiva impulsiva de um subconjunto relativamente compacto em X é relativamente compacta.

Definição 2.13. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $x \in X$, dizemos que

$$\widetilde{L}^+(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\widetilde{\pi}(x, [t, +\infty))}$$

é o *conjunto limite positivo impulsivo* de x. O *prolongamento do conjunto limite positivo* *impulsivo* de x é dado por

$$\widetilde{J}^+(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(B(x;\varepsilon),\tau)}.$$

O *conjunto prolongado impulsivo* de x é

$$\widetilde{D}^+(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(B(x;\varepsilon),t)}.$$

Assim, como no caso sem ação impulsiva, podemos estabelecer uma caracterização através de sequências para os conjuntos $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$.

Lema 2.4. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Então,*

(a) $\widetilde{L}^+(x) = \{y \in X : \textit{existe uma sequência } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+, \textit{ com } t_n \to +\infty,$

$\textit{e } \widetilde{\pi}(x,t_n) \to y\};$

(b) $\widetilde{J}^+(x) = \{y \in X : \textit{existem sequências } \{x_n\}_{n\geq 1} \subset X \textit{ e } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \textit{ tais}$

$\textit{que } x_n \to x, \ t_n \to +\infty \textit{ e } \widetilde{\pi}(x_n,t_n) \to y\};$

(c) $\widetilde{D}^+(x) = \{y \in X : \textit{existem sequências } \{x_n\}_{n\geq 1} \subset X \textit{ e } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \textit{ tais}$

$\textit{que } x_n \to x \textit{ e } \widetilde{\pi}(x_n,t_n) \to y\}.$

Prova: A demonstração deste lema segue as mesmas idéias usadas na prova dos Lemas 1.1 e 1.2. ∎

Abaixo, apresentamos mais um resultado semelhante ao caso sem ação impulsiva.

Proposição 2.7. *Os conjuntos $\widetilde{L}^+(x)$, $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$ são fechados em X, $x \in X$.*

Prova: Segue da própria definição destes conjuntos.

Estabelecidas estas semelhanças com o caso sem ação impulsiva, somos levados a acreditar que $\widetilde{L}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, para todo $x \in X$. O próximo exemplo mostra que esta afirmação não é verdaira.

Exemplo 2.4. Considere o sistema impulsivo em $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 0, \\ I : M \to N, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e a função I é definida da seguinte forma: para $z \in M$, considere o segmento de reta cujos extremos são a origem de $\mathbb{R}^2$ e o ponto z. Então, $I(z) \in N$ é definido como o ponto de interseção de tal segmento de reta com o conjunto N.

Seja $p = (1, 2)$. Então $\widetilde{L}^+(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 3],\ y = 0\}$. Por outro lado, $q = (3, 0) \in \widetilde{L}^+(p)$ mas $\widetilde{\pi}^+(q) = \pi^+(q)$ não está contido em $\widetilde{L}^+(p)$. Portanto, $\widetilde{L}^+(p)$ não é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

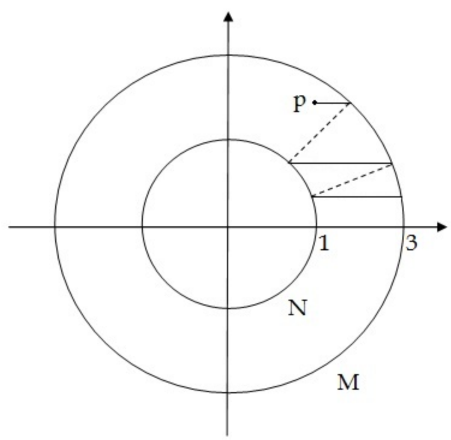

Figura 2.3 Esboço da trajetória impulsiva do ponto p no Exemplo 2.4.

Como a aplicação $\widetilde{\pi}$ não é necessariamente contínua, então o próximo lema assume um papel importante para o desenvolvimento deste trabalho, pois trata de convergência de sequências sob a aplicação $\widetilde{\pi}$. Na sua primeira aplicação mostraremos que o conjunto limite positivo impulsivo é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Lema 2.5. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X \backslash M$. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Seja $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X$ uma sequência tal que $z_n \to x$. Dado $t \geq 0$, existe* *uma sequência* $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$*, com* $\varepsilon_n \to 0$*, tal que*

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\varepsilon_n) \to \widetilde{\pi}(x,t).$$

Prova: Dado $t \geq 0$. Para provar este lema vamos separá-lo em 4 casos diferentes.

Caso 1: Suponha que $\phi(x) = +\infty$. Como $x \in X\backslash M$, então ϕ é contínua em x. Isto implica que $\phi(z_n) \to \phi(x)$. Assim, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n) > t$, $\forall n > s_0$. Então no intervalo $[0,t]$ não ocorre a ação impulsiva para $n > s_0$, isto é, $\widetilde{\pi}(z_n,t) = \pi(z_n,t)$, $\forall n > s_0$. Escolhendo a sequência $\{\varepsilon_n = 0\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n,t) = \pi(z_n,t) \to \pi(x,t) = \widetilde{\pi}(x,t).$$

Caso 2: Suponha que $0 \leq t < \phi(x) < +\infty$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \phi(x) - t$, isto é, $t < \phi(x) - \varepsilon$. Existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n) > \phi(x) - \varepsilon > t$, $\forall n > s_1$, já que ϕ é contínua em x e $z_n \to x$. Então, $\widetilde{\pi}(z_n,t) = \pi(z_n,t)$, $\forall n > s_1$. Sendo $t < \phi(x)$, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n,t) = \pi(z_n,t) \to \pi(x,t) = \widetilde{\pi}(x,t),$$

onde $\{\varepsilon_n = 0\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$.

Caso 3: Suponha que $t = \phi(x) < +\infty$. Sejam $x_1 = \pi(x,t)$ e $x_1^+ = \widetilde{\pi}(x,t) = I(x_1)$. Sendo ϕ contínua em x e $z_n \to x$, então podemos supor que $\phi(z_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, $(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)) \to \pi(x, \phi(x)) = x_1$. Usando a continuidade de I temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \to I(x_1) = x_1^+.$$

Como $|\phi(z_n) - \phi(x)| \to 0$, então $\varepsilon_n \to 0$ em $\mathbb{R}$ onde $\varepsilon_n + t = \phi(z_n) > 0$. Portanto,

$$\widetilde{\pi}(z_n, t+\varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, \phi(z_n)) = I((z_n)_1) = (z_n)_1^+ \to x_1^+ = \widetilde{\pi}(x,t).$$

Caso 4: Suponha que $0 < \phi(x) < t$. Neste caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \phi(x_i^+) + t'$, onde $0 \leq t' < \phi(x_m^+)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a sequência $\{(z_n)_i\}_{i\geq 1}$ da seguinte forma:

$$(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)),$$

$$(z_n)_2 = \pi((z_n)_1^+, \phi((z_n)_1^+)).$$

Supondo que $(z_n)_k = \pi((z_n)^+_{k-1}, \phi((z_n)^+_{k-1}))$, defina $(z_n)_{k+1} = \pi((z_n)^+_k, \phi((z_n)^+_k))$, $k > 2$. Seja $t_n = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)^+_i)$, onde $(z_n)^+_0 = z_n$. De $\phi(z_n) \to \phi(x)$, temos

$$(z_n)_1 = \pi(z_n, \phi(z_n)) \to \pi(x, \phi(x)) = x_1.$$

Usando a continuidade da função I, temos

$$(z_n)^+_1 = I((z_n)_1) \to I(x_1) = x^+_1.$$

Daí,

$$(z_n)_2 = \pi((z_n)^+_1, \phi((z_n)^+_1)) \to \pi(x^+_1, \phi(x^+_1)) = x_2,$$

já que ϕ é contínua em $X\backslash M$ e $(z_n)^+_1 \to x^+_1$ em $X\backslash M$. Prosseguindo com este raciocínio, obtemos que

$$(z_n)_k \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pela continuidade de I, temos

$$(z_n)^+_k = I((z_n)^+_k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x_k) = x^+_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então, novamente pela continuidade de ϕ, temos

$$t_n = \sum_{i=0}^{m-1} \phi((z_n)^+_i) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x^+_i) = t - t'.$$

Defina a sequência

$$\varepsilon_n = t_n + t' - t, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uma vez que $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t - t'$. Como ϕ é contínua em x^+_m e $(z_n)^+_m \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^+_m$, $m \in \mathbb{N}$, para n suficientemente grande vale, $0 \leq t' < \phi((z_n)^+_m)$. Com isso,

$$\widetilde{\pi}(z_n, t + \varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(z_n, t_n + t') = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(z_n, t_n), t') = \pi((z_n)^+_m, t').$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos

$$\pi((z_n)^+_m, t') \to \pi(x^+_m, t') = \widetilde{\pi}(x^+_m, t') = \widetilde{\pi}\left(\widetilde{\pi}\left(x, \sum_{i=0}^{m-1} \phi(x^+_i)\right), t'\right) = \widetilde{\pi}(x, t).$$

$\blacksquare$

Assim, como o Lema 2.5, o próximo lema trata de convergência de sequências sob a aplicação $\widetilde{\pi}$.

Lema 2.6. *Sejam* $(X, \pi; M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo,* $w \in X \backslash M$ *e* $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset X$ *tais que* $z_n \to w$*. Suponha que* $I(M) \cap M = \emptyset$*. Dado* $t \geq 0$*, com* $t \neq \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(w_i^+)$*,* $k \in \mathbb{Z}_+$*, então*

$$\widetilde{\pi}(z_n, t) \to \widetilde{\pi}(w, t).$$

Prova: Seja $\eta_0 > 0$ tal que $B(w; \eta_0) \cap M = \emptyset$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$z_n \in B(w; \eta_0), \ \forall n > n_1.$$

Pela continuidade de ϕ, temos

$$\phi(z_n) \to \phi(w).$$

Suponha inicialmente que $0 \leq t < \phi(w)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \phi(w) - t$. Usando a continuidade de ϕ, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi(z_n) - \phi(w)| < \varepsilon$, $\forall n > n_2$. Isso implica que $\phi(z_n) > \phi(w) - \varepsilon > t$, $\forall n > n_2$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(z_n, t) = \pi(z_n, t) \to \pi(w, t) = \widetilde{\pi}(w, t).$$

Suponha que $\phi(w) < t < \phi(w) + \phi(w_1^+)$. Assim, $t - \phi(w) > 0$. Logo, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi(z_n) - \phi(w)| < t - \phi(w)$, $\forall n > n_3$. Isso implica que $\phi(z_n) < t$, $\forall n > n_3$. Afirmamos que $t - \phi(z_n) < \phi((z_n)_1^+)$, para n suficientemente grande. De fato, como $0 < t - \phi(w) < \phi(w_1^+)$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(t - \phi(w) - \varepsilon_1, t - \phi(w) + \varepsilon_1) \cap (\phi(w_1^+) - \varepsilon_1, \phi(w_1^+) + \varepsilon_1) = \emptyset$. De $\phi(z_n) \to \phi(w)$, existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que $t - \phi(z_n) \in (t - \phi(w) - \varepsilon_1, t - \phi(w) + \varepsilon_1)$, $\forall n > n_4$. Sendo $w_1^+ \notin M$, existe $\eta_1 > 0$ tal que $B(w_1^+; \eta_1) \cap M = \emptyset$. Usando a continuidade da função impulso I, temos

$$(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I(w_1) = w_1^+.$$

Então, existe $n_5 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(z_n)_1^+ \in B(w_1^+; \eta_1), \ \forall n > n_5.$$

Pela continuidade da função ϕ em $B(w_1^+; \eta_1)$, temos

$$\phi((z_n)_1^+) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(w_1^+).$$

Assim, existe $n_6 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi((z_n)_1^+) \in (\phi(w_1^+) - \varepsilon_1, \phi(w_1^+) + \varepsilon_1), \forall n > n_6.$$

Para $n > \max\{n_4; n_5; n_6\}$, vale

$$t - \phi(z_n) < \phi((z_n)_1^+).$$

Logo, para $n > \max\{n_1; n_3; n_4; n_5; n_6\}$ temos

$$\phi(z_n) < t \ \text{ e } \ t - \phi(z_n) < \phi((z_n)_1^+).$$

Portanto,

$$\widetilde{\pi}(z_n, t) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(z_n, \phi(z_n)), t - \phi(z_n))$$

$$= \pi((z_n)_1^+, t - \phi(z_n)) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(w_1^+, t - \phi(w)) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(w, \phi(w)), t - \phi(w)) = \widetilde{\pi}(w, t).$$

Isto é,

$$\widetilde{\pi}(z_n, t) \to \widetilde{\pi}(w, t).$$

Vamos provar o caso geral. Suponha que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_k = \sum_{i=0}^{k} \phi(w_i^+) < t < t_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \phi(w_i^+).$$

Assim, $0 < t - t_k < \phi(w_{k+1}^+)$. Logo, existe $s_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) - t_k \right| < t - t_k, \ \ \forall n > s_3,$$

onde $(z_n)_0^+ = z_n$. Isso implica que $\sum\limits_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) < t$, $\forall n > s_3$. Afirmamos que

$$t - \sum_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) < \phi((z_n)_{k+1}^+),$$

para n suficientemente grande. De fato, como $0 < t - t_k < \phi(w_{k+1}^+)$, existe $\gamma_1 > 0$ tal que

$$(t - t_k - \gamma_1, t - t_k + \gamma_1) \cap (\phi(w_{k+1}^+) - \gamma_1, \phi(w_{k+1}^+) + \gamma_1) = \emptyset.$$

De $\sum\limits_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_k$, existe $s_4 \in \mathbb{N}$ tal que $t - \sum\limits_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) \in (t - t_k - \gamma_1, t - t_k + \gamma_1)$, para $n > s_4$. Sendo $w_{k+1}^+ \notin M$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B(w_{k+1}^+; \delta_1) \cap M = \emptyset$. Usando a continuidade da função I, temos

$$(z_n)_{k+1}^+ = I((z_n)_{k+1}) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I(w_{k+1}) = w_{k+1}^+.$$

Então, existe $s_5 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(z_n)_{k+1}^+ \in B(w_{k+1}^+;\delta_1), \quad \forall n > s_5.$$

Pela continuidade da função ϕ em $B(w_{k+1}^+;\delta_1)$, temos

$$\phi((z_n)_{k+1}^+) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w_{k+1}^+).$$

Assim, existe $s_6 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi((z_n)_{k+1}^+) \in (\phi(w_{k+1}^+) - \gamma_1, \phi(w_{k+1}^+) + \gamma_1), \quad \forall n > s_6.$$

Para $n > \max\{s_4; s_5; s_6\}$, temos

$$t - \sum_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) < \phi((z_n)_{k+1}^+).$$

Logo, para $n > \max\{n_1; s_3; s_4; s_5; s_6\}$, vale

$$\sum_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) < t \ \text{ e } \ t - \sum_{i=0}^{k} \phi((z_n)_i^+) < \phi((z_n)_{k+1}^+).$$

Portanto,

$$\widetilde{\pi}(z_n,t) = \widetilde{\pi}\left(\widetilde{\pi}\left(z_n, \sum_{i=0}^{k}\phi((z_n)_i^+)\right), t - \sum_{i=0}^{k}\phi((z_n)_i^+)\right) = \widetilde{\pi}\left((z_n)_{k+1}^+, t - \sum_{i=0}^{k}\phi((z_n)_i^+)\right)$$

$$= \pi\left((z_n)_{k+1}^+, t - \sum_{i=0}^{k}\phi((z_n)_i^+)\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(w_{k+1}^+, t - t_k) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(w,t_k), t - t_k) = \widetilde{\pi}(w,t).$$

Isto é,

$$\widetilde{\pi}(z_n,t) \to \widetilde{\pi}(w,t).$$

■

O teorema seguinte, prova a invariância positiva do conjunto limite impulsivo.

Teorema 2.5. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Se $I(M) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{L}^+(x) \backslash M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dados $y \in \widetilde{L}^+(x)\backslash M$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Note que para $t = 0$ nada temos a provar. Suponha que $t > 0$. Como $y \in \widetilde{L}^+(x)$, existe uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to +\infty$, tal que $\widetilde{\pi}(x, t_n) \to y$. Pelo Lema 2.5, existe $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \to 0$, tal que

$$\widetilde{\pi}(x, t_n + t + \varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t_n), t + \varepsilon_n) \to \widetilde{\pi}(y, t). \tag{2.3}$$

Segue da definição de trajetória impulsiva que $\widetilde{\pi}(y, t) \notin M$. Por (2.3), temos $\widetilde{\pi}(y, t) \in \widetilde{L}^+(x)\backslash M$. Sendo $y \in \widetilde{L}^+(x)\backslash M$ e $t > 0$ quaisquer, concluímos que $\widetilde{L}^+(x)\backslash M$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ∎

Uma consequência imediata do teorema acima é:

Corolário 2.1. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Se $\widetilde{L}^+(x) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{L}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

A seguir, estabelecer os mesmos resultados do Teorema 2.5 e do Corolário 2.1 para os conjuntos $\widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(x)$.

Teorema 2.6. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Se $I(M) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{J}^+(x)\backslash M$ e $\widetilde{D}^+(x)\backslash M$ são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes.*

Prova: A demonstração é análoga a do Teorema 2.5. ∎

Corolário 2.2. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $x \in X$. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Então,*

(a) $\widetilde{J}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, se $\widetilde{J}^+(x) \cap M = \emptyset$;

(b) $\widetilde{D}^+(x)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, se $\widetilde{D}^+(x) \cap M = \emptyset$.

A definição, a seguir, generaliza o conceito de conjunto limite positivo impulsivo.

Definição 2.14. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dado $A \subset X$, o *conjunto limite positivo impulsivo* de A é

$$\widetilde{L}^+(A) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)}.$$

Note que para $A = \{x\}$, $x \in X$, temos $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(x)$, coincidindo com a Definição 2.13. O próximo lema fornece uma caracterização através de sequências para o conjunto limite positivo impulsivo de A.

Lema 2.7. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$. Então,*

$$\widetilde{L}^+(A) = \{y \in X : \text{existem sequências } \{x_n\}_{n\geq 1} \subset A \text{ e } \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tais que}$$

$$t_n \to +\infty \text{ e } \widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y\}.$$

Prova: Seja $\Gamma = \{y \in X$: existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y\}$. Provemos que $\widetilde{L}^+(A) = \Gamma$. De fato, dado $y \in \Gamma$. Existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$. Para $t \geq 0$, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_t$. Assim, $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq n_t} \subset \bigcup\limits_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)$. Isso implica que $y \in \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)}$. Sendo $t \geq 0$ qualquer, segue que $y \in \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)}$. Então, $\Gamma \subset \widetilde{L}^+(A)$. Agora vamos mostrar que $\widetilde{L}^+(A) \subset \Gamma$. Seja $z \in \widetilde{L}^+(A)$ qualquer. Pela definição de $\widetilde{L}^+(A)$, temos $z \in \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)}$, isto é, $z \in \overline{\bigcup\limits_{\tau\geq t} \widetilde{\pi}(A, \tau)}$ para todo $t \geq 0$. Vamos construir $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ de maneira indutiva. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\{z_n^k\}_{n\geq 1} \subset \bigcup\limits_{\tau\geq k} \widetilde{\pi}(A, \tau)$ tal que $z_n^k \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z, z_n^1) < 1$, $n \geq n_1$. Como $z_{n_1}^1 \in \bigcup\limits_{\tau\geq 1} \widetilde{\pi}(A, \tau)$, seja $x_1 \in A$ e $t_1 \geq 1$ tal que $z_{n_1}^1 = \widetilde{\pi}(x_1, t_1)$. Suponha que existam $x_k \in A$ e $t_k \geq k$ tais que $\rho(z, \widetilde{\pi}(x_k, t_k)) < \frac{1}{k}$. Pela convergência $z_n^{k+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$, existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(z, z_n^{k+1}) < \frac{1}{k+1}$, $n \geq n_{k+1}$. Sendo $z_{n_{k+1}}^{k+1} \in \bigcup\limits_{\tau\geq k+1} \widetilde{\pi}(A, \tau)$, existem $x_{k+1} \in A$ e $t_{k+1} \geq (k+1)$ tais que $z_{n_{k+1}}^{k+1} = \widetilde{\pi}(x_{k+1}, t_{k+1})$. Isso implica que $\rho(z, \widetilde{\pi}(x_{k+1}, t_{k+1})) < \frac{1}{k+1}$. Portanto, $\widetilde{\pi}(x_k, t_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z$ com $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset A$, $\{t_k\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $t_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Logo, $z \in \Gamma$. Portanto, $\widetilde{L}^+(A) = \Gamma$. ■

Considerando as mesmas hipóteses do Corolário 2.1 vamos provar que $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Lema 2.8. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Se $\widetilde{L}^+(A) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Dados $y \in \widetilde{L}^+(A)$ e $t \geq 0$. Vamos provar que $\widetilde{\pi}(y,t) \in \widetilde{L}^+(A)$. De fato, existem $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to +\infty$, tais que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$. Pelo Lema 2.5, existe uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), t + \varepsilon_n) \to \widetilde{\pi}(y,t).$$

Isso implica que

$$\widetilde{\pi}(x_n, t_n + t + \varepsilon_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), t + \varepsilon_n) \to \widetilde{\pi}(y,t).$$

Como $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n + t + \varepsilon_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n + t + \varepsilon_n \to +\infty$, então $\widetilde{\pi}(y,t) \in \widetilde{L}^+(A)$. Portanto, $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ■

O próximo teorema será uma ferramenta muito utilizada nas demonstrações dos Capítulos 3 e 4. Para a sua prova, usaremos o Teorema A.2 do Apêndice. Além disso, dados $x \in X$ e $A \subset X$ não vazio, considere

$$\rho(x, A) := \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Teorema 2.7. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) para as sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to +\infty$, a sequência $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacta;

(b) $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio e compacto. Além disso, vale o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{L}^+(A)) = 0; \tag{2.4}$$

(c) existe um compacto $K \subset X$ não vazio tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) = 0. \tag{2.5}$$

Prova: $(a) \Rightarrow (b)$ Dadas $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \to +\infty$. Como $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto por hipótese, podemos supor, a menos de uma subsequência, que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$. Assim, $y \in \widetilde{L}^+(A)$. Logo, $\widetilde{L}^+(A) \neq \emptyset$. Mostremos que $\widetilde{L}^+(A)$ é compacto.

De fato, seja $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{L}^+(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem sequências $\{x_k^n\}_{k\geq 1} \subset A$ e $\{t_k^n\}_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_k^n \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, tais que

$$\widetilde{\pi}(x_k^n, t_k^n) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_n.$$

Seja $\varepsilon_n > 0$ uma sequência tal que $\varepsilon_n \to 0$. De $\widetilde{\pi}(x_k^1, t_k^1) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_1$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x_k^1, t_k^1), y_1) < \varepsilon_1$ e $t_k^1 > 1$, $\forall k \geq k_1$. Sejam $z_1 = x_{k_1}^1$ e $\tau_1 = t_{k_1}^1$. Sendo $\widetilde{\pi}(x_k^2, t_k^2) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_2$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x_k^2, t_k^2), y_2) < \varepsilon_2$ e $t_k^2 > 2$, $\forall k \geq k_2$. Sejam $z_2 = x_{k_2}^2$ e $\tau_2 = t_{k_2}^2$. Prosseguindo com o raciocínio, obtemos sequências $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\tau_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e,

$$\rho(\widetilde{\pi}(z_n, \tau_n), y_n) = \rho(\widetilde{\pi}(x_{k_n}^n, t_{k_n}^n), y_n) < \varepsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por hipótese $\{\widetilde{\pi}(z_n, \tau_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto, logo, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\widetilde{\pi}(z_n, \tau_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z_0 \in \widetilde{L}^+(A)$. Daí,

$$\rho(y_n, z_0) \leq \rho(y_n, \widetilde{\pi}(z_n, \tau_n)) + \rho(\widetilde{\pi}(z_n, \tau_n), z_0) < \varepsilon_n + \rho(\widetilde{\pi}(z_n, \tau_n), z_0),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade acima, obtemos que $\rho(y_n, z_0) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto, $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z_0$. Concluímos então que $\widetilde{L}^+(A)$ é compacto. Vamos provar que vale o limite (2.4). Suponha por absurdo, que o limite (2.4) não seja válido. Logo, existem $\gamma > 0$, $s_k \to +\infty$ e $q_k \in A$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(q_k, s_k), \widetilde{L}^+(A)) \geq \gamma, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Como $\{\widetilde{\pi}(q_k, s_k)\}_{k\geq 1}$ é relativamente compacto, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\widetilde{\pi}(q_k, s_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} p_0$. Pela definição de $\widetilde{L}^+(A)$ segue que $p_0 \in \widetilde{L}^+(A)$. Por outro lado, fazendo $k \to +\infty$ em (2.6) temos

$$\rho(p_0, \widetilde{L}^+(A)) \geq \gamma \Rightarrow p_0 \notin \widetilde{L}^+(A),$$

absurdo. Portanto, vale o limite (2.4).

$(b) \Rightarrow (c)$ Se vale (b), basta escolher $K = \widetilde{L}^+(A)$ para provar (c).

$(c) \Rightarrow (a)$ Dadas as sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \to +\infty$. Para provar que $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto, basta mostrar que $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente em X. Por hipótese existe $K \subset X$ não vazio e compacto tal que vale o limite (2.5). Assim, existe $l_1 > 0$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) < 1$, para todo $t > l_1$ e todo $x \in A$. Como $t_n \to +\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > l_1$, $\forall n \geq n_1$. Então, $\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_1}, t_{n_1}), K) < 1$. Novamente do limite (2.5), existe $l_2 > 0$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) < \frac{1}{2}$, para todo $t > l_2$ e todo $x \in A$. De $t_n \to +\infty$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > l_2$, $\forall n \geq n_2$. Então, $\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_2}, t_{n_2}), K) < \frac{1}{2}$. Sem perda de generalidade podemos escolher $t_{n_2} > t_{n_1}$. Usando o limite (2.5) e o fato de $t_n \to +\infty$ repetidas vezes, obtemos subsequências $\{x_{n_s}\}_{s\geq 1} \subset A$ e $t_{n_s} \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}), K) < \frac{1}{s}, \ \forall s \in \mathbb{N}.$$

Sendo K é compacto, para cada $s \in \mathbb{N}$, existe $y_s \in K$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}), y_s) = \rho(\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}), K) < \frac{1}{s}$. A menos de uma subsequência, podemos supor que $y_s \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} a \in K$. Daí,

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}), a) \leq \rho(\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}), y_s) + \rho(y_s, a) < \frac{1}{s} + \rho(y_s, a).$$

Isso implica que $\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s}) \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Portanto, $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto. ∎

Proposição 2.8. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio. Se $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto, então A é relativamente compacto.*

Prova: O resultado segue da inclusão, $A \subset \widetilde{\pi}^+(A)$. ∎

No que segue, vamos provar que órbita positiva impulsiva de um conjunto relativamente compacto em X, também é relativamente compacto. O Lema 2.9 será utilizado para obtermos tal resultado.

Lema 2.9. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, $l \in \mathbb{R}_+$ e $A \subset X$ não vazio e relativamente compacto. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Então, o conjunto $\widetilde{\pi}(A, [0, l]) \subset X$ é relativamente compacto.*

Prova: Note que se $l = 0$, nada temos para provar. Suponha que $l > 0$. Seja $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}(A, [0, l])$. Então, existem sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, l]$ tais que $y_n = \widetilde{\pi}(a_n, t_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como A é relativamente compacto e $[0, l]$ é compacto, podemos supor que

$$a_n \to a \ \ e \ \ t_n \to \bar{t},$$

com $a \in \overline{A}$ e $\overline{t} \in [0, l]$. Vamos considerar dois casos: quando $a \notin M$ e quando $a \in M$.

Caso 1: Suponha que $a \notin M$. Este caso será decomposto em dois casos: quando $\overline{t} \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, e quando $\overline{t} = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Suponha inicialmente que $\overline{t} \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Se $0 \leq \overline{t} < \phi(a)$ então $\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \to \widetilde{\pi}(a, \overline{t})$. Vamos supor que $\overline{t} > \phi(a)$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\overline{t} = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+) + s$ onde $0 < s < \phi(a_{k+1}^+)$. Como ϕ é contínua sobre $X \backslash M$ existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n = \sum_{j=0}^{k} \phi((a_n)_j^+) + s_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

com $s_n \to s$. Pela continuidade da função I, temos $(a_n)_{k+1}^+ \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_{k+1}^+$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, e

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) = \pi((a_n)_{k+1}^+, s_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a_{k+1}^+, s) = \widetilde{\pi}(a, \overline{t}).$$

Suponha que $\overline{t} = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Novamente vamos considerar dois casos: quando $t_n \leq \overline{t}$ para uma quantidade infinita de índices e quando $t_n > \overline{t}$ para uma quantidade infinita de índices. Sem perda de generalidade podemos estudar os casos quando $t_n \leq \overline{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, quando $t_n > \overline{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Primeiramente, suponha que $t_n \leq \overline{t}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset [0, \phi(a_k^+)]$ tal que

$$t_n = s_n \text{ (se } k = 0\text{)} \ \text{ ou } \ t_n = \sum_{j=0}^{k-1} \phi((a_n)_j^+) + s_n, \ \text{ (se } k \in \mathbb{N}\text{)},$$

$n \in \mathbb{N}$ e $s_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(a_k^+)$. Então,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) = \pi((a_n)_k^+, s_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a_k^+, \phi(a_k^+)) = a_{k+1}.$$

Por outro lado, se supor que $t_n > \overline{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n = \sum_{j=0}^{k} \phi((a_n)_j^+) + s_n,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \to 0$. Então,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) = \pi((a_n)_{k+1}^+, s_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a_{k+1}^+, 0) = a_{k+1}^+.$$

Caso 2: Suponha que $a \in M$. Como M satisfaz a condição (STC) existe um STC-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de a com seção S. Por hipótese o tubo é uma vizinhança de a, logo existe $\eta > 0$, tal que:

$$B(a,\eta) \subset F(L,[0,2\lambda]).$$

Denote por A_1 e A_2 os conjuntos:

$$A_1 = F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B(a,\eta) \;\text{ e }\; A_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B(a,\eta).$$

Temos dois casos a serem estudados: quando $a_n \in A_1$ para um quantidade infinita de índices e quando $a_n \in A_2$ para um quantidade infinita de índices. Sem perda de generalidade podemos supor que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A_1$ e que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A_2$. Suponha inicialmente que $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A_1$. Note que $\phi(a_n) \to 0$ e $I(a) \notin M$. Se $\bar{t} \neq \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(I(a)_j^+)$ para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ e $0 \leq \bar{t} < \phi(I(a))$ então

$$\widetilde{\pi}(a_n,t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(I(a),\bar{t}),$$

porém se $\bar{t} > \phi(I(a))$, então existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\bar{t} = \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(I(a)_j^+) + s$, onde $0 < s < \phi(I(a)_{k+1}^+)$. Assim, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n = \sum_{j=0}^{k+1} \phi((a_n)_j^+) + s_n,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \to s$. Pela continuidade de I temos $(a_n)_{k+1}^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (I(a))_k^+$ para $k \in \mathbb{Z}_+$, e

$$\widetilde{\pi}(a_n,t_n) = \pi((a_n)_{k+2}^+, s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi((I(a))_{k+1}^+, s).$$

Se $\bar{t} = \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(I(a)_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, também temos dois casos a serem considerados: quando $t_n \leq \bar{t}$ para um quantidade infinita de índices e quando $t_n > \bar{t}$ para um quantidade infinita de índices. Suponha que $t_n \leq \bar{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n = \sum_{j=0}^{k} \phi((a_n)_j^+) + s_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(I(a)_k^+)$. Então,

$$\widetilde{\pi}(a_n,t_n) = \pi((a_n)_{k+1}^+, s_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(I(a)_k^+, \phi(I(a)_k^+)) = I(a)_{k+1}.$$

Analogamente, podemos assumir que $t_n > \bar{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I(a)^+_{k+1}.$$

Suponha que $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset A_2$. Se $\bar{t} \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$ para $k \in \mathbb{Z}_+$, e $0 \leq \bar{t} < \phi(a)$ então,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a, \bar{t}).$$

Se $\bar{t} > \phi(a)$ então existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\bar{t} = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+) + s$, onde $0 < s < \phi(a^+_{k+1})$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a^+_{k+1}, s).$$

Caso $\bar{t} = \sum_{j=0}^{k} \phi(a_j^+)$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, também temos que considerar duas possibilidades. Primeiramente, sem perda de generalidade suponha que $t_n \leq \bar{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(a_k^+, \phi(a_k^+)) = a_{k+1}.$$

Se $t_n > \bar{t}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a^+_{k+1}.$$

Portanto, $\{\widetilde{\pi}(a_n, t_n)\}_{n \geq 1}$ é relativamente compacto, provando o lema. ■

Para demonstrar o próximo resultado vamos precisar do Lema 2.9 e da definição de medida de Kuratowski. Esta última pode ser encontrada no Apêndice.

Proposição 2.9. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio e relativamente compacto. Suponha que $I(M) \cap M = \emptyset$. Se $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e*

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in A} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{L}^+(A)) = 0,$$

então $\widetilde{\pi}^+(A) \subset X$ é relativamente compacto.

Prova: Como vale

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in A} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{L}^+(A)) = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $l = l(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{x \in A} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{L}^+(A)) < \varepsilon, \quad \forall t \geq l.$$

Ou seja,

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{L}^+(A)) < \varepsilon,$$

para todo $t \geq l$ e todo $x \in A$. Isso implica que

$$A_\varepsilon = \bigcup_{t \geq l} \widetilde{\pi}(A,t) \subset B(\widetilde{L}^+(A); \varepsilon).$$

Então,

$$\lambda(\widetilde{\pi}^+(A)) = \lambda(\widetilde{\pi}(A,[0,l]) \cup A_\varepsilon) = \max\{\lambda(\widetilde{\pi}(A,[0,l])); \lambda(\widetilde{\pi}(A_\varepsilon))\},$$

onde λ denota a medida de não-compacidade de Kuratowski. Pelo Lema 2.9, o conjunto $\widetilde{\pi}(A,[0,l])$ é relativamente compacto, logo $\lambda(\widetilde{\pi}(A,[0,l])) = 0$. Com isso,

$$\lambda(\widetilde{\pi}^+(A)) = \lambda(\widetilde{\pi}(A_\varepsilon)) \leq 2\varepsilon.$$

Portanto, $\lambda(\widetilde{\pi}^+(A)) = 0$ e $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. ■

CAPÍTULO 3

Sistemas semidinâmicos impulsivos dissipativos

Neste capítulo, estudamos sistemas semidinâmicos impulsivos dissipativos e alguns aspectos da sua teoria. Em [4], tal estudo é feito somente para sistemas sem ação impulsiva. Na primeira, segunda e terceira seção definimos dissipatividade, o centro de Levinson, variedade estável e alguns tipos de estabilidade. Na quarta seção, mostramos que o centro de Levinson é um atrator para a família de conjuntos compactos no espaço métrico X. Em seguida, na quinta seção, apresentamos o prolongamento do conjunto limite positivo impulsivo e o conjunto prolongado impulsivo e demonstramos, por exemplo, que tais conjuntos quando não intersectam M são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes. As duas últimas seções deste capítulo são dedicadas aos critérios de dissipatividade compacta e dissipatividade local. As princiais referências são [3] e [4].

Grande parte dos teoremas provados no Capítulo 2 sobre conjuntos limites tem por hipótese que $I(M) \cap M = \emptyset$. Devido a importância desta hipótese para garantir tais resultados, no que segue, vamos considerar

Hipótese $(\mathcal{H}3)$: $I(M) \cap M = \emptyset$.

Assim, as três hipóteses que vamos admitir válidas no decorrer do nosso estudo são:

($\mathcal{H}1$) para todo $x \in X$, $T(x) = +\infty$;

($\mathcal{H}2$) não existem pontos iniciais sobre M e todo ponto de M satisfaz a condição (STC);

($\mathcal{H}3$) $I(M) \cap M = \emptyset$.

3.1 Dissipatividade

Nesta seção, introduzimos o conceito de dissipatividade para um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ e estabelecemos relações entre alguns tipos de dissipatividade.

Definição 3.1. Seja $\mathbb{M}$ uma família de subconjuntos de X. Um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é dito $\mathbb{M}$-*dissipativo*, se existe $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $A \in \mathbb{M}$, existe $l = l(\varepsilon, A) > 0$ satisfazendo $\widetilde{\pi}(A, t) \subset B(K; \varepsilon)$, para todo $t \geq l$. Nestas condições dizemos que K é um *atrator* da família $\mathbb{M}$.

Em seguida vamos definir alguns tipos de dissipatividade que serão utilizadas neste trabalho.

Definição 3.2. Um sistema semidinâmico impulsivo, $(X, \pi; M, I)$, é chamado de

- *ponto dissipativo*, se existe um subconjunto $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para todo $x \in X$ vale o limite
$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), K) = 0;$$

- *compacto dissipativo*, se existe um subconjunto $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para todo $A \in \mathbb{K}(X)$ vale o limite
$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in A} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), K) = 0,$$
onde $\mathbb{K}(X)$ é a coleção de todos os conjuntos compactos em X;

- *localmente dissipativo*, se existe um subconjunto $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para todo $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ satisfazendo
$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{y \in B(x; \delta_x)} \rho(\widetilde{\pi}(y, t), K) = 0;$$

- *limitado dissipativo*, se existe um subconjunto $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para todo $A \in \mathbb{B}(X)$ vale
$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) = 0,$$
onde $\mathbb{B}(X)$ é a coleção de todos os conjuntos limitados em X.

Se o conjunto $K \subset X \backslash M$ é compacto na definição acima, dizemos que o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é *ponto* (*compacto*, *localmente* ou *limitado*) *k-dissipativo*.

Note que na Definição 3.2 estamos apenas especificando a família $\mathbb{M}$ da Definição 3.1, isto é, para $\mathbb{M} = \{\{x\} : x \in X\}$, $\mathbb{M} = \mathbb{K}(X)$, $\mathbb{M} = \{B(x; \delta_x) : x \in X\}$ ou $\mathbb{M} = \mathbb{B}(X)$ o sistema $(X, \pi; M, I)$ é ponto dissipativo, compacto dissipativo, localmente dissipativo ou limitado dissipativo, respectivamente. O lema abaixo, estabelece uma relação entre um sistema semidinâmico impulsivo localmente dissipativo e um sistema semidinâmico impulsivo compacto dissipativo.

Lema 3.1. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $(X, \pi; M, I)$ é localmente dissipativo, então é compacto dissipativo.*

Prova: Seja $K \subset X \backslash M$ limitado tal que para todo $x \in X$ e todo $\varepsilon > 0$ existem $\delta_x > 0$ e $l = l(x, \varepsilon) > 0$ tais que
$$\rho(\widetilde{\pi}(y,t), K) < \varepsilon, \tag{3.1}$$
para todo $t \geq l$ e todo $y \in B(x; \delta_x)$. Vamos provar que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto dissipativo. Dado $W \in \mathbb{K}(X)$ não vazio. Como $(X, \pi; M, I)$ é localmente dissipativo, então para todo $x \in W$ existem $\delta_x > 0$ e $l = l(x, \varepsilon) > 0$ tais que a equação (3.1) vale para todo $t \geq l$ e todo $y \in B(x; \delta_x)$. Seja $W \subset \bigcup\limits_{x \in W} B(x; \delta_x)$ uma cobertura aberta de W. Sendo W compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $W \subset \bigcup\limits_{1 \leq j \leq n} B(x_j; \delta_{x_j})$. Seja $L = \max\{l = l(x_j, \varepsilon) : 1 \leq j \leq n\} > 0$. Assim,
$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) < \varepsilon,$$
para todo $t \geq L$ e todo $x \in W$. Portanto, o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto dissipativo. ■

Note que $\mathbb{B}(X) \supset \{B(x;\delta_x) : x \in X\}$ e que $\mathbb{K}(X) \supset \{\{x\} : x \in X\}$. Usando o Lema 3.1 concluímos que:

limitado dissipativo $\Rightarrow$ localmente dissipativo $\Rightarrow$ compacto dissipativo $\Rightarrow$ ponto dissipativo.

3.2 O centro de Levinson

O objetivo desta seção é definir o centro de Levinson para um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Para tal finalidade, começamos mostrando uma outra forma de caracterização para o conjunto limite positivo impulsivo.

Lema 3.2. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio tal que $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. Se $A \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{L}^+(A) \subset A$ então*

$$\widetilde{L}^+(A) = \bigcap_{t \geq 0} \widetilde{\pi}(A, t).$$

Prova: Vamos começar fazendo a seguinte observação: como $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto por hipótese, usando a Proposição 2.8, segue que A também é relativamente compacto. Dado $y \in \bigcap_{t \geq 0} \widetilde{\pi}(A, t)$, então $y \in \widetilde{\pi}^+(A, t)$ para todo $t \geq 0$. Em particular, $y \in \widetilde{\pi}(A, n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in A$ e $t_n = n$ tais que $y = \widetilde{\pi}(x_n, t_n)$. Daí, $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$ com $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$. Portanto, $y \in \widetilde{L}^+(A)$ e, logo, $\bigcap_{t \geq 0} \widetilde{\pi}(A, t) \subset \widetilde{L}^+(A)$. Provemos a outra inclusão. Sejam $w \in \widetilde{L}^+(A)$ e $t \geq 0$ quaisquer. Vamos mostrar que $w = \widetilde{\pi}(x, t)$ para algum $x \in A$. De fato, de $w \in \widetilde{L}^+(A)$, existem $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset A$ e $\{s_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, com $s_n \to +\infty$, tais que $\widetilde{\pi}(w_n, s_n) \to w$. Como $s_n \to +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > t$, para todo $n > n_0$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(w_n, s_n - t) \in \widetilde{\pi}^+(A),$$

para todo $n > n_0$. Por hipótese, $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto, logo, a menos de uma subsequência, podemos supor que

$$\widetilde{\pi}(w_n, s_n - t) \to p \in \overline{\widetilde{\pi}^+(A)}.$$

Usando o fato que $s_n - t \to +\infty$, concluímos que $p \in \widetilde{L}^+(A)$. Novamente, por hipótese, temos $\widetilde{L}^+(A) \subset A$ e $A \cap M = \emptyset$, logo, $\widetilde{L}^+(A) \cap M = \emptyset$. Pelo Lema 2.8, $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente

$\widetilde{\pi}$-invariante. Assim, $\widetilde{\pi}(a,t) = \pi(a,t)$ para todo $a \in \widetilde{L}^+(A)$ e todo $t \geq 0$, isto é, $\phi(a) = +\infty$ para todo $a \in \widetilde{L}^+(A)$. Juntando estas informações com o Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(w_n, s_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(w_n, s_n - t), t) \to \widetilde{\pi}(p, t).$$

Por outro lado, $\widetilde{\pi}(w_n, s_n) \to w$. Logo, $w = \widetilde{\pi}(p,t) \in \widetilde{\pi}(A,t)$. Sendo $t \geq 0$ arbitrário, concluímos que $w \in \bigcap\limits_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(A,t)$. Portanto, $\widetilde{L}^+(A) \subset \bigcap\limits_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(A,t)$ e segue o resultado. ■

Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e $K \subset X$ não vazio, compacto, $K \cap M = \emptyset$, e K um atrator para $\mathbb{K}(X)$, isto é, para todo $A \in \mathbb{K}(X)$ vale

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) = 0. \tag{3.2}$$

Pelo Teorema 2.7, $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{L}^+(A)) = 0.$$

Usando a Proposição 2.9, $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. Escolhendo $A = K$ em (3.2) temos $\widetilde{L}^+(K) \subset K$ e $\widetilde{\pi}^+(K)$ é relativamente compacto. Pelo Lema 3.2, segue que

$$\widetilde{L}^+(K) = \bigcap_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(K,t).$$

Vamos denotar

$$\widetilde{L}^+(K) = J.$$

Lema 3.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e $K \subset X$ não vazio, compacto, $K \cap M = \emptyset$, e atrator para $\mathbb{K}(X)$. Então, para todo $A \in \mathbb{K}(X)$:*

(a) $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e compacto;

(b) $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), \widetilde{L}^+(A)) = 0$;

(c) $\widetilde{L}^+(A) \subset K$;

(d) $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto.

Prova: Dado $A \in \mathbb{K}(X)$. Como K é um atrator para $\mathbb{K}(X)$ vale o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t),K) = 0. \tag{3.3}$$

Assim, pelo Teorema 2.7, $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in A} \rho(\widetilde{\pi}(x,t),\widetilde{L}^+(A)) = 0.$$

Então pela Proposição 2.9, podemos concluir que $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. Vamos demonstrar que $\widetilde{L}^+(A) \subset K$. De fato, dado $a \in \widetilde{L}^+(A)$, existem sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(a_n,t_n) \to a$. Por (3.3), dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(y,t),K) < \varepsilon,$$

para todo $y \in A$ e todo $t \geq T$. Sendo $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ podemos escrever

$$\rho(\widetilde{\pi}(a_n,t),K) < \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \geq T$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq T$ para todo $n \geq n_0$. Daí,

$$\rho(\widetilde{\pi}(a_n,t_n),K) < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Isso implica que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(a_n,t_n),K) = 0. \tag{3.4}$$

Como K é compacto, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\widetilde{\pi}(a_n,t_n) \to b \in K$. Pela unicidade do limite, $a = b$. Portanto, $a \in K$ e $\widetilde{L}^+(A) \subset K$. Por hipótese $K \cap M = \emptyset$, logo, $\widetilde{L}^+(A) \cap M = \emptyset$. Pelo Lema 2.8, $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante finalizando a prova do lema. ■

No próximo lema, vamos provar que num sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X,\pi;M,I)$, o conjunto limite positivo impulsivo de dois compactos, não vazios que não interceptam M e são atratores da família $\mathbb{K}(X)$ coincidem. Isto é, que o conjunto J está bem definido.

Lema 3.4. *O conjunto J não depende da escolha do conjunto $W \subset X$, onde W é não vazio, compacto, $W \cap M = \emptyset$ e W é um atrator da família $\mathbb{K}(X)$.*

Prova: Seja $K_1 \subset X$ não vazio, compacto com $K_1 \cap M = \emptyset$ e atrator da família $\mathbb{K}(X)$. Vamos provar que $\widetilde{L}^+(K_1) = J = \widetilde{L}^+(K)$. Pelo Lema 3.3,

$$\widetilde{L}^+(K_1) \subset K_1, \quad \widetilde{L}^+(K) \subset K, \quad \widetilde{L}^+(K_1) \subset K \text{ e } \widetilde{L}^+(K) \subset K_1. \tag{3.5}$$

Afirmamos que $\widetilde{L}^+(K) \subset \widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K), t)$ para todo $t \geq 0$. De fato, dados $y \in \widetilde{L}^+(K)$ e $t \geq 0$, existem $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset K$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \to +\infty$, tais que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$, $\forall n > n_0$. Assim, $\widetilde{\pi}(x_n, t_n - t) \in \widetilde{\pi}^+(K)$, $\forall n > n_0$. Sendo $\widetilde{\pi}^+(K)$ relativamente compacto pelo Lema 3.3, podemos supor que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n - t) \to b \in \overline{\widetilde{\pi}^+(K)}$. Como $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset K$ e $t_n - t \to +\infty$, então $b \in \widetilde{L}^+(K)$. Novamente, usando o Lema 3.3, $\widetilde{L}^+(K)$ é não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e $\widetilde{L}^+(K) \cap M = \emptyset$. Então, $\widetilde{\pi}(a, s) = \pi(a, s) \in \widetilde{L}^+(K)$ para todo $a \in \widetilde{L}^+(K)$ e todo $s \geq 0$. Pelo Lema 2.6, concluímos que

$$\widetilde{\pi}(x_n, t_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, t_n - t), t) \to \widetilde{\pi}(b, t).$$

Então, $y = \widetilde{\pi}(b, t) \in \widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K), t)$ finalizando a demonstração da afirmação. Analogamente, provamos que $\widetilde{L}^+(K_1) \subset \widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K_1), t)$, $\forall t \geq 0$. Usando (3.5), $\widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K), t) \subset \widetilde{\pi}(K_1, t)$, $\forall t \geq 0$. Como $\widetilde{L}^+(K) \subset \widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K), t)$, $\forall t \geq 0$, então

$$\widetilde{L}^+(K) \subset \bigcap_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(K), t) \subset \bigcap_{t\geq 0} \widetilde{\pi}(K_1, t) = \widetilde{L}^+(K_1).$$

Analogamente, provamos que $\widetilde{L}^+(K_1) \subset \widetilde{L}^+(K)$. Portanto, o resultado é válido. ∎

Motivados pelo Lema 3.4 vamos fazer a seguinte definição.

Definição 3.3. Seja $K \subset X$ não vazio, compacto, com $K \cap M = \emptyset$, e atrator da família $\mathbb{K}(X)$. O conjunto $J = \widetilde{L}^+(K)$ é chamado de *centro de Levinson* do sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X, \pi; M, I)$.

Vamo provar que o sistema (2.2) do Exemplo 2.4 não pode ser ponto k-dissipativo.

Exemplo 3.1. Considere o sistema impulsivo em $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 0, \\ I : M \to N, \end{cases} \tag{3.6}$$

com M, N e I definidos no Exemplo 2.4. Já foi visto que, $\widetilde{L}^+(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 3],\ y = 0\}$. Se o sistema (3.6) é ponto k-dissipativo, então existe $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto, com $K \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), K) = 0, \ \ \forall x \in X.$$

Em particular,

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(p, t), K) = 0.$$

Isso implica que, $K \cap M \neq \emptyset$ já que $\widetilde{L}^+(p) \cap M \neq \emptyset$ e $\widetilde{L}^+(p) \subset K$. Portanto, o sistema (3.6) não é ponto k-dissipativo.

3.3 Variedade estável e estabilidade

Nesta seção, introduzimos a definição de variedade estável e de alguns tipos de estabilidade como orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{\pi}$-atrator para sistemas semidinâmicos impulsivos. Provamos que a variedade estável é não vazia, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e aberta.

Definição 3.4. Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$. O conjunto $\widetilde{W}^s(A) = \{x \in X : \lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), A) = 0\}$ é chamado de *variedade estável* de A.

O lema abaixo garante que a variedade estável é não vazia.

Lema 3.5. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Se $A \subset X$ é não vazio e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, então $\widetilde{W}^s(A)$ é não vazio.*

Prova: Seja $x \in A$. Como A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, então $\widetilde{\pi}(x, t) \in A$ para todo $t \geq 0$. Assim, $\rho(\widetilde{\pi}(x, t), A) = 0$, $\forall t \geq 0$. Daí,

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), A) = 0 \Rightarrow x \in \widetilde{W}^s(A) \Rightarrow \widetilde{W}^s(A) \neq \emptyset.$$

■

Vamos mostrar, agora, que a variedade estável é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Lema 3.6. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A\subset X$ não vazio e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Então, $\widetilde{W}^s(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Pelo Lema 3.5, $\widetilde{W}^s(A)\neq\emptyset$. Dados $x\in\widetilde{W}^s(A)$, $\gamma>0$ e $\varepsilon>0$ quaisquer. Existe $l=l(\varepsilon,x)>0$ tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t),A)<\varepsilon,\ \ \forall t\geq l.$$

Assim,

$$\rho(\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x,\gamma),t),A)=\rho(\widetilde{\pi}(x,\gamma+t),A)<\varepsilon,\ \forall t\geq\max\{0;l-\gamma\}.$$

Isso implica que

$$\widetilde{\pi}(x,\gamma)\in\widetilde{W}^s(A)\Rightarrow\widetilde{\pi}^+(x)\subset\widetilde{W}^s(A)\Rightarrow\widetilde{\pi}^+(\widetilde{W}^s(A))\subset\widetilde{W}^s(A).$$

Portanto, a variedade estável é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. ■

Na próxima definição introduziremos alguns tipos de estabilidade que serão utilizadas neste trabalho.

Definição 3.5. Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A\subset X$. Dizemos que:

(1) A é *orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável*, se dado $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $\rho(x,A)<\delta$ implica que $\rho(\widetilde{\pi}(x,t),A)<\varepsilon$, $\forall t\geq 0$;

(2) A é *$\widetilde{\pi}$-atrator*, se existe $\gamma>0$ tal que $B(A;\gamma)\subset\widetilde{W}^s(A)$;

(3) A é *assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável*, se é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{\pi}$-atrator;

(4) A é *globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável*, se é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{W}^s(A)=X$;

(5) A é *uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator*, se existe $\gamma>0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in B(A;\gamma)}\rho(\widetilde{\pi}(x,t),A)=0.$$

No próximo teorema vamos apresentar condições suficientes para que a variedade estável seja abeta em X.

Teorema 3.1. *Seja $A \subset X$ um conjunto não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável no sistema impulsivo $(X, \pi; M, I)$. Suponha que $\widetilde{W^s}(A)$ é I-invariante. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(a) $\widetilde{W^s}(A)$ é aberto em X;

(b) O limite

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(K, t), A) = 0, \tag{3.7}$$

vale para todo $K \subset \widetilde{W^s}(A)$ compacto, onde $\beta(A, B) := \sup_{a \in A} \{\rho(a, B)\}$, para $A, B \in \mathbb{B}(X)$.

Prova: (a) Como A é $\widetilde{\pi}$-atrator, existe $\gamma > 0$ tal que $B(A; \gamma) \subset \widetilde{W^s}(A)$. Assim, é suficiente provar que para cada $x \in \widetilde{W^s}(A) \backslash B(A; \gamma)$ existe $\delta_x > 0$ tal que $B(x; \delta_x) \subset \widetilde{W^s}(A)$. Sejam $x \in \widetilde{W^s}(A) \backslash B(A; \gamma)$ e $0 < \varepsilon < \gamma$. Sendo A orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}^+(B(A; \delta), [0, +\infty)) \subset B(A; \varepsilon)$. Usando que $x \in \widetilde{W^s}(A)$, existe $t_1 = t_1(x; \varepsilon) > 0$ com $t_1 \neq \sum_{j=1}^{k} \phi(x_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(x, t_1) \in B(A; \delta)$. Então, existe $v > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v) \subset B(A; \delta)$. Vamos considerar dois casos: quando $x \notin M$ e quando $x \in M$. Suponha que $x \notin M$. Pela continuidade de π e I, existe $v_1 > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x; v_1), t_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v) \subset B(A; \delta).$$

Usando que A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, segue que $\widetilde{\pi}(B(x; v_1), t) \subset B(A; \varepsilon)$, $\forall t \geq t_1$. Portanto, $B(x; v_1) \subset \widetilde{W^s}(A)$.

Agora, suponha que $x \in M$. Como M satisfaz a condição (STC), existe um STC-tubo $F(L, [0, 2\lambda])$ através de x dada pela seção S. Sendo $F(L, [0, 2\lambda])$ uma vizinhança de x, existe $\eta > 0$ tal que $B(x; \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Sejam

$$H_1 = F(L, (\lambda, 2\lambda]) \cap B(x; \eta) \text{ e } H_2 = F(L, [0, \lambda]) \cap B(x; \eta).$$

Pela continuidade de π e I, existe $\eta_1 > 0$, $\eta_1 < \eta$, tal que $\widetilde{\pi}(B(x; \eta_1) \cap H_2, t_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v) \subset B(A; \delta)$. Por outro lado, note que $I(x) \in \widetilde{W^s}(A) \backslash M$ já que $I(\widetilde{W^s}(A) \cap M) \subset \widetilde{W^s}(A)$ e $I(M) \cap M = \emptyset$. Assim, existe $t_2 = t_2(x; \varepsilon) > 0$ com $t_2 \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(I(x)_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(I(x), t_2) \in B(A;\delta)$. Então, existe $v_2 > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(I(x), t_2); v_2) \subset B(A;\delta)$. Novamente, pela continuidade de π e de I, existe $\eta_2 > 0$, $\eta_2 < \eta$, tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_2) \cap H_1, t_2) \subset B(\widetilde{\pi}(I(x), t_2); v_2) \subset B(A;\delta).$$

Escolhendo $\eta_3 > 0$, $\eta_3 < \min\{\eta_1;\eta_2\}$, e usando que A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável obtemos que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_3), t) \subset B(A;\varepsilon),$$

para todo $t \geq \max\{t_1; t_2\}$. Concluímos que $B(x;\eta_3) \subset \widetilde{W}^s(A)$. Portanto, $\widetilde{W}^s(A)$ é aberto em X.

(b) Sendo A $\widetilde{\pi}$-atrator, existe $\gamma > 0$ tal que $B(A;\gamma) \subset \widetilde{W}^s(A)$. Sejam $0 < \varepsilon < \gamma$, e K um conjunto compacto em $\widetilde{W}^s(A)$. Sendo A orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}^+(B(A;\delta), [0,+\infty)) \subset B(A;\varepsilon)$. Dado $x \in K$, existe $h_1 = h_1(x,\varepsilon) > 0$, com $h_1 \neq \sum_{j=1}^{k} \phi(x_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(x, h_1) \in B(A;\delta)$. A partir deste momento, seguimos os mesmos passos da demonstração do item (a) para obter $r = r(x,\varepsilon) > 0$ e $T = T(x,\varepsilon) > 0$ tais que $\widetilde{\pi}(B(x;r), t) \subset B(A;\varepsilon)$, $\forall t \geq T$. Considere a cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x; r(x,\varepsilon))$. Extraindo uma subcobertura finita, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; r(x_i,\varepsilon))$. Seja $L = \max\{T(x_i,\varepsilon) : 1 \leq i \leq n\}$. Então, $\pi(K,t) \subset B(A;\varepsilon)$, $\forall t \geq L$, isto é, vale o limite (3.7). Portanto, o resultado é válido. ■

Se A é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável no Teorema 3.1, podemos omitir a hipótese da variedade estável do conjunto A ser I-invariante. Este é o Corolário 3.1.

Corolário 3.1. *Seja $A \subset X$ não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável. Então, $\widetilde{W}^s(A)$ é aberto em X e o limite*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(K,t), A) = 0,$$

vale para todo conjunto $K \subset X$ compacto.

Prova: Pela definição de globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável, $\widetilde{W}^s(A) = X$. Logo, $\widetilde{W}^s(A) \cap M = X \cap M = M$. Isso implica que $I(\widetilde{W}^s(A) \cap M) = I(M) \subset X = \widetilde{W}^s(A)$. Portanto, o resultado segue do Teorema 3.1. ■

O lema abaixo tem um papel importante no Capítulo 4 quando falarmos sobre conexidade do centro de Levinson.

Lema 3.7. *Sejam* $(X, \pi; M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo e* $Y, Z \subset \mathbb{K}(X)$ *não vazios. Então,*

(a) $Y \cap Z \neq \emptyset$ *sempre que* $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) \neq \emptyset$*;*

(b) $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) = \emptyset$ *sempre que* $Y \cap Z = \emptyset$*;*

(c) Se Y *e* Z *são* $\widetilde{\pi}$*-atratores e* $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) = \emptyset$*, então* $Y \cap Z = \emptyset$*;*

(d) Se Y *e* Z *são* $\widetilde{\pi}$*-atratores e* $Y \cap Z \neq \emptyset$*, então* $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) \neq \emptyset$*.*

Prova: (a) Suponha que $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) \neq \emptyset$. Vamos provar que $Y \cap Z \neq \emptyset$. Seja $x \in X$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), Y) = 0 = \lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), Z). \tag{3.8}$$

Considere a sequência $t_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por (3.8),

$$\lim_{n \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t_n), Y) = 0 = \lim_{n \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t_n), Z).$$

Como Y é compacto, existe uma sequência $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset Y$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x, t_n), Y) = \rho(\widetilde{\pi}(x, t_n), x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos considerar que $x_{n_k} \overset{k \to +\infty}{\to} w \in Y$, para alguma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$. Assim, $\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}) \overset{k \to +\infty}{\to} w \in Y$. Note que

$$\lim_{k \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}), Z) = 0,$$

pois $t_{n_k} = n_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k \overset{k \to +\infty}{\to} +\infty$ e $x \in \widetilde{W}^s(Z)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $z_k \in Z$ tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}), Z) = \rho(\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}), z_k),$$

pela compacidade de Z. Daí

$$\rho(z_k, w) \leq \rho(z_k, \widetilde{\pi}(x, t_{n_k})) + \rho(\widetilde{\pi}(x, t_{n_k}), w).$$

Isso implica que $w \in Z$. Portanto, $Y \cap Z \neq \emptyset$.

(b) Para provar este item basta notar que (b) é a contrapositiva de (a).

(c) Se Y e Z são $\widetilde{\pi}$-atratores, então existem $\gamma_Y > 0$ e $\gamma_Z > 0$ tais que $B(Y;\gamma_Y) \subset \widetilde{W}^s(Y)$ e $B(Z;\gamma_Z) \subset \widetilde{W}^s(Y)$. Como, por hipótese, $\widetilde{W}^s(Y) \cap \widetilde{W}^s(Z) = \emptyset$, segue que $B(Y;\gamma_Y) \cap B(Z;\gamma_Z) = \emptyset$. Portanto, $Y \cap Z = \emptyset$.

(d) Usando a hipótese de Y e Z serem $\widetilde{\pi}$-atratores temos, $Y \subset \widetilde{W}^s(Y)$ e $Z \subset \widetilde{W}^s(Z)$. De $Y \cap Z \neq \emptyset$, concluímos a prova deste item e do lema. ■

3.4 J é um atrator

Nesta seção vamos provar que o centro de Levinson de um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo é um atrator da família $\mathbb{K}(X)$. Além disso, definimos as famílias $\mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$ e $\mathbb{K}_{GA}(X)$ e mostramos que tais famílias coincidem com respeito a interseção de todos seus elementos.

O Teorema 3.2, abaixo, mostra que em um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo, o centro de Levinson J, é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$, entre outras propriedades. No Apêndice C, mostramos que na demonstração do item (b) podemos escolher a sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \to +\infty$.

Teorema 3.2. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e J o seu centro de Levinson. Então,*

(a) *J é um conjunto compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante em X;*

(b) *J é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável;*

(c) *J é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$;*

(d) *J é o maior conjunto compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante em X tal que $J \subset \widetilde{\pi}(J, t)$, para todo $t \geq 0$.*

Prova: Seja $K \subset X$ não vazio , compacto, $K \cap M = \emptyset$, e atrator para a família $\mathbb{K}(X)$.

(a) Pelo Lema 3.4, $J = \widetilde{L}^+(K)$. Assim, usando o Lema 3.3, $J = \widetilde{L}^+(K)$ é não vazio, compacto, e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

(b) Suponha por absurdo, que J não seja orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Assim, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\delta_n > 0$, $x_n \in B(J;\delta_n)$ e $t_n \in \mathbb{R}_+$ tais que $\delta_n \to 0$, $t_n \to +\infty$ e

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), J) \geq \varepsilon_0.$$

Como $x_n \in B(J;\delta_n)$, $\delta_n \to 0$ e J é compacto, podemos supor sem perda de generalidade, que $x_n \to \overline{x} \in J$. Seja $A = \{\overline{x}, x_1, x_2, \ldots\}$. Note que A é compacto. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B(K;\varepsilon) \cap M = \emptyset$. Da hipótese do sistema ser compacto k-dissipativo, existe $l = l(A, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\overline{\widetilde{\pi}(A, t)} \subset B(K;\varepsilon),\ \forall t \geq l.$$

Seja $B = \overline{\widetilde{\pi}^+(\widetilde{\pi}(A, l))}$. Pelo Teorema 2.7, $\widetilde{\pi}(A)$ é relativamente compacto. Logo, B é compacto. Além disso, $B \cap M = \emptyset$ uma vez que $B \subset B(K;\varepsilon)$. Seja $K' = K \cup B$. Assim, $\widetilde{L}^+(B) \subset \widetilde{L}^+(K') = J$ e, sendo K um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$, então K' também é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$, e $K' \cap M = \emptyset$. Pelo Lema 3.4, $\widetilde{L}^+(K') = J = \widetilde{L}^+(K)$. Usando a compacidade de B e que $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n \geq l} \subset B$, podemos supor sem perda de generalidade, que $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \widetilde{\pi}(x_n, t_n)$. Então,

$$p = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{\pi}(x_n, t_n) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, l), t_n - l).$$

Logo, $p \in \widetilde{L}^+(B) \subset \widetilde{L}^+(K') = J$. Por outro lado,

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), J) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow \rho(p, J) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow p \notin J,$$

o que é uma contradição. Portanto, J é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável.

(c) Dado $A \in \mathbb{K}(X)$ qualquer. Pelo Lema 3.3, $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. Além disso, $\widetilde{L}^+(A) \subset K$ e $K \cap M = \emptyset$. Daí, $\widetilde{L}^+(A) \cap M = \emptyset$ e sendo $\widetilde{L}^+(A)$ compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(\widetilde{L}^+(A);\varepsilon) \cap M = \emptyset.$$

Segue do item (b) do Lema 3.3 que para $0 < \gamma < \varepsilon$, existe $l = l(\gamma) > 0$ tal que

$$\overline{\widetilde{\pi}(A, t)} \subset B(\widetilde{L}^+(A);\gamma),\ \forall t \geq l. \tag{3.9}$$

Seja $B = \overline{\widetilde{\pi}^+(\widetilde{\pi}(A, l))}$. Assim, $B \cap M = \emptyset$ e $B \subset \overline{\widetilde{\pi}^+(A)}$. Logo, B é compacto. Defina $K' = K \cup B$. Então, K' é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$ e $K' \cap M = \emptyset$. Isso implica que

$\widetilde{L}^+(K') = \widetilde{L}^+(K) = J$ e $\widetilde{L}^+(B) \subset \widetilde{L}^+(K') = J$. Afirmamos que $\widetilde{L}^+(A) \subset \widetilde{L}^+(B)$. De fato, dado $z \in \widetilde{L}^+(A)$, existem sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $t_n \to +\infty$ tais que

$$\widetilde{\pi}(a_n, t_n) \to z.$$

Isso implica que,

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(a_n, l), t_n - l) \to z.$$

Como $\widetilde{\pi}(a_n, l) \in \widetilde{\pi}(A, l)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $t_n - l \to +\infty$, então $z \in \widetilde{L}^+(B)$. Logo, $\widetilde{L}^+(A) \subset \widetilde{L}^+(B)$ e $\widetilde{L}^+(A) \subset J$. Por (3.9),

$$\beta(\widetilde{\pi}(A,t), J) \leq \beta(\widetilde{\pi}(A,t), \widetilde{L}^+(A)) < \gamma, \ t \geq l.$$

Daí,

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), J) = 0.$$

Portanto, J é um atrator da família $\mathbb{K}(X)$.

(d) Seja $J' \subset X$ um conjunto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e compacto tal que $J' \subset \widetilde{\pi}(J', t)$, $\forall t \geq 0$. Sendo J' positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, então $\widetilde{\pi}(J', t) \subset J'$, $\forall t \geq 0$. Daí, $J' = \widetilde{\pi}(J', t)$, $\forall t \geq 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $l_n > 0$ tal que

$$J' = \widetilde{\pi}(J', t) \subset B\left(J; \frac{1}{n}\right) \subset \overline{B\left(J; \frac{1}{n}\right)}, \ \forall t \geq l_n \Rightarrow J' \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B\left(J; \frac{1}{n}\right)} = J.$$

Portanto, o resultado segue. ■

Seja $\mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$ a família de todos os conjuntos não vazios, compactos, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e atratores da família $\mathbb{K}(X)$ em X. Suponha que $K \cap M = \emptyset$, $\forall K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$. A próxima proposição mostra que em um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo o menor conjunto não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e atrator da família $\mathbb{K}(X)$ é o centro de Levinson.

Proposição 3.1. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e J o seu centro de Levinson. Então,*

$$J = \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)\}.$$

Prova: Como $J = \widetilde{L}^+(K) \subset K$, $\forall K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$, então

$$J \subset \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)\}.$$

Por outro lado, pelo do Teorema 3.2, segue que $J \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)$. Portanto,

$$J = \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)\}.$$

■

Seja $\mathbb{K}_{GA}(X)$ a família de todos os conjuntos não vazios, compactos, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estáveis em X. Assuma que $K \cap M = \emptyset$, $\forall K \in \mathbb{K}_{GA}(X)$. Assim, como na Proposição 3.1, vamos mostrar que J o menor conjunto não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável do sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X, \pi; M, I)$.

Proposição 3.2. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e J o seu centro de Levinson. Então,*

$$J = \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{GA}(X)\}. \tag{3.10}$$

Prova: Dado $H \in \mathbb{K}_{GA}(X)$, pelo Corolário 3.1, H é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$. Isso implica que

$$J = \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)\} \subset \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{GA}(X)\}.$$

Por outro lado, $J \in \mathbb{K}_{GA}(X)$ uma vez que o sistema é compacto k-dissipativo. Então, $\bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{GA}(X)\} \subset J$. Portanto, a igualdade (3.10) é válida. ■

Decorre das Proposições 3.1 e 3.2 o seguinte corolário.

Corolário 3.2. *Em um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X, \pi; M, I)$, vale a igualdade*

$$\bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{\widetilde{\pi}}(X)\} = \bigcap \{K : K \in \mathbb{K}_{GA}(X)\}.$$

Teorema 3.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e $K \subset X$ não vazio, compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Suponha que $K \subset \widetilde{\pi}(K, t)$, $\forall t \geq 0$, e $K \cap M = \emptyset$. Então, são equivalentes:*

(a) K é o centro de Levinson de $(X,\pi;M,I)$;

(b) K é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável;

(c) K é o maior compacto positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante tal que $K\subset\widetilde{\pi}(K,t)$, para todo $t\geq 0$.

Prova: Note que $(a)\Leftrightarrow(c)$ pelo Teorema 3.2. $(a)\Rightarrow(b)$ Diretamente da hipótese do sistema ser compacto k-dissipativo. $(b)\Rightarrow(a)$ Suponha que K é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável. Assim, $K\in\mathbb{K}_{GA}(X)$ e pela Proposição 3.2, segue que

$$J=\bigcap\{H:H\in\mathbb{K}_{GA}(X)\}\subset K.$$

Por outro lado, sendo K um atrator de compactos de X, então

$$J=\bigcap_{t\geq 0}\widetilde{\pi}(K,t).$$

Por hipótese, $K\subset\widetilde{\pi}(K,t)$, $t\geq 0$. Logo, $K\subset J$. Portanto, $K=J$. ■

3.5 Os conjuntos $\widetilde{J}^{+}(A)$ e $\widetilde{D}^{+}(A)$

Nesta seção, definimos os conjuntos Ω, $\widetilde{J}^{+}(A)$ e $\widetilde{D}^{+}(A)$, $A\subset X$. Provamos que se $A\subset X$ é compacto, então $\widetilde{J}^{+}(A)=\bigcup_{a\in A}\widetilde{J}^{+}(a)$ e $\widetilde{D}^{+}(A)=\bigcup_{a\in A}\widetilde{D}^{+}(a)$. Além disso, mostramos que para um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X,\pi;M,I)$, vale $\widetilde{J}^{+}(\Omega)=J=\widetilde{D}^{+}(\Omega)$.

Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo, defina o seguinte conjunto

$$\Omega:=\overline{\bigcup_{x\in X}\widetilde{L}^{+}(x)}.$$

Vamos provar que $\Omega\subset J$ para um sistema compacto k-dissipativo.

Proposição 3.3. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e J o centro de Levinson. Então,*

$$\Omega\subset J.$$

Prova: Dado $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t), J) \leq \frac{1}{n}, \ \ \forall t \geq t_n.$$

Isso implica que

$$\widetilde{\pi}(x,t) \in \overline{B\left(J; \frac{1}{n}\right)}, \ \ \forall t \geq t_n \Rightarrow \overline{\{\widetilde{\pi}(x,t)\}}_{t \geq t_n} \subset \overline{B\left(J; \frac{1}{n}\right)}.$$

Uma vez que $\widetilde{L}^+(x) \subset \overline{\{\widetilde{\pi}(x,t)\}}_{t \geq t_n}$, então $\widetilde{L}^+(x) \subset \overline{B(J; \frac{1}{n})}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\widetilde{L}^+(x) \subset \bigcap_{n \geq 1} \overline{B\left(J; \frac{1}{n}\right)} = J.$$

Daí,

$$\Omega \subset J.$$

$\blacksquare$

Na próxima proposição vamos mostrar que Ω é compacto para um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo.

Proposição 3.4. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo, então Ω é compacto.*

Prova: Seja $K \subset X$ compacto, $K \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), K) = 0, \ \ \forall x \in X.$$

Dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $l = l(x, \varepsilon) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(x,t) \in B(K; \frac{\varepsilon}{2})$, $\forall t \geq l$. Isso implica que

$$\widetilde{L}^+(x) \subset B(K; \varepsilon) \subset \overline{B(K; \varepsilon)}.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ qualquer, segue que

$$\widetilde{L}^+(x) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{B(K; \varepsilon)} = K.$$

Assim, $\Omega \subset K$ com K compacto. Portanto, Ω é compacto. $\blacksquare$

Na Definição 2.13 introduzimos o prolongamento do conjunto limite positivo impulsivo e o conjunto prolongado impulsivo para pontos em X. No que segue, estendemos estes conceitos para subconjuntos de X.

Definição 3.6. Dado $A \subset X$. O *prolongamento do conjunto limite positivo impulsivo* de A é

$$\widetilde{J}^+(A) = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{\tau\geq t}\widetilde{\pi}(B(A;\varepsilon),\tau)}.$$

O *conjunto prolongado impulsivo* de A é

$$\widetilde{D}^+(A) = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\bigcup_{t\geq 0}\widetilde{\pi}(B(A;\varepsilon),t)}.$$

Quando $A = \{x\}$, então $\widetilde{J}^+(A) = \widetilde{J}^+(x)$ e $\widetilde{D}^+(A) = \widetilde{D}^+(x)$, coincidindo com a Definição 2.13.

No próximo lema obteremos uma caracterização dos conjuntos $\widetilde{J}^+(A)$ e $\widetilde{D}^+(A)$ através de sequências e provaremos que tais conjuntos são fechados e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes.

Lema 3.8. *Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. As afirmações são válidas:*

(a) *$y \in \widetilde{J}^+(A)$ se, e somente se, existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\rho(x_n, A) \to 0$, $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$;*

(b) *$y \in \widetilde{D}^+(A)$ se, e somente se, existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\rho(x_n, A) \to 0$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$;*

(c) *os conjuntos $\widetilde{J}^+(A)$ e $\widetilde{D}^+(A)$ são fechados;*

(d) *se $\widetilde{J}^+(A) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{J}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante;*

(e) *se $\widetilde{D}^+(A) \cap M = \emptyset$, então $\widetilde{D}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.*

Prova: Os itens (a) e (b) seguem o mesmo raciocínio da demonstração do Lema 2.7. O item (c) é uma consequência da definição dos conjuntos $\widetilde{J}^+(A)$ e $\widetilde{D}^+(A)$. Os itens (d) e (e) seguem as mesmas idéias do Teorema 2.5. ■

A proposição abaixo mostra que Ω é não vazio e, consequentemente, $\widetilde{D}^+(\Omega) \neq \emptyset$ em um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo.

Proposição 3.5. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo, então $\Omega \neq \emptyset$ e $\widetilde{D}^+(\Omega) \neq \emptyset$.*

Prova: De fato, dado $x \in X$. Usando o Teorema 2.7 e o fato de que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo temos $\widetilde{L}^+(x) \neq \emptyset$. Assim, $\widetilde{L}^+(x) \subset \Omega \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$ implica que $\Omega \neq \emptyset$ e $\widetilde{D}^+(\Omega) \neq \emptyset$. ■

Lema 3.9. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo, então:*

(a) $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \subset \widetilde{D}^+(x)$, $\forall x \in X$;

(b) $\widetilde{D}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cup \widetilde{J}^+(x)$, $\forall x \in X \backslash M$;

(c) $\overline{\widetilde{\pi}^+(I(x))} \subset \widetilde{D}^+(x)$, $\forall x \in M$;

(d) $\widetilde{D}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cup \overline{\widetilde{\pi}^+(I(x))} \cup \widetilde{J}^+(x)$, $\forall x \in M$.

Prova: (a) Dado $y \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$, existe $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\widetilde{\pi}(x, t_n) \to y$. Considere a sequência $\{x_n = x\}_{n\geq 1} \subset X$. Assim, $\rho(x_n, x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\widetilde{\pi}(x_n, t_n) = \widetilde{\pi}(x, t_n) \to y.$$

Portanto, $y \in \widetilde{D}^+(x)$.

(b) Dado $x \in X \backslash M$. Pelo Lema 3.8, segue que $\widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(x)$. Daí, $\widetilde{\pi}^+(x) \cup \widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(x)$. Dado $z \in \widetilde{D}^+(x)$, existem $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ tais que $\rho(x_n, x) \to 0$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to z$. Se $t_n \to +\infty$, então $z \in \widetilde{J}^+(x)$ e nada temos a provar. Suponha que $t_n \leq T$ para algum $T > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, T]$, obtemos uma subsequência convergente $t_{n_s} \to \bar{t} \in [0, T]$. Usando o fato que $x \notin M$, e adaptando a demonstração do Lema 2.9, Caso 1, concluímos que $\{\widetilde{\pi}(x_{n_s}, t_{n_s})\}_{s\geq 1}$ converge para um ponto de $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)}$. Portanto, $z \in \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cup \widetilde{J}^+(x)$.

(c) Dado $x \in M$ qualquer. Como M não possui pontos iniciais, existem $y \in X$ e $\bar{t} > 0$ tais que $\pi(y, \bar{t}) = x$. Seja $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $\pi(y, \lambda_n) \to x$ e defina

$w_n = \pi(y, \lambda_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\widetilde{\pi}(w_n, \phi(w_n)) \to I(x).$$

Dado $s \geq 0$, sendo $I(x) \notin M$, já que $I(M) \cap M = \emptyset$ então, pelo Lema 2.5, existe uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(w_n, \phi(w_n) + \varepsilon_n + s) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(w_n, \phi(w_n)), \varepsilon_n + s) \to \widetilde{\pi}(I(x), s).$$

Assim, concluímos que $\widetilde{\pi}(I(x), s) \in \widetilde{D}^+(x)$, $\forall s \geq 0$. Portanto, $\overline{\widetilde{\pi}^+(I(x))} \subset \widetilde{D}^+(x)$.

(d) Dado $x \in M$. Note que $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cup \overline{\widetilde{\pi}^+(I(x))} \cup \widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(x)$ pelos itens (a) e (c). Dado $z \in \widetilde{D}^+(x)$ qualquer, existem sequências $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset X$ com $\rho(z_n, z) \to 0$ e $\widetilde{\pi}(z_n, t_n) \to z$. Se $t_n \to +\infty$, então $z \in \widetilde{J}^+(x)$ e nada temos a provar. Caso $t_n \leq T$, para algum $T > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então obtemos uma sequência convergente $t_{n_s} \overset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{t} \in [0, T]$. Adaptando a demonstração do Lema 2.9, Caso 2, obtemos o resultado. ∎

Para qualquer $A \subset X$, temos $\bigcup_{a\in A} \widetilde{J}^+(a) \subset \widetilde{J}^+(A)$ e $\bigcup_{a\in A} \widetilde{D}^+(a) \subset \widetilde{D}^+(A)$, já que $\rho(x_n, A) \leq \rho(x_n, a)$, $\forall a \in A$. Porém nem sempre vale a inclusão contrária, o próximo exemplo ilustra tal fato.

Exemplo 3.2. Considere o sistema impulsivo:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1, \\ \dot{x_2} = x_2, \\ I : M \to N, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $M = \{(3, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$, $N = \{(2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ e a aplicação I é definida da seguinte forma: dado $y \in M$, $I(y)$ é o ponto de N que é a interseção do seguimento de reta $[0, y]$ com N. Seja $A = \{(x_1, 0) : 2 < x_1 < 4\}$. Para todo $a \in A$, temos

$$\widetilde{D}^+(a) = \widetilde{\pi}^+(a) \cup \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$\bigcup_{a\in A} \widetilde{D}^+(a) = \{(x_1, 0) : 0 < x_1 < 4\} \cup \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Como $\widetilde{D}^+(A)$ é fechado e $A \subset \widetilde{D}^+(A)$, então $\overline{A} \subset \widetilde{D}^+(A)$. Logo, $(4, 0) \in \widetilde{D}^+(A)$. Portanto, $\widetilde{D}^+(A) \not\subset \bigcup_{a\in A} \widetilde{D}^+(a)$.

Nosso próximo resultado mostra que para subconjuntos compactos de X, vale a igualdade.

Proposição 3.6. *Se $A \subset X$ é compacto, então*

$$\widetilde{J}^+(A) = \bigcup_{a\in A} \widetilde{J}^+(a) \ \text{ e } \ \widetilde{D}^+(A) = \bigcup_{a\in A} \widetilde{D}^+(a).$$

Prova: Já foi visto que

$$\widetilde{J}^+(A) \supset \bigcup_{a\in A} \widetilde{J}^+(a) \ \text{ e } \ \widetilde{D}^+(A) \supset \bigcup_{a\in A} \widetilde{D}^+(a).$$

Provemos que $\widetilde{D}^+(A) \subset \bigcup\limits_{a\in A} \widetilde{D}^+(a)$. De fato, dado $y \in \widetilde{D}^+(A)$, existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ com $\rho(x_n, A) \to 0$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to y$. Sendo A compacto, podemos assumir que $x_n \to z \in A$. Daí, $y \in \widetilde{D}^+(z) \subset \bigcup\limits_{a\in A} \widetilde{D}^+(a)$. Portanto, $\widetilde{D}^+(A) = \bigcup\limits_{a\in A} \widetilde{D}^+(a)$. Analogamente, provamos que $\widetilde{J}^+(A) = \bigcup\limits_{a\in A} \widetilde{J}^+(a)$. O resultado está demonstrado. ■

O Lema 3.9 com a Proposição 3.6 nos fornece o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se $A \subset X$ é um compacto no sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, então*

$$\widetilde{D}^+(A) = \left[\bigcup_{a\in A\setminus M} \overline{\widetilde{\pi}^+(a)} \cup \widetilde{J}^+(a)\right] \bigcup \left[\bigcup_{a\in A\cap M} \overline{\widetilde{\pi}^+(a)} \cup \overline{\widetilde{\pi}^+(I(a))} \cup \widetilde{J}^+(a)\right]. \tag{3.12}$$

Prova: Dado $A \subset X$ compacto. Utilizando a Proposição 3.6, $\widetilde{D}^+(A) = \bigcup\limits_{a\in A} \widetilde{D}^+(a)$. Isso implica que

$$\widetilde{D}^+(A) = \left[\bigcup_{a\in A\setminus M} \widetilde{D}^+(a)\right] \bigcup \left[\bigcup_{b\in A\cap M} \widetilde{D}^+(b)\right].$$

Pelo Lema 3.9, podemos escrever $\widetilde{D}^+(a) = \overline{\widetilde{\pi}^+(a)} \cup \widetilde{J}^+(a)$, $a \in A\setminus M$, e $\widetilde{D}^+(b) = \overline{\widetilde{\pi}^+(b)} \cup \overline{\widetilde{\pi}^+(I(b))} \cup \widetilde{J}^+(b)$, $b \in A \cap M$. Portanto, vale a igualdade (3.12). ■

Lema 3.10. *Sejam $x \in X\setminus M$ e $y \in \widetilde{L}^+(x)$, então $\widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(y)$.*

Prova: Seja $z \in \widetilde{J}^+(x)$. Existem sequências $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$, $\tau_n \to +\infty$, $\widetilde{\pi}(x, t_n) \to y$ e $\widetilde{\pi}(x_n, \tau_n) \to z$. Vamos assumir que as sequências $\{t_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ são crescentes e que $\tau_n - t_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada t_k, $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\varepsilon_n^k \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(x_n, t_k + \varepsilon_n^k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\pi}(x, t_k).$$

Existe para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$, tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k), \widetilde{\pi}(x, t_k)) \leq \frac{1}{k}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\rho(\widetilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k), y) &\leq \rho(\widetilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k), \widetilde{\pi}(x, t_k)) + \rho(\widetilde{\pi}((x, t_k)), y)\\ &\leq \rho(\widetilde{\pi}(x, t_k)), y) + \frac{1}{k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Além disso, $\widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k), \tau_{n_k} - t_k - \varepsilon_{n_k}^k) = \widetilde{\pi}(x_{n_k}, \tau_{n_k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z$, $\widetilde{\pi}(x_{n_k}, t_k + \varepsilon_{n_k}^k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y$ e $\tau_{n_k} - t_k - \varepsilon_{n_k}^k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ já que $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ é crescente e $\tau_{n_k} - t_k - \varepsilon_{n_k}^k \geq \tau_k - t_k - \varepsilon_{n_k}^k$. Portanto, $z \in \widetilde{J}^+(y)$. ∎

Para um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ sempre é válido o seguinte resultado.

Proposição 3.7. *A inclusão* $\Omega \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$ *é válida.*

Prova: Basta provar que $\bigcup\limits_{x\in X} \widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$. De fato, seja $y \in \bigcup\limits_{x\in X} \widetilde{L}^+(x)$. Assim, $y \in \widetilde{L}^+(x)$ para algum $x \in X$. Suponha inicialmente que $x \notin M$. Pelo Lema 3.10, segue que $\widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(y)$. Daí,

$$y \in \widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(y) \subset \widetilde{J}^+(\Omega),$$

já que $y \in \Omega$. Agora, suponha que $x \in M$. Seja $\gamma > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(x, \gamma) = \pi(x, \gamma) = z \notin M$. Afirmamos que $\widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{L}^+(z)$. Com efeito, dado $w \in \widetilde{L}^+(x)$, existe uma sequência $t_n \to +\infty$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $\widetilde{\pi}(x, t_n) \to w$. Como $\widetilde{\pi}(z, t_n - \gamma) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, \gamma), t_n - \gamma) = \widetilde{\pi}(x, t_n) \to w$ e $t_n - \gamma \to +\infty$, então $w \in \widetilde{L}^+(z)$. Logo, pelo Lema 3.10, temos

$$y \in \widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{L}^+(z) \subset \widetilde{J}^+(z) \subset \widetilde{J}^+(y) \subset \widetilde{J}^+(\Omega),$$

uma vez que $z \notin M$ e $y \in \widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{L}^+(z)$. Portanto, $\bigcup\limits_{x\in X} \widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$, o que demonstra a proposição. ∎

Proposição 3.8. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo e $\widetilde{D}^+(\Omega)$ $(\widetilde{J}^+(\Omega))$ é compacto com $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ $(\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset)$, então*

$$\widetilde{D}^+(\Omega) = \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega)) \ \ (\widetilde{J}^+(\Omega) = \widetilde{J}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))).$$

Prova: Como $\Omega \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$ temos $\widetilde{D}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega))$. Provemos a outra inclusão. Dado $y \in \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega))$. Sendo $\widetilde{D}^+(\Omega)$ compacto, pela Proposição 3.6, existe $x \in \widetilde{D}^+(\Omega)$ tal que $y \in \widetilde{D}^+(x)$. Usando o Lema 3.8 e a hipótese de que $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Logo $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e $x \in \widetilde{D}^+(\Omega)$, então $\overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$. Assim, $\widetilde{L}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$ e, além disso, $\widetilde{L}^+(x) \neq \emptyset$ pelo Teorema 2.7 (basta escolher $A = \{x\}$ e usar que o sistema é ponto k-dissipativo). Dado $z \in \widetilde{L}^+(x)$, pelo Lema 3.10, $\widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{J}^+(z)$ já que $x \notin M$. Note que $\Omega \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$ e Ω é fechado, logo, Ω é compacto. Então, podemos escrever $\widetilde{J}^+(\Omega) = \bigcup_{w \in \Omega} \widetilde{J}^+(w)$, isso implica que $\widetilde{J}^+(z) \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$. Daí,

$$y \in \widetilde{D}^+(x) = \overline{\widetilde{\pi}^+(x)} \cup \widetilde{J}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(\Omega) \cup \widetilde{J}^+(z) \subset \widetilde{D}^+(\Omega) \cup \widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\Omega).$$

Portanto, $\widetilde{D}^+(\Omega) = \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega))$. Analogamente, provamos que $\widetilde{J}^+(\Omega) \supset \widetilde{J}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$. Usando a Proposição 3.7, concluímos que $\widetilde{J}^+(\Omega) = \widetilde{J}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$. ■

Vamos usar o próximo teorema para mostrar que $\widetilde{J}^+(\Omega) = J = \widetilde{D}^+(\Omega)$.

Teorema 3.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. O compacto $A \subset X$ é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável se, e somente se, $\widetilde{D}^+(A) = A$.*

Prova: Suponha inicialmente que A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e provemos que $\widetilde{D}^+(A) = A$. Pela definição de $\widetilde{D}^+(A)$, segue que $A \subset \widetilde{D}^+(A)$. Dado $z \in \widetilde{D}^+(A)$ qualquer. Como A é compacto, existe $x \in A$ tal que $z \in \widetilde{D}^+(x)$. Assim, existem sequências $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \longrightarrow z$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(B(A; \delta), [0, +\infty)) \subset B(A; \varepsilon)$. Para n suficientemente grande, temos $x_n \in B(A; \delta)$. Isso implica que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \in B(A; \varepsilon)$ para n suficientemente grande. Logo, $z \in \overline{B(A; \varepsilon)}$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{B(A; \varepsilon)} = \overline{A} = A$. Portanto, $\widetilde{D}^+(A) \subset A$ e concluímos que $\widetilde{D}^+(A) = A$.

Vamos admitir que $\widetilde{D}^+(A) = A$ e provarmos que A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Suponha por absurdo, que A não seja orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Assim, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \to 0$, $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ e $y_n \in B(A; \delta_n)$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(y_n, t_n), A) \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Como A é compacto, podemos assumir que $y_n \to \overline{y} \in A$. Considere o conjunto compacto $B = \{\overline{y}, y_1, y_2, \ldots\}$. Pelo Teorema 2.7 e pela Proposição 2.9, a órbita positiva impulsiva de B, $\widetilde{\pi}^+(B)$, é relativamente compacta. A inclusão $\{\widetilde{\pi}(y_n, t_n)\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(B)$ implica que podemos considerar

$$\widetilde{\pi}(y_n, t_n) \to w \in \overline{\widetilde{\pi}^+(B)}.$$

Sendo $y_n \to \overline{y} \in A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, então $w \in \widetilde{D}^+(A) = A$, contradizendo a desigualdade (3.13). Portanto, A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. ■

Proposição 3.9. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo, então*

$$\widetilde{D}^+(\Omega) = \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega)) \;\; (\widetilde{J}^+(\Omega) = \widetilde{J}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))).$$

Prova: Seja J o centro de Levinson do sistema $(X, \pi; M, I)$. Sendo J orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e compacto, pelo Teorema 3.4, segue que $\widetilde{D}^+(J) = J$. Pela Proposição 3.3, $\Omega \subset J$. Daí, $\widetilde{D}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(J) = J$. Assim, $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ já que $J \cap M = \emptyset$. Note que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto. Pela Proposição 3.8, $\widetilde{D}^+(\Omega) = \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega))$. Do fato de $\widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\Omega) \subset J$, $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é compacto e $\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$. Novamente pela Proposição 3.8, concluímos que $\widetilde{J}^+(\Omega) = \widetilde{J}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$. ■

Teorema 3.5. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então*

$$J = \widetilde{J}^+(\Omega).$$

Prova: A inclusão $\widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{J}^+(J) \subset \widetilde{D}^+(J) = J$ segue do fato do sistema $(X, \pi; M, I)$ ser compacto k-dissipativo e do Teorema 3.4. Logo, basta mostrar que $J \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$. Note que:

- $\widetilde{J}^+(\Omega) \neq \emptyset$, pela Proposição (3.7);

- $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é compacto, pois $\widetilde{J}^+(\Omega) \subset J$ e é fechado;

- $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, uma vez que $\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$.

Com tais propriedades, pela Proposição 3.2, basta provar que $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável. De fato, vamos provar inicialmente que $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável utilizando o Teorema 3.4. Pelo Lema 3.8, vale $\widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$. Dado $z \in \widetilde{D}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$, como $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é compacto, existe $y \in \widetilde{J}^+(\Omega)$ tal que $z \in \widetilde{D}^+(y)$. Podemos escrever $\widetilde{D}^+(y) = \overline{\widetilde{\pi}^+(y)} \cup \widetilde{J}^+(y)$, já que $\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ e $y \in \widetilde{J}^+(\Omega)$. Se $z \in \overline{\widetilde{\pi}^+(y)}$, então $\overline{\widetilde{\pi}^+(y)} \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$ implica que $z \in \widetilde{J}^+(\Omega)$, pois $\widetilde{J}^+(\Omega)$ compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Caso $z \in \widetilde{J}^+(y)$, então $\widetilde{J}^+(y) \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$ implica que $z \in \widetilde{J}^+(\Omega)$. Assim, $\widetilde{J}^+(\Omega) = \widetilde{D}^+(\widetilde{J}^+(\Omega))$. Provemos que $\widetilde{W}^s(\widetilde{J}^+(\Omega)) = X$. Suponha por absurdo, que exista $x \in X$ tal que $x \notin \widetilde{W}^s(\widetilde{J}^+(\Omega))$. Logo, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n > n$, com

$$\rho(\widetilde{\pi}(x, t_n), \widetilde{J}^+(\Omega)) \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

A hipótese do sistema $(X, \pi; M, I)$ ser compacto k-dissipativo garante que o conjunto $\widetilde{\pi}^+(x)$ é relativamente compacto, então podemos supor que $\widetilde{\pi}(x, t_n) \to p \in \widetilde{L}^+(x)$. Por outro lado, $\widetilde{L}^+(x) \subset \Omega$ implica que $p \in \widetilde{L}^+(x) \subset \Omega \subset \widetilde{J}^+(\Omega)$ contradizendo a desigualdade (3.14), onde a última inclusão é válida pela proposição 3.7. Portanto, $\widetilde{J}^+(\Omega)$ é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável. ■

Corolário 3.4. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então:*

(a) $J = \widetilde{D}^+(\Omega)$;

(b) $J = \Omega$ se, e somente se, Ω é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável.

Prova: (a) Como o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, $\Omega \subset J$. Assim, $\widetilde{D}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(J) = J$. Utilizando o Teorema 3.5, temos $J = \widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$. Portanto, $J = \widetilde{D}^+(\Omega)$.

(b) Se $J = \Omega$, então Ω é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável pelo Teorema 3.2. Agora, supondo que Ω seja orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável então, pelo Teorema 3.4, $\widetilde{D}^+(\Omega) = \Omega$. Segue do item (a) que, $J = \widetilde{D}^+(\Omega) = \Omega$. ■

Corolário 3.5. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então*

$$\widetilde{J}^+(\Omega) = J = \widetilde{D}^+(\Omega).$$

Corolário 3.6. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então*

$$J = \bigcup_{a \in \Omega} \overline{\widetilde{\pi}^+(a)} \cup \widetilde{J}^+(a). \tag{3.15}$$

Prova: Segue da Proposição 3.7 e do Corolário 3.5 que $\Omega \subset \widetilde{J}^+(\Omega) = J = \widetilde{D}^+(\Omega)$. Então, pelo Corolário 3.3, vale (3.15), já que Ω é compacto e $\Omega \cap M = \emptyset$. ■

3.6 Critérios de dissipatividade compacta

Nesta seção vamos apresentar alguns critérios que garantem que um sistema é compacto k-dissipativo. Além disso, vamos fazer um exemplo que ilustra a teoria.

O lema abaixo serve como auxílio na demonstração do primeiro critério.

Lema 3.11. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existem $\gamma = \gamma(x, \varepsilon) > 0$ e $l = l(x, \varepsilon) > 0$ tais que*

$$\widetilde{\pi}(B(x; \gamma), t) \subset B(J; \varepsilon), \quad \forall t \geq l.$$

Prova: Sendo J orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(J; \delta), [0, +\infty)) \subset B(J; \varepsilon). \tag{3.16}$$

Seja $x \in X$ arbitrário. A hipótese do sistema $(X, \pi; M, I)$ ser compacto k-dissipativo implica que $\widetilde{L}^+(x) \neq \emptyset$, compacto e $\widetilde{L}^+(x) \subset J$. Logo, existe $t_1 = t_1(x, \varepsilon) > 0$, $t_1 \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(x, t_1) \in B(J; \delta)$. Assim, existe $v_1 > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v_1) \subset B(J; \delta)$. Vamos considerar dois casos: $x \notin M$ e $x \in M$. Primeiramente suponha que $x \notin M$. Pela continuidade de π e I, existe $0 < \gamma_1 = \gamma_1(x, \varepsilon)$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \gamma_1), t_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v_1) \subset B(J; \delta).$$

Por (3.16), $\widetilde{\pi}(B(x;\gamma_1),t) \subset B(J;\varepsilon)$, $t \geq t_1$, provando este caso. Suponha que $x \in M$. Assim, existem um STC-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ através de x com seção S e $\eta > 0$ tal que $B(x;\eta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Sejam

$$H_1 = F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B(x;\eta) \ \text{ e } \ H_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B(x;\eta).$$

Pela continuidade de π e I, existe $0 < \eta_1 < \eta$ tal que $\widetilde{\pi}(B(x;\eta_1) \cap H_2, t_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x,t_1); v_1) \subset B(J;\delta)$. Por (3.16), temos

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_1) \cap H_2, t) \subset B(J;\varepsilon), \ \ \forall t \geq t_1.$$

Como $I(x) \notin M$ e $\widetilde{L}^+(I(x)) \subset J$, existe $t_2 = t_2(x,\varepsilon) > 0$, $t_2 \neq \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(I(x)_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(I(x),t_2) \in B(J;\delta)$. Logo, existe $v_2 > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(I(x),t_2); v_2) \subset B(J;\delta)$. Novamente, pela continuidade de π e I, existe $0 < \eta_2 < \eta$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_2) \cap H_1, t_2) \subset B(\widetilde{\pi}(I(x),t_2); v_2) \subset B(J;\delta).$$

Por (3.16), concluímos que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_2) \cap H_1, t) \subset B(J;\varepsilon), \ \ \forall t \geq t_1.$$

Escolhendo $0 < \gamma < \min\{\eta_1;\eta_2\}$ temos

$$\widetilde{\pi}(B(x;\gamma),t) \subset B(J;\varepsilon), \ \ \forall t \geq \max\{t_1;t_2\},$$

provando o teorema. ∎

Teorema 3.6. *Para um sistema semidinâmico impulsivo $(X,\pi;M,I)$ ser compacto k-dissipativo é necessário e suficiente que exista um conjunto compacto e não vazio K, $K \cap M = \emptyset$, com a seguinte propriedade: dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existem $l = l(x,\varepsilon) > 0$ e $\gamma = \gamma(x,\varepsilon) > 0$ tais que*

$$\widetilde{\pi}(B(x;\gamma),t) \subset B(K;\varepsilon), \ \ \forall t \geq l.$$

Prova: Se o sistema $(X,\pi;M,I)$ é compacto k-dissipativo, então pelo Teorema 3.11, J é o compacto desejado.

Suponha que exista um conjunto compacto e não vazio K, satisfazendo as hipóteses do teorema. Provemos que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Note que basta provar que K é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$. Seja $A \subset X$ compacto. Dados $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, por hipótese existem $\gamma(x, \varepsilon) > 0$ e $l(x, \varepsilon) > 0$ tais que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \gamma(x, \varepsilon)), t) \subset B(K; \varepsilon), \quad \forall t \geq l(x, \varepsilon).$$

A família $\{B(x; \gamma(x, \varepsilon)) : x \in A\}$ é uma cobertura aberta de A e, sendo A compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $\{B(x_i; \gamma(x_i, \varepsilon)) : 1 \leq i \leq n\}$ de A, isto é, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i; \gamma(x_i, \varepsilon))$ com

$$\widetilde{\pi}(B(x_i; \gamma(x_i, \varepsilon)), t) \subset B(K; \varepsilon), \quad \forall t \geq l(x_i, \varepsilon), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Seja $L = \max\{l(x_i, \varepsilon) : 1 \leq i \leq n\}$. Para $1 \leq i \leq n$, obtemos

$$\widetilde{\pi}(B(x_i; \gamma(x_i, \varepsilon)), t) \subset B(K; \varepsilon), \quad \forall t \geq L.$$

Isso implica que

$$\widetilde{\pi}(A, t) \subset B(K; \varepsilon), \quad \forall t \geq L.$$

Portanto, K é um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$, o que prova o teorema. ■

Note que diferente do Teorema 3.6, os Teoremas 3.7, 3.8 e 3.9 tem como hipótese que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo.

Teorema 3.7. *Suponha que o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ seja ponto k-dissipativo. Então, $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo se, e somente se, existe um conjunto não vazio e compacto $A \subset X$ com as seguintes propriedades:*

(a) $A \cap M = \emptyset$;

(b) $\Omega \subset A$;

(c) *A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável.*

Neste caso $J \subset A$, onde J é o centro de Levinson de $(X, \pi; M, I)$.

Prova: Se o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então já foi visto que J é não vazio, compacto e satisfaz as condições (a), (b) e (c), provando a condição necessária.

Seja $A \subset X$ não vazio, compacto e satisfazendo as condições (a), (b) e (c). Provemos que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Usando o Teorema 3.6, basta provar que dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existem $\gamma(x, \varepsilon) > 0$ e $l(x, \varepsilon) > 0$ tais que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \gamma(x, \varepsilon)), t) \subset B(A; \varepsilon), \quad \forall t \geq l(x, \varepsilon).$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in X$. Como A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável existe $\delta > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \delta), [0, +\infty)) \subset B(A; \varepsilon).$$

Escolhendo no Teorema 2.7 o conjunto $A = \{x\}$ e usando que o sistema é ponto k-dissipativo obtemos que, $\widetilde{L}^+(x)$ é não vazio e compacto. A hipótese $\Omega \subset A$ implica que $\widetilde{L}^+(x) \subset A$. Então, existe $t_1 = t_1(x, \varepsilon) > 0$, $t_1 \neq \sum_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, com $\widetilde{\pi}(x, t_1) \in B(A; \delta)$. Assim, existe $v_1 > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v_1) \subset B(A; \delta)$. Vamos considerar dois casos: $x \notin M$ e $x \in M$. Prosseguindo com o mesmo raciocínio da demonstração do Lema 3.11, obtemos o resultado. Portanto, o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Neste caso, utilizando o Teorema 3.4, $\widetilde{D}^+(A) = A$. A hipótese $\Omega \subset A$ implica que, $J = \widetilde{D}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(A) = A$, onde a igualdade $J = \widetilde{D}^+(\Omega)$ é válida pelo Corolário 3.4. ■

Teorema 3.8. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo. O sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo se, e somente se, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ $(\widetilde{J}^+(\Omega))$ é compacto, orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ $(\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset)$. Neste caso, $J = \widetilde{D}^+(\Omega)$ $(J = \widetilde{J}^+(\Omega))$.*

Prova: Se o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo, então pelo Corolário 3.4, $J = \widetilde{D}^+(\Omega)$ $(J = \widetilde{J}^+(\Omega)$ pelo Teorema 3.5), e nada mais temos para provar.

Suponha que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ $(\widetilde{J}^+(\Omega))$ é compacto, orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ $(\widetilde{J}^+(\Omega) \cap M = \emptyset)$. Pela Proposição 3.3, $\Omega \subset \widetilde{J}^+(\Omega) \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$. Então, pelo Teorema 3.7, o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. ■

Teorema 3.9. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo. O sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo se, e somente se, $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto, para todo $A \in \mathbb{K}(X)$.*

Prova: Suponha inicialmente que o sistema $(X, \pi; M, I)$ seja compacto k-dissipativo. Pelo Teorema 3.8, $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$. Segue do Lema 3.3 que $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto, para todo $A \in \mathbb{K}(X)$.

Considere $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto, para todo $A \in \mathbb{K}(X)$. Vamos mostrar que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Utilizando o Teorema 3.8, basta provar que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto e orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Mostremos que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto. Pela Proposição 3.5, $\widetilde{D}^+(\Omega) \neq \emptyset$. Sejam $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{D}^+(\Omega)$ e $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 3.4, Ω é compacto. Logo, usando a Proposição 3.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in \Omega$ e $t_n > 0$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), y_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

A menos de uma subsequência podemos supor que $x_n \to \overline{x} \in \Omega$, já que Ω é compacto e $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \Omega$. Assim, o conjunto $W = \{\overline{x}, x_1, x_2, \ldots\} \subset \Omega$ é compacto. Utilizando a hipótese que a órbita positiva impulsiva, $\widetilde{\pi}^+(W)$, é relativamente compacta, então $\{\widetilde{\pi}(x_n, t_n)\}_{n\geq 1} \subset \widetilde{\pi}^+(W)$ também é relativamente compacto. Novamente, a menos de uma subsequência, podemos assumir que $\widetilde{\pi}(x_n, t_n) \to d$. Por (3.17), segue que $\{y_n\}_{n\geq 1}$ é convergente. Portanto, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto. Provemos que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Suponha por absurdo, que não seja. Assim, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \to 0$, $\delta_n > 0$, $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $h_n > 0$ e $z_n \in B(\widetilde{D}^+(\Omega); \delta_n)$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(z_n, h_n), \widetilde{D}^+(\Omega)) \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $z_n \to \overline{y} \in \widetilde{D}^+(\Omega)$, já que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto. Considere o compacto $Y = \{\overline{y}, z_1, z_2, \ldots\}$. Por hipótese, $\overline{\widetilde{\pi}^+(Y)}$ é compacto. Assim, $\{\widetilde{\pi}(z_n, h_n)\}_{n\geq 1}$ é relativamente compacto e podemos supor que $\widetilde{\pi}(z_n, h_n) \to \overline{z}$. Segue de (3.18) que, $\overline{z} \notin \widetilde{D}^+(\Omega)$. Por outro lado, $\rho(z_n, \widetilde{D}^+(\Omega)) \to 0$ e $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ implicam que, $\overline{z} \in \widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega)) = \widetilde{D}^+(\Omega)$, com $\widetilde{D}^+(\widetilde{D}^+(\Omega)) = \widetilde{D}^+(\Omega)$ válida pela Proposição 3.8. Portanto, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, finalizando a demonstração do teorema. ■

O exemplo, a seguir, é uma aplicação do Teorema 3.8. Nele vamos considerar o espaço métrico $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\rho)$, onde

$$\rho(f,g) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|,$$

para $f,g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, isto é, ρ é a métrica da convergência uniforme.

Exemplo 3.3. Dado $c>0$, seja $\varphi_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_c(t)=\begin{cases} 0, & t\leq -1-c^{-1},\\ \exp\left(\frac{1}{t^2-(1+c^{-1})^2}\right), & -1-c^{-1}<t<1+c^{-1},\\ 0, & t\geq 1+c^{-1},\end{cases}$$

e $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t)=\begin{cases} 0, & t\leq -1,\\ \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right), & -1<t<1,\\ 0, & t\geq 1.\end{cases}$$

Sejam $X=\{\psi\}\cup\{\varphi_c : c>0\}$ e $\pi : X\times\mathbb{R}_+\to X$ definida por

$$\begin{cases} \pi(\varphi_c,t)=\varphi_{c+t}, & c>0,\\ \pi(\psi,t)=\psi, \end{cases}$$

para todo $t\in\mathbb{R}_+$. Note que $X\subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e que (X,π) é um sistema semidinâmico. Sejam $M=\{\varphi_{c_1},\ldots,\varphi_{c_k}\}$, com $c_1<\ldots<c_k$, e $I:M\to X$ a aplicação impulso definida por $I(\varphi_{c_j})=\varphi_{c_j+\alpha}$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, onde $\alpha>0$ satisfaz $I(M)\cap M=\emptyset$. Considere o sistema semidinâmico impulsivo associado $(X,\pi;M,I)$. Como $\lim\limits_{c\to+\infty}\varphi_c(t)=\psi(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, e $I(\varphi_{c_j})=\varphi_{c_j+\alpha}$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, temos as seguintes propriedades:

(1) $\widetilde{L}^+(\phi)=\{\psi\}$, $\forall\phi\in X$;

(2) $(X,\pi;M,I)$ é ponto k-dissipativo, basta escolher $K=\{\psi\}$.

Note que $\Omega=\{\psi\}$ e assim $\widetilde{D}^+(\Omega)=\Omega$. Vamos provar que Ω é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. De fato, dado $\varepsilon>0$ tome $\delta=\varepsilon>0$. Seja $\varphi_c\in B(\psi;\delta)$, $c>0$. Isto é,

$$\rho(\varphi_c,\psi)=\sup_{s\in\mathbb{R}}|\varphi_c(s)-\psi(s)|<\delta.$$

De $(1+(c+t)^{-1})^2 \leq (1+c^{-1})^2$, $t \geq 0$, temos

$$s^2 - (1+(c+t)^{-1})^2 \geq s^2 - (1+c^{-1})^2.$$

Vamos provar que $\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, separando $\mathbb{R}$ em intervalos. Se $s \geq 1 + c^{-1}$, então $\varphi_c(s) = 0 = \varphi_{c+t}(s)$. Isso implica que $\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s)$. Caso $s \in [1 + \frac{1}{c+t}, 1 + \frac{1}{c})$, então $\varphi_{c+t}(s) = 0 = \psi(s)$ e vale $\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s)$. Se $s \in [1, 1 + \frac{1}{c+t})$, $\varphi_{c+t}(s) \leq \varphi_c(s)$ implica que, $\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s)$. Analisando quando $s \in [0,1)$ também temos $\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s)$. Portanto, para todo $s \in \mathbb{R}$, vale

$$\varphi_{c+t}(s) - \psi(s) \leq \varphi_c(s) - \psi(s).$$

Daí,

$$\rho(\varphi_{c+t}, \psi) = \sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi_{c+t}(s) - \psi(s)| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi_c(s) - \psi(s)| = \rho(\varphi_c, \psi) < \delta = \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$. Concluímos que Ω é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Pelo Teorema 3.8, segue que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo.

3.7 Dissipatividade local

Vamos estabelecer critérios para dissipatividade local e definir o que é um sistema localmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-condensado. Além disso, utilizando resultados desta seção e da seção anterior vamos exibir um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo que não é localmente k-dissipativo.

Teorema 3.10. *Para um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo $(X, \pi; M, I)$ ser localmente k-dissipativo é necessário e suficiente que para todo $x \in X$ exista $\delta = \delta_x > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x;\delta), t), J) = 0. \tag{3.19}$$

Prova: Se para cada $x \in X$ existe $\delta = \delta_x > 0$ tal que vale o limite (3.19) então o sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente k-dissipativo, já que J é compacto e $J \cap M = \emptyset$.

Suponha que o sistema $(X, \pi; M, I)$ seja localmente k-dissipativo. Seja $K \subset X$ não vazio, compacto, $K \cap M = \emptyset$, tal que dado $x \in X$, existe $\delta = \delta_x > 0$ com

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x;\delta), t), K) = 0. \tag{3.20}$$

Vamos provar que o centro de Levinson também possui tais propriedades. De fato, seja $W_x = \widetilde{L}^+(B(x;\delta))$. Pelo Teorema 2.7, W_x é não vazio, compacto e

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x;\delta), t), W_x) = 0. \tag{3.21}$$

Suponha inicialmente que vale a igualdade $W_x = \widetilde{L}^+(W_x)$. Sendo $W_x = \widetilde{L}^+(W_x) \subset J$, por (3.21), temos

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x;\delta), t), J) = 0,$$

provando o teorema. Assim vamos provar que $W_x = \widetilde{L}^+(W_x)$. Primeiramente mostremos que W_x é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B(K;\varepsilon) \cap M = \emptyset$. Segue de (3.20) que $W_x \subset K$. Sendo $B(K;\varepsilon) \cap M = \emptyset$ então, pelo Lema 2.8, W_x é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Então,

$$\widetilde{\pi}(W_x, t) \subset W_x,$$

para todo $t \geq 0$. Por outro lado, dados $t \in \mathbb{R}_+$ e $z \in W_x$, existem sequências $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset B(x;\delta_x)$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $t_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(z_n, t_n) \to z$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$, $\forall n \geq n_0$. Como $t_n - t \to +\infty$ e vale (3.20) então, pelo Teorema 2.7, o conjunto $\{\widetilde{\pi}(z_n, t_n - t)\}_{n \geq n_0}$ é relativamente compacto. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\widetilde{\pi}(z_n, t_n - t) \to b \in W_x$. Utilizando o Lema 2.6, temos

$$\widetilde{\pi}(z_n, t_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(z_n, t_n - t), t) \to \widetilde{\pi}(b, t) \in \widetilde{\pi}(W_x, t),$$

uma vez que $b \in W_x \subset K$ e $K \cap M = \emptyset$. Então $z = \widetilde{\pi}(b,t)$ e concluímos que $W_x = \widetilde{\pi}(W_x, t)$, $\forall t \geq 0$. Agora, vamos provar que $W_x = \widetilde{L}^+(W_x)$. Dado $w \in W_x$, $w \in \widetilde{\pi}(W_x, t)$, $\forall t \geq 0$. Em particular, $w \in \widetilde{\pi}(W_x, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in W_x$ tal que $w = \widetilde{\pi}(w_n, n)$. Isso implica que $w \in \widetilde{L}^+(W_x)$. Provemos a outra inclusão. Dado $v \in \widetilde{L}^+(W_x)$, existem sequências $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset W_x$ e $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $h_n \to +\infty$ e $\widetilde{\pi}(v_n, h_n) \to v$. Sendo $\widetilde{\pi}(v_n, h_n) \in \widetilde{\pi}(W_x, h_n) = W_x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e W_x é compacto então, $v \in W_x$. Portanto, $W_x = \widetilde{L}^+(W_x)$, finalizando a demonstração. ■

O próximo lema será usado na demonstração do Teorema 3.11.

Lema 3.12. *Sejam* $K \subset X$ *compacto,* $x_i \in X$ *e* $\delta_i > 0$, $1 \le i \le m$. *Se* $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_i)$, *então existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$B(K; \gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_i).$$

Prova: Para simplificar a notação considere $D = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_i)$. Suponha por absurdo, que não exista tal $\gamma > 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in B(K; \frac{1}{n})$ tal que $y_n \notin D$. Pela compacidade de K, podemos assumir que $y_n \to \overline{x} \in K$. Seja $h > 0$ tal que $B(\overline{x}; \frac{h}{2}) \subset D$. Sendo $y_n \to \overline{x}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B(\overline{x}; \frac{h}{2})$, $\forall n \ge n_0$. Isso implica que $y_n \in D$, $\forall n \ge n_0$, absurdo. Portanto, existe $\gamma > 0$ tal que $B(K; \gamma) \subset D$. ■

A seguir, vamos provar o segundo critério de dissipatividade local.

Teorema 3.11. *Seja* $(X, \pi; M, I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Então,* $(X, \pi; M, I)$ *é localmente k-dissipativo se, e somente se, o centro de Levinson* J *é uniformemente* $\widetilde{\pi}$*-atrator.*

Prova: Se J é localmente k-dissipativo, pelo Teorema 3.10, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x; \delta_x), t), J) = 0.$$

Considere a coberturta aberta $J \subset \bigcup_{x \in J} B(x; \delta_x)$. Pela compacidade de J podemos extrair uma subcobertura finita $J \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_{x_i})$. Utilizando o Lema 3.12, existe $\gamma > 0$ tal que $B(J; \gamma) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_{x_i})$. Daí,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(J; \gamma), t), J) = 0.$$

Portanto, J é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator.

Suponha que J seja uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator e provemos que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente k-dissipativo. Existe $\gamma > 0$ tal que $B(J; \gamma) \cap M = \emptyset$ e

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(J; \gamma), t), J) = 0. \tag{3.22}$$

Seja $x \in X$ arbitrário. Sendo J um atrator de $\mathbb{K}(X)$, existe $l_1 = l_1(x) > 0$, $l_1 \neq \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x, l_1), J) < \gamma.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (3.22), existe $l_2 = l_2(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(y,t), J) < \varepsilon$, para todo $t \geq l_2$ e todo $y \in B(J;\gamma)$. Seja $v > 0$ tal que $B(\widetilde{\pi}(x,l_1); v) \subset B(J;\gamma)$. Vamos considerar dois casos: $x \notin M$ e $x \in M$. Suponha inicialmente que $x \notin M$. Neste caso existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\delta_x), l_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x,l_1); v) \subset B(J;\gamma).$$

Segue que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\delta_x), t) \subset B(J;\varepsilon), \quad \forall t \geq l(x,\varepsilon),$$

onde $l(x,\varepsilon) = l_1 + l_2 > 0$. Então, o resultado segue do Teorema 3.10. Agora, suponha que $x \in M$. Existe um STC-tubo $F(L,[0,2\lambda])$ com seção S através de x. Sendo $F(L,[0,2\lambda])$ uma vizinhança de x, existe $\eta > 0$ tal que $B(x;\eta) \subset F(L,[0,2\lambda])$. Sejam

$$H_1 = F(L,(\lambda,2\lambda]) \cap B(x;\eta) \quad \text{e} \quad H_2 = F(L,[0,\lambda]) \cap B(x;\eta).$$

Pela continuidade de π e I, existe $\eta_1 > 0$, $\eta_1 < \eta$, tal que $\widetilde{\pi}(z,l_1) \in B(\widetilde{\pi}(x,l_1); v) \subset B(J;\gamma)$, $\forall z \in B(x;\eta_1) \cap H_2$. Daí, $\widetilde{\pi}(z,t) \in B(J;\varepsilon)$ para todo $z \in B(x;\eta_1) \cap H_2$ e todo $t \geq l_1 + l_2$. Por outro lado, existe $l_3 = l_3(x) > 0$, $l_3 \neq \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(I(x)_i^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que

$$\rho(\widetilde{\pi}(I(x), l_3), J) < \gamma.$$

Assim, existe $\eta_2 > 0$, $\eta_2 < \eta$, tal que $\widetilde{\pi}(z,t) \in B(J;\varepsilon)$ para todo $z \in B(x;\eta_2) \cap H_1$ e todo $t \geq l_2 + l_3$. Seja $\eta_3 < \min\{\eta_1;\eta_2\}$. Portanto,

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta_3), t) \subset B(J;\varepsilon), \quad \forall t \geq \max\{l_1 + l_2; l_2 + l_3\}.$$

Logo, o sistema é localmente k-dissipativo. ■

Visando o Teorema 3.12, faremos o seguinte lema.

Lema 3.13. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto não vazio e compacto. Se A é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator, $A \cap M = \emptyset$ e A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, então A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável.*

Prova: Suponha por absurdo, que A não seja orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Logo, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_n \to 0$ $(\delta_n > 0)$, $t_n \to +\infty$ $(t_n > 0)$ e $x_n \in B(A;\delta_n)$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n,t_n),A) \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Uma vez que A é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(B(A;\gamma),A) = 0.$$

Seja $l(\varepsilon_0) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(z,t) \in B(A;\frac{\varepsilon_0}{2})$ para todo $z \in B(A;\gamma)$ e todo $t \geq l(\varepsilon_0)$. Como $\delta_n \to 0$ e A é compacto, podemos admitir que $x_n \to x \in A$. Para n suficientemente grande, $B(A;\delta_n) \subset B(A;\gamma)$ e $t_n \geq l(\varepsilon_0)$. Daí,

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n,t_n),A) < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

para todo n suficientemente grande, contradizendo (3.23). Portanto, A é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. ■

Teorema 3.12. *Para um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo,* $(X,\pi;M,I)$, *ser localmente k-dissipativo é necessário e suficiente que:*

(a) $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$;

(b) $\widetilde{D}^+(\Omega)$ *é compacto;*

(c) $\widetilde{D}^+(\Omega)$ *é uniformemente* $\widetilde{\pi}$*-atrator.*

Prova: Se o sistema $(X,\pi;M,I)$ é localmente k-dissipativo, já vimos que as propriedades (a), (b) e (c) são válidas.

Suponha que $\widetilde{D}^+(\Omega)$ seja compacto, uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$. Provemos que o sistema $(X,\pi;M,I)$ é localmente k-dissipativo. A Proposição 3.5 mostra que $\widetilde{D}^+(\Omega) \neq \emptyset$. Sendo $\widetilde{D}^+(\Omega) \subset X$ não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator, pelo Lema 3.13, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Utilizando o Teorema 3.8, concluímos que o sistema $(X,\pi;M,I)$ é compacto k-dissipativo. Porém,

$\widetilde{D}^{+}(\Omega) = J$, implica que J é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator. Pelo Teorema 3.11, o sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente k-dissipativo. ∎

Definição 3.7. Um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é chamado de *localmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-condensado*, se para todo $x \in X$, existem $\delta_x > 0$ e $K_x \subset X$ compacto com $K_x \cap M = \emptyset$, tais que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x; \delta_x), t), K_x) = 0.$$

Utilizando a Definição 3.7, vamos provar um outro critério de dissipatividade local.

Teorema 3.13. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo ponto k-dissipativo. O sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente k-dissipativo se, e somente se, é localmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-condensado e $\widetilde{D}^{+}(\Omega) \cap M = \emptyset$.*

Prova: Para demonstrar este critério basta provar que se o sistema $(X, \pi; M, I)$ é localmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-condensado e $\widetilde{D}^{+}(\Omega) \cap M = \emptyset$, então é localmente k-dissipativo. Mostremos inicialmente que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Sejam $A \in \mathbb{K}(X)$ e $x \in A$. Por hipótese, existem $\delta_x > 0$ e $K_x \subset X$, $K_x \cap M = \emptyset$, tais que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x; \delta_x), t), K_x) = 0.$$

Considere a cobertura aberta $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x; \delta_x)$. Usando a compacidade de A podemos extrair uma subcobertura finita $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta_{x_i})$. Seja $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Note que K é compacto, $K \cap M = \emptyset$ e vale

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), K) = 0, \quad \forall x \in A. \tag{3.24}$$

Pelo Teorema 2.7 e por (3.24), $\widetilde{L}^{+}(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x, t), \widetilde{L}^{+}(A)) = 0, \quad \forall x \in A. \tag{3.25}$$

Usando a Proposição 2.9 e (3.25), a órbita positiva impulsiva $\widetilde{\pi}^{+}(A)$, é relativamente compacta. Segue do Teorema 3.9, que o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo. Mostremos que $(X, \pi; M, I)$ é localmente k-dissipativo. Dado $z \in X$, existem $\delta_z > 0$ e $K_z \subset X$, com $K_z \cap M = \emptyset$, tais que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(z; \delta_z), t), K_z) = 0. \tag{3.26}$$

Seja $W_z = \widetilde{L}^+(B(z;\delta_z))$. Pelo Teorema 2.7, W_z é não vazio, compacto e

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(z;\delta_z),t), W_z) = 0. \tag{3.27}$$

Por (3.26), $W_z \subset K_z$ e, sendo $K_z \cap M = \emptyset$, pelo Lema 2.8, W_z é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Usando a demonstração do Teorema 3.10, obtemos que $W_z = \widetilde{L}^+(W_z) \subset J$, já que o sistema $(X,\pi;M,I)$ é compacto k-dissipativo. Por (3.27), concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(z;\delta_z),t), J) = 0.$$

Portanto, o sistema $(X,\pi;M,I)$ é localmente k-dissipativo. ■

No próximo exemplo, vamos exibir um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo que não é localmente k-dissipativo utilizando o Teorema 3.11. Nele vamos considerar o espaço de métrico $(L_2[0,1],\rho)$, com a métrica

$$\rho(\varphi,\psi) = ||\varphi-\psi||_2 := \left(\int_0^1 |\varphi(s)-\psi(s)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

para $\varphi,\psi \in L_2[0,1]$.

Exemplo 3.4. Considere a equação

$$\dot{x} = Ax$$

no espaço de Hilbert $L_2[0,1]$, onde o operador $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ é definido por

$$(A\varphi)(\tau) = -\tau\varphi(\tau),$$

para todo $\tau \in [0,1]$ e todo $\varphi \in L_2[0,1]$. Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, seja $U(t) : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dada por $(U(t)\varphi)(\tau) = e^{-\tau t}\varphi(\tau)$, para todo $\varphi \in L_2[0,1]$ e todo $\tau \in [0,1]$. Note que A e $U(t)$ são lineares e contínuas. Considere o sistema semidinâmico associado $\pi : L_2[0,1] \times \mathbb{R}_+ \to L_2[0,1]$, dado por

$$\pi(\varphi,t) = U(t)\varphi,$$

para todo $\varphi \in L_2[0,1]$ e todo $t \in \mathbb{R}_+$. Sejam $M = \{\varphi \in L_2[0,1] : ||\varphi||_2 = 1\}$ a esfera unitária em $L_2[0,1]$ e $I : M \to L_2[0,1]$ contínua, satisfazendo

$$||I(\varphi)||_2 \leq \alpha,$$

nossa aplicação impulso, para todo $\varphi \in M$, $0 < \alpha < 1$ arbitrário porém fixado. Como $I(M) \cap M = \emptyset$, então temos o sistema semidinâmico impulsivo associado $(L_2[0,1], \pi; M, I)$. Note que $||\pi(\varphi, t)||_2 \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall \varphi \in L_2[0,1]$. Além disso, sendo $||I(\varphi)||_2 < ||\varphi||_2$, $\forall \varphi \in L_2[0,1]$, obtemos

$$||\widetilde{\pi}(\varphi, t)||_2 \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall \varphi \in L_2[0,1].$$

Portanto, $(L_2[0,1], \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo e $\widetilde{L}^+(\varphi) = \{0\}$, $\forall \varphi \in L_2[0,1]$. Isso implica que $\Omega = \{0\}$. Como $||\pi(\varphi, t)||_2 \leq ||\varphi||_2$, para todo $\varphi \in L_2[0,1]$ e todo $t \geq 0$ e, $||I(\varphi)||_2 < ||\varphi||_2$, $\forall \varphi \in M$, temos

$$||\widetilde{\pi}(\varphi, t)||_2 \leq ||\varphi||_2, \quad \forall \varphi \in L_2[0,1]. \tag{3.28}$$

Vamos mostrar que $\widetilde{D}^+(\Omega) = \{0\}$. De fato, dado $\varphi \in \widetilde{D}^+(\Omega)$, existem sequências $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset L_2[0,1]$ e $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ tais que $||\varphi_n - 0||_2 \to 0$ e

$$||\widetilde{\pi}(\varphi_n, t_n) - \varphi||_2 \to 0.$$

Por (3.28), $||\widetilde{\pi}(\varphi_n, t_n)||_2 \leq ||\varphi_n||_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, utilizando que $||\varphi_n||_2 \to 0$, temos $\varphi = 0$. Então, $\widetilde{D}^+(\Omega) = \{0\}$. Logo, $\widetilde{D}^+(\Omega)$ é compacto, orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$. Pelo Teorema 3.8, segue que o sistema $(L_2[0,1], \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo e, além disso, $J = \{0\}$. Agora vamos provar que o sistema $(L_2[0,1], \pi; M, I)$ não pode ser localmente k-dissipativo. Suponha por absurdo, que ele seja localmente k-dissipativo. Pelo Teorema 3.11, o centro de Levinson, $J = \{0\}$, é uniformemente atrator, isto é, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{||\varphi||_2 \leq \gamma} ||\widetilde{\pi}(\varphi, t)||_2 = 0. \tag{3.29}$$

Defina $\varphi_n \in L_2[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, por

$$\varphi_n(t) = \gamma \sqrt{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t),$$

para $t \in [0,1]$, onde $\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ é a função característica do intervalo $[0, \frac{1}{n}]$. Note que $||\varphi_n||_2 = \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Porém, considerando a sequência $t_n = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} ||\pi(\varphi_n, t_n)||_2 = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \gamma^2 n e^{-2t_n s} ds = \gamma^2 (1 - \frac{1}{e}) \neq 0,$$

contradizendo (3.29). Portanto, o sistema $(L_2[0,1], \pi; M, I)$ não é localmente k-dissipativo.

CAPÍTULO 4

Conexidade e atrator global

Este capítulo esta dividido em três seções. Na primeira seção, definimos o que é um conjunto indecomponível e a condição Ξ. Tais definições estão relacionadas ao estudo da conexidade do centro de Levinson, do espaço X e da varidade estável de um subconjunto de X. Em seguida, na segunda seção, definimos os seguintes conceitos para um sistema semidinâmico impulsivo: atrator global, condição de Ladyzhenskaya, $\widetilde{\pi}$-assintoticamente compacto, completamente contínuo, fracamente b-dissipativo e fracamente k-dissipativo. Provamos, por exemplo, que ser fracamente b-dissipativo é equivalente a ser fracamente k-dissipativo em um sistema impulsivo que satisfaz a condição de Ladyzhenskaya e o conjunto prolongado impulsivo de Ω não intersecta M. Já na última seção, temos o intuito de estudar algumas propriedades relacionadas aos conceitos estabelecidos ao longo deste texto para um sistema semidinâmico impulsivo em $\mathbb{R}^n$. As principais referências são [4] e [14].

4.1 Conexidade

Nesta seção, definimos o que é um conjunto indecomponível e a condição Ξ. A condição Ξ assume um papel importante no estudo sobre a conexidade do centro de Levinson.

Mostramos, por exemplo, condições suficientes para o centro de Levinson ser indecomponível, a variedade estável e o nosso espaço métrico X serem conexos.

Definição 4.1. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Um conjunto $A \subset X$ fechado (aberto) e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante é dito *indecomponível*, se não pode ser escrito como a reunião de dois conjuntos não vazios, fechados (aberto), positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e disjuntos.

O lema abaixo dá condições para um conjunto indecomponível ser conexo.

Lema 4.1. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio, fechado, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e indecomponível. Se toda componente conexa de A é I-invariante, então A é conexo.*

Prova: Suponha por absurdo, que A não seja conexo. Sejam $A_1, A_2 \subset A$ disjuntos, não vazios e fechados tais que $A = A_1 \cup A_2$. Provemos que A_1 é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. De fato, seja $x \in A_1$. Defina

$$T_i = \{t \in \mathbb{R}_+ : \widetilde{\pi}(x,t) \in A_i\}, \quad i \in \{1,2\}.$$

Note que $T_1 \neq \emptyset$ já que $\widetilde{\pi}(x,0) = x \in A_1$. Além disso, $\mathbb{R}_+ = T_1 \cup T_2$, sendo tal união disjunta. Mostremos que T_1 e T_2 são fechados. Dado $\lambda \in \overline{T_1}$, existe $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset T_1$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. Vamos considerar dois casos:

(1) $0 \leq \lambda < \phi(x)$;

(2) $\sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) \leq \lambda < \sum\limits_{i=0}^{k+1} \phi(x_i^+)$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$.

Considere inicialmente que vale (1). Pela convergência $\lambda_n \to \lambda$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \lambda_n < \phi(x)$, $\forall n \geq n_0$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) = \pi(x, \lambda_n) \to \pi(x, \lambda) = \widetilde{\pi}(x, \lambda).$$

Sendo $\{\widetilde{\pi}(x, \lambda_n)\}_{n\geq 1} \subset A_1$ e A_1 fechado, então $\widetilde{\pi}(x,\lambda) \in A_1$ e, então $\lambda \in T_1$ provando que T_1 é fechado. Agora, suponha que vale (2), isto é, $\sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) \leq \lambda < \sum\limits_{i=0}^{k+1} \phi(x_i^+)$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos dois casos:

(a) $\sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) < \lambda < \sum\limits_{i=0}^{k+1} \phi(x_i^+)$;

(b) $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+)$.

Considere inicialmente que vale (a). Assim, podemos escrever $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) + \lambda'$ com $0 < \lambda' < \phi(x_{k+1}^+)$. Além disso, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) < \lambda_n < \sum_{i=0}^{k+1} \phi(x_i^+), \quad \forall n \geq n_1.$$

Deste modo podemos escrever $\lambda_n = \sum\limits_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) + \lambda'_n$ com $0 < \lambda'_n < \phi(x_{k+1}^+)$ e $\lambda'_n \to \lambda'$, $\forall n \geq n_1$. Com isso,

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_n) = \pi(x_{k+1}^+, \lambda'_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_{k+1}^+, \lambda') = \widetilde{\pi}(x, \lambda).$$

Usando que $\{\widetilde{\pi}(x, \lambda_n)\}_{n \geq 1} \subset A_1$ e A_1 fechado, temos $\widetilde{\pi}(x, \lambda) \in A_1$ e, então $\lambda \in T_1$. Suponha agora que vale (b). Também vamos dividir em dois casos. Primeiramente, suponha que $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ possua uma subsequência $\{\lambda_{n_l}\}_{l \geq 1}$ tal que $\lambda_{n_l} \leq \lambda$, $\forall l \in \mathbb{N}$. A menos de uma subsequência podemos supor que $\lambda_{n_l} < \lambda$. Então, podemos escrever

$$\lambda_{n_l} = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(x_i^+) + \lambda'_{n_l},$$

com $0 < \lambda'_{n_l} < \phi(x_k^+)$ e $\lambda'_{n_l} \overset{l \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(x_k^+)$. (Se $k = 0$ então $\lambda_{n_l} = \lambda'_{n_l}$, $0 < \lambda'_{n_l} < \phi(x)$ e $\lambda'_{n_l} \overset{l \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$). Segue que,

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_{n_l}) = \pi(x_k^+, \lambda'_{n_l}) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pi(x_k^+, \phi(x_k^+)) = x_{k+1}.$$

Já que $\{\widetilde{\pi}(x, \lambda_{n_l})\}_{l \geq 1} \subset A_1$ e A_1 é fechado, então $x_{k+1} \in A_1$. Assim, $x_{k+1} \in A_1 \cap M$. Isso implica que $\widetilde{\pi}(x, \lambda) = x_{k+1}^+ = I(x_{k+1}) \in A_1$ e $\lambda \in T_1$. Agora, suponha que $\lambda_{n_l} > \lambda$ para uma subsequência $\{\lambda_{n_l}\}_{l \geq 1} \subset \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$. Para $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande podemos escrever

$$\lambda_{n_l} = \sum_{i=0}^{k} \phi(x_i^+) + \lambda'_{n_l}, \quad 0 < \lambda'_{n_l} < \phi(x_{k+1}^+)$$

e $\lambda'_{n_l} \to 0$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(x, \lambda_{n_l}) = \pi(x_{k+1}^+, \lambda'_{n_l}) \to \pi(x_{k+1}^+, 0) = x_{k+1}^+ \Rightarrow x_{k+1}^+ \in A_1.$$

Portanto, $\lambda \in T_1$, completando a demonstração que T_1 é fechado. Analogamente, provamos que T_2 é fechado. Como $\mathbb{R}_+$ é conexo, então $T_2 = \emptyset$. Logo, A_1 é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante.

Repetindo o argumento para A_2, obtemos que este conjunto também é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, contradizendo a hipótese que A ser indecomponível. Portanto, A é conexo. ■

Definição 4.2. Seja $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Um ponto $x \in M$ satisfaz a *condição* Ξ, se para todo conjunto $H \subset X$, com $\widetilde{L}^+(x) \subset H$, tem-se $\widetilde{L}^+(I(x)) \subset H$ e $\widetilde{L}^+(I(x)) \neq \emptyset$. Dizemos que M satisfaz a *condição* Ξ, se todo ponto $x \in M$ satisfaz a condição Ξ.

Teorema 4.1. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável. Suponha que M satisfaz a condição Ξ. Então, $\widetilde{W}^s(A) \subset X$ é aberto.*

Prova: Pelo Teorema (3.1) basta mostrar que $\widetilde{W}^s(A)$ é I-invariante. De fato, dado $x \in \widetilde{W}^s(A) \cap M$. Como A é compacto então $\widetilde{L}^+(x) \subset A$. Por hipótese M satisfaz a condição Ξ, logo $\widetilde{L}^+(I(x)) \subset A$ e $\widetilde{L}^+(I(x)) \neq \emptyset$. Sendo A assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável então $I(x) \in \widetilde{W}^s(A)$. Portanto, $\widetilde{W}^s(A)$ é I-invariante e $\widetilde{W}^s(A)$ é aberto. ■

Usaremos o lema a seguir para provar o Teorema 4.2. Sejam $A, B \subset X$ não vazios. A *distância* entre A e B é definida por

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, \quad b \in B\}.$$

Lema 4.2. *Sejam $(X,\pi;M,I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ compacto, orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável com $A \cap M = \emptyset$. Se $A_1, A_2 \subset X$ são não vazios, compactos, disjuntos e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes tais que $A = A_1 \cup A_2$ então:*

(a) os conjuntos A_1 e A_2 são orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estáveis;

(b) $\widetilde{W}^s(A) = \widetilde{W}^s(A_1) \cup \widetilde{W}^s(A_2)$;

(c) se o conjunto A é assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável, então os conjuntos A_1 e A_2 também são assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estáveis.

Prova: Sejam $\eta > 0$ tal que $B(A;\eta) \cap M = \emptyset$ e $s = \beta(A_1, A_2)$. Note que $s > 0$, uma vez que A_1 e A_2 são não vazios, compactos e disjuntos. Para $0 < \varepsilon < \min\{\frac{s}{2}; \eta\}$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, A) < \delta$ implica que $\rho(\widetilde{\pi}(x,t), A) < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$.

(a) Suponha por absurdo, que exista $x \in B(A_1;\delta)$ tal que $\widetilde{\pi}^+(x) \not\subset B(A_1;\varepsilon)$. Logo, existe $\lambda > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(x,\lambda) = \pi(x,\lambda) \in \partial B(A_1;\varepsilon)$. Assim, $\rho(\widetilde{\pi}(x,\lambda), A) = \varepsilon$ com $x \in B(A;\delta)$, contradizendo o fato de A ser orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Então, $\widetilde{\pi}^+(x) \subset B(A_1;\varepsilon)$, $\forall x \in A_1$. Portanto, A_1 é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável. Analogamente, provamos que A_2 é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável.

(b) Dados $x \in \widetilde{W}^s(A_1)$ e $y \in \widetilde{W}^s(A_2)$, então

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), A_1) = 0 = \lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(y,t), A_2).$$

Isso implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), A) = 0 = \lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(y,t), A),$$

visto que $\rho(\widetilde{\pi}(x,t), A_1) \geq \rho(\widetilde{\pi}(x,t), A)$ e $\rho(\widetilde{\pi}(y,t), A_2) \geq \rho(\widetilde{\pi}(y,t), A)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, $\widetilde{W}^s(A_1), \widetilde{W}^s(A_2) \subset \widetilde{W}^s(A)$. Logo, $\widetilde{W}^s(A_1) \cup \widetilde{W}^s(A_2) \subset \widetilde{W}^s(A)$. Vamos provar a outra inclusão. Dados $z \in \widetilde{W}^s(A)$ e $0 < \gamma < \frac{s}{2}$, usando o fato dos conjuntos A, A_1 e A_2 serem orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estáveis, existe $0 < \delta < \min\{\delta_0(\gamma, A); \delta_1(\gamma, A_1); \delta_2(\gamma, A_2)\}$, com $\delta_i(\gamma, A_i)$ satisfazendo $\widetilde{\pi}(B(A_i;\delta_i), [0,+\infty)) \subset B(A_i;\gamma)$, para $i \in \{0,1,2\}$ e $A_0 = A$. Seja $t_0 \geq 0$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(z,t_0), A) < \delta$. Como A é compacto e a reunião $A = A_1 \cup A_2$ é disjunta temos dois casos a serem considerados:

$$(i) \quad \rho(\widetilde{\pi}(z,t_0), A_1) < \delta;$$
$$(ii) \quad \rho(\widetilde{\pi}(z,t_0), A_2) < \delta.$$

A prova de ambos os casos são iguais, por isso, faremos somente o caso (i). Se vale (i), então $\rho(\widetilde{\pi}(z,t), A_1) < \gamma$, $\forall t \geq t_0$. Isso implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(z,t), A_1) = 0 \Rightarrow z \in \widetilde{W}^s(A_1) \Rightarrow \widetilde{W}^s(A) \subset \widetilde{W}^s(A_1) \cup \widetilde{W}^s(A_2).$$

(c) Pelo Lema 3.7, segue que $\widetilde{W}^s(A_1) \cap \widetilde{W}^s(A_2) = \emptyset$. Seja $0 < r < \frac{s}{2}$, tal que $B(A;r) \subset \widetilde{W}^s(A)$. Note que $B(A;r) = B(A_1;r) \cup B(A_2;r)$. Suponha por absurdo, que $B(A_1;r) \subset \widetilde{W}^s(A_2)$. Isso implica que dado $w \in A_1$, vale o limite

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(w,t), A_2) = 0.$$

Pelo Teorema 2.7 o conjunto $\widetilde{L}^+(w) \neq \emptyset$, compacto e $\widetilde{L}^+(w) \subset A_2$. Por hipótese, A_1 é fechado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Logo $\widetilde{L}^+(w) \subset A_1$, contradizendo o fato dos conjuntos A_1 e A_2 serem disjuntos. Portanto, $B(A_1; r) \subset \widetilde{W}^s(A_1)$. Analogamente provamos que $B(A_2; r) \subset \widetilde{W}^s(A_2)$, demonstrando o lema. ■

Na sequência vamos mostrar que, se X é indecomponível e o sistema $(X, \pi; M, I)$ é compacto k-dissipativo com M satisfazendo a condição Ξ, então o centro de Levinson também é indecomponível.

Teorema 4.2. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Suponha que M satisfaz a condição Ξ. Se X é indecomponível, então J também é.*

Prova: Suponha por absurdo, que J não seja indecomponível. Sejam $J_1, J_2 \subset J$ não vazios, compactos, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e disjuntos tais que $J = J_1 \cup J_2$. Pelo Lema 4.2, J_1 e J_1 são assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estáveis. Além disso, $\widetilde{W}^s(J) = \widetilde{W}^s(J_1) \cup \widetilde{W}^s(J_2)$. Como J é globalmente assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável, então $\widetilde{W}^s(J) = X$. Logo, $X = \widetilde{W}^s(J_1) \cup \widetilde{W}^s(J_2)$. Utilizando o Lema 3.6, o Teorema 4.1 e o Lema 3.7, segue que $\widetilde{W}^s(J_1)$ e $\widetilde{W}^s(J_2)$ são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes, abertos e disjuntos. Mas isso contradiz a hipótese que X é indecomponível. Portanto, J é indecomponível. ■

O lema, abaixo, mostra que sobre certas hipóteses a variedade estável é indecomponível.Tal resultado será utilizado na prova do Teorema 4.3.

Lema 4.3. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ um conjunto não vazio, compacto e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Se A é indecomponível e $\widetilde{W}^s(A)$ é fechado, então $\widetilde{W}^s(A)$ é indecomponível.*

Prova: Suponha por absurdo, que $\widetilde{W}^s(A)$ não seja indecomponível. Sejam $A_1, A_2 \subset \widetilde{W}^s(A)$ não vazios, fechados, disjuntos e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes tais que

$$\widetilde{W}^s(A) = A_1 \cup A_2.$$

Sejam $B_1 = A_1 \cap A$ e $B_2 = A_2 \cap A$. Dado $x \in A_1$, $\widetilde{\pi}^+(x) \subset A_1$. Utilizando o Teorema 2.7 e que $A_1 \subset \widetilde{W}^s(A)$, então $\widetilde{L}^+(x) \neq \emptyset$ e $\widetilde{L}^+(x) \subset A_1 \cap A = B_1$. Isso implica que $B_1 \neq \emptyset$.

Analogamente, obtemos que $B_2 \neq \emptyset$. Assim, B_1 e B_2 são não vazios, fechados, disjuntos e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes. Além disso, como $A \subset \widetilde{W}^s(A) = A_1 \cup A_2$, pois A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, então $A = B_1 \cup B_2$, contradizendo o fato de A ser indecomponível. ■

O resultado, a seguir, mostra que X é indecomponível sempre que J é indecomponível.

Teorema 4.3. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Se J é indecomponível, então X também é indecomponível.*

Prova: Sendo $\widetilde{W}^s(J) = X$, segue do Lema 4.3 que X é indecomponível. ■

Nosso próximo teorema fornece condições suficientes para o centro de Levinson ser conexo.

Teorema 4.4. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Assuma que M satisfaça a condição Ξ. Se X é conexo, então J é conexo.*

Prova: Suponha por absurdo, que J não seja conexo. Pelo Lema 4.1, J não é indecomponível. Assim, usando o Teorema 4.2, X não é indecomponível. Logo, X não é conexo, contradizendo a hipótese. Portanto, J é conexo. ■

Em seguida, apresentamos um teorema que é "quase" uma recíproca do Teorema 4.4.

Teorema 4.5. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo. Suponha que toda componente conexa de X seja I-invariante. Se J é conexo, então X é conexo.*

Prova: Suponha por absurdo, que X não seja conexo. Pelo Lema 4.1, segue que X não é indecomponível. Então, pelo Lema 4.3, J não é indecomponível. Isso implica que J não é conexo, contradizendo a hipótese. Portanto, X é conexo. ■

Visando provar o Teorema 4.6, faremos o próximo lema.

Lema 4.4. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio, compacto, assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável com $A \cap M = \emptyset$. Suponha que M satisfaça a condição Ξ. Se $\widetilde{W}^s(A)$ é indecomponível, então A é indecomponível.*

Prova: Suponha por absurdo, que A não seja indecomponível e sejam $A_1, A_2 \subset A$ não vazios, compactos, disjuntos e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes tais que $A = A_1 \cup A_2$. Pelo Lema 3.7, $\widetilde{W^s}(A_1) \cap \widetilde{W^s}(A_2) = \emptyset$. Utilizando o Lema 4.2, os conjuntos A_1 e A_2 são assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estáveis e vale

$$\widetilde{W^s}(A) = \widetilde{W^s}(A_1) \cup \widetilde{W^s}(A_2).$$

Note que pelo Lema 3.6 e pelo Teorema 4.1, as variedades $\widetilde{W^s}(A_1)$ e $\widetilde{W^s}(A_2)$ são positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes e abertas, contradizendo a hipótese de $\widetilde{W^s}(A)$ ser indecomponível. Portanto, A é indecomponível. ■

Teorema 4.6. *Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $A \subset X$ não vazio, compacto, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante com $A \cap M = \emptyset$. Então:*

(a) *suponha que toda componente conexa de $\widetilde{W^s}(A)$ seja I-invariante e que $\widetilde{W^s}(A)$ seja fechado. Se A é conexo, então $\widetilde{W^s}(A)$ também é.*

(b) *suponha que A seja assintoticamente $\widetilde{\pi}$-estável e que M satisfaça a condição Ξ. Se $\widetilde{W^s}(A)$ é conexo, então A é conexo.*

Prova: (a) Sendo A conexo, tem-se que A é indecomponível. Pelo Lema 4.3, $\widetilde{W^s}(A)$ é indecomponível, já que $\widetilde{W^s}(A)$ é fechado. Segue do Lema 4.1 que $\widetilde{W^s}(A)$ é conexo.

(b) Se $\widetilde{W^s}(A)$ é conexo, então ele é indecomponível. Pelo Lema 4.4, A é indecomponível. A interseção $A \cap M = \emptyset$ implica que $C \cap M = \emptyset$ para toda componente conexa C de A. Portanto, usando o Lema 4.1, A é conexo. ■

4.2 Atrator global

Vamos definir nesta seção os seguintes conceitos para um sistema semidinâmico impulsivo: atrator global, condição de Ladyzhenskaya, $\widetilde{\pi}$-assintoticamente compacto, completamente contínuo, fracamente b-dissipativo e fracamente k-dissipativo. Obtemos condições necessárias e suficientes para a existência de um atrator global. Relacionando os conceitos como dissipatividade e $\widetilde{\pi}$-assintoticamente compacto para um sistema impulsivo, mostramos que tal sistema é k-dissipativo. Terminamos esta seção com o Teorema 4.12. Tal teorema prova, por exemplo, que ser fracamente b-dissipativo é equivalente a ser fracamente k-dissipativo em um sistema impulsivo que satisfaz a condição de Ladyzhenskaya e o conjunto prolongado impulsivo não intersecta M.

Definição 4.3. Seja $A \subset X$ um conjunto não vazio e compacto. Dizemos que A é um *atrator global* do sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$, se satisfaz as seguintes condições:

(1) $A \cap M = \emptyset$;

(2) A é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante;

(3) A é um atrator da família $\mathbb{B}(X)$, isto é, dado $B \in \mathbb{B}(X)$ vale o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B, t), A) = 0.$$

O próximo teorema relaciona a existência de um atrator global com o fato de um sistema semidinâmico impulsivo ser limitado k-dissipativo ou compacto k-dissipativo.

Teorema 4.7. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(X, \pi; M, I)$ *admite um atrator global;*

(b) $(X, \pi; M, I)$ *é limitado k-dissipativo;*

(c) $(X, \pi; M, I)$ *é compacto k-dissipativo e seu centro de Levinson é um atrator para a família $\mathbb{B}(X)$.*

Prova: As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(c) \Rightarrow (a)$ seguem diretamente das definições. Mostremos que $(b) \Rightarrow (c)$. Note que sendo o sistema $(X, \pi; M, I)$ limitado k-dissipativo, então ele é compacto k-dissipativo. Logo, resta provar que o centro de Levinson J é um atrator para a família $\mathbb{B}(X)$. Dado $A \in \mathbb{B}(X)$. Como o sistema $(X, \pi; M, I)$ é limitado k-dissipativo, existe $K \in \mathbb{K}(X)$, $K \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A, t), K) = 0. \tag{4.1}$$

Usando o Teorema 2.7, o conjunto $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), \widetilde{L}^+(A)) = 0. \tag{4.2}$$

Suponha inicialmente que, $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(A))$. Sendo J um atrator para a família $\mathbb{K}(X)$ e $\widetilde{L}^+(A) \in \mathbb{K}(X)$, então $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(A)) \subset J$. Segue de (4.2), que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), J) = 0.$$

Portanto, J é um atrator para $\mathbb{B}(X)$. Assim, mostrando que $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(A))$ o resultado fica provado. De fato, usando o limite (4.1), $\widetilde{L}^+(A) \subset K$. Daí, $\widetilde{L}^+(A)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, isto é, $\widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(A), t) \subset \widetilde{L}^+(A)$, $\forall t \geq 0$. Sejam $y \in \widetilde{L}^+(A)$ e $t \geq 0$. Existem $\{w_n\}_{n\geq 1} \subset A$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \to +\infty$, de modo que $\widetilde{\pi}(w_n, t_n) \to y$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ e $\forall n \geq n_0$. Assim, $t_n - t > 0$, $\forall n \geq n_0$, e $t_n - t \to +\infty$. Usando o Teorema 2.7 para a sequência $\{\widetilde{\pi}(w_n, t_n - t)\}_{n\geq n_0}$, podemos supor que $\widetilde{\pi}(w_n, t_n - t) \to b \in \widetilde{L}^+(A)$. A inclusão $\widetilde{L}^+(A) \subset K$ e o Lema 2.6, implicam que

$$\widetilde{\pi}(w_n, t_n) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(w_n, t_n - t), t) \to \widetilde{\pi}(b, t).$$

Então, $y = \widetilde{\pi}(b,t)$. Portanto, $\widetilde{\pi}(\widetilde{L}^+(A), t) = \widetilde{L}^+(A)$, $t \geq 0$. Daí, podemos concluir que $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(A))$ e o teorema está provado. ∎

A definição abaixo tem o intuito de enfraquecer a noção de um sistema semidinâmico impulsivo ser limitado k-dissipativo.

Definição 4.4. Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo. Dizemos que o sistema satisfaz a *condição de Ladyzhenskaya*, se para todo $A \in \mathbb{B}(X)$ existe $K_A \in \mathbb{K}(X)$ não vazio, com $K_A \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), K_A) = 0.$$

Lema 4.5. *Se o sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é limitado k-dissipativo, então o sistema satisfaz a condição de Ladyzhenskaya.*

Prova: Segue diretamente da definição. ∎

Se um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é limitado k-dissipativo, então ele é ponto k-dissipativo. Porém, a recíproca deste resultado não vale em geral como foi visto no Exemplo 3.4. Em seguida, provamos que se um sistema $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo, satisfaz a condição de Ladyzhenskaya e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$, então o sistema é limitado k-dissipativo.

Teorema 4.8. *Um sistema $(X, \pi; M, I)$ é limitado k-dissipativo se, e somente se, é ponto k-dissipativo, $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$ e satisfaz a condição de Ladyzhenskaya.*

Prova: Basta mostramos a condição suficiente. Provemos inicialmente que o sistema é compacto k-dissipativo. De fato, dado $A \in \mathbb{K}(X)$. Pela condição de Ladyzhenskaya, existe $K_A \in \mathbb{K}(X)$ não vazio, $K_A \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A, t), K_A) = 0.$$

Pelo Teorema 2.7, o conjunto $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A, t), \widetilde{L}^+(A)) = 0.$$

Usando a Proposição 2.9, concluímos que $\widetilde{\pi}^+(A)$ é relativamente compacto. Então, pelo Teorema 3.9, o sistema é compacto k-dissipativo. Seja J seu centro de Levinson. Utilizando o Teorema 4.7, basta mostrar que J é um atrator para a família $\mathbb{B}(X)$. Dado $H \in \mathbb{B}(X)$. Pela condição de Ladyzhenskaya, existe $K_H \in \mathbb{K}(X)$ não vazio, $K_H \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(H, t), K_H) = 0.$$

Novamente, pelo Teorema 2.7, o conjunto $\widetilde{L}^+(H)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(H, t), \widetilde{L}^+(H)) = 0. \tag{4.3}$$

Repetindo os mesmos argumentos feitos na demonstração do Teorema 4.7, podemos concluir que $\widetilde{L}^+(H) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(H)) \subset J$. De (4.3), segue que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(H, t), J) = 0.$$

Logo, J é um atrator para $\mathbb{B}(X)$. Portanto, o sistema é limitado k-dissipativo. ■

Se considerarmos na Definição 4.4 os conjuntos em $\mathbb{B}(X)$ positivamente $\widetilde{\pi}$-invariantes, temos a seguinte definição.

Definição 4.5. Um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é dito *$\widetilde{\pi}$-assintoticamente compacto*, se para todo $A \in \mathbb{B}(X)$ positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, existe $K_A \in \mathbb{K}(X)$ não vazio, com $K_A \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), K_A) = 0.$$

Utilizando a Definição 4.5 obtemos uma condição suficiente para um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo ser localmente k-dissipativo.

Teorema 4.9. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo compacto k-dissipativo e $\widetilde{\pi}$-assintoticamente compacto, então o sistema é localmente k-dissipativo.*

Prova: Seja J o centro de Levinson do sistema. Recorrendo ao Teorema 3.11, basta mostrar que J é uniformente $\widetilde{\pi}$-atrator. Como J é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, J) > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(J;\delta), [0,+\infty)) \subset B(J;\varepsilon).$$

Seja $A = \widetilde{\pi}^+(B(J;\delta))$. Assim, A é limitado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Além disso, existe $K_A \in \mathbb{K}(X)$ não vazio, $K_A \cap M = \emptyset$, satisfazendo

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), K_A) = 0.$$

Pelo Teorema 2.7, o conjunto $\widetilde{L}^+(A)$ é não vazio, compacto e

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), \widetilde{L}^+(A)) = 0. \tag{4.4}$$

Novamente, seguindo os passos da demonstração do Teorema 4.7, podemos concluir que $\widetilde{L}^+(A) = \widetilde{L}^+(\widetilde{L}^+(A)) \subset J$. Então, por (4.4),

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), J) = 0.$$

Sendo $B(J;\delta) \subset A$, segue que o sistema é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator. ■

Na sequência, estabelecemos condições para um sistema dissipativo ser k-dissipativo com respeito a uma família qualquer de conjuntos em X.

Lema 4.6. *Se o sistema semidinâmico impulsivo* $(X,\pi;M,I)$ *é dissipativo com respeito a família* $\mathbb{M}$ *e* $\widetilde{\pi}$*-assintoticamente compacto, então ele é k-dissipativo com respeito a família* $\mathbb{M}$.

Prova: Dados $A \in \mathbb{M}$ não vazio e $\varepsilon > 0$. Como o sistema é $\mathbb{M}$-dissipativo, existem $K \subset X \backslash M$ limitado e $l = l(\varepsilon; A) > 0$ de forma que

$$\widetilde{\pi}(A,t) \subset B(K;\varepsilon), \quad \forall t \geq l.$$

Seja $Y = \{x \in \overline{B(K;\varepsilon)} : \widetilde{\pi}(x,t) \in \overline{B(K;\varepsilon)}, \quad t \geq 0\}$. Segue da própria definição que $Y \neq \emptyset$, limitado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Por hipótese, existe $K_Y \subset X \backslash M$ não vazio e compacto tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(Y,t), K_Y) = 0.$$

Assim, $\widetilde{L}^+(Y) \subset K_Y$, $\widetilde{L}^+(Y) \cap M = \emptyset$ e $\widetilde{L}^+(Y)$ é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante. Seja $A_l = \widetilde{\pi}^+(\widetilde{\pi}(A,l))$. Note que A_l é limitado e positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante então, utilizando o Teorema 2.7, $\widetilde{L}^+(A_l) \neq \emptyset$, compacto e

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A_l,t), \widetilde{L}^+(A_l)) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), \widetilde{L}^+(A_l)) = 0,$$

já que $\widetilde{\pi}(A,t) \subset A_l$, $\forall t \geq l$. Segue da inclusão $A_l \subset Y$ que $\widetilde{L}^+(A_l) \subset \widetilde{L}^+(Y)$. Assim,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), \widetilde{L}^+(Y)) = 0.$$

Portanto, o sistema é k-dissipativo com respeito a família $\mathbb{M}$. ■

Segue diretamente do Lema 4.6 os seguintes resultados.

Corolário 4.1. *Se o sistema semidinâmico impulsivo* $(X,\pi;M,I)$ *é ponto (compacto, localmente ou limitado) dissipativo e* $\widetilde{\pi}$*-assintoticamente compacto, então o sistema* $(X,\pi;M,I)$ *é ponto (compacto, localmente ou limitado) k-dissipativo.*

Corolário 4.2. *Seja* $(X,\pi;M,I)$ *um sistema semidinâmico impulsivo* $\widetilde{\pi}$*-assintoticamente compacto. Então, o sistema* $(X,\pi;M,I)$ *é compacto dissipativo se, e somente se, é localmente dissipativo.*

Prova: Suponha que o sistema $(X, \pi; M, I)$ seja compacto dissipativo e vamos provar que ele é localmente dissipativo. Pelo Corolário 4.1, o sistema é compacto k-dissipativo. Logo, pelo Teorema 4.9, o sistema é localmente k-dissipativo. Em particular, o sistema é localmente dissipativo. A recíproca é imediata. ■

Os conceitos de sistemas completamente contínuos, fracamente b-dissipativos e fracamente k-dissipativos são estabelecidos em [4]. Na próxima definição tais conceitos são apresentados para sistemas com ação impulsiva.

Definição 4.6. Dizemos que um sistema semidinâmico impulsivo $(X, \pi; M, I)$ é:

(1) *completamente contínuo*, se para todo $A \in \mathbb{B}(X)$ existe $l = l(A) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(A, l)$ é relativamente compacto e $\overline{\widetilde{\pi}(A, l)} \cap M = \emptyset$;

(2) *fracamente b-atrator*, se existe um conjunto não vazio e limitado $B_0 \subset X$ tal que $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B_0 \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. Neste caso, dizemos que B_0 é um b-atrator fraco do sistema;

(3) *fracamente k-atrator*, se existe um conjunto não vazio e compacto $K_0 \subset X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in X$ existe $\tau = \tau(\varepsilon, x) > 0$ com $\widetilde{\pi}(x, \tau) \in B(K_0; \varepsilon)$. Neste caso, dizemos que K_0 é um k-atrator fraco do sistema.

Teorema 4.10. *Se $(X, \pi; M, I)$ é um sistema semidinâmico impulsivo fracamente b-dissipativo e completamente contínuo, então o sistema $(X, \pi; M, I)$ é fracamente k-dissipativo. Além disso, o k-atrator fraco não intersecta M.*

Prova: Como o sistema é fracamente b-dissipativo, existe $B_0 \in \mathbb{B}(X)$ não vazio tal que $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B_0 \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. Sendo o sistema completamente contínuo, existe $\alpha_0 = \alpha_0(B_0) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(B_0, \alpha_0)$ é relativamente compacto e $\overline{\widetilde{\pi}(B_0, \alpha_0)} \cap M = \emptyset$. Seja $K_0 = \overline{\widetilde{\pi}(B_0, \alpha_0)}$. Note que K_0 é não vazio, compacto e $K_0 \cap M = \emptyset$. Dado $x \in X$, $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B_0 \neq \emptyset$ implica que existe $t_0 \geq 0$ de modo que $\widetilde{\pi}(x, t_0) \in B_0$. Assim,

$$\widetilde{\pi}(x, t_0 + \alpha_0) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x, t_0), \alpha_0) \in \widetilde{\pi}(B_0, \alpha_0) \subset K_0.$$

Então, $\widetilde{\pi}^+(x) \cap K_0 \neq \emptyset$. Portanto, o sistema é fracamente k-dissipativo com $K_0 \cap M = \emptyset$. ■

Teorema 4.11. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo completamente contínuo e fracamente k-dissipativo com K sendo o seu k-atrator fraco. Se K é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator e $K \cap M = \emptyset$, então o sistema admite um atrator global.*

Prova: Suponha inicialmente que o sistema seja compacto k-dissipativo. Seja J o seu centro de Levinson. Usando a hipótese do sistema ser completamente contínuo, dado $A \in \mathbb{B}(X)$ existe $l = l(A) > 0$ tal que $\overline{\widetilde{\pi}(A,l)}$ é compacto e $\overline{\widetilde{\pi}(A,l)} \cap M = \emptyset$. Sendo J atrator da família $\mathbb{K}(X)$, então

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(\overline{\widetilde{\pi}(A,l)}, t), J) = 0.$$

Isso implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\zeta > 0$ tal que $\rho(\widetilde{\pi}(x, l+t), J) < \varepsilon$, para todo $t \geq \zeta$ e todo $x \in A$. Assim, $\rho(\widetilde{\pi}(x,s), J) < \varepsilon$ para todo $s \geq l + \zeta$ e todo $x \in A$. Logo,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A,t), J) = 0.$$

Isso mostra que J é um atrator global para o sistema. Assim, resta provar que o sistema é compacto k-dissipativo. Pelo Teorema 3.6, basta mostrar que para todo $\gamma > 0$ e todo $x \in X$ existem $l = l(x, \gamma) > 0$ e $\delta = \delta(x, \gamma) > 0$ tais que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\delta), t) \subset B(x;\gamma), \quad \forall t \geq l.$$

Dados $\gamma > 0$ e $x \in X$. Como K é uniformemente $\widetilde{\pi}$-atrator, existem $\delta = \delta(\gamma) > 0$ e $T = T(\gamma) > 0$ tais que

$$\widetilde{\pi}(B(K;\delta), t) \subset B(K;\gamma), \quad \forall t \geq T.$$

De $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B(K;\delta) \neq \emptyset$, existe $t_1 = t_1(\gamma, x) > 0$, $t_1 \neq \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(x_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(x, t_1) \in B(K;\delta)$. Seja $v > 0$ de modo que

$$B(\widetilde{\pi}(x,t_1); v) \subset B(K;\delta).$$

Vamos separar a demonstração em dois casos. Suponha inicialmente que $x \notin M$. Pela continuidade de π e I, existe $\eta > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta), t_1) \subset B(K;\delta).$$

Isso implica que

$$\widetilde{\pi}(B(x;\eta), t) \subset B(K;\gamma), \quad \forall t \geq t_1 + T.$$

Provando o teorema para este caso. Agora, suponha que $x \in M$. Seja $F(L, [0, 2\lambda])$ um STC-tubo através de x com seção S. Por definição, o conjunto $F(L, [0, 2\lambda])$ é uma vizinhança de x, logo, existe $\eta > 0$ tal que $B(x; \eta) \subset F(L, [0, 2\lambda])$. Sejam

$$H_1 = B(x; \eta) \cap F(L, (\lambda, 2\lambda]) \text{ e } H_2 = B(x; \eta) \cap F(L, [0, \lambda]).$$

Existe $0 < \eta_1 < \eta$ tal que $\widetilde{\pi}(B(x; \eta_1) \cap H_2, t_1) \subset B(\widetilde{\pi}(x, t_1); v) \subset B(K; \delta)$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(B(x; \eta_1) \cap H_2, t) \subset B(K; \gamma), \ \ \forall t \geq t_1 + T.$$

Como $I(x) \notin M$ e $\widetilde{\pi}^+(I(x)) \cap B(K; \delta) \neq \emptyset$, existe $t_2 = t_2(I(x), \gamma) > 0$, $t_2 \neq \sum\limits_{j=0}^{k} \phi(I(x)_j^+)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\widetilde{\pi}(I(x), t_2) \in B(K; \delta)$. Assim, existe $0 < \eta_2 < \eta$ de modo que $\widetilde{\pi}(B(x; \eta_2) \cap H_1, t_2) \subset B(x; \delta)$. Então,

$$\widetilde{\pi}(B(x; \eta_2) \cap H_1, t) \subset B(K; \gamma), \ \ \forall t \geq t_2 + T.$$

Seja $0 < \tau < \min\{\eta_1; \eta_2\}$. Segue que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \tau), t) \subset B(K; \gamma), \ \ \forall t \geq \max\{t_1 + T; t_2 + T\}.$$

Portanto, o sistema é compacto k-dissipativo, provando o teorema. ■

A seguir, provamos um teorema que relaciona vários tipos de dissipatividade.

Teorema 4.12. *Seja $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo satisfazendo a condição de Ladyzhenskaya e $\widetilde{D}^+(\Omega) \cap M = \emptyset$. Então, são equivalentes:*

(a) $(X, \pi; M, I)$ é fracamente b-atrator;

(b) existe um conjunto limitado e não vazio $B_0 \subset X$ tal que para todo $x \in X$, existe $\tau = \tau(x) > 0$ com $\widetilde{\pi}(x, t) \in B_0$, $\forall t \geq \tau$;

(c) $(X, \pi; M, I)$ é ponto k-dissipativo;

(d) $(X, \pi; M, I)$ é fracamente k-atrator;

(e) $(X, \pi; M, I)$ é limitado k-dissipativo;

(*f*) *existe um conjunto limitado e não vazio* $B_1 \subset X$ *tal que para todo* $B \in \mathbb{B}(X)$, *existe* $l(B) > 0$ *com* $\widetilde{\pi}(B,t) \subset B_1$, $\forall t \geq l(B)$.

Prova: $(b) \Rightarrow (a)$ Seja $B_0 \subset X$ um conjunto não vazio e limitado tal que para todo $x \in X$, existe $\tau = \tau(x) > 0$ com $\widetilde{\pi}(x,t) \in B_0$, $\forall t \geq \tau$. Assim, $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B_0 \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Portanto, o sistema é fracamente b-atrator.

$(c) \Rightarrow (d)$ Segue imediatamente das definições.

$(f) \Rightarrow (b)$ Note que o item (b) é um caso particular do item (f).

$(e) \Rightarrow (f)$ Seja $K \subset X \backslash M$ compacto e um atrator para $\mathbb{B}(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $B_0 = B(K;\varepsilon) \in \mathbb{B}(X)$. Como K é um atrator de $\mathbb{B}(X)$, dado $A \in \mathbb{B}(X)$ existe $l(A) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(A,t) \subset B_0$, $\forall t \geq l(A)$. Portanto, vale (f).

$(a) \Rightarrow (c)$ Seja $x \in X$. Por hipótese o sistema é fracamente b-atrator, logo existe $B_2 \in \mathbb{B}(X)$ não vazio tal que $\widetilde{\pi}^+(x) \cap B_2 \neq \emptyset$. Considere $\tau = \tau(x) \geq 0$ tal que $\widetilde{\pi}(x,\tau) \in B_2$. Usando a condição de Ladyzhenskaya juntamente com o Teorema 2.7, o conjunto $K_1 = \widetilde{L}^+(B_2)$ é não vazio, compacto, $K_1 \cap M = \emptyset$ e

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B_2,t), K_1) = 0.$$

Isso implica que

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), K_1) = 0.$$

Portanto, o sistema é ponto k-dissipativo.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sejam K_2 o k-atrator fraco do sistema e $\varepsilon > 0$. Pela condição de Ladyzhenskaya e pelo Teorema 2.7, $W = \widetilde{L}^+(B(K_2;\varepsilon)) \neq \emptyset$ é não vazio, compacto, $W \cap M = \emptyset$, e

$$\lim_{t\to+\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(K_2;\varepsilon),t), W) = 0.$$

Para todo $x \in X$, existe $\tau = \tau(x,\varepsilon) > 0$ tal que $\widetilde{\pi}(x,\tau) \in B(K_2;\varepsilon)$. Daí,

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\widetilde{\pi}(x,t), W) = 0.$$

Isso implica que o sistema é ponto k-dissipativo. Portanto, o sistema é limitado k-dissipativo pelo Teorema 4.8. ∎

4.3 Aplicação

Nesta seção vamos estudar o sistema semidinâmico impulsivo (4.6). Mostraremos, por exemplo, que tal sistema é limitado k-dissipativo.

Considere a equação

$$\dot{x} = -f(x), \tag{4.5}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Suponha que todas as soluções de (4.5) estejam definidas em $\mathbb{R}$. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ fechado e $I : M \to \mathbb{R}^n$ contínua, a aplicação impulso. Suponha que as hipóteses $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ e $(\mathcal{H}3)$ sejam satisfeitas. Agora, seja $W \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\nabla W(v) f(v) \geq -\alpha_1 + \alpha_2 W(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $W(v) \to +\infty$ quando $|v| \to +\infty$;

(iii) $W(I(v)) \leq \alpha_3 W(v)$, $\forall v \in M$;

(iv) $W(v) > \mu$, $\forall v \in M$,

onde $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ e $\mu > 0$. Considere o sistema impulsivo associado a (4.5):

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x), \\ I : M \to \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.6}$$

Provemos que (4.6) é localmente k-dissipativo.

Teorema 4.13. *Suponha que $4\alpha_1 < \mu\alpha_2$. Se o semifluxo de (4.6) encontrar o conjunto M no máximo $m \geq 1$ vezes, então o sistema (4.6) é localmente k-dissipativo.*

Prova: Seja $K = \{v \in \mathbb{R}^n : W(v) \leq \mu\}$. Pelas condições (ii) e (iv) da definição de W, segue que K é limitado e $K \cap M = \emptyset$. Usando a continuidade de W concluímos que K é compacto. Vamos provar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existem $\delta_x > 0$ e $T > 0$ tais que $W(\widetilde{\pi}(y, t)) < \mu$ para todo $y \in B(x;\delta_x)$ e todo $t \geq T$, pois isso implica que $\widetilde{\pi}(y,t) \in K$ para todo $y \in B(x;\delta_x)$ e todo $t \geq T$. Logo,

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in B(x;\delta_x)} \rho(\widetilde{\pi}(y,t), K) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, o sistema é localmente k-dissipativo. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, seja $x(t) = \pi(x_0,t)$, $t \geq 0$, a solução da equação (4.5) tal que $x(0) = x_0$. Vamos separar a demonstração em 4 casos.

Caso 1: Suponha que $x_0 \notin M$ e $\phi(x_0) = +\infty$.

Como $x_0 \notin M$, então ϕ é contínua em x_0. Assim, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\phi(y) = +\infty$, $\forall y \in B(x_0;\delta_0)$. Note que $\widetilde{\pi}(x_0,t) = \pi(x_0,t)$, $\forall t \geq 0$. Derivando a função W, temos

$$W'(\pi(x_0,t)) = \nabla W(x(t))x'(t) = -\nabla W(x(t))f(x(t)) \leq \alpha_1 - \alpha_2 W(\pi(x_0,t)), \;\; \forall t \geq 0.$$

Como

$$W(\pi(x_0,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}W(x_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-e^{-\alpha_2 t}) \leq e^{-\alpha_2 t}W(x_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \;\; \forall t \geq 0,$$

então

$$W(\widetilde{\pi}(x_0,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}W(x_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Por hipótese $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{\mu}{4}$. Logo, podemos escrever

$$W(\widetilde{\pi}(x_0,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}W(x_0) + \frac{\mu}{4}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Usando a continuidade da função W, existe $\beta > 0$ satisfazendo $W(y) < \beta$, $\forall y \in B(x_0;\delta_0)$. Assim,

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}\beta + \frac{\mu}{4}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Pela forma que δ_0 foi escolhido, temos

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}\beta + \frac{\mu}{4},$$

para todo $t \geq 0$ e todo $y \in B(x_0;\delta_0)$. Seja $T = \max\{0; -\frac{1}{\alpha_2}\ln(\frac{\mu}{2\beta})\}$. Daí,

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) \leq e^{-\alpha_2 t}\beta + \frac{\mu}{4} \leq \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{4} = \frac{3\mu}{4} < \mu,$$

para todo $t \geq T$ e todo $y \in B(x_0;\delta_0)$, provando o Caso 1.

Caso 2: $x_0 \notin M$ e $\phi(x_0) < +\infty$.

Por hipótese, existe $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ tal que $\phi((x_0)_j^+) < +\infty$ e $\phi((x_0)_{j+1}^+) = +\infty$. Para $0 \leq t \leq \phi(x_0^+)$, temos

$$W(\pi(x_0, t)) \leq e^{-\alpha_2 t} W(x_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Assim, para $0 \leq t < \phi(x_0^+)$, vale

$$W(\widetilde{\pi}(x_0, t)) \leq e^{-\alpha_2 t} W(x_0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Utilizando que $(x_0)_1 = \pi(x_0, \phi(x_0)) \in M$ e a hipótese (iii) na definição da função W, temos

$$\begin{aligned} W(\widetilde{\pi}(x_0, \phi(x_0))) = W((x_0)_1^+) = W(I(\pi(x_0, \phi(x_0)))) &\leq \alpha_2 W(\pi(x_0, \phi(x_0))) \\ &\leq \alpha_3 e^{-\alpha_2 \phi(x_0)} W(x_0) + \tfrac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese (i) da definição da função W para $\phi(x_0) \leq t < \phi(x_0) + \phi((x_0)_1^+)$,

$$\begin{aligned} W(\widetilde{\pi}(x_0, t)) &\leq e^{-\alpha_2 (t - \phi(x_0))} W((x_0)_1^+) + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ &\leq e^{-\alpha_2 (t - \phi(x_0))} [\alpha_3 e^{-\alpha_2 \phi(x_0)} W(x_0) + \tfrac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}] + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ &= \alpha_3 e^{-\alpha_2 t} W(x_0) + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 + \alpha_3 e^{-\alpha_2 (t - \phi(x_0))}). \end{aligned}$$

Repetindo o processo acima, obtemos que

$$W(\widetilde{\pi}(x_0, t)) \leq \alpha_3^{j+1} W(x_0) e^{-\alpha_2 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(1 + \sum_{l=0}^{j} \alpha_3^{j+1-l} e^{-\alpha_2 \left[t - \sum\limits_{i=0}^{l} \phi((x_0)_i^+) \right]} \right), \tag{4.7}$$

para $t \geq \sum\limits_{i=0}^{j} \phi((x_0)_i^+)$. Seja $T_0 = \phi(x_0) + \ldots + \phi((x_0)_j^+)$. Como M satisfaz a condição de tubo, I é contínua em M e π é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $B(x_0; \delta_0) \cap M = \emptyset$, $\phi(y_j^+) < +\infty$, $\phi(y_{j+1}^+) = +\infty$ e

$$|\phi(y_0) + \ldots + \phi((y_0)_j^+) - T_0| < 1,$$

para todo $y \in B(x_0; \delta_0)$. Seja $\beta > 0$ tal que $W(y) < \beta$, $\forall y \in B(x_0; \delta_0)$. Por (4.7), segue que

$$\begin{aligned} W(\widetilde{\pi}(y, t)) &\leq \alpha_3^{j+1} W(y) e^{-\alpha_2 t} + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(1 + \sum_{l=0}^{j} \alpha_3^{j+1-l} e^{-\alpha_2 \left[t - \sum\limits_{i=0}^{l} \phi(y_i^+) \right]} \right) \\ &\leq \alpha_3^{j+1} \beta e^{-\alpha_2 t} + \tfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(1 + \sum_{l=0}^{j} \alpha_3^{j+1-l} e^{-\alpha_2 \left[t - \sum\limits_{i=0}^{l} \phi(y_i^+) \right]} \right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $y \in B(x_0;\delta_0)$ e todo $t \geq \sum\limits_{l=0}^{j} \phi(y_i^+)$. Sendo $\phi(y_j^+) < +\infty$, para todo $y \in B(x_0;\delta_0)$ e $\left|\sum\limits_{i=0}^{j} \phi(y_i^+) - T_0\right| < 1$, então existe $t_s = t_s(x_0,\delta_0) > 0$ tal que

$$e^{-\alpha_2(t-\phi(y_0^+)-\ldots-\phi(y_s^+))} < \frac{1}{(1+j)\alpha_3^{j+1-s}},$$

para todo $t > t_s$, $s \in \{0,1,2,\ldots,j\}$. Seja

$$t^* = t^*(x_0,\delta_0) = \max\left\{t_0; t_1; \ldots; t_j; 1 + \sum_{i=0}^{j} \phi((x_0)_i^+)\right\}.$$

Utilizando a desigualdade (4.8), temos

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) < \alpha_3^{j+1}\beta e^{-\alpha_2 t} + 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \forall t > t^*.$$

Seja $T = \max\left\{t^*; -\frac{1}{\alpha_2}\ln\left(\frac{\mu}{2\beta\alpha_3^{j+1}}\right)\right\}$. Então, $W(\widetilde{\pi}(y,t)) < \mu$ para todo $y \in B(x_0;\delta_0)$ e para todo $t > T$.

Caso 3: $x_0 \in M$ e $\phi(x_0) = +\infty$.

Seja $F(L,[0,2\lambda])$ um STC-tubo através de x_0 com seção S. Sendo $F(L,[0,2\lambda])$ uma vizinhança de x_0, existe $\varepsilon > 0$ de modo que

$$B(x_0;\varepsilon) \subset F(L,[0,2\lambda]).$$

Sejam

$$H_1 = B(x_0;\varepsilon) \cap F(L,(\lambda,2\lambda]) \ \text{ e } \ H_2 = B(x_0;\varepsilon) \cap F(L,[0,\lambda]). \tag{4.9}$$

Utilizando que $\phi(x_0) = +\infty$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\phi(y) = +\infty$, $\forall y \in B(x_0;\delta_1) \cap H_2$. Pelo Caso 1, existe $T_1 = T_1(x_0,\delta_1) > 0$ tal que

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) < \mu,$$

para todo $t \geq T_1$ e todo $y \in B(x_0;\delta_1) \cap H_2$. Por outro lado, existe $\delta_2 > 0$ e $j \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$ tal que $\phi(y_j^+) < +\infty$ e $\phi(y_{j+1}^+) = +\infty$ para todo $y \in B(x_0;\delta_2) \cap H_1$. Pela prova do Caso 2, obtemos um $T_2 = T_2(x_0,\delta_2) > 0$ tal que

$$W(\widetilde{\pi}(y,t)) < \mu,$$

para todo $t \geq T_2$ e todo $y \in B(x_0; \delta_2) \cap H_1$. Daí, para $0 < \delta < \min\{\delta_1; \delta_2\}$, temos

$$W(\widetilde{\pi}(y, t)) < \mu,$$

para todo $t \geq \max\{T_1; T_2\}$ e todo $y \in B(x_0; \delta)$.

Caso 4: $x_0 \in M$ e $\phi(x_0) < +\infty$.

A prova deste caso segue as mesmas idéias do Caso 3. A única diferença é que usamos a demonstração do Caso 2 para mostrar que existe $T_1 = T_1(x_0, \delta_1) > 0$ de modo que

$$W(\widetilde{\pi}(y, t)) < \mu$$

para todo $t \geq T_1$ e todo $y \in B(x_0; \delta_1) \cap H_2$. Quando trabalhamos sobre a vizinhança $B(x_0; \delta_2) \cap H_1$, a prova segue análoga a prova apresentada no Caso 3. ∎

Utilizando as propriedades do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o Teorema 4.13, obtemos o próximo resultado.

Corolário 4.3. *Se o semifluxo de (4.6) encontra M no máximo $m \geq 1$ vezes e $4\alpha_1 < \mu\alpha_2$, então o sistema (4.6) é limitado k-dissipativo.*

Prova: Utilizando o Teorema 4.13, o sistema (4.6) é localmente k-dissipativo. Em particular, o sistema é compacto k-dissipativo. Seja J seu centro de Levinson. Note que

$$A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A \text{ é relativamente compacto.}$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ relativamente compacto. Como o sistema é compacto k-dissipativo então

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(\overline{A}, t), J) = 0.$$

Daí,

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A, t), J) = 0.$$

Portanto, o sistema é limitado k-dissipativo. ∎

Corolário 4.4. *Se o semifluxo de (4.6) encontra M no máximo $m \geq 1$ vezes e $4\alpha_1 < \mu\alpha_2$, então o sistema (4.6) goza das seguintes propriedades:*

(a) *é compacto k-dissipativo, e o seu centro de Levinson é um atrator para a família dos subconjuntos limitados de X. Então, o sistema admite um atrator global;*

(b) *satisfaz a condição de Ladyzhenskaya;*

(c) *é completamente contínuo;*

(d) *é fracamente b-dissipativo;*

(e) *é fracamente k-dissipativo.*

Prova: (a) Pelo Corolário 4.3, o sistema é limitado k-dissipativo. O resultado segue do Teorema 4.7.

(b) Usando o Corolário 4.3 e o Lema 4.5, concluímos que o sistema satisfaz a condição de Ladyzhenskaya.

(c) Dado $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, pela condição de Ladyzhenskaya, existe $K_A \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ não vazio, $K_A \cap M = \emptyset$, tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(A, t), K_A) = 0. \tag{4.10}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(K_A; \varepsilon)} \cap M = \emptyset$. Por (4.10), existe $T > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(A, t) \subset B(K_A; \varepsilon), \quad \forall t \geq T.$$

Isso implica que $\widetilde{\pi}(A, T) \subset B(K_A; \varepsilon)$ e $\overline{\widetilde{\pi}(A, T)} \cap M = \emptyset$. Assim, $\widetilde{\pi}(A, T)$ é relativamente compacto e $\overline{\widetilde{\pi}(A, T)} \cap M = \emptyset$.

(d) Sendo o sistema localmente k-dissipativo, existe $K \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, compacto, $K \cap M = \emptyset$, de modo que dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\delta_x > 0$ com

$$\lim_{t \to +\infty} \beta(\widetilde{\pi}(B(x; \delta_x), t), K) = 0. \tag{4.11}$$

Seja $\zeta > 0$ tal que $\overline{B(K; \zeta)} \cap M = \emptyset$. Pelo limite (4.11), existe $T_x > 0$ tal que

$$\widetilde{\pi}(B(x; \delta_x), t) \subset B(K; \zeta), \quad \forall t \geq T_x.$$

Em particular, $\widetilde{\pi}(x, T_x) \in B(K; \zeta)$. Portanto, o sistema é fracamente b-dissipativo, com $B(K; \zeta)$ sendo seu b-atrator fraco.

(e) Segue das mesmas idéias do item (d). ∎

Apêndices

APÊNDICE A

Um ε sobre espaços métricos

Nesta seção vamos apresentar dois teoremas sobre espaços métricos que são importantes neste texto. Recomendamos a referência [9].

Teorema A.1. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico* (X, ρ) *são equivalentes:*

(a) *X é compacto;*

(b) *todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação;*

(c) *X é sequencialmente compacto;*

(d) *X é completo e totalmente limitado.*

Prova: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9] página 222.

O próximo teorema tem como referência [8].

Teorema A.2. *Sejam* (X, ρ) *um espaço métrico e* $A \subset X$*. Então, A é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência em A possui uma subsequência convergente. Note que não podemos garantir que o ponto limite pertence ao conjunto A.*

Prova: (⇒) Suponha que A seja relativamente compacto, isto é, $\overline{A}$ seja compacto. Usando o Teorema A.1, segue que $\overline{A}$ é sequencialmente compacto. Como $A \subset \overline{A}$, toda sequência em A possua subsequência convergente. (⇐) Suponha que toda sequência em A possui subsequência convergente. Para mostrar que $\overline{A}$ é compacto, vamos provar que $\overline{A}$ é sequencialmente compacto e usar o Teorema A.1. Dada uma sequência $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset \overline{A}$. Sendo A denso em $\overline{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A$ tal que $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Por hipótese, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ possui uma subsequência convergente, digamos

$$x_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} x \in \overline{A}.$$

Daí,

$$y_{n_k} \overset{k\to+\infty}{\to} x \in \overline{A}.$$

Portanto, $\overline{A}$ é sequencialmente compacto, demonstrando o teorema. ■

APÊNDICE B

Medida de não-compacidade de Kuratowski

Nosso objetivo é definir uma medida que mostre o quão não compacto é um elemento de $\mathbb{B}(X)$. Para tal finalidade, vamos introduzir a medida de não-compacidade de Kuratowski. Para mais informações indicamos [4], [11] e [12].

Definição B.1. Seja (X, ρ) um espaço métrico. Uma aplicação $\mu : \mathbb{B}(X) \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(1) $\mu(A) = 0$ se, e somente se, $A \in \mathbb{B}(X)$ é relativamente compacto;

(2) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A);\ \mu(B)\}$, $\forall A, B \in \mathbb{B}(X)$,

é chamada de *medida de não-compacidade* sobre X.

Sejam (X, ρ) um espaço métrico e $A \in \mathbb{B}(X)$. Definimos

$$\lambda(A) = \inf \left\{ r > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \subset X,\ diam(A_i) < r,\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

como a *medida de não-compacidade de Kuratowski* do conjunto A.

APÊNDICE C

Um resultado auxiliar

Sejam $(X, \pi; M, I)$ um sistema semidinâmico impulsivo e $W \subset X$. Se W não é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, então existem $\varepsilon > 0$ e sequências $\delta_n \to 0$ $(\delta_n > 0)$ e $t_n \in \mathbb{R}_+$ tais que $\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), W) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que a sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ não é necessariamente ilimitada.

O objetivo desta seção é mostrar que sobre certas hipóteses podemos escolher a sequência $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ de maneira que $t_n \to +\infty$.

Teorema C.1. *Se $W \subset X$ é não vazio, compacto, $W \cap M = \emptyset$, positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante e não é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, então existe $\varepsilon > 0$ com as seguintes propriedades:*

(a) $B(W; \varepsilon) \cap M = \emptyset$*;*

(b) *para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $\delta_n > 0$, $x_n \in B(W; \delta_n)$ e $t_n > 0$ satisfazendo $\delta_n \to 0$, $t_n \to +\infty$ e*

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), W) \geq \varepsilon.$$

Prova: Como W é compacto e $W \cap M = \emptyset$, seja $\gamma > 0$ tal que $\overline{B(W; \gamma)} \cap M = \emptyset$. Por hipótese W não é orbitalmente $\widetilde{\pi}$-estável, logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade:

dado $0 < \delta < \varepsilon_0$, podemos encontrar $x \in B(W;\delta)\backslash W$ e $t_x > 0$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t_x),W) \geq \varepsilon_0.$$

Seja $0 < \varepsilon < \min\{\gamma;\varepsilon_0\}$. Assim, $\overline{B(W;\varepsilon)} \cap M = \emptyset$ e dado $0 < \delta < \varepsilon$ existem $x \in B(W;\delta)\backslash W$ e $t_x > 0$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t_x),W) \geq \varepsilon.$$

Sejam $0 < \delta_1 < \varepsilon$, $x_1 \in B(W;\delta_1)\backslash W$ e $t_1 > 0$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_1,t_1),W) \geq \varepsilon.$$

Seja $0 < \delta_2 < \rho(x_1,W) < \delta_1$. Suponha por absurdo, que não exista $x \in B(W;\delta_2)\backslash W$ tal que $t_x > t_1$ e

$$\rho(\widetilde{\pi}(x,t_x),W) \geq \varepsilon.$$

Assim, existem sequências $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset X$ e $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- $x_1 = y_1$ e $t_1 = h_1$;
- $y_n \in B(W;\delta_2)\backslash W$ para todo $n \geq 2$;
- $h_n > 0$, $h_n \in [0,h_1]$ e

$$\rho(\widetilde{\pi}(y_n,h_n),W) \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{C.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $0 < s_n \leq h_n$ tal que $\widetilde{\pi}(y_n,s_n) \notin B(W;\varepsilon)$ e $\widetilde{\pi}(y_n,s_n) = \pi(y_n,s_n)$, já que $\overline{B(W;\varepsilon)} \cap M = \emptyset$. Pela compacidade de $[0,h_1]$ e de W, podemos supor que $y_n \to y \in W$ e $s_n \to s \in [0,h_1]$. Daí,

$$\widetilde{\pi}(y_n,s_n) = \pi(y_n,s_n) \to \pi(y,s) \in W,$$

uma vez que W é positivamente $\widetilde{\pi}$-invariante, contradizendo a desigualdade (C.1). Portanto, existem $x_2 \in B(W;\delta_2)\backslash W$ e $t_2 > t_1$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_2,t_2),W) \geq \varepsilon.$$

Seja $0 < \delta_3 < \rho(x_2,W) < \delta_2$. Utilizando o raciocínio acima obtemos $x_3 \in B(W;\delta_3)\backslash W$ e $t_3 > t_2$ tais que

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_3,t_3),W) \geq \varepsilon.$$

Prosseguindo com o raciocínio mostramos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $\delta_n > 0$, $x_n \in B(W; \delta_n)$ e $t_n > 0$ satisfazendo $\delta_n \to 0$, $t_n \to +\infty$ e

$$\rho(\widetilde{\pi}(x_n, t_n), W) \geq \varepsilon.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] BONOTTO, E.M. **Sistemas semidinâmicos impulsivos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação do ICMC, USP, São Carlos, 2005.

[2] BHATIA, N.P.; SZEGÖ G.P. **Stability Theory of dynamical Systems**. New York: Grundlehren Math. Wiss., Band 161, Springer-Verlag, 1970.

[3] BONOTTO, E.M.; DEMUNER, D.P. **Autonomous dissipative semidynamical systems with impulses**. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 41, p. 1-38, 2013.

[4] CHEBAN, D.N. **Global attractors of non-autonomous dissipative dynamical systems**. NJ: Interdiscip. Math. Sci., vol.1, World Scitific Publishing, 2004.

[5] LAKSHMIKANTHAN V.; BAINOV D. D.; SIMEONOV P. S. **Theory of Impulsive Differential Equations**. Modern Applied Math., 6, World Scientific, 1989.

[6] GOTTSCHALK W. H.; HEDLUND G. A. **Topological Dynamics**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXXVI, 1955.

[7] FERREIRA, J.C. **Teoria de estabilidade em sistemas semidinâmicos impulsivos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação do ICMC, USP, São Carlos, 2011.

[8] BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. New York, Dover Publications, 2000.

[9] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides).

[10] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. (Projeto Euclides).

[11] ARANDJELOVIĆ I. D.; MILOVANOVIĆ, M. M. **On the Kuratowski Measure of noncompactness in metric linear spaces**. Yugoslavia: Univ. Beograde Publ. Elektrotehn. Fak., 37-40, 1999.

[12] MILOVANOVIĆ, M. M. **Measures of noncompactness on uniform spaces - the axiomatic approach**. Yugoslavia: Univ. Beograde.

[13] CIESIELSKI, K. **On time reparametrizations and isomorphisms of impulsive dynamical systems**. Poland: Annales Polonici Mathematici, 2004.

[14] BONOTTO, E.M.; DEMUNER, D.P. **Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems**. Paris: Bulletin des Sciences Mathématiques (Paris. 1885), v. 137, p. 617-642, 2013.

[15] ZHANG, Wei-Bin. **Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics**. San Diego: Elsevier, 2006. (Mathematics in Science and Engineering, vol 204)

[16] BIRKHOFF, G. **Dynamical Systems**. A.M.S., 1966.

[17] SOTOMAYOR, Jorge. **Licões de equacões diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).