

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
PROFMAT**

**RONE MAURI**

**UMA ABORDAGEM DA TEORIA DE GRAFOS  
NO ENSINO MÉDIO**

**VITÓRIA  
2013**

**RONE MAURI**

**UMA ABORDAGEM DA TEORIA DE GRAFOS  
NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

**VITÓRIA  
2013**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

## **“Uma Abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio”**

**Rone Mauri**

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 16/08/2013 por:

Assinatura manuscrita de Moacir Rosado Filho em tinta azul.

Moacir Rosado Filho - UFES

Assinatura manuscrita de Florêncio Ferreira Guimarães Filho em tinta preta.

Florêncio Ferreira Guimarães Filho - UFES

Assinatura manuscrita de Sérgio Luiz Silva em tinta preta.

Sérgio Luiz Silva – UERJ

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

M454a Mauri, Rone, 1983-  
Uma abordagem da teoria de grafos no ensino médio / Rone Mauri. – 2013.  
63 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Teoria dos grafos. 2. Solução de problemas. 3. Ensino médio. I. Rosado Filho, Moacir, 1963-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---

## **AGRADECIMENTOS**

Seguindo uma trajetória de vida com base em valores morais e éticos desde a infância, guiado por pais humildes que sempre incentivaram e acompanharam cada passo de minha vida, orientando e motivando-me para os estudos, busco com este trabalho a conclusão de mais uma etapa de estudos em minha vida e agradeço a eles por participarem efetivamente desta caminhada, registrando aqui meu verdadeiro agradecimento aos meus pais, João Paulino Mauri e Rita de Cássia Caçadini Tedoldi Mauri.

Agradeço a Deus por conceber-me suas graças diariamente durante a trajetória de minha vida, bem como daqueles que fazem parte dela.

À minha esposa Rosângela que acompanhou cada minuto desta jornada, sempre tendo uma palavra doce e sábia para acalantar as angústias que surgiam diante de tal desafio.

Aos meus filhos, Ana Clara e Henrique, que nos diversos momentos de minha vida, propiciam alegrias que somente as crianças são capazes de fazê-las.

Ao meu orientador Prof. Dr. Moacir Rosado Filho que teve paciência e sabedoria durante todos os momentos da elaboração deste trabalho, colaborando de modo decisivo para a conclusão do mesmo.

Aos professores deste Mestrado que se dedicaram e muito nos motivaram para que crescêssemos em conhecimento.

Aos meus colegas de sala que, com sabedoria, acrescentaram e compartilharam conhecimentos durante as aulas.

Aos meus irmãos por se fazerem presentes em todos os momentos, sejam eles alegres ou não, estreitando cada vez mais a relação fraternal.

*“Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. [...] Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade. [...] É preciso, enfim, tendo em vista a realização de uma educação perfeita, desenvolver o espírito crítico na inteligência do jovem.”*

*Albert Einstein*

## RESUMO

Este trabalho traz uma proposta para abordar a Teoria de Grafos, conteúdo que raramente é lecionado no ensino médio em escolas públicas, e objetiva trabalhar o tema através de resolução de problemas, oportunizando aos educandos a participação efetiva na construção de argumentos e desafiando-os a buscarem soluções, instigando a curiosidade e exigindo deles uma postura que os leva a tomarem decisões, favorecendo o surgimento de respostas criativas e desenvolvendo habilidades concernentes àquelas propostas no Currículo Básico Comum da rede estadual de ensino. Esta proposta traz dois capítulos, sendo o primeiro para introduzir o tema na 2ª série do ensino médio, e o segundo, para retomar conceitos já vistos no primeiro e introduzir novos conceitos aos alunos da 3ª série do ensino médio. Os dois capítulos são constituídos de problemas, tanto para introduzir conceitos e resultados quanto para aplicá-los, trazendo suas soluções e, em alguns casos, comentários dirigidos aos professores.

**Palavras-chave:** Teoria de Grafos, Resolução de Problemas, Ensino Médio.

## **ABSTRACT**

This work shows a proposal to approach Graph Theory, which is rarely taught at public high schools, and looks for working the theme through the resolution of problems, providing opportunities to the pupil for effective participation on the building of arguments and challenging them to search for solutions, instigating the curiosity and requiring from them an attitude that lead to take decisions, favoring the emergence of creative answers and developing abilities concerning to those proposed on the Common Basic Curriculum of the state public high school. This proposal is described in two chapters, being the first one to introduce the theme on the second grade of high school, and the second one, to retake concepts already seen on the first one and introduce new concepts to the students of the third grade of high school. Both chapters are composed of problems, to introduce concepts and results as much to apply them, bringing their solutions and, in some cases, commentaries to the teachers.

**Key-words:** Graph Theory, Resolution of Problems, High School.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Problema do carteiro .....                              | 15 |
| Figura 2: Esquema associado à região da figura 1 .....            | 16 |
| Figura 3: Percurso da coleta de lixo .....                        | 16 |
| Figura 4: Mapa da cidade .....                                    | 18 |
| Figura 5: Exemplo de um grafo .....                               | 20 |
| Figura 6: Cidade de Königsberg .....                              | 25 |
| Figura 7: Esquema da cidade de Königsberg .....                   | 26 |
| Figura 8: Três exemplos de grafos .....                           | 27 |
| Figura 9: Identificando grafos eulerianos e semieulerianos .....  | 29 |
| Figura 10: Grafo associado à cidade de Königsberg .....           | 31 |
| Figura 11: Grafo associado ao torneio .....                       | 32 |
| Figura 12: Planta baixa de uma casa .....                         | 33 |
| Figura 13: Grafo associado à figura 12 .....                      | 34 |
| Figura 14: Construção de caminhos eulerianos .....                | 35 |
| Figura 15: Hall dos Espelhos .....                                | 36 |
| Figura 16: Salas problemáticas .....                              | 37 |
| Figura 17: Relações de amizades .....                             | 39 |
| Figura 18: Grafo do jogo Around the World .....                   | 40 |
| Figura 19: Grafohill .....                                        | 42 |
| Figura 20: Grafo associado a Grafohill .....                      | 43 |
| Figura 21: Relação de afinidade .....                             | 44 |
| Figura 22: Cubo .....                                             | 45 |
| Figura 23: Grafo associado ao cubo .....                          | 46 |
| Figura 24: Partes da peça do fio .....                            | 47 |
| Figura 25: Grafo associado ao jogo de dominó incompleto .....     | 48 |
| Figura 26: Grafo associado aos voos .....                         | 49 |
| Figura 27: Componentes conexas .....                              | 50 |
| Figura 28: Cidades do País dos Sete .....                         | 51 |
| Figura 29: Mapa do norte e noroeste do ES .....                   | 53 |
| Figura 30: Grafo valorado associado ao mapa .....                 | 54 |
| Figura 31: Resolução do problema do menor caminho: Parte I .....  | 55 |
| Figura 32: Resolução do problema do menor caminho: Parte II ..... | 55 |

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 33: Resolução do problema do menor caminho: Parte III ..... | 56 |
| Figura 34: Resolução do problema do menor caminho: Parte IV .....  | 56 |
| Figura 35: Resolução do problema do menor caminho: Parte V .....   | 57 |
| Figura 36: Resolução do problema do menor caminho: Parte VI .....  | 57 |
| Figura 37: Resolução do problema do menor caminho: Parte VII ..... | 58 |
| Figura 38: Resolução do problema do menor caminho: Final .....     | 58 |
| Figura 39: Minimizando o tempo .....                               | 59 |
| Figura 40: Resolução do problema minimizando o tempo .....         | 60 |
| Figura 41: Caminho para a escola .....                             | 60 |
| Figura 42: Minimizando o caminho para a escola .....               | 61 |

## SUMÁRIO

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUÇÃO .....                                     | 10 |
| 2. INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS .....                  | 15 |
| 2.1. PRIMEIRO CONTATO .....                             | 15 |
| 2.2. DEFININDO ELEMENTOS E ESTABELECENDO RESULTADOS ... | 19 |
| 2.3. GRAFOS EULERIANOS E SEMIEULERIANOS .....           | 25 |
| 2.4. PROBLEMAS .....                                    | 31 |
| 3. O USO DOS GRAFOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ..... | 44 |
| 3.1. RETOMANDO CONCEITOS .....                          | 44 |
| 3.2. CONEXIDADE .....                                   | 49 |
| 3.3. O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO .....                  | 52 |
| 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....                           | 62 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                        | 63 |

## 1. INTRODUÇÃO

Com a acelerada transformação e inovação das tecnologias pelo qual a sociedade atravessa no momento, tornar o ambiente escolar motivador e instigar os alunos a buscarem o conhecimento tornou-se um desafio aos educadores. Quando se trata de lecionar matemática, a busca por problemas que desafiam os alunos deve ser uma atitude pertinente a todos os professores da área.

Essa atitude já era prevista no PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) do ensino médio, publicado em 1999 e até hoje usado como material que norteia a educação nacional, onde diz que:

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (p. 250)

Visando modificações no ensino da matemática a fim de acompanhar tais mudanças, a SEDU - Secretaria da Educação do Estado do Espírito Santo – propôs a reformulação curricular nos anos de 2007 a 2009, culminando esta ação com a construção do CBC – Currículo Básico Comum – das escolas da rede estadual de ensino, com a implantação do mesmo a partir de 2010 em todas as escolas da rede.

O volume 2 do CBC, elaborado para o ensino médio, é destinado à área de Ciências da Natureza, que contempla as disciplinas de biologia, física, matemática e química. Nele, temos que:

[...] a discussão em torno do ensino e da aprendizagem da matemática vem sendo levantada em todos os níveis de educação. Discutem-se metodologias, estratégias de ensino, contextualizações, evasões, inclusões, entre outros. Percebe-se, nessa discussão, que a escola não vem acompanhando as

crescentes alterações sociais, políticas, tecnológicas e culturais que o mundo globalizado nos impõe. (p. 107)

Nesse mesmo documento, de forma inédita, foi inserido nas 2ª e 3ª séries do ensino médio o conteúdo “Introdução à Teoria de Grafos” (p.120) e “Resolução de problemas utilizando grafos” (p.122), respectivamente.

Tendo trabalhado com a 2ª série do ensino médio, na rede estadual de ensino do Espírito Santo, desde o ano de 2008, pude acompanhar as alterações ocorridas no currículo e as dificuldades encontradas pelos professores da área para a implantação do mesmo. Uma das dificuldades encontradas foi o fato do currículo sofrer alterações e os livros didáticos, material de apoio para o professor e para o aluno, desenvolvido pelas editoras, acompanhado e aprovado pelo MEC, não abordarem alguns temas, como por exemplo, o estudo da Teoria de Grafos.

Dados os fatos anteriormente citados, decidi então desenvolver meu trabalho sobre a Teoria de Grafos, com o intuito de que este material possa ser aplicado e/ou adaptado pelos professores que buscam material de apoio para trabalhar com os alunos, a fim de proporcionar-lhes uma nova experiência com a disciplina de matemática. Este material também poderá servir de leitura àquelas pessoas que, mesmo sendo leigas ou tendo iniciado seus estudos na área, buscam conhecimento sobre o tema.

A Teoria de Grafos pode proporcionar aos alunos a possibilidade de usar sua intuição e desenvolver suas próprias estratégias para encontrar a solução, sendo que, em alguns casos, não há necessidade de recorrer a conhecimentos matemáticos formais. A abordagem deste tema favorece a reformulação do ensino de matemática, proporcionando ao aluno espaço para o processo da descoberta, além de ser um tipo de assunto que atrai a atenção dos alunos devido ao grande número de aplicações importantes nos mais diversos campos, abrindo espaço para que seja trabalhado de forma interdisciplinar.

Apesar das ideias sobre grafos poderem ser abordadas já nas séries finais do ensino fundamental, podendo ser compreendidas de modo muito simples, existem inúmeras situações reais em que sua aplicabilidade e compreensão

são bastante complexas. Nesse contexto, podem-se destacar algumas aplicações desenvolvidas em diversas áreas do conhecimento, tais como a otimização de redes ferroviárias e de telecomunicações, desenvolvimento do fluxo de transportes; construção de circuitos lógicos para computadores, entre outros.

Para que esse tema possa ser desenvolvido nas salas de aula, é necessário que o professor assuma uma postura que permita a participação efetiva dos alunos na construção de conhecimentos e autonomia nas tomadas de decisões, permitindo-lhes o florescimento da criatividade para o desenvolvimento de soluções inesperadas, proporcionando aos alunos o sentimento de transpor métodos “enrijecidos” assimilados ao longo de seus estudos, motivando-os a buscarem e compartilharem diversas soluções diferentes para o mesmo problema.

Essas ideias vão ao encontro do que diz o CBC, destinado ao ensino médio, da rede estadual de ensino, em seu volume 2:

[...] Consideramos que o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas, nos quais o fazer, o argumentar e o discutir têm grande importância nesse processo. (p. 111)

E ainda:

[...] Resolver um problema não se resume em compreendê-lo e dar resposta correta aplicando procedimentos adequados. É necessário que o aluno aproprie do conhecimento envolvido, desenvolvendo habilidades que lhe permitem por à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diversos caminhos para obter a solução, o que exige que saiba argumentar sobre os procedimentos desenvolvidos. Isto desenvolve no aluno a criatividade, a reflexão, a argumentação, enfim, o pensar sobre o próprio conhecimento (metacognição). (p. 112)

Observando todas as considerações aqui colocadas, este trabalho será desenvolvido em duas etapas:

- Introdução à Teoria de Grafos: destinado à 2ª série do ensino médio, com apresentação de alguns conceitos sobre o tema e discussão de problemas que alavanquem a curiosidade e a busca por novos desafios.
- Resolução de problemas utilizando grafos: destinado à 3ª série do ensino médio, com novos conceitos e diversos problemas, desde aqueles que são mais simples até os que exigem soluções sofisticadas.

Tendo em vista os argumentos aqui colocados e sabendo que os problemas envolvendo grafos apresentam diversas soluções, algumas exigindo organização, interpretação e formulação de argumentos próprios por cada aluno, e outras se utilizando de ferramentas e conceitos matemáticos que exigirão dos alunos maior atenção, não é possível estabelecer pré-requisitos para que esses problemas sejam trabalhados nas séries citadas. Cabe ao professor, ao trabalhar tais problemas, fazer intervenções necessárias junto aos seus alunos quando estes enfrentarem dificuldades devido ao não conhecimento de conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento dos argumentos que solucionem tal problema.

Pelo fato de não haver material didático amplamente divulgado sobre o tema, restringindo-se a algumas publicações em periódicos, artigos e trabalhos acadêmicos, e até mesmo não sendo incluído na formação acadêmica dos professores em diversas instituições de ensino superior, levando ao não conhecimento do tema por muitos professores da rede pública de ensino, apresento este trabalho com todos os problemas e atividades propostas com suas respectivas soluções, de modo que o professor da educação básica, que queira utilizá-lo para incluir o tema em suas aulas, tenha à sua disposição um material que permita um trabalho com naturalidade.

Este trabalho objetiva uma abordagem simples do tema com o intuito de que o aluno perceba a beleza de vários problemas que podem ser resolvidos através de conceitos e argumentos organizados de forma simples e prática, sem tornar a linguagem técnica demais, desviando a atenção do objetivo principal do trabalho: conhecer conceitos sobre grafos e desenvolver habilidades e

estratégias de argumentação para a resolução de problemas. Para aqueles que se apaixonarem pelo tema, não é difícil encontrar trabalhos acadêmicos que irão instigar ainda mais a busca pelo conhecimento, visto que o tema é objeto de estudo por diversos cientistas em todo o mundo e há muitas questões em aberto e inúmeras aplicações da Teoria de Grafos que estão sendo estudadas com o apoio do uso da tecnologia.

## 2. INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS

### 2.1. Primeiro contato

Para iniciarmos um estudo sobre grafos, veremos alguns problemas para nos familiarizarmos com situações que serão utilizadas em vários momentos na resolução de diversas atividades sobre o tema.

**Problema 2.1:** Um carteiro, deslocado para trabalhar em uma região que não conhecia, representada pela figura 1, quer descobrir um percurso para entrega das correspondências diárias em que, saindo do posto dos Correios, passe por todas as ruas, nunca passe por trecho de rua (entre duas esquinas consecutivas) pelo qual já tenha passado e, quando realizar a última entrega, já esteja voltando ao posto inicial. Para tal região, isto é possível?

**Posto dos Correios**

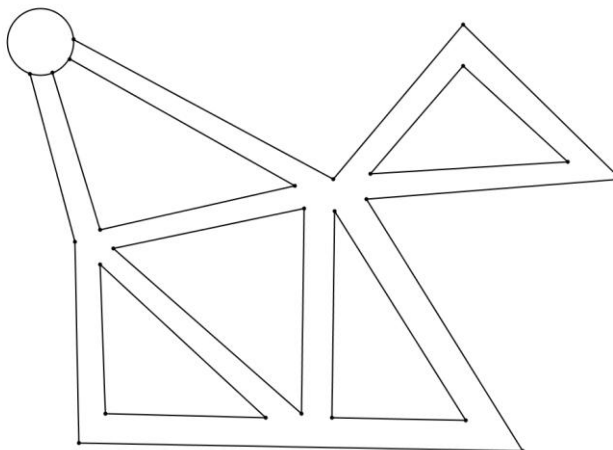


Figura 1 – Problema do carteiro

Agora que você já encontrou uma solução, faça um esquema representando as esquinas por pontos distintos, nomeando-os, e represente as ruas por linhas que ligam os pontos (esquinas). Após esquematizar o problema com uma estrutura com pontos e linhas, escreva a sequência de esquinas, em ordem, para representar a solução que você encontrou para o problema.

Resolução: Encontrar um caminho para o carteiro, satisfazendo as condições do problema, não é uma tarefa difícil. A figura 2 mostra um esquema para representar o problema e a sequência AB-BC-CD-DE-EF-FB-BD-DF-FH-HG-GF-FA é um caminho possível para o carteiro.

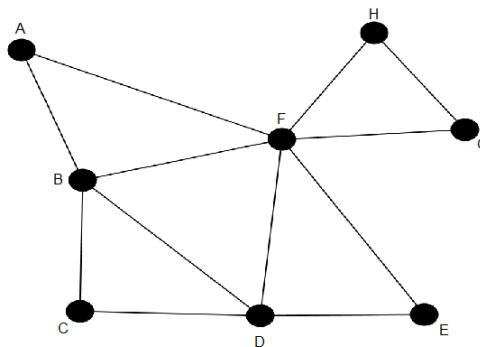


Figura 2 – Esquema associado à região da figura 1

Comentários para o professor: Após alguns instantes, muitos (possivelmente todos) alunos encontrarão um caminho que resolva o problema do carteiro. Neste primeiro momento é interessante que o professor não interfira enquanto o aluno busca uma solução. Cada aluno tem suas especificidades, produzindo assim diferentes esquemas para o problema, e o professor deve aproveitar esse momento para dizer que há diversas maneiras de solucionar esse problema, assim como representações de esquemas podem ser diferentes e representar a mesma situação.

**Problema 2.2:** O mapa abaixo representa o percurso que um caminhão de coleta de lixo deve percorrer, recolhendo o lixo de todas as ruas destacadas. O pátio da empresa tem dois portões e, para melhor organizar os veículos no pátio, a empresa determinou que os veículos entrem pelo portão A e saiam pelo portão Q. O gerente da empresa determinou que, para reduzir custos, o motorista deve passar somente uma vez em cada rua do trajeto, terminando a coleta no portão de entrada da empresa.

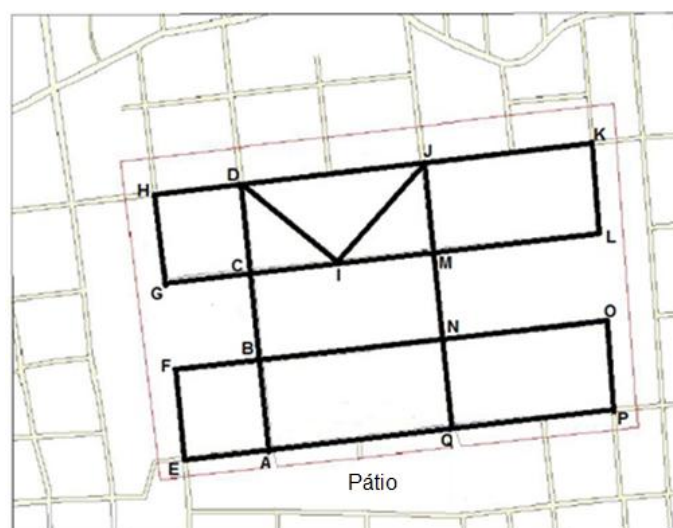


Figura 3 – Percurso da coleta de lixo

Suponha que você seja o motorista e, se possível, encontre uma rota que satisfaça as condições impostas pelo gerente da empresa.

Pense mais um pouco: No problema anterior, considere que a empresa tenha apenas um portão, localizado no ponto A, para que os veículos entrem e saiam por ele. Encontre uma rota para realizar a coleta de lixo de acordo com as exigências do gerente.

Resolução: Para a compreensão e resolução desse problema é necessário que se entenda que o caminhão começará a coleta no ponto Q (portão de saída do pátio) e deverá retornar, após passar uma única vez por todas as ruas, ao ponto A (portão de entrada para o pátio). Cientes de onde começar e onde terminar, após algumas tentativas e com um pouco de persistência, encontrar um caminho, como por exemplo, QP-PO-ON-NM-ML-LK-KJ-JM-MI-IJ-JD-DI-IC-CD-DH-HG-GC-CB-BF-FE-EA-AB-BN-NQ-QA, não será uma tarefa difícil.

Considerando agora que a empresa tenha apenas um portão para entrar e sair, localizado no ponto A, não é possível encontrar um caminho que atenda às exigências do gerente da empresa. Isto pode ser justificado da seguinte forma: Ao sair do ponto A, o caminhão utiliza uma rua (lembre-se que existem três ruas ligando o ponto A), restando outras duas. Em algum momento o caminhão retornará ao ponto A por outra rua e não poderá entrar para o pátio, pois ainda há uma rua, ligando o ponto A, da qual ele não recolheu o lixo. Logo ele sairá do ponto A pela rua da qual ele ainda não havia recolhido o lixo e, assim, para retornar ao ponto A, deverá passar por uma rua que já havia passado anteriormente.

Comentários para o professor: Na segunda parte desse problema, o professor pode deixar os alunos tentarem encontrar um caminho que atenda ao pedido do gerente, mesmo sabendo que isso não é possível, e posteriormente instigá-los a refletirem se há uma justificativa para a dificuldade encontrada. É neste momento que os alunos buscarão argumentos e terão a oportunidade de desenvolver raciocínios próprios que poderão ser utilizados ou adaptados pelo professor ao apresentar uma justificativa para o fato de não haver uma solução para a segunda parte do problema.

**Problema 2.3:** Sr. Samuel mora na roça e veio à cidade para a missa da Comadre Zefa. Aproveitou a viagem para resolver uns problemas na Prefeitura e ir ao Colégio levar frutas do sítio em que mora para o professor do seu filho. Quando desembarcou na Estação Rodoviária, ficou muito satisfeito ao saber que cada lugar era ligado a cada um dos outros três por ruas diferentes, não havendo cruzamentos entre duas ruas quaisquer, cada rua ligava apenas dois lugares e dois lugares quaisquer eram ligados por apenas uma rua. Então ele procurou um assento e desenhou um mapa para orientá-lo em suas caminhadas pela cidade. Desenhe você também um mapa que represente a situação descrita.

Agora, com o mapa em mãos e sabendo que o Sr. Samuel precisa passar por todas as ruas para aproveitar a viagem e visitar seis amigos, cada um morando em uma rua, procure por um caminho que o Sr. Samuel possa percorrer sem utilizar a mesma rua mais de uma vez, retornando à Rodoviária para ir embora. Dê uma explicação para o que ocorreu.

Resolução: A figura 4 representa um possível mapa com os quatro pontos de interesse do Sr. Samuel, satisfazendo as condições do problema.

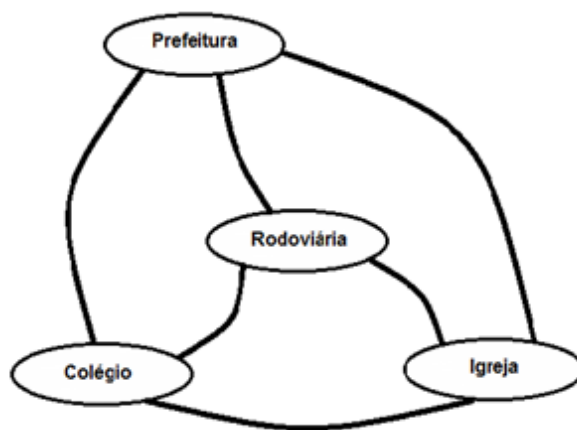


Figura 4 – Mapa da cidade

Não é possível encontrar um caminho para o Sr. Samuel que satisfaça as condições exigidas (passar por todas as ruas uma única vez). A justificativa é análoga àquela apresentada no problema anterior: o Sr. Samuel sai da rodoviária por uma rua, retorna por outra e sai novamente por aquela que ainda restou, não havendo outra rua disponível para voltar, ou seja, deverá retornar por uma rua já utilizada.

Comentários para o professor: A maior dificuldade encontrada pelos alunos para resolver este problema será a interpretação correta das condições colocadas no enunciado, exigindo que cada aluno tome decisões, utilize métodos de tentativas e erros, desenvolva argumentação própria, crie estratégias para encontrar um mapa, dentre outras habilidades que lhe serão exigidas. O aluno será instigado a construir tal esquema e será levado a encontrar uma maneira para dispor os pontos e ruas (ligações entre os pontos) para uma “melhor” representação do problema. Neste momento o professor deve incentivar que cada aluno faça suas construções e depois orientá-los que há diversas representações corretas para o mesmo esquema.

Após algumas tentativas, alguns alunos desconfiarão que encontrar o caminho proposto no problema não seja possível, enquanto outros continuarão tentando várias vezes. O professor pode sugerir aos alunos que busquem justificativas para explicar a dificuldade encontrada, de modo que eles passem a analisar o problema ao invés de apenas procurar um caminho mecanicamente e, tendo em vista que o problema 2.2 já trabalhou esse mesmo tipo de justificativa, espera-se que os alunos consigam encontrar uma justificativa plausível para explicar o fato de não ser possível encontrar um caminho que atenda a todas as exigências.

Esses três problemas anteriormente apresentados são alguns objetos de estudo da Teoria de Grafos e foram usados a fim de permitir ao aluno o desenvolvimento de raciocínios para a resolução de alguns problemas sem recorrer às soluções técnicas, com o intuito de proporcionar-lhes a construção de conceitos que serão abordados a seguir. Por diversos momentos esses três problemas serão citados para a melhor compreensão das definições e identificação de elementos dos grafos.

## **2.2. DEFININDO ELEMENTOS E ESTABELECENDO RESULTADOS**

Como o nosso objeto de estudo neste trabalho são os grafos, introduziremos então sua definição, apresentaremos alguns conceitos e construiremos alguns resultados para auxiliarem na resolução de problemas.

Grafo é uma estrutura composta por um conjunto finito de pontos e um conjunto de ligações entre eles. Os pontos são chamados de vértices e as ligações entre dois vértices quaisquer são denominadas arestas.

No problema 2.1, esquematizado pela figura 2, temos a representação de um grafo, onde os vértices são as esquinas e as arestas são as ruas, o que também pode ser observado no problema 2.2. Já no problema 2.3, o esquema que representa o mapa, mostrado na figura 4, é um grafo onde os vértices são os pontos de interesse do Sr. Samuel (Rodoviária, Colégio, Igreja e Prefeitura) e as arestas são as ruas que ligam estes pontos. Muitos são os problemas que podem ser resolvidos através de sua representação por um grafo e é notório que encontrar a solução de muitos deles se tornaria uma tarefa difícil sem recorrer a tais estruturas.

Denotaremos um grafo por  $G$  e representaremos por  $V(G)$  e  $A(G)$  os conjuntos dos vértices e das arestas do grafo  $G$ , respectivamente. O número de vértices do grafo  $G$  será representado por  $n$  e o número de arestas por  $m$ .

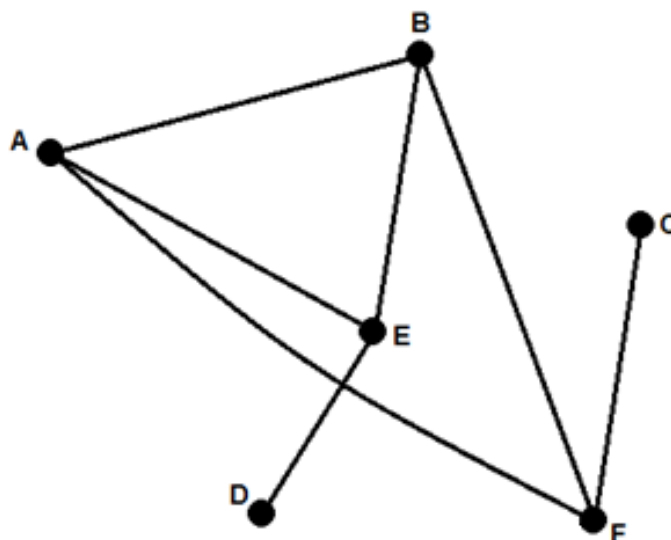


Figura 5 – Exemplo de um grafo

Considerando o grafo  $G$  acima temos que  $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$ ,  $A(G) = \{AB, AE, AF, BE, BF, CF, DE\}$ ,  $n = 6$  e  $m = 7$ .

O número de vezes que as arestas incidem sobre um determinado vértice é chamado grau do vértice e representamos por  $d(A)$  o grau do vértice  $A$ . No

grafo da figura 5 há três arestas ligando o vértice A, logo  $d(A) = 3$ , do mesmo modo temos que  $d(B) = d(E) = d(F) = 3$  e  $d(C) = d(D) = 1$ .

A seguir apresentaremos algumas atividades para fixar conceitos e notações.

**Atividade 2.1:** Complete a tabela abaixo, analisando os grafos apresentados nos problemas 2.1 e 2.2.

| Notação | Significado | Grafo do problema 2.1 | Grafo do problema 2.2 |
|---------|-------------|-----------------------|-----------------------|
| $V(G)$  |             |                       |                       |
| $A(G)$  |             |                       |                       |
| $n$     |             |                       |                       |
| $m$     |             |                       |                       |
| $d(A)$  |             |                       |                       |
| $d(B)$  |             |                       |                       |
| $d(C)$  |             |                       |                       |
| $d(D)$  |             |                       |                       |

**Atividade 2.2:** A tabela a seguir deverá ser preenchida de acordo com os grafos dos problemas 2.1, 2.2 e 2.3.

|                                       | Grafo do problema 2.1 | Grafo do problema 2.2 | Grafo do problema 2.3 |
|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Quantidade de vértices com grau par   |                       |                       |                       |
| Quantidade de vértices com grau ímpar |                       |                       |                       |
| Soma dos graus de todos os vértices   |                       |                       |                       |

**Atividade 2.3:** Analisando os resultados das duas tabelas, responda:

- Qual é a relação entre a quantidade de arestas e a soma dos graus de todos os vértices dos grafos analisados?
- Será que a relação anteriormente observada é uma coincidência dos três grafos analisados ou sempre será verdadeira? Escreva uma justificativa para a sua resposta.
- Em algum dos três casos houve uma quantidade ímpar de vértices com grau ímpar? Será uma coincidência ou isso sempre será verdadeiro? Justifique sua resposta.

### Resolução das atividades:

Atividade 2.1: Foram usados apenas os problemas 2.1 e 2.2 por não ter sido apresentado um grafo com vértices A, B, C e D para o problema 2.3. Caso o professor utilize um grafo com estes vértices, poderá incluí-lo também nesta tabela. Abaixo seguem as respostas para a tabela.

| Notação | Significado                      | Grafo do problema 2.1                 | Grafo do problema 2.2                                                        |
|---------|----------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $V(G)$  | Conjunto dos vértices do grafo G | {A,B,C,D,E,F,G,H}                     | {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q}                                          |
| $A(G)$  | Conjunto das arestas do grafo G  | {AB,AF,BC,BD,BF,CD,DE,DF,EF,FG,FH,GH} | {AB,AE,AQ,BF,BC,BN,CG,CD,CI,DH,DI,DJ,EF,GH,IJ,IM,JM,JK,KL,LM,MN,NO,NQ,OP,PQ} |
| $n$     | Número de vértices               | 8                                     | 17                                                                           |
| $m$     | Número de arestas                | 12                                    | 25                                                                           |
| $d(A)$  | Grau do vértice A                | 2                                     | 3                                                                            |
| $d(B)$  | Grau do vértice B                | 4                                     | 4                                                                            |
| $d(C)$  | Grau do vértice C                | 2                                     | 4                                                                            |
| $d(D)$  | Grau do vértice D                | 4                                     | 4                                                                            |

Atividade 2.2: Como não é necessária a identificação dos vértices, na tabela abaixo, foram utilizados os três problemas iniciais.

|                                       | Grafo do problema 2.1 | Grafo do problema 2.2 | Grafo do problema 2.3 |
|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Quantidade de vértices com grau par   | 8                     | 15                    | 0                     |
| Quantidade de vértices com grau ímpar | 0                     | 2                     | 4                     |
| Soma dos graus de todos os vértices   | 24                    | 50                    | 12                    |

Atividade 2.3: As atividades 2.1 e 2.2 deverão ser utilizadas para auxiliar a resolução desta.

- Analizando as duas tabelas (o valor de  $m$  na primeira e a soma dos graus dos vértices na segunda), podemos concluir que, nos grafos observados, a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.
- Aqui devemos generalizar o resultado anterior para todos os grafos. Uma justificativa para isso é que cada aresta é ligada a dois vértices e, ao somarmos todos os graus dos vértices, contamos cada aresta duas vezes, chegando assim ao resultado esperado.

- c. O resultado dessa atividade é uma consequência imediata do teorema que apresentaremos a seguir, e será justificado após a demonstração do teorema. O professor pode usar os argumentos apresentados pelos alunos para justificar os resultados a seguir.

Depois das discussões das atividades anteriores, a apresentação e demonstração do teorema, bem como sua consequência imediata, serão naturais para os alunos.

Teorema: A soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas desse mesmo grafo.

Demonstração: Observando que o grau de um vértice é igual ao número de arestas incidindo sobre o mesmo e que uma aresta incide sobre dois vértices (suas extremidades), temos então que, ao somarmos os graus de todos os vértices, contamos todas as arestas duas vezes (uma em cada extremidade), seguindo daí o resultado do teorema.

Observe que a soma dos graus de todos os vértices é um número par, pois o dobro de um número natural é um número par.

Como consequência do teorema acima, podemos concluir que a quantidade de vértices de um grafo que possui grau ímpar é sempre um número par.

De fato, seja  $p$  a soma dos graus dos vértices com grau par. Logo  $p$  é um número par. Se houvesse uma quantidade ímpar de vértices com grau ímpar, a soma desses graus, digamos  $i$ , seria ímpar e teríamos que  $p + i$  também seria ímpar, o que contradiz o fato da soma dos graus de todos os vértices ser um número par. Logo, todo grafo possui uma quantidade par de vértices com grau ímpar.

A compreensão dos resultados acima é de fundamental importância dentro da Teoria de Grafos, dando ferramentas para a resolução de diversos problemas nessa área. Nas demonstrações (prova de um resultado) matemáticas são comuns a utilização de argumentação por redução ao absurdo, que consiste em supor a negação (oposto) daquilo que se quer demonstrar e chegar a um absurdo (afirmação que contradiz um resultado verdadeiro), podendo então

concluir que a suposição não é verdadeira. Ora, se foi suposto a negação daquilo que se queria provar e essa negação é falsa, então o que se queria demonstrar é verdadeiro, terminando assim a demonstração. Utilizaremos essa ferramenta para resolver o problema a seguir.

**Problema 2.4:** Em uma cidadezinha do interior existem 15 telefones. Prove que eles não podem ser conectados por fios de modo que cada telefone seja conectado a exatamente cinco outros.

Resolução: Primeiramente identificaremos o que precisamos demonstrar: Os 15 telefones “não” podem ser conectados por fios a exatamente cinco outros. Na demonstração por absurdo, como o próprio nome sugere, vamos supor a negação do resultado que precisamos demonstrar, ou seja, suponhamos que os 15 telefones podem ser conectados de modo que cada um seja conectado a exatamente cinco outros.

Como consequência dessa suposição, podemos representar esse problema por um grafo, onde os vértices representarão os telefones e as arestas, as ligações entre dois telefones quaisquer. Como há cinco fios conectados a cada telefone, então cada vértice do grafo terá grau cinco e, existindo quinze vértices, podemos concluir que a soma dos graus de todos os vértices é  $15 \cdot 5 = 75$ , o que é um absurdo! (De acordo com o teorema anterior, a soma dos graus dos vértices de um grafo é um número par).

Podemos concluir que a nossa suposição é falsa, ou seja, os 15 telefones não podem ser conectados por fios de modo que cada um seja conectado a exatamente cinco outros, provando o que o problema havia pedido.

Comentários: Antes de apresentar a demonstração por redução ao absurdo, o professor deve permitir que os alunos busquem outros meios de solucionar esse problema e, caso surja alguma solução particular, deve aproveitá-la para explicar que um caso apenas não demonstra um problema que deve ser generalizado. Deve também salientar que encontrar uma solução particular pode, por muitas vezes, abrir portas para uma solução generalizada. Quando o professor apresentar a demonstração por redução ao absurdo, muitos alunos irão se assustar, mas isso é natural. O professor deve ter muito cuidado para

não criar uma ideia de que esse tipo de argumentação (demonstração) é difícil, criando uma resistência nos alunos quando a mesma for novamente trabalhada, privando-os de uma ferramenta muito utilizada para chegar a resultados incríveis. Esses tipos de demonstrações devem estar presentes nas séries finais do ensino médio, tornando-se natural para muitos alunos.

### 2.3 GRAFOS EULERIANOS E SEMIEULERIANOS

A Teoria de Grafos é um ramo da matemática que surgiu recentemente. Atribui-se ao Problema das pontes de Königsberg, que será apresentado a seguir, como sendo o precursor dessa área. Este problema surgiu como desafio no dia a dia da população e foi Leonardo Euler que primeiro apresentou uma resposta. Esse tipo de problema não despertou curiosidade naquela época e, muito recentemente, é que esse ramo da matemática vem ganhando notoriedade pelas várias aplicações, não só em matemática, mas também em diversas outras áreas, alavancando múltiplas pesquisas nos meios acadêmicos. Vamos agora ao famoso problema.

**Problema 2.5:** (Problema das pontes de Königsberg) A cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado) era dividida em quatro partes pelos braços do rio Pregel e havia sete pontes que interligavam estas partes, conforme mostra a figura 6.

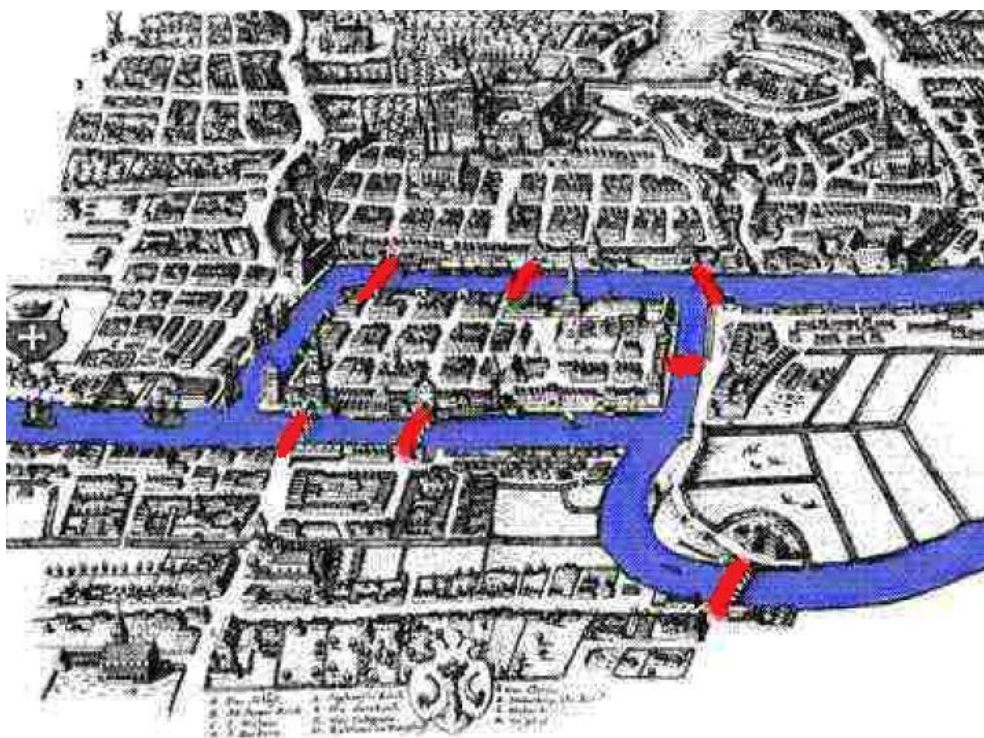


Figura 6 – Cidade de Königsberg

Os moradores dessa cidade precisavam atravessar as pontes para realizar suas tarefas diárias e alguns começaram a questionar se era possível utilizar as sete pontes, uma única vez cada, e retornar ao ponto inicial.

Com os conhecimentos já adquiridos, represente o problema utilizando um grafo e responda: é possível atravessar as sete pontes, uma única vez cada, e retornar ao ponto de partida? Formule uma argumentação que justifique sua resposta.

Resolução: Esse problema foi resolvido pela primeira vez por Leonardo Euler (1707 – 1783), publicando um artigo em 1736, demonstrando que tal percurso era impossível. Observando um esquema que representa o problema das pontes de Königsberg, representado na figura, vamos ao argumento utilizado por Euler.

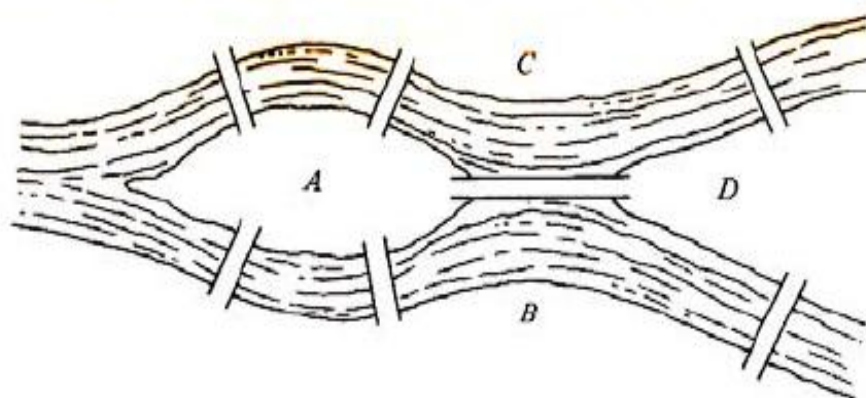


Figura 7 – Esquema da cidade de Königsberg

Suponhamos que exista um caminho passando uma única vez em cada ponte e retornando ao ponto de partida. Considere uma região qualquer, por exemplo, a região D, e vamos supor que o percurso não começa nesta região. Logo, em algum momento, vamos entrar na região D e devemos sair dela, utilizando assim duas pontes. Como devemos utilizar todas as pontes e há três pontes ligando a região D, em outro momento teremos que entrar novamente na região D pela ponte que restou e não há outra ponte para sair, não permitindo voltar ao ponto de partida. Então só nos resta começar pela região D. Mas, começando pela região D, sairíamos por uma ponte e em algum momento retornaríamos por outra, restando ainda uma ponte a ser utilizada e,

Comentários: Muitos alunos poderão chegar a uma justificativa plausível para esse problema, tendo em vista que argumentos semelhantes foram utilizados nos problemas 2.2 e 2.3. Para que isso ocorra, o professor deve permitir que os alunos reflitam sobre o problema antes dele apresentar a solução aos mesmos, observando os argumentos que surgirem e orientando para que os alunos busquem justificativas corretas para o problema.

(a)

(b)

(c)

Um caminho é uma sequência de arestas onde duas arestas consecutivas possuem pelo menos um vértice em comum de modo que o último vértice da aresta anterior seja o primeiro da aresta subsequente.

27

um vértice diferente do vértice inicial (começou em G e terminou em H). Já em (c), o caminho ML-LK-KJ-JO-ON-NK-KO-OL-LN-NM passa por todas as arestas uma única vez e retorna ao vértice inicial, nesse caso, M. Em homenagem ao trabalho desenvolvido por Euler, quando um caminho passa uma única vez por todas as arestas do grafo, esse caminho é chamado de caminho euleriano, sendo que, caso esse caminho termine em um vértice diferente daquele que começou, é chamado de caminho euleriano aberto e, caso termine no mesmo vértice de partida, é chamado de caminho euleriano fechado. Como exemplo, o caminho ML-LK-KJ-JO-ON-NK-KO-OL-LN-NM em (c) é um caminho euleriano fechado e o caminho GF-FE-EI-IH-HF-FI-IG-GH em (b) é um caminho euleriano aberto. Observe que o caminho AB-BC-CA em (a) não é euleriano.

Chamamos de grafo euleriano todo aquele que admite um caminho euleriano fechado, isto é, qualquer grafo que admite um caminho que passa por todas as arestas uma única vez e retorna ao vértice de partida. Se o grafo admite um caminho euleriano aberto, ele é denominado de grafo semieuleriano.

É importante observar que identificar um grafo euleriano ou semieuleriano requer, primeiramente, que se identifique um caminho euleriano. Caso esse caminho euleriano seja fechado concluiremos que é um grafo euleriano, caso o caminho euleriano seja aberto teremos então que é um grafo semieuleriano. Se não existir um caminho euleriano, o grafo não é euleriano e nem semieuleriano.

Na figura 8, temos que o grafo em (b) é um grafo semieuleriano e em (c) é um grafo euleriano. Para classificar o grafo em (a) é necessário procurar por caminhos eulerianos para se chegar a uma conclusão.

**Atividade 2.4:** Retornando aos problemas 2.1, 2.2 e 2.3 e analisando os grafos que os representam, complete a tabela abaixo.

|                                             | Problema<br>(2.1, 2.2 ou 2.3) | Nº de vértices com<br>grau ímpar |
|---------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| Grafo euleriano                             |                               |                                  |
| Grafo semieuleriano                         |                               |                                  |
| Grafo que não é euleriano nem semieuleriano |                               |                                  |

**Atividade 2.5:** Classifique os grafos da figura 9 em: grafo euleriano, grafo semieuleriano ou grafo que não é euleriano nem semieuleriano.

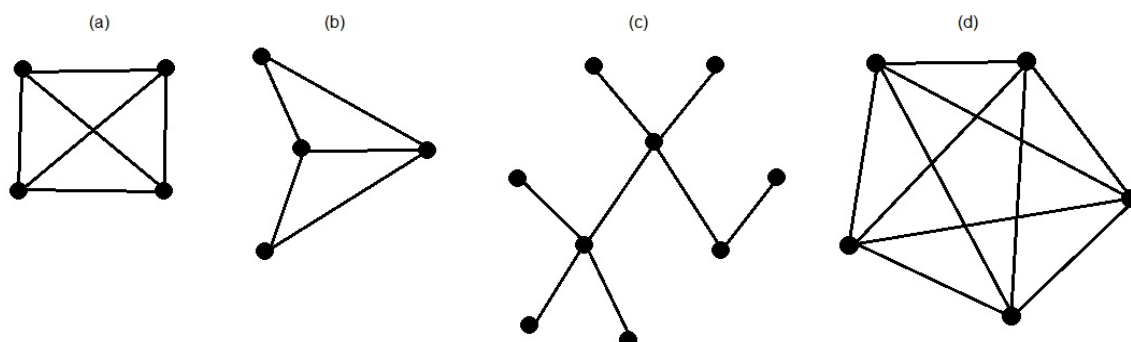


Figura 9 – Identificando grafos eulerianos e semieulerianos

**Atividade 2.6:** Na atividade 2.5 houve algum grafo em que o grau de todos os vértices são números pares, ou seja, nenhum vértice do grafo possui grau ímpar? Será que isso poderia explicar o fato de ser possível encontrar um caminho euleriano fechado? Formule um argumento para justificar a sua conclusão.

**Atividade 2.7:** Considerando ainda a atividade 2.5, houve algum grafo que possui exatamente dois vértices com grau ímpar? Isso explicaria o fato de ser possível encontrar um caminho euleriano aberto? Justifique .

#### Resolução das atividades:

Atividade 2.4: Como os problemas já foram discutidos, espera-se que os alunos percebam que no problema 2.1 há um caminho euleriano fechado, no problema 2.2 há um caminho euleriano aberto e no problema 2.3 não é possível determinar um caminho euleriano aberto ou fechado. Sendo assim, as respostas são:

|                                             | Problema<br>(2.1, 2.2 ou 2.3) | Nº de vértices com<br>grau ímpar |
|---------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| Grafo euleriano                             | Problema 2.1                  | 0                                |
| Grafo semieuleriano                         | Problema 2.2                  | 2                                |
| Grafo que não é euleriano nem semieuleriano | Problema 2.3                  | 4                                |

Atividade 2.5: Se os alunos estiverem atentos aos argumentos que foram utilizados nos problemas 2.2, 2.3 e 2.5, não demorarão muito para perceber que os resultados são os seguintes:

- a. Grafo que não é euleriano nem semieuleriano;

- b. Grafo semieuleriano;
- c. Grafo que não é euleriano nem semieuleriano;
- d. Grafo euleriano.

Atividade 2.6: O grafo em (d) não possui vértice com grau ímpar, e isso explica o fato de ser possível encontrar um caminho euleriano fechado, pois para cada vértice, pode-se “entrar e sair” a metade de vezes correspondente ao grau do vértice, exceto para o vértice inicial, onde a sequência é “sair e entrar”.

Atividade 2.7: O grafo em (b) possui exatamente dois vértices com grau ímpar (no caso, ambos têm grau três), explicando o fato do grafo admitir um caminho euleriano aberto, pois começando em um vértice de grau ímpar, teremos a sequência “sair, entrar e sair” para o vértice inicial. Não podendo então terminar nele, para os vértices de grau par vale a sequência “entrar e sair” quantas vezes for necessária e para o segundo vértice de grau ímpar, necessariamente, deverá ser o vértice de chegada, com a sequência “entrar, sair e entrar”.

Um grafo é dito conexo quando é possível obter um caminho entre dois vértices quaisquer. Esse conceito será melhor abordado na seção 3.2. Para finalizar, as conclusões das atividades anteriores são importantes resultados da Teoria de Grafos. Apresentaremos abaixo, sem demonstrações, alguns resultados que auxiliam na resolução de problemas envolvendo grafos.

- Um grafo conexo não possui vértices com grau ímpar se, e somente se, admite um caminho euleriano fechado, ou seja, todo grafo conexo não possui vértices com grau ímpar se, e somente se, é um grafo euleriano.
- Um grafo conexo possui exatamente dois vértices com grau ímpar se, e somente se, admite um caminho euleriano aberto, ou seja, todo grafo conexo possui exatamente dois vértices com grau ímpar se, e somente se, é um grafo semieuleriano. Nesse caso, todo caminho euleriano aberto tem que começar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro vértice de grau ímpar.
- Um grafo que possui mais de dois vértices com grau ímpar não admite caminho euleriano fechado nem aberto, ou seja, todo grafo

com quatro ou mais vértices com grau ímpar não é um grafo euleriano nem semieuleriano.

Observação: Os problemas e as atividades apresentadas foram elaborados a fim de permitir aos alunos a construção dos resultados acima apresentados. Apresentar as demonstrações desses resultados fugiria ao objetivo proposto neste trabalho, exigindo que fossem introduzidas muitas definições e haveria a necessidade de uma estruturação de teoremas e corolários, bem como a introdução de lemas para serem usados como ferramentas nas demonstrações. Essa estruturação tiraria a naturalidade apresentada neste trabalho, tornando-o apenas mais um desenvolvido nessa área, não o diferenciando dos demais.

Retomando o problema das pontes de Königsberg (Problema 2.5) e considerando um grafo para representá-lo, como mostra a figura 10, podemos resolvê-lo usando os resultados acima.

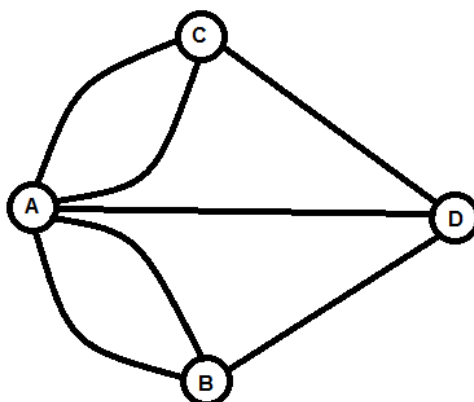


Figura 10 – Grafo associado à cidade de Königsberg

Basta observar que  $d(A) = 5$ ,  $d(B) = d(C) = d(D) = 3$  e concluir que não há um caminho euleriano fechado neste grafo, pois há 4 vértices com grau ímpar. Logo o grafo não é euleriano, daí o fato de não ser possível partir de um vértice e retornar ao mesmo passando uma única vez por cada ponte.

## 2.4 PROBLEMAS

Esta seção será destinada para resolução de problemas envolvendo alguns conceitos sobre grafos, estudados anteriormente, a fim de que os alunos se familiarizem com o assunto e desenvolvam mecanismos próprios e novas técnicas.

**Problema 2.6:** Os professores de Educação Física de uma escola irão realizar um torneio de futsal onde cada turma formará um time para competir. As turmas que se inscreveram para o torneio são: 6º A, 6º B, 6º C, 7º A, 7º B, 8º A, 8º B e 9º A. Esse torneio será realizado através do sistema de pontos corridos, onde todos os times jogam contra todos os outros, uma única vez, e o campeão será aquele que obtiver a melhor campanha, seguindo os critérios estabelecidos pelo regulamento. Considerando que as turmas representem os vértices e que os jogos representem as arestas, esquematize o problema com a utilização de um grafo e indique o número de jogos que serão realizados nesse torneio.

Resolução: A figura 11 mostra um grafo que representa o problema.

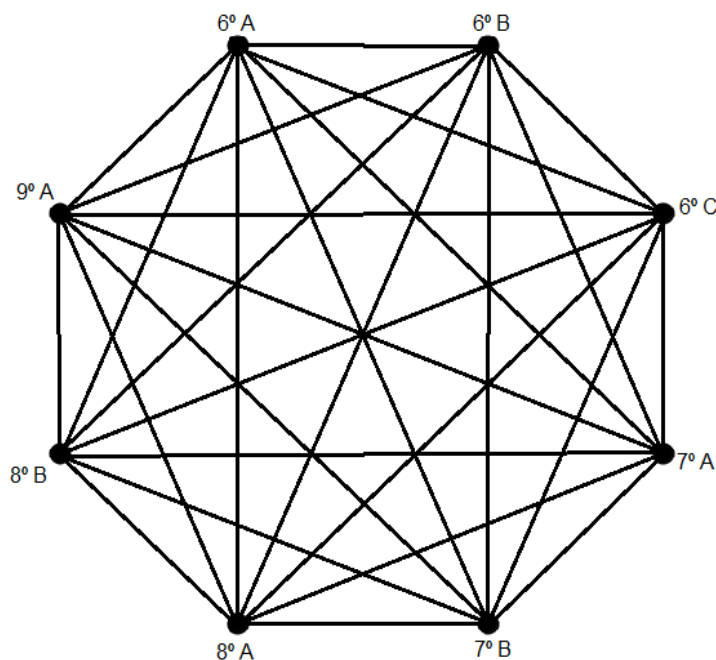


Figura 11 – Grafo associado ao torneio

A quantidade de jogos que serão realizados nesse torneio é igual à quantidade de arestas do grafo acima. Como todos os vértices possuem grau 7 (quantidade de jogos que cada turma realizará) e há 8 vértices (turmas), a quantidade de arestas (jogos) é igual a  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ . Lembre-se que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas.

Comentários: Alguns alunos irão resolver esse problema “contando” quantas arestas esse grafo possui e depois concluir que haverá 28 jogos. Apesar do

aluno chegar a resposta certa, o professor deve levá-lo a refletir sobre a aplicação desse método para determinar a quantidade de jogos se o torneio for disputado por muitos clubes, como por exemplo, o Campeonato Brasileiro onde há 20 clubes participando e há dois turnos.

O professor pode aproveitar o problema para resgatar conhecimentos acerca do número de diagonais de um polígono. O grafo da figura 11 pode ser visto como um octógono onde o número de diagonais é igual a  $\frac{8 \cdot (8-3)}{2} = 20$ . Somando-se a esse valor os 8 lados do octógono, obtemos 28, que é o número de segmentos de reta representado na figura 11, ou seja, 28 arestas.

**Problema 2.7:** A figura abaixo mostra a planta baixa de uma casa com cinco salas interligadas por passagens (portas). É possível iniciar de algum lugar (em uma sala ou do lado de fora) e caminhar através de todas as portas passando por cada uma delas uma única vez?

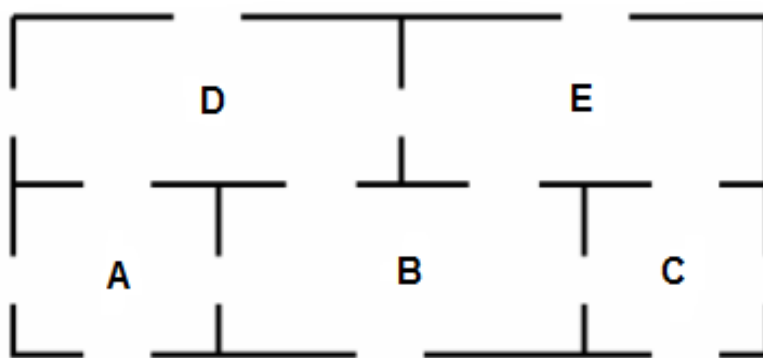


Figura 12 – Planta baixa de uma casa

Resolução: Representaremos o problema por um grafo, figura 13, com 6 vértices (5 cômodos e a parte externa, que chamaremos de F) e as arestas representarão as passagens (portas). Determinar se tal percurso pode de ser feito consiste em encontrar um caminho euleriano aberto ou fechado no grafo abaixo. Sabendo que existem exatamente dois vértices com grau ímpar, B e D, podemos concluir que existe caminho euleriano aberto, começando em B e terminando em D, ou vice-versa. Portanto é possível começar por um cômodo, escolhendo-se B ou D, e terminar no outro cômodo, passando uma única vez por cada porta.

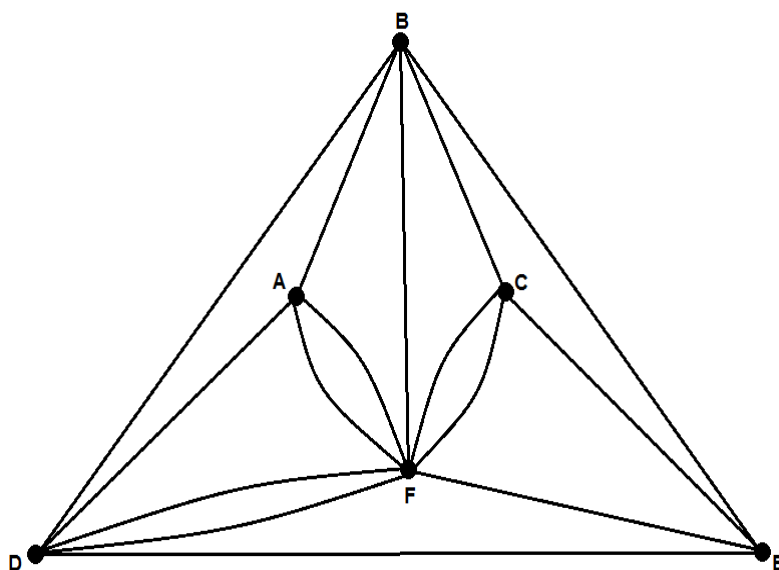


Figura 13 – Grafo associado à figura 12

Quando identificamos um grafo como euleriano ou semieuleriano podemos garantir a existência de um caminho euleriano, porém, não foi citada uma maneira de como construir tal caminho. Discutiremos agora uma maneira de se fazer isso.

O grafo da figura 13 é semieuleriano, logo devemos iniciar o caminho em B ou D (vértices com grau ímpar). Nesse caso, escolhamos B como vértice inicial e consideremos o caminho BD-DA-AB-BF-FD-DF-FE-ED. Apesar desse caminho ter terminado em D, utilizando todas as arestas incidentes nele, o caminho descrito não satisfaz a condição do problema, pois não é um caminho euleriano.

Considerando apenas as arestas que ainda não foram utilizadas no caminho descrito anteriormente, podemos observar que elas formam um grafo com todos os vértices tendo grau par. De fato, foram utilizados no primeiro caminho uma quantidade ímpar de arestas incidindo sobre os seus vértices de início e fim e em cada um de seus vértices intermediários sempre incidem uma quantidade par de arestas.

A figura 14 mostra, em (a), o grafo obtido apenas com as arestas utilizadas no caminho citado e, em (b), o grafo obtido com as arestas restantes.

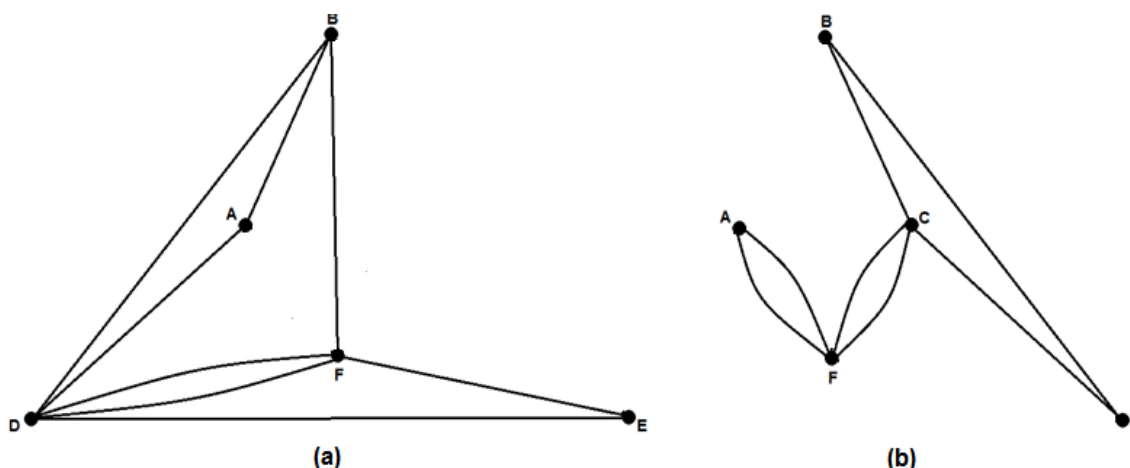


Figura 14 - Construção de caminhos eulerianos

Utilizando agora as arestas que não foram usadas no primeiro caminho, consideremos o caminho FA-AF-FC-CB-BE-EC-CF. Como o grafo original (figura 13) é conexo, é possível concatenar os dois caminhos para formar um único, para isso devemos observar que o vértice inicial do segundo caminho foi F e, analisando o primeiro caminho, quando este chegar no vértice F, ao invés de continuar normalmente, inserimos o segundo caminho por completo, que retornará ao vértice F, e continuaremos a partir daí com a sequência restante do primeiro caminho, obtendo o caminho BD-DA-AB-BF-**FA-AF-FC-CB-BE-EC-CF**-FD-DF-FE-ED, que é um caminho euleriano aberto.

Esse processo pode ser repetido quantas vezes for necessário, concatenando vários caminhos, até que se obtenha um caminho euleriano. É importante observar que, independente do grafo ser euleriano ou semieuleriano, quando se obtém o primeiro caminho, as arestas restantes formam um grafo, não necessariamente conexo, com todos os vértices tendo grau par. Daí a garantia de se obter um caminho que começa em qualquer um dos vértices e retorna ao mesmo vértice. Mas ainda é necessário observar que existe um vértice que é comum aos dois caminhos, pois caso contrário, não seria possível concatená-los. A existência deste vértice se dá pelo fato do grafo considerado inicialmente ser conexo.

Comentários: Esse problema oportuniza aos alunos diversas maneiras de resolvê-lo, trazendo com isso várias soluções diferentes. Alguns alunos não recorrerão aos grafos enquanto outros utilizarão grafos com seis vértices

construídos de diversas maneiras. Com esse leque de soluções possíveis, esse problema permite ao professor um trabalho diferenciado, ouvindo cada aluno e discutindo as soluções apresentadas, ajudando a desenvolver no aluno a sua oratória e exposição de uma cadeia de raciocínios interligados.

**Problema 2.8:** A figura 15 mostra o “Hall dos Espelhos” em um parque de diversões. Depois que o visitante passa pela porta de entrada, ela se fecha e trava automaticamente, o mesmo acontecendo com todas as portas subsequentes pelo qual ele passar. Sabendo que todas as portas estarão abertas ao começar, determine se sempre é possível escapar do Hall dos Espelhos ou se há alguma possibilidade do participante ficar preso em alguma sala. Neste último caso, indique a(s) sala(s) em que isso pode ocorrer.

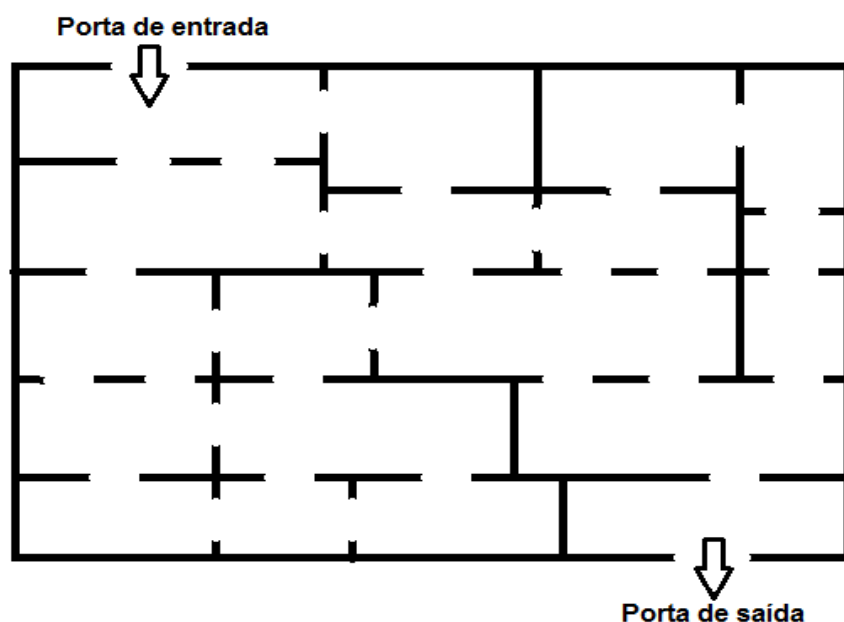


Figura 15 – Hall dos Espelhos

Resolução: Como no exercício anterior, podemos esquematizar esse problema através de um grafo, que não será apresentado aqui, onde as salas representam os vértices e as portas as arestas. É fácil encontrar diversos caminhos em que o participante encontrará a saída, mas não é isso que o problema quer, é necessário analisar se há algum caminho que o deixará preso em alguma sala. Com os conhecimentos já adquiridos, podemos concluir que há duas salas em que isso pode acontecer, salas estas que estão destacadas na figura 16.

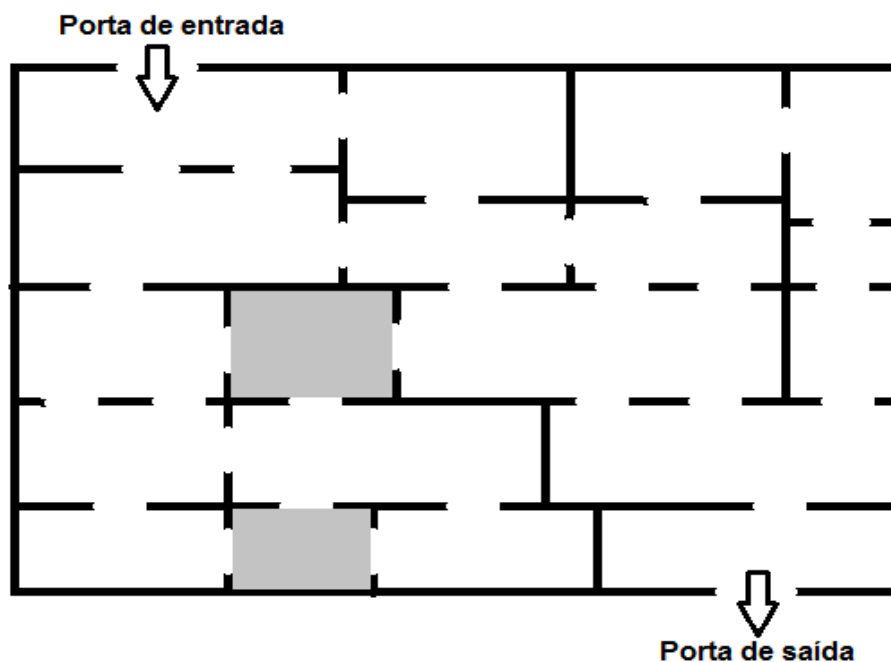


Figura 16 – Salas problemáticas

As salas destacadas possuem três portas, ou seja, em qualquer uma das duas, o participante pode entrar e sair pela sala, restando ainda uma única porta aberta. Se ele retornar a essa mesma sala posteriormente, a porta se fechará e ele ficará preso, justificando assim a resposta dada. Dado que todas as outras salas possuem uma quantidade par de portas, então sempre será possível entrar e sair em qualquer uma delas, não havendo nenhuma possibilidade do participante ficar sem saída. Portanto há somente duas salas que podem deixar o participante preso.

**Problema 2.9:** Uma turma tem 30 alunos. É possível que, na própria turma, nove deles tenha três amigos cada, onze tenham quatro amigos e dez tenham cinco amigos?

Resolução: Suponhamos que seja possível que, em uma turma com trinta alunos, nove tenha três amigos cada, onze tenham quatro amigos e dez tenham cinco amigos. Sendo assim, existe um grafo associado a esse problema, onde os alunos serão representados pelos vértices e as arestas representarão as ligações de amizades entre dois alunos. Segue daí que haverá 9 vértices com grau 3 e 10 vértices com grau 5, ou seja, 19 vértices terão grau ímpar e 11 vértices terão grau par, o que é um absurdo, pois

sabemos que deve haver uma quantidade par de vértices com grau ímpar. Portanto não é possível que haja uma turma com 30 alunos atendendo as condições acima.

**Problema 2.10:** Beatriz deseja fazer chegar a seis outras pessoas o aviso sobre uma festa. Por alguma razão, resolveu fazê-lo através de uma “corrente de convites”, na qual estão impostas as seguintes condições:

- Cada pessoa deve avisar a uma só outra, começando por ela própria, Beatriz.
- Cada pessoa, ao avisar, deve comunicar à outra sobre que pessoas já sabem da festa através dessa corrente (para que ninguém seja avisado mais de uma vez).
- Cada aviso só pode ocorrer entre duas pessoas que sejam amigas (nem todas essas pessoas são amigas entre si).
- Quando todos já souberem da festa, a última pessoa avisada, que deve ser obrigatoriamente amiga de Beatriz, deve comunicar a esta que a corrente foi concluída.

Beatriz é amiga de Vera, Clarisse e Marcelo. Vera é amiga de Beatriz, Paulo e Luciana. Clarisse é amiga de Beatriz e Jonas. Marcelo é amigo de Beatriz e Luciana. Jonas é amigo de Clarisse e Paulo, Luciana é amiga de Vera e Marcelo. Paulo é amigo de Vera e Jonas.

Obedecendo-se as condições impostas, a corrente pretendida por Beatriz é possível? Caso afirmativo, exemplifique uma ordem em que tal corrente poderia se desenvolver.

Resolução: Existem sete pessoas relacionadas neste problema, Beatriz, Vera, Clarisse, Marcelo, Paulo, Luciana e Jonas. A figura 17 mostra um grafo onde os vértices representam as pessoas, denotadas apenas por suas iniciais, e as arestas representam as relações de amizades entre elas.

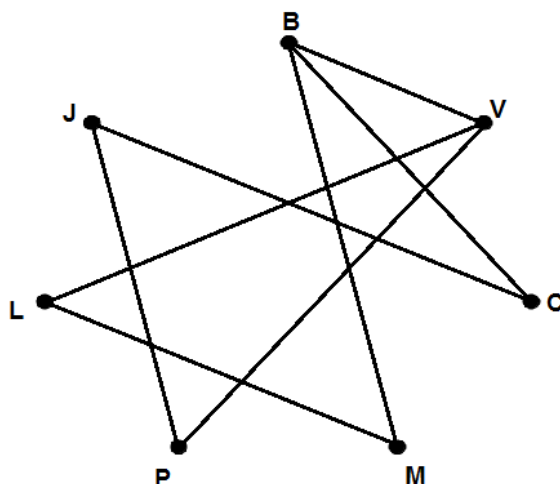


Figura 17 - Relações de amizades

Encontrar uma solução para esse problema consiste em determinar um caminho, começando em B, passando uma única vez por todos os vértices e retornando ao vértice B. Utilizando o grafo acima, podemos perceber que um caminho que satisfaz as condições é, por exemplo, BC-CJ-JP-PV-VL-LM-MB. Logo a resposta para o problema é afirmativa e uma ordem possível para o aviso sobre a festa é: Beatriz avisa Carlos, Carlos avisa Jonas, Jonas avisa Paulo, Paulo avisa Vera, Vera avisa Luciana, Luciana avisa Marcelo e este avisa Beatriz que todos estão cientes da festa.

Comentários: Observe que Beatriz tem três opções para iniciar a “corrente de avisos”: Vera, Carlos, Marcelo. Caso inicie por Vera, esta terá duas outras possibilidades para continuar, Paulo ou Luciana. Se Vera comunicar a Paulo, este terá, obrigatoriamente, que comunicar a Jonas, que por sua vez deverá comunicar a Carlos que poderá comunicar apenas a Beatriz, ficando Luciana e Marcelo sem serem comunicados. Logo Vera deverá comunicar a Luciana e, de modo análogo, Paulo e Jonas não seriam comunicados. Concluimos assim que Beatriz não pode avisar Vera. Caso ela avise Carlos ou Marcelo, a corrente continuará e será possível avisar a todos, retornando a ela. Portanto, além daquela apresentada na solução, existe apenas outra corrente possível que satisfaz todas as condições do problema.

Curiosidades: Em 1859, Sir William Hamilton (1805-1865) inventou um jogo, que recebeu o nome “Around the World”, a partir da representação plana de um dodecaedro (sólido com 12 faces pentagonais e 20 vértices). Cada um dos 20

vértices representava uma das seguintes cidades: Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapeste, Dublin, Edimburgo, Jerusalém, London, Melbourne, Moscow, Novosibirsk, New York, Paris, Pequim, Praga, Rio de Janeiro, Roma, San Francisco, Tokyo e Warsaw. O objetivo do jogo consistia na busca de um caminho fechado envolvendo todos os vértices (cidades), de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez. A figura 18 mostra um grafo associado ao jogo bem como uma solução, destacada em negrito.

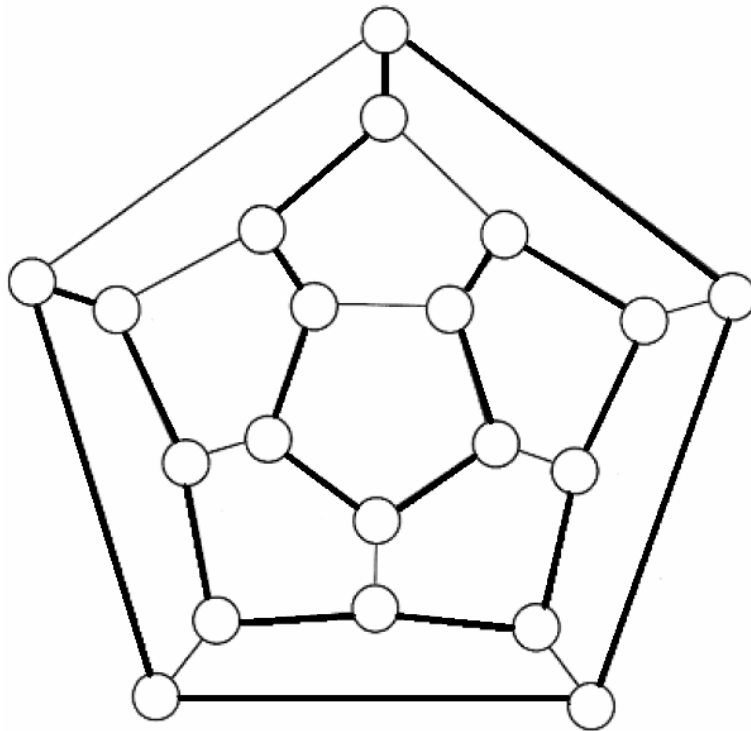


Figura 18 – Grafo do jogo Around the World

Já vimos que caminhos que passam uma única vez pelas arestas são chamados caminhos eulerianos. Em homenagem ao Sir William Hamilton, caminhos que passam uma única vez pelos vértices são denominados caminhos hamiltonianos. O caminho desejado para solucionar o problema 2.10 e o caminho destacado no grafo da figura 18 são exemplos de caminhos hamiltonianos fechados e, quando existir tal caminho, o grafo é chamado de grafo hamiltoniano. São exemplos de grafos hamiltonianos aqueles representados nas figuras 17 e 18.

Caracterizar um grafo hamiltoniano não é uma tarefa simples, como acontece com grafos eulerianos. Existem alguns resultados que se apresentam como condições necessárias, mas não suficientes, para determinar se um grafo é

hamiltoniano, ou seja, todo grafo hamiltoniano apresentam tais condições, mas ter tais condições não é garantia de que o grafo seja hamiltoniano. Esses resultados, juntamente com algoritmos, têm ajudado a resolver alguns problemas envolvendo grafos hamiltonianos.

Os grafos hamiltonianos foram se revelando extremamente importantes, sendo associados a diversos problemas da indústria e de gerenciamento, como linhas de produção, estrutura de placas de circuito impresso, distribuição de informação, navegação de satélites, etc.

**Problema 2.11:** A colônia de férias de *Grafohill* estava sendo preparada para, mais uma vez, receber jovens para a temporada de verão. Seu gerente grego, Prepotencius, mandou seu mais novo empregado, o humilde japonês Tamao, envernizar as maçanetas de madeira dos dois lados de cada uma das 20 portas, conforme mostra a figura 19, dando-lhe as devidas orientações.

Para cada porta, inclusive as cinco portas de entrada, deveria adotar o seguinte procedimento: envernizar a maçaneta do seu lado, passar para o outro lado, fechar a porta e envernizar a outra maçaneta dessa mesma porta, não podendo mais abri-la naquele dia. Afinal, o verniz demoraria 24 horas para secar completamente. No dia seguinte, portanto, todas as maçanetas estariam envernizadas e secas. Fez mais exigências: uma vez envernizadas as maçanetas da 1ª porta, à escolha de Tamao, não poderia pular qualquer janela em momento algum nem passar por porta nenhuma sem que antes envernizasse uma de suas maçanetas e, imediatamente após, sempre conforme o procedimento descrito, a outra. Tudo por “motivos técnicos” mas, na verdade, muita mais pela personalidade intransigente de Prepotencius, temido por seu jeito exigente, autoritário e intolerante. Ao final de todo esse serviço, naquele dia, todas as portas estariam fechadas, as maçanetas envernizadas e, aí então, imediatamente, o empregado ainda deveria ir ao centro da cidadezinha local comprar material de limpeza antes do anoitecer e recolher-se à sua casa, trazendo-o à colônia no dia seguinte. Tamao nem questionou.

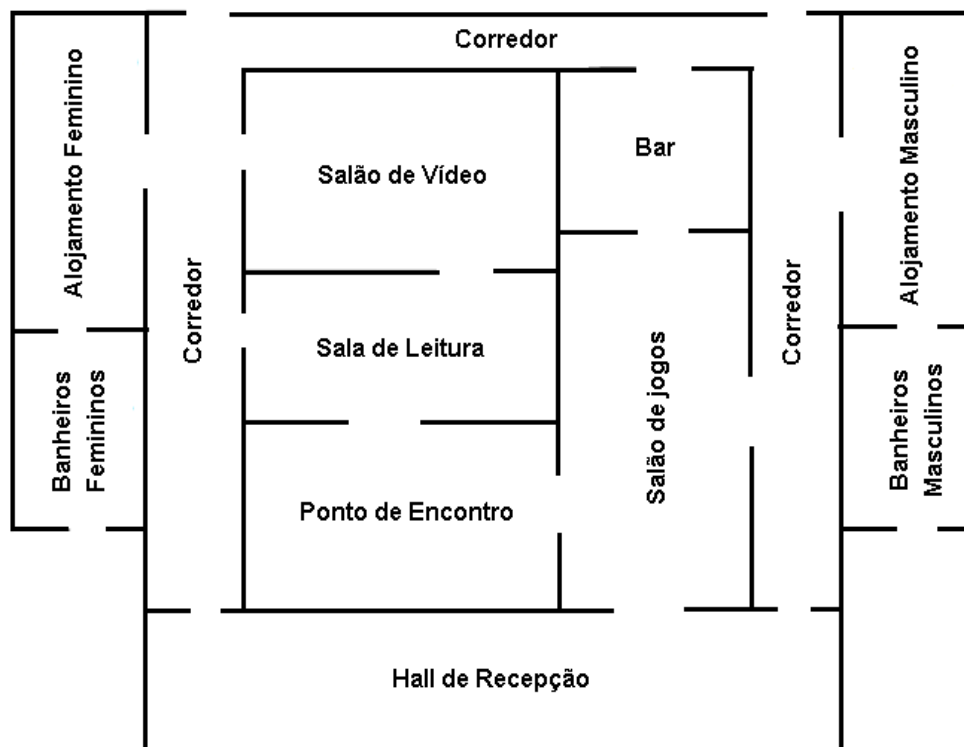


Figura 19 - Grafohill

Algumas horas depois, muito confuso, o empregado procurou o gerente comunicando-lhe que não estava conseguindo concluir o serviço seguindo à risca as ordens que recebera, não tendo, portanto, envernizado todas as maçanetas. Sem pensar duas vezes, alegando que “jamais admitiria tamanha incompetência ou má vontade”, Prepotencius demitiu Tamao. Até hoje corre pelas redondezas que o gerente foi extremamente injusto com o empregado, pois seria impossível executar o serviço cumprindo-se rigorosamente todas as exigências.

Você concorda com o julgamento de Prepotencius ou com a opinião da vizinhança? Justifique.

Resolução: Para facilitar a resolução do problema, associaremos a ele um grafo, apresentado na figura 20, com 12 vértices e 20 arestas. Onze vértices representarão os cômodos da colônia de férias (o corredor será considerado apenas como um único cômodo, pois Tamao pode percorrê-lo livremente) e o outro vértice representará a parte externa (lado de fora) e as arestas representarão as passagens pelas portas.

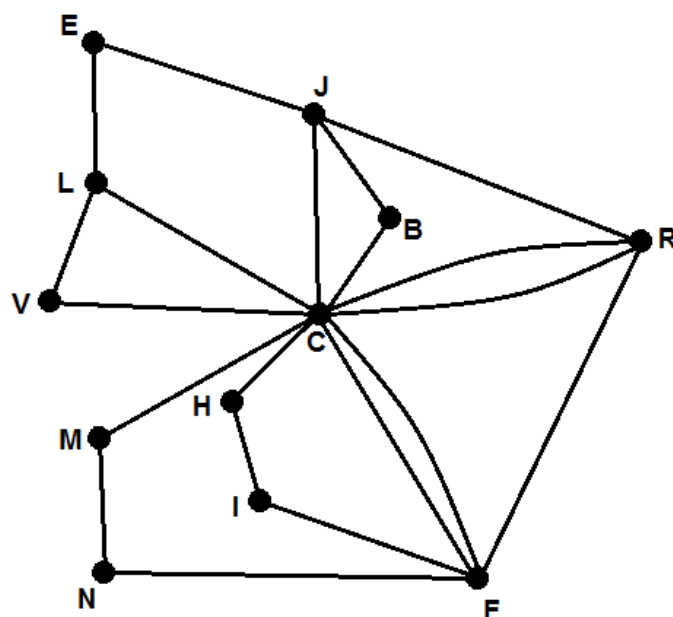


Figura 20 – Grafo associado a Grafohill

A tabela abaixo identifica cada vértice com o cômodo que ele representa.

| Vértice | Cômodo               | Vértice | Cômodo              |
|---------|----------------------|---------|---------------------|
| B       | Bar                  | J       | Salão de Jogos      |
| C       | Corredor             | L       | Sala de Leitura     |
| E       | Ponto de Encontro    | M       | Alojamento Feminino |
| F       | Parte externa        | N       | Banheiros Femininos |
| H       | Alojamento Masculino | R       | Hall de Recepção    |
| I       | Banheiros Masculinos | V       | Salão de Vídeo      |

Analisando o grau de cada vértice do grafo associado ao problema podemos observar que há dois vértices com grau ímpar e concluir então que se trata de um grafo semieuleriano e afirmar daí que tal grafo admite um caminho euleriano aberto, começando em um vértice de grau ímpar e terminando no outro vértice de grau ímpar. Como os vértices de grau ímpar são F e L, chegamos a conclusão que Tamao poderia começar dentro da Sala de Leitura (L), escolhendo qualquer uma das portas e pintando a parte do lado de dentro desta sala e a partir daí continuar o trabalho até terminar na parte externa (F), pintando assim a parte exterior na última porta e, daí, cumprir a última exigência de Prepotencius: comprar material de limpeza na cidadezinha local.

### 3. O USO DOS GRAFOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tendo em consideração que os alunos já adquiriram alguns conhecimentos acerca da Teoria de Grafos, este capítulo reforçá-los-á, retomando-os nos problemas iniciais e introduzindo novos conceitos e ferramentas para a resolução de outros.

#### 3.1 RETOMANDO CONCEITOS

Iniciaremos com um problema que pode ser resolvido com a representação do mesmo através de um grafo e uma observação simples, sem aplicar resultados referentes à Teoria de Grafos.

**Problema 3.1:** Sete pessoas, Antônio, Bianca, Celso, Daniel, Everton, Flávio e Gustavo, que representaremos por A, B, C, D, E, F e G, respectivamente, moram numa mesma cidade. Cada uma delas conhece as outras seis. São pares de pessoas que se gostam: AB, AC, CD, DE, EF, FA, DG, GC e DF. Qualquer outro par, que não esses, refere-se a duas pessoas que não se gostam. Há, dentre essas sete pessoas, alguma que seja mais (menos) popular do que todas as outras? Quem?

Resolução: Utilizaremos um grafo associado ao problema, como mostra a figura 21.

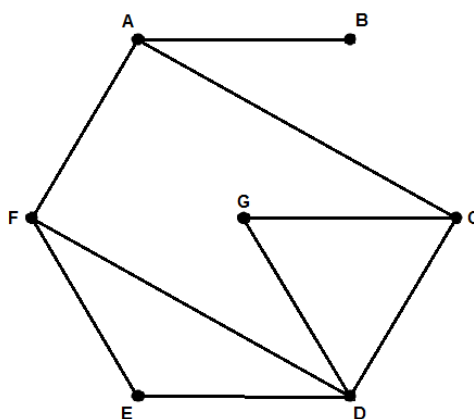


Figura 21 – Relação de afinidade

Os vértices representam as pessoas, indicando apenas suas iniciais, e as arestas representam as relações de afetividade (cada aresta liga duas pessoas que se gostam), teremos então que o vértice com o maior grau representa a pessoa mais popular, enquanto o vértice com menor grau representa a pessoa

menos popular. Como  $d(D) = 4$  é o maior grau e  $d(B) = 1$  é o menor grau, concluímos que a pessoa mais popular é Daniel e a menos popular é Bianca.

**Problema 3.2:** João, voltando da Disneylândia, disse que viu um lago encantado com sete ilhas, cada uma delas tendo 1, 3 ou 5 pontes chegando a elas. É verdade que pelo menos uma dessas pontes tem que levar para a terra firme?

Resolução: Suponhamos que exista um lago com sete ilhas, cada uma delas tendo 1, 3 ou 5 pontes chegando a elas e que nenhuma dessas pontes levam a terra firme, ou seja, todas as pontes estão ligadas a apenas estas 7 ilhas. Associando um grafo a este problema, onde as ilhas representam os vértices e as pontes, as arestas, teremos então que o grau de cada vértice será um número ímpar, o que é um absurdo, pois teremos um grafo com sete vértices com grau ímpar. Portanto concluímos que pelo menos uma dessas pontes tem que levar para a terra firme.

**Problema 3.3:** Uma peça de fio tem 120 cm de comprimento. É possível usá-la, sem cortes, para formar as arestas de um cubo, conforme mostra a figura 22? Qual é o menor número de cortes que é preciso fazer no fio para que se possa formar o cubo desejado?

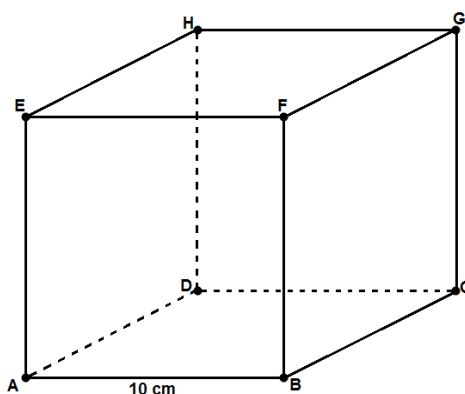


Figura 22 - Cubo

Resolução: Nesse problema, associar um grafo ao cubo é tarefa simples, basta fazer uma correspondência vértice a vértice e aresta a aresta. Obtemos assim um grafo com 8 vértices e 12 arestas, mostrado na figura 23, onde o grau de todos os vértices é igual a 3 e, este grafo não é euleriano nem semieuleriano, não admitindo assim nenhum caminho euleriano fechado ou aberto. Daí

concluimos que não é possível formar as 12 arestas com a peça de fio sem fazer corte nenhum.

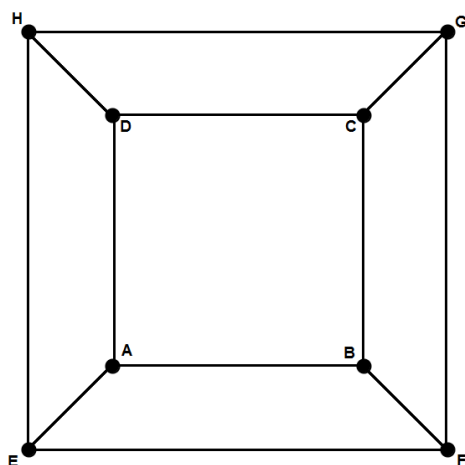


Figura 23 – Grafo associado ao cubo

Para responder à segunda pergunta, a questão é: como conseguir determinar um caminho euleriano aberto (mais flexibilidade do que determinar um caminho euleriano fechado)? Precisamos obter um grafo com apenas dois vértices com grau ímpar. Sendo assim, precisamos alterar o grau de seis vértices, transformando-os em vértices com grau par. Se retirarmos do grafo da figura 23 as arestas correspondentes a um caminho qualquer iremos reduzir o grau do vértice inicial e final em uma ou três unidades e, caso esse caminho passe por mais de uma aresta, o(s) vértice(s) intermediário(s) nele terá(ão) seu(s) grau(s) reduzido(s) em duas unidades. Logo, podemos concluir que se fizermos um único corte, retirando um caminho qualquer, o subgrafo que restará ainda terá seis vértices com grau ímpar. Com o mesmo argumento, podemos concluir que se retirarmos dois caminhos (dois cortes) ainda teremos no subgrafo que restar, na melhor das hipóteses, quatro vértices com grau ímpar. Podemos afirmar então que precisaremos de pelo menos três cortes no fio para formar o cubo desejado.

A figura 24 mostra três caminhos (AE, BF e CG) que foram retirados do grafo da figura 23 e o subgrafo que restou após a retirada desses caminhos. Note que o subgrafo admite um caminho euleriano aberto, pois possui exatamente dois vértices com grau ímpar. Nessa mesma figura podemos observar que foram necessários três cortes para determinar as quatro partes nela mostradas. Então, sabendo que são necessários pelo menos três cortes e visualizando um

exemplo mostrando que três cortes pode resolver o problema, a conclusão é imediata: são necessários, no mínimo, três cortes para obter o cubo com a peça de fio especificada.

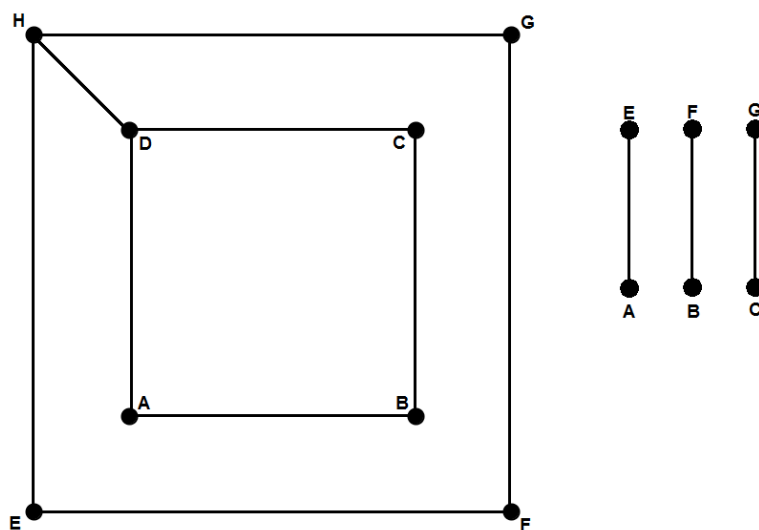


Figura 24 – Partes da peça de fio

**Comentários:** A figura 24 mostra um exemplo de como fazer os três cortes para formar o cubo, mas existem outras maneiras de obter o cubo fazendo três cortes, como por exemplo, retirar os caminhos DC-CG-GH, AD-DH-HE e BA-AE-EF, restando ainda um subgrafo que admitiria o caminho euleriano aberto CB-BF-FG. É importante observar também que mostrar um exemplo com três cortes não resolve o problema, é necessário argumentar porque dois ou menos cortes não resolveria o problema.

**Problema 3.4:** Considere um jogo de dominó tradicional, com 28 peças, e retire todas as peças que contenha “6 unidades” em uma de suas partes. É possível sempre jogar apenas com as peças que restaram sem que, em algum momento, o jogo seja interrompido por não haver peças que possam dar continuidade?

**Resolução:** Primeiramente observemos que as peças com números repetidos não interferem na solução, pois basta imaginá-las entre duas peças quaisquer que possuem o mesmo número. Vamos então responder o problema desconsiderando as peças com números repetidos e as que contenham o número 6, associando as peças restantes a um grafo, onde os vértices

representarão os “números” e as arestas representarão as peças desse dominó, como mostra a figura 25.

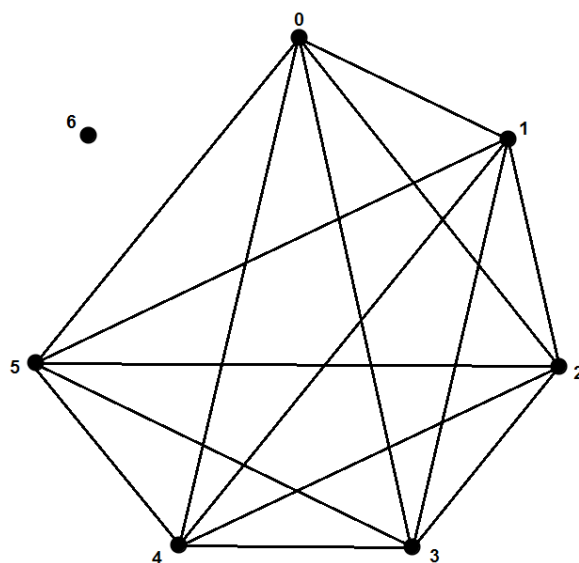


Figura 25 – Grafo associado ao jogo de dominó incompleto

Saber se é possível jogar dominó sem as peças citadas significa determinar se o grafo obtido é euleriano ou semieuleriano. Mas todos os vértices, com exceção do “6”, possuem grau ímpar e, conseqüentemente, o grafo não é euleriano nem semieuleriano e, concluímos a partir daí, que nem sempre será possível prosseguir o jogo somente com essas peças até que se obtenha um vencedor.

Portanto, se retirarmos de um jogo de dominó tradicional todas as peças que contenham 6 unidades em uma das partes, restando 21 peças, nem sempre será possível prosseguir o jogo, podendo ocorrer em algum momento que nenhum jogador tenha peça que dê continuidade ao jogo.

Comentários: Para um jogador de dominó que já tenha um pouco de prática, é de seu conhecimento que algumas vezes o jogo é “trancado” por um determinado jogador, com suas duas extremidades representando a mesma quantidade. Mas, deve-se observar que, com todas as 28 peças, isso ocorre por vontade própria do jogador, pois ele pode jogar a peça que trancou o jogo na outra extremidade e, assim, o jogo poderia continuar. Diferentemente, a situação discutida nesse problema, não ocorre por vontade própria de um determinado jogador, e sim por uma ordem onde não haverá mais peças para

continuar e, deve ser acrescentado ainda que as duas extremidades terão peças com valores diferentes.

### 3.2 CONEXIDADE

Segundo FOMIN (1996), a noção de conexidade é extremamente importante e é usada constantemente em Teoria de Grafos (p. 52). Para introduzi-la aqui, vamos discutir um problema para motivar as definições subsequentes.

**Problema 3.5:** Figurativo é um país com nove cidades de nomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Um viajante descobre que existe voo direto de uma cidade à outra se e somente se o número de dois algarismos formados pelos nomes das cidades é divisível por 3. O viajante pode ir da Cidade 1 para a Cidade 9?

Resolução: Devemos observar e aplicar o critério de divisibilidade por 3 para solucionar esse problema: um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos também o for. Se existir voo da cidade A para a cidade B então  $A + B$  é divisível por 3, sendo assim, também haverá voo da cidade B para a cidade A, pois  $B + A = A + B$ . Vamos associar ao problema um grafo, apresentado na figura 26, onde os vértices são as cidades e as arestas representam as rotas de uma cidade à outra, podendo ser feita nos dois sentidos.

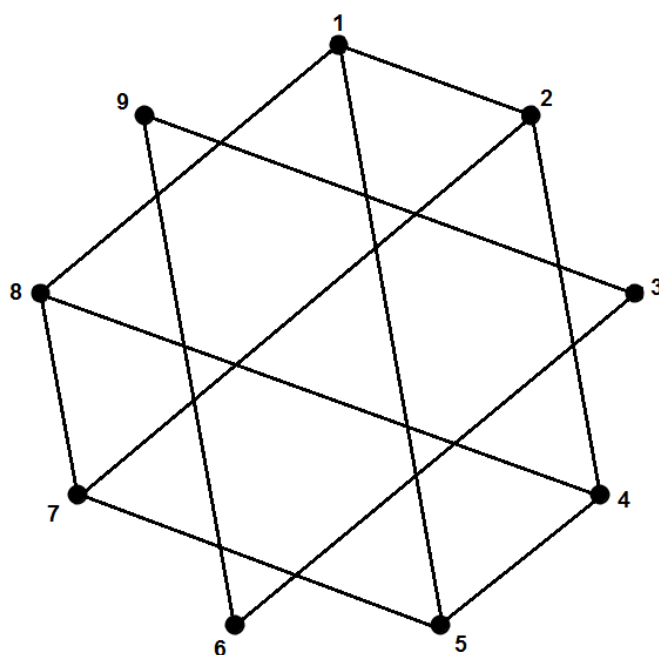


Figura 26 – Grafo associado aos voos

Analisando o grafo acima, é possível observar que os vértices 3, 6 e 9 estão ligados dois a dois e não são ligados a outros vértices diferentes destes citados. Sendo assim, só será possível chegar a cidade 9 partindo da cidade 3 ou 6. Como não há rotas de outras cidades ligando estas duas, é impossível partir da cidade 1 e chegar a cidade 9.

Retomando o conceito de conexidade, um grafo é dito conexo quando é possível obter um caminho entre dois vértices quaisquer. O grafo da figura 26 não é conexo, pois existem vértices, como por exemplo “1” e “9”, que não podem ser ligados por algum caminho.

Um grafo  $H$  é denominado subgrafo de  $G$  se ele pode ser obtido retirando-se do grafo  $G$  algumas arestas e alguns vértices. Note que um subgrafo também é um grafo, obtido de outro, e podemos aplicar os resultados obtidos para os grafos também para os subgrafos.

No grafo da figura 26 podemos observar dois subgrafos, mostrados na figura 27, que são conexos.

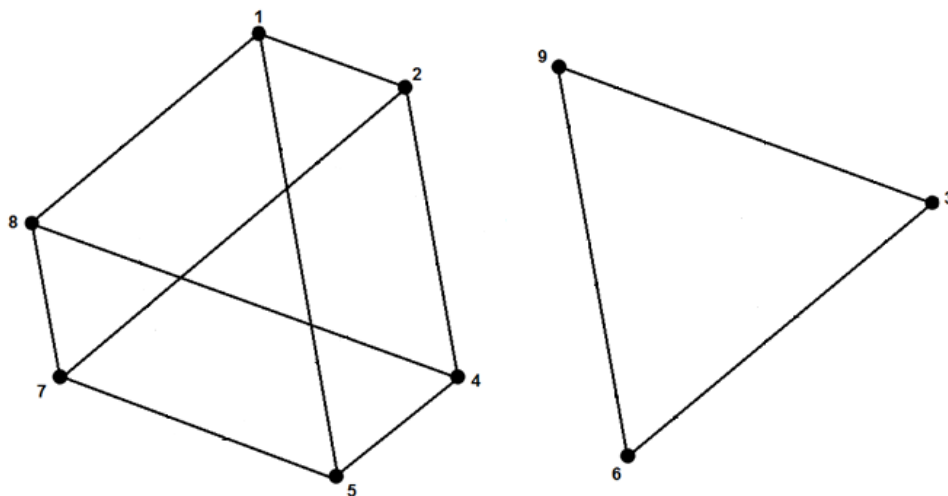


Figura 27 – Componentes conexas

Quando um grafo não é conexo, mas é possível determinar subgrafos conexos que não contêm arestas em comum, de modo que a união de todos resulta no grafo original, chamamos esses subgrafos de componentes conexas. A figura 27 mostra duas componentes conexas do grafo da figura 26, que não é conexo. Observe que o grau de cada vértice na componente conexa não muda em relação ao grafo não conexo que a originou.

Veremos agora dois problemas que serão resolvidos com o conceito de conexidade, ferramenta muito útil para resolver diversos problemas na Teoria de Grafos.

**Problema 3.6:** O País dos Sete tem 15 cidades, cada uma delas ligadas a pelo menos 7 outras. Prove que é possível ir de qualquer cidade para qualquer outra, possivelmente passando por algumas cidades no meio do caminho.

Resolução: Para resolver esse problema, utilizaremos uma argumentação para redução ao absurdo. Suponhamos que há duas cidades A e B, que não possam ser ligadas por nenhum caminho (mesmo passando por outras cidades). Sabemos que existem pelo menos sete outras cidades ligadas a cada uma delas. Vamos supor que haja exatamente sete (se houver mais, o argumento se aplica da mesma forma) para podermos esquematizar visualmente os argumentos. Como não existe caminho nenhum ligando a cidade A a B, nenhuma das sete cidades ligadas a cidade A pode ser comum as sete cidades ligadas a cidade B, como está representado na figura 28.

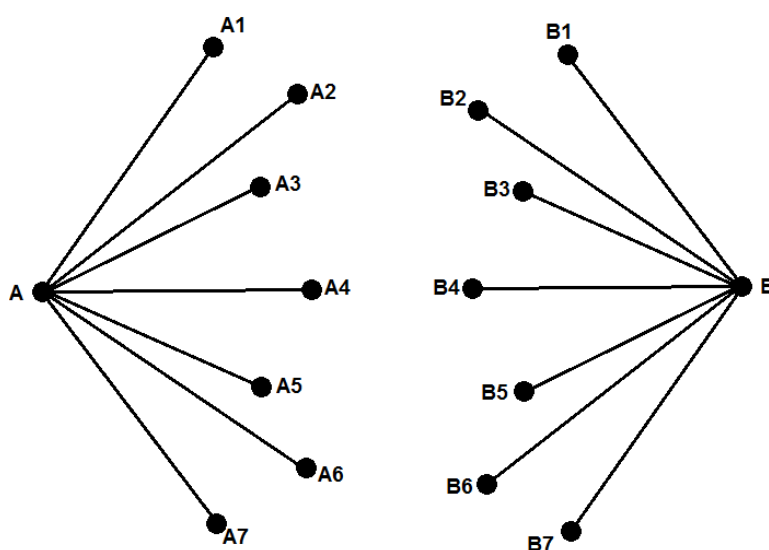


Figura 28 – Cidades do País dos Sete

Observando o esquema acima podemos concluir que existem 16 cidades diferentes, o que é um absurdo, pois no País dos Sete existem 15 cidades. Temos então que nossa suposição inicial é falsa. Portanto sempre haverá algum caminho ligando duas cidades quaisquer do País dos Sete.

Em outras palavras, o problema acima mostra que um grafo com 15 vértices onde todos têm grau maior ou igual a sete é, necessariamente, conexo. A resolução do problema consistiu em supor que o grafo não era conexo e obter um resultado contraditório.

**Problema 3.7:** Na Terra do Nunca só existe um meio de transporte: tapete mágico. Vinte e uma linhas de tapetes servem a capital. Uma única linha voa para Muitolongo e cada uma das outras cidades é servida por exatamente 20 linhas de tapetes mágicos. Mostre que é possível viajar de tapete mágico da capital para Muitolongo (talvez mudando de companhia no meio do caminho).

Resolução: Vamos supor que não seja possível viajar da Capital para Muitolongo. Considere um grafo associado ao problema, onde os vértices são as cidades e as arestas, as linhas de tapetes mágicos. O grau do vértice associado à Capital é 21, de Muitolongo é 1 e das demais cidades é 20. De acordo com nossa suposição, o grafo não é conexo, pois caso contrário, seria possível viajar entre duas cidades quaisquer, por exemplo, a Capital e Muitolongo. Consideremos então duas componentes conexas, uma contendo o vértice associado à Capital e outra contendo o vértice associado à Muitolongo. Em ambas as componentes conexas existem um único vértice com grau ímpar, a Capital em um e Muitolongo no outro, pois todos os demais continuam com grau 20, o que é um absurdo, pois componentes conexas são subgrafos e as condições de existências dos grafos também se aplicam aos subgrafos.

Portanto o grafo associado ao problema ou é conexo ou contém em uma mesma componente conexa as cidades da Capital e Muitolongo. De qualquer modo, sempre será possível viajar da Capital a Muitolongo usando tapetes mágicos.

### 3.3 O PROBLEMA DO MENOR CAMINHO

Como vimos muitas vezes neste trabalho, podemos associar grafos às diversas situações de modo que tenhamos mais ferramentas para discutir e tirar conclusões que nos auxiliam na resolução de problemas. Algumas situações podem representar problemas que trabalham com distâncias, tempo, custo,

dentre outras grandezas, e então as arestas podem ser associadas a números que representam as medições entre os pontos aos quais os vértices estão associados. Grafos que têm suas arestas associados a medidas são chamados de grafos valorados. Esses valores normalmente são estimados por engenheiros, técnicos responsáveis, ou até mesmo sendo obtidos através de uma pesquisa.

Quando se observa um grafo valorado e se tem um objetivo (caminho) a cumprir, a primeira pergunta que surge é: qual é o menor caminho? Observe que menor não representa apenas distância, pode representar menor custo, menor tempo, dentre outras grandezas. Os problemas que veremos nesta seção introduzirão uma técnica para responder essa questão, tendo grandes aplicações em diversas áreas de conhecimento.

**Problema 3.8:** A figura 29 mostra o mapa com algumas cidades do norte e noroeste do estado do Espírito Santo. Para introduzir alguns conceitos que serão apresentados na resolução deste problema, assim como outros que virão, vamos considerar as seguintes cidades: Governador Lindenberg, Jaguaré, Linhares, Nova Venécia, Rio Bananal, São Domingos do Norte, São Gabriel da Palha, São Mateus e Vila Valério.



Figura 29 – Mapa do norte e noroeste do ES

Uma pessoa irá viajar de ônibus, saindo de Jaguaré com destino à Rio Bananal. As arestas do grafo valorado mostrado na figura 30 representam todas as linhas de ônibus possíveis para viajar e os números representam as distâncias aproximadas, em quilômetros, que os ônibus percorrem entre uma cidade e outra. Os ônibus não fazem paradas em seu trajeto, somente no ponto final da cidade que representa seu destino. Qual é a menor distância possível para ir de Jaguaré à Rio Bananal? Que caminho deve ser percorrido?

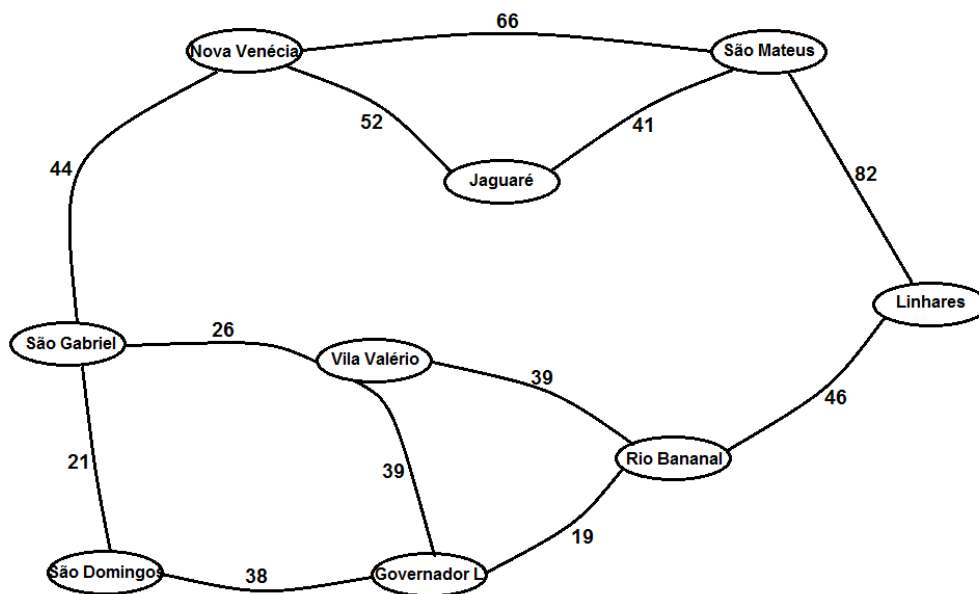


Figura 30 – Grafo valorado associado ao mapa

**Resolução:** Para a resolução de problemas envolvendo menor caminho, atribuímos ao vértice inicial o valor 0 (zero) e, de acordo com o grafo, vamos analisando todos os caminhos possíveis, fechando (destacando) aqueles que não há possibilidade de reduzir o valor a ele atribuído. Faremos esse procedimento até que todos os vértices estejam fechados e associados a eles estarão as menores distâncias em relação ao vértice inicial.

Nesse problema o ponto de partida é Jaguaré e associaremos a esse vértice o número 0 (zero) e fechá-lo-emos. Analisando o grafo, partindo de Jaguaré podemos ir até o vértice que representa Nova Venécia, associando a ele o número 52 ( $0 + 52$ ), ou ao vértice que representa São Mateus, associando a ele o número 41 ( $0 + 41$ ). Como  $41 < 52$ , podemos fechar o vértice correspondente à cidade de São Mateus e determinar o número 41 como

sendo o seu valor. A figura 31 mostra como ficará o grafo após essa primeira análise.

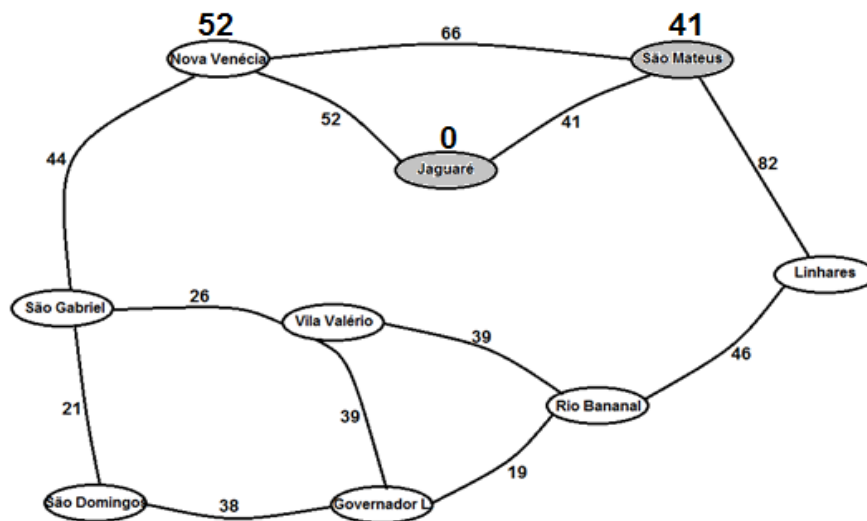


Figura 31 – Resolução do problema do menor caminho – Parte I

Partindo de São Mateus podemos chegar a Linhares, associando a este vértice o número 123 ( $41 + 82$ ) ou podemos chegar a Nova Venécia, associando a este o número 107 ( $41 + 66$ ). Como  $52 < 107$ , descartamos então o número 107 e continuamos com o número 52 associado ao vértice de Nova Venécia. Observando que  $52 < 123$ , fechamos agora o vértice associado à Nova Venécia, obtendo a figura abaixo.

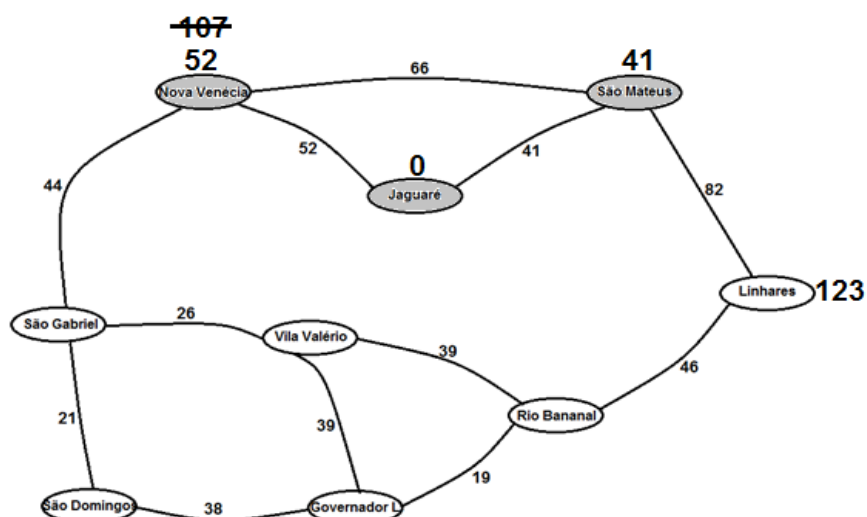


Figura 32 – Resolução do problema do menor caminho – Parte II

Partindo de algum vértice fechado, podemos chegar ao vértice associado à Linhares (que já foi analisado anteriormente) ou ao vértice associado à São

Gabriel da Palha, associando a este último o número 96 (52 + 44). Como  $96 < 123$ , fecharemos agora o vértice correspondente a São Gabriel da Palha, atribuindo-lhe o número 96. A figura 33 mostra como ficará o grafo.

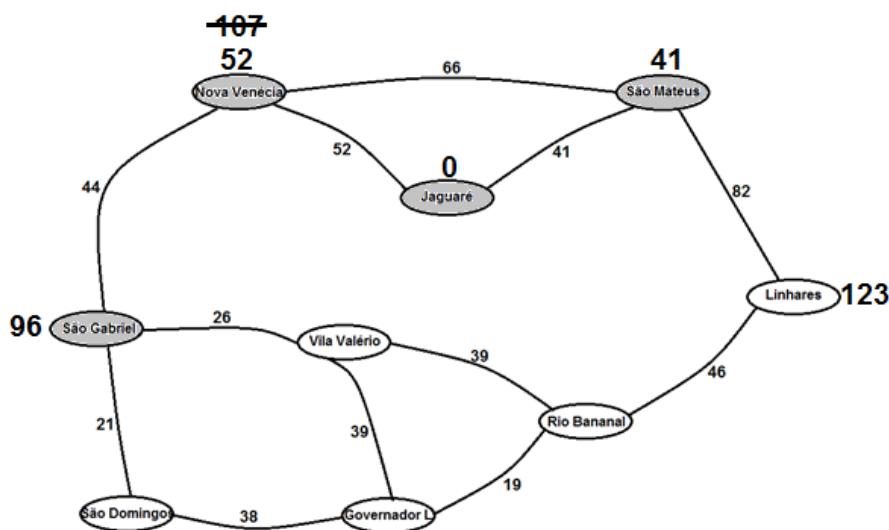


Figura 33 – Resolução do problema do menor caminho – Parte III

Continuando com o mesmo raciocínio, a partir dos vértices já fechados, podemos chegar ao vértice associado à Linhares, que já possui o número 123 atribuído, ao vértice associado à Vila Valério, atribuindo-lhe o número 122 ( $96 + 26$ ) e ao vértice associado à São Domingos do Norte, atribuindo-lhe o número 117 ( $96 + 21$ ). Fecharemos neste ponto o vértice referente à cidade de São Domingos do Norte, pois  $117 < 122 < 123$ , obtendo até o momento o grafo da figura 34.

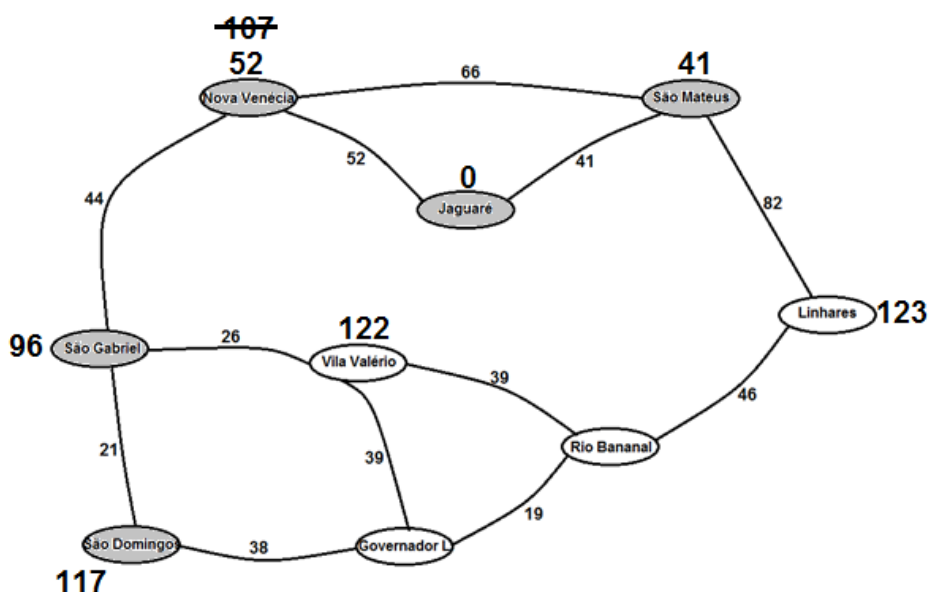


Figura 34 – Resolução do problema do menor caminho – Parte IV

Agora podemos ir para Linhares (123), Vila Valério (122) ou a Governador Lindenberg, que será associado ao número 155 ( $117 + 38$ ). Sendo assim, fecharemos agora o vértice associado à cidade de Vila Valério, pois  $122 < 123 < 155$ . A figura 35 mostra como fica o grafo após essa análise.

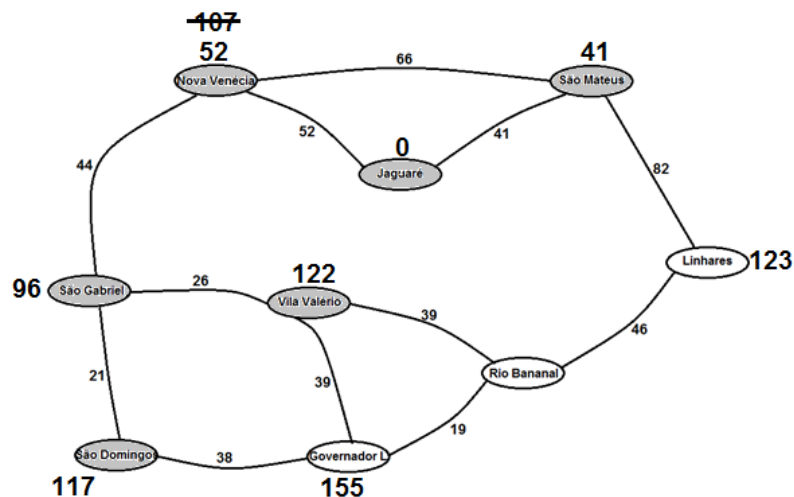


Figura 35 – Resolução do problema do menor caminho – Parte V

Agora podemos ir para Governador Lindenberg de duas maneiras possíveis: a partir de São Domingos do Norte, obtendo o número 155 ( $117 + 38$ ) ou a partir de Vila Valério, obtendo o número 161 ( $122 + 39$ ). Como  $155 < 161$ , cancelamos o número 161, permanecendo o número 155 associado a esta cidade. Podemos também ir para Rio Bananal, associando-o ao número 161 ( $122 + 39$ ). Assim fecharemos o vértice correspondente à cidade de Linhares, pois  $123 < 155 < 161$ . O grafo agora está ilustrado na figura 36.

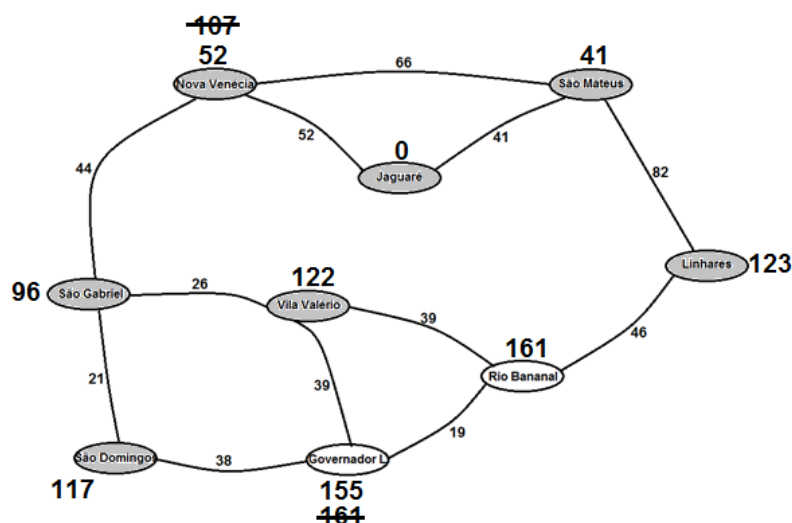


Figura 36 – Resolução do problema do menor caminho – Parte VI

Podemos agora chegar a Rio Bananal vindo de Linhares, obtendo o número 169 ( $123 + 46$ ). Como  $161 < 169$ , o número associado à cidade de Rio Bananal continua sendo 161. Agora fecharemos o vértice correspondente à cidade de Governador Lindenberg, pois  $155 < 161$ . O grafo obtido é mostrado na figura 37.

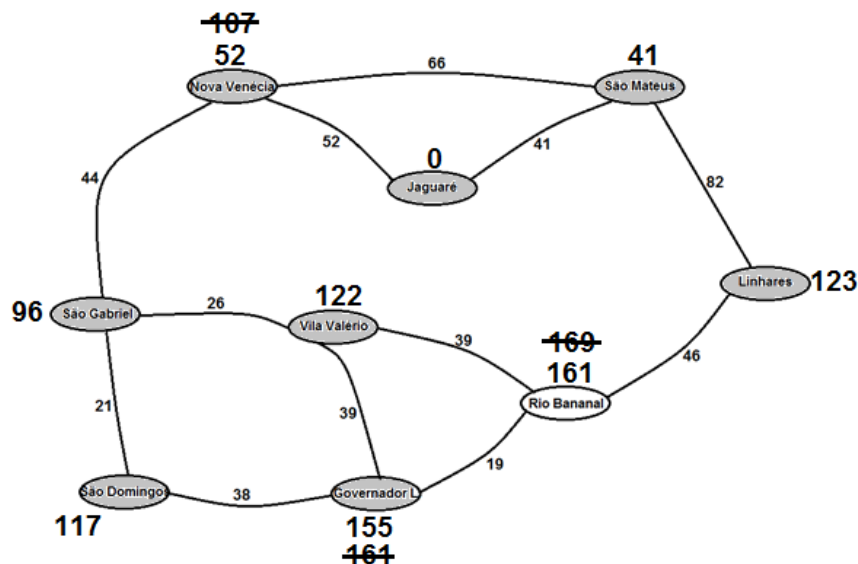


Figura 37 - Resolução do problema do menor caminho – Parte VII

Por final, podemos chegar a Rio Bananal partindo de Governador Lindenberg, obtendo o número 174 ( $155 + 19$ ). Como  $174 > 161$ , cancelamos então o maior e fechamos o último vértice, Rio Bananal, com o número 161, obtendo enfim o grafo da figura 38, com todos os vértices fechados, isto é, com a menor distância possível partindo de Jaguaré.

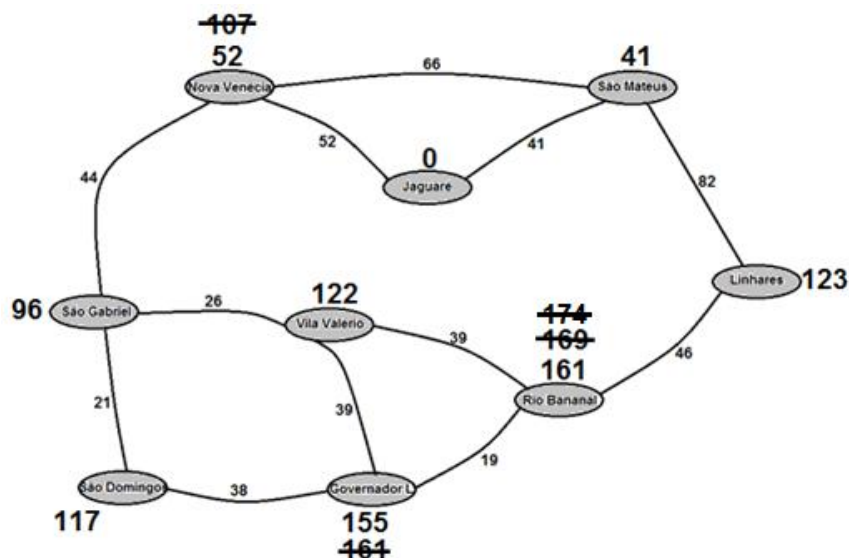


Figura 38 - Resolução do problema do menor caminho – Final

De acordo com a figura 38, podemos concluir que a menor distância entre Jaguaré e Rio Bananal é 161 quilômetros e o caminho a ser percorrido é Jaguaré – Nova Venécia – São Gabriel da Palha – Vila Valério – Rio Bananal.

É importante observar que no problema que acabamos de resolver não foi considerado o tempo de viagem e os custos necessários, apenas a menor distância possível. O método que utilizamos para resolver esse problema é uma adaptação do algoritmo de Dijkstra. Esse algoritmo, apresentado em 1959, trabalha com apenas grafos valorados com números positivos e foi desenvolvido por Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), um cientista de computação que recebeu o prêmio Turing Award, de 1972, por suas contribuições fundamentais na área de linguagens de programação.

**Problema 3.9:** Considerando o problema anterior e o grafo valorado mostrado na figura 39, onde os números representam o tempo de viagem previsto entre duas cidades ligadas, qual seria o melhor percurso para sair de Jaguaré e chegar a Rio Bananal no menor tempo possível? Quanto tempo durará a viagem?

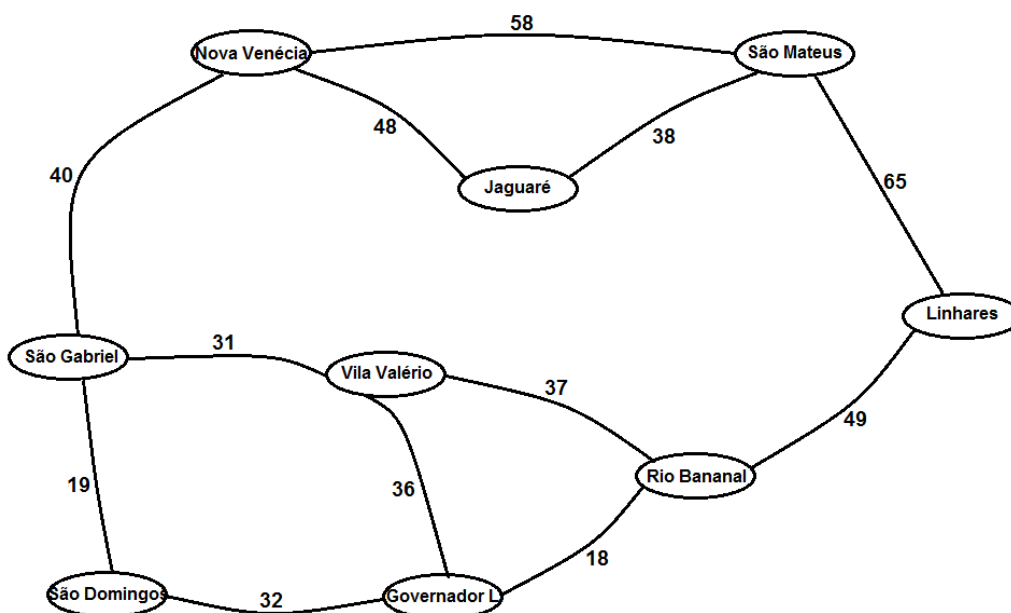


Figura 39 – Minimizando o tempo

**Resolução:** Com os mesmos argumentos e análises feitas no problema anterior, após identificar os menores caminhos detalhadamente, obteremos um grafo com números associados aos seus vértices, como mostra a figura 40.

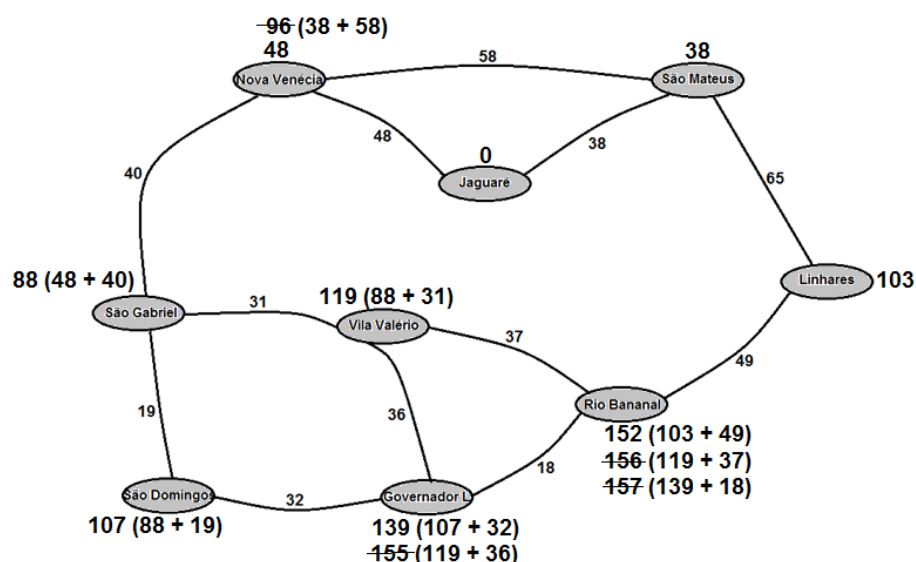


Figura 40 – Resolução do problema minimizando o tempo

De acordo com o grafo acima, o caminho que minimizará o tempo de viagem entre Jaguaré e Rio Bananal é Jaguaré – São Mateus – Linhares – Rio Bananal, com tempo previsto de duração em 152 minutos, ou seja, 2 horas e 32 minutos.

**Problema 3.10:** O mapa da figura 41 mostra diversos caminhos entre a casa de João e alguns lugares próximos a ela. Os números representam as distâncias, dadas em *furlong* (unidade de comprimento do sistema imperial de medidas), entre dois pontos ligados e as linhas representam os únicos caminhos possíveis que João pode percorrer entre os pontos descritos. Qual é a menor distância, em metros, que João deve percorrer de sua casa à Escola, dado que 1 *furlong*  $\cong$  201,17 metros (1/8 da milha terrestre)?

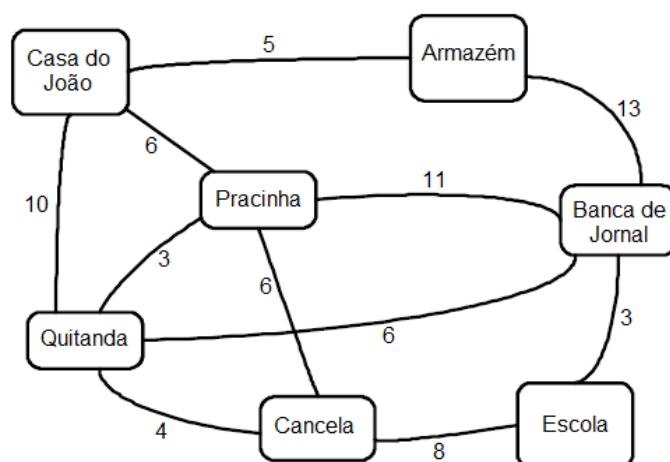


Figura 41 – Caminho para a escola

Resolução: A resolução desse problema segue a mesma linha dos problemas anteriores. Após as análises minuciosas e atribuições de números referindo-se a menor distância possível da Casa do João até os demais pontos, obtemos o grafo indicado na figura 42.

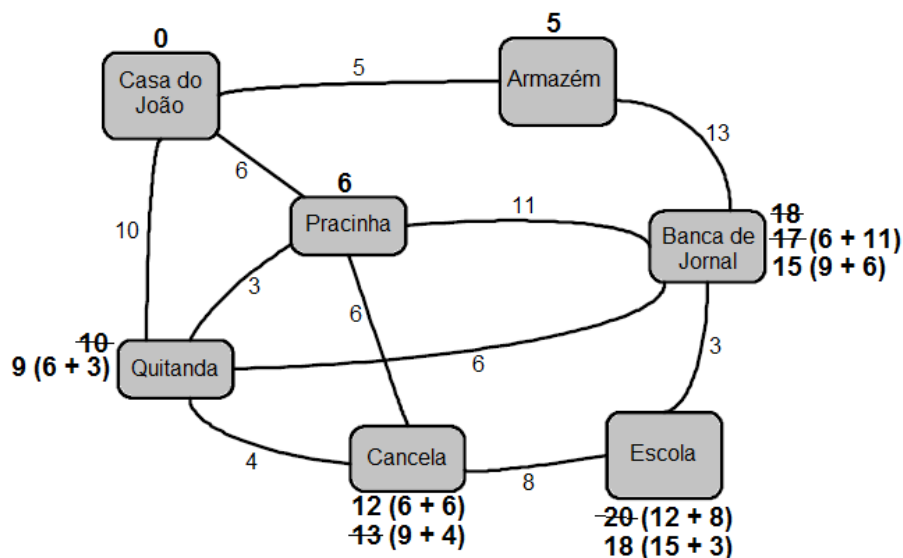


Figura 42 – Minimizando o caminho para a escola

Temos então que a menor distância entre a Casa do João e a Escola é 18 furlongs. Como  $1 \text{ furlong} \cong 201,17 \text{ metros}$ , fazendo a conversão para metros teremos  $18 \cdot 201,17 \cong 3621,06 \text{ metros}$ , ou seja, aproximadamente 3,6 quilômetros.

Curiosidades: As distâncias inferiores a uma milha nas corridas de cavalos no Reino Unido, Irlanda e Estados Unidos se medem em furlongs (o nome completo da unidade é *surveyor furlong*), mas a unidade caiu bastante em desuso. Seu uso oficial foi abolido no Reino Unido sob o *Weights and Measures Act* de 1985, que também aboliu o uso oficial de muitas outras unidades tradicionais de medida.

#### **4. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Durante o período de desenvolvimento deste trabalho, com as leituras e pesquisas realizadas sobre o tema, constatei que a Teoria de Grafos propicia uma prática docente diferenciada. Trata-se de um tema pouco trabalhado em sala de aula por muitos docentes, uma vez que precisam trabalhar em carga horária exaustiva e, com o cansaço advindo do trabalho, não buscam conhecimentos que podem acrescentar e diferenciar suas aulas daquelas tradicionais e corriqueiras que permeiam a educação de matemática, principalmente nas escolas públicas. Muitos professores terão a oportunidade de usar este material voltado para o ensino da Teoria de Grafos no ensino médio, com problemas resolvidos em uma linguagem de fácil entendimento, proporcionando aos alunos uma leitura de fácil compreensão.

Acredito que a realização deste trabalho pode contribuir para que outros sejam desenvolvidos acerca deste tema, surgindo novas propostas para abordar o tema em sala de aula, ou até mesmo a aplicação desta. Deixo neste trabalho uma grande parcela da minha experiência docente, não com o trabalho deste tema, mas com uma proposta de ideias e sequências de temas, juntamente com discussões e considerações, incluindo a linguagem aqui adotada, a fim de que não haja empecilhos para a aplicação em sala de aula.

Para finalizar, acredito que os autores de livros didáticos e as editoras precisam voltar suas atenções para o desenvolvimento de livros didáticos que contemplem temas como Teoria de Grafos e, fugindo a este trabalho, Geometria dos Fractais, também contemplado no CBC do ensino médio da rede estadual de ensino, que são temas enriquecedores ao conhecimento Matemático, despertando nos alunos a curiosidade e, conseqüentemente, um maior interesse em estudar estas partes das ciências que tanto têm contribuído para o crescimento e surgimento de novas tecnologias. Com a inclusão destes temas em livros didáticos, estes conhecimentos podem alcançar, em larga escala, os docentes das diversas regiões que compõem este país.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL/MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

ESPÍRITO SANTO/SEDU. *Currículo Básico Escola Estadual: Área de Ciências da Natureza, Matemática*. Vitória: SEDU, 2009.

FOMIN, Dimitri & GENKIN, Sergei & ITENBERG, Ilia. *Mathematical Circles (Russian Experience)*. American Mathematical Society. Mathematical World, Volume 7, 1996.

MUNIZ Jr., Ivail. *Encontrando, Minimizando e Planejando Percursos: uma introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio*. M.Sc. dissertação. CEFET, Rio de Janeiro, 2007.

FEOFILOFF, Paulo & KOHAYAKAWA, Yoshiharu & WAKABAYASHI, Yoshiku. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. USP, São Paulo, 2011. em: <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>. acesso: 04/06/2013.

MALTA, Gláucia Helena Sarmiento. *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*. M.Sc. dissertação. UFRGS, Porto Alegre, 2008.

JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos – Uma Introdução*. Apostila 5 de Programa de Iniciação Científica da OBMEP, Rio de Janeiro, 2009.

BRIA, Jorge. *Grafos, por que não?*. Caderno de Licenciatura em Matemática UFF, v.1, p. 39-48. EDUFF, Rio de Janeiro, 1998.

GOOGLE. *Mapa do norte e noroeste do ES (Figura 29)*. em: <http://maps.google.com.br/maps?hl=pt-BR&tab=w1>. acesso: 20/06/13.

WIKIPÉDIA. *Furlong*. em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Furlong>. acesso: 18/06/13.