



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL

LUANA MARIA KIEFER DE ARAUJO

INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE NA PROPAGAÇÃO DA
ONDA ACÚSTICA EM MEIOS ESTRATIFICADOS

VITÓRIA

2023

LUANA MARIA KIEFER DE ARAUJO

**INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE NA PROPAGAÇÃO DA
ONDA ACÚSTICA EM MEIOS ESTRATIFICADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Ambiental na área de concentração Recursos Hídricos.

Orientador: Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana.

Coorientador: Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson.

VITÓRIA

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

D278i de Araujo, Luana Maria Kiefer, 1996-
Influência do módulo de compressibilidade na propagação da
onda acústica em meio estratificado / Luana Maria Kiefer de
Araujo. - 2023.
99 f. : il.

Orientador: Julio Tomás Aquije Chacaltana.
Coorientador: Antônio Manoel Ferreira Frasson.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) -
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Módulo de Compressibilidade. 2. Velocidade do Som no
Mar. 3. Propagação Acústica. I. Chacaltana, Julio Tomás
Aquije. II. Frasson, Antônio Manoel Ferreira. III. Universidade
Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 628



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL

Ata da Quadringentésima Quinquagésima Oitava (458ª) Sessão de Defesa de Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA) do Centro Tecnológico (CT) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), da aluna **Luana Maria Kiefer de Araujo**, candidata ao grau de Mestre em Engenharia Ambiental.

Às quatorze horas do dia vinte e nove de setembro de dois mil e vinte e três (29/09/2023), por videoconferência. O Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana, presidindo a Sessão, deu início aos trabalhos apresentando ao público presente a candidata **Luana Maria Kiefer de Araujo** e a banca examinadora da dissertação, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson – Coorientador Externo – UFES, Prof. Dr. José Antônio Tosta dos Reis – Examinador Interno - PPGEA/CT/UFES e Prof. Dr. Carlos Loeffler – UFES. O Senhor Presidente da Banca Examinadora, Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana passou em seguida a palavra ao candidato, que em trinta minutos apresentou a Dissertação de Mestrado intitulada **“INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE NA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM MEIOS ESTRATIFICADOS”**. Dando prosseguimento aos trabalhos de defesa da dissertação, o Senhor Presidente passou a palavra aos membros da Banca, um a um, iniciando os comentários de arguição do candidato com o examinador externo. Após, o Senhor Presidente teceu comentários sobre o trabalho do candidato e franqueou a palavra ao público presente. Findada a arguição, o Senhor Presidente convidou a Banca Examinadora se reunir em separado, para deliberação. Ao retornar, o Senhor Presidente informou ao público presente a decisão da banca que resultou na APROVAÇÃO do examinado. Por fim, o presidente da sessão alertou que o aprovado somente terá direito ao título de Mestre em Engenharia Ambiental após entrega da versão final de sua dissertação, em meio digital, à Secretária do Programa com as correções apontadas pela banca, cumpridos todos os trâmites exigidos pelo Regimento do PPGEA e da homologação do resultado da defesa pelo Colegiado Acadêmico do PPGEA. Por fim, declarou encerrada a sessão, e eu, Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, do Centro Tecnológico, lavrei a presente ata, que irá assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo mestrando.

Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana
Orientador - PPGEA/CT/UFES

Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson
Coorientador Externo – UFES

Prof. Dr. José Antônio Tosta dos Reis
Examinador Interno – PPGEA/CT/UFES

Prof. Dr. Carlos Loeffler
Examinador Externo – UFES

Luana Maria Kiefer de Araujo
Mestranda

Vitória/ES, 29 de setembro de 2023

Av. Fernando Ferrari, 514 Campus Universitário, Goiabeiras - Vitória - ES - CEP 29075-910 - Tel. (27) 33335 2324 - Ramal *9510.





UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL

INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE COMPRESSIBILIDADE NA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM MEIOS ESTRATIFICADOS

Luana Maria Kiefer de Araujo

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana
Orientador - PPGEA/CT/UFES

Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson
Coorientador Externo - UFES

Prof. Dr. José Antônio Tosta dos Reis
Examinador Interno – PPGEA/CT/UFES

Prof. Dr. Carlos Loeffler
Examinador Externo – UFES

ELISA VALENTIM GOULART
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória/ES, 29 de setembro de 2023





458 - Documentos de Defesa - Luana Maria Kiefer de Araujo

Data e Hora de Criação: 26/10/2023 às 10:57:57

Documentos que originaram esse envelope:

- 458 - Documentos de Defesa - Luana Maria Kiefer de Araujo.pdf (Arquivo PDF) - 2 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 393330841bd780ca018ff27d23c94785d6b6953aefd9afc1f2b42d7b58b6b0d3

[SHA512]: 25ad6900a40537b383097c018d1798c329da3da37d5e7cd47d47b70bf7f57c5c9468927b13bc0eb131f6ae8517041fad89c4672b076ccf2c94afb6dacff5d56b

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Antônio Manoel Ferreira Frasson (antoniofrasson@gmail.com)

Data/Hora: 21/11/2023 - 13:17:10, IP: 187.36.236.143

[SHA256]: c778fd6f799e0389a6751e4b82105cfa27d456c78adda49e7e55c68d9b67b61b



ASSINADO - José Antônio Tosta dos Reis (jatreis@gmail.com)

Data/Hora: 26/10/2023 - 12:33:54, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.272438, -40.305575]

[SHA256]: 957309a1ab0cbe9de596513f03b980494cfa41c877f743bbdd3f27f45f78de9c



ASSINADO - Julio Tomas Aquije Chacaltana (julio.chacaltana@ufes.br)

Data/Hora: 26/10/2023 - 13:34:56, IP: 200.137.65.108

[SHA256]: 8fbaec62e4806bb202915083b5a70d798fe0a313d7cfe5bddc002d9a5ffe4c5f



ASSINADO - Carlos Loeffler (loefflercarlos@gmail.com)

Data/Hora: 23/11/2023 - 16:34:54, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.287289, -40.302670]

[SHA256]: 3dc78385e5e2469ad22baf11aa0e71638657a9051f1511d1e0e04bf69b371daf



ASSINADO - Luana Maria Kiefer de Araujo (luana.m.araujo@edu.ufes.br)

Data/Hora: 27/10/2023 - 00:15:15, IP: 162.157.229.73, Geolocalização: [53.5388588, -113.49446]

[SHA256]: e7ada2b0a2893534151ac218791edde8d718a9c4f58ce645fcha3b9cc14b9e7a

Histórico de eventos registrados neste envelope

23/11/2023 16:34:54 - Envelope finalizado por loefflercarlos@gmail.com, IP 200.137.65.102

23/11/2023 16:34:54 - Assinatura realizada por loefflercarlos@gmail.com, IP 200.137.65.102

23/11/2023 16:33:55 - Envelope visualizado por loefflercarlos@gmail.com, IP 200.137.65.102

21/11/2023 13:17:10 - Assinatura realizada por antoniofrasson@gmail.com, IP 187.36.236.143

21/11/2023 13:16:57 - Envelope visualizado por antoniofrasson@gmail.com, IP 187.36.236.143

27/10/2023 00:15:15 - Assinatura realizada por luana.m.araujo@edu.ufes.br, IP 162.157.229.73

26/10/2023 13:34:56 - Assinatura realizada por julio.chacaltana@ufes.br, IP 200.137.65.108

26/10/2023 12:33:54 - Assinatura realizada por jatreis@gmail.com, IP 200.137.65.102

26/10/2023 12:33:40 - Envelope visualizado por jatreis@gmail.com, IP 200.137.65.102

26/10/2023 11:00:46 - Envelope registrado na Blockchain por shanna.pavan@ufes.br, IP 131.255.23.208

26/10/2023 11:00:45 - Envelope encaminhado para assinaturas por shanna.pavan@ufes.br, IP 131.255.23.208

26/10/2023 10:57:58 - Envelope criado por shanna.pavan@ufes.br, IP 131.255.23.208

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a minha mãe, Daíze, saiba que eu só percorri esse caminho pois antes de eu acreditar, você acreditou por mim, obrigada pelas seu incansável esforço para que eu pudesse realizar meus sonhos.

Agradeço à minha família, que torceram e me incentivaram imensamente em todo o processo, vocês são a base para que eu chegasse até aqui.

Ao meu esposo, Leonardo, por todo incentivo e cuidado, obrigada por responder minhas infinitas perguntas sobre programação com paciência, e obrigada por caminhar lado a lado comigo em todas minhas conquistas.

Aos meus amigos no Brasil, obrigada por acreditarem em mim mais do que eu poderia acreditar, por me ouvirem e por me compreenderem.

Aos meus amigos no Canadá, que fizeram desse lugar um lar, obrigada por compartilharem todos os momentos dessa jornada, com certeza esse trabalho é nosso.

Agradeço especialmente ao Prof. Dr. Julio Chacaltana, que contribuiu de forma excepcional na minha formação desde a graduação, por sua dedicação, compreensão e apoio em todos esses anos, obrigada por me capacitar a alcançar grandes objetivos. Pela alegria de trabalharmos juntos.

Ao Prof. Dr. Antônio Frasson, agradeço por toda a disposição e empolgação em ensinar.

Aos membros da banca avaliadora, agradeço a disposição em contribuir para o enriquecimento do trabalho desenvolvido.

RESUMO

Esta Dissertação se concentra na investigação da influência do módulo de compressibilidade na propagação acústica em meios estratificados. Utiliza-se de abordagens da Mecânica dos Fluidos para derivar a equação que governa a propagação das ondas acústicas em um meio não homogêneo. A equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem, considerando espaço e tempo, é formulada para descrever a propagação da onda de pressão, também conhecida como onda-P, e incorpora um termo de fonte do tipo chapéu mexicano, que modela a perturbação gerada no meio. Para resolver numericamente a EDP da onda-P, implementou-se o método das diferenças finitas no domínio do tempo, utilizando um esquema explícito de segunda ordem tanto no tempo quanto no espaço. A fim de garantir a estabilidade numérica, é desenvolvida uma condição de estabilidade que ajusta o intervalo de tempo de acordo com a discretização espacial da malha numérica. No contexto da solução numérica, é aplicada a condição de contorno *Absorbing Boundary Condition* (ABC) de segunda ordem. O modelo numérico foi implementado em FORTRAN e integrado com o ambiente OCTAVE e PYTHON para permitir a visualização dos resultados. As massas específicas e velocidades da onda para uma seção na costa do Espírito Santo são calculadas com base nos dados de temperatura e salinidade, obtidos a partir do modelo *Hybrid Coordinate Ocean Model* (HYCOM). Então o módulo de compressibilidade é calculado e são realizadas simulações de propagação de onda-P em cenários oceânicos reais, visando uma compreensão mais profunda de seu papel na propagação das ondas acústicas em meios não homogêneos. As simulações destacaram a importância crítica da velocidade da onda, dada sua influência direta no tempo de percurso das ondas, especialmente relevante em aplicações como sismologia submarina, onde a localização precisa de fontes sísmicas depende desses tempos. No âmbito da pesquisa, o módulo de compressibilidade é reconhecido como relevante, embora sua flutuação na água do mar seja consideravelmente menor em comparação com a variação na velocidade do som. Essa discrepância atribui à velocidade do som uma posição de destaque na análise e interpretação de dados sísmicos e acústicos.

Palavras-chave: Módulo de Compressibilidade, Velocidade do Som no Mar, Propagação Acústica.

ABSTRACT

This dissertation focuses on investigating the influence of compressibility modulus on acoustic propagation in stratified media. Fluid mechanics approaches are employed to derive the equation governing the propagation of acoustic waves in a non-homogeneous medium. A second-order partial differential equation (PDE), considering both space and time, is formulated to describe the propagation of the pressure wave, also known as the P-wave, and incorporates a Mexican hat-shaped source term that models the disturbance generated in the medium. To numerically solve the P-wave PDE, the finite difference method in the time domain is implemented, using a second-order explicit scheme in both time and space. To ensure numerical stability, a stability condition is developed that adjusts the time step according to the spatial discretization of the numerical mesh. Within the numerical solution context, a second-order Absorbing Boundary Condition (ABC) is applied. The numerical model is implemented in FORTRAN and integrated with the OCTAVE and PYTHON environments to facilitate result visualization. Densities and wave velocities for a section along the coast of Espírito Santo are calculated based on temperature and salinity data obtained from the Hybrid Coordinate Ocean Model (HYCOM). Subsequently, the compressibility modulus is computed, and simulations of P-wave propagation in real oceanic scenarios are conducted to gain a deeper understanding of its role in the propagation of acoustic waves in non-homogeneous media. The simulations underscore the critical importance of wave velocity due to its direct influence on wave travel times, especially relevant in applications such as underwater seismology, where the precise location of seismic sources depends on these times. In the research context, the compressibility modulus is acknowledged as significant, though its fluctuation in seawater is considerably smaller compared to variations in sound velocity. This discrepancy assigns a prominent role to sound velocity in the analysis and interpretation of seismic and acoustic data.

Keywords: Compressibility Module, Sound Speed in Seawater, Acoustic Propagation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relação entre os perfis de temperatura e velocidade do som.	25
Figura 2: Trajetórias da onda acústica na coluna d'água, considerando duas posições para uma fonte sonora. Para a fonte na superfície, a refração que os raios sonoros sofrem ao incidirem na termoclina cria uma zona de silêncio.	26
Figura 3: Grade estruturada típica do método das Diferenças Finitas, onde Δx e Δy representam as distâncias entre os pontos da grade nas direções x e y respectivamente.....	37
Figura 4: Representação esquemática das propriedades físicas da pressão (P) e das propriedades físicas do meio (Γ).....	38
Figura 5 – Solução de 30Hz no domínio do tempo do campo da onda-P em um meio homogêneo para o instante de tempo $t=0,8325s$ com ABC ORDEM 1 (a) e ABC ORDEM 2 (b).	47
Figura 6 - Variação média da temperatura em °C na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.	49
Figura 7 - Variação média da salinidade em PSU na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.	50
Figura 8 - Variação média da massa específica em kg/m^3 na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.....	50
Figura 9 – Ponto escolhido para simulação dos perfis de temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W...	52
Figura 10 – Perfil de temperatura na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.	52
Figura 11 – Perfil de salinidade na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.....	53
Figura 12 – Perfil de massa específica na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.	54
Figura 13 – Perfil da velocidade do som na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.	55
Figura 14 – Perfil de módulo de compressibilidade na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.....	56
Figura 15 – Ponto escolhido para simulação dos perfis de temperatura, salinidade,	

massa específica e velocidade do som, longitude de 35.28° W variando em diferentes latitudes.....	58
Figura 16 – Perfil de temperaturas ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.	58
Figura 17 – Perfil de salinidade ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.	59
Figura 18 – Perfil de massa específica ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.	59
Figura 19 – Perfil de velocidade do som ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.	60
Figura 20 – Perfil de módulo de compressibilidade ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.	60
Figura 21 – Campo de velocidade do caso teste.....	64
Figura 22 – Campo de massa específica do caso teste	65
Figura 23 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio	66
Figura 24 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio	66
Figura 25 - Perfil de Temperatura na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.....	69
Figura 26 - Perfil de Salinidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.....	70
Figura 27 - Perfil de massa específica na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.	71
Figura 28 - Perfil de velocidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.....	71
Figura 29 - Perfil de módulo de compressibilidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.	72
Figura 30 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S	
Figura 31 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.	74
Figura 32 - Perfil de massa específica na costa do Espírito Santo com adição de	

camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.....	76
Figura 33 - Perfil de velocidade na costa do Espírito Santo com adição de camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.	77
Figura 34 - Perfil de módulo de compressibilidade na costa do Espírito Santo com adição de camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.	77
Figura 35 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S, com faixa de areia.	78
Figura 36 – Sismograma gerado com a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S, com faixa de areia.	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros utilizados para simulação das ondas-P com ABC ORDEM 1 e ABC ORDEM 2	46
Tabela 2 - Parâmetros utilizados para simulação da influência do módulo de compressibilidade na propagação acústica	63

LISTA DE SIGLAS

ABC – Absorbing Boundary Condition
ADCP – Perfilador Acústico Doppler de Correntes
EDP – Equação Diferencial Parcial
FE – Elementos Finitos
FFP – Fast Field Program
GODAE – U. S. Global Ocean Data Assimilation Experiment
HYCOM – Hybrid Coordinate Ocean Model
MDF – Método das Diferenças Finitas
NM – Modos Normais
NOPP – National Ocean Partnership Program
PSU – Unidade Prática de Salinidade
SONAR – Sound Navigation and Ranging

LISTA DE SÍMBOLOS

A – Amplitude Da Onda
 c – Velocidade Da Onda Sonora
 c_{max} – Velocidade Máxima Da Onda Sonora
 c_{min} – Velocidade Mínima Da Onda Sonora
 t – Largura Temporal
 z – Profundidade
 E – Módulo De Compressibilidade
 G – Energia Livre De Gibbs
 P – Pressão
 T – Temperatura
 S – Salinidade
 X – Eixo X
 Y – Eixo Y
 Lx – Comprimento No Domínio Em X
 Ly – Comprimento No Domínio Em Y
 nx – Número De Pontos Na Direção x
 ny – Número De Pontos Na Direção y
 x_f – Posição Da Fonte Em X
 y_f – Posição Da Fonte Em Y
 I – Matriz Identidade
 f – Frequência Da Fonte
 k – Número De Onda
 ρ – Massa Específica
 ρ_0 – Massa Específica Da Água
 u – Velocidade Espacial
 v – Volume Específico
 ω – Frequência Angular
 $O()$ – Truncamento
 τ – Tensor Cisalhante
 Γ – Propriedades Físicas Do Meio
 λ – Coeficiente De Condutividade De Calor

μ – Viscosidade Dinâmica

∇ – Divergente

$\ddot{P}_f$ – Termo Fonte

f_p – Frequência De Pico

$\vec{u}$ – Velocidade

$\vec{g}$ – Aceleração Devido À Gravidade

$\vec{q}$ – Lei De Fourier

$D()$ – Derivada Material

$\partial()$ – Derivada Parcial

Δx – Variação Espacial No Eixo X

Δy – Variação Espacial Em Eixo Y

Δt – Variação Temporal

ΔU – Energia Interna Do Sistema

δS – Variação Da Entropia

δv – Volume Específico

δQ – Quantidade De Calor

δW – Trabalho Realizado Pelo Sistema

∂W – Trabalho Realizado Pelo Sistema

α_p – Coeficiente De Expansão Volumétrica À Pressão Constante

β_T – Compressibilidade Isotérmica

c_p – Calor Específico À Pressão Constante

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. OBJETIVOS	18
2.1 OBJETIVO GERAL.....	18
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	18
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	19
3.1 TEORIA ACÚSTICA	19
3.2 PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA.....	22
3.3 VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DO SOM NO OCEANO.....	24
3.4 MÉTODOS NUMÉRICOS	28
3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	29
4. METODOLOGIA.....	30
4.1 EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA PARA UM MEIO NÃO HOMOGÊNEO	30
4.2 TERMO FONTE	31
4.3 CONDIÇÃO DE CONTORNO NÃO REFLEXIVA.....	32
4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DA ONDA DE PRESSÃO PELO MÉTODO NUMÉRICO DAS DIFERENÇAS FINITAS.....	36
4.4.1 Método Das Diferenças Finitas Aplicado À Equação Da Onda Acústica Em Um Meio Heterogêneo	39
4.4.2 Método Das Diferenças Finitas Aplicado À Condição De Contorno ABC Ordem 2..	40
4.4.3 Critério De Estabilidade	41
4.5 CÁLCULO DA VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA NO OCEANO.....	42
4.6 CÁLCULO DA MASSA ESPECÍFICA A PARTIR DA EQUAÇÃO DE ESTADO DA ÁGUA DO MAR.....	43
4.7 SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL NO OCEANO	45
5. RESULTADOS.....	46

5.1	VALIDAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ABC ORDEM 1 E 2D	46
5.2	SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL DA COSTA DO ESPÍRITO SANTO.....	48
5.2.1	Temperatura, Salinidade, Massa específica E Velocidade Do Som Na Costa Do Espírito Santo	49
5.2.2	Simulação Da Propagação Da Onda Acústica Com E Sem A Influência Do Módulo De Compressibilidade Em Um Caso Teste	62
5.2.3	Simulação Da Propagação Da Onda Acústica Com E Sem A Influência Do Módulo De Compressibilidade Em Uma Seção Transversal Da Costa Do Es	68
7.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	80
8.	REFERÊNCIAS.....	82
	APÊNDICE A	87
	APÊNDICE B	92
	APÊNDICE C	95
	APÊNDICE D	97
	APÊNDICE E	99

1. INTRODUÇÃO

As ondas acústicas desempenham um papel fundamental na compreensão e exploração do oceano, sendo uma ferramenta essencial para diversos campos de estudo, como oceanografia, geofísica, biologia marinha e exploração de recursos naturais, desempenhando um papel crucial na busca por soluções para desafios contemporâneos, como a detecção de organismos marinhos, monitoramento ambiental e caracterização de estruturas submarinas.

As ondas acústicas são ondas mecânicas longitudinais que se propagam por meio de compressões e rarefações sucessivas das partículas do meio, transportando energia cinética e potencial, mas não matéria. As partículas do meio oscilam apenas em torno da sua posição de equilíbrio. A direção de propagação das ondas acústicas coincide com a direção da vibração das partículas, caracterizando-as como ondas longitudinais.

Como meio de propagação das ondas acústicas, o oceano possui alta sensibilidade à propagação das ondas acústicas, que possuem frequências na faixa de 1Hz a 20kHz, permitindo o mapeamento do fundo marinho e a obtenção de dados para o estudo do meio oceânico. Uma das características que difere as ondas acústicas das ondas eletromagnéticas é a sua capacidade de percorrer grandes distâncias em ambientes aquáticos, podendo percorrer distâncias superiores a 10.000 quilômetros. Essas características alavancam o interesse prático do estudo da propagação das ondas acústicas no oceano (RODRÍGUEZ, 1995; COSTA, 2014; MEDEIROS, 2015).

O espectro sonoro envolve os sons audíveis e os sons não audíveis. A sensação sonora no ser humano é provocada por ondas de frequências compreendidas entre 20 Hz e 20 kHz, se a onda não estiver dentro desses limites, ao atingir o ouvido de uma pessoa, ela não provocará nenhuma sensação auditiva. Desta forma, os infrassons compreendem ondas com frequências inferiores a 20Hz e os ultrassons compreendem ondas com frequência superior a 20kHz, sendo estas as frequências utilizadas no equipamento “*Sound Navigation and Ranging*” (SONAR) (MÁXIMO e ALVARENZA, 2005).

Após a Primeira Guerra Mundial o estudo da propagação da onda acústica no ambiente marinho começou a apresentar grande relevância, devido à necessidade de

um sistema que detectasse a presença de submarinos inimigos, mas foi com o início da Segunda Guerra Mundial que o uso da acústica submarina se tornou massivo, a partir do uso do equipamento SONAR (BOBBER, 1972).

Ao longo dos anos, a aplicação das técnicas de acústica submarina passou também a ser amplamente utilizada no ambiente oceanográfico operacional, na indústria offshore, na navegação e nas atividades de pesquisa. No âmbito ambiental, pode-se destacar como exemplos práticos do desenvolvimento de tecnologias envolvendo a acústica a medição de correntes, vazões e concentrações de sedimentos pelo Perfilador Acústico Doppler de Correntes (ADCP), a localização de cardumes, ecobatímetros para sondagens batimétricas e sonares para mapeamento topográfico do relevo submarino (*side-scanning sonars*), bem como a detecção, classificação e localização de objetos na coluna de água; (COSTA, 2014; XAVIER, 2005; ETTER, 2013).

Dentre os campos de pesquisa na área acústica pode-se citar o estudo dos impactos gerados pelos ruídos subaquáticos, provenientes das atividades antropogênicas como trânsito de navios e embarcações bem como explosões no ambiente aquático para remoção de estruturas ou atividades de construção, que possuem impactos no meio ambiente e ecossistema marinho, principalmente nos mamíferos (CORREA, 2008; WILLIAMS et al., 2015; SANTOS et al., 2010).

Munk (1989) propôs a utilização de ondas acústicas com baixa frequência e longo alcance nos oceanos, como um meio de monitorar as mudanças climáticas globais à longo prazo. Já Nystuen et al. (1988), mostra que a acústica é a base dos métodos de sensoriamento remoto utilizados para estimar condições climáticas, como a frequência de chuvas no oceano.

Conforme a acústica submarina foi se tornando menos restrita e estendendo-se a diferentes áreas de aplicação, modelos numéricos passaram a ser implementados como ferramenta para a previsão do campo acústico submarino. Inicialmente, os modelos utilizados eram basicamente físicos, baseados em uma representação teórica ou conceitual dos processos atuantes. Entretanto, com a evolução computacional, com o desenvolvimento de métodos matemáticos mais robustos, códigos computacionais mais refinados e com uma grande evolução nos bancos de dados, ocorreu uma gradativa transição destes modelos físicos para modelos

numéricos (ETTER, 2013).

No início da década de 70, a partir do progresso das ferramentas computacionais, a capacidade de cálculo teve um aumento, dando início ao desenvolvimento de modelos numéricos que puderam ser aplicados ao estudo da propagação acústica no oceano. Os modelos acústicos submarinos têm como objetivo principal simular, em diferentes situações, a propagação da onda acústica, predizendo as características mais importantes desse fenômeno. Entretanto, esses modelos possuem limitações em sua aplicação, que podem estar relacionadas com as geometrias complexas presentes no ambiente marinho, que dificultam a descrição do meio em questão, bem como a necessidade de implementar critérios de estabilidade para mitigar a dispersão numérica (RODRÍGUEZ, 1995).

De um modo geral, os modelos e códigos de propagação acústica são baseados na equação da onda. A maioria dos problemas de interesse prático envolvem domínios computacionais muito grandes e, por essa razão, há a necessidade de reduzir a sua dimensionalidade e introduzir suposições ou simplificações de modo a permitir o uso das técnicas numéricas de um modo mais eficiente (DUNCAN e MAGGI, 2006).

Nessa perspectiva, a proposta desse trabalho é desenvolver um código numérico no domínio do tempo para avaliar as mudanças que ocorrem no comportamento da propagação da onda acústica no oceano, através da simulação numérica e registro dos dados adquiridos. O presente trabalho tem como ênfase analisar e discutir como o módulo de compressibilidade influencia na propagação da onda acústica no oceano.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é avaliar a influência do módulo de compressibilidade na propagação da onda acústica em uma sessão real na costa do Espírito Santo, a partir do desenvolvimento de um código numérico no domínio do tempo da equação da onda acústica.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Implementar a condição de contorno *Absorbing Boundary Condition* (ABC);
- Calcular a massa específica e velocidade da onda acústica em uma sessão do oceano na costa do Espírito Santo a partir dos dados de salinidade e temperatura obtidos no HYCOM;
- Calcular o módulo de compressibilidade e inseri-lo a equação da onda acústica para um meio não homogêneo e analisar a propagação da onda acústica sob a influência deste;
- Aplicar o modelo numérico a um problema de propagação de onda a uma seção transversal no oceano na costa do Espírito Santo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 TEORIA ACÚSTICA

A onda acústica é um distúrbio mecânico que se propaga através de um fluido compressível como a água no oceano e o ar na atmosfera. A onda acústica pode ser identificada como uma onda de pressão, que possui uma magnitude muito menor do que a pressão ambiente (MEDWIN e CLAY, 1998).

Segundo KINSLER (1982), o som consiste no movimento vibratório e regular das partículas do meio fluido, gerado por uma fonte sonora, que converte energia mecânica ou elétrica em energia mecânica de vibração. Esta energia é transferida para o meio na forma de energia acústica.

As partículas da água são retiradas da sua posição de equilíbrio, e então surgem forças elásticas que tendem a restaurar essa posição. No retorno, devido à inércia, as partículas ultrapassam a posição de equilíbrio, fazendo com que essas mesmas forças atuem novamente, porém, na direção oposta, de forma a recolocá-la na posição inicial. Quando não há mecanismos de amortecimento, o movimento pode perdurar indefinidamente. Apesar dos deslocamentos serem pequenos, esses distúrbios, chamados de ondas longitudinais, compressionais ou ondas “P”, propagam-se a longas distâncias e a direção da propagação da energia se dá na mesma direção dos deslocamentos (COATES, 2002).

O estudo da acústica pode ser dividido em duas vertentes: a primeira vertente diz respeito ao “problema direto”, onde as propriedades do oceano são conhecidas, sendo possível simular a propagação da onda acústica. A segunda vertente é dada pelo “problema inverso”, comumente conhecido por tomografia acústica, onde a propagação da onda acústica no tempo e espaço é utilizada para aferir os parâmetros e propriedades físicas do meio de propagação nos oceanos (MEDWIN e CLAY, 1998).

No que se diz respeito ao problema inverso, o som pode ser descrito como ativo, quando o mesmo é gerado por uma fonte e posteriormente resgatado, podendo ser utilizado para o estudo de parâmetros físicos e processos no oceano, ou como passivo, quando o som é natural do meio onde está sendo medido, utilizado para

estudos envolvendo identificação de espécies e seus comportamentos ou outras fontes emissoras de origem natural (não provocadas diretamente pela ação humana, como abalos sísmicos) (URICK, 1979).

Atualmente, a acústica submarina desempenha um papel fundamental em diversas áreas de pesquisa (BUCKINGHAM, 1992; BROWN e UDOVYDCHENKOV, 2013). Essas aplicações englobam:

- **Deteção Ativa e Passiva:** A acústica submarina é essencial para a detecção de navios, submarinos, minas e outros alvos subaquáticos, tanto por meio de sistemas ativos que emitem sinais acústicos como por sistemas passivos que captam os ruídos gerados por esses alvos.
- **Sondagem e Perfilagem Sísmica:** Ela é empregada na análise do subsolo marinho e no imageamento de alta resolução do fundo oceânico, permitindo a pesquisa geofísica e geológica das camadas subaquáticas.
- **Tomografia Acústica e Oceanografia:** Através da tomografia acústica, é possível mapear as propriedades acústicas do ambiente marinho, contribuindo para a compreensão das condições meteo-oceanográficas e dos processos submarinos.
- **Transmissão de Baixa Frequência:** A comunicação acústica em baixas frequências é utilizada para estabelecer comunicações de longa distância através do oceano. Isso é vital para o monitoramento de mudanças climáticas globais ao longo do tempo, permitindo a coleta de dados em regiões remotas.
- **Comunicação Submarina:** Além disso, a acústica submarina viabiliza a comunicação entre submarinos e outros dispositivos subaquáticos, possibilitando a troca de informações em ambientes submarinos onde a comunicação por rádio ou outros meios tradicionais é impraticável.

Kearey et al. (2002) mostram que o estudo da propagação da onda acústica vai além de estudo geológicos, estando presente também em investigações nas áreas de engenharia, arqueologia e medicina. Na oceanografia costeira e marinha, engenharia costeira e hidráulica marítima, encontra-se tecnologias envolvendo diretamente a acústica, que pode ser utilizada através do Perfilador Acústico Doppler de Correntes (ADCP) para a medição de correntes, vazões e concentrações de sedimentos, ou nos

sistemas de comunicação para mergulhadores, ecobatímetros e sonares para mapeamento topográfico do relevo submarino (COSTA, 2014).

Além disso, o estudo da acústica possui aplicação na exploração de aquíferos, atividades navais, localização de cardumes e em pesquisas para a sondagem dos oceanos, buscando informações sobre objetos na coluna d'água, no fundo do mar e nos sedimentos (KEAREY et al., 2002; RICHARDSON et al., 1995).

Portanto, a acústica submarina desempenha um papel multifacetado e crucial em várias áreas de pesquisa e aplicação, contribuindo para uma compreensão mais profunda e um melhor aproveitamento do ambiente marinho e seus recursos.

Para que haja o conhecimento da propagação acústica nos oceanos é de extrema importância estudar as propriedades físicas da água do mar, bem como o conhecer o comportamento da velocidade do som na água (MEDWIN e CLAY, 1998).

3.2 PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

As ondas acústicas se originam a partir de vibrações no meio material em que vão se propagar, emanadas de uma fonte pontual ou não. Essas ondas se espalham e se dissipam conforme se afastam de sua fonte. Nos oceanos, as características do som propagado dependerão das características da fonte, da distância entre a fonte e o receptor e do ambiente intermediário.

A propagação do som é matematicamente descrita pela equação da onda, que é o ponto inicial do desenvolvimento da teoria física da propagação acústica e cujos parâmetros e condições de contorno descrevem o meio oceânico. A teoria física da propagação acústica se dá a partir da implementação dos métodos com os quais a pressão sonora é calculada a partir da definição da distribuição inicial da mesma (CORREA, 2008).

Os fatores ambientais tornam-se mais importantes na definição das características da onda acústica à medida que a distância entre a fonte acústica e o receptor aumenta. Se as propriedades do oceano fossem constantes e o oceano fosse ilimitado em extensão, as ondas sonoras emanadas de uma fonte pontual se espalhariam ou se propagariam de maneira esférica em expansão. Isso não ocorre, pois o oceano varia em profundidade, temperatura, salinidade, topografia do fundo e condições de superfície (RICHARDSON *et al.*, 1995).

Obstáculos na trajetória da onda e gradientes de temperatura ao longo do caminho dificultam a propagação do som. Quando o som encontra um obstáculo, ocorre a difração ou reflexão da onda, dependendo das dimensões do obstáculo em relação ao comprimento de onda do campo de ondas incidente, nesse fenômeno a onda se curva em torno do obstáculo. A reflexão ocorre quando a onda acústica incide sobre uma superfície de contorno, já a refração se dá quando a onda acústica se propaga em um meio com diferentes velocidades, mudando de direção de propagação (MEDWIN e CLAY, 1998).

As condições iniciais, indispensáveis em todos os problemas, se referem aos distúrbios específicos que provocam a propagação acústica e as condições de contorno são determinadas pela geometria do meio. Visto que grande parte das equações é muito complexa para serem resolvidas analiticamente, a depender da

geometria do problema e da variação das propriedades do meio em questão, suas soluções são obtidas de forma aproximada, mas suficientes para que se possam fazer previsões confiáveis. Os principais parâmetros considerados na propagação da onda acústica são a velocidade de propagação e a massa específica do meio, que dependem das propriedades físicas do meio, sendo variáveis em cada ponto do meio oceânico e em cada instante de tempo, devido à dinâmica do ambiente marinho (CORREA, 2008).

As propriedades que exercem grande influência na acústica submarina são a temperatura, a salinidade e a massa específica. A variável mais importante no estudo da acústica submarina é a velocidade do som, porém, este valor apresenta variações diretamente associadas às características da coluna d'água, tais como a massa específica e consequente estratificação do oceano. A massa específica provém da medida da estabilidade hidrostática do meio e está relacionada à temperatura, salinidade e pressão (FOFONOFF, 1985). O conhecimento destas características pode auxiliar na compreensão da propagação acústica do som no oceano (ETTER, 2013).

3.3 VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DO SOM NO OCEANO

A propagação das ondas acústicas no oceano é altamente afetada pela velocidade do som, c , que é uma função da massa específica e do módulo de compressibilidade. A massa específica é função da temperatura, salinidade e profundidade e apresenta um valor em torno de 1500 m/s na água do mar, sendo este valor relativamente constante em todos os oceanos. Outra propriedade que influencia na propagação acústica são as variações de massa específica (BUCKINGHAM, 1992).

Verticalmente, o oceano pode ser dividido em três partes que são influenciadas pelas propriedades que atuam na velocidade da propagação das ondas acústicas. A primeira camada é a superficial (camada de mistura ou isotermal), que se prolonga até 200 metros de profundidade e apresenta forte homogeneidade de temperatura e salinidade. A segunda camada é a camada intermediária (termoclina), localizada entre 200 e 1000 metros de profundidade e possui grandes gradientes verticais de temperatura. Por fim, a terceira camada é a mais profunda, localizada entre os 1000 metros até o fundo do mar, e nessa camada as propriedades variam lentamente com a profundidade (CARVALHO e OLIVEIRA, 2014).

A variação da velocidade do som com a profundidade no oceano é conhecida como perfil de velocidade do som e pode ser construído a partir da medição da temperatura e salinidade da água para diferentes valores da profundidade. As variações longitudinais da velocidade das ondas acústica no oceano costumam ser menores do que as variações verticais em profundidade, permitindo fazer a aproximação analítica e com grande precisão do perfil de velocidade (RODRÍGUEZ, 1995).

A distribuição dos perfis de velocidade varia de oceano para oceano e em relação às diferentes estações do ano. Um perfil de velocidade do som (Figura 1(b)) é extremamente dependente do perfil de temperatura (Figura 1(a)) (COSTA, 2014).

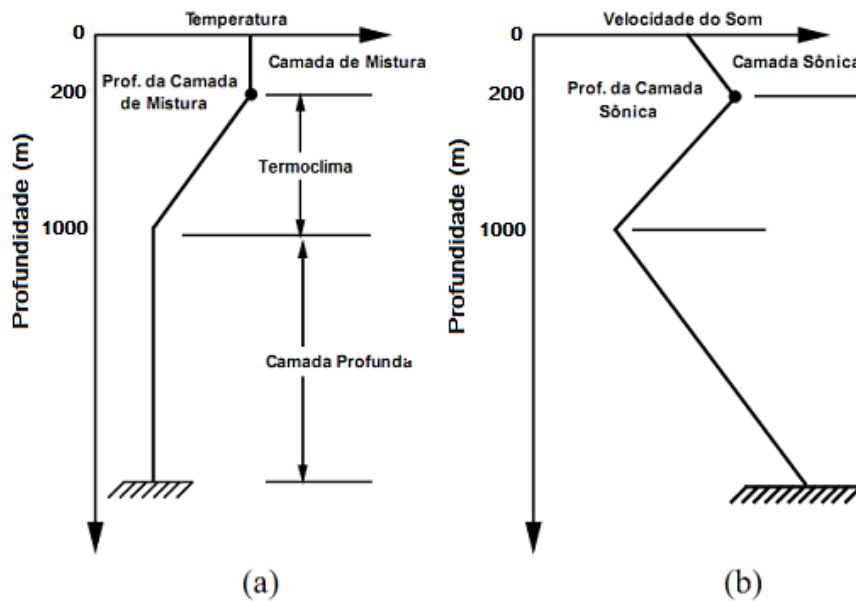


Figura 1 - Relação entre os perfis de temperatura e velocidade do som (Adaptado de XAVIER, 2005).

Na camada de mistura, a camada mais próxima da superfície, a temperatura é constante (influenciada pelas trocas de calor com a atmosfera e pela ação dos ventos e ondas), o que causa um gradiente de velocidade positivo (Figura 2). Esta camada homogênea, também conhecida como camada sônica, pode se comportar como um duto sonoro de superfície, propagando as ondas acústicas por longas distâncias (JONES et al., 2013).

O perfil de velocidade do som é bem atenuado em profundidades intermediárias, a temperatura diminuirá rapidamente nos primeiros 1000 m, onde a velocidade do som decai com a temperatura. Nas regiões mais profundas, abaixo dos 1000 m as mudanças de temperatura são muito pequenas, fazendo com que a velocidade do som seja determinada pelo aumento da pressão, aumentando a velocidade (TOMCZAK, 2003). Esse comportamento é característico do Canal em Profundidade ou SOund Fixing and Ranging (SOFAR), que é típico das águas profundas e uma consequência do formato que o perfil de velocidade do som adquire. (URICK, 1979).

Em relação a salinidade, as mudanças verticais são pequenas comparadas com a pressão, fazendo com que a influência sobre a velocidade do som seja baixa, portanto, caso a velocidade seja baixa, o valor da salinidade será baixo, tendo o contrário como correto (TOMCZAK, 2003).

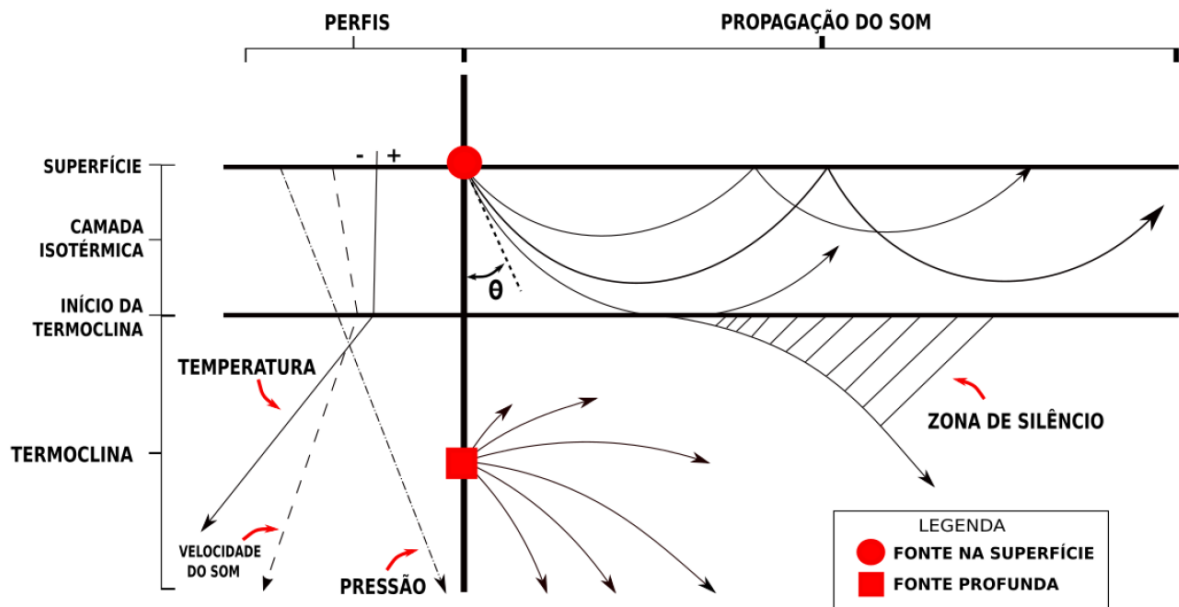


Figura 2: Trajetórias da onda acústica na coluna d'água, considerando duas posições para uma fonte sonora. Para a fonte na superfície, a refração que os raios sonoros sofrem ao incidirem na termoclina cria uma zona de silêncio (Adaptado de MIGUENS, 2006).

Abaixo da camada de mistura encontra-se a termoclina, região da coluna de água onde a temperatura diminui rapidamente com a profundidade, esta região é caracterizada por um gradiente negativo de velocidade do som. Quando um raio sonoro incide na termoclina, dependendo do ângulo de incidência, este pode ser refratado em direção à superfície ou penetrar e se dirigir a maiores profundidades. A profundidade na qual ocorre essa bifurcação do feixe sonoro é chamada de profundidade de camada, que se caracteriza pela presença de gradientes positivos ou isotérmicos, seguidos de um gradiente negativo (MIGUENS, 2006).

Como consequência das variações da velocidade do som, os raios sonoros sofrem encurvamentos na direção das regiões em que a velocidade é menor, tal encurvamento é descrito matematicamente pela Lei de Snell e é justificado pelo fenômeno da refração. Numa coluna de água com uma termoclina bem definida (indicadora de diferenças significativas na massa específica) as ondas acústicas sofrem efeitos diferentes, dependendo da profundidade da fonte. Entre estes raios que são direcionados para a superfície ou para o fundo, pode-se observar uma zona de silêncio (ou zona de sombra), na qual a presença de energia sonora é muito pequena. Esta zona tem

importância no contexto da guerra antissubmarino, já que alvos submarinos podem escapar da detecção navegando imediatamente abaixo da termoclina (MIGUENS, 2006).

Há ainda, uma camada isotermal profunda abaixo da termoclina, onde a temperatura é constante e a velocidade do som aumenta com a profundidade. Desta maneira, na propagação acústica submarina, o sinal pode percorrer múltiplos caminhos (multipath) devido a estratificação do meio. Além disso, ele pode sofrer atenuações devido a alguns mecanismos de perda, como: perda por espalhamento, absorção na coluna de água, atenuação no fundo e interferências (devido ao multipath). A atenuação depende das propriedades físico-químicas da água do mar, sendo este um dos principais fatores que limitam o alcance da propagação em altas frequências (JENSEN et al., 2011).

Além disso, a absorção na coluna de água também apresenta uma relação direta com a frequência, razão pela qual as frequências elevadas não são utilizadas em sistemas-sonar de longo alcance (Miguens, 2006). A medida da redução na intensidade do sinal desde a fonte até o receptor, na acústica submarina, é conhecida como perda na propagação (*transmission loss*). Esta perda de sinal pode ser potencializada quando as ondas acústicas encontram um intenso gradiente de temperatura e são refratadas, como o que ocorre na presença de frentes, vórtices e correntes (MUNK, 1980; JONES et al., 2013).

3.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos vêm sendo cada vez mais utilizados na solução de problemas reais em diferentes áreas, dentre elas a engenharia e geofísica, sendo uma importante ferramenta para investigar com maior precisão diferentes fenômenos físicos em diferentes meios e vem sendo bastante empregada em problemas relacionados com a sísmica de prospecção, que usa a modelagem da onda acústica como embasamento teórico (SANTOS, 2010).

Do ponto de vista teórico, a propagação do som no oceano é descrita pela equação da onda. Existem diferentes métodos (propostas de soluções para a equação da onda) que descrevem a propagação do som no mar, dentre eles: Espectral ou FFP (Fast Field Program), modos normais (NM), traçado de raios, e modelos usando equações parabólicas (PE), e soluções por diferenças finitas (FD) ou elementos finitos (FE) para toda a equação da onda. Todos esses modelos permitem que o ambiente oceânico varie com a profundidade. Outro modelo que permite variações horizontais do ambiente, isto é, inclinações de fundo ou variação espacial das variáveis ambientais, é denominado “range dependente” (JENSEN et al., 2011).

A evolução dos métodos numéricos, especialmente o Método das Diferenças Finitas (MDF) que é pioneiro na resolução das equações diferenciais ordinárias e parciais, começou por volta da virada do século. A modelagem numérica está intimamente ligada à invenção do computador digital (por Atanasoff no final dos anos 1930) e foi usado quase desde o início para resolver problemas de dinâmica de fluidos, porém apenas nos anos 1960, com o aumento do desempenho dos computadores que os modelos computacionais alavancaram (ANDERSON et al., 1997).

O Método das Diferenças Finitas é uma poderosa abordagem numérica que tem sido usada em aplicações de ciência e engenharia onde a solução analítica não é possível, possuindo vantagem por ser comparativamente mais simples e econômico em relação a outros métodos numéricos. Atualmente, o método das Diferenças Finitas no domínio do tempo (Time-Domain Finite-Difference) é o mais popular, devido a sua precisão, eficiência e codificação simples (AJO-FRANKLIN, 2005).

3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A aplicação de métodos de solução discreta para cálculos envolvendo a propagação de onda geram problemas como a presença de reflexões quando as ondas atingem os contornos. Essas reflexões são indesejadas caso o domínio do problema seja muito grande em relação ao domínio de estudo, pois acabam por mascarar os sinais sísmicos reais que se propagam na região modelada (CERJAN *et al.*, 1985).

As condições de contorno de radiação ou absorção possuem a propriedade de fazer com que as ondas que se propagam do interior do domínio para o contorno atravessem a fronteira sem reflexões, simulando limites abertos artificiais, permitindo que as ondas acústicas se propaguem livremente, reduzindo o domínio computacional (BROEZE e VAN DAALEN, 1992).

No final dos anos 70, as condições de contorno não reflexivas denominadas *Absorbing Boundary Conditions* (ABC) foram introduzidas por Clayton e Engquist (1997), baseadas na resolução da equação da onda nos contornos do domínio, permitindo que a onda se propague para fora do domínio sem reflexões (MOREIRA *et al.*, 2014).

Essa abordagem é relativamente bem sucedida, pelo fato de ser uma solução específica para a equação da onda, atuando de forma eficaz para ondas com baixo grau de incidência em relação ao eixo normal do domínio, porém, possui como limitação a incidência oblíqua das ondas (ZENG e LIU, 2001).

4. METODOLOGIA

4.1 EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA PARA UM MEIO NÃO HOMOGÊNEO

A equação (1) representa a forma linear da onda acústica, usada para realizar a propagação da onda de pressão em meios não homogêneos. O processo para obtenção da equação da onda acústica está detalhado no APÊNDICE A e APÊNDICE B.

A equação (1) pode ser reduzida a equação clássica da onda se o meio for homogêneo e pode ser resolvida para um meio não homogêneo, onde há a alteração das propriedades do meio, que pode ser ocasionada por diferentes compartimentos sedimentares, por exemplo.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = E \nabla \cdot \left(\frac{c^2}{E} \nabla P \right) \quad (1)$$

Sendo $E = \rho c^2$ o módulo de compressibilidade comumente encontrado nos estudos da sísmica de prospecção (SILVA, 2011).

Portanto, a equação linear da onda acústica para um meio não homogêneo em duas dimensões é dada por:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{E} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2}{E} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \ddot{P}_f \quad (2)$$

onde $\ddot{P}_f$ é o termo fonte.

O primeiro e segundo termos do lado direito da equação (2) levam em consideração a não homogeneidade do meio em que a onda de pressão se propaga e o terceiro termo do lado direito é a fonte que atua em um ponto fixo do domínio. O primeiro termo do lado esquerdo leva em consideração a variação temporal da pressão em um ponto fixo do domínio.

Pode-se ressaltar a similaridade entre a equação da onda acústica para o meio fluido e o problema da propagação de ondas de dilatação em meios sólidos. Sendo assim a diferença entre as ondas de distorção nos fluidos, que se propagam mais lentamente que as ondas de dilatação em meios sólidos, serem desprezadas. A pressão P pode então, representar adequadamente a onda acústica que trafega em um meio sólido, que é tipicamente heterogêneo (CHACALTANA et al., 2015).

4.2 TERMO FONTE

O termo fonte de pressão é definido dentro do domínio em um ponto específico tendo por definição:

$$\ddot{P}_f(x_f, y_f) = \frac{\partial^2 P_f}{\partial t^2} \quad (3)$$

onde x_f e y_f representam a posição no eixo X e Y , respectivamente, da fonte.

Uma fonte ideal possui a duração de um pulso de fase zero, ou seja, que assume valor apenas no tempo $t=0$, porém, ao se modelar um pulso real, ele possui o tempo de duração do comprimento de onda do termo fonte de $t = 1/f$, onde f é a frequência da fonte. Esse tempo nos diz em quanto tempo o pulso acústico é inserido e propagado, ou seja, quanto tempo demora para que haja apenas a propagação da onda acústica (SANTOS e FIGUEIRÓ, 2006).

A fonte de pressão do tipo Ricker, utilizada no artigo de Dos Santos e Figueiró (2006), foi abordada no presente trabalho, dada pela equação (4):

$$\ddot{P}_f(x_f, y_f) = \left[1 - 2\pi(\pi f_p t)^2 \right] e^{-(\pi f_p t)^2} \quad (4)$$

onde f_p representa a frequência de pico e t é a largura temporal. A equação (4) gera um pulso único de pressão em um ponto fixo do domínio, sendo esse tipo de pulso conhecido como “chapéu mexicano”.

4.3 CONDIÇÃO DE CONTORNO NÃO REFLEXIVA

A equação da onda acústica para um meio heterogêneo e bidimensional pode simular a propagação de uma onda de pressão gerada por uma fonte. Caso o domínio físico seja maior que o domínio computacional, a onda gerada pela fonte deverá se propagar sem interação com o contorno do domínio computacional. Neste caso, se faz necessário aplicar condições de contorno para que não haja reflexão na onda acústica quando a propagação da onda chegar ao contorno, permitindo que ela saia do domínio sem reflexão ou o aumento do domínio computacional, que pode aumentar em demasia a demanda computacional da simulação.

Para que se possa observar a onda se propagando através do domínio sem reflexões, o segundo tipo de condição de contorno aplicado foi do tipo radiação livre, neste caso as “Absorbing Boundary Conditions”, ou simplesmente Condição de Contorno ABC, que tem como base a solução da equação homogênea da onda acústica sem termo fonte para o contorno do domínio.

Seguindo o trabalho realizado por Israeli e Orszag (1981), para obter a condição de contorno ABC de segunda ordem, parte-se da equação clássica da onda em 2D sem o termo fonte, dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

De forma que:

$$P(x, t) = F(x - t) + G(x + t) \quad (6)$$

Onde x é o eixo no qual a onda se propaga e t representa a variável do tempo. Se $|x| > X > 0$, então tem-se que:

$$G = 0 \quad (x > X) \quad (7)$$

$$F = 0 \quad (x < -X) \quad (8)$$

No eixo-X positivo, onde $x = X$ tem-se que a equação da onda é dada por:

$$P = A \sin(kx - \omega t) \quad (9)$$

Onde A é a amplitude da onda, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular, sendo f a frequência

da onda, e $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, sendo λ o comprimento de onda. Derivando a equação (9) no tempo e no espaço tem-se as equações (10) e (11), respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = k A \cos(kx - \omega t) \quad (11)$$

Dadas as equações (10) e (11) e considerando a definição de velocidade da onda $c = \frac{\omega}{k}$, a equação que representa a onda que se propaga no sentido do eixo-X positivo, é dada pela equação (12):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

Analogamente, para o eixo-X negativo onde $x = -X$ tem-se que:

$$P = A \sin(kx + \omega t) \quad (13)$$

Derivando a equação (13) no tempo e no espaço tem-se as equações (14) e (15), respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \omega A \cos(kx + \omega t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = k A \cos(kx + \omega t) \quad (15)$$

Sendo assim, a equação que representa a onda que se propaga no sentido do eixo-X negativo, é dada pela equação (16):

$$\frac{\partial P}{\partial t} - c \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

Para obter a condição de contorno ABC de segunda ordem, parte-se da equação clássica da onda em 2D sem o termo fonte, dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (17)$$

Pode-se reescrever a equação (17) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

Considera-se que:

$$L^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (19)$$

Sendo assim:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - L^2 \right) P = 0 \quad (20)$$

Para $x = X$ e $x = -X$ pode-se considerar as equações (21) e (22), respectivamente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + L \right) P = 0 \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - L \right) P = 0 \quad (22)$$

Para a obtenção de L pode-se usar o procedimento dados pelas equações (23) à (26) a seguir:

$$L^2 P = L^2 (A(x) e^{ily+i\omega t}) = \left(-i^2 l^2 + i^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) P \quad (23)$$

$$L^2 = i^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - l^2 \right) = i^2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2 l^2}{\omega^2} \right) \quad (24)$$

$$L = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 l^2}{\omega^2}} = \pm i \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{lc^2}{\omega} \right)^2 \right) + O \left(\frac{l}{\omega} \right)^4 \quad (25)$$

$$L = \pm \frac{1}{c} \left[i\omega - \frac{il}{2} \left(\frac{l}{\omega} \right) c \right] \quad (26)$$

sendo $i\omega = \frac{\partial}{\partial t}$ e $il = \frac{\partial}{\partial y}$, pode-se substituir essas informações para obter a equação (27):

$$L = \pm \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial t}} \right) \right] = 0 \quad (27)$$

Para o eixo-X positivo onde $x = X$, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} + L \right) P = 0 \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) na equação (28), tem-se que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right) P = 0 \quad (29)$$

Portanto, a condição de contorno ABC para $x = X$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (30)$$

De forma análoga, para o eixo-X negativo onde $x = -X$, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} - L \right) P = 0 \quad (31)$$

Substituindo a equação (27) na equação (31), tem-se que:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (32)$$

Portanto, a condição de contorno ABC para $x = -X$ é dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (33)$$

Para o eixo-Y o mesmo raciocínio é utilizado.

De forma resumida, as equações para cada condição de contorno foram obtidas e aplicadas neste trabalho. As condições de contorno ABC de primeira e segunda ordem em $x = \pm X$, são dadas pelas equações (34) e (35), respectivamente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \pm c \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \pm c \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (35)$$

4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DA ONDA DE PRESSÃO PELO MÉTODO NUMÉRICO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das Diferenças Finitas é uma poderosa abordagem numérica que tem sido usada em aplicações de ciência e engenharia onde a solução analítica não é possível, possuindo vantagem por ser comparativamente mais simples e econômico em relação a outros métodos numéricos.

Atualmente, o método das Diferenças Finitas no domínio do tempo é o mais popular, devido a sua precisão, eficiência e codificação simples (AJO-FRANKLIN, 2005).

Na abordagem de diferenças finitas, discretiza-se o domínio do problema contínuo, de modo que as variáveis dependentes são consideradas como existindo apenas em pontos discretos, sendo as derivadas aproximadas por diferenças, resultando em uma representação algébrica da equação diferencial parcial, sendo assim, um problema envolvendo cálculo é transformado em um problema algébrico (ANDERSON et al., 1987).

O domínio físico contínuo representado (discretizado) por um conjunto de pontos discretos dados pelo método das diferenças finitas é representado por uma grade. Em 2D tem-se que a grade pode ser representada pela Figura 3:

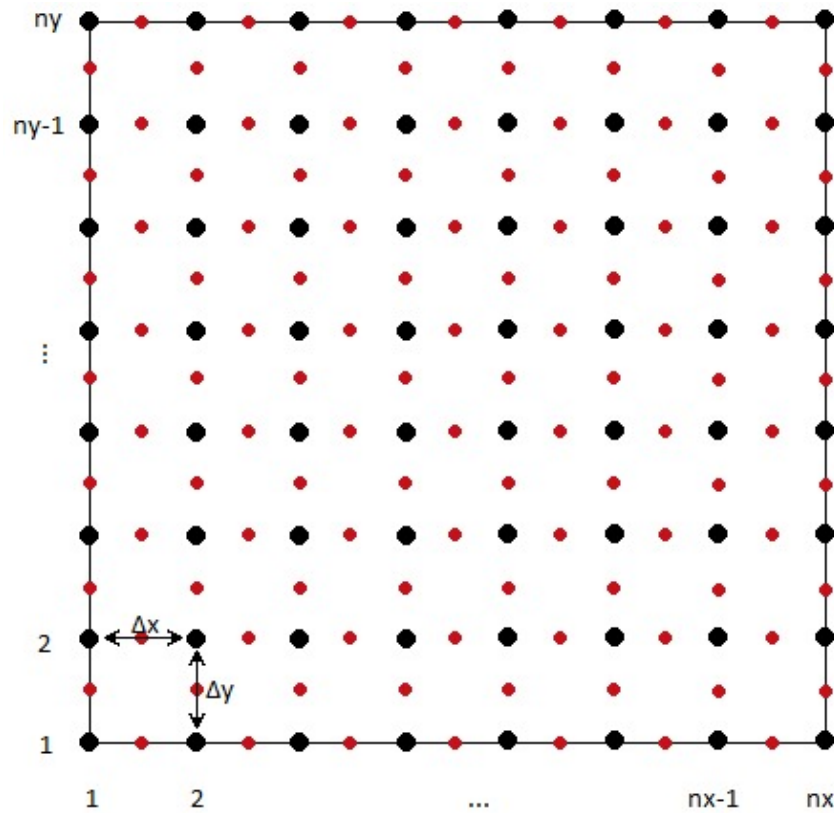


Figura 3: Grade estruturada típica do método das Diferenças Finitas, onde Δx e Δy representam as distâncias entre os pontos da grade nas direções x e y respectivamente. Fonte: Elaboração Própria.

Em duas dimensões a grade que representa o domínio é dada por $0 \leq x \leq Lx$ e $0 \leq y \leq Ly$, onde x e y são as coordenadas cartesianas nas direções horizontal e vertical, respectivamente, e Lx e Ly representam o comprimento, dado em metros, do domínio em x e y , respectivamente. A quantidade de pontos na grade é dada por $1 \leq x \leq nx$ e $1 \leq y \leq ny$, sendo nx o número máximo de pontos na direção x e ny o número máximo de pontos na direção y .

Na figura (4) abaixo, pode-se observar a disposição dos pontos vizinhos aos pontos centrais, onde nos pontos centrais em preto a pressão (P) é calculada, e nos pontos vermelhos são determinadas as propriedades físicas do meio (Γ).

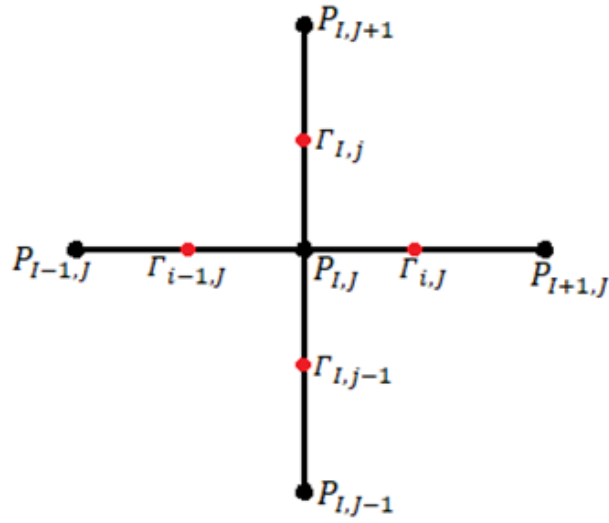


Figura 4: Representação esquemática das propriedades físicas da pressão (P) e das propriedades físicas do meio (Γ). Fonte: Elaboração Própria.

Os índices (I, J) são utilizados para identificar os pontos da grade onde a variável de pressão (P) está localizada, e os índices (i, j) identificam os pontos médios da grade onde as propriedades físicas do meio (Γ) estão especificados.

As propriedades físicas do meio são a massa específica (ρ), a velocidade de propagação da onda acústica (c), e o módulo de compressibilidade (E). Vale ressaltar que a representação das propriedades físicas do meio é estabelecida no ponto médio entre dois pontos; de forma que, entre dois pontos horizontais é $\Gamma_{i,j}$ e entre dois pontos verticais $\Gamma_{i,j}$.

Para representar o avanço e atraso no tempo, usaremos o índice sobrescrito n , de forma que $P_{I,J}^{n-1}$, representa um atraso no tempo em relação ao ponto de estudo, $P_{I,J}^n$ representa o tempo no presente do ponto de estudo, sendo $P_{I,J}^{n-1}$ e $P_{I,J}^n$ termos que possuem valores conhecidos, e $P_{I,J}^{n+1}$ representa o tempo no futuro, e o termo a ser calculado.

Inicialmente assume-se condições iniciais nulas onde $P_{I,J}^{n-1} = 0$ e $P_{I,J}^n = 0$, sendo possível calcular o termo $P_{I,J}^{n+1}$. Após isso se assume que os valores no presente assumem os valores no passado, sendo assim, $P_{I,J}^{n-1} = P_{I,J}^n$ e os valores no tempo futuro assumem os valores no presente, portanto, $P_{I,J}^n = P_{I,J}^{n+1}$, isso possibilita o cálculo

de novos valores para $P_{I,J}^{n+1}$, dando continuidade a propagação da onda de pressão no domínio.

De forma análoga, pode-se representar os pontos da grade no domínio usando os índices sobrescritos I e J , onde $P_{I-1,J}^n$ é o ponto anterior ao ponto central no eixo X , $P_{I+1,J}^n$ é o ponto posterior ao ponto central no eixo X , $P_{I,J-1}^n$ é o ponto anterior ao ponto central no eixo Y e $P_{I,J+1}^n$ é o ponto posterior ao ponto central no eixo Y . O ponto central é dado por $P_{I,J}^n$.

4.4.1 Método das Diferenças Finitas Aplicado à Equação da Onda Acústica em um Meio Heterogêneo

A partir dos conceitos matemáticos de Limite e Série de Taylor para o método das Diferenças Finitas descritos no APÊNDICE C, pode-se desenvolver o Método das Diferenças Finitas para a equação da onda acústica em meio heterogêneo.

A forma explícita de diferença finita da equação (2) da onda acústica em duas dimensões, em meio não homogêneo é obtida aplicando a diferença central de segunda ordem no espaço e no tempo, resultando na equação (36) abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{I,J}} \frac{P_{I,J}^{n+1} + P_{I,J}^{n-1} - 2P_{I,J}^n}{\Delta t^2} = & \left(\frac{\Gamma_{I,J}}{\Delta x^2} (P_{I+1,J}^n - P_{I,J}^n) - \frac{\Gamma_{I-1,J}}{\Delta x^2} (P_{I,J}^n - P_{I-1,J}^n) \right) + \left(\frac{\Gamma_{I,J}}{\Delta y^2} (P_{I,J+1}^n - P_{I,J}^n) - \right. \\ & \left. \frac{\Gamma_{I,J-1}}{\Delta y^2} (P_{I,J}^n - P_{I,J-1}^n) \right) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) + \ddot{P}_f(I_f, J_f) \end{aligned} \quad (36)$$

Sendo $O(\Delta x^2)$ e $O(\Delta t^2)$ os truncamentos de segunda ordem para espaço e tempo, respectivamente, $\frac{c^2}{E} = \Gamma$ e colocando em evidencia a incógnita, $P_{I,J}^{n+1}$, da equação (36) se obtém o algoritmo algébrico para calcular a incógnita no tempo “ $n+1$ ” a partir de valores conhecidos no tempo “ n ” e “ $n-1$ ”, dada pela equação (37) abaixo:

$$\begin{aligned} P_{I,J}^{n+1} = & 2P_{I,J}^n - P_{I,J}^{n-1} + E_{I,J} \left\{ \left(\frac{\Delta t^2 \Gamma_{I,J}}{\Delta x^2} (P_{I+1,J}^n - P_{I,J}^n) - \frac{\Delta t^2 \Gamma_{I-1,J}}{\Delta x^2} (P_{I,J}^n - P_{I-1,J}^n) \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\Delta t^2 \Gamma_{I,J}}{\Delta y^2} (P_{I,J+1}^n - P_{I,J}^n) - \frac{\Delta t^2 \Gamma_{I,J-1}}{\Delta y^2} (P_{I,J}^n - P_{I,J-1}^n) \right) + \ddot{P}_f(I_f, J_f) \Delta t^2 \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

4.4.2 Método das Diferenças Finitas Aplicado à Condição de Contorno ABC ORDEM 2

As equações de contorno foram discretizadas pelo método das diferenças finitas com a finalidade de serem aplicadas no código numérico.

Em $i = nx$ e $1 < j < ny$, tem-se que a condição de contorno ABC ORDEM 1, dados o domínio descrito na figura (3), é dada pela forma discretizada da equação (34):

$$P_{nx,j}^{n+1} = P_{nx,j}^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (P_{nx,j}^n - P_{nx-1,j}^n) \quad (38)$$

Para $i = 1$ e $1 < j < ny$:

$$P_{1,j}^{n+1} = P_{1,j}^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (P_{2,j}^n - P_{1,j}^n) \quad (39)$$

Para o eixo Y basta trocar os índices do sistema de coordenadas.

Em $i = nx$ e $1 < j < ny$, a condição de contorno ABC ORDEM 2 dada pela forma discretizada da equação (35) é representada por:

$$P_{nx,j}^{n+1} = 2P_{nx,j}^n - P_{nx,j}^{n-1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (P_{nx,j}^n - P_{nx,j}^{n-1} - P_{nx-1,j}^n - P_{nx-1,j}^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta y^2 c^2} (P_{nx,j+1}^n - 2P_{nx,j}^n + P_{nx,j-1}^n) \quad (40)$$

Para $i = 1$ e $1 < j < ny$:

$$P_{1,j}^{n+1} = 2P_{1,j}^n - P_{1,j}^{n-1} - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (P_{2,j}^n - P_{2,j}^{n-1} - P_{1,j}^n - P_{1,j}^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta y^2 c^2} (P_{1,j+1}^n - 2P_{1,j}^n + P_{1,j-1}^n) \quad (41)$$

Para o eixo Y basta trocar os índices do sistema de coordenadas.

As equações discretizadas acima representam a condição de contorno ABC em duas dimensões, e serão utilizadas para simular a propagação da onda acústica gerada por uma fonte de pressão em um meio heterogêneo.

4.4.3 Critério de Estabilidade

Ao resolver as derivadas envolvidas nas equações diferenciais pelo método das Diferenças Finitas, são realizadas aproximações que geram erro no resultado numérico. No caso da equação da onda esse erro é expresso por meio da dispersão numérica que gera oscilações intermitentes na forma temporal do pulso sísmico e presença de ruído em determinado ponto antes da chegada do sinal (DOS SANTOS e FIGUEIRÓ, 2014).

O critério de estabilidade para realizar a simulação é dado quando a discretização no tempo é explícita, podendo ser representado pela relação dada na equação (42), que estabelece o tamanho do intervalo de tempo de acordo com as informações da grade.

$$\Delta t = C_r \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta s c_{max}} \quad (42)$$

Onde Δt representa o tamanho do intervalo de tempo, Δx e Δy representam o tamanho do espaçamento da grade em x e em y , respectivamente; $c_{max} = \max(c_1, c_2, \dots, c_n)$, onde c_1, c_2 e c_n representam as velocidades encontradas no campo de velocidade no meio do domínio de estudo, $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ e $C_r \leq 1$.

4.5 CÁLCULO DA VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA NO OCEANO

Mackenzie (1981) desenvolveu uma expressão empírica para expressar a velocidade do som em função das propriedades do oceano, dada pela equação (43) abaixo:

$$c = 1448,96 + 4,591T - 0,05304T^2 + 2,374 \times 10^{-4}T^3 + 1,340(S - 35) + 0,0163z + 1,675 \times 10^{-7}z^2 - 0,01025T(S - 35) - 7,139 \times 10^{-13}Tz^3 \quad (43)$$

onde c é dado em m/s, T é a temperatura do oceano em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$), S representa a salinidade dada em unidade de salinidade prática (PSU) e z é a profundidade em metros (m). Essa equação é válida para profundidades de até 8000m, temperaturas entre -2°C e 30°C e para salinidades entre 25 e 40‰ (MACKENZIE, 1981).

Com a equação (43) pode-se observar que a velocidade do som aumenta com o aumento de qualquer um dos parâmetros, porém a temperatura se mostra como fator dominante (COSTA e MEDEIROS, 2015).

4.6 CÁLCULO DA MASSA ESPECÍFICA A PARTIR DA EQUAÇÃO DE ESTADO DA ÁGUA DO MAR

A massa específica da água do mar depende da temperatura T , da salinidade S e da pressão p . Essa dependência é conhecida como a Equação de Estado da água do mar.

A equação de estado da água do mar à pressão atmosférica é utilizada para calcular a massa específica em função da temperatura e salinidade, foi obtida a partir de dados experimentais de altíssima precisão e colocada na forma de um polinômio em séries de potência de S e T , sendo uma dessas séries a equação de estado da água pura.

A partir dos dados de massa específica realizados por Millero, Gonzalez e Ward (1976) e Poisson, Brunet e Brun-Cottan (1980), para uma temperatura de 0 a 40°C e salinidade de 0,5 a 43 PSU, foi possível determinar uma equação de estado para a água do mar em 1 atm.

Para a construção da equação de estado da água do mar foram levadas em consideração as medições de massa específica relativa de $(\rho - \rho_0)$, onde ρ_0 é a massa específica da água, em uma salinidade de 35 PSU, em 19 pontos variando numa temperatura de 0 a 40°C de Millero et al. (1976) e 20 pontos variando entre 1,1 e 30°C de Poisson et al. (1980). Essas massas específicas relativas foram ajustadas a equação (44):

$$(\rho - \rho_0) = 28,265 - 1,2247 \times 10^{-1}T + 2,383 \times 10^{-3}T^2 - 3,0775 \times 10^{-5}T^3 + 2,115 \times 10^{-7}T^4 \quad (44)$$

A equação (44) e a equação de Millero et al. (1976) mostram diferenças de 26 a 38°C que chegam a $7,7 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$. A causa dessas diferenças é um aumento na salinidade das amostras com $S = 40$ de 0 a 30°C (Millero e Poisson, 1981).

A massa específica relativa $(\rho - \rho_0)$ usada para determinar a atual equação de estado da água do mar, é constituída de 122 pontos (0 a 40°C) de Millero et al. (1976) e 345 pontos (0 a 30°C) de Poisson et al. (1980). Para que os dados fossem combinados foi necessário realizar alguns ajustes e normalizações.

As medidas realizadas por Poisson et al. (1980) são relativas à água do mar com salinidade de $S = 35$ PSU em uma determinada temperatura calculada a partir da equação (44). As salinidades das amostras de Millero et al. (1976) foram ajustadas usando funções extrapoladas de $(\rho - \rho_0)$ vs S e as equações de Poisson et al. (1980). As salinidades recalculadas passaram a concordar em $\pm 0,004$.

A equação de estado tem como parâmetros de entrada a temperatura, salinidade, e a massa específica da água ($\rho(T\text{ }^{\circ}\text{C}; S; \rho\text{ kg m}^{-3})$) e é dada por:

$$\rho = \rho_0 + AS + BS^{3/2} + CS^2 \quad (45)$$

Sendo A, B e C funções da temperatura ($t^{\circ}\text{C}$, IPTS-68). Os coeficientes, obtidos a partir dos dados de Millero e Poisson (1981) são representados como sendo:

$$A = 8,24493 \times 10^{-1} - 4,0899 \times 10^{-3}T + 7,6438 \times 10^{-5}T^2 - 8,2467 \times 10^{-7}T^3 + 5,3875 \times 10^{-9}T^4 \quad (46)$$

$$B = -5,72466 \times 10^{-3} + 1,0227 \times 10^{-4}T - 1,6546 \times 10^{-6}T^2 \quad (47)$$

$$C = 4,8314 \times 10^{-4} \quad (48)$$

onde ρ_0 é a massa específica da água dada por:

$$\rho_0 \approx 999,842594 + 6,793952 \times 10^{-2}T - 9,095290 \times 10^{-3}T^2 + 1,001685 \times 10^{-4}T^3 - 1,120083 \times 10^{-6}T^4 + 6,536336 \times 10^{-9}T^5 \quad (49)$$

Essa equação tem um erro padrão de $3,6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$. Essa equação foi sugerida para uso pela UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura) e se tornou a equação do estado da água do mar para 1 atm.

O polinômio foi resolvido diretamente para a massa específica em unidades do sistema internacional (SI). As massas específicas obtidas através dos cálculos realizados com a Equação de estado da água do mar são utilizadas para calcular o módulo de compressibilidade, dado por $E = \rho c^2$, inserido na equação discretizada da Onda Acústica para um meio não homogêneo (Equação 2).

4.7 SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL NO OCEANO

Para o estudo de um caso real de propagação da onda acústica na costa do Espírito Santo serão utilizados os dados provenientes do HYCOM-Ncoda, um consórcio multi-institucional patrocinado pelo Programa Nacional de Parceria Oceânica (National Ocean Partnership Program/NOPP), como parte do Experimento de Assimilação de Dados Oceânicos Globais dos Estados Unidos (U. S. Global Ocean Data Assimilation Experiment/GODAE), para desenvolver e avaliar o modelo em coordenadas híbridas HYCOM (Hybrid Coordinate Ocean Model) executado com assimilação de dados.

O HYCOM tem como característica principal o uso de coordenadas verticais híbridas, sendo possível obter resultados mais realísticos nas simulações de fenômenos oceânicos. Para a região de estudo, foram disponibilizados dados diários de salinidade e temperatura para diferentes profundidades com resolução uniforme de aproximadamente 0.08° . Os dados em questão estão disponíveis no domínio <https://hycom.org/>.

No presente trabalho são usados os dados de temperatura e salinidade em diferentes profundidades, obtidos para uma seção transversal na Costa do Espírito Santo, para calcular a velocidade da onda acústica através da equação (43).

No trabalho de Araujo (2020), o módulo de compressibilidade foi desconsiderado na simulação da propagação das ondas acústicas, portanto, o foco desse trabalho é utilizar os dados de temperatura e salinidade para o cálculo da massa específica, que será inserida no cálculo do módulo de compressibilidade, com intuito avaliar sua influência na propagação da onda acústica.

Após calculada a velocidade da onda acústica na região de estudo, os resultados são inseridos na equação bidimensional da onda acústica para um meio não homogêneo (Equação 2), discretizada anteriormente pelo método das diferenças finitas.

A equação bidimensional da onda acústica em um meio não homogêneo no domínio do tempo foi utilizada no código numérico desenvolvido em linguagem FORTRAN e MATLAB para a elaboração de perfis de temperatura, salinidade e velocidade em uma seção transversal na Costa do Espírito Santo, para que a análise do comportamento da onda acústica possa ser realizada.

5. RESULTADOS

Nesta sessão é realizada a aplicação do código numérico desenvolvido para verificar a influência do módulo de compressibilidade na propagação da onda acústica no oceano, bem como a apresentação da simulação dos casos reais.

5.1 VALIDAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ABC ORDEM 1 E 2D

Moreira et al. (2014) inseriu a fonte fora do centro do domínio, quebrando assim a simetria para que fosse possível avaliar como as reflexões atuam na propagação da onda acústica após serem aplicadas as condições de contorno.

Os parâmetros da Tabela 1 foram utilizados para testar as condições de contorno de radiação 1D e 2D para a propagação de uma onda de pressão gerada por uma fonte senoidal, localizada fora do centro do domínio.

Tabela 1 - Parâmetros utilizados para simulação das ondas-P com ABC ORDEM 1 e ABC ORDEM 2

Parâmetros	Valores
f_p	30 Hz
L_x	500.0 m
L_y	500.0 m
$\Delta x = \Delta y$	1.0 m
N_x	501
N_y	501
x_f	0 m
y_f	0 m
t_{max}	0.8325 s
c_{max}	2000 m/s
c_{min}	2000 m/s

Com os parâmetros descritos na Tabela 1 foi possível simular a propagação da onda de pressão em um meio homogêneo, gerada por uma fonte senoidal conforme mostra Figura 5:

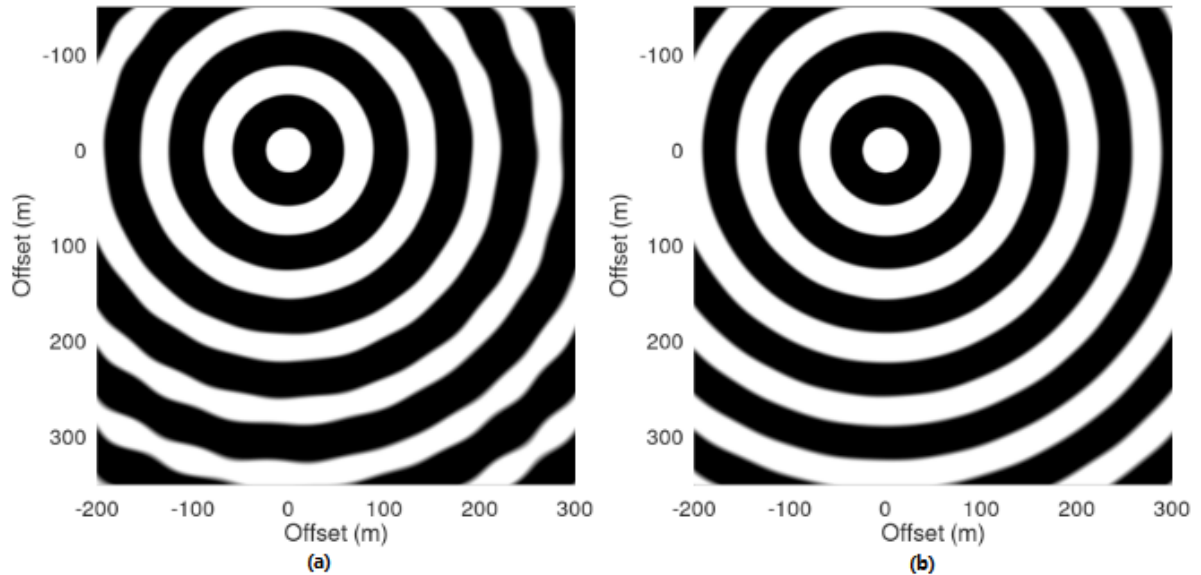


Figura 5 – Solução de 30Hz no domínio do tempo do campo da onda-P em um meio homogêneo para o instante de tempo $t=0,8325s$ com ABC ORDEM 1 (a) e ABC ORDEM 2 (b).

Na Figura 5a pode-se observar o resultado da aplicação da condição de contorno de absorção de onda 1D (ABC ORDEM 1) e na Figura 5b o resultado da aplicação da condição de contorno de absorção para uma onda 2D (ABC ORDEM 2).

Os resultados esperados para este teste são círculos de pressão concêntrica com centro em (0,0). Assim, um ganho substancial pode ser visto rapidamente ao usar a condição de contorno ABC ORDEM 2 em relação a condição de contorno ABC ORDEM 1. A forma circular das isolinhas de pressão é muito evidente na Figura 5b, enquanto a Figura 5a apresenta ondulações que podem ser vistas sobre o círculo principal, próximo aos limites de domínio, indicando um efeito maior da reflexão do campo de ondas na fronteira.

É importante ressaltar que a reflexão pode existir na Figura 5b, porém, dada a magnitude da onda senoidal neste teste, não é possível observá-la.

Desta forma, nas simulações que serão apresentadas a seguir, a condição de contorno ABC ORDEM 2 foi utilizada, visto sua maior efetividade.

5.2 SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM UMA SEÇÃO TRANSVERSAL DA COSTA DO ESPÍRITO SANTO

A caracterização da área de estudo tem como objetivo mostrar os fatores físicos que interferem na propagação acústica considerados neste estudo. A velocidade do som assim como o módulo de compressibilidade, são propriedades obtidas diretamente das variáveis temperatura e salinidade, sendo assim, as variações dessas propriedades interferirão diretamente na transmissão da energia acústica pelos oceanos, sendo esses dados uma das informações iniciais importantes para o conhecimento da propagação acústica.

A estratificação da temperatura e salinidade exerce uma influência substancial sobre a variabilidade da velocidade do som no ambiente marinho. Para cada incremento de 1°C na temperatura, a velocidade do som registra uma flutuação que oscila entre 2,1 e 4,1 metros por segundo, com sua magnitude dependente do valor absoluto da temperatura em questão. Em contrapartida, a salinidade possui uma influência menos pronunciada, afetando a velocidade do som em aproximadamente 1,2 metros por segundo para cada variação de 1 Unidade Prática de Salinidade (PSU). Nesse sentido, a variação da salinidade torna-se mais notória em situações em que a variação da temperatura é menos acentuada, o que geralmente ocorre em regiões de maiores profundidades oceânicas (BREKHO VSKIKH e LYSANOV, 2003).

A água do mar é resultado da combinação da água pura com sais dissolvidos na matriz aquosa, sendo que a proporção de massa desses sais dissolvidos define a sua salinidade, uma medida expressa em Unidades Práticas de Salinidade (PSU). Em vastas bacias oceânicas, a salinidade média encontra-se em torno de 35 PSU. Contudo, é importante destacar que, em âmbito local, a salinidade pode apresentar variações significativas, que são fortemente influenciadas pelas condições hidrológicas específicas de cada região (LURTON, 2010).

5.2.1 Temperatura, Salinidade, Massa específica e Velocidade do Som na Costa do Espírito Santo

Foi considerada a região delimitada pelas latitudes entre 18°S e 22°S e longitudes entre 30°W e 39°W para a avaliação da temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som na costa do Espírito Santo. Os dados analisados dentro dessa seção foram obtidos a partir do HYCOM, provenientes de pontos coletados espaçados 0,08° tanto latitudinalmente quanto longitudinalmente e foram obtidos na data de 31 de dezembro de 2012, que possui os dados mais recentes provenientes do HYCOM.

As variáveis de temperatura, salinidade e massa específica foram analisadas em diferentes profundidades, sendo elas: 0 metros de profundidade (superfície), 100 metros de profundidade, 1000 metros de profundidade e 2000 metros de profundidade.

As Figuras 6, 7 e 8 mostram a variação média da temperatura, salinidade e massa específica, respectivamente, na costa do Espírito Santo, ao longo das profundidades escolhidas.

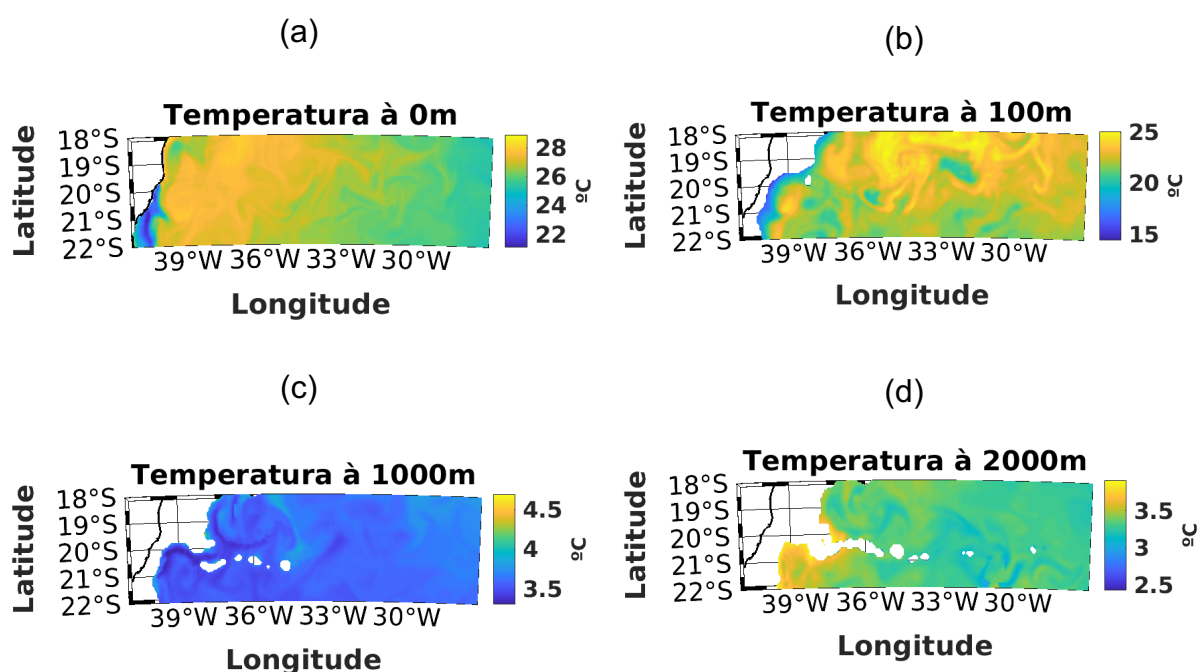


Figura 6 - Variação média da temperatura em °C na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.

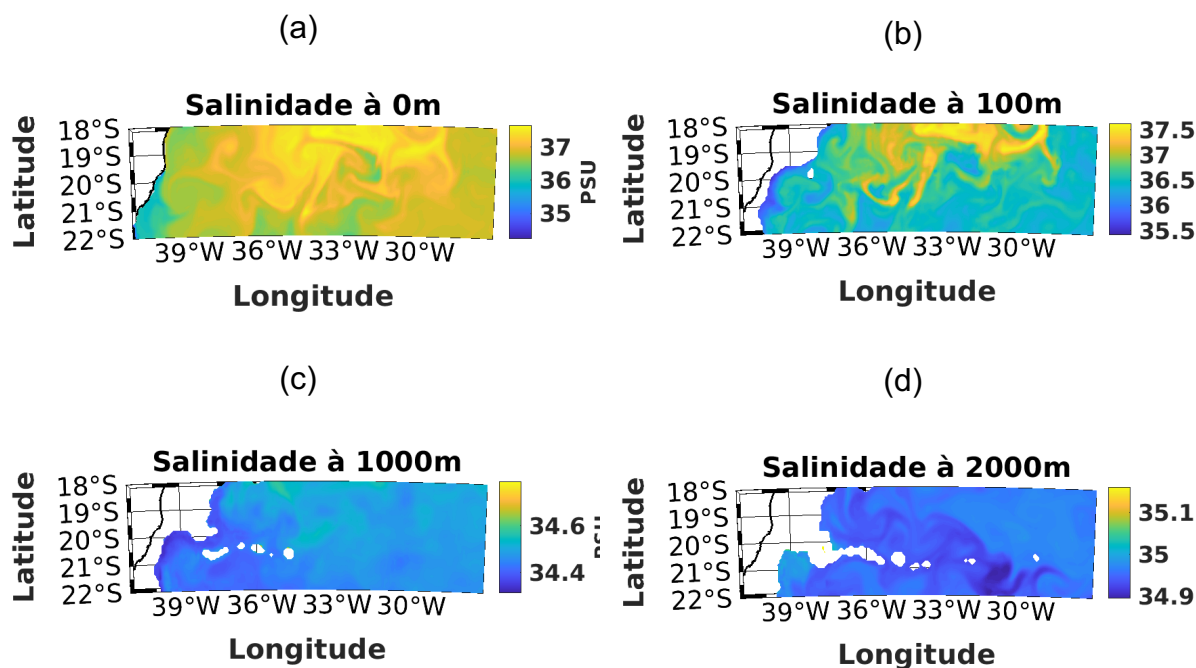


Figura 7 - Variação média da salinidade em PSU na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.

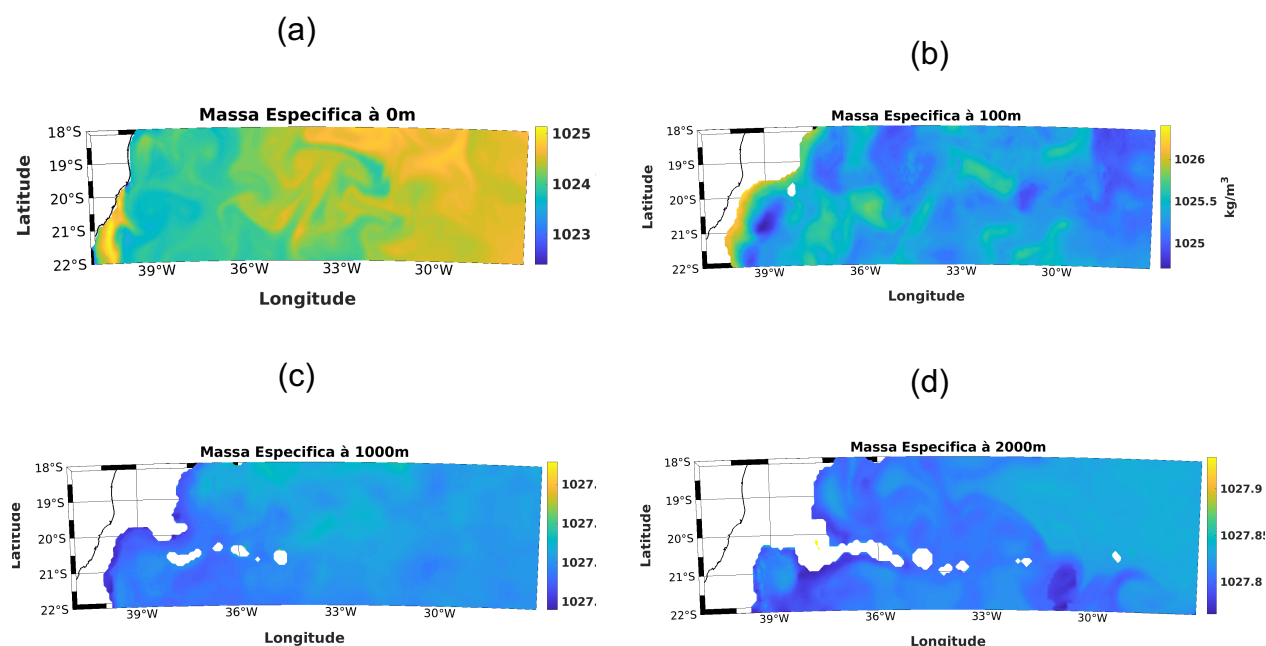


Figura 8 - Variação média da massa específica em kg/m^3 na costa do Espírito Santo a (a) 0 metros, (b) 100 metros, (c) 1000 metros (e) 2000 metros.

Analisando a Figura 6 e considerando o fato de que os dados foram obtidos no período de verão, pode-se observar altas temperaturas no litoral do Espírito Santo, que na

superfície variam de aproximadamente 22°C próximo a região sul até aproximadamente 28°C na região Norte do estado. Essa temperatura decresce a medida que a profundidade aumenta chegando a uma mínima de 2,5 °C na profundidade de 2000m.

A Figura 7 mostra que a salinidade possui baixa variabilidade tanto nas profundidades quanto ao longo da costa do Espírito Santo, mas tem uma queda a medida que a profundidade aumenta.

Já a figura 8 mostra a variação da massa específica na costa do Espírito Santo, importante variável para o cálculo do módulo de compressibilidade. Pode-se observar que o valor de massa específica aumenta com o aumento da profundidade, porém a massa específica não possui grande variação, tendo seu máximo valor sendo de 1027 kg/m³ e seu menor valor sendo 1022 kg/m³. Dentro de uma seção grande como o litoral do Espírito Santo, esse valor possui pequeno impacto nas simulações que se darão no decorrer deste trabalho.

A partir dos dados provenientes do HYCOM, também foi possível traçar os perfis de temperatura (Figura 10), salinidade (Figura 11) para a costa do Brasil, e a partir desses dados foi possível obter através da Equação (43) o perfil de velocidade do som em um ponto na costa do Espírito Santo. Com os dados de temperatura e salinidade, também foi possível obter através da Equação (45) o perfil de massa específica e o perfil de módulo de compressibilidade.

As Figuras 10, 11, 12, 13 e 14 mostram os perfis de temperatura, salinidade, massa específica, velocidade, e módulo de compressibilidade, respectivamente, para um ponto localizado na latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W, que está localizado a aproximadamente 500 km da costa, na altura de linhares, conforme mostra a Figura 9. Este ponto foi escolhido devido a sua localização fora da plataforma continental, fazendo com que haja mais dados disponíveis advindos do HYCOM. Outro critério empregado na determinação da localização consistiu em evitar uma região que incorporasse a presença da cordilheira insular costeira do Espírito Santo, especificamente em proximidade a Vitória, devido ao potencial impacto restritivo que essa formação representaria sobre a difusão da onda acústica em estratos submarinos de maior profundidade.

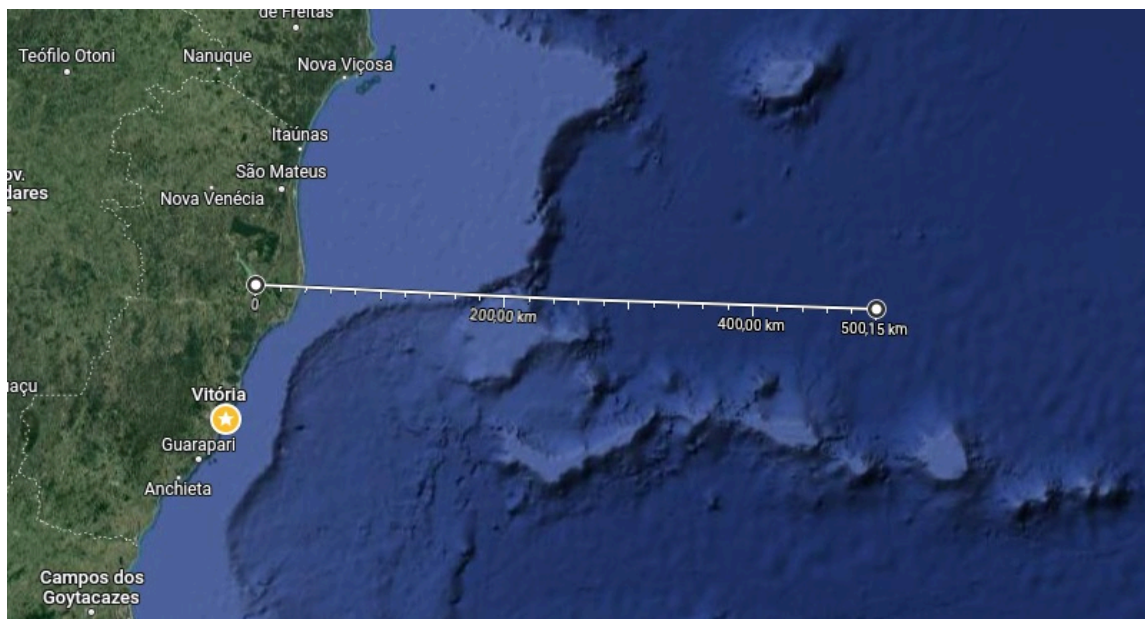


Figura 9 – Ponto escolhido para simulação dos perfis de temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W (Fonte: Google Maps, 2023).

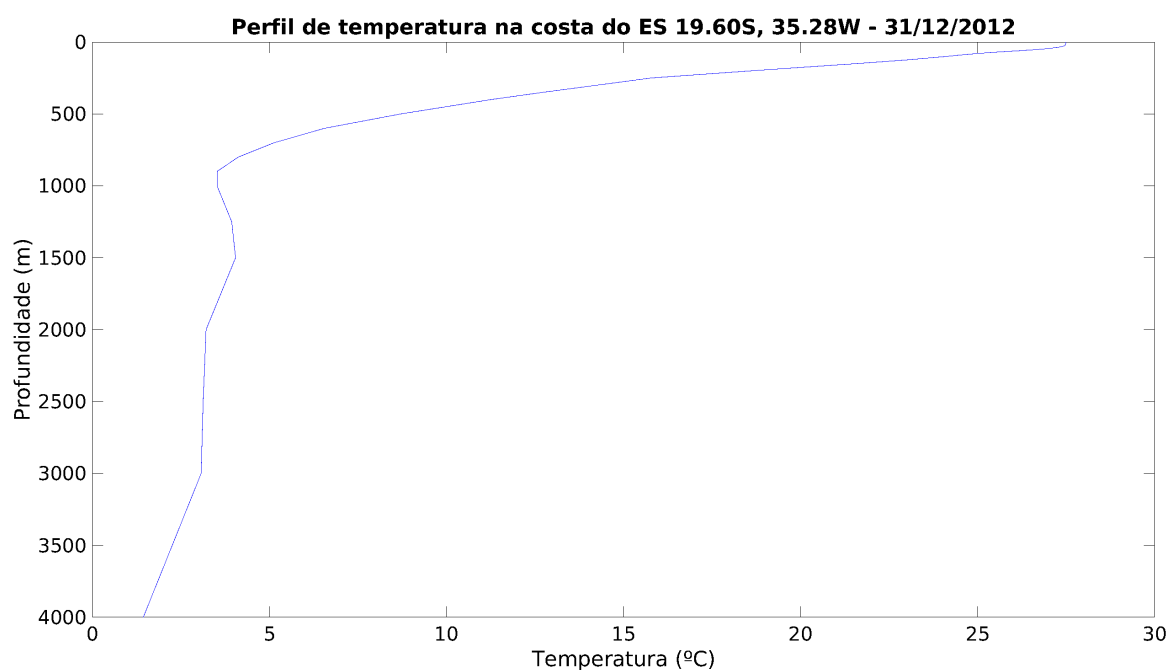


Figura 10 – Perfil de temperatura na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.

Na Figura 10 pode-se observar que a temperatura possui maiores valores próximo a superfície (aproximadamente 27°C), decaindo rapidamente até próximo aos 1000 m

de profundidade onde atinge um valor de aproximadamente 5°C. A partir deste ponto a temperatura possui um decaimento suave até o fundo do oceano.

A temperatura no ambiente oceânico é predominantemente afetada por duas fontes de calor primárias: a radiação solar incidente e os padrões de correntes oceânicas. A influência solar se reflete no perfil térmico da água, onde a temperatura geralmente diminui à medida que a profundidade aumenta, atingindo um ponto mínimo em torno de 4°C na camada de maior massa específica da água. É importante destacar que abaixo desse valor crítico de temperatura, a água exibe uma tendência a subir na coluna de água, acompanhada de um aumento na temperatura (TANAKA et al., 2001).

Além da influência dos raios solares, as correntes vindas do equador ou dos polos trazem consigo águas mais quentes ou mais frias, respectivamente. No caso do Brasil a Corrente Sul Equatorial que atravessa o Atlântico Sul se bifurca no litoral nordestino dando origem a Corrente Norte Brasileira e a Corrente Brasileira, ambas correntes quentes que aquecem o litoral brasileiro (STRAMMA et al., 1990).

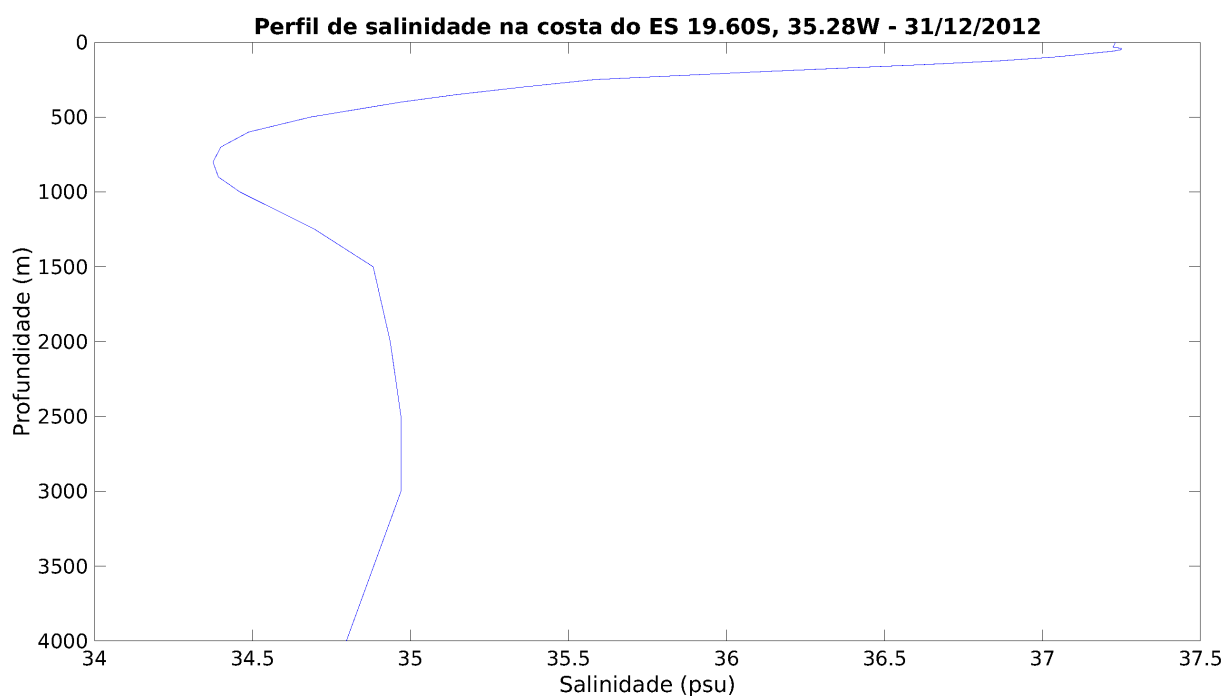


Figura 11 – Perfil de salinidade na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.

Na Figura 11 pode-se observar que a salinidade não possui grandes variações de valores com a variação da profundidade. Na superfície a salinidade possui um valor

de aproximadamente 37,2 PSU, decaindo rapidamente até os 1000m de profundidade, chegando a cerca de 34,5 PSU. A partir desse ponto a salinidade volta a aumentar suavemente até chegar a aproximadamente 35 PSU onde permanece basicamente constante até a última profundidade analisada de 4000 m.

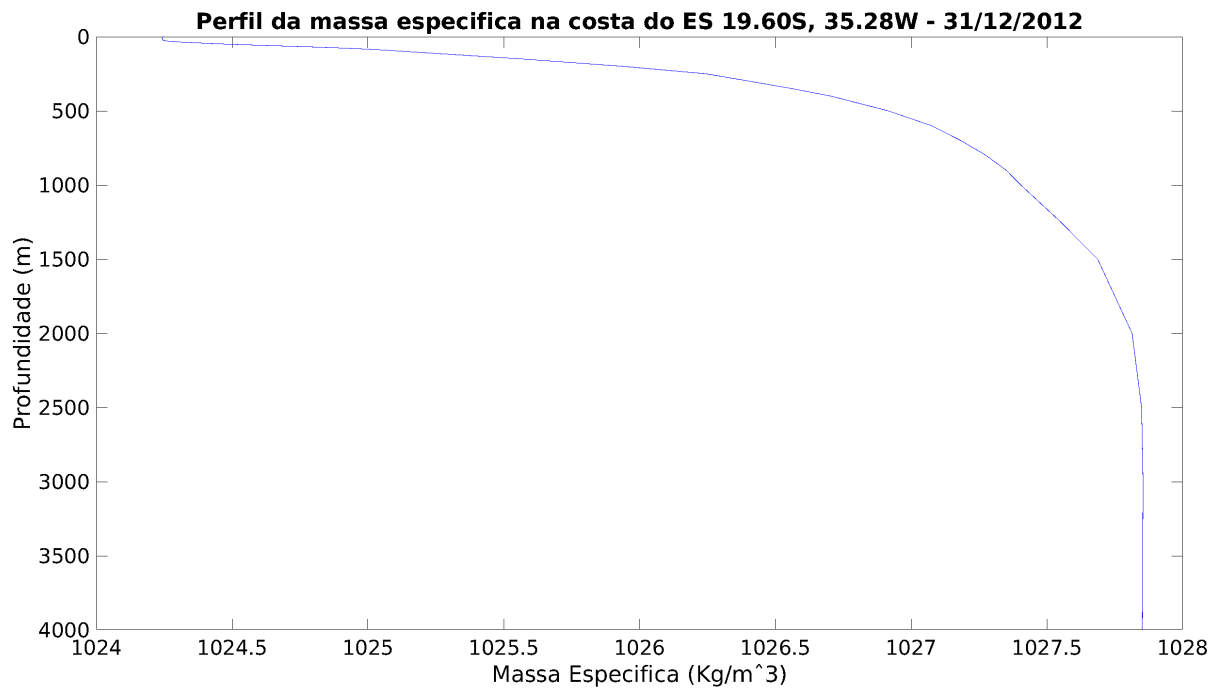


Figura 12 – Perfil de massa específica na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.

A Figura 12 mostra o perfil de massa específica, calculado a partir da Equação (45). A massa específica varia de acordo com a temperatura e salinidade. E é possível observar na figura acima, que no ponto escolhido na costa do ES, a massa específica aumenta conforme a profundidade, sendo próxima a 1024,5 kg/m³ na superfície, e aumentando rapidamente até a profundidade de aproximadamente 1000 m, onde atinge o valor de 1027,5 kg/m³, e permanece basicamente constante até a última profundidade analisada de 4000 m. Pode-se observar que não há grandes variações de massa específica ao longo da profundidade.

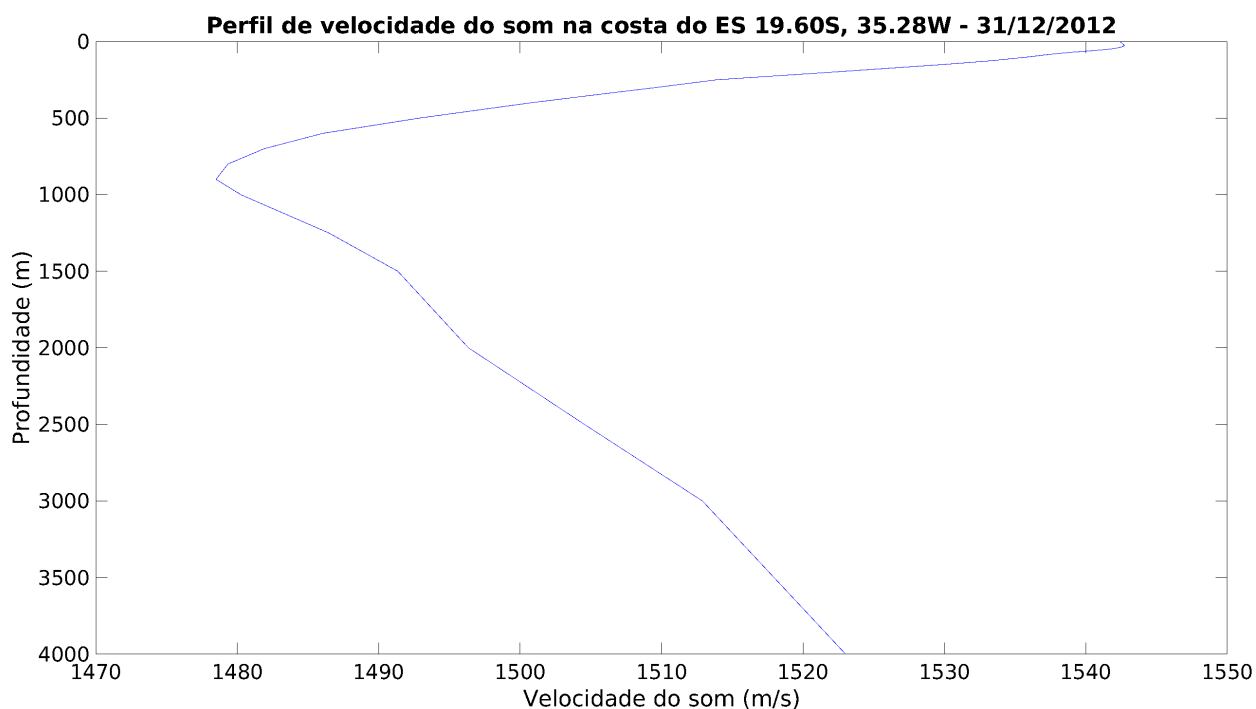


Figura 13 – Perfil da velocidade do som na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.

Na Figura 13 pode-se observar o perfil de velocidade do som na costa do ES. O perfil apresenta os maiores valores de velocidade próximo a superfície, em torno de 1540 m/s, dada a natureza mais quente das águas à superfície. Nesta altura, nem a pressão nem a salinidade têm muito impacto no rumo do perfil, associado à baixa profundidade. A velocidade decai rapidamente à medida que a profundidade aumenta, até ao momento que a temperatura da água estabiliza aproximadamente no valor 2°C, apresentando o menor valor na profundidade de aproximadamente 1000 m, onde atinge o valor de 1480 m/s. Após atingir esse valor de velocidade, a influência da pressão e salinidade começa a ser sentida, resultando num aumento estável da velocidade com a profundidade, chegando a 1520 m/s na última profundidade analisada de 4000 m.

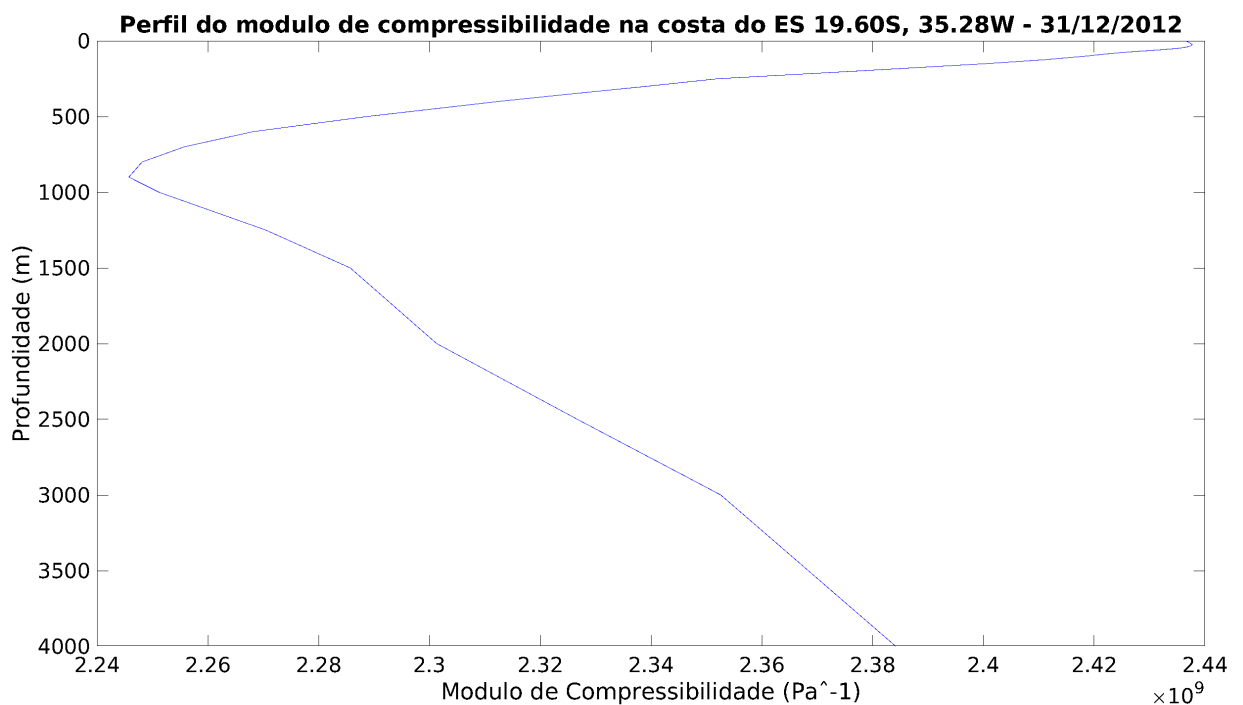


Figura 14 – Perfil de módulo de compressibilidade na costa do ES, latitude de 19.60°S e longitude 35.28° W.

Na Figura 14 pode-se observar o perfil de módulo de compressibilidade na costa do ES, calculado com base na massa específica e velocidade da onda ($E = \rho c^2$). Pode-se observar que por ser diretamente proporcional ao quadrado da velocidade, o perfil de módulo de compressibilidade possui comportamento similar ao perfil de velocidades do som. Também é possível observar que a variação do módulo de compressibilidade é muito baixo ao longo das profundidades. O módulo de compressibilidade decai à medida que a profundidade aumenta, apresentando o menor valor na profundidade de aproximadamente 1000 m, onde atinge o valor de 2,25 Pa⁻¹. Após atingir esse valor de módulo de compressibilidade, ocorre um aumento estável do módulo de compressibilidade com a profundidade, chegando aproximadamente 2,38 Pa⁻¹ na última profundidade analisada de 4000 m.

É importante salientar, ao observar as Figuras 10, 11, 12, 13 e 14 que todos os perfis possuem mudanças ao atingir a profundidade de 1000 m, onde o canal SOFAR (Sound Fixing and Ranging Channel), também conhecido como camada de Meyer-Munk, está localizado.

O canal SOFAR possui uma influência importante nas propriedades acústicas do oceano que também influencia as propriedades de temperatura, salinidade, massa específica da água do mar e consequentemente a velocidade do som no oceano e o módulo de compressibilidade. O canal SOFAR é uma camada horizontal na coluna de água oceânica, onde a velocidade do som é mínima, permitindo que as ondas acústicas viajem longas distâncias com pouca atenuação. O canal SOFAR afeta essas propriedades da seguinte forma:

- Temperatura: A temperatura desempenha um papel crítico na formação do canal SOFAR. O canal é frequentemente encontrado em regiões onde ocorrem gradientes de temperatura na coluna de água. A camada do canal SOFAR geralmente está localizada abaixo da termoclina, onde a temperatura diminui rapidamente com a profundidade. Nessa camada, a temperatura é relativamente constante, o que contribui para a estabilidade da velocidade do som.
- Salinidade: Embora a salinidade não seja diretamente responsável pela formação do canal SOFAR, ela ainda pode desempenhar um papel indireto. A estabilidade da salinidade nas camadas próximas à camada do canal SOFAR ajuda a manter a estabilidade das propriedades acústicas, uma vez que a salinidade afeta a massa específica da água e, consequentemente, a velocidade do som.
- Massa específica: A massa específica da água do mar é influenciada pela temperatura e salinidade. Na camada do canal SOFAR, onde a temperatura e a salinidade são relativamente constantes, a massa específica também é mais estável. A estabilidade da massa específica é fundamental para manter a velocidade do som nessa camada em um valor mínimo, criando assim o canal SOFAR.

Para observar como a temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som variam ao longo da costa do ES, foram construídos perfis na longitude 35.28°W, a aproximadamente 500 km da costa, variando nas latitudes de 18.48°S, 19,04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S, conforme mostra a Figura 15.

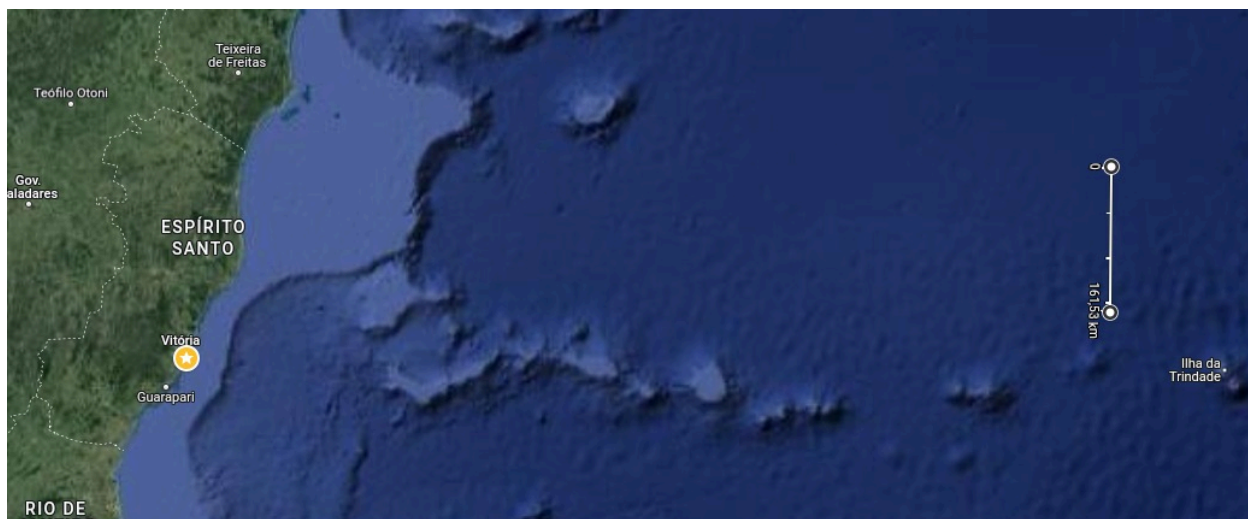


Figura 15 – Ponto escolhido para simulação dos perfis de temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som, longitude de 35.28° W variando em diferentes latitudes (Fonte: Google Maps, 2023).

As Figuras 16, 17, 18, 19 e 20 mostram os perfis de temperatura, salinidade, massa específica, velocidade do som e módulo de compressibilidade, respectivamente, na costa do Espírito Santo.

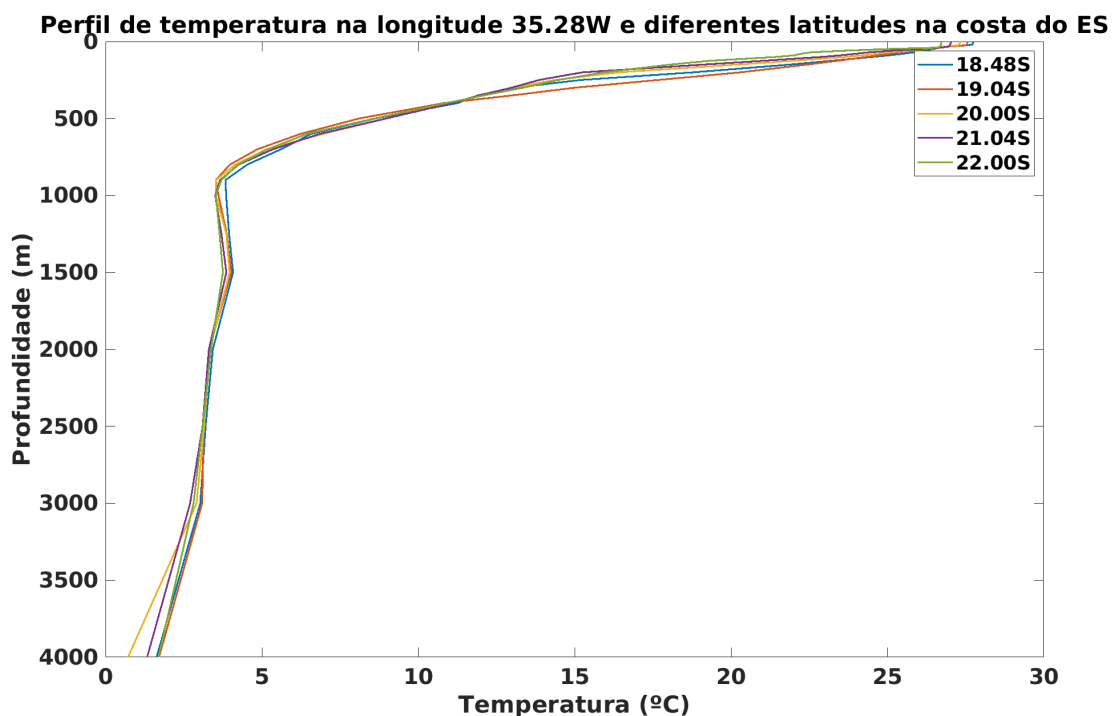


Figura 16 – Perfil de temperaturas ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.

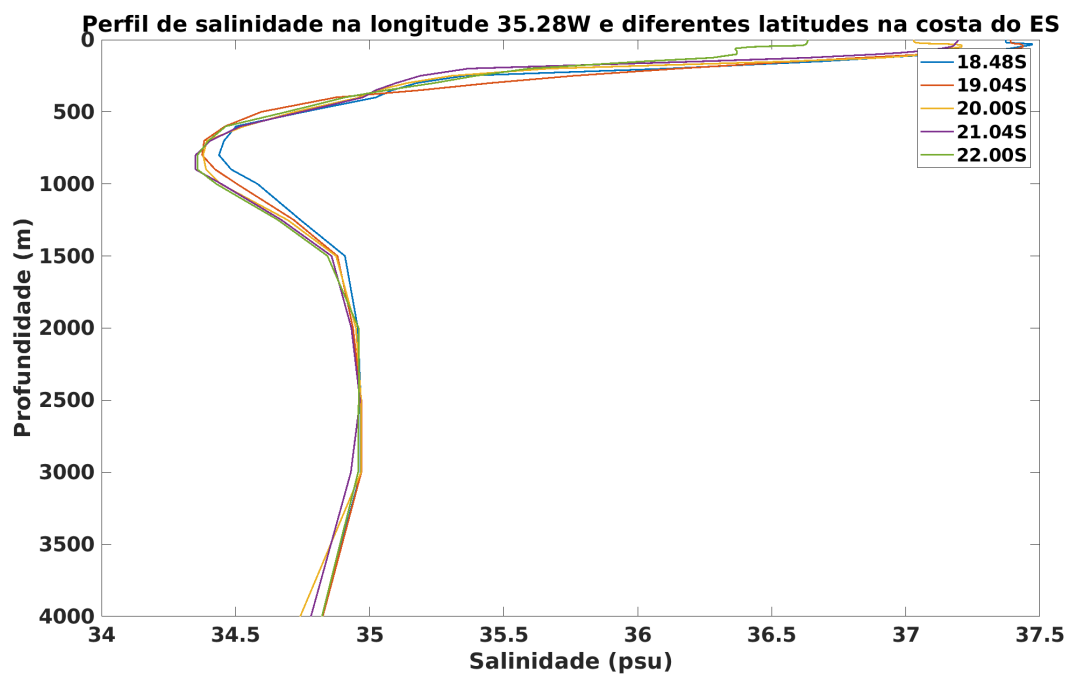


Figura 17 – Perfil de salinidade ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.

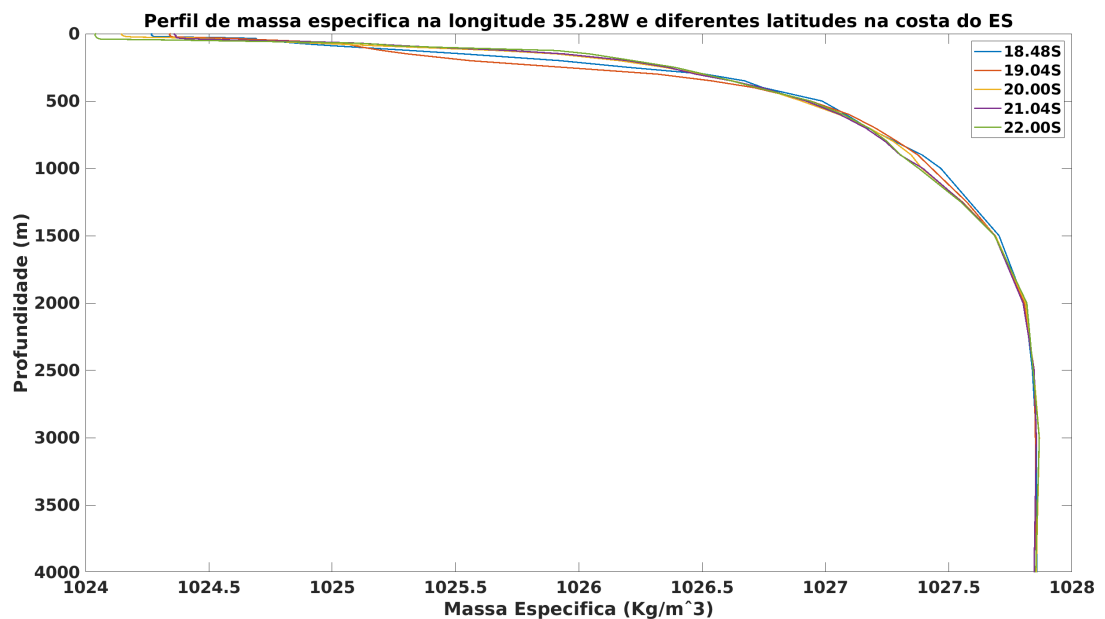


Figura 18 – Perfil de massa específica ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.

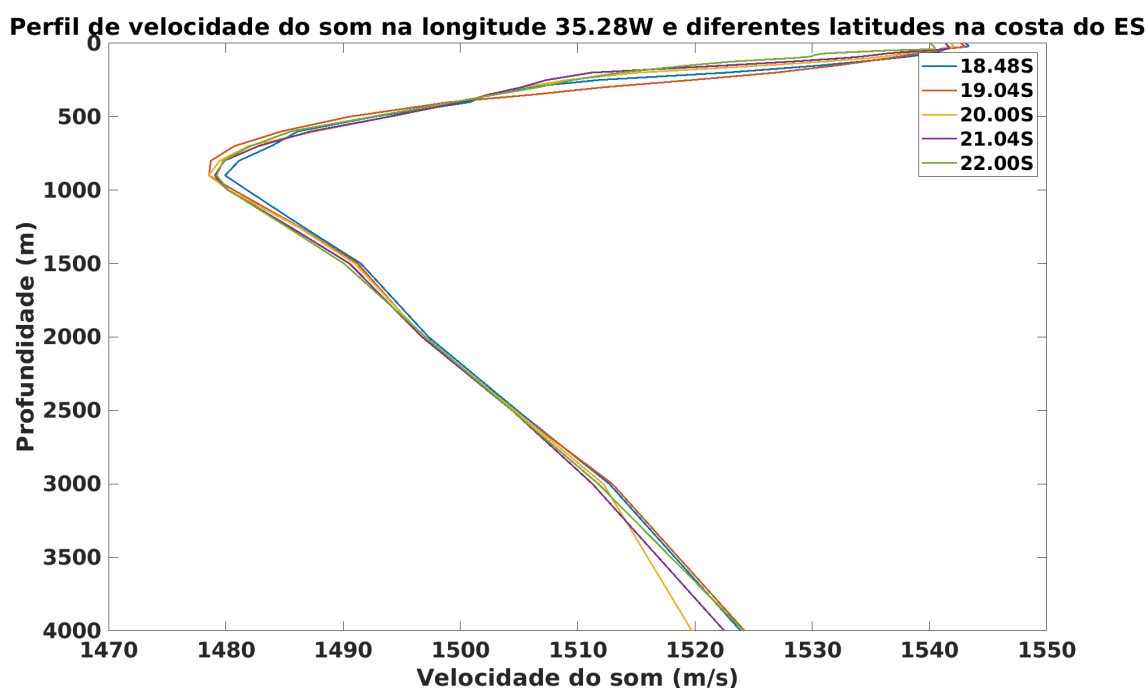


Figura 19 – Perfil de velocidade do som ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.

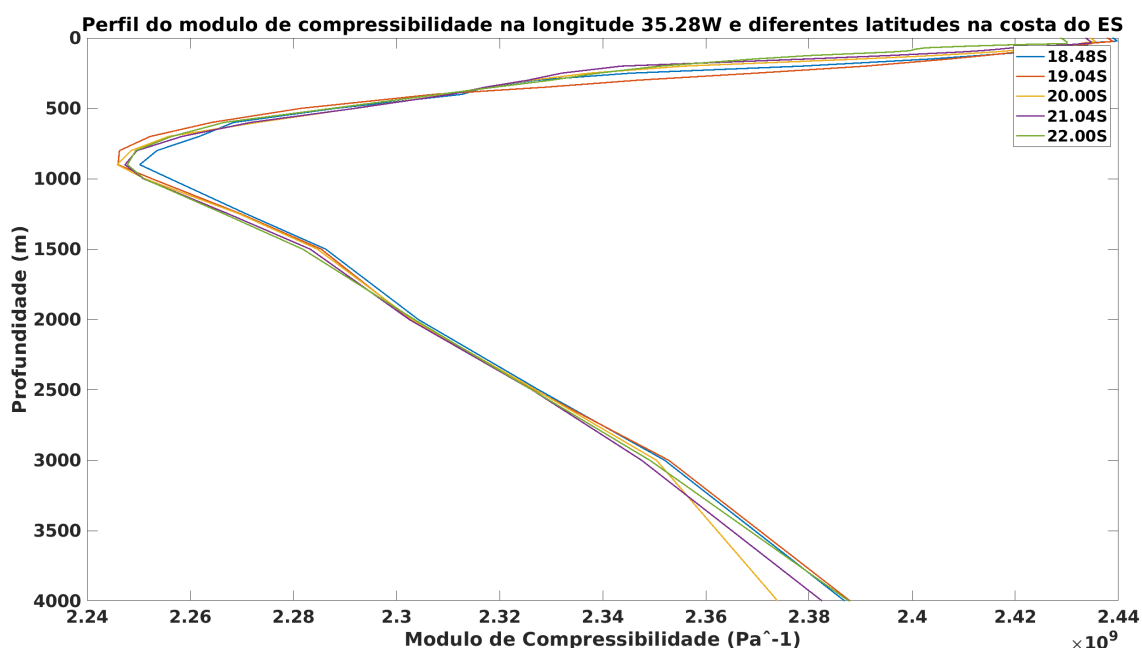


Figura 20 – Perfil de módulo de compressibilidade ao longo da profundidade na Costa do ES em Longitude 35.28°W e Latitudes 18.48°S, 19.04°S, 20°S, 21.04°S e 22°S.

Conforme observado nas Figuras 16, 17, 18, 19 e 20 os perfis de temperatura, salinidade, massa específica e velocidade do som, possuem características iguais aos

perfis analisados anteriormente (Figuras 10, 11, 12, 13 e 14).

A figura 16 mostra que os perfis de temperatura nas longitudes escolhidas se mostram bem parecidos, com pequenas variações. A temperatura se mostra maior na superfície, cerca de 28°C, decaindo rapidamente até os 1000m de profundidade, aonde chega a um valor aproximado de 4°C, permanecendo quase constante até o fundo do oceano que apresenta os menores valores, próximo a 2°C.

Na figura 17 temos os perfis de salinidade. As salinidades ao longo das longitudes se mostram maiores próximos à superfície, chegando a valores próximos de 37,5 PSU. Esses valores decrescem até a profundidade de 1000 m, onde atingem os menores valores, cerca de 34,5 PSU. Esses valores aumentam novamente e permanecem constantes até a última profundidade onde os perfis de salinidade estão sendo analisados.

A figura 18 mostra os perfis de massa específica, calculadas a partir dos dados de temperatura e salinidade provenientes do HYCOM. Os perfis de massa específica revelam um aumento à medida que a profundidade da coluna de água aumenta. Inicialmente, na proximidade da superfície, a massa específica atinge aproximadamente 1024,5 kg/m³. Essa massa específica experimenta uma ascensão acentuada ao atingir uma profundidade em torno de 1000 metros, alcançando um valor de 1027,5 kg/m³, e mantendo-se, então, praticamente inalterada até a última profundidade examinada, que corresponde a 4000 metros.

Na Figura 19, são apresentados os perfis de velocidade do som investigados, os quais exibem uma notável homogeneidade. A análise revela que a maior velocidade do som ocorre na camada superficial, situando-se em torno de 1540 metros por segundo (m/s). À medida que a profundidade aumenta, essa velocidade decresce de maneira acentuada, até alcançar um ponto de inflexão, coincidindo com a estabilização da temperatura da água em cerca de 2°C. Nesse ponto, localizado aproximadamente a 1000 metros de profundidade, observa-se o menor valor de velocidade, estimado em cerca de 1480 m/s. Subsequentemente, após essa marca, verifica-se uma tendência de aumento constante na velocidade do som com o incremento da profundidade.

Na Figura 20, são apresentados os perfis de módulo de compressibilidade analisados, que também possuem grande homogeneidade assim como os perfis de velocidade.

Também é possível observar que a variação do módulo de compressibilidade é muito baixo ao longo das profundidades. O módulo de compressibilidade decai rapidamente à medida que a profundidade aumenta, apresentando os menores valor na profundidade de aproximadamente 1000 m, onde atingem cerca de $2,25 \text{ Pa}^{-1}$. Após atingir esse valor de módulo de compressibilidade, ocorre um aumento estável do módulo de compressibilidade com a profundidade, chegando a aproximadamente $2,38 \text{ Pa}^{-1}$ na última profundidade analisada de 4000 m.

5.2.2 Simulação Da Propagação Da Onda Acústica Com E Sem A Influência Do Módulo De Compressibilidade Em Um Caso Teste

Foi simulado um cenário de propagação acústica para a validação do modelo construído e análise da influência do módulo de compressibilidade na propagação das ondas acústicas no oceano.

O módulo de compressibilidade, representado por $E = \rho c^2$, foi incorporado à equação da onda acústica após a sua discretização utilizando o método das diferenças finitas, conforme expresso na Equação (37). Este módulo de compressibilidade exerce influência direta sobre os parâmetros de massa específica e velocidade do som.

Assim, seguindo a abordagem delineada por Clay e Medwin (1977), os parâmetros listados na Tabela 2 foram empregados para investigar a influência do módulo de compressibilidade na propagação de ondas acústicas.

Tabela 2 - Parâmetros utilizados para simulação da influência do módulo de compressibilidade na propagação acústica

Parâmetros	Valores
f_p	150 Hz
L_x	100.0 m
L_y	100.0 m
$\Delta x = \Delta y$	1.0 m
N_x	101
N_y	101
x_f	50 m
y_f	2 m
t_{max}	0.2 s
c_1	1504 m/s
c_2	1752 m/s
ρ_1	1033 kg/m ³
ρ_2	1320 kg/m ³

Onde f_p é a frequência utilizada, L_x e L_y são as dimensões no eixo x e y, respectivamente, Δx e Δy são os espaçamentos da grade no eixo x e y, respectivamente, N_x e N_y são as quantidades de pontos na grade no eixo x e y, respectivamente, x_f e y_f são as coordenadas do termo fonte em x e y, respectivamente, c_1 é a velocidade da onda acústica na água do mar, c_2 é a velocidade da onda acústica em areia média (ARTUSI e FIGUEIREDO, 2007; MACEDO e DE FIGUEIREDO, 2007), ρ_1 é a massa específica da água do mar e ρ_2 é a massa específica da água da areia fina (HAMILTON e BACHMAN, 1982). A camada representante do oceano possui 70 metros de profundidade, e a camada que representa a areia fina possui 30 metros de profundidade.

Com base nos parâmetros da Tabela 2 o cenário foi simulado como mostram as Figuras 21 e 22:

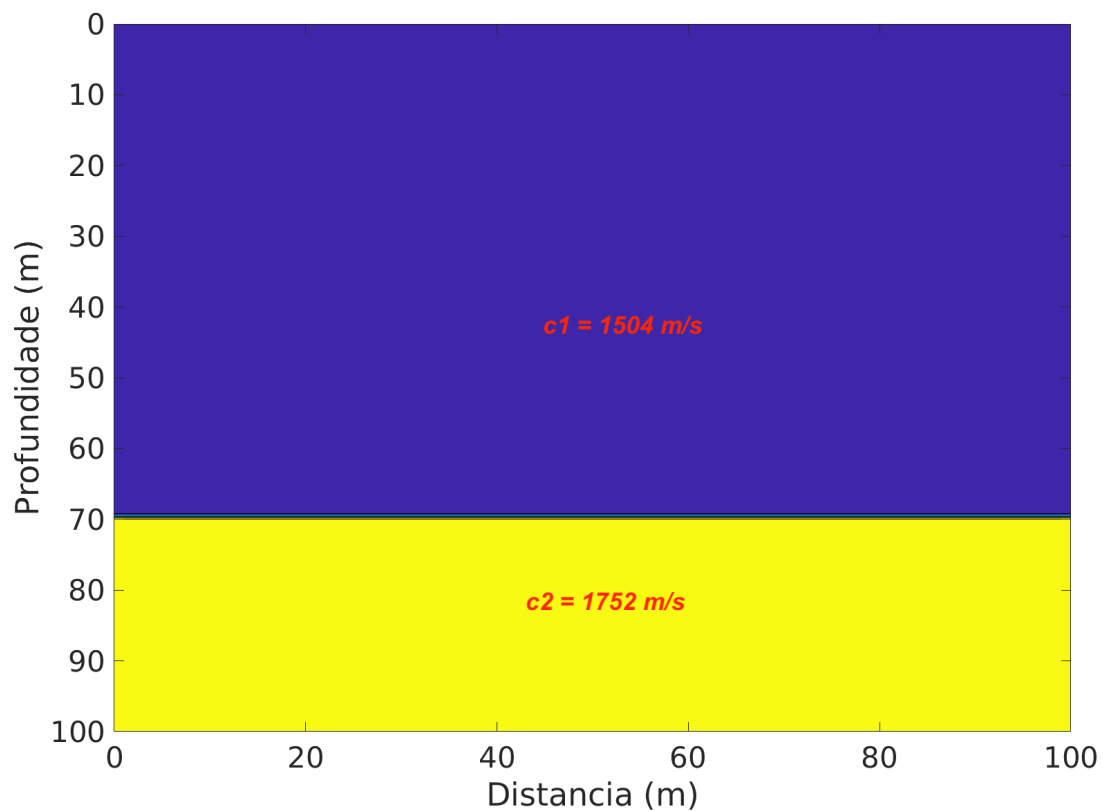


Figura 21 – Campo de velocidade do caso teste

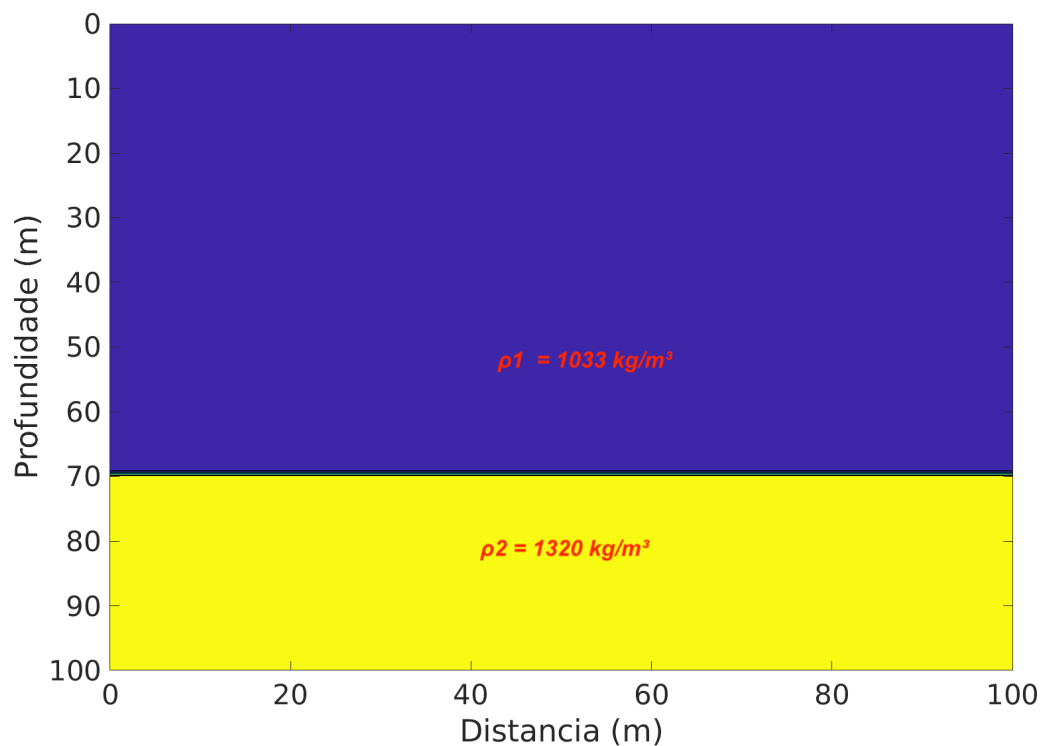


Figura 22 – Campo de massa específica do caso teste

Para a construção do sismograma representado pela Figura 23, o módulo de compressibilidade foi considerado constante ao longo dos meios, dessa forma, a propagação acústica leva apenas em consideração a mudança de velocidade da onda no meio de propagação.

Na construção do sismograma representado pela Figura 24, o módulo de compressibilidade foi calculado a partir das velocidades e massas específicas listadas na Tabela 2.

Desta forma as Figuras 23 e 24 mostram a influência da variação do módulo de compressibilidade nos meios em que ocorre a propagação acústica, através da construção de imagens sísmicas:

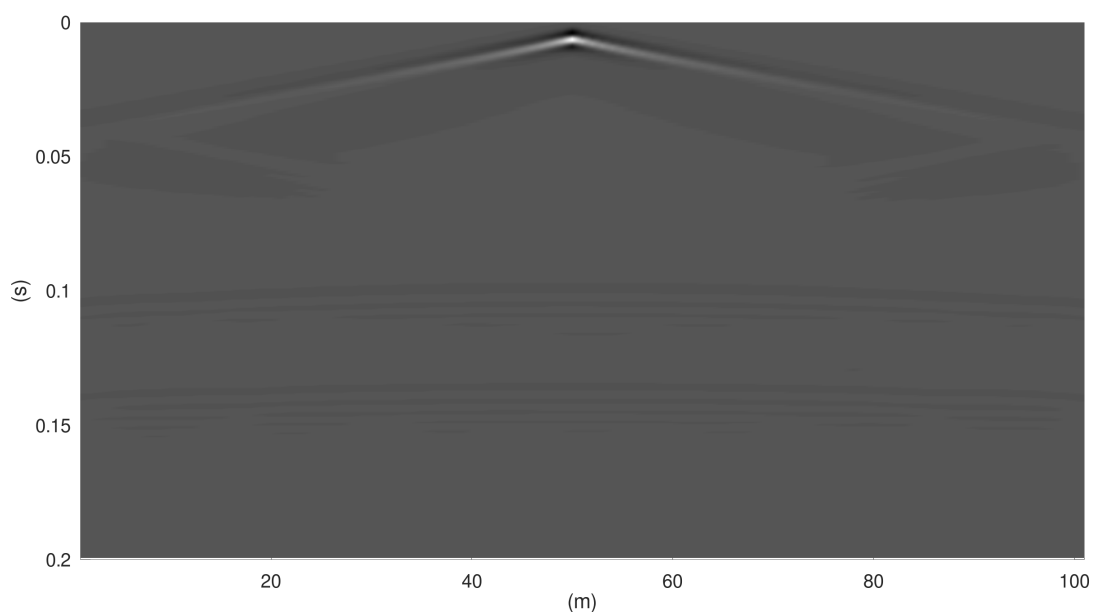


Figura 23 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio

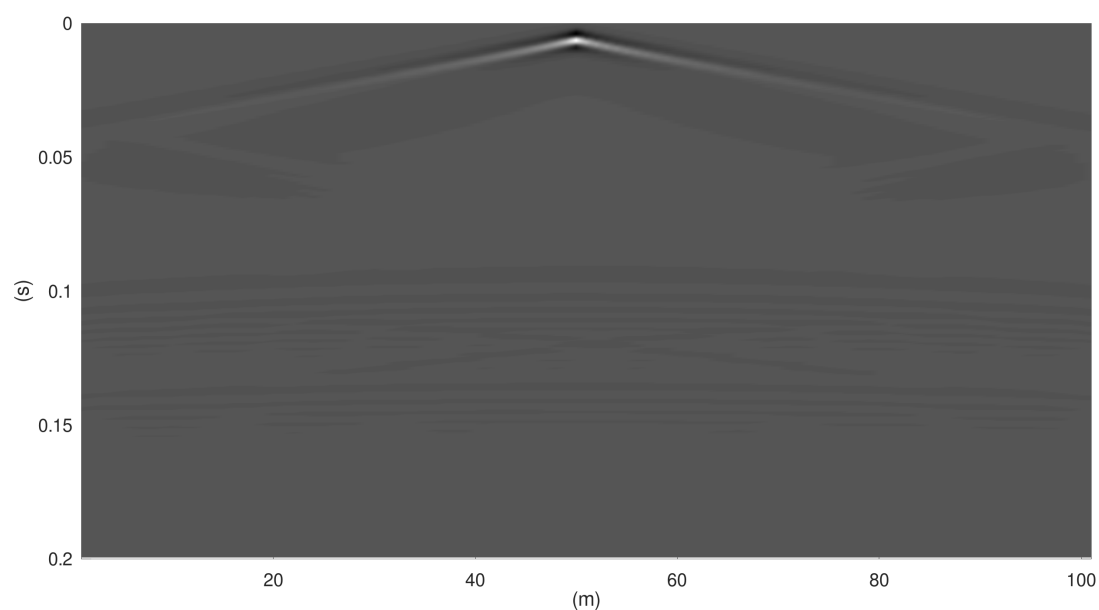


Figura 24 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio

Sismogramas de propagação da onda acústica como os mostrados nas Figuras 23 e 24, representam um registro gráfico ou digital da variação da pressão acústica ao longo do tempo e em relação à profundidade em um meio, geralmente água ou solo, como é o caso da simulação realizada neste trabalho. Eles são usados principalmente para monitorar e estudar eventos sísmicos ou fontes sonoras subaquáticas, como

terremotos submarinos, atividades de exploração sísmica, comportamento de animais marinhos, entre outros.

A Figura 23 é possível observar a interação entre a frente de onda com a mudança na interface do meio. A frente de onda leva 0,046 segundos para se propagar pelo oceano e atingir a camada de areia localizada a 70 m de profundidade. Quando isso ocorre é possível observar as reflexões que se dão principalmente devido à mudança de velocidade que passou de 1504 m/s para 1752 m/s na profundidade de 70 m, visto que neste caso o módulo de compressibilidade foi considerado constante. A presença da camada de areia média conforme mostrado na figura pode resultar em uma menor absorção e capacidade de penetração do som, resultando em maiores reflexões das ondas.

As reflexões em um sismograma indicam mudanças nas propriedades do meio, como massa específica, velocidade do som ou impedância acústica, que causam o retorno de uma porção da energia das ondas acústicas de volta para a fonte. Essas reflexões ocorrem devido às descontinuidades no meio, como uma camada de sedimentos, como ocorre nesta simulação, um objeto submerso ou qualquer outra interface que altere as propriedades acústicas.

Na Figura 24 é possível observar uma maior quantidade de reflexões quando a frente de onda interage com a camada de areia localizada a 70 m. Isso ocorre pois nesta simulação, o módulo de compressibilidade foi calculado considerando as mudanças na massa específica e na velocidade da onda no meio.

O módulo de compressibilidade influencia a ocorrência de reflexões porque está diretamente relacionado à velocidade do som no meio e à sua capacidade de transmitir energia acústica. Quando o módulo de compressibilidade é considerado, as variações nas propriedades do meio, como a massa específica e a velocidade do som, têm um impacto mais significativo nas reflexões acústicas.

Se não considerarmos o módulo de compressibilidade, as variações nas propriedades do meio podem não ser refletidas com a mesma intensidade nas ondas acústicas, resultando em menos reflexões observadas nos sismogramas, como pode ser observado analisando-se as Figuras 23 e 24. No entanto, ao considerar o módulo de compressibilidade, as variações nas propriedades do meio influenciarão mais a

velocidade do som, levando a reflexões mais acentuadas nas interfaces de descontinuidade.

É possível observar nas figuras 23 e 24 que ocorreram reflexões de fundo mesmo tendo implementado uma condição de contorno ABC ORDEM 2. Neste caso, podem ter razões para que a condição de contorno ABC ORDEM 2 não funcione muito bem nesse caso e uma possibilidade é que a condição de contorno ABC não esteja sendo implementada com precisão suficiente. Por exemplo, se a condição de contorno for definida para uma frequência muito alta, isso pode levar a pequenas erros que podem se acumular e causar reflexões de fundo, como parece ser o caso.

Em suma, ao considerar o módulo de compressibilidade, as variações nas propriedades do meio são refletidas de forma mais precisa nas ondas acústicas, levando a uma maior incidência de reflexões nos sismogramas. Isso torna a interpretação das reflexões mais precisa e útil em aplicações como a exploração sísmica, onde as informações sobre a estrutura do subsolo são cruciais.

5.2.3 Simulação Da Propagação Da Onda Acústica Com E Sem A Influência Do Módulo De Compressibilidade Em Uma Seção Transversal da Costa do ES

Os dados utilizados neste estudo foram adquiridos através do modelo HYCOM, que disponibiliza informações em uma grade espacial com uma resolução de aproximadamente 0,08 graus em latitude e longitude. Cada ponto dessa grade contém informações de salinidade e temperatura da água, apresentadas em um vetor composto por 40 valores, correspondendo às 40 profundidades disponibilizadas pelo HYCOM. É relevante ressaltar que os valores de profundidade não seguem um espaçamento uniforme. Nesse contexto, os dados adquiridos podem ser visualizados como matrizes tridimensionais, com dimensões correspondentes a latitude, longitude e profundidade.

É importante destacar que, embora o HYCOM mantenha um espaçamento fixo em graus de latitude e longitude, a equivalência em metros desses espaçamentos pode variar de acordo com a localização geográfica. Na região costeira do Espírito Santo, especificamente, essas distâncias se mantiveram em torno de aproximadamente 9 quilômetros.

O modelo desenvolvido tem como principais parâmetros o perfil de velocidade e a massa específica da área de estudo, que são utilizadas para descrever como a onda se propaga naquela região. Com essa finalidade foram utilizadas as salinidades e temperaturas vindas do HYCOM para calcular a velocidade em um ponto.

As Figuras 25 e 26 mostra os perfis de temperatura e salinidade, respectivamente, obtidos de dados provenientes do HYCOM na costa do Espírito Santo, na longitude de 35.28°W, e seção variando nas latitudes de 18.48°S a 20°S. Essa seção possui dados em até 4000 metros de profundidade e foi utilizada para simulação de um caso real no oceano.

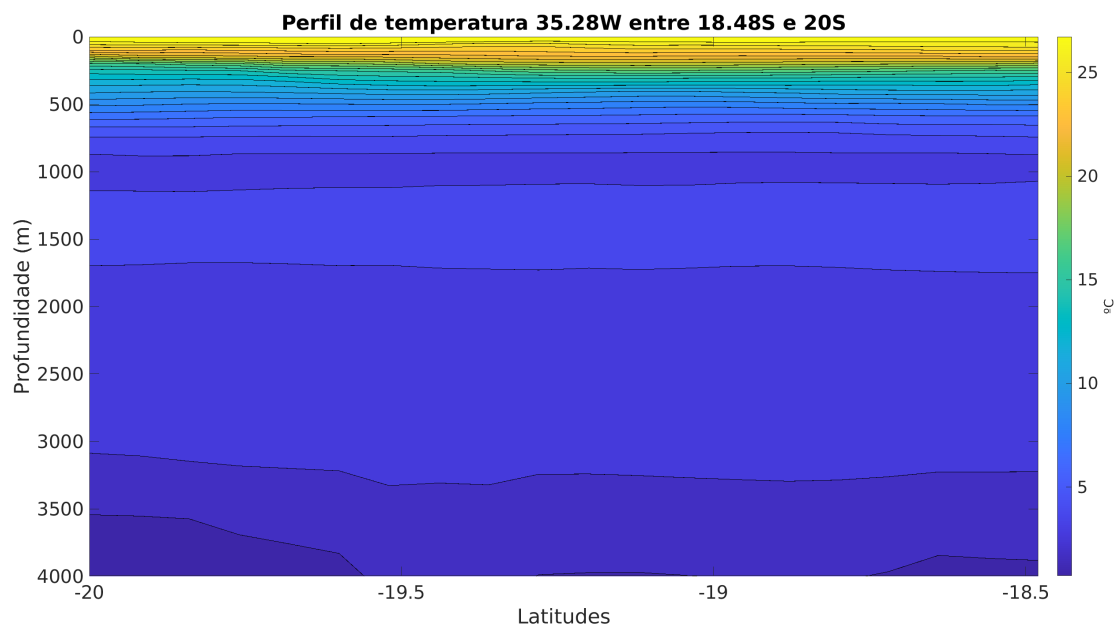


Figura 25 - Perfil de Temperatura na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

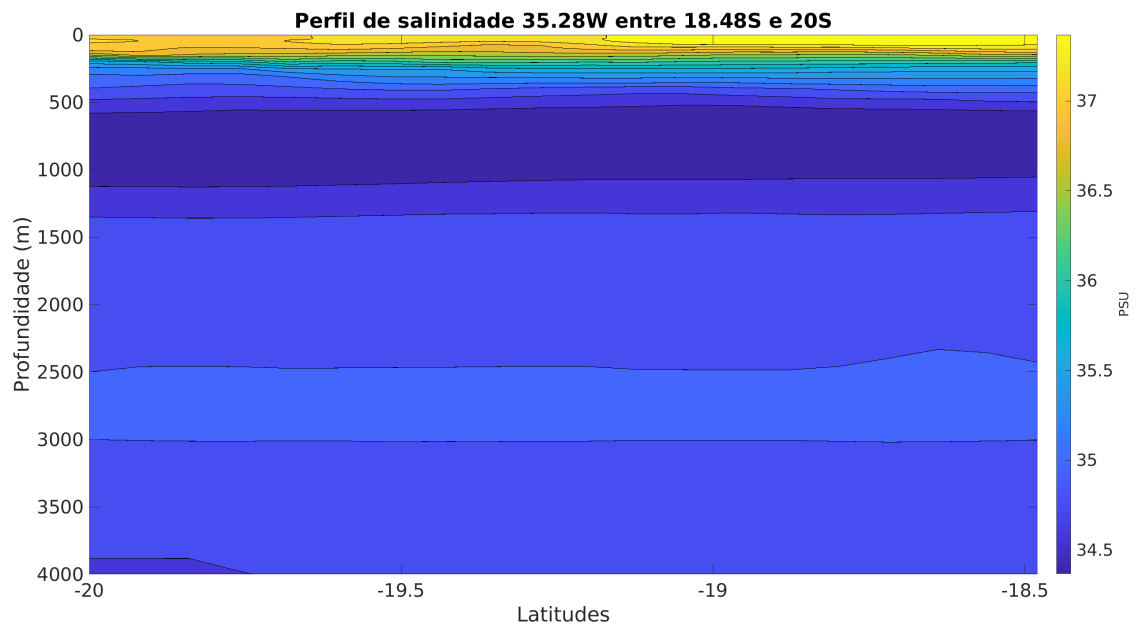


Figura 26 - Perfil de Salinidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

A Figura 25 mostra o perfil de temperatura na costa do Espírito Santo, com isolinhas variando de 1 em 1 °C. É possível observar que as temperaturas nessa seção variam ao longo da profundidade atingindo seus maiores valores na superfície, e possuem uma pequena variação ao longo das latitudes.

Na Figura 26 temos o perfil de salinidade na costa do Espírito Santo, com isolinhas variando de 0,2 em 0,2 PSU. É possível observar a variação de salinidade tanto nas profundidades quanto nas latitudes. As isolinhas foram utilizadas para a simulação desses perfis pois possibilitam uma maior precisão na análise dos resultados.

As temperaturas e salinidades foram utilizadas para o cálculo da massa específica e da velocidade da onda acústica, variáveis que foram inseridas posteriormente no modelo para o cálculo do módulo de compressibilidade, alvo deste estudo.

As Figuras 27, 28 e 29 mostram os perfis de massa específica, velocidade e módulo de compressibilidade, respectivamente, que também variam ao longo das profundidades e nas latitudes.

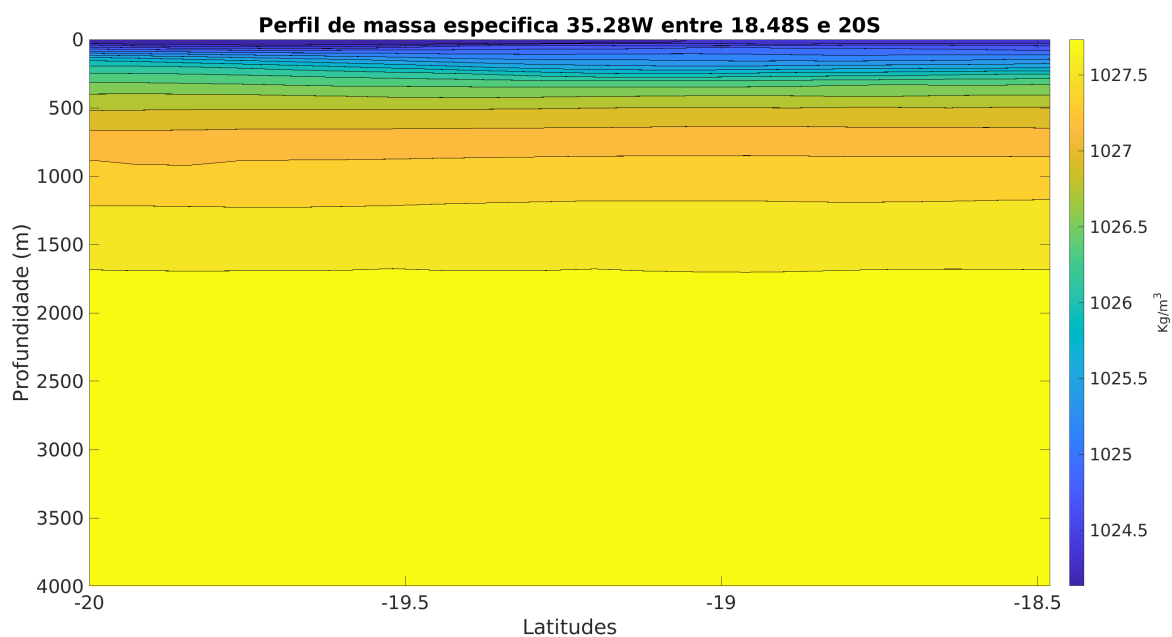


Figura 27 - Perfil de massa específica na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

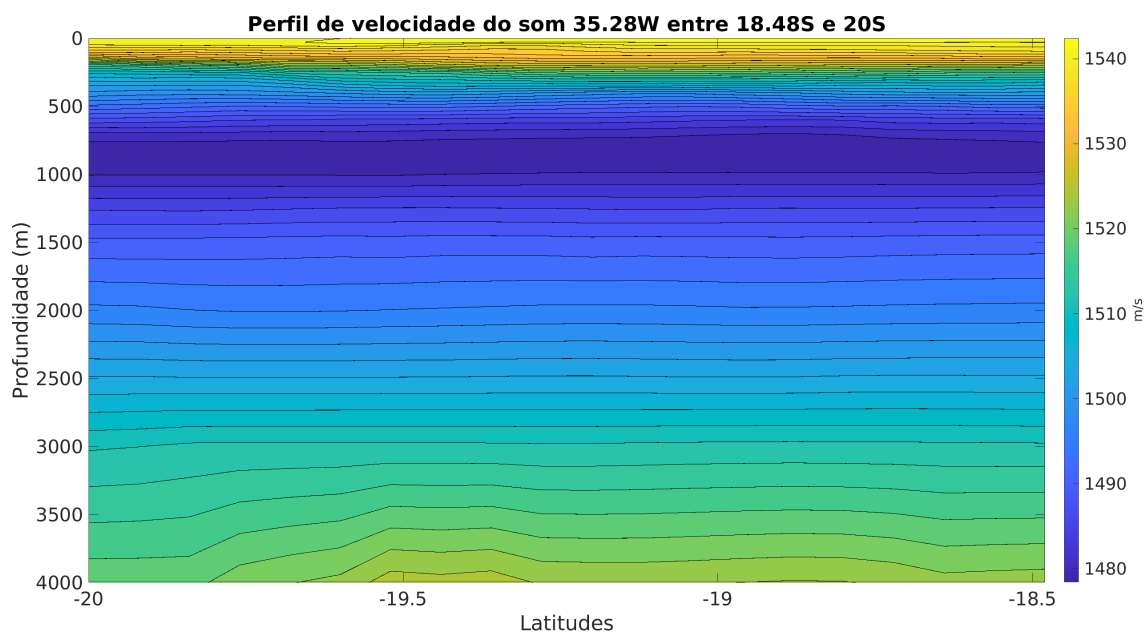


Figura 28 - Perfil de velocidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

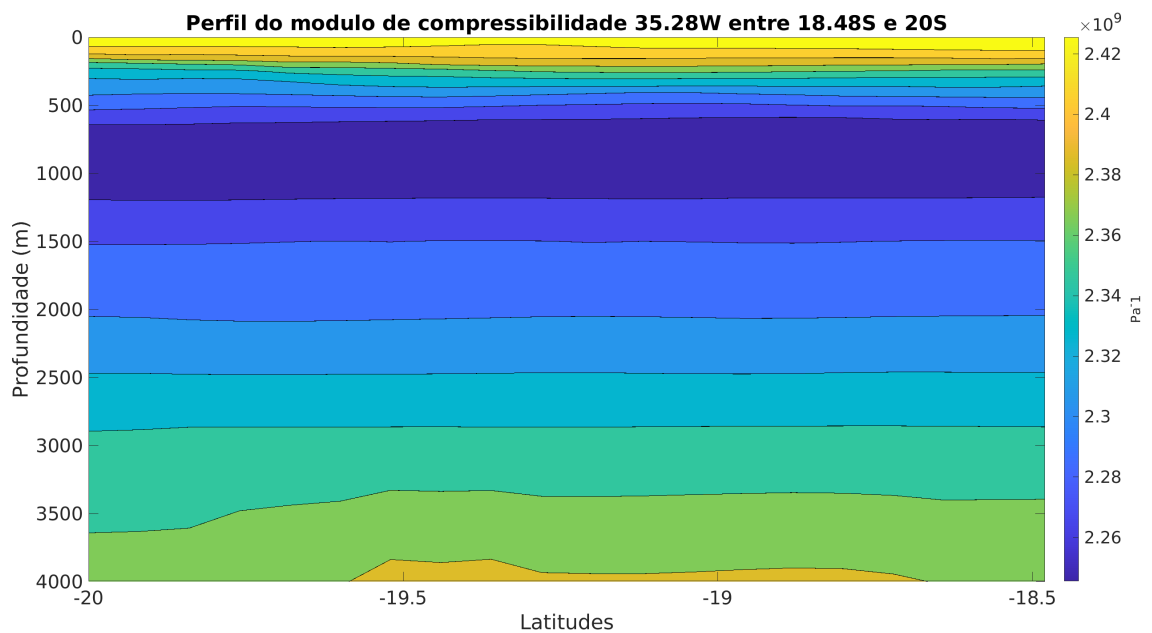


Figura 29 - Perfil de módulo de compressibilidade na costa do Espírito Santo na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

A Figura 27 mostra o perfil de massa específica na costa do Espírito Santo, calculado a partir dos dados de temperatura e salinidade, e representado com isolinhas variando de $0,2 \text{ kg/m}^3$ em $0,2 \text{ kg/m}^3$. O máximo valor de massa específica se dá na profundidade de 4000 metros, atingindo o valor de $1027,5 \text{ kg/m}^3$.

Na Figura 28 temos o perfil de velocidade, com isolinhas variando de 2 m/s em 2 m/s . É possível observar que os maiores gradientes de velocidade ocorrem próximos a superfície e ao atingir a profundidade de 1000 metros (SOFAR) a velocidade diminui.

Na Figura 29 temos o perfil de módulo de compressibilidade, com isolinhas variando de $0,2 \text{ m/s}$ em $0,2 \text{ Pa}^{-1}$. É possível observar que os maiores gradientes de módulo de compressibilidade ocorrem próximos a superfície, similar ao comportamento do perfil de velocidade, e ao atingir a profundidade de 1000 metros (SOFAR) o módulo de compressibilidade diminui.

É importante ressaltar que os valores do módulo de compressibilidade variam muito pouco no decorrer da sessão, dessa forma, podemos esperar que a velocidade tenha uma influência maior na propagação acústica.

É importante ressaltar que o HYCOM possui variabilidade de 0.08° (aproximadamente 9km), sendo assim, foi realizada uma interpolação linear para que os dados nos pontos entre as coordenadas disponibilizadas pelo HYCOM fossem preenchidos de 1 em 1 metro de forma a facilitar a representação dos dados em um grid regular.

Dado ao grande espaçamento entre os pontos fornecidos pelo HYCOM, dentro da seção representada pelos perfis acima, foi realizada a simulação para a construção dos sismogramas em uma seção de 4000 m x 4000 m. Os sismogramas construídos a partir dos dados na costa do Espírito Santo descritos acima, na longitude de 35.28°W e seção variando nas latitudes 18.48°S a 20°S , podem ser observados na Figura 30 e 31. Para a elaboração destes foi utilizada a fonte do tipo Ricker (Equação 4) com frequência de 150 Hz e tempo de simulação de 6 segundos.

Para a construção do sismograma representado pela Figura 30, o módulo de compressibilidade foi considerado constante ao longo dos meios, dessa forma, a propagação acústica leva apenas em consideração a mudança de velocidade da onda no meio de propagação.

Na construção do sismograma representado pela Figura 31, o módulo de compressibilidade foi calculado a partir das velocidades e massas específicas calculadas a partir dos dados provenientes do HYCOM, mostrados anteriormente.

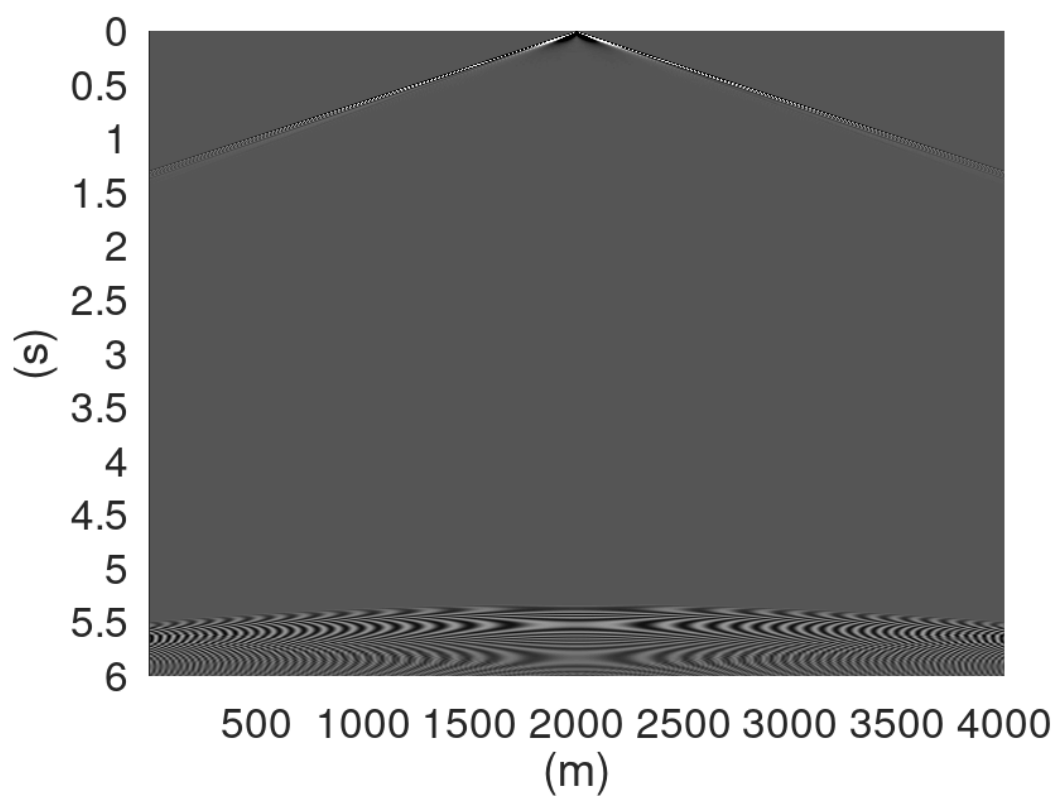


Figura 30 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S

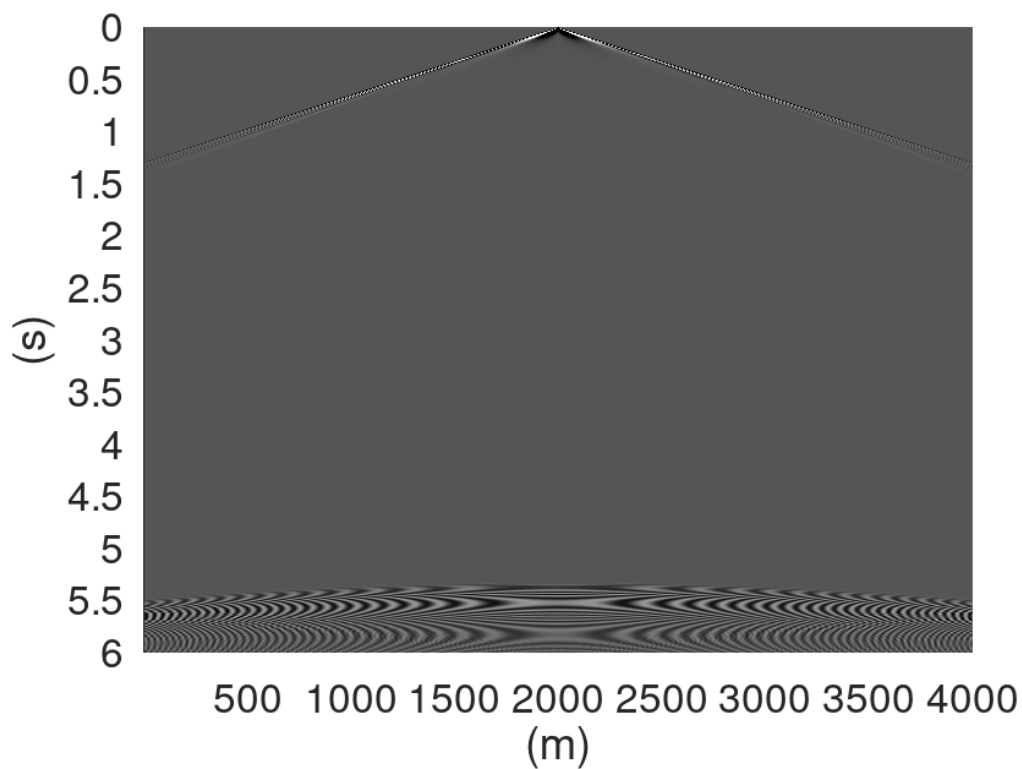


Figura 31 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

Ao comparar as figuras 30 e 31 podemos observar que não há diferença entre esses sismogramas. Ambos possuem a frente de onda gerada pela onda de pressão atingindo as bordas laterais e as reflexões causadas pela discontinuidade no meio.

A falta de diferenças visíveis nos sismogramas ao considerar o módulo de compressibilidade constante versus sua variação pode estar relacionada a algumas razões como neste caso onde temos sutileza nas variações de massa específica e velocidade do som. Em locais onde as variações nas propriedades da água do mar, como massa específica e velocidade do som, são suaves e graduais, as reflexões das ondas acústicas podem não ser evidentes nos sismogramas. Variações abruptas nas propriedades normalmente resultam em reflexões mais distintas como foi observado na seção anterior.

Também é observado que a condição de contorno ABC ORDEM 2, utilizada para a simulação, não atuou bem neste caso, pois é possível notar a presença de ruído de fundo nos sismogramas gerados.

A frequência das ondas acústicas utilizadas na coleta dos sismogramas também pode desempenhar um papel importante. O uso de frequências mais altas pode tornar as reflexões mais visíveis, enquanto frequências mais baixas podem ser menos sensíveis a variações sutis.

Neste trabalho, foi desenvolvido um modelo numérico, mas em casos onde são utilizados equipamentos para a coleta dos dados, a resolução dos instrumentos usados e a distância entre os receptores (geofones ou hidrofones) também são fatores determinantes. Se a resolução não for suficiente para capturar as variações suaves, as reflexões podem não ser detectadas.

O meio (água do mar), neste caso é relativamente homogêneo, com variações mínimas nas propriedades acústicas, portanto, é esperado que as reflexões sejam menos evidentes. A interpretação e o processamento dos dados sísmicos também influencia na detecção de reflexões. Algoritmos de processamento podem suavizar variações sutis, tornando as reflexões menos proeminentes.

Outro fator importante que não foi considerado neste trabalho foi o ângulo de

incidência das ondas acústicas em relação às interfaces, que também desempenha um papel. Se as ondas acústicas estiverem quase paralelas às variações de propriedades do meio, as reflexões podem ser menos acentuadas.

Em resumo, a falta de diferenças visíveis nos sismogramas ao considerar o módulo de compressibilidade constante versus sua variação pode ser atribuída a uma combinação de fatores, incluindo a sutileza das variações nas propriedades do meio e o processamento de dados. Em ambientes onde as variações são suaves, é possível que as reflexões não sejam tão pronunciadas nos sismogramas.

Com o intuito de analisar a influência do módulo de compressibilidade quando adicionada uma camada de areia no fundo do oceano. A coluna d'água neste exemplo possui 4000 m de profundidade e a camada de areia possui 500 metros de profundidade. Assim como exemplo do estudo de caso mostrado anteriormente, foi realizada a simulação da propagação da onda acústica com os perfis de massa específica, velocidade e módulo de compressibilidade, conforme representados nas Figuras 32 , 33 e 34:

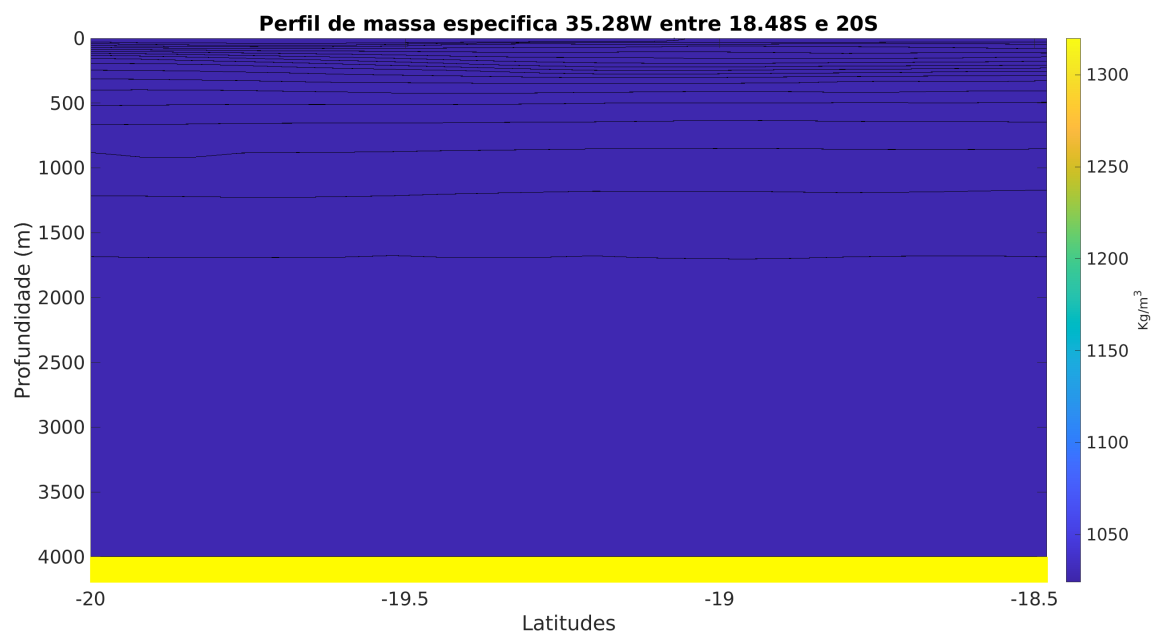


Figura 32 - Perfil de massa específica na costa do Espírito Santo com adição de camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

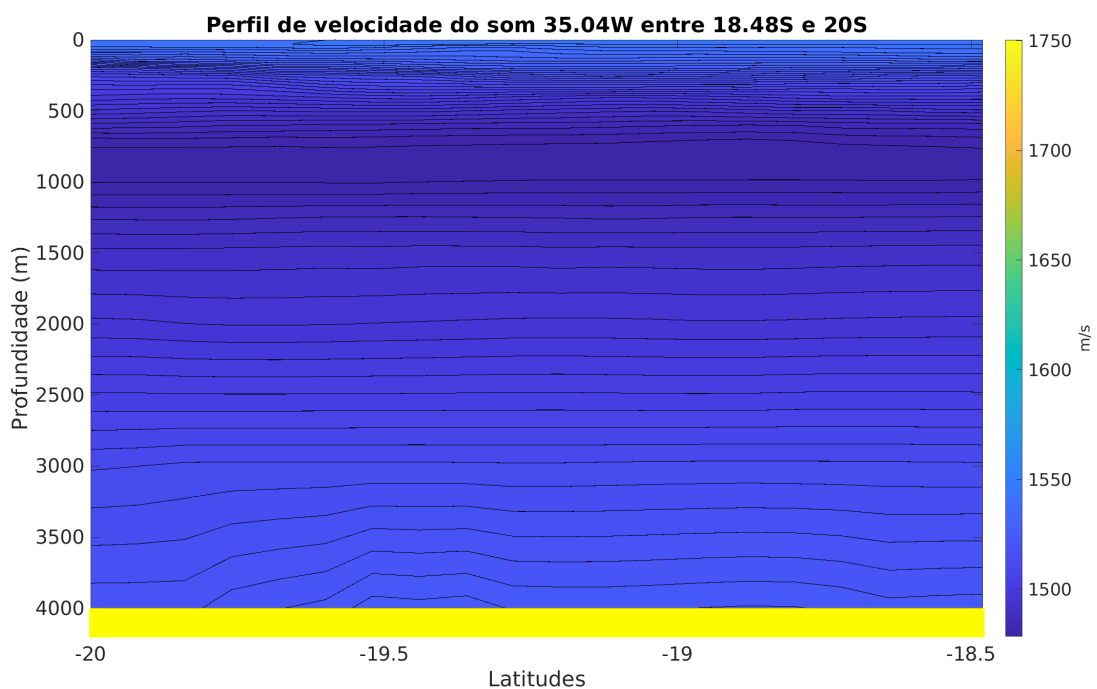


Figura 33 - Perfil de velocidade na costa do Espírito Santo com adição de camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

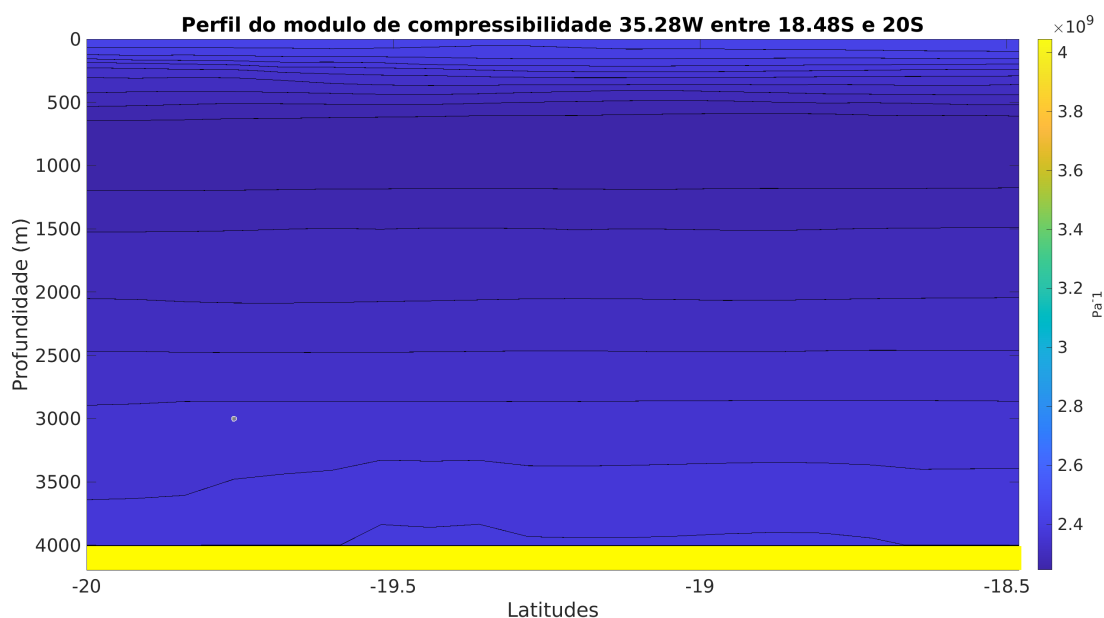


Figura 34 - Perfil de módulo de compressibilidade na costa do Espírito Santo com adição de camada de areia média, na Longitude de 35.28°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S.

Nas Figuras 32, 33 e 34 é possível ver que as variações de massa específica, velocidade do som e módulo de compressibilidade no oceano são quase nulas ao se comparar com a variação entre as mudanças de meio (interface oceano-areia). Esses

parâmetros são essenciais para entender a influência do módulo de compressibilidade na propagação acústica, visto que este depende diretamente da velocidade e da massa específica.

Foi realizada a simulação para a construção dos sismogramas em uma seção de 1000 m x 4000 m. Para a elaboração destes foi utilizada a fonte do tipo Ricker (Equação 4) com frequência de 150 Hz e tempo de simulação de 6,5 segundos.

Para a construção do sismograma representado pela Figura 35, o módulo de compressibilidade foi considerado constante ao longo dos meios, dessa forma, a propagação acústica leva apenas em consideração a mudança de velocidade da onda no meio de propagação.

Na construção do sismograma representado pela Figura 36, o módulo de compressibilidade foi calculado a partir das velocidades e massas específicas calculadas a partir dos dados provenientes do HYCOM, mostrados nas figuras anteriores.

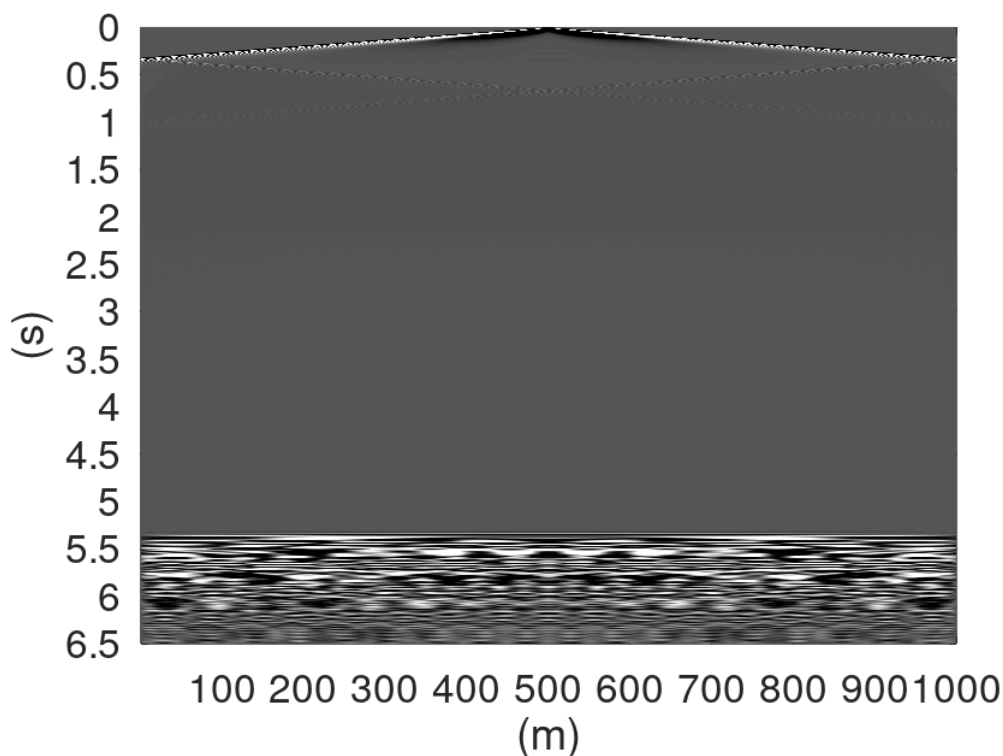


Figura 35 – Sismograma gerado sem a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S, com faixa de areia.

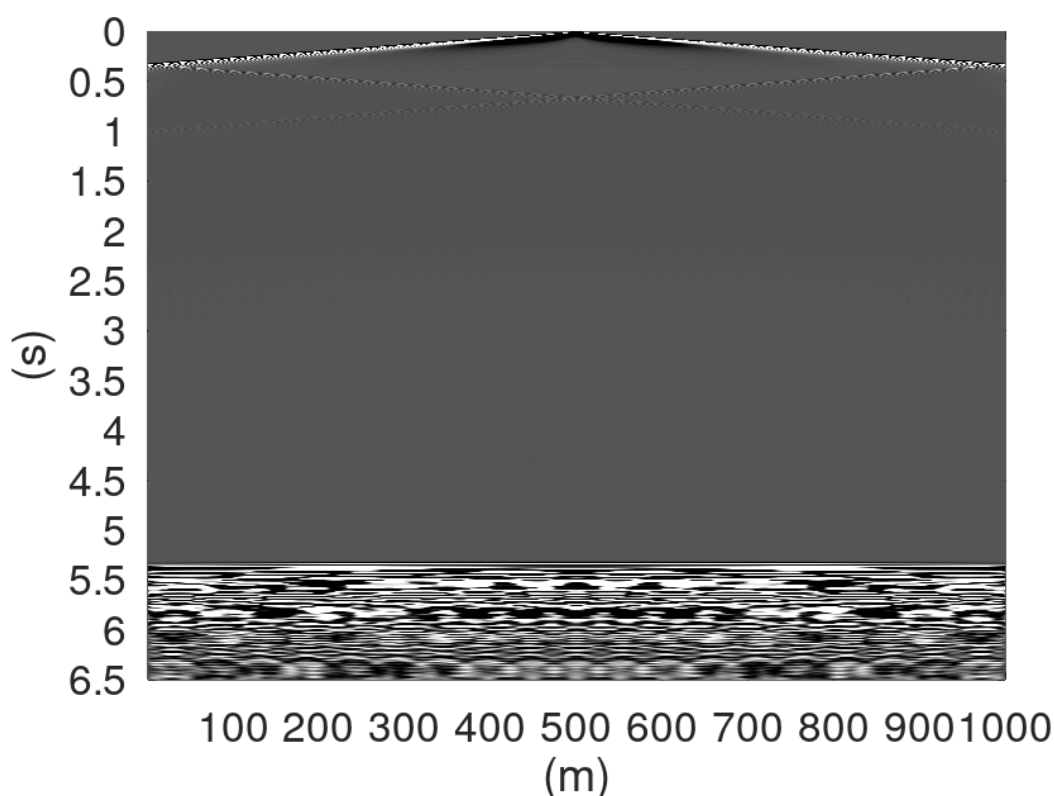


Figura 36 – Sismograma gerado com a influência da variação do módulo de compressibilidade no meio na Longitude de 35.04°W e seção variando nas Latitudes 18.48°S a 20°S, com faixa de areia.

Comparando as Figuras 35 e 36 é possível notar uma diferença sutil na intensidade das reflexões, que já se mostram presentes devido à variação abrupta do meio, que muda de água do mar, para oceano, diferentemente do observado nas Figuras 30 e 31.

A partir das análises realizadas, é possível dizer que o módulo de compressibilidade influencia na propagação acústica, fazendo com que as reflexões fiquem mais acentuadas devido as mudanças nas velocidades da onda e na massa específica, utilizadas para seu cálculo. Porém, foi constatado que mudanças sutis nessas propriedades na coluna d'água, afetam de forma quase imperceptível a propagação acústica conforme observado nos sismogramas construídos.

Ao realizar a análise é visto que a condição de contorno ABC ORDEM 2 não funcionou de forma correta nessas simulações, gerando reflexões de fundo. Também é possível concluir que a velocidade da onda no meio possui maior influência na propagação acústica do que o módulo de compressibilidade, que varia de forma muito sutil na coluna d'água.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os objetivos delineados neste estudo foram alcançados com sucesso por meio da implementação de um modelo numérico que descreve a propagação da onda acústica em um meio não homogêneo, gerada por uma fonte de pressão, utilizando o método das diferenças finitas no domínio do tempo. A introdução da condição de contorno de absorção em relação a ondas planas em duas dimensões, embora tenha sido aplicada de maneira satisfatória, revelou algumas limitações em relação à interação da onda acústica com o leito marinho, resultando em reflexões indesejadas em escalas mais amplas.

Os dados de temperatura e salinidade, obtidos em diferentes profundidades a partir do modelo HYCOM, foram devidamente incorporados nas equações que definem a velocidade da onda acústica e a massa específica, posteriormente utilizada para calcular o módulo de compressibilidade, principal parâmetro deste estudo. Essa informação foi fundamental para alimentar a equação da onda acústica em um meio não homogêneo. Como resultado, foi possível realizar simulações que proporcionaram uma representação precisa e visualização do comportamento da propagação da onda acústica no oceano, considerando as variações nas propriedades do meio ao longo das diferentes profundidades.

Pode-se observar a partir das simulações realizadas que a influência da velocidade da onda em relação ao módulo de compressibilidade na propagação das ondas acústicas é mais acentuada devido à relação direta entre a velocidade e o tempo de percurso das ondas. A velocidade do som na água é determinada pelas propriedades físicas do meio, como massa específica e compressibilidade, e governa a rapidez com que as ondas se deslocam.

O módulo de compressibilidade, embora seja uma propriedade importante que afeta a velocidade do som, tende a variar em intervalos relativamente estreitos na água do mar em comparação com as variações na velocidade do som. Portanto, mesmo pequenas variações na velocidade do som, devido a mudanças nas propriedades da água, podem ter um impacto mais significativo no tempo de trânsito das ondas acústicas e, conseqüentemente, na interpretação dos dados sísmicos. Em resumo, a velocidade da onda desempenha um papel central na propagação de ondas acústicas

devido à sua forte influência no tempo de chegada das ondas, o que a torna mais crítica em comparação com o módulo de compressibilidade em muitas aplicações sísmicas e acústicas.

Além das conclusões obtidas nesta pesquisa, é importante destacar algumas direções para estudos futuros que podem aprofundar nosso entendimento sobre a propagação de ondas acústicas em meios não homogêneos e suas implicações em aplicações práticas. Primeiramente, dada a identificação de limitações na condição de contorno ABC de ordem 2, é crucial explorar abordagens alternativas de modelagem para a interação de ondas acústicas com o leito marinho. Isso pode incluir o desenvolvimento de condições de contorno mais robustas e adequadas para simulações em grande escala, com o objetivo de minimizar reflexões indesejadas.

Além disso, a investigação da influência de outros parâmetros do meio marinho, além da velocidade da onda e do módulo de compressibilidade, na propagação de ondas acústicas pode ser realizada. Considerar a variação de outras propriedades físicas, como a densidade, a viscosidade e a anisotropia do meio, pode enriquecer ainda mais nossa compreensão dos processos acústicos em ambientes marinhos complexos.

A pesquisa também pode se estender para avaliar o impacto das mudanças climáticas e ambientais nas propriedades do oceano, e como essas mudanças afetarão a propagação de ondas acústicas. Isso é especialmente relevante considerando as crescentes preocupações ambientais e a necessidade de adaptar modelos acústicos a cenários em constante evolução.

Em suma, as conclusões deste estudo fornecem uma base sólida para pesquisas futuras que visam aperfeiçoar nossos modelos de propagação de ondas acústicas em meios não homogêneos, com implicações significativas em diversas áreas, incluindo a ciência marinha, a tecnologia submarina e a segurança costeira.

7. REFERÊNCIAS

- AJO-FRANKLIN, J. B. Frequency-Domain Modeling for the Scalar Wave Equation: An Introduction. 2005. Disponível em: <http://dspace.mit.edu>. Acesso em: 03 set. 2022, 11:05:00.
- ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. Física - Volume 1. São Paulo, Scipione, 2000.
- ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2a ed. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- ARAUJO, L. M. K.; QUEIROZ, F. L. G; CHACALTANA, J. T. A. Acoustic Wave Propagation in Non-Homogeneous Media. XLI CILAMCE. Paraná, 2020.
- ARTUSI, L., FIGUEIREDO JR, A. G. Sismografia rasa da plataforma continental de Cabo Frio-Araruama-RJ, Revista Brasileira de Geofísica, v. 25, pp. 7–16, 2007.
- BOBBER, R. J. Underwater Electroacoustic Measurements. 1º ed. Florida, USA: Naval Research Laboratory, 1972.
- BREKHOVSKIKH, L.M.; LYSANOV, Y.U.P. Fundamentals of Ocean Acoustics. 3. ed. New York: Springer Verlag, 2003.
- BROEZE, J.; VAN DAALEN, E.F.G. Radiation Boundary Conditions for the two-dimensional wave equation from a variational principle. Mathematics of Computation, v. 58, n. 197, p. 73-82, 1992.
- BROWN, M. G., UDOVYDCHENKOV, I. A. Underwater communication using weakly dispersive modal pulses. Acoustical Physics, v. 59, n. 5, pp. 533–538, 2013.
- BUCKINGHAM, M. J. Ocean-acoustic propagation models. EUR-OP. 1992.
- CARVALHO J.; OLIVEIRA O. Introdução à Oceanografia Física. Rio de Janeiro: Inter-ciência, 2014.
- CAVALEIRO, M. N. G.C.; BELEZA, M. D. O ouvido humano e os sons que detecta. 2006. Disponível em: <https://xdocs.com.br/doc/o-ouvido-humano-e-os-sons-que-detecta-3nr9397em2nj>. Acesso em: 03 set. 2022, 09:32:00.

CERJAN, C. et al. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, v. 50, n. 4, p. 705–708, 1985.

CHACALTANA, J. T. A. et al. Propagação de ondas acústicas em meios heterogêneos pelo método dos volumes finitos em malhas não estruturadas. XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Rio de Janeiro - RJ: Novembro 22-25, 2015.

CLAY, C. S., MEDWIN, H. *Acoustical oceanography: principles and applications*, v. 4. Wiley New York, 1977.

COATES, R. *The Advanced Sonar Course. Further Topics in Underwater Acoustics*. New York, Seiche.com Ltd. 2002.

COSTA, E. S. Utilização de parâmetros acústicos para quantificação de parâmetros hidrológicos. [s.l.]. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais - Escola de Engenharia, 2014.

CORREA, C. J. Estudo da Propagação Acústica no Mar na Camada de Mistura. [s.1]. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE, 2008.

COSTA, E. S; MEDEIROS, E. B. Estudo sobre a propagação acústica em águas rasas. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia. Lisboa, 2015.

DOS SANTOS, R. H. M.; FIGUEIRÓ, W. M. Modelagem acústica bidimensional usando diferentes parametrizações de campos de velocidades. *Revista Brasileira de Geofísica*, v. 24, n. 1, p. 103–115, 2006.

DUNCAN, A. J., MAGGI, A. L. A Consistent, User-Friendly Interface for Running a Variety of Underwater Acoustic Propagation Codes. *Proceedings of Acoustics 2006*, (20–22 November, Christchurch, New Zealand), 471–477. 2006.

ETTER, P. C. *Underwater acoustic modeling and simulation*, CRC Press. 2013.

FOFONOFF, N. Physical properties of seawater: A new salinity scale and equation of state for seawater. *J. geophys. Res* 90(C2), 3332-3342. 1985.

HAMILTON, E. L., BACHMAN, R. T. Sound velocity and related properties of marine sediments, The Journal of the Acoustical Society of America, v. 72, n. 6, pp. 1891–1904, 1982.

ISRAELI, M.; ORSZAG, S. A. Approximation of radiation boundary conditions. Journal of Computational Physics, v. 41, n. 1, p. 115-135, 1981.

JENSEN F. B.; KUPERMAN. W. A; PORTER M. B.; SCHMIDT H. Computational Ocean Acoustics. 2nd Ed. Modern Acoustic and Signal Processing. New York: Springer. , 2011.

JONES, A. D., ZINOVIEV, A., GREENING, M. V. A study of the effects on transmission loss of water column features as modelled for an area off the east Australian coast. Proceedings of Acoustics. pp. 17-20. 2013.

KEAREY, P., BROOKS, M., HILL, I. An Introduction to Geophysical Exploration. Blackwell Publishing. 2002.

KINSLER, L.E., FREY, A.R., COPPENS, A.B., et al. Fundamentals of Acoustics. 3 ed. New York, John Wiley & Sons. 1982.

LURTON, X. An Introduction to Underwater Acoustics: Principles and Applications. 2. ed. UK: Springer-Praxis Books in Geophysical Sciences., 2010.

MACEDO, H. C., DE FIGUEIREDO JR, A. G. Análise da atenuação de ondas compressãoais em sedimentos marinhos. In: 10th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, 2007.

MACKENZIE K.V. Nine term equations for sound speed in the ocean. J. Acoust. Soc. Am., v. 70, p. 807-812, 1981.

MACKENZIE K.V. Discussion of seawater sound speed determinations. J. Acoust. Soc. Am., v. 70, p. 801-806, 1981.

MEDWIN, H.; CLAY, C.S. Fundamentals of Acoustical Oceanography. 1º ed. California, USA: Academic Press, 1998.

MIGUENS, A. Navegação: A ciência e a arte, volume III - Navegação eletrônica e em condições especiais. Manual de Navegação, DHN. 2006.

- MILLERO, F. J.; POISSON, A. International one-atmosphere equation of state of seawater. *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, 28(6), 625–629. 1981.
- MILLERO, F. J.; POISSON, A. UNESCO data report on one atmosphere equation of state of seawater. *UNESCO Technical Papers in Marine Science* (in press). 1981.
- MOREIRA, R. M. et al. Frequency-domain acoustic-wave modeling with hybrid absorbing boundary conditions. *Journal of Geophysics*, vol. 79, n. 5, pp. A39-A44, 2014.
- MUNK, W. H. Horizontal detection of acoustic paths by mesoscale eddies. *Journal of Physical Oceanography* 10(4), 596-604. 1980.
- MUNK, W. H.; FORBES, A. M. G. Global ocean warming: an acoustic measure. *Journal Phys. Oceanogr.* v. 19, p. 1765-1778, 1989.
- RICHARDSON, W. J.; GREEN C. R. J; MALME, C. I.; THOMPSON, D. H. *Marine Mammals and Noise*. San Diego: Academic Press. 576 p. 1995.
- RODRÍGUEZ, O. C.; Modelos de Propagação Acústica Submarina: comparação de resultados com a solução analítica do problema de 3 camadas. Trabalho de síntese relativo as provas de aptidão Pedagógica e Capacidade Científica. Universidade do Algarve. 1995.
- SANTOS, M. E.; COUTINHO, M.N.; RITA, L. A.; GONÇALVES, E.J. Monitoring Underwater Explosions in the Habitat of Resident Bottlenose Dolphins. *The Journal of the Acoustical Society of America*. n. 6, v. 6, p. 3805-3808, 2010.
- SILVA, V. F. Estratégias para Estudos de Iluminação Sísmica Baseadas na Equação da Onda. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE, 2011.
- STRAMMA, L.; IKEDA, Y; PETERSON, R.G. Geostrophic transport in the Brazil Current region north of 20°S. *Deep Sea Research*, n. 12, v. 37, p. 1875-1886, 1990.
- TANAKA, M.; TAKIZAWA, H.; KOBAYASHI, K.; SISWANTO, S. Dynamics of thermohaline structure and formation of a cold dome in the deep Javanese Basin. *Geophysical Research Letters*, 28(9), 1925-1928. 2001.
- URICK, R. J. *Sound Propagation in the Sea*. Washington D.C.: DARPA, 300 p. 1979.

WILLIAMS, R.; WRIGHT, A. J.; ASHE, E.; BLIGHT, L. K.; BRUINTJES, R.; CANESSA, R. Impacts of anthropogenic noise on marine life: Publication patterns, new discoveries, and future directions in research and management. *Ocean & Coastal Management*, 115, 17–24. Wale, M. A. 2015.

XAVIER, B. C., Modelos de Propagação Acústica em Águas Rasas. Dissertação de Mestrado, Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ, 2005.

ZENG, Y. Q.; LIU, Q. H. Acoustic detection of buried objects in 3-D fluid saturated porous media: numerical modeling. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 39, n. 6, p. 1165–1173, 2001.

APÊNDICE A

ASPECTOS TERMODINÂMICOS

Equações das relações de estado de Maxwell para a termodinâmica

Para se construir um sistema fechado entre as equações de Navier-Stokes e a equação da Energia, as incógnitas envolvidas são identificadas e as relações de estado de Maxwell para a termodinâmica são determinadas seguindo o procedimento de Batchelor (2000).

A Energia livre de Gibbs é dada pela equação (2) abaixo:

$$G = U - TS + Pv \quad (50)$$

Para a obtenção da derivação da equação da Energia livre de Gibbs parte-se da equação da Energia Interna representada por (3):

$$\Delta U = \delta Q + \delta W \quad (51)$$

Onde ΔU , δQ e δW representam a energia interna do sistema, a quantidade de calor que entra no sistema e o trabalho realizado pelo sistema, respectivamente.

Na equação da Energia Interna, o trabalho realizado pelo sistema (δW) será representado pela compressibilidade do fluido para um volume infinitesimal, que é dada pela variação do volume específico (δv) devido à pressão (P), sendo assim:

$$\delta W = -P\delta v \quad (52)$$

E, a entrada da quantidade de calor no fluido (δQ) é dada pela variação da entropia do fluido (δS) devido à temperatura (T), sendo assim:

$$\delta Q = T\delta S \quad (53)$$

Assim, a equação da Energia Interna (3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta U = T\delta S - P\delta v \quad (54)$$

Analisando a equação da Energia livre de Gibbs, pode-se obter sua forma derivada lembrando que $\delta(TS) = T\delta S + S\delta T$ e $\delta(Pv) = P\delta v + v\delta P$, assim:

$$\Delta U = T\delta S - P\delta v \quad (55)$$

$$\Delta U = [\delta(TS) - S\delta T] - [\delta(Pv) - v\delta P] \quad (56)$$

$$\Delta U - \delta(TS) + \delta(Pv) = -S\delta T + v\delta P \quad (57)$$

$$\Delta(U - TS + Pv) = -S\delta T + v\delta P \quad (58)$$

Dessa forma, a derivada da equação da Energia livre de Gibbs é dada por (11):

$$\Delta G = -S\delta T - v\delta P \quad (59)$$

Pode-se construir uma equação para a entropia (com pressão constante) e uma equação para o volume específico (com temperatura constante), sendo assim:

$$-S = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, v = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T \quad (60)$$

Aplicando a segunda derivada na equação (12), derivando pela pressão a equação da entropia e derivando pela temperatura a equação do volume específico, tem-se:

$$\frac{-\partial S}{\partial P} = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T}, \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} \quad (61)$$

Temos assim a equação da relação do estado de Maxwell para a Energia Livre de Gibbs, dada por:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (62)$$

Onde os sub índices T e P representam as propriedades que se mantêm constantes, neste caso, a temperatura e a pressão, respectivamente.

Equações de estado da termodinâmica para dv e dS

Para a construção das equações de estado da termodinâmica para o volume

específico (dv) e para a entropia (dS) considera-se que o fluido é divariante, assim, podemos expressar uma propriedade termodinâmica como função de outras duas propriedades termodinâmicas. Sendo assim, atribuiu-se a dependência da temperatura (T) e da pressão (P) para a equação de estado de dv (15) e dS (16). Portanto:

$$v = v(T, P) \quad (63)$$

$$S = S(T, P) \quad (64)$$

Dessa forma, o diferencial de cada variável termodinâmica pode ser escrito como:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial P} dP \quad (65)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial P} dP \quad (66)$$

onde a derivada parcial deve ser entendida de sua forma usual.

Para resolver uma equação de estado devem ser atribuídas as propriedades termodinâmicas para os termos da equação, de forma que possam ser aplicadas na equação da Onda Acústica. Neste caso as propriedades termodinâmicas são definidas por:

$$\alpha_p = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P, \beta_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T, c_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \quad (67)$$

onde α_p é o coeficiente de expansão volumétrica à pressão constante, β_T é a compressibilidade isotérmica, c_p é o calor específico à pressão constante e v é o volume específico, definido como $v = \frac{1}{\rho}$.

A equação de estado para dv pode ser reescrita como:

$$dv = \frac{v}{v} \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{v}{v} \frac{\partial v}{\partial P} dP \quad (68)$$

Para a equação de estado de dv são atribuídas às propriedades termodinâmicas β_T e α_p . Sendo assim temos que dv assumirá a seguinte forma:

$$dv = v\alpha_p dT - v\beta_T dP \quad (69)$$

Analogamente, a equação de estado para dS pode ser expressa como:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{v}{T} \frac{\partial S}{\partial P} dP \quad (70)$$

É aplicada no segundo termo do lado direito da equação a relação de estado de Maxwell da Energia Livre de Gibbs onde $-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$. Sendo assim a equação de estado para dS assume a seguinte forma:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT - \frac{v}{T} \frac{\partial v}{\partial T} dP \quad (71)$$

Neste caso são atribuídas as propriedades termodinâmicas c_p e α_p , portanto:

$$dS = c_p dT - v\alpha_p dP \quad (72)$$

Equação de estado da termodinâmica para $d\rho$

Para a construção da equação de estado para a massa específica ($d\rho$) é considerado que se trata de um fluido divariante, sendo assim uma propriedade termodinâmica pode ser expressa como função de outras duas propriedades termodinâmicas, neste caso, a pressão (P) e a entropia (S). As equações de estado para a massa específica e para a temperatura podem ser expressas como:

$$\rho = \rho(P, S) \quad (73)$$

Portanto, o diferencial de (73) é dado por:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP + \frac{\partial \rho}{\partial S} dS \quad (74)$$

Para atribuir as propriedades termodinâmicas posteriormente, pode-se reescrever a equação para $d\rho$ do seguinte modo:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial S} dS \quad (75)$$

onde $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ a pressão constante, pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right) \quad (76)$$

Assim:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right) \frac{T}{T} \frac{\partial T}{\partial S} dS \quad (77)$$

Para resolver uma equação de estado são atribuídas propriedades termodinâmicas para os termos da equação, para serem aplicadas na equação da Onda Acústica. Para a equação de estado de $d\rho$ são atribuídas às propriedades termodinâmicas de velocidade de propagação do som, α_p , c_p . De acordo com Henke (2015), considera-se que:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \quad (78)$$

onde c é a velocidade do som.

Sendo assim $d\rho$ assume a seguinte forma:

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dP - \frac{\alpha_p T}{v c_p} dS \quad (79)$$

Derivando toda a equação para $d\rho$ no tempo, tem-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{DP}{Dt} - \frac{\alpha_p T}{v c_p} \frac{DS}{Dt} \quad (80)$$

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA PARA UM MEIO NÃO HOMOGÊNEO

A equação da onda acústica que se propaga como uma onda de pressão em um fluido compressível pode ser deduzida inicialmente a partir das equações de conservação da massa, momentum e energia, e da equação de estado para a massa específica, fornecidas respectivamente pelas equações (81), (82), (83) e (84)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (81)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla P = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (82)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{u} \quad (83)$$

$$\rho = \rho(S, T) \quad (84)$$

Onde $\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(Q)$ é o operador da derivada material no tempo e ∇ é o operador nabla ou operador diferencial vetorial. As variáveis físicas escalares ρ, P, S e T representam a massa específica, pressão, entropia e temperatura, respectivamente. E as variáveis vetoriais $\vec{u}, \vec{g}$ e $\vec{q}$ representam a velocidade, aceleração devido à gravidade e a Lei de Fourier ($\vec{q} = \lambda \nabla T$). Para um fluido Newtoniano, o tensor das tensões é dado por $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$. Assumindo a hipótese de Stokes para um meio newtoniano, tem-se que $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor cisalhante dado por (BATCHELOR, 2002):

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} \right) \quad (85)$$

Sendo as variáveis λ e μ as propriedades do fluido representando o coeficiente de condutividade de calor e viscosidade dinâmica, respectivamente. E $\mathbf{I}$ representa a matriz identidade (BATCHELOR, 2002).

A equação de energia pode ser desconsiderada ao considerar-se que o processo é isentrópico. Portanto, a transferência de calor e a taxa de dissipação de energia à medida que a onda se propaga são muito pequenas, podendo ser desconsideradas. Consequentemente a equação que governa a Lei de Conservação da energia (83) é

reduzida a:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad (86)$$

É necessário construir um sistema fechado entre as equações de Navier Stokes, e para isso as incógnitas envolvidas devem ser identificadas e as equações de estado da termodinâmica são aplicadas. As equações (79) e (80) são um conjunto de 4 equações que apresentam 5 incógnitas. A equação de estado para a massa específica dada pela equação (80), é usada para o fechamento do número de equações, considerando simultaneamente que a equação (86) é válida. Assim, a equação de estado pode ser escrita como na equação (89).

Sendo assim, o novo conjunto de equações é dado por (87), (88) e (89):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (87)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla P = 0 \quad (88)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{DP}{Dt} \quad (89)$$

onde na equação (89), c representa a velocidade do som para um processo isentrópico.

Substituindo a equação (89) na equação da Lei de Conservação da massa (87) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (90)$$

A equação da onda acústica pode ser obtida ao se realizar a derivada no espaço ao aplicar o divergente na equação de conservação da quantidade de movimento (88) e realizando a derivada no tempo da equação (90), tem-se:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} \right) = 0 \quad (91)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P \right) = 0 \quad (92)$$

A forma linear das equações (91) e (92), considerando $D()/Dt = \partial()/\partial t$, pode ser combinada para obter a equação (93):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) \quad (93)$$

Introduzimos o módulo de compressibilidade dado por $E = \rho c^2$, comumente encontrado nos estudos da sísmica de prospecção (Silva, 2011), assim a equação (93) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = E \nabla \cdot \left(\frac{c^2}{E} \nabla P \right) \quad (94)$$

A equação (94) representa a forma linear da onda acústica, usada para realizar a propagação da onda de pressão em meios não homogêneos. A equação (94) pode ser reduzida a equação clássica da onda se o meio for homogêneo e pode ser resolvida para um meio não homogêneo, onde há a alteração das propriedades do meio, que pode ser ocasionada por diferentes compartimentos sedimentares, por exemplo.

Portanto, a equação linear da onda acústica para um meio não homogêneo em duas dimensões é dada por:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{E} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2}{E} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \ddot{P}_f \quad (95)$$

onde $\ddot{P}_f$ é o termo fonte.

APÊNDICE C

CONCEITOS MATEMÁTICOS PARA A FORMULAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O método das Diferenças Finitas é representado através da definição da derivada para uma função $u(x, y)$ em $x = x_0$ e $y = y_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (96)$$

Sendo esta, uma aproximação plausível para a primeira derivada de uma função qualquer $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, valido para um Δx suficientemente pequeno, mas finito.

O teorema do valor médio nos assegura que a representação da diferença é exata para algum ponto dentro do intervalo Δx . A derivada de uma função pode ser descrito de forma mais precisa com a expansão da Série de Taylor, que pode ser usada para construir uma aproximação discreta para qualquer derivada. Desenvolvendo uma expansão da Série de Taylor para $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ sobre (x_0, y_0) tem-se:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right)_0 \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_\xi \frac{\Delta x^n}{n!} \quad (97)$$

onde $x_0 \leq \xi \leq (x_0 + \Delta x)$.

Rearranjando, a diferença é dada por:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \frac{\Delta x}{2!} - \dots \quad (98)$$

Utilizando a notação i, j , considera-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, j} = \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta x} + \text{Erro de truncamento} \quad (99)$$

Onde $u_{i+1, j} - u_{i, j} / \Delta x$ é a representação da diferença finita para $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i, j}$. O erro de truncamento é a diferença entre a derivada parcial e a representação de diferenças finitas. Quanto maior o truncamento da Série de Taylor, maior a precisão obtida na resolução da equação. Neste caso as séries de Taylor serão escritas igualmente para

Δx e Δy . Pode-se caracterizar o comportamento limitador do erro de truncamento utilizando o termo (O) e sua ordem:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (100)$$

Um número infinito de representações de diferenças finitas pode ser encontrado para $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$, por exemplo, podemos expandir “para trás”:

$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \frac{\Delta x^n}{n!} \quad (101)$$

Obtendo:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (102)$$

Pode-se subtrair $u(x_0 - \Delta x, y_0)$ de $u(x_0 + \Delta x, y_0)$, rearranjar e obter a aproximação central, dada por:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (103)$$

Analogamente, pode-se somar $u(x_0 - \Delta x, y_0)$ e $u(x_0 + \Delta x, y_0)$, rearranjar para obter a aproximação para a segunda derivada:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (104)$$

Estes são apenas alguns exemplos das possíveis maneiras pelas quais a primeira e a segunda derivada podem ser aproximadas.

APÊNDICE D

APLICAÇÃO DA SÉRIE DE TAYLOR NO TERMO DO ESPAÇO DA EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

Analogamente ao que foi visto acima, aplicaremos o método das diferenças finitas no termo do espaço da equação (47).

No termo do espaço temos: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{E} \frac{\partial P}{\partial x} \right)$

Ao dizer que: $\frac{c^2}{E} = \Gamma$, sendo Γ constante, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{I,J}^n = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{I,J}^n + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{i,j}^n \quad (105)$$

Sendo $g_{I,J} = \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{I,J}^n$

$$g_{i-1,J}^n = g_{I,J}^n - \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{I,J}^n \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (21) \quad (106)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{I,J}^n = \frac{g_{i+1,J} - g_{i-1,J}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (22) \quad (107)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{I,J}^n = \frac{\left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{i+1,J}^n - \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{i-1,J}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (108)$$

Em x:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{i+1,J}^n = \Gamma_{i+1,J} \left(\frac{P_{i+1,J}^n - P_{I,J}^n}{\Delta x^2} \right) - \Gamma_{i-1,J} \left(\frac{P_{I,J}^n - P_{i-1,J}^n}{\Delta x^2} \right) + O(\Delta x) \quad (109)$$

Analogamente para y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Big|_{I,j+1}^n = \Gamma_{I,j+1} \left(\frac{P_{I,j+1}^n - P_{I,J}^n}{\Delta y^2} \right) - \Gamma_{I,j-1} \left(\frac{P_{I,J}^n - P_{I,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + O(\Delta y) \quad (110)$$

Os termos $P_{i+1,J}^n$, $P_{I,J}^n$ e $P_{i-1,J}^n$, serão dados pelas equações abaixo:

$$P_{I,J}^n = P_{I,J}^n \quad (111)$$

$$P_{I+1,J}^n = P_{I,J}^n + \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n \frac{\Delta x}{1!} + O(\Delta x^2) \quad (112)$$

Isolando $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n$ tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n = \frac{P_{I+1,J}^n - P_{I,J}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (113)$$

Fazendo o mesmo para o termo $P_{I-1,J}^n$, tem-se:

$$P_{I-1,J}^n = P_{I,J}^n - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n \frac{\Delta x}{1!} + O(\Delta x^2) \quad (114)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n = \frac{P_{I,J}^n - P_{I-1,J}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (115)$$

Portanto o termo $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n$ é dado pela subtração de (108) e (111):

$$P_{I+1,J}^n - P_{I-1,J}^n = 2 \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n + O(\Delta x^3) \quad (116)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{I,J}^n = \frac{P_{I+1,J}^n - P_{I-1,J}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (117)$$

E o termo $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{I,J}^n$ é dado pela soma de (108) e (111):

$$P_{I+1,J}^n + P_{I-1,J}^n = 2P_{I,J}^n + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{I,J}^n \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^4) \quad (118)$$

Isolando $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{I,J}^n$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{I,J}^n = \frac{P_{I+1,J}^n - 2P_{I,J}^n + P_{I-1,J}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (119)$$

APÊNDICE E

APLICAÇÃO DA SÉRIE DE TAYLOR NO TERMO DO TEMPO DA EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA

Analogamente ao realizado com o termo do espaço, será aplicada a Série de Taylor no termo do tempo definimos os termos $P_{I,J}^n$, $P_{I,J}^{n+1}$ e $P_{I,J}^{n-1}$, dados pelas equações abaixo:

$$P_{I,J}^{n+1} = P_{I,J}^n + \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{I,J}^n \frac{\Delta t}{1!} + O(\Delta t^2) \quad (120)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{I,J}^n = \frac{P_{I,J}^{n+1} - P_{I,J}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (121)$$

$$P_{I,J}^{n-1} = P_{I,J}^n - \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{I,J}^n \frac{\Delta t}{1!} + O(\Delta t^2) \quad (122)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{I,J}^n = \frac{P_{I,J}^n - P_{I,J}^{n+1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (123)$$

Portanto o termo $\left. \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right|_{I,J}^n$ é dado por:

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right|_{I,J}^n = \frac{P_{I,J}^{n+1} + P_{I,J}^{n-1} - 2P_{I,J}^n}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (124)$$

Aplicando na equação da onda acústica e isolando o termo $P_{I,J}^{n+1}$, tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right|_{I,J}^n = \frac{P_{I,J}^{n+1} - 2P_{I,J}^n + P_{I,J}^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (125)$$