

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

JOSÉ ANTÔNIO RAMIRO AVELAR

**MODELAGEM DIRETA DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM PROBLEMAS
DIFUSIVO-ADVECTIVOS USANDO FUNÇÕES RADIAIS NO CONTEXTO DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

VITÓRIA-ES

2016

JOSÉ ANTÔNIO RAMIRO AVELAR

**MODELAGEM DIRETA DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM PROBLEMAS
DIFUSIVO-ADVECTIVOS USANDO FUNÇÕES RADIAIS NO CONTEXTO DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA-ES

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELAGEM DIRETA DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM PROBLEMAS
DIFUSIVO-ADVECTIVOS USANDO FUNÇÕES RADIAIS NO CONTEXTO DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

José Antônio Ramiro Avelar

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Prof. Dr. André Bulcão – Examinador externo
CENPES/PETROBRÁS

Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara – Examinador interno
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 15 de Abril de 2016.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço àquele que tem sido meu guia e ajudador, cuja intervenção e soberania tornou tudo isso possível, Deus.

À minha amada esposa Míriam Nunes de Souza Avelar, pelo companheirismo e cuidados a mim dispensados sem os quais minha jornada teria sido muito mais laboriosa. Aos meus pais Cléia Ramiro de Souza e Nélio Avelar Silva cujo orgulho e brilho nos olhos por ter um filho cursando mestrado foi para mim um grande incentivo.

Ao supervisor Fabiano Patrocínio Marques que tornou tudo isso possível, pela confiança e compreensão em mim depositados. Ao supervisor Célio Faria Junior que permitiu de maneira benevolente a continuidade dos meus estudos.

Agradeço ao amigo de curso André Judá cujo senso de ajuda foi por vezes providencial para que eu lograsse êxito.

Por último, e não menos importante, ao Professor Dr^o Carlos Friedrich Loeffler Neto que, a despeito do meu trabalho, aceitou-me como seu orientado depositando em mim confiança. Seus conselhos e experiência foram fundamentais para conclusão desta dissertação.

RESUMO

A pesquisa envolvida na presente dissertação se baseou no método denominado de MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta) onde se interpola diretamente o termo não homogêneo da equação diferencial de governo, no contexto do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Emprega-se o uso de funções primitivas das funções de interpolação originais no núcleo da integral de domínio, permitindo a transformação desta última numa integral de contorno, semelhantemente ao realizado na Dupla Reciprocidade, evitando assim a discretização do domínio por meio de células.

Esta recente formulação logrou êxito na solução de problemas de grande interesse e sabida dificuldade em Engenharia como os de Poisson e de Helmholtz. Logo, seguindo pela escala natural de complexidade, tomando a Equação de Campo Escalar Generalizada como referência, chega-se aos problemas difusivos-advectivos onde são avaliados os efeitos térmicos do movimento de um fluido (advecção) juntamente com os de condução (difusão). Este fenômeno é muito comum nos problemas de Engenharia como, por exemplo: na formação da camada limite de um fluido em escoamentos laminares; na transmissão de calor com a associação entre a propagação no meio contínuo (difusão) e o transporte por meio de fluxo (advecção). Estes problemas continuam sendo objeto de atenção e demandam constantes aprimoramento na implementação de métodos numéricos. Logo, a aplicabilidade e a precisão do MECID são testadas na solução de problemas caracterizados pelo escoamento unidirecional de um fluido sobre um volume controle com diferentes condições de contorno cujos processos são governados pelo fenômeno da difusão-advecção. Para tanto, são geradas 42 malhas diferentes para o cálculo tanto da temperatura quanto do fluxo e comparados com os respectivos valores analíticos.

PALAVRAS-CHAVE: Método dos Elementos de Contorno, Funções de Base Radial, Equação de Difusão e Advecção.

ABSTRACT

The research involved in this dissertation is based on the so-called DIBEM (Boundary Element Method with Direct Interpolation) which directly interpolates the inhomogeneous term of the government differential equation using the Boundary Element Method (BEM). The DIBEM uses a primitive of the original interpolation function in the kernel of the domain integral, allowing the latter processing a boundary integral, similarly to that performed in the Dual Reciprocity, thus avoiding domain discretization by cells

This new formulation has well succeeded in solving well known problems of great interest and difficulty in engineering, such as the governed by the Poisson Equation and the Helmholtz Equation. Following the natural scale of complexity, considering the Generalized Scalar Field Equation as reference, the diffusive-advective problems which evaluate the thermal effects of transport by a fluid (advection) together with conduction are approached. This phenomenon is very common in engineering problems such as: the formation of the boundary layer of a laminar fluid flow; the heat transmission with the association between the spread in the continuous medium (conduction) and transport by flow (advection). These problems continue to require constant improvement in the implementation of numerical methods. Therefore, the applicability and accuracy of DIBEM are tested for solving problems characterized by unidirectional fluid flow on a control volume with different boundary conditions that are governed by the diffusion-advection phenomenon. For this purpose, 42 different meshes are generated to calculate both the flow and temperature as compared with the respective analytical values.

KEYWORDS: Boundary Element Method, Radial Basis Function, Equation diffusion and advection.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Volume de controle diferencial (dx.dy.1) para a conservação de massa em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.....	7
Figura 2 - Tensões normal e cisalhante para um volume de controle direcional (dx.dy.1) em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.....	9
Figura 3 - Fluxos de momento para um volume de controle diferencial (dx.dy.1) em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.....	10
Figura 4 - Volume de controle diferencial (dx.dy.1) para a conservação de energia em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso com transferência de calor.....	13
Figura 5 - Fluxograma da modelagem de um problema por métodos numéricos.	17
Figura 6 - Comparação entre as matrizes dos coeficientes do MEF e do MEC	19
Figura 7- Domínio bidimensional Ω delimitado por um contorno $\Gamma = \Gamma u + \Gamma q$	20
Figura 8 – Contorno discretizado com elementos lineares.....	38
Figura 9 – Discretização do contorno com elementos lineares no MECID.....	39
Figura 10 – Elemento de contorno linear	40
Figura 11 - Escoamento unidirecional de um fluido governado pela equação de difusão e advecção do 1ª problema.....	47
Figura 12 – Gráfico da temperatura calculada analiticamente para o primeiro problema com $v=1$	48
Figura 13 - Gráfico do fluxo calculado analiticamente para o 1º problema com $v=1$.	49
Figura 14 – Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 1	51

Figura 15 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 1 na aresta 2.	52
Figura 16 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 1 na aresta 4.	53
Figura 17– Escoamento unidirecional de um fluido governado pela equação de difusão e advecção do 2ª problema.	54
Figura 18 -Gráfico da temperatura calculada analiticamente para o 2º problema com $v=1$	55
Figura 19 - Gráfico do fluxo calculado analiticamente para o 2º problema com $v=1$	55
Figura 20 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 2 na aresta 1.	58
Figura 21 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 2 na aresta 2.	58
Figura 22 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 2 na aresta 4.	59
Figura 23 – Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	65
Figura 24 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 do problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	66
Figura 25 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 do problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	66

Figura 26 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.	67
Figura 27 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.....	68
Figura 28 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.....	69
Figura 29 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.	69
Figura 30 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.....	70
Figura 31 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.....	71
Figura 32 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	71
Figura 33 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.....	72
Figura 34 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.....	73

Figura 35 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.	74
Figura 36 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.....	75
Figura 37 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.....	76
Figura 38 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.	77
Figura 39 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.....	78
Figura 40 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.....	79
Figura 41 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	80
Figura 42 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	81
Figura 43 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.....	82

Figura 44 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.	83
Figura 45 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.	84
Figura 46 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.	85
Figura 47 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.	86
Figura 48 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.	87
Figura 49 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.	88
Figura 50 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	89
Figura 51 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	90
Figura 52 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	49
Tabela 2 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	49
Tabela 3 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	50
Tabela 4 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	50
Tabela 5 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	50
Tabela 6 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	51
Tabela 7 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	56
Tabela 8 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	56
Tabela 9 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	56
Tabela 10 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	57
Tabela 11 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	57
Tabela 12 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.	57

LISTA DE ABREVIATURAS

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MDF – Método das Diferenças Finitas

MVF – Métodos dos Volumes Finitos

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

MECID – Método de Elementos de Contorno com integração Direta

MECDR – Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	1
1.2	RETROSPECTIVA BIBLIOGRÁFICA.....	3
2	OBJETIVO.....	5
3	EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO.....	6
3.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES	6
3.2	CONSERVAÇÃO DA MASSA.....	7
3.3	SEGUNDA LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO	8
3.4	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA	12
4	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	16
4.1	DISCUSSÕES PRELIMINARES.....	16
4.2	EQUACIONAMENTO BÁSICO	19
4.3	A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MEC.....	22
4.4	INTERPOLAÇÃO COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL.....	24
4.5	O PROCEDIMENTO MECID.....	26
4.5.1	<i>Tratamento do Termo Difusivo.....</i>	<i>27</i>
4.5.2	<i>Tratamento do Termo Advectivo.....</i>	<i>30</i>
4.5.3	<i>Procedimento Operacional.....</i>	<i>32</i>
4.5.4	<i>Transformação da Integral de Domínio.....</i>	<i>35</i>
4.5.5	<i>Discretização do Contorno.....</i>	<i>37</i>
4.5.6	<i>Construção da matriz advectiva</i>	<i>44</i>
4.5.7	<i>Necessidade de pontos internos interpolantes.....</i>	<i>44</i>
5	TESTES NUMÉRICOS.....	46
5.1	PRIMEIRO PROBLEMA	47
5.2	SEGUNDO PROBLEMA	54
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
6.1	PROPOSTAS PARA FUTURAS PESQUISAS	62
7	BIBLIOGRAFIA.....	63
	APÊNDICE A – COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES CALCULADOS ANALÍTICAMENTE E OS CALCULADOS NUMERICAMENTE	65

APÊNDICE B – POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTES NO CONTORNO, INTERNOS E DOS PONTOS INTERNOS DE INTERPOLAÇÃO.....	97
---	-----------

1 INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Existem, fundamentalmente, três ferramentas disponíveis na solução de problemas de interesse na Engenharia. São elas: os métodos analíticos; os métodos experimentais e os métodos numéricos.

Historicamente, os métodos analíticos de solução de problemas de Engenharia têm como principal vantagem a obtenção da solução exata. Porém, apresentam como principal desvantagem sua limitação de aplicação à problemas cujas hipóteses simplificadoras os desviam expressivamente do fenômeno físico real, pois a complexidade dos modelos mais completos impede sua resolução em casos mais gerais. Assim, são aplicados, na maioria das vezes, em problemas de geometria simples e condições de contorno também simples. Também, são empregados frequentemente na validação de resultados obtidos por metodologias mais modernas, auxiliando assim o desenvolvimento tecnológico.

Os métodos experimentais necessitam da construção de protótipos e de simulações em laboratório, algumas vezes usando modelos reduzidos. Sua principal vantagem reside no fato do protótipo simular a configuração real ou algo próximo dela. Entretanto, em virtude da confecção do protótipo e da necessidade de reprodução fidedigna dos fenômenos físicos, este método é de altíssimo custo e muitas vezes não pode ser realizado, por questões de segurança, ou pela dificuldade de reprodução das condições reais do problema. Em certos casos, porém, nem sempre os modelos matemáticos são conhecidos e modelados, tornando, desta forma, o método experimental na única alternativa disponível.

Os métodos numéricos, por sua vez, podem ser aplicados numa diversidade de problemas governados por equações diferenciais complexas com condições de contorno complicadas e definidas sob diversos tipos de forma geométrica. Os resultados são obtidos de forma bastante rápida, pois se utilizam dos modernos recursos computacionais, atualmente bastante acessíveis.

Assim, os métodos numéricos têm sido amplamente utilizados na solução de problemas recorrentes nos diversos campos de atuação da Engenharia. Eles se tornaram numa excelente alternativa quando a solução analítica ou o emprego de testes empíricos são inviáveis ou demasiadamente laboriosos e custosos. Contudo, mesmo tendo alcançado resultados já consagrados, ainda existem alguns fenômenos cuja complexidade continua impondo desafios a esses métodos, particularmente em se tratando do alcance de maior precisão de resultados. Dentre estes fenômenos encontram-se aqueles que englobam a transferência de calor com a ocorrência da difusão juntamente com a advecção.

O fenômeno é muito comum nos problemas de Engenharia como, por exemplo: na formação da camada limite de um fluido em escoamentos laminares; na transmissão de calor com a associação entre a propagação no meio contínuo (difusão) e o transporte por meio de fluxo (advecção); no processo de solidificação de chapas por lingotamento contínuo; na dispersão de poluentes em meio fluidos em que há escoamento lento, como ocorre em lagoas e mesmo em certos canais de bacias hidrográficas. Estes problemas continuam sendo objeto de atenção e demandam constantes aprimoramento na implementação dos métodos numéricos.

Isto se deve à complexidade das equações diferenciais que governam este fenômeno, principalmente devido à asseverada influência do termo associado à advecção que, em determinadas proporções, torna os resultados dos métodos expressivamente imprecisos.

Considerando apenas os principais métodos numéricos, em geral estes consistem de uma formulação matemática que tem como propósito transformar uma equação diferencial ou integral (ou um conjunto delas) em um sistema de expressões algébricas envolvendo a função incógnita, ou seja, isentos de operadores diferenciais ou integrais. Esta operação é feita, na maior parte das vezes, utilizando-se a ideia de discretização, que consiste em expressar um domínio contínuo por um conjunto de pontos representativos do mesmo, seja com relação à geometria do corpo ou quanto à variável física do problema.

1.2 RETROSPECTIVA BIBLIOGRÁFICA

São poucos os casos de resolução analítica da equação de difusão-advectação devido a perda de precisão dos resultados devido às hipóteses simplificadoras conforme exposto anteriormente. Porém, seu desenvolvimento ganhou impulso devido a crescente importância da pauta ambiental na sociedade global, logo, recentemente alguns trabalhos se destacaram nesta área como o de Kumar *et al* (2009) que analisaram a solução analítica para um caso unidimensional com coeficientes variáveis no domínio semi-infinito, usando a técnica de transformação de Laplace e Yadav *et al* (2012) que também apresentou soluções analíticas para diversas condições de contorno.

No que diz respeito aos métodos numéricos os métodos discretos amplamente utilizados nos problemas de transferência de calor são os o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Ambos se caracterizam pela discretização do domínio. Historicamente o MDF é o método discreto mais antigo e nesse sentido há muitas fontes bibliográficas clássicas que tratam o problema da difusão-advectação usando o conceito de diferença finita como Zhao *et al* (1994) para problemas bidimensionais e Prieto *et al* (2011) que apresentou uma solução tridimensional da equação de difusão-advectação por formulações FDM explícitas, dedicando especial atenção para o critério da estabilidade.

O MEF é atualmente o método discreto mais utilizado na Engenharia, embora sua principal área de atuação seja a mecânica dos sólidos (OÑATE, 2009) e (BRAESS, 2007) dentre outros. Particularmente nos casos de problemas difusivos-advectivos, o MEF sempre apresentou dificuldades de resolvê-lo com sua formulação clássica, de modo que algumas formulações alternativas como a de Petrov-Galerkin (DONEA e HUERTA, 2003) tem sido desenvolvida para melhor aproximar o comportamento numérico do termo advectivo.

Na área de fluidodinâmica, o Método dos Volumes Finitos tem sido cada vez mais utilizado, sobretudo nos problema em que trata esta dissertação. Não obstante ótimos resultados nesta aplicação (MALISKA, 2012), Mangani *et al* (2015) dentre outros o método apresenta fortes limitações no trato de problemas com contornos variáveis e com pouca regularidade.

Outro método também amplamente utilizado na Engenharia e muito difundido é o Método dos Elementos de Contorno (MEC); este, porém, difere dos demais, pois é necessária apenas a discretização do contorno, (daí vem o nome do método). Esta diferença do MEC em relação aos demais lhe confere muitas vantagens. Os problemas que outros métodos enfrentam com relação à variação ou irregularidade das fronteiras, são particularmente bem resolvidos com o MEC.

Nos primórdios dos estudos da aplicação do MEC nos problemas difusivos advectivos, os mais notáveis obstáculos se deviam à obtenção de uma solução fundamental correlata e certas características dos operadores diferenciais da equação de governo, que impediam a formulação do modelo matemático na forma inversa, típica do método.

O desenvolvimento de uma formulação consistente em Elementos de Contorno para os problemas difusivos-convectivos estacionários surgiu somente no início da década de 70, quando foi gerado um modelo matemático baseado na solução fundamental de um problema difusivo-convectivo similar, com fonte concentrada (POLYANIN e NAZAIKINSKII, 2002). Esta formulação, usualmente denominada de clássica, é matematicamente elegante e direcionada para a solução dos problemas difusivo-advectivos, mas é computacionalmente elaboradas e não possui a generalidade desejada, pois não resolve adequadamente problemas nos quais os campos de velocidade de transporte é variável.

Mais recentemente, em se tratando dos problemas difusivo-advectivos, sejam estacionários ou transientes, o MEC tem sido aplicado através da formulação denominada de Dupla Reciprocidade (MECDR) e suas variantes. O MECDR tornou possível a simulação mais simples de casos transientes, problemas de valor característico, resposta dinâmica e aqueles caracterizados por fontes ou ações de domínio que, de outro modo, eram solucionados de modo custoso e relativamente complexo.

Mais recentemente, foi desenvolvido o MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta) como uma alternativa ao MECDR. Ambos os métodos se

destacam pelo tratamento que se dá ao termo integral referente às ações de domínio, usando funções de base radial. Apesar das semelhanças entre ambos, a proposta do MECID torna-o mais simples e preciso. Essas vantagens já foram comprovadas por (CRUZ, 2012) onde o método foi aplicado em problemas governados pela equação de Poisson, por (SOUZA, 2013) para os mesmos tipos de problemas, porém fazendo-se uso de funções de base radial de suporte compacto e também por (BARCELOS, 2014) para problemas de Helmholtz. Em todos os casos, os resultados foram bastante satisfatórios.

2 OBJETIVO

Devido ao bom desempenho do MECID em problemas de grande interesse e sabida dificuldade em Engenharia, nada mais coerente do que desenvolvê-lo e aplicá-lo a novos problemas, de crescente complexidade e importância tecnológica, a fim de verificar seu desempenho e, em caso positivo, consagrá-lo como uma ferramenta numérica potente e versátil para solução de problemas de Engenharia.

Tendo em vista os testes anteriores já realizados e seguindo pela escala natural de complexidade, tomando a Equação de Campo Escalar Generalizada como referência, após os problemas de Poisson e Helmholtz, chega-se aos problemas difusivo-advectivos. Portanto, este trabalho tem como objetivo verificar a aplicabilidade e a precisão do MECID na resolução de problemas cujos processos são descritos por meio do fenômeno da difusão-advvecção.

3 EQUAÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

3.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

De acordo com (INCROPERA e DE WITT, 2003) para determinar a distribuição de temperatura e, conseqüentemente, a transferência de calor em um fluido em movimento, devem ser considerados os efeitos do movimento do fluido (advecção), juntamente com os efeitos da condução. Para tanto, deve-se valer da conservação de energia aplicada a um volume de controle diferencial no fluido.

Como resultado, se obtém a equação diferencial que fornece a base para descrever a distribuição de temperatura. Contudo, para aplicação desta equação, é necessário que o campo de velocidades seja conhecido. Essa grandeza, por sua vez, será determinada pela resolução das equações diferenciais deduzidas aplicando-se a conservação de massa e a segunda lei de Newton do movimento a um volume de controle diferencial. Neste trabalho a implementação numérica será apenas para o cálculo da temperatura considerando a velocidade como uma variável prescrita. Contudo, a dedução da equação diferencial que descreve o comportamento da velocidade será demonstrada.

Para a dedução que se segue, será considerado o escoamento de um fluido viscoso no qual ocorre transferência de calor e de massa ao mesmo tempo. Serão deduzidas equações diferenciais que possam ser utilizadas para prever os campos de velocidade e temperatura no interior do fluido, e isso será feito aplicando a segunda lei de Newton do movimento, a conservação de massa e energia aplicada a um volume de controle diferencial. A fim de simplificar o desenvolvimento, será considerado um escoamento bidimensional estacionário nas direções x e y de um sistema de coordenadas

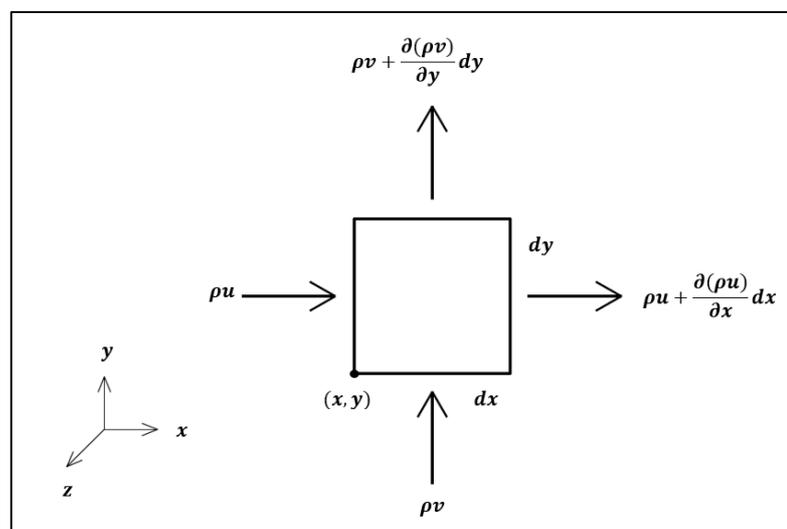
cartesianas. Entretanto, uma unidade de profundidade deve ser estabelecida, fornecendo assim um volume de controle dado por: $(dx \cdot dy \cdot 1)$.

3.2 CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para um escoamento estacionário, a taxa líquida na qual a massa entra em um volume de controle deve ser igual a zero, ou seja, a quantidade de massa que entra tem a mesma magnitude da quantidade que sai. A massa entra e sai do volume de controle exclusivamente através do movimento do fluido conforme mostrado na Figura 1. O transporte decorrido deste movimento é frequentemente denominado de advecção. Posicionando-se um vértice do volume de controle em (x,y) , a taxa na qual a massa entra no volume de controle através da superfície perpendicular a x é representada por $(\rho u)dy$, onde ρ é a massa específica e u é o componente em x da velocidade média da massa. O volume de controle apresenta profundidade unitária na direção z . Uma vez que ρ e u podem variar com x , a taxa na qual a massa deixa a superfície em $x + dx$ é representada por uma expansão da série de Taylor da forma:

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy \quad (3.1)$$

Figura 1- Volume de controle diferencial $(dx \cdot dy \cdot 1)$ para a conservação de massa em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.



Fonte - Produção do próprio autor

Semelhantemente para a direção y, a exigência da conservação de massa se torna:

$$(\rho u)dy + (\rho v)dx - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx = 0 \quad (3.2)$$

Cancelando os termos e dividindo por $dx dy$, obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

A equação (3.3), equação da continuidade, é uma expressão geral da determinação da conservação de massa global, e deve ser satisfeita em todos os pontos do fluido. Se o fluido for incompressível, a massa específica ρ é uma constante, e a equação da continuidade se reduz a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

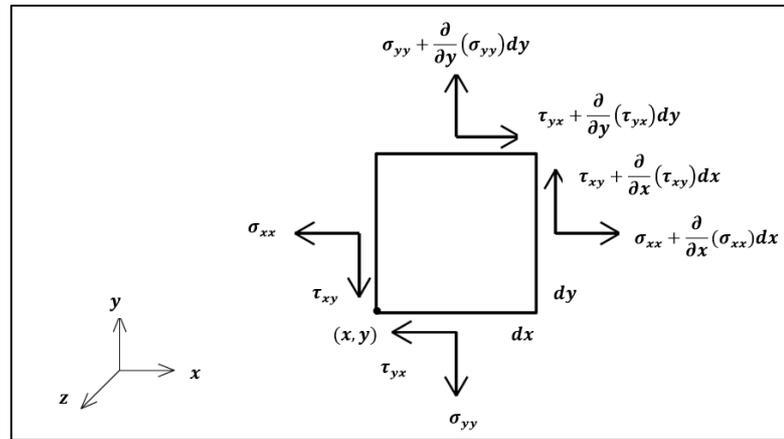
3.3 SEGUNDA LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO

Para um volume de controle diferencial no fluido, a segunda lei de Newton determina que a soma de todas as forças atuando no volume de controle deve ser igual à taxa líquida na qual o momento deixa o volume de controle.

São dois os tipos de força diferentes que atuam no fluido a saber: força de corpo, que são proporcionais ao volume, e forças de superfície, que são proporcionais à área.

As forças de corpo que podem contribuir para a força total, serão representadas por X e Y, podendo estarem relacionadas com os campos gravitacionais, centrífugos, magnéticos e elétricos. As forças de superfície F são devidas à pressão estática do fluido, assim como às tensões viscosas. Em um ponto qualquer do fluido, a tensão viscosa pode ser resolvida em duas componentes perpendiculares, que incluem a tensão normal σ_{ii} e a tensão cisalhante τ_{ij} conforme a Figura 2.

Figura 2 - Tensões normal e cisalhante para um volume de controle direcional (dx.dy.1) em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.



Fonte - Produção do próprio autor

As tensões normais viscosas submetem o fluido a tensões de tração. A pressão estática, por sua vez, se origina de uma força externa atuando no fluido no volume de controle e é portanto, uma tensão de compressão.

A força associada é entre os elementos adjacentes do fluido e deve sua existência ao movimento natural do fluido e da viscosidade. Sabe-se, portanto, que as forças de superfície da Figura 2 agem no fluido no interior do volume de controle e são atribuídas à sua interação com o fluido vizinho. Caso a velocidade ou o gradiente de velocidade do fluido se tornem nulas, essas tensões iriam desaparecer. A pressão estática, porém, não desaparece nessas condições.

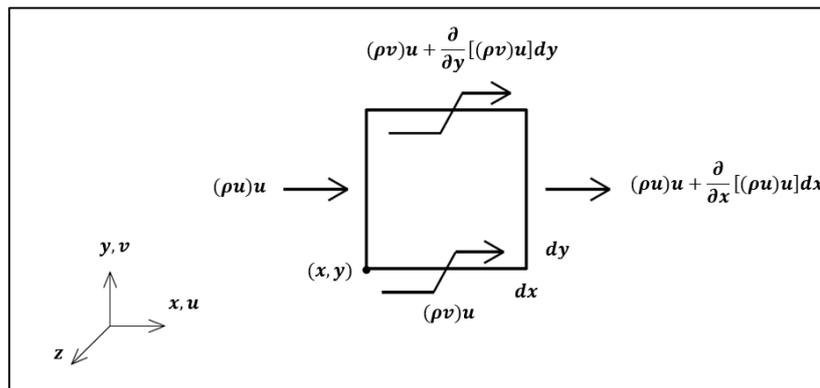
Cada uma das tensões pode variar continuamente em cada uma das direções coordenadas. Utilizando a expansão da série de Taylor para as tensões, a força líquida de superfície para cada uma das duas direções pode ser apresentada como:

$$F_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dx dy \quad (3.5)$$

$$F_{s,y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.6)$$

Os fluxos de momento do fluido para o volume de controle também devem ser avaliados para que a segunda lei de Newton possa ser aplicada. Na direção x, os fluxos relevantes são conforme mostrados na Figura 3.

Figura 3 - Fluxos de momento para um volume de controle diferencial ($dx \cdot dy \cdot 1$) em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso.



Fonte - Produção do próprio autor

O escoamento de massa em cada uma das duas direções contribui para o fluxo total do momento na direção x. O fluxo de massa através da superfície x (no plano y-z) é ρu , conseqüentemente, o fluxo de momento correspondente é $(\rho u)u$. Igualmente, o escoamento de massa através da superfície y faz com que o fluxo de momento x (no plano x-z) é $(\rho v)u$. Esses fluxos podem variar em cada uma das direções coordenadas e a taxa líquida na qual o momento x deixa o volume de controle é:

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x} dx (dy) + \frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y} dy (dx) \quad (3.7)$$

Equacionado a taxa de variação no momento x do fluido para a soma das forças na direção x por meio das equações (3.5) e (3.7), obtém-se então:

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + X \quad (3.8)$$

Expandindo-se as derivadas do lado esquerdo da equação (3.8) e posteriormente substituindo-a na equação de continuidade (3.3), obtém-se para as direções x e y respectivamente:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial(\sigma_{xx} - p)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X \quad (3.9)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial(\sigma_{yy} - p)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \quad (3.10)$$

O lado esquerdo das equações (3.9) e (3.10) representam a taxa líquida de fluxo de momento de um volume de controle. Os termos do lado direito estão relacionados com as forças viscosas líquidas, de pressão e as forças de corpo. Para qualquer ponto do fluido essas equações devem ser aplicáveis, e juntamente com a equação (3.3) elas podem ser resolvidas para o campo de velocidade.

Além da dedução anterior, também é necessário relacionar as tensões viscosas a outras variáveis de escoamento. Essas tensões são associadas com a deformação do fluido e dependem da viscosidade e dos gradientes de velocidade do fluido.

Em um fluido newtoniano (fluido em que a tensão cisalhante é linearmente proporcional à taxa de deformação angular) as tensões são proporcionais aos gradientes de velocidade, relacionadas pela constante de proporcionalidade que é a viscosidade do fluido. Logo, a relação entre as tensões viscosas com a deformação do fluido é dada por:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

Onde μ é a viscosidade do fluido. Logo, substituindo as equações (3.11) a (3.13) nas equações (3.9) e (3.10), as equações de momento x e y:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + X \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + Y \end{aligned} \quad (3.15)$$

As condições em um escoamento viscoso bidimensional estão representadas nas equações (3.14) e (3.15), e o campo de velocidade correspondente pode ser determinado pela resolução das mesmas.

Para um fluido incompressível de viscosidade constante as equações (3.14) e (3.15) podem ser simplificadas. Rearrumando-se o lado direito de cada expressão e substituindo na equação (3.3) as equações de momento x e y se tornam:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + X \quad (3.16)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Y \quad (3.17)$$

3.4 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

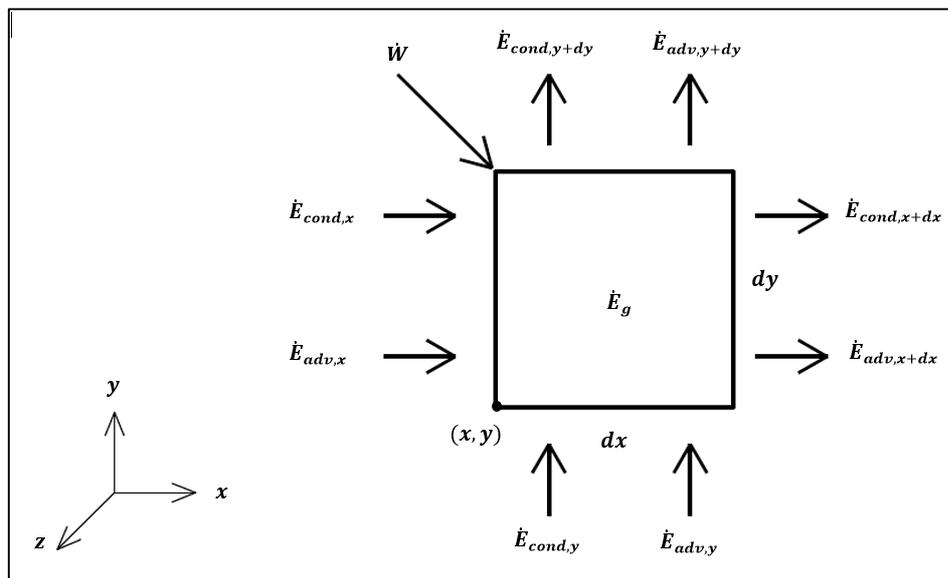
A aplicação da conservação de energia será aplicada a um volume de controle diferencial em um fluido viscoso com transferência de calor conforme Figura 4.

Considerando os efeitos da energia potencial como trabalho feito pelas forças de corpo, a energia por unidade de massa do fluido inclui a energia térmica interna e e a

energia cinética $V^2/2$, onde $V^2 \equiv u^2 + v^2$. Assim sendo, as energias térmica e cinética são advectadas com o movimento de mistura do fluido através das superfícies de controle e para a direção x, em cuja taxa líquida essa energia entra no volume de controle é:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} & \equiv \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dy - \left\{ \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx \right\} dy \quad (3.18) \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

Figura 4 - Volume de controle diferencial ($dx \cdot dy \cdot 1$) para a conservação de energia em um escoamento bidimensional de um fluido viscoso com transferência de calor.



Fonte - Produção do próprio autor.

Por meio de processos moleculares, a energia térmica também é transferida pela superfície de controle. Podem existir duas contribuições: aquela devida à condução e transferência de energia devido à difusão das espécies que compõem o fluido.

Entretanto, é apenas em escoamentos quimicamente reagentes que a difusão de espécie influencia fortemente as condições térmicas. Desta maneira, pode-se desprezar seu efeito. Para o processo de condução, a transferência líquida de energia para o volume de controle é:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} &= -\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dy - \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx dy\end{aligned}\quad (3.19)$$

Onde k é a condutividade térmica do fluido. O trabalho envolvendo tanto as forças de corpo quanto as de superfície também podem ocasionar em transferência de energia para e a partir do fluido no volume de controle. A taxa líquida na qual o trabalho é realizado no fluido pelas forças na direção x pode ser representada como:

$$\dot{W}_{liq} = (Xu) dx dy + \frac{\partial}{\partial x} [(\sigma_{xx} - p)u] dx dy + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial x} dx dy \quad (3.20)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.20) representa o trabalho efetuado pela força de corpo, e os demais termos levam em conta a taxa líquida de trabalho efetuado pelas forças de pressão e viscosas.

Utilizando as equações (3.18) a (3.20), assim como as equações análogas para a direção y , a determinação da conservação de energia pode ser representada como:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ + (Xu + Yv) - \frac{\partial}{\partial x} (pu) - \frac{\partial}{\partial y} (pv) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}u - \tau_{xy}v) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}u - \sigma_{yy}v) + \dot{q} = 0\end{aligned}\quad (3.21)$$

Onde \dot{q} é a taxa na qual a energia térmica é gerada por unidade de volume. Essa expressão fornece uma forma geral da determinação da conservação de energia para o escoamento de um fluido viscoso com transferência de calor.

A equação (3.21) é pouco utilizada na resolução de problemas de transferência de calor pelo fato de representar a conservação de energia cinética e térmica interna. Por isso, uma forma mais prática, que é denominada equação da energia térmica, é obtida multiplicando-se as equações (3.9) e (3.10) por u e v , respectivamente, e subtraindo-se os resultados da equação (3.21). Assim, após considerável manipulação matemática, obtém-se:

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (3.22)$$

Onde o termo $p(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$ representa uma conversão reversível entre o trabalho mecânico e a energia térmica, e $\mu \Phi$ a dissipação viscosa, que é definida como:

$$\mu \Phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (3.23)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.23) é oriunda da tensão cisalhante viscosa, e os demais termos surgem da tensão normal viscosa. Assim, todos os termos levam em conta a taxa na qual o trabalho mecânico é irreversivelmente convertido em energia térmica devido aos efeitos viscosos no fluido.

Se o fluido for incompressível, as equações (3.22) e (3.23) podem ser simplificadas substituindo-se a equação (3.3). Também, com $de = c_v dT$ e $c_v = c_p$ para um fluido incompressível onde de é energia térmica interna por unidade de massa do fluido, c_v e c_p são calores específicos do fluido a volume e pressão constante respectivamente. A equação da energia térmica pode então ser representada como:

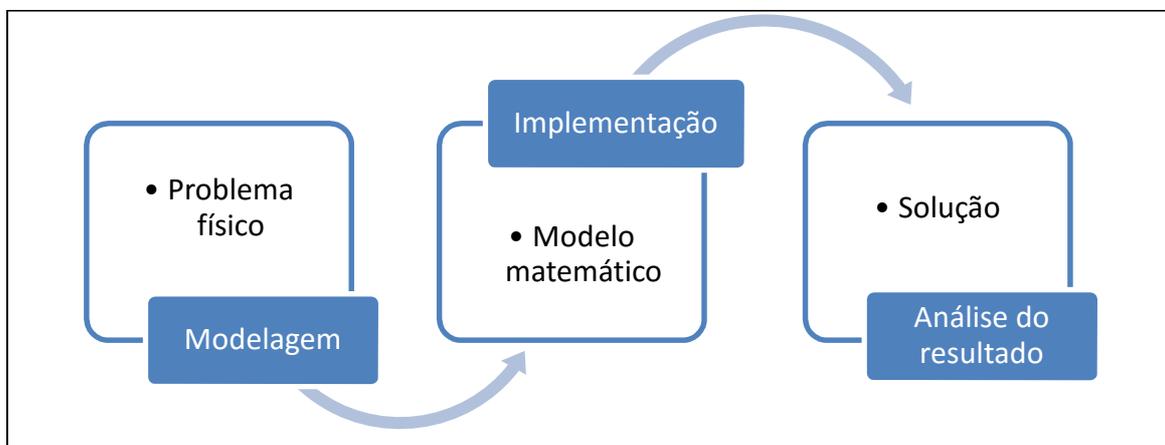
$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (3.24)$$

4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 DISCUSSÕES PRELIMINARES

Numa visão mais resumida, os métodos numéricos são basicamente compostos pelas etapas de modelagem do problema físico, da implementação do modelo matemático relativo ao método escolhido e da análise do resultado onde se verifica a coerência dos resultados com o problema proposto bem como a precisão dos mesmos, conforme mostra a Figura 5.

Figura 5 - Fluxograma da modelagem de um problema por métodos numéricos.



Fonte - Produção do próprio autor

A fase de implementação computacional consiste do processamento numérico propriamente dito. A equação ou conjunto de equações, já discretizadas, é organizada segundo uma estrutura matricial característica do método utilizado, particularmente adequada às operações comandadas pela programação computacional. Em seguida vem a solução e a análise dos valores obtidos.

Conforme já exposto, o MEC é classificado dentro do grupo de métodos numéricos que formam a classe das denominadas técnicas de contorno. Tal classe abrange procedimentos simples, como os estabelecimentos de funções solução, obedientes à equação diferencial que representa o fenômeno físico, mas com coeficientes a determinar de acordo com as condições prescritas no contorno do domínio definido. Entretanto, o MEC compreende uma formulação integral, que faz uso das ferramentas básicas do cálculo, tais como o Teorema da Divergência, e usa uma poderosa função auxiliar na formulação integral com propriedades especiais, que além de ser solução de um problema correlato, é empregada para expressar o problema em termos de variáveis de contorno.

A discretização numérica do MEC ocorre num ambiente de dimensões espaciais reduzidas. Por exemplo, em problemas tridimensionais, a discretização se dá apenas na superfície de contorno. Assim, trabalha-se com sistemas lineares menores e mais eficientes, em termos computacionais. Esse efeito da redução dimensional do problema é mais visível quando o domínio é aberto. Em métodos de domínio (MEF e

MDF), os domínios do tipo abertos precisam ser truncados e aproximados, diferentemente do que ocorre no método de contorno (MEC).

De acordo com Katsikadelis (2002) grande parte do desenvolvimento do MEC se deu quando o MEF já havia se consagrado como ferramenta numérica de solução de problemas da Engenharia. Mesmo em meio a grande aceitação e difusão do MEF o MEC apresentou particularidades sobremodo relevantes de maneira a obter expressiva atenção dos pesquisadores. Tais particularidades conferiu-lhe vantagens em relação ao MEF conforme abaixo:

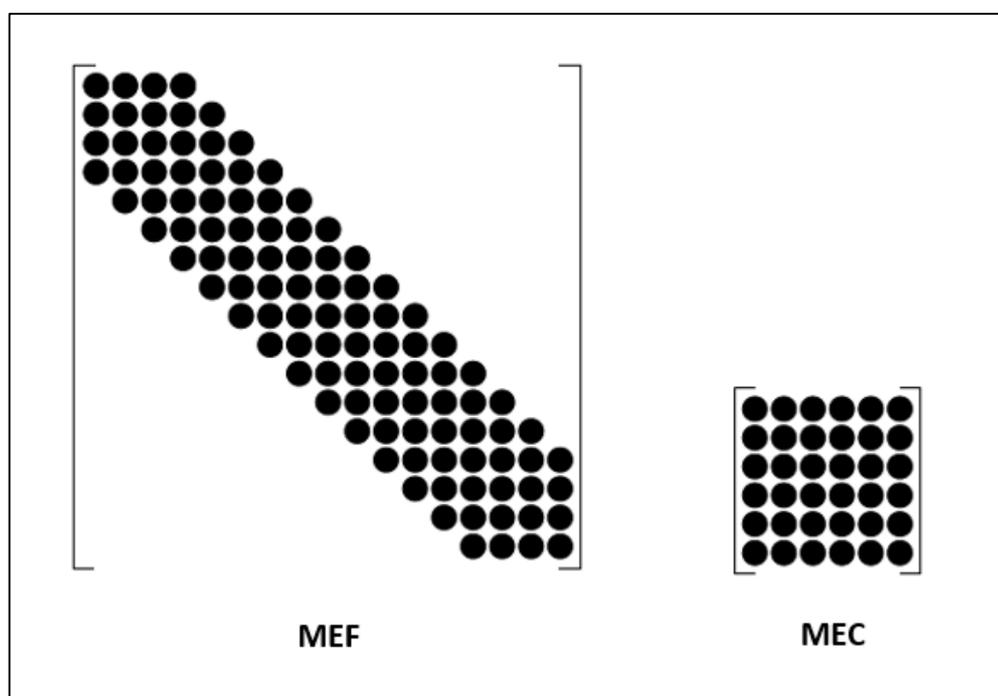
- (a) A discretização ocorre somente no contorno do domínio, tornando a modelagem numérica mais simples, sobretudo, por reduzir a quantidade de incógnitas em uma dimensão.
- (b) Para domínios infinitos, o problema é formulado simplesmente como um exterior. Programas desenvolvidos para domínios finitos podem ser usados com algumas poucas modificações. Isto é impossível para o MEF.
- (c) É particularmente efetivo para o cálculo de derivadas como fluxos, tensões e etc.
- (d) Permite o cálculo de soluções e suas derivadas em qualquer ponto do domínio do problema e a qualquer instante de tempo.
- (e) Pode ser implantado em problemas de domínio com geometrias bastante peculiares como trincas e, sobretudo, em casos em que a fronteira é variável.

Contudo, o MEC também apresenta algumas desvantagens, sendo que algumas delas já vem sendo superadas com o aprimoramento do método:

- (a) Problemas com geometrias esbeltas.
- (b) Complexidade das soluções fundamentais. Em princípio, o método não poderia ser aplicado em problemas em que a solução fundamental não é conhecida ou impossível de ser determinada. No entanto, o uso de formulações do MEC que usam funções radiais, como a Dupla Reciprocidade e a MECID resolvem este problema satisfatoriamente.
- (c) As matrizes representativas do sistema de equações originado da discretização são cheias e não são simétricas. Isto significa um tempo de processamento maior

no caso de aplicações que exijam muitos pontos de discretização, o que é uma séria desvantagem se comparado ao MEF. Este último gera matrizes com simetria, bandeamento e assim diagonalmente dominantes, vide Figura 6. Esta desvantagem não é significativa em problemas com poucos graus de liberdade, mas é expressiva em aplicações que envolvem bilhões de graus de liberdade.

Figura 6 - Comparação entre as matrizes dos coeficientes do MEF e do MEC



Fonte - Produção do próprio autor

Nos últimos anos diversas pesquisas têm sido feitas a fim de superar tais desvantagens. Desta maneira, incentivado pelas vantagens citadas, o MEC tem se tornado cada vez mais numa poderosa ferramenta de análise de problemas de Engenharia e numa excelente alternativa aos métodos de domínio.

4.2 EQUACIONAMENTO BÁSICO

É imprescindível para a resolução de qualquer problema físico, que se tenha uma boa caracterização matemática dos fenômenos envolvidos, independentemente do método utilizado. Daí a dedução da Equação Diferencial de Governo.

Denomina-se um problema matematicamente bem posto, aquele que além da Equação de Governo ser conhecida, apresenta condições de contorno compatíveis e conhecidas em cada ponto da fronteira, resultando assim na particularização do problema e indução a obtenção de uma solução específica.

As condições de fronteira ou de contorno para problemas escalares se classificam basicamente em três categorias diferentes.

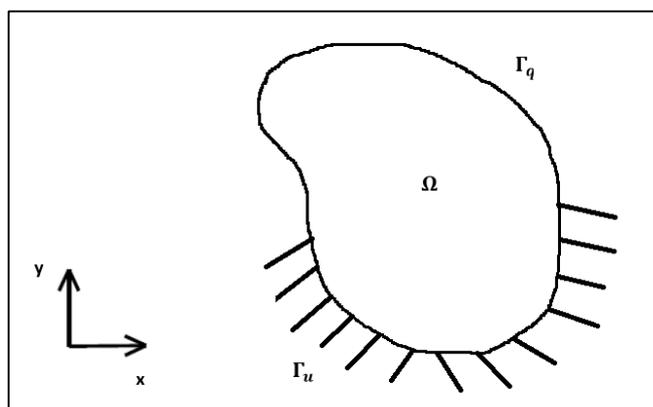
A primeira delas é denominada de condição essencial ou de Dirichlet, e se refere à variável básica do problema ou potencial, como, por exemplo, a temperatura.

Outra condição de contorno é conhecida como natural ou Neumann, que se refere à derivada normal da variável básica como, por exemplo, o fluxo térmico.

Por fim, existem as variáveis mistas ou de Robin, presentes nos problemas térmicos onde uma condição de advecção é prescrita.

Os contornos onde tais condições são identificadas, são mostradas conforme a Figura 7. Nela se apresenta um domínio qualquer bidimensional identificado por Ω . Nas partes do contorno onde as condições prescritas são essenciais a identificação é feita por Γ_u , e as partes onde as condições prescritas são naturais são identificadas por Γ_q .

Figura 7- Domínio bidimensional Ω delimitado por um contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$.



Fonte - Produção do próprio autor

O domínio Ω mostrado na Figura 7 pode ser a representação geométrica de um corpo, um sistema ou volume de controle de um problema de campo escalar que possua uma equação diferencial modeladora qualquer. Neste trabalho, tal equação será a equação de difusão e advecção onde todo o desenvolvimento do método será demonstrado. Esta equação (3.24), foi repetida aqui para uma melhor elucidação.

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q} \quad (4.1)$$

Os termos relativos à dissipação viscosa e à geração de calor que são o terceiro e quarto termos do lado direito da equação (3.24) não serão abordados neste trabalho, pois, caso contrário, a complexidade do problema aumentaria substancialmente. Para uma maior simplicidade, o produto ρc_p será considerado como sendo de valor unitário, sem que, com isso, o problema perca suas características. Além disso, apenas para manter a tradição usualmente utilizada na literatura, a letra T que representa a temperatura será convenientemente substituída pela letra u representando, desta forma, um potencial qualquer.

Portanto, a equação (3.24) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left(v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

Logo, as condições de contorno são equacionadas da seguinte forma:

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) \text{ em } \Gamma_u(x, y) \quad (4.2)$$

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) \text{ em } \Gamma_u(x, y) \quad (4.3)$$

$$q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}(x, y)}{\partial n} \text{ em } \Gamma_q(x, y) \quad (4.4)$$

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \quad (4.5)$$

Onde n é a normal ao contorno, dirigida para fora do mesmo e o travessão acima do u o caracteriza como uma variável prescrita.

4.3 A FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MEC

A aplicação do MEC tem por característica, transformar equações que estão na forma diferencial em equações integrais na forma Integral Inversa (BREBBIA, 1978), e em seguida estabelecer condições em que o problema dependa apenas das condições de contorno para sua solução.

Para este fim, tanto a integração por partes quanto a regra do produto podem ser utilizadas. Também será aplicado o Teorema da Divergência, com a equação já na sua forma integral, além de funções auxiliares especiais, chamadas de soluções fundamentais, cujos maiores detalhes serão dados mais à frente.

Para um melhor manuseio das técnicas matemáticas pertinentes ao método, a equação (4.1) será escrita na forma indicial:

$$k_{ij}u_{,j} = v_i u_{,i} \quad (4.6)$$

O MEC usa como procedimento tradicional multiplicar a equação (4.6) por uma função auxiliar $u^*(\xi; X)$ conhecida como solução fundamental. Estas funções são assim chamadas por se tratarem da solução analítica de um problema correlato, no qual uma ação concentrada é aplicada num domínio infinito. Assim, u^* é a solução de um domínio infinito da equação (4.7), apresentada a seguir:

$$u^*_{,ij}(\xi; X) + v_i u^*_{,i} = -\Delta(\xi; X) \quad (4.7)$$

Onde Δ é a função delta de Dirac, representando uma carga unitária concentrada agindo no ponto ξ denominado ponto fonte e X são as coordenadas de um ponto qualquer denominado ponto campo. Esta função tende ao infinito em qualquer ponto $X = \xi$ e é igual a zero em qualquer outro lugar. Além disso, existem outras propriedades (BREBBIA e WALKER, 1980). Tais características fazem desta função uma forma elegante de representar cargas concentradas unitárias como forças

quando se está tratando com equações diferenciais. Então, a solução fundamental difusiva-advectiva em duas dimensões é dada por:

$$\mathbf{u}^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi K} e^{-\frac{vr}{2k}} K_0(\mu r) \quad (4.8)$$

Na equação anterior tem-se:

$$\mu = \frac{|v|}{2K} \quad (4.9)$$

Já K_0 é a Função de Bessel modificada de Segundo tipo e ordem zero. A derivada normal da solução fundamental é dada por:

$$\mathbf{q}^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi K} e^{-\frac{vr}{2k}} \left[-\mu K_1(\mu r) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{v_n}{2K} K_0(\mu r) \right] \quad (4.10)$$

Onde K_1 é a função de Bessel modificada de segundo tipo e primeira ordem; v_n é a componente da velocidade na direção normal.

Nas equações anteriores $r(\xi; X)$ é a distância euclidiana entre o ponto ξ de aplicação da carga e o ponto X . Pode-se adiantar que a escolha da solução fundamental como função auxiliar não apenas atende a critérios matemáticos pertinentes à Teoria das Equações Integrais (que exige em toda formulação integral um núcleo composto de uma função base e outra auxiliar - (HILDEBRAND, 1962)), como propicia um melhor desempenho em termos de precisão numérica, pois é uma função assemelhada ou correlata ao problema que se deseja resolver.

No entanto, o uso da solução fundamental e sua derivada conforme mostrado, apesar da elegância e precisão, apresenta problemas por não representar adequadamente problemas em que o campo de velocidades não é constante.

Nesta dissertação é empregada uma formulação alternativa, a MECID, em que a solução fundamental é mais simples e corresponde à solução de um problema correlato aos problemas de Laplace.

4.4 INTERPOLAÇÃO COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Modernamente, o uso de funções de base radial (BUHMANN, 2003) tem tido especial destaque na resolução aproximada dos mais diversos problemas da física, geotécnia, astronáutica, esquadrinamento marítimo, entre outros, por meio de interpolação a partir de dados conhecidos. Via de regra, os dados discretos são obtidos a partir de uma amostragem ou de um experimento. Devido ao êxito dessa proposta, o uso de funções radiais se estendeu à solução de equações diferenciais, particularmente nas formulações sem malha do Método dos Elementos Finitos.

As funções possuem muitas vantagens e por isso seu uso tem crescido enormemente. A simetria radial é das mais importantes propriedades dessa classe de funções; o valor da função aproximante depende tão somente da distância do argumento ao ponto base e quaisquer rotações não influenciam seu resultado. O argumento normalmente é conhecido como ponto campo. Além disso, a norma euclidiana também se caracteriza por estabelecer valores sempre positivos para seus resultados. Contudo, outros fatores podem se tornar igualmente importantes: características de decaimento e suavidade podem ser muito relevantes e, nesse sentido, certas funções podem não ser adequadas a sua interpolação.

Outras funções, não radiais, também podem ser usadas com o mesmo propósito, porém, devido às importantes propriedades presentes somente nas funções radiais, faz com que o uso de tais funções seja desvantajoso.

A aplicação de tais funções no MEC se deu antes mesmo de ser usado no MEF. Isto ocorreu em 1983 com o advento da formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) conforme apresentado por Partridge *et al* (1992). Esta formulação já empregava as funções de base radial para superar as dificuldades matemáticas que se impõem para resolver com simplicidade expressões integrais envolvendo operadores que não são auto-adjuntos. Graças a MECDR foi possível proceder a simulação acessível de casos transientes, problemas de valor característico, resposta dinâmica e aqueles

caracterizados por fontes ou ações de domínio, anteriormente resolvidos de modo custoso e relativamente complexo.

A despeito do bom êxito do MECDR em algumas aplicações, o mesmo apresentou importantes limitações nos casos onde muitos pólos internos são necessários para representar propriedades de domínio como a inércia, por exemplo. Este grande número de pólos resulta em problemas de mau condicionamento matricial e também em imprecisões numéricas no processamento dos esquemas incrementais de avanço no tempo, que comumente exigem matrizes de grande dimensão (BARCELOS, 2014). Desta forma, a fim de superar tais deficiências da MECDR desenvolve-se a técnica denominada MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta) que especificamente neste trabalho, será aplicado para resolver o termo integral referente ao termo advectivo da equação de difusão e advecção (4.1) e, deste modo, permitir a modelagem destes problemas discretizando apenas o contorno. A MECID utiliza um procedimento de aproximação com funções de base radial, relativamente semelhante ao da MECDR, mas é mais simples, geral e eficiente.

Um dos aspectos do MECID que o diferencia fortemente do MECDR é o fato de não haver necessidade da construção de duas matrizes auxiliares multiplicando as matrizes H e G , pois aproxima diretamente o núcleo completo da integral, à semelhança do que é feito num processo de interpolação, fazendo apenas o uso de uma função primitiva. Este fato garante ao MECID uma vantagem, visto que estas matrizes introduzem termos aproximados o que diminui a precisão do método. Apenas a transformação da integral de domínio numa integral de contorno torna a MECID diferente de uma simples interpolação. Assim, uma ampla gama de diferentes funções radiais pode ser utilizada sem problemas de instabilidade, conforme ocorre comumente com a MECDR.

Com o uso da interpolação no MECID é possível construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de informações prescritas. Por meio da interpolação, é possível obter uma função que represente, de maneira aproximada, os valores nos demais pontos do domínio.

Por definição, os pontos base são pontos pertencentes ao domínio Ω , nos quais se localizam os centros das Funções de Base Radial, já os pontos campo são pontos do

domínio onde se situam valores conhecidos ou a partir dos quais se deseja realizar uma aproximação. No caso do MEC, por exemplo, são os pontos nodais de contorno. Seguindo o raciocínio de (CRUZ, 2012) o desenvolvimento matemático da interpolação se dá quando uma vez conhecidos os valores de dados esparsos situados nos pontos bases X^j e de valores de uma dada função radial $F(X^j; X)$, é procurado uma função de aproximação $S(X)$ para a função F . Os dados que geram a aproximação S são obtidos de $F(X^j; X)$. Em alguns casos é considerado que os valores da função F são valores explícitos de uma função $F(k)$ conhecida nesses pontos, mas cuja função como um todo é desconhecida, ou não avaliável, em toda a extensão do domínio. Em outros, como no problema em que esta dissertação se ocupa, uma função incógnita é interpolada com base em valores de contorno.

Os aproximantes S são expressos como combinações lineares finitas de funções de base radial, e tais bases radiais são dadas em termos da distância euclidiana r entre os pontos base j considerados. As funções de aproximação S , resultados da aplicação das funções de interpolação radial, possuem a forma representada na seguinte equação.

$$S(X) = \sum_{j=1}^N \alpha^j F(X^j; X) \quad (4.11)$$

Onde:

- X é o ponto campo;
- N é o número de pontos bases;
- r é a distância euclidiana entre X e os pontos base X^j ;
- F é a função radial escolhida (ex: $F(r) = r$ e $F(r) = e^{-r}$).

4.5 O PROCEDIMENTO MECID

Conforme já mencionado, a técnica MECID é uma formulação do Método dos Elementos de Contorno que usa um procedimento de interpolação para resolver diretamente integrais de domínio através do uso de funções de base radial.

Na presente dissertação, a integral de domínio a ser interpolada é a integral referente ao termo advectivo.

O ponto de partida é o mesmo seguido na formulação clássica do MEC. Toma-se a equação diferencial de governo, multiplicam-se ambos os lados por uma função auxiliar e integra-se em todo o domínio, que pode ser um sistema ou um volume de controle.

Desse modo, multiplicando ambos os lados da equação de governo por u^* e integrando-a, tem-se a forma Integral forte:

$$\int_{\Omega} k u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} v_i u_{,i} u^* d\Omega \quad (4.12)$$

Na MECID se emprega a solução fundamental referente apenas ao problema difusivo (lado esquerdo). Isto significa uma aproximação que resulta em relativa perda de precisão. Todavia, os ganhos operacionais costumam compensar a redução na acuidade dos resultados.

Assim, na MECID a abordagem da integral do lado esquerdo da equação (4.12), referente ao termo difusivo, é similar ao que se faz usualmente aos problemas governados pela equação de Laplace.

Desse modo, na MECID se mantém o procedimento tradicional dos problemas governados pela equação de Laplace. A interpolação atua de modo específico, particularmente no termo advectivo, o qual pode ser deduzido separadamente do termo difusivo.

4.5.1 Tratamento do Termo Difusivo

Assim sendo, pode-se fazer:

$$\int_{\Omega} k u_{,ii} u^* d\Omega = TD \quad (4.13)$$

Na equação anterior, u^* é a solução de um domínio infinito da equação (4.14), apresentada a seguir, que se refere a um problema de Poisson:

$$\mathbf{u}^*_{,ii}(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (4.14)$$

Para problemas bidimensionais, a expressão dessa função $u^*(\xi; X)$ e de sua derivada normal $q^*(\xi; X)$ denominada fluxo fundamental é dada por:

$$u^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; X) \quad (4.15)$$

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.16)$$

Aplicando a integração por partes na equação (4.13) obtém-se a forma integral fraca dada pela equação (4.17):

$$\int_{\Omega} \mathbf{k}(\mathbf{u}_{,i} \mathbf{u}^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{k} \mathbf{u}_{,i} \mathbf{u}^*_{,i} d\Omega = \mathbf{T}D \quad (4.17)$$

Fazendo uso da regra do produto aplicando-a no segundo termo da equação (4.17) tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{k}(\mathbf{u}_{,i} \mathbf{u}^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{k}(\mathbf{u} \mathbf{u}^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{k} \mathbf{u} \mathbf{u}^*_{,ii} d\Omega = \mathbf{T}D \quad (4.18)$$

Observa-se que um dos resultados alcançados neste procedimento clássico do MEC foi a transferência da derivada dupla da variável básica do problema u para a função auxiliar u^* , a solução fundamental. Estes artifícios matemáticos garantem, juntamente com outros, o bom desempenho do MEC.

Aplicando o teorema da divergência nos dois primeiros termos da equação (4.18) tem-se:

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{u}\mathbf{u}^*_{,i})_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} k\mathbf{u}\mathbf{u}^*_{,i} n_i d\Gamma \quad (4.19)$$

$$\int_{\Omega} k(\mathbf{u}^*\mathbf{u}_{,i})_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} k\mathbf{u}^*\mathbf{u}_{,i} n_i d\Gamma \quad (4.20)$$

Reescrevendo a equação (4.18) já substituindo as integrais de domínio pelas integrais de contorno tem-se:

$$\int_{\Gamma} k\mathbf{u}^*\mathbf{u}_{,i} n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} k\mathbf{u}\mathbf{u}^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} k\mathbf{u}\mathbf{u}^*_{,ii} = TD \quad (4.21)$$

Ainda resta a última integral de domínio, que será resolvida fazendo-se uso da equação (4.14), pois a integral da função delta de Dirac multiplicada por qualquer outra função é igual ao valor da última no ponto ξ , deste que este ponto esteja no interior do domínio. Logo:

$$\int_{\Omega} k\mathbf{u}\Delta(\xi; X) d\Omega = \mathbf{u}(\xi)k \quad (4.22)$$

Substituindo as equações (4.22) e (4.4) na equação (4.21) é obtida a forma inversa do termo esquerdo da equação (4.6) (BREBBIA e WALKER, 1980) conforme a seguir:

$$\int_{\Gamma} kq\mathbf{u}^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} k\mathbf{u}q^*(\xi; X) d\Gamma - C(\xi)\mathbf{u}(\xi) = TD \quad (4.23)$$

Necessita-se lembrar que a equação (4.23) se aplica a uma carga concentrada no ponto ξ e, conseqüentemente, os valores de u^* e q^* são aqueles correspondentes a aquela posição particular da carga; portanto, para outro ponto ξ será obtida uma nova equação integral.

O termo C na equação (4.23) é uma função que depende da localização do ponto ξ em relação ao domínio Ω e permite uma expressão mais geral em que o ponto fonte ξ se situa não apenas no interior do domínio, mas também fora dele ou então no seu contorno (BREBBIA *et al*, 1984). Este termo obedece às seguintes sentenças:

$$C(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in \Omega(X) \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \Gamma(X) \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega(X) \end{cases} \quad (4.24)$$

Deve-se ressaltar que o valor de $C(\xi)$ para pontos pertencentes a $\Gamma(X)$ só terá o valor indicado no caso de contornos suaves. Nos casos onde o contorno possui ângulos acentuados, a função C possui valor de acordo com a seguinte igualdade:

$$C(\xi) = \frac{\beta}{2\pi} \quad (4.25)$$

Onde β é o ângulo entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso, no contorno não suave.

4.5.2 Tratamento do Termo Advectivo

Considere-se agora o lado direito da equação (4.12), chamado termo advectivo (TA):

$$\int_{\Omega} v_i u_{,i} u^* d\Omega = TA \quad (4.26)$$

É possível aplicar a regra do produto no núcleo da integral anterior:

$$v_i u_{,i} = (v_i u)_{,i} - (v_{i,i} u) \quad (4.27)$$

No entanto, o segundo termo do lado direito da igualdade expressa pela equação (4.27) é nula, devido a condição de incompressibilidade do escoamento. Assim, o termo advectivo fica sendo dado por:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_i \mathbf{u})_{,i} \mathbf{u}^* d\Omega = TA \quad (4.28)$$

Assim sendo, pode-se fazer:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_i \mathbf{u})_{,i} \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_i \mathbf{u} \mathbf{u}^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}_i \mathbf{u} \mathbf{u}^*_{,i} d\Omega = TA \quad (4.29)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência no primeiro termo do lado direito da Equação (4.29):

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{v}_i \mathbf{u} \mathbf{u}^*) \mathbf{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{v}_i \mathbf{u} \mathbf{u}^*_{,i} d\Omega = TA \quad (4.30)$$

A integral de contorno na equação (4.30) é calculada facilmente, seguindo o mesmo padrão das integrais referentes ao termo difusivo. Isto será visto em item próximo, quando se tratar da etapa de discretização. Já o tratamento da integral de domínio é aproximado, envolvendo o uso de funções radiais no escopo da formulação MECID. O MECID usa a técnica de interpolação com funções radiais em virtude de sua praticidade e eficiência na aproximação de funções desconhecidas. Contudo, além disso, há possibilidade de escrever o núcleo da integral em termos de funções de interpolação primitivas, que permitem transformar a integral de domínio numa integral de contorno.

A primeira etapa, portanto, consiste na formulação de uma sentença interpolante primordial que aproxima o núcleo de uma integral de domínio.

Para tanto, começa-se por multiplicá-la por uma solução fundamental conforme já demonstrado na equação (4.30) e por aproximá-la por uma função interpolante conforme a seguir:

$$v_i(X)u(X)u_{,i}^*(\xi; X^j) \approx F^j(X^j; X) \xi \alpha^j \quad (3.26) \quad (4.31)$$

Onde:

- $u_{,i}^*(\xi; X^j)$ é a derivada direcional, segundo as direções coordenadas, da solução fundamental do problema de Laplace, dada por:

$$u_{,i}^*(\xi; X^j) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} r_{,i} = -\frac{r_i}{2\pi r^2(\xi; X)} \quad (4.32)$$

- F^j é a função interpolante de base radial;
- X^j são os pontos de interpolação ou pontos base do problema;
- Os pontos X , denominados pontos campo, são pontos situados em qualquer parte do domínio. Posteriormente, estes pontos gerarão os pontos nodais de contorno, em que o potencial $u(x)$ da equação (4.6) será calculado.
- $\xi \alpha^j$ são os coeficientes de interpolação a serem determinados.

Em problemas resolvidos pela MECDR, os pontos X e os pontos fonte ξ podem ser coincidentes; porém, no MECID, isto não pode ser feito, pois a coincidência entre esses pontos resultaria em singularidade na equação (4.32). Isso ocorre porque, ao contrário das formulações clássicas de contorno, não são feitas integrações no sentido de valor principal, eliminando as singularidades. Na MECID à interpolação precede a integração propriamente dita e, deste modo, a singularidade será inevitável caso ocorra um igual posicionamento dos referidos pontos.

No MECID, com o propósito de evitar a já mencionada singularidade, os pontos campo e os pontos base são posicionados em posições distintas aos pontos ξ sem que isso onere a solução do problema. Logo, os pontos de informação ou campo são posicionados sempre no meio dos elementos de contorno conforme Figura 9, pois neste trabalho são usados elementos lineares.

4.5.3 Procedimento Operacional

Após a integração, os pontos campo são reposicionados coincidentemente com os pontos fonte ξ para que o sistema de equações gerado seja factível de solução.

Por meio de uma solução clássica de um sistema linear, são obtidos os valores de ${}^{\xi}\alpha^j$; para isso, porém, é necessário que a quantidade de pontos base X^j seja igual ao dos pontos de informação X . Por conveniência, os pontos base têm a mesma posição dos pontos campo.

Para cada ponto fonte ξ , a interpolação dada pela equação (4.32) corresponde a uma varredura de todos os pontos base X^j em relação aos pontos X do domínio, ponderada pelos coeficientes ${}^{\xi}\alpha^j$ construindo um sistema linear $N \times N$ conforme a seguir:

$$\begin{cases} v_i(X^1)u(X^1)u_{,i}^*(\xi; X^1) = F^1(X^1; X^1) {}^{\xi}\alpha^1 + \dots + F^n(X^n; X^1) {}^{\xi}\alpha^n \\ v_i(X^2)u(X^2)u_{,i}^*(\xi; X^2) = F^1(X^1; X^2) {}^{\xi}\alpha^1 + \dots + F^n(X^n; X^2) {}^{\xi}\alpha^n \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad = \quad \downarrow \quad \quad \quad + \dots + \quad \quad \quad \downarrow \\ v_i(X^n)u(X^n)u_{,i}^*(\xi; X^n) = F^1(X^1; X^n) {}^{\xi}\alpha^1 + \dots + F^n(X^n; X^n) {}^{\xi}\alpha^n \end{cases} \quad (4.33)$$

Matricialmente, ressaltando-se que é gerado um sistema como o mostrado anteriormente para cada ponto fonte ξ tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_i(X^1)u(X^1)u_{,i}^*(\xi; X^1) \\ \vdots \\ v_i(X^n)u(X^n)u_{,i}^*(\xi; X^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1(X^1; X^1) & \dots & F^n(X^n; X^1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^1(X^1; X^n) & \dots & F^n(X^n; X^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\xi}\alpha^1 \\ \vdots \\ {}^{\xi}\alpha^n \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Em termos mais concisos:

$$[{}^{\xi}P] = [F][{}^{\xi}\alpha] \quad (4.35)$$

O presente estudo é feito em duas dimensões; portanto:

$$\begin{bmatrix} {}^{\xi}P^1 \\ \vdots \\ {}^{\xi}P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(X^1)u(X^1)u_{,1}^*(\xi; X^1) + v_2(X^1)u(X^1)u_{,2}^*(\xi; X^1) \\ \vdots \\ v_1(X^n)u(X^n)u_{,1}^*(\xi^n; X^n) + v_2(X^n)u(X^n)u_{,2}^*(\xi^n; X^n) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Pelo fato da integral de domínio depender da solução fundamental, ou seja, ser dependente do ponto ξ , ocorre que os coeficientes ${}^{\xi}\alpha^j$ calculados são referentes a cada ponto ξ individualmente. Logo, é preciso calculá-los para cada posição do ponto ξ no contorno.

Nos problemas comumente simulados pelo MEC com funções radiais, existem numerosos pontos de contorno e também pontos internos, o que torna essa metodologia de cálculo extremamente custosa, uma vez que se deve resolver um sistema linear para cada ponto fonte, sendo uma desvantagem do método onerando-o significativamente. No entanto, esse custo computacional pode ser reduzido bastante, aproveitando-se das características do sistema matricial.

Por conveniência, escreve-se o sistema dado pela equação (4.34) da forma mostrada a seguir, usando-se uma matriz diagonal, que contém a expressão da derivada direcional da solução fundamental:

$$\begin{bmatrix} {}^{\xi}\mathbf{P}^1 \\ \vdots \\ {}^{\xi}\mathbf{P}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i(X^1)u_{,i}^*(\xi; X^1) & \dots \mathbf{0} \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots \mathbf{0} \dots & v_i(X^n)u_{,i}^*(\xi; X^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(X^1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(X^n) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Em termos mais concisos:

$$[{}^{\xi}\mathbf{P}] = [{}^{\xi}\mathbf{\Lambda}][\mathbf{u}] \quad (4.38)$$

Assim, esse é o primeiro passo para se reduzir o esforço computacional, conforme mostrado a seguir. O procedimento operacional que se segue é um eficiente método de se determinar os coeficientes ${}^{\xi}\alpha^j$. Primeiramente, uma interessante estratégia se inicia no exame da solução do sistema básico, sem a presença da solução fundamental, ou seja, considerando isoladamente o campo de variáveis nodais. Assim a partir da sentença básica de interpolação tem-se:

$$[\mathbf{F}][\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{u}] \quad (4.39)$$

Isolando α :

$$[\alpha] = [F^{-1}][u] \quad (4.40)$$

A matriz F não depende do ponto fonte, podendo ser calculada apenas uma vez. Considerando agora a existência da matriz ${}^{\xi}\Lambda$:

$$[{}^{\xi}\Lambda][F][\alpha] = [{}^{\xi}\Lambda][u] \quad (4.41)$$

Pode-se escrever a equação anterior de modo mais geral, considerando que o coeficiente α é dependente do ponto fonte, ou seja:

$$[{}^{\xi}\Lambda][F][\alpha] = [F][{}^{\xi}\alpha] \quad (4.42)$$

Daí resulta:

$$[F][{}^{\xi}\alpha] = [{}^{\xi}\Lambda][u] \quad (4.43)$$

Logo, o vetor de coeficientes ${}^{\xi}\alpha$ é obtido da seguinte forma:

$$[{}^{\xi}\alpha] = [F]^{-1}[{}^{\xi}\Lambda][F][\alpha] \quad (4.44)$$

Assim, basicamente, basta multiplicar o produto de uma matriz diagonal composta de valores $v_i(X^j)u_{,i}^*(\xi; X^j)$ pela inversa da função interpolante.

Ressalta-se que os potenciais nodais u que apareceram nas equações anteriores (como na equação (4.41), por exemplo) está deslocado da posição usualmente adotada no MEC para evitar a singularidade já mencionada.

4.5.4 Transformação da Integral de Domínio

A principal característica do MECID se encontra nesta etapa do método onde, diferentemente do MECDR, todo o núcleo da integração é interpolado. Contudo, para que não se realize uma integração em todo o domínio (o que poderia ter sido feito

diretamente por meio de células, por exemplo) é preciso encontrar uma primitiva da função de interpolação básica F^j que permita o emprego do Teorema da Divergência e, naturalmente, a representação matemática do problema em termos de integrais de contorno. Essa primitiva precisa ser expressa em termos de Laplaciano. Assim, a MECID se assemelha bastante à MECRD. Portanto o referido procedimento matemático se desenvolve da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \alpha^j \Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}) d\Omega \quad (4.45)$$

Onde $\Psi^j(x)$ é a primitiva da função F^j tal que:

$$\Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}) = F^j(\mathbf{X}) \quad (4.46)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência na equação (4.45) tem-se:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^j F^j(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma \quad (4.47)$$

Dessa forma, o termo não homogêneo que estava em termos de uma integral de domínio, agora é apresentado em termos do contorno. O próximo passo consiste em resolver a integral de contorno da equação (4.47). Para tanto, o método de cálculo numérico adotado é a Quadratura Gaussiana (Pontos de Gauss). Logo, a partir da seguinte equação:

$$\Psi_{,i}^j(\mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) = \eta^j(\mathbf{X}) \quad (4.48)$$

Logo, a equação (4.47) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \xi \alpha^j \eta^j(\mathbf{X}) d\Gamma = \sum_{k=1}^{NPG} \xi \alpha^j \eta^j(\mathbf{X}_k) w(\mathbf{X}_k) \quad (4.49)$$

Onde:

- X_k são os pontos de Gauss (valores tabelados);
- w_k são os pesos de Gauss (valores tabelados) e;
- NPG é o número dos pontos de Gauss considerados.

Este método é relativamente econômico se comparado à outros disponíveis, porém, para que se obtenha resultados satisfatórios é necessário haver precisão na derivada da função de interpolação F^j .

Ressalta-se ainda que, diferentemente da MECDR, não existem duas matrizes interpolantes (Partridge *et al*, 1992), apenas uma. Experiências já realizadas por trabalhos anteriores (Loeffler *et al*, 2015) têm ratificado que o procedimento da MECID, por ser mais assemelhado a uma simples interpolação (a menos da transformação da integral de domínio em integral de contorno) é mais robusto numericamente.

Também deve se destacar que a transformação mostrada neste item em nada altera a metodologia de cálculo do coeficiente α , mostrada anteriormente.

4.5.5 Discretização do Contorno

Após o equacionamento mostrado no item anterior, usando-se a equação (4.23), a equação (4.29) e a equação (4.47) chega-se à equação integral inversa referente à Equação da Difusão-Advecção, escrita então da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & -k[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} (\mathbf{u}(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X))d\Gamma] \\
 & = \int_{\Gamma} (v_i u u^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \xi^j \alpha^j \eta^j(X) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

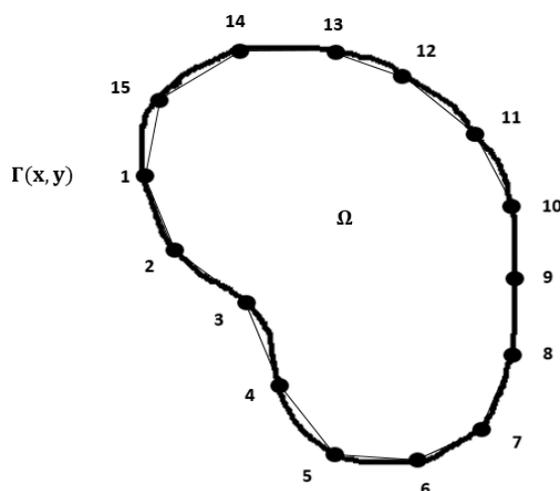
Recordando que $u(X)$ é o potencial escalar que neste trabalho será a temperatura, $q(\xi; X)$ é a sua derivada normal; reciprocamente, $u^*(\xi; X)$ é a solução fundamental

difusiva e $q^*(\xi; X)$ é a sua derivada normal; v_i é a velocidade de um fluido incompressível e $u_{,i}(X)$ é a derivada do potencial.

Para obter o sistema de equações do qual os valores de contorno podem ser calculados numericamente, é necessário que a equação (4.50) seja discretizada. Isto quer dizer que se deve encontrar um número finito de pontos que seja capaz de representar os infinitos pontos do domínio contínuo. Entre estes pontos, está o elemento de contorno propriamente dito que por definição, é o ente geométrico unitário que possui forma e funcionalidade definida por meio dos seus nós geométricos e funcionais. Os nós geométricos são formados pelo conjunto de pontos de localização do elemento que define sua forma geométrica e os funcionais são formados pelo conjunto de pontos pertencentes ao elemento de contorno que possuem valores prescritos dos potenciais e de suas derivadas normais localizados nesses nós.

A discretização é feita com o auxílio das funções de interpolação, que expressam aproximadamente o comportamento das variáveis do problema entre os pontos eleitos para representar os demais. A Figura 8 mostra um exemplo de discretização com elementos lineares aplicada sobre o contorno.

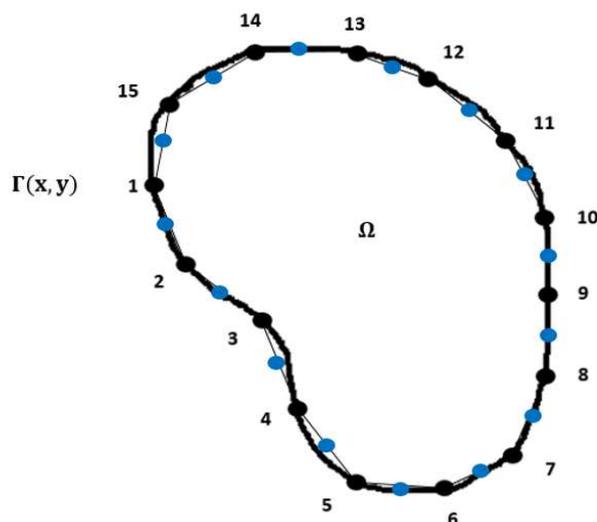
Figura 8 – Contorno discretizado com elementos lineares



Fonte - Produção do próprio autor

A discretização do contorno no tratamento do MEC tradicional é conforme mostrado na Figura 8, no MECID, porém é necessária a inserção de pontos localizados no centro dos elementos de contorno. Estes pontos são os pontos base e serão tratados pormenorizadamente mais adiante. Tais pontos se localizam nesta posição com o objetivo de se evitar singularidades durante o cálculo da integral de domínio do termo não homogêneo da Equação (4.1). Logo, para o MECID, a discretização é representada pela Figura 9, onde os pontos pretos representam os pontos fontes e os pontos azuis os pontos base.

Figura 9 – Discretização do contorno com elementos lineares no MECID



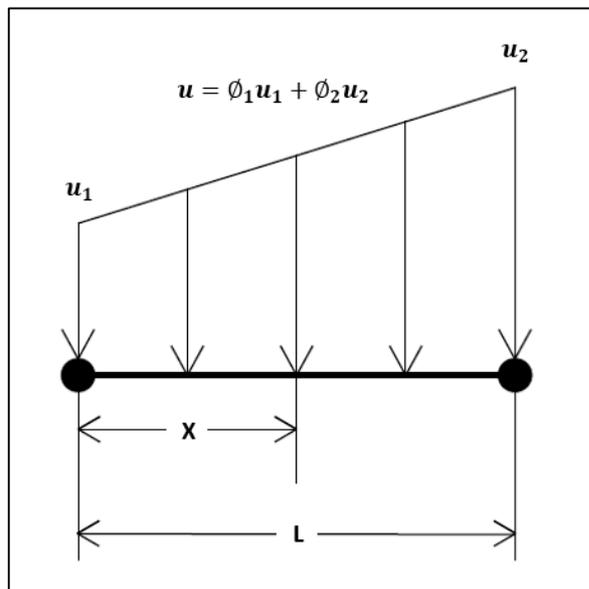
Fonte - Produção do próprio autor

Neste trabalho será utilizado o elemento de contorno linear que têm como característica descrever o comportamento das variáveis básicas (potencial e sua derivada básica) por meio de funções de interpolação lineares conforme a seguir:

$$\phi_1 = 1 - \frac{X}{L} \quad (4.51)$$

$$\phi_2 = \frac{X}{L} \quad (4.52)$$

Figura 10 – Elemento de contorno linear



Fonte - Produção do próprio autor

Portanto, para elementos lineares o contorno é suposto ser dividido em N elementos de contorno Γ_j sendo que j representa cada elemento do contorno. Logo, no caso da Figura 9 $j = 1, 2, 3, \dots, N$ e $N=15$ conforme equação

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{15} \Gamma_j \quad (4.53)$$

Conforme observado na Figura 9 o contínuo é substituído por um número discreto de pontos ou elementos de tal maneira que os resultados não sejam desprovidos de uma precisão aceitável do ponto de vista da Engenharia. Na verdade, existe um embasamento matemático que sustenta essa substituição (BREBBIA, 1978).

O ponto ξ é posicionado em cada um dos pontos nodais funcionais da discretização e em seguida é feita uma varredura entre todos os pontos considerados, realizando um chaveamento entre todos os pontos base com eles mesmos, gerando um sistema matricial a partir de um sistema linear com $N \times N$ dimensões.

Desta forma, a equação (4.50) pode ser escrita na forma discretizada conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\xi)\mathbf{u}^i(\xi) + \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Gamma_k} \phi_i^k \mathbf{q}_i^* d\Gamma \right) \mathbf{u}^k \\
- \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \phi_i^k \mathbf{u}_i^* d\Gamma \right) \mathbf{q}^k = \sum_{k=1}^N v_i^k n_i \left(\int_{\Gamma_k} \phi_i^k \mathbf{u}_i^* d\Gamma \right) \mathbf{u}^k + \xi \alpha^j \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \eta_i^j d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Os três primeiros termos do lado esquerdo, que são os difusivos, vão gerar as tradicionais matrizes H e G; o primeiro termo do lado direito se associa a matriz G, mas vem acompanhada dos valores nodais da componente normal da velocidade neste logo:

$$\sum_{j=1}^N v_i^j n_i u^j \int_{\Gamma_j} \phi_i^j \mathbf{u}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = v_i^j n_i u^j G_{\xi j} \tag{4.55}$$

Discretizando o segundo termo advectivo:

$$\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma = \xi \alpha^1 \int_{\Gamma} \eta^1 d\Gamma + \xi \alpha^2 \int_{\Gamma} \eta^2 d\Gamma + \dots + \xi \alpha^N \int_{\Gamma} \eta^N d\Gamma \tag{4.56}$$

$$\xi \alpha^1 \int_{\Gamma_1} \eta^1 d\Gamma + \xi \alpha^2 \int_{\Gamma_2} \eta^2 d\Gamma + \dots + \xi \alpha^N \int_{\Gamma_N} \eta^N d\Gamma = \xi \alpha^1 N^1 + \xi \alpha^2 N^2 + \dots + \xi \alpha^N N^N \tag{4.57}$$

Escrevendo toda a equação de governo para um dado ponto fonte ξ genérico, tem-se:

$$\begin{aligned}
k[\mathcal{C}(\xi)\mathbf{u}(\xi) + \mathbf{H}_{\xi 1}\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_{\xi 2}\mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{H}_{\xi n}\mathbf{u}_n - \mathbf{G}_{\xi 1}\mathbf{q}_1 - \mathbf{G}_{\xi 2}\mathbf{q}_2 - \dots - \mathbf{G}_{\xi n}\mathbf{q}_n] \\
+ (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_2)^1 \mathbf{G}_{\xi 1} \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_2)^2 \mathbf{G}_{\xi 2} \mathbf{u}_2 + \dots \\
+ (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \mathbf{n}_2)^n \mathbf{G}_{\xi n} \mathbf{u}_n = \xi \alpha^1 N^1 + \xi \alpha^2 N^2 + \dots + \xi \alpha^n N^n
\end{aligned} \tag{4.58}$$

A discretização resulta na seguinte expressão matricial, já considerando a existência de pontos internos interpolantes, cujas submatrizes estão destacadas na expressão a seguir:

$$\begin{aligned}
& k \begin{bmatrix} H_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} G_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ G_{ic} & \mathbf{0}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G'_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ G'_{ic} & G'_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Conforme observado na expressão matricial, os valores nodais referentes ao potencial estão implicitamente contidos no vetor A_ξ , por isso, a etapa seguinte consiste em explicitá-los. Para tanto, primeiramente, verifica-se que para os n pontos fonte ξ tem-se:

$$A_\xi = (N_1 \quad N_2 \dots \quad N_n) \begin{pmatrix} {}^\xi\alpha_1 \\ \vdots \\ {}^\xi\alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Fazendo uso da equação (4.44) repetido aqui por melhor conveniência tem - se:

$$[{}^\xi\alpha] = [F]^{-1} [{}^\xi\Lambda] [F] [\alpha] = [F]^{-1} [{}^\xi\Lambda] [p] \tag{4.44}$$

Porém, desta vez a matriz diagonal ${}^\xi\Lambda$ que multiplica o potencial é expressa da seguinte forma:

$$[{}^\xi\Lambda] = \begin{bmatrix} (v_1(\mathbf{X})\mathbf{u}^*_{,1} + v_2(\mathbf{X})\mathbf{u}^*_{,2})^1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & (v_1(\mathbf{X})\mathbf{u}^*_{,1} + v_2(\mathbf{X})\mathbf{u}^*_{,2})^n \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

Reescrevendo o vetor A_ξ agora já com os valores do potencial explícitos tem-se:

$$\begin{aligned}
& [A_\xi] \\
& = (N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n) \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & \dots & F^{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi \Lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi \Lambda_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \xi \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \end{pmatrix} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

Conforme observado na equação (4.62) foi inserida uma submatriz cuja função é de transferir os valores do potencial calculados nos pontos de informação X para as coordenadas dos pontos fontes ξ . Vale lembrar que este deslocamento foi feito para evitar a singularidade, pois a função auxiliar $u^*(\xi; X)$ é uma função logarítmica, porém a mesma singularidade não ocorre nas funções interpolantes $r^2 \ln(r)$ pois, r^2 é mandatório em relação a $\ln(r)$ por ser de maior grau.

Para o cálculo da submatriz Φ_{ii} primeiramente se determinam os coeficientes α referentes à interpolação, considerando os q pontos fontes internos ξ :

$$\begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \dots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^i \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \dots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^i \quad (4.63)$$

Em seguida, os q pontos internos auxiliares ou pontos interpolantes, são relacionados com os s pontos fontes situados no interior. Logo, substituindo o lado direito da equação (4.63) numa sentença de interpolação que envolve a matriz de F , obtém-se de maneira aproximada os valores do potencial nos pontos internos de informação:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_1^{inf} \\ \dots \\ u_s^{inf} \end{pmatrix}^i & = \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ F^{s1} & \dots & F^{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^i \\
& = \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ F^{s1} & \dots & F^{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \dots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^i \quad (4.64)
\end{aligned}$$

4.5.6 Construção da matriz advectiva

Dando continuidade ao processo de discretização e construção da matriz de advecção gerada pela interpolação com funções radiais e afim de simplificar a representação matricial da equação de governo, a matriz linha N e a inversa da matriz de interpolação F serão transformadas em um vetor linha S, pois as mesmas não se alteram para cada ponto fonte. Assim, cada linha da matriz advectiva, referente a um ponto fonte ξ , interno ou de contorno pode ser gerada como:

$$\begin{aligned}
 & (C_{\xi 1} \quad C_{\xi 2} \quad \dots \quad C_n) \\
 & = (S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_n) \begin{bmatrix} \xi \Lambda_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi \Lambda_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \xi \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{ii} \end{bmatrix} (\mathbf{u}_c) \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

$$k \begin{bmatrix} H_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_c] - k \begin{bmatrix} G_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ G_{ic} & \mathbf{0}_{ii} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_c] + \begin{bmatrix} G'_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ G'_{ic} & G'_{ii} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_c] = \begin{bmatrix} C_{cc} & C_{ci} \\ C_{ic} & C_{ii} \end{bmatrix} [\mathbf{u}_c] \quad (4.66)$$

Conforme exposto por Loeffler *et al* (2016), o sistema mostrado na Eq. (4.66) precisa ser adequadamente operacionalizado, uma vez que envolve simultaneamente tanto valores do potencial quanto de sua derivada normal. Para tanto, é necessário usar novas submatrizes nas quais se destacam os valores nodais de u e q prescritos:

$$k \begin{bmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{u}}] - k \begin{bmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{ic} & G_{q\bar{q}} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{q}}] + \begin{bmatrix} G'_{u\bar{u}} & G'_{u\bar{q}} \\ G'_{ic} & G'_{q\bar{q}} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} C_{u\bar{u}} & C_{u\bar{q}} \\ C_{q\bar{u}} & C_{q\bar{q}} \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{u}}] \quad (4.67)$$

4.5.7 Necessidade de pontos internos interpolantes

A distribuição da função de domínio no interior não é bem aproximada se os pontos de base são localizados apenas no contorno. Logo, a inclusão de pontos base no interior do domínio denominados pontos interpolantes melhora significativamente a

precisão dos resultados. Uma vez que o MECID interpola diretamente todas as funções que compõem o núcleo do domínio integral, incluindo a solução fundamental, faz-se necessário um maior número de pólos para um melhor desempenho. No entanto, ao contrário com o MECDR, aumentando-se o número de pontos de base internos, não se perturbam os resultados, uma vez que a estrutura matemática do MECID é muito próxima a de uma técnica de interpolação. A precisão do método cresce continuamente com o acréscimo do número destes pontos no interior.

A quantidade de pólos-base internos ao domínio é muito importante para o bom desempenho de qualquer técnica de aproximação que simule as ações de domínio; no entanto, usando o esquema de integração de contorno, a exigência na quantidade desses pólos tem importância ainda maior. Contudo, há de se atentar para o fato de que quando, além desses pólos, houver também a inclusão de pontos fontes no domínio, existe o risco de ocorrência de singularidade em casos de sobre posicionamento geométrico dos mesmos, além disso, uma grande proximidade entre estes dois tipos de pontos, pode ocasionar em imprecisão nos resultados. As chances de tais fatos ocorrerem são potencializados com o aumento da quantidade dos referidos pontos, sendo, portanto, um ponto de atenção do método.

5 TESTES NUMÉRICOS

Os testes foram feitos na solução de um problema unidimensional simples, envolvendo o fenômeno de difusão e advecção. A equação de governo é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, mostrada a seguir:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = V \frac{dT}{dx} \quad (5.1)$$

Não obstante o problema ser fisicamente unidimensional, a malha de elementos de contorno é bidimensional e a imposição de condições de contorno adequadas – condições de Neumann nulo em duas arestas paralelas – garante que o fluxo de calor se direcione numa única direção.

O método foi testado em dois exemplos diferenciados apenas pelas condições de contorno. Em ambos os problemas, o volume de controle é um quadrado de lado unitário, cujas arestas foram identificadas com a numeração de 1 a 4 vide Figura 11. Na aresta cuja temperatura era prescrita calculou-se o fluxo e vice-versa.

Dois malhas com 32 e 80 elementos de contorno, nas quais diferentes quantidades de pontos internos interpolantes e de pontos fontes internos foram utilizadas totalizando em 42 malhas utilizadas em ambos os problemas.

Para uma melhor visualização do refinamento, foi gerado um gráfico para cada tipo de malha, mostrando o posicionamento de todos os pontos. Estes gráficos estão no Apêndice B.

Para melhor identificação do refinamento utilizado, usou-se a nomenclatura conforme este exemplo: 32/49/48 o que quer dizer que a malha é composta de 32 elementos de contorno, 49 pontos fontes internos e 48 pontos de interpolação internos.

Os valores calculados tanto do potencial quanto do fluxo foram plotados em gráficos disponíveis no Apêndice A. Foram colocados num mesmo gráfico os valores calculados para a mesma quantidade de pontos no contorno e pontos fontes internos,

variando somente a quantidade de pontos interpolantes com a intenção de verificar a influência destes. Para uma melhor referência sobre a magnitude dos valores calculados, os valores analíticos também foram inseridos no gráfico.

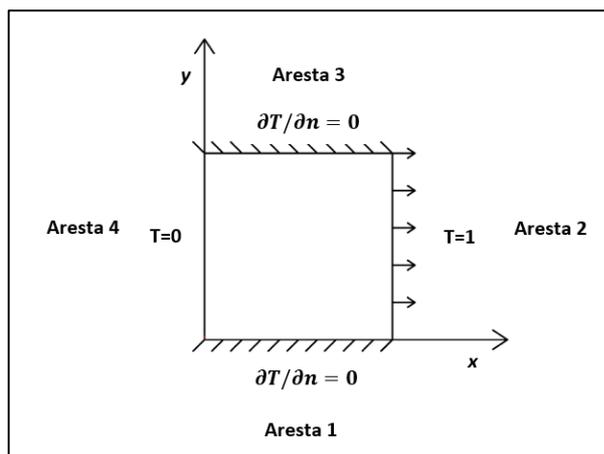
O erro foi calculado individualmente por aresta e o valor dos mesmos foram tabelados para uma melhor visualização. Os erros referentes a aresta 3 não foram mostrados por serem idênticos aos da aresta 1, devido à simetria física de ambos os problemas. Utilizou-se o chamado erro relativo percentual onde se obtém a diferença entre os valores aproximado e exato como uma porcentagem do maior valor exato conforme a seguir:

$$Erro(\%) = \frac{|valor\ aproximado - valor\ exato|}{maior\ valor\ exato} \times 100 \quad (5.2)$$

5.1 PRIMEIRO PROBLEMA

A Figura 11 mostra o primeiro problema em que o método foi aplicado.

Figura 11 - Escoamento unidirecional de um fluido governado pela equação de difusão e advecção do 1ª problema.



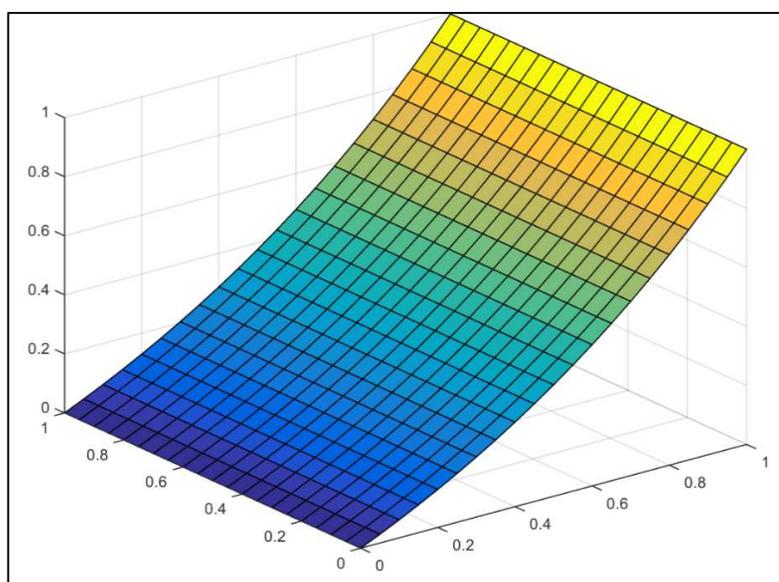
Fonte - Produção do próprio autor

Neste caso, a solução analítica para a temperatura é dada por:

$$T(x) = \frac{e^{vx} - 1}{e^v - 1} \quad (5.3)$$

Seu comportamento para velocidade do fluido igual a uma unidade de medida é dada pela Figura a seguir:

Figura 12 – Gráfico da temperatura calculada analiticamente para o primeiro problema com $v=1$.

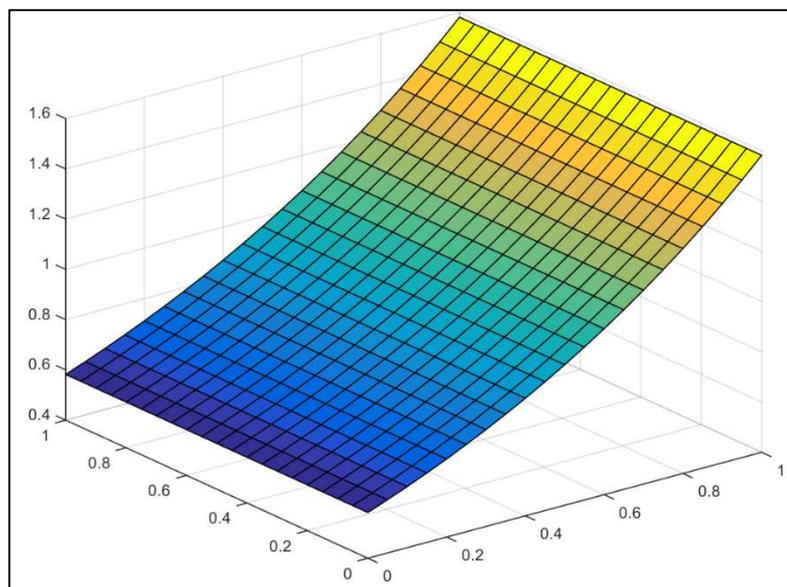


Fonte - Produção do próprio autor

A solução analítica para o fluxo é dada pela equação (5.4) e o seu comportamento é mostrado pela Figura 13

$$\frac{dT}{dx} = \frac{ve^{vx}}{e^v - 1} \quad (5.4)$$

Figura 13 - Gráfico do fluxo calculado analiticamente para o 1º problema com $v=1$.



Fonte - Produção do próprio autor

O erro médio percentual por aresta para todas as malhas estão mostrados nas Tabelas 1, 2 e 3 conforme a seguir:

Tabela 1 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/16/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,921394	0,983936	0,813951	0,440523	0,31292	0,519457	0,460857
2	34,62177	6,574268	5,53622	9,123002	13,57615	1,337669	0,675154
4	5,406069	3,923045	4,093051	2,438696	2,159966	2,180099	2,334506

Tabela 2 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/49/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,727598	0,536292	0,558498	0,265496	0,130903	0,225709	0,175046

2	32,49896	6,737327	5,921905	8,977446	13,58729	1,703723	1,198955
4	2,041206	2,522908	2,380493	0,596446	0,511556	0,762699	0,828599

Tabela 3 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/81/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,805854	0,779097	0,668771	0,264907	0,120713	0,228331	0,195045
2	31,38404	6,772648	6,907501	8,931118	13,33634	1,909239	1,143461
4	2,431415	2,38044	2,309735	0,478979	0,624193	1,014985	1,067499

Nas tabelas 4, 5 e 6 é apresentado o erro médio percentual por aresta, usando a malha com 80 elementos de contorno, para diversas quantidades de pontos interpolantes.

Tabela 4 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

80/16/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,469678	1,224015	1,054005	0,53036	0,424926	0,620125	0,571607
2	35,90708	7,649982	8,040606	20,5696	15,31546	4,527031	3,841929
4	4,533465	3,798778	3,936237	3,980909	3,599308	3,296246	3,24685

Tabela 5 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

80/49/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,355977	0,759899	0,792408	0,235878	0,222168	0,300045	0,264942

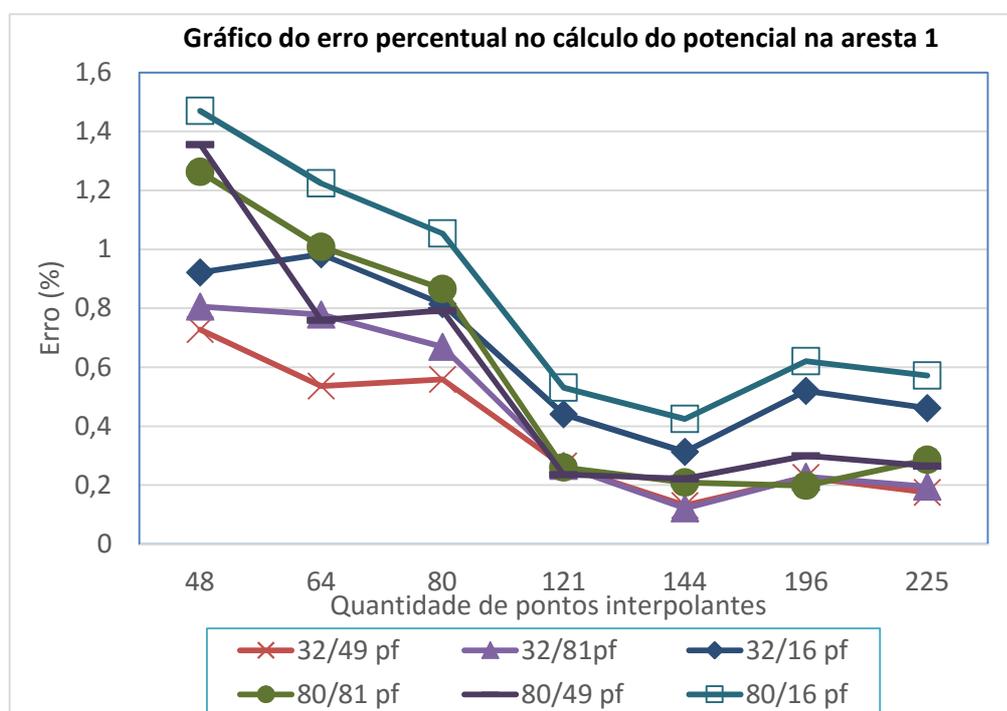
2	36,09282	7,719825	8,270255	20,0441	15,28083	4,510028	3,929812
4	1,924713	2,564644	2,491621	1,540292	1,329532	1,300246	1,283368

Tabela 6 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

80/81/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,26313	1,008849	0,865154	0,259753	0,208832	0,198452	0,286299
2	36,41872	6,921899	8,968104	19,59181	15,033	4,564478	3,972474
4	3,205238	2,197107	2,227049	1,492057	1,281288	1,036211	0,877814

Para melhor compreensão e visualização da precisão do método, foram traçados gráficos nos quais são plotados os valores do erro médio percentual para cada malha.

Figura 14 – Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 1



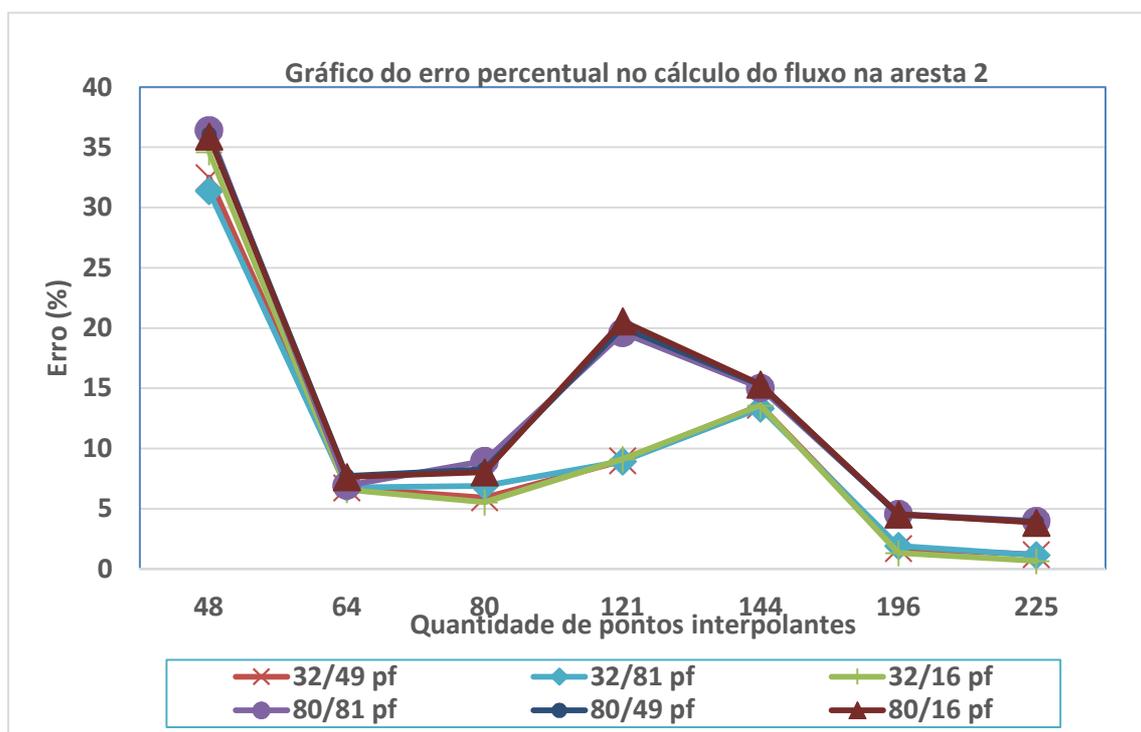
Fonte - Produção do próprio autor

Observando-se a Figura 14 vê-se que os erros no potencial das arestas horizontais se reduzem com a introdução de pontos internos interpolantes, mas não de modo monotônico. É certo que o reposicionamento dos pontos interpolantes de uma malha

para outra (vide apêndice B) alterem significativamente o desempenho. A possibilidade de mau condicionamento matricial é remota, com base em simulações bem sucedidas da MECID em outros problemas físicos, como o caso de Poisson. Contudo, a proximidade entre os pontos fonte e de interpolação aqui é um fator relevante. Ressalta-se que a singularidade é do tipo hiperbólica, bem mais crítica do que a singularidade logarítmica que ocorre nos problemas governados pela Equação de Poisson e mesmo Helmholtz.

Outro fator cujo comportamento não foi bem definido consiste na necessidade de pontos fonte internos. Pode-se perceber que sua escassez, comparativamente a quantidade de pontos nodais da malha de contorno, ou mesmo seu excesso, atuam na precisão dos resultados.

Figura 15 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 1 na aresta 2.

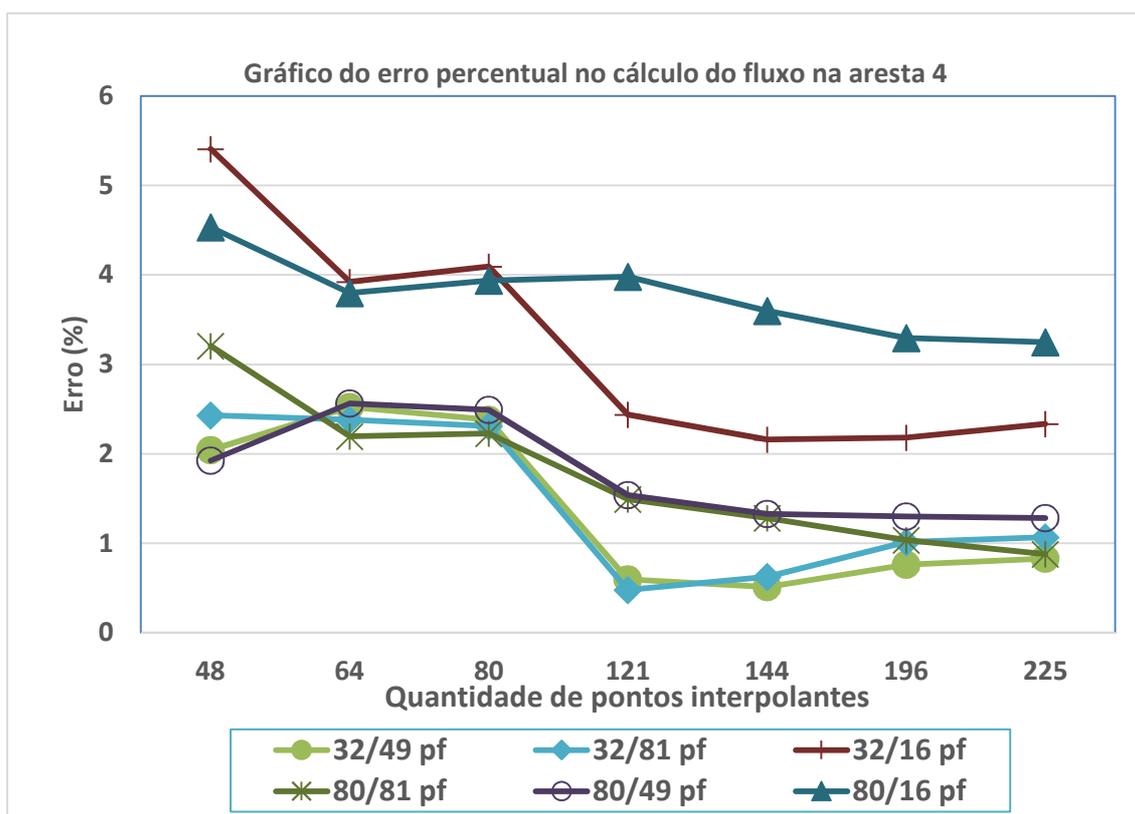


Fonte - Produção do próprio autor

No que se refere ao cálculo da derivada do potencial na aresta vertical direita conforme mostrado na Figura 15, em princípio, a inserção de maior número de pontos

interpolantes melhorou globalmente os resultados. No entanto, a malha mais refinada apresentou piores resultados. Nesta simulação, o efeito da quantidade de pontos fonte no interior não foi significativa.

Figura 16 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 1 na aresta 4.



Fonte - Produção do próprio autor

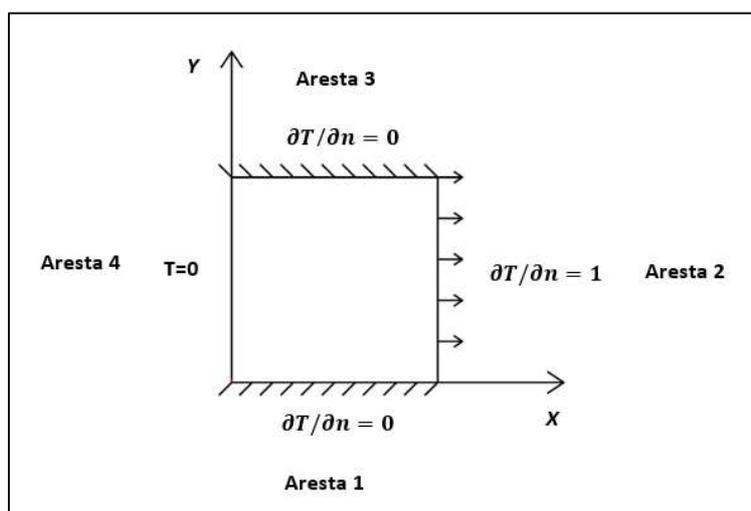
No cálculo da derivada do potencial na aresta vertical esquerda Figura 16, os resultados também foram distintos do apresentado na figura anterior, referente a mesma grandeza na aresta direita. Apenas a malha mais refinada, com poucos pontos fonte internos, apresentou um comportamento próximo do monotônico, que é comportamento esperado por formulações discretas consistentes.

Embora haja uma tendência global de redução dos erros, o comportamento geral da formulação é insatisfatório.

5.2 SEGUNDO PROBLEMA

Conforme descrito no início deste tópico os problemas são diferenciados apenas pelas condições de contorno e a condição de Neumann nulo em duas arestas paralelas garante que o fluxo de calor se direcione numa única direção. A Figura 17 a seguir é referente ao segundo problema proposto.

Figura 17– Escoamento unidirecional de um fluido governado pela equação de difusão e advecção do 2ª problema.

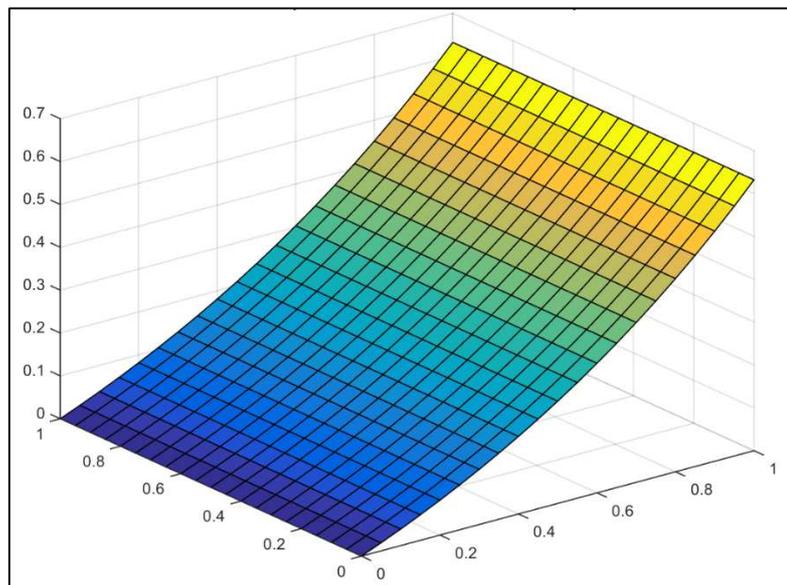


Fonte - Produção do próprio autor

A solução analítica para a temperatura é dada pela equação (5.5) e o seu comportamento é mostrado pela Figura 18.

$$T(X) = \frac{e^{vx} - 1}{ve^v} \quad (5.5)$$

Figura 18 -Gráfico da temperatura calculada analiticamente para o 2º problema com $v=1$.

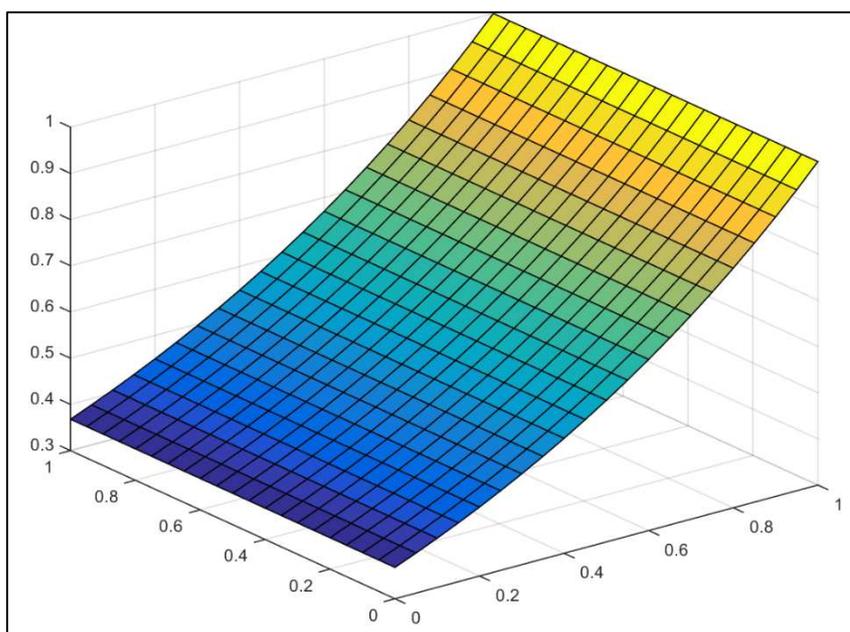


Fonte - Produção do próprio autor

A solução analítica para o fluxo é dada pela equação (5.6) e o seu comportamento é mostrado pela Figura 19.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{e^{vx}}{e^v} \quad (5.6)$$

Figura 19 - Gráfico do fluxo calculado analiticamente para o 2º problema com $v=1$.



Fonte - Produção do próprio autor

Conforme feito no exemplo anterior, o erro médio percentual por aresta para todas as malhas estão mostrados nas Tabelas 7, 8 e 9 para malhas com 32 elementos de contorno e Tabelas 10,11 e 12 para malhas com 80 elementos de contorno conforme a seguir:

Tabela 7 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/16/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,45392	0,388206	0,318425	0,495015	0,362913	0,419434	0,342214
2	2,767665	2,097171	1,861648	0,56968	0,686556	0,601649	0,625887
4	6,392121	5,796043	5,723804	2,4193	2,142935	2,448734	2,674167

Tabela 8 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/49/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,493915	0,4946	0,42646	0,348283	0,231655	0,313606	0,381677
2	3,085989	2,707717	2,550319	0,739029	0,749049	1,188979	1,192312
4	3,456675	4,959124	4,677341	0,52433	0,407244	1,421449	1,640766

Tabela 9 - Valor do erro médio percentual para malha com 32 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

32/81/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	0,47722	0,393225	0,401405	0,34376	0,180047	0,279728	0,33854
2	2,935386	2,950624	2,821746	0,722165	0,730788	1,152439	1,176764
4	3,389259	4,361132	4,419454	0,546759	0,827799	1,596195	1,764345

Tabela 10 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 16 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

80/16/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,375405	0,619709	0,542784	0,461494	0,339439	0,381375	0,328889
2	3,234354	2,312889	2,122379	0,537694	0,492591	0,678972	0,684155
4	5,748486	5,744247	5,716168	4,132898	3,750734	3,547555	3,543425

Tabela 11 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 49 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes.

80/49/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,465605	0,706131	0,660227	0,319252	0,248322	0,251797	0,278385
2	3,598054	2,914866	2,808275	0,901779	0,904696	1,265243	1,250356
4	3,334749	4,771924	4,563486	1,904337	1,844253	2,141303	2,216235

Tabela 12 - Valor do erro médio percentual para malha com 80 elementos de contorno e 81 pontos fonte internos e seus respectivos pontos internos interpolantes

80/81/							
Aresta	48	64	80	121	144	196	225
1	1,263982	0,588393	0,578052	0,243891	0,201133	0,340791	0,238237
2	3,501671	3,176594	2,984476	0,862941	0,820725	1,191563	1,243631
4	3,727565	4,211752	4,16915	1,589149	1,470489	1,959239	1,805115

Os valores tabelados acima foram plotados para uma melhor visualização do seu comportamento conforme Figuras 20, 21 e 22:

Figura 20 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 2 na aresta 1.

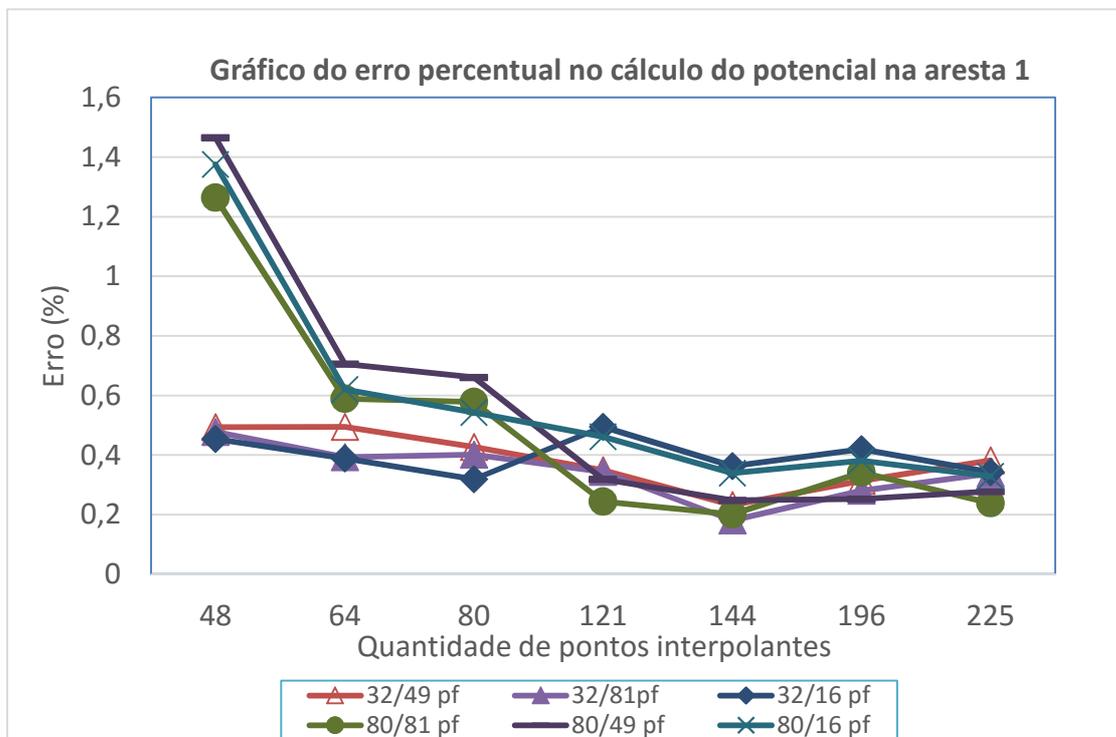
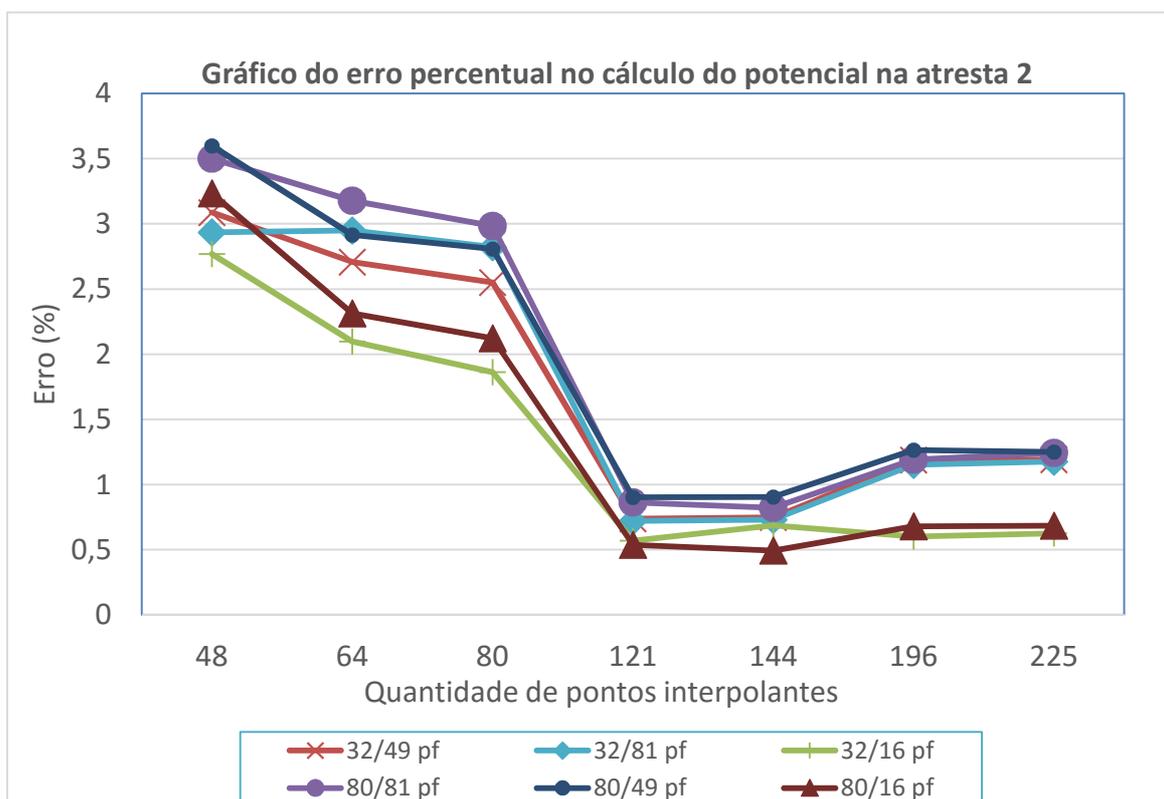
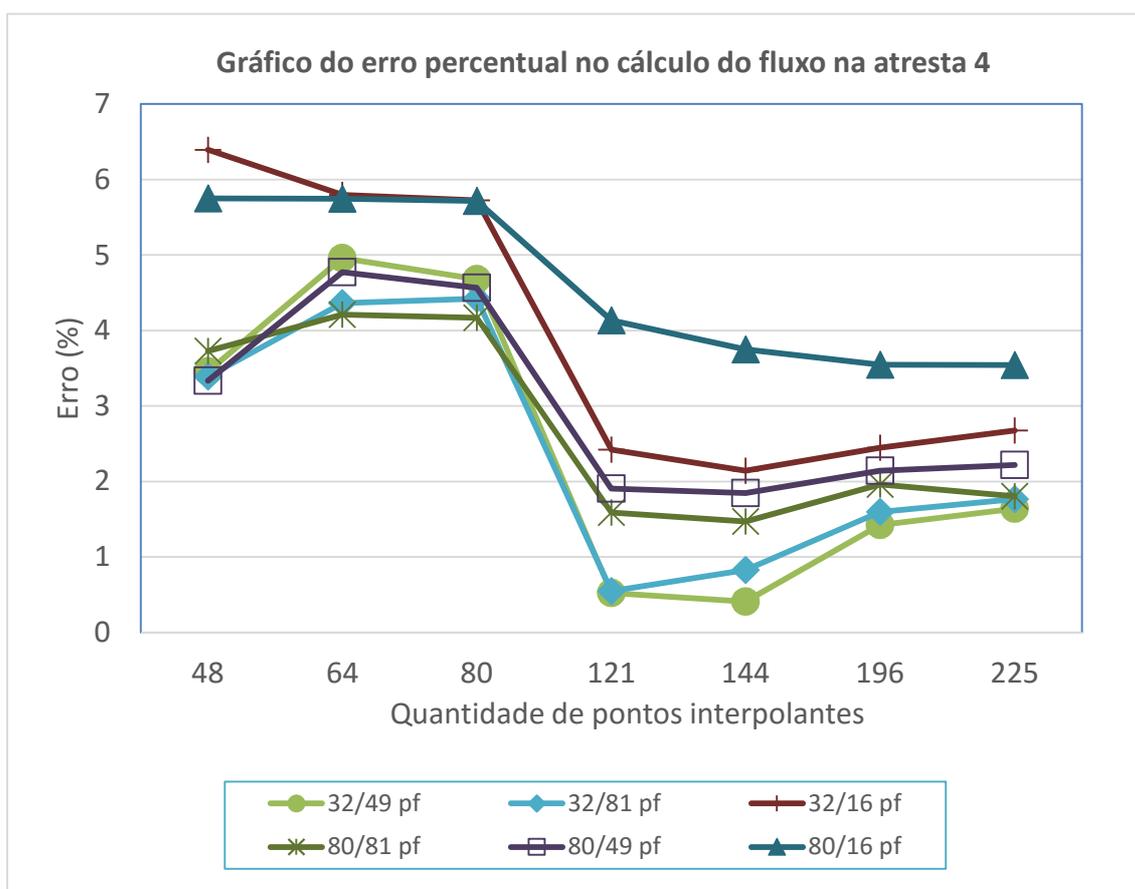


Figura 21 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do potencial para o problema 2 na aresta 2.



Semelhantemente ao exemplo anterior se observa em ambas as Figuras 20 e 21 que houve uma redução no valor do erro de uma maneira em geral, porém, não com um comportamento monotônico. Espera-se de métodos numéricos consistentes uma diminuição do erro na medida em que haja um refinamento da malha, ou seja, na medida em que aumenta a quantidade de pontos interpolantes. Destaca-se aqui uma característica do MECID, principalmente na Figura 20, em que os erros nas malhas refinadas sem pontos internos são maiores do que nas malhas mais pobres na mesma condição. Todavia, com a introdução de maior número de pontos internos interpolantes, o erro nas malhas mais ricas se reduz rápida e significativamente.

Figura 22 - Comparação entre malhas do erro no cálculo do fluxo para o problema 2 na aresta 4.



Os erros relacionados ao cálculo do fluxo são significativamente maiores do que os da temperatura. Ao contrário do esperado, observa-se que a partir de determinada malha ocorre um aumento do erro juntamente com o aumento da quantidade de

pontos interpolantes. Uma hipótese para esse comportamento pode ser uma convergência precoce das respostas, fazendo o erro apresentar flutuações. Contudo, observa-se a sensibilidade do método tanto com a quantidade quanto com o posicionamento dos pontos interpolantes. Assim como nos casos anteriores, o resultado foi insatisfatório não devido à magnitude dos erros, mas sim devido ao fato de não apresentar uma queda contínua do erro com o refinamento da malha.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em trabalhos anteriores, o MECID se mostrou eficaz na resolução de problemas de Poisson e Helmholtz. Aqui, entretanto, para problemas difusivos-advectivos ficou evidente a necessidade de alguns aprimoramentos. Este comportamento é comum na pesquisa e elaboração de qualquer nova metodologia numérica de solução, pois sua eficácia deve ser condicionada a realização de numerosos testes, em diferentes classes de problemas afins, com o propósito de avaliar e aprimorar de modo seguro o grau de precisão da mesma, garantindo a confiabilidade do método.

De uma forma geral, os resultados mostraram certa instabilidade com a variação tanto na quantidade quanto no posicionamento dos pontos internos interpolantes, fato este que tornou os resultados insatisfatórios, pois se esperava um decaimento contínuo do erro ao longo do enriquecimento da malha. Particularmente, a redução do erro era esperada pelo fato de haver uma melhor representatividade do interior do domínio quando se aumenta a quantidade de pontos internos interpolantes. Isto é de grande relevância para o MECID uma vez que se diferencia do MECDR devido à proposta de interpolar todo o núcleo de domínio, incluindo a solução fundamental. Deve-se ressaltar que, as diversas aplicações das funções de base radial na teoria da aproximação numérica têm sido bem sucedidas, especialmente os procedimentos de interpolação são aqueles que apresentam melhor desempenho.

Observou-se também que, para uma mesma malha, não houve relação entre o erro referente ao cálculo da temperatura com o erro do cálculo do seu respectivo fluxo, ou seja, menores erros no cálculo da temperatura não resultaram necessariamente em menores erros no cálculo do fluxo e vice-versa.

A razão mais provável desse comportamento, bem abaixo do esperado, se deve à integração numérica de uma expressão que possui grau de singularidade superior ao apresentado nas aplicações referentes à Equação de Poisson e Helmholtz. Nesses casos, a integral resolvida pelo procedimento MECID consistia de um núcleo composto de um logaritmo – uma função de ordem zero - cuja integral é imprópria convergente, ou seja, não apresenta singularidade após a integração.

No problema abordado, a integral possui nível de singularidade maior, ou seja, há a derivada direcional do potencial, que é de ordem inversa igual a um. É, portanto, uma função cuja integração usando pontos fonte e pontos campo relativamente próximos pode não dar resultados com a precisão esperada. Foi o que provavelmente ocorreu. Recentemente, em trabalho submetido a apreciação (LOEFFLER e MANSUR, 2016), foi estabelecido um esquema de regularização que elimina a singularidade pela adoção de um esquema similar ao de Hadamard (BRAGA, 2006), que teve ótimo desempenho em problemas de Helmholtz, eliminando a exigência de haver dois conjunto de pontos para eliminar a singularidade na solução fundamental e retornando resultados ainda melhores do que a modelagem sem o esquema de regularização.

6.1 PROPOSTAS PARA FUTURAS PESQUISAS

Haja vista a grande dependência dos resultados com o posicionamento dos pontos interpolantes e dos pontos fontes no interior do domínio fica como proposta para futuras pesquisas testar o esquema de regularização já testado com êxito para os problemas de Helmholtz nos problemas difusivo-advectivos. Além de exigir menor esforço na entrada de dados e exigir diferentes configurações de posicionamento de pontos fonte e campo, a robustez de um procedimento baseado em fundamentos matemáticos tem grande chance de melhorar a precisão dos resultados aqui apresentados.

7 BIBLIOGRAFIA

- BARCELOS, H. M. **Comparação do Desempenho Entre a Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno Com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz**, 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.
- BRAESS, D. **Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics**. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- BRAGA, C. L. R. **Physical-Mathematics Notes (in portuguese)**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**. London: Penttch Press, 1978.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUES, J. **Boundary Elements An Introductory Course**. Southampton, U.K.: Wit Press, 1992.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. U.K.: Newnes-Butterworths, 1980.
- BUHMANN, M. D. **Radial Basis Function: Theory and implementations**. [S.l.]: Cambridge Press, 2003.
- CRUZ, A. L. **Modelagem Direta de Integrais de Domínio Usando Funções de Base Radial no Contexto do Método dos Elementos de Contorno**, 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.
- DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite Element Methods for Flow Problems**. England: Wiley, 2003.
- HILDEBRAND, F. B. **Methods of Applied Mathematicas**. New York: Prentice-Hall, 1962.
- INCROPERA, F. P.; DE WITT, D. P. **Fundamentos de Trnasferência de Calor e de Massa**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- KATSIKADELIS, J. T. **Boundary Elements Theory an Applications**. Athens: Elsevier Science, 2002.
- KUMAR, A.; JAISWAL, D. K.; KUMAR, N. Analytical solutions to one-dimensional advection–diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media. **Journal of Hydrology**, v. 380, n. 3-4, p. 330-337, January 2010.

LOEFFLER, C. F. Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método de Elementos de Contorno. **Revista Brasileira de Engenharia**, v. 4, p. 5-23, 1986.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms With the Boundary Element Method. **Engineering Analysis With Boundary Elements**, v. 50, p. 97-108, 2015.

LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem Engineering Analysis with Boundary Elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2016.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MANGANI, L.; MOUKALLED, F.; DARWISH, M. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab**. Beirut, Horw: Springer, 2015.

OÑATE, E. **STRUCTURAL ANALYSIS WITH THE FINITE ELEMENT METHOD. LINEAR STATICS**. [S.l.]: Springer, v. 1, 2009.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. **The Dual Reciprocity, Boundary Element Method**. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.

POLYANIN, A. D.; NAZAIKINSKII, V. E. **HANDBOOK OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTIS**. 2. ed. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2002.

PRIETO, F. U.; MUÑOZ, J. J. B.; CORVINOS, L. G. Application of the generalized finite difference method to solve the advection–diffusion equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 235, n. 7, p. 1849-1855, February 2011.

SOUZA, L. Z. **Utilização De Funções De Base Radial De Suporte Compacto Na Modelagem Direta De Integrais De Domínio Com O Método Dos Elementos De Contorno**, 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

WROBEL, L. C. **Potential and viscous flow problems using the boundary element method**. [S.l.]: [s.n.], 1981.

YADAV, S. K.; KUMAR, A.; KUMAR, N. Horizontal solute transport from a pulse type source along temporally and spatially dependent flow: Analytical solution. **Journal of Hydrology**, v. 412-413, p. 193-199, January 2012.

ZHAO, C.; XU, T. P.; VALLIAPPAN, S. Numerical modelling of mass transport problems in porous media: A review. **Computers and Structures**, v. 53, n. 4, p. 849-860, November 1994.

Figura 24 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 do problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

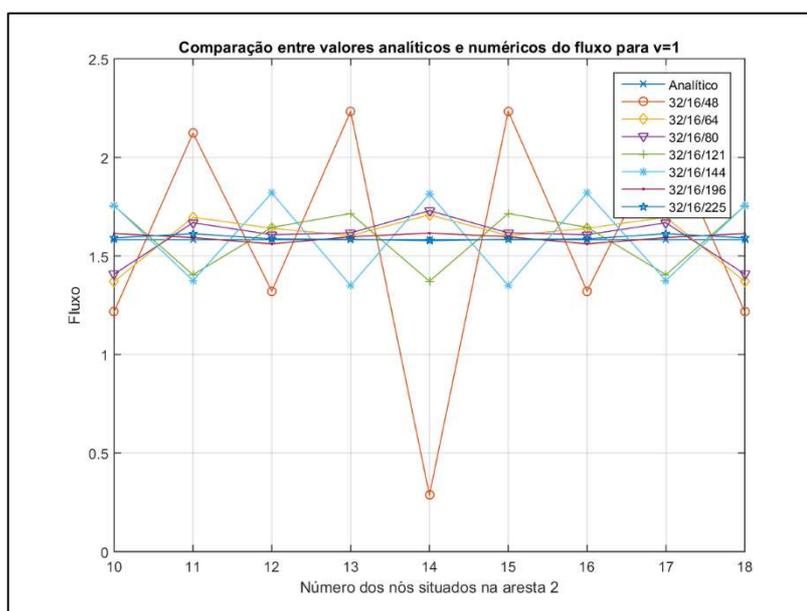


Figura 25 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 do problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

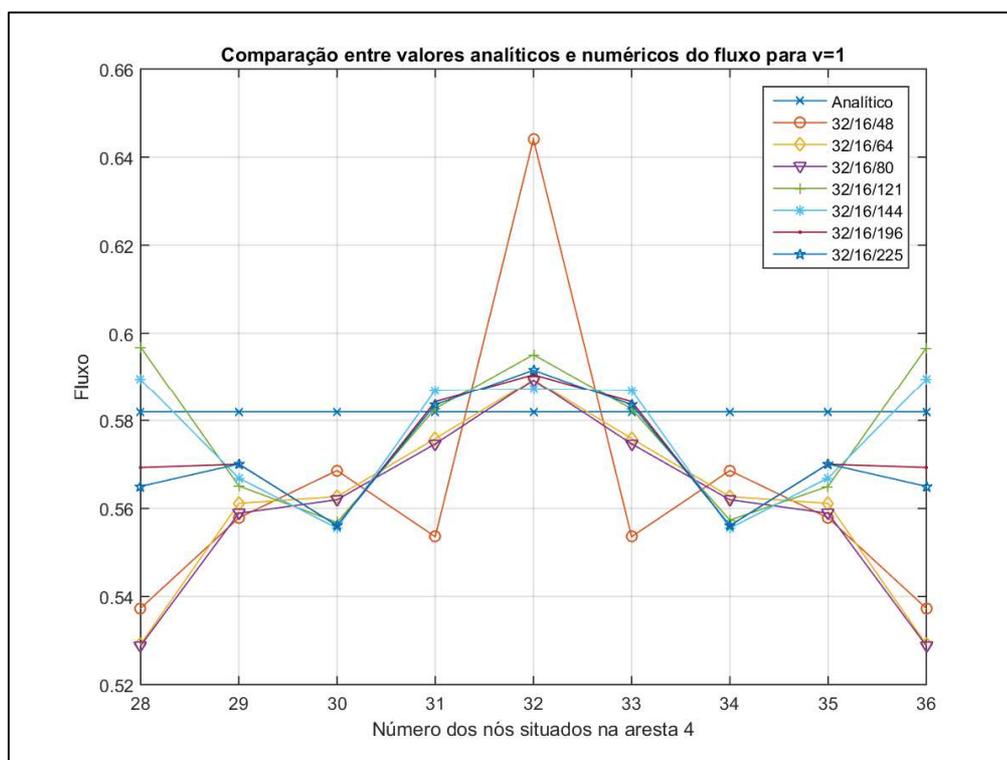


Figura 27 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

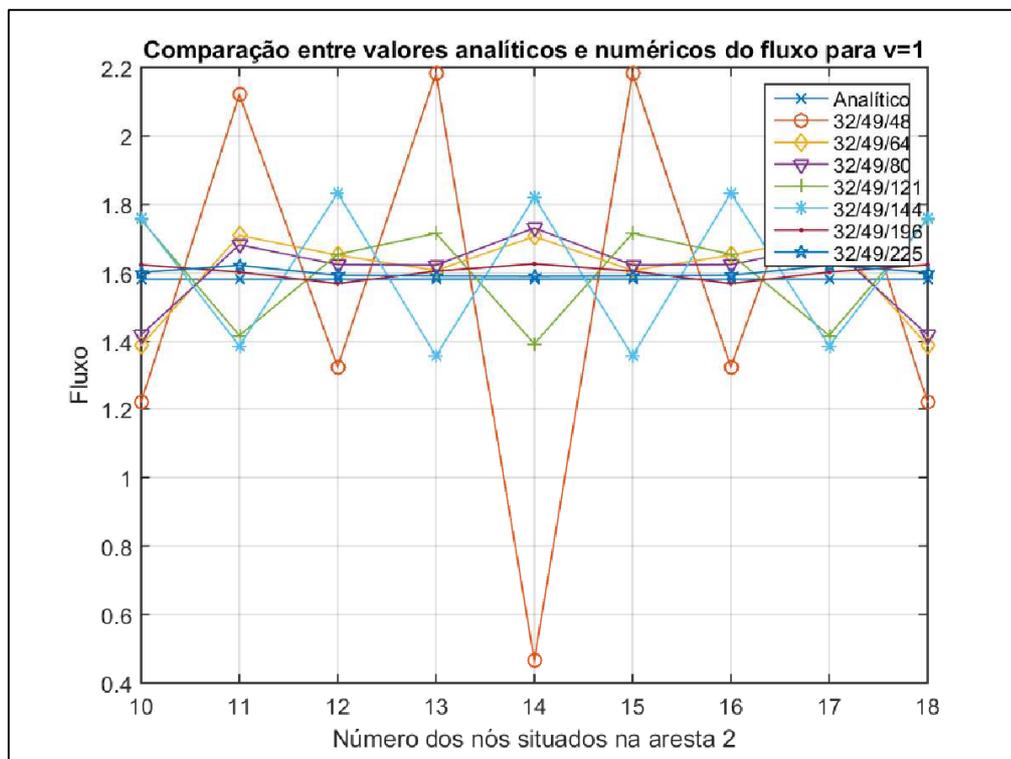


Figura 28 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

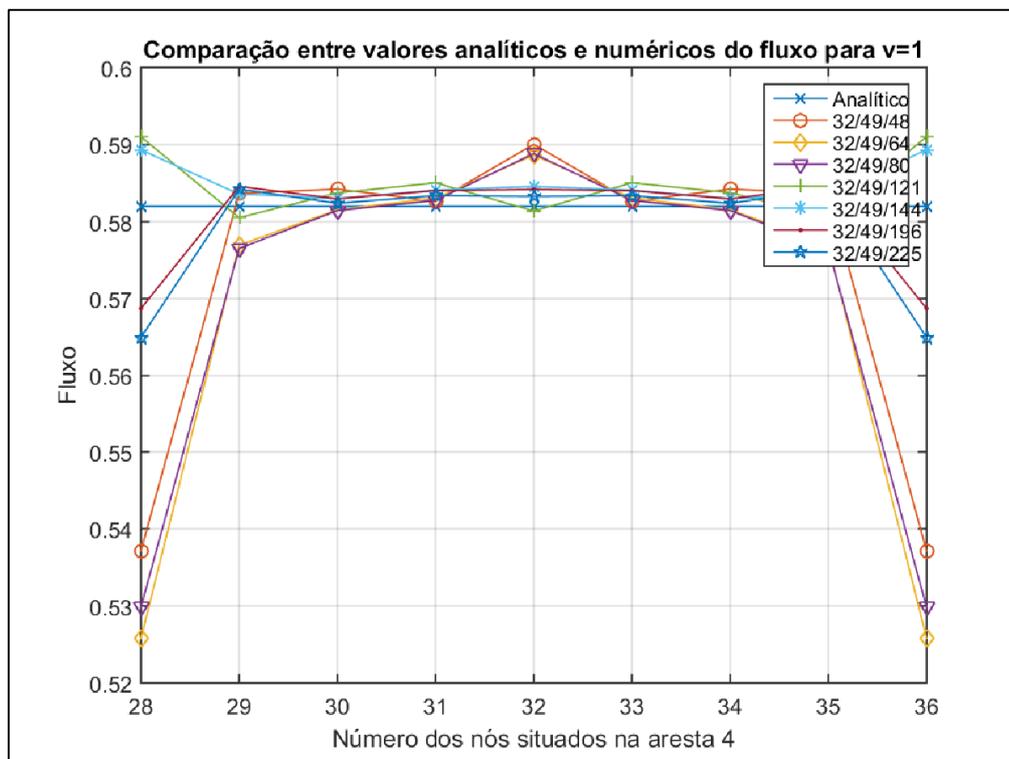


Figura 29 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

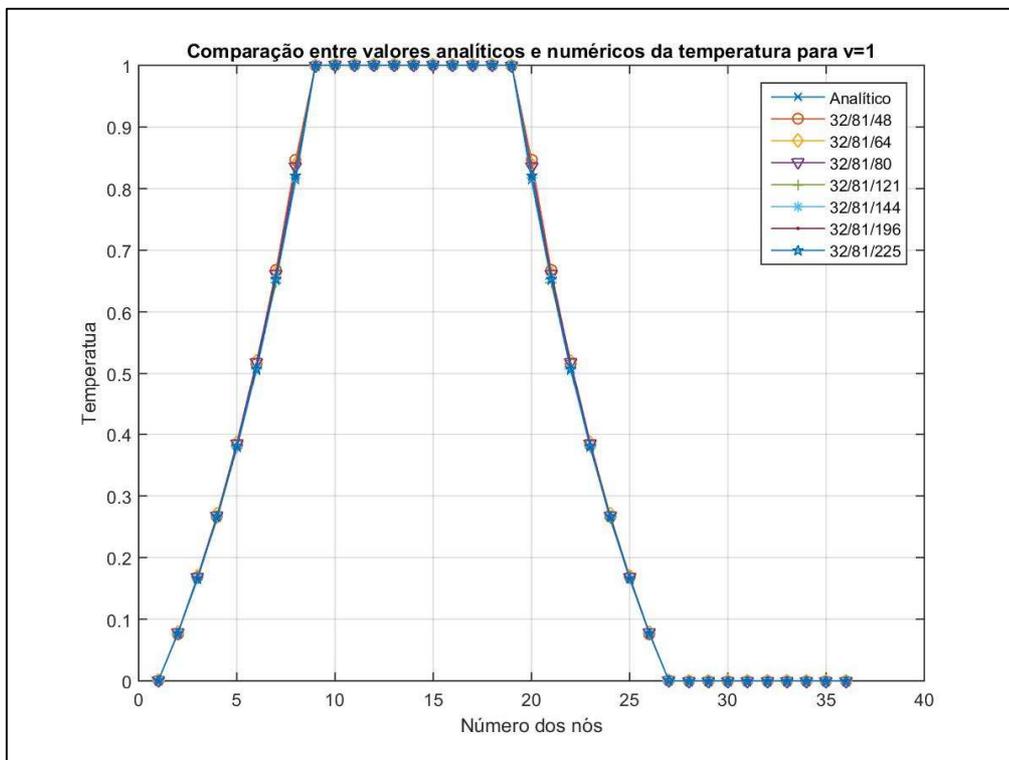


Figura 30 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

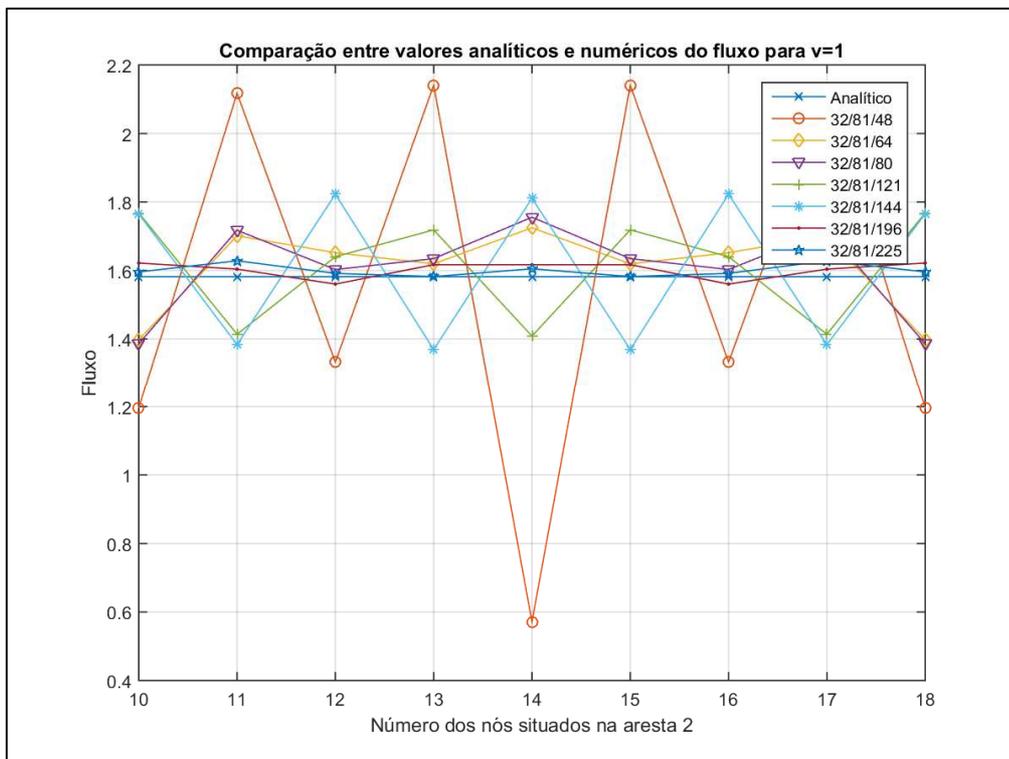


Figura 33 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

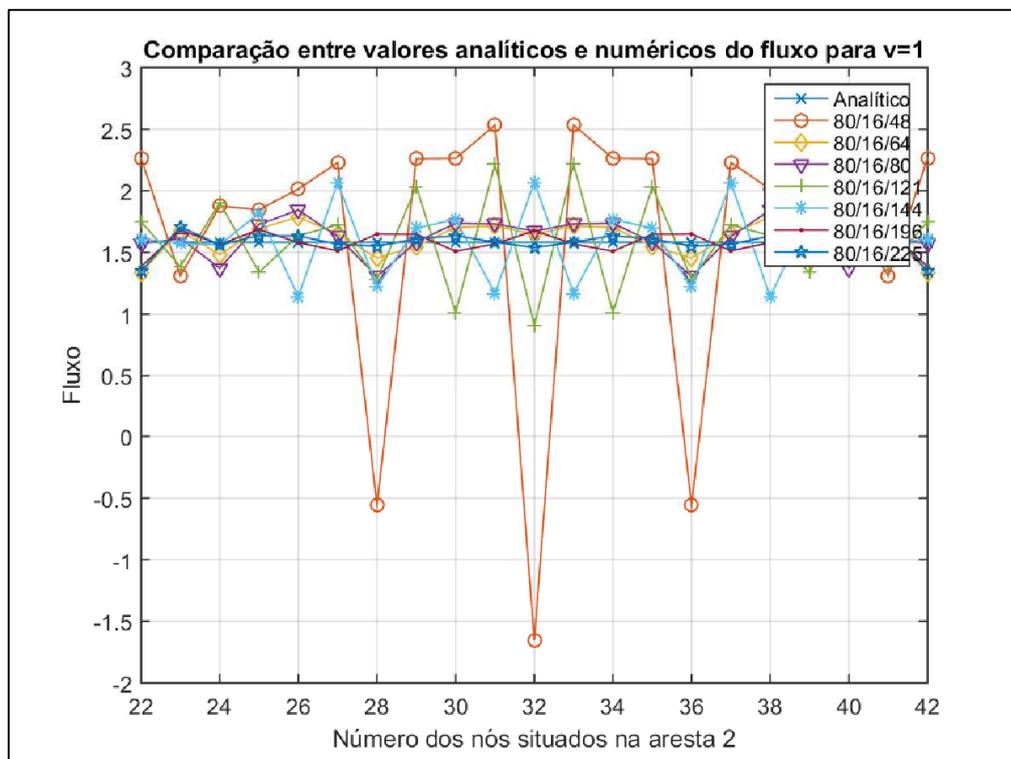


Figura 36 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

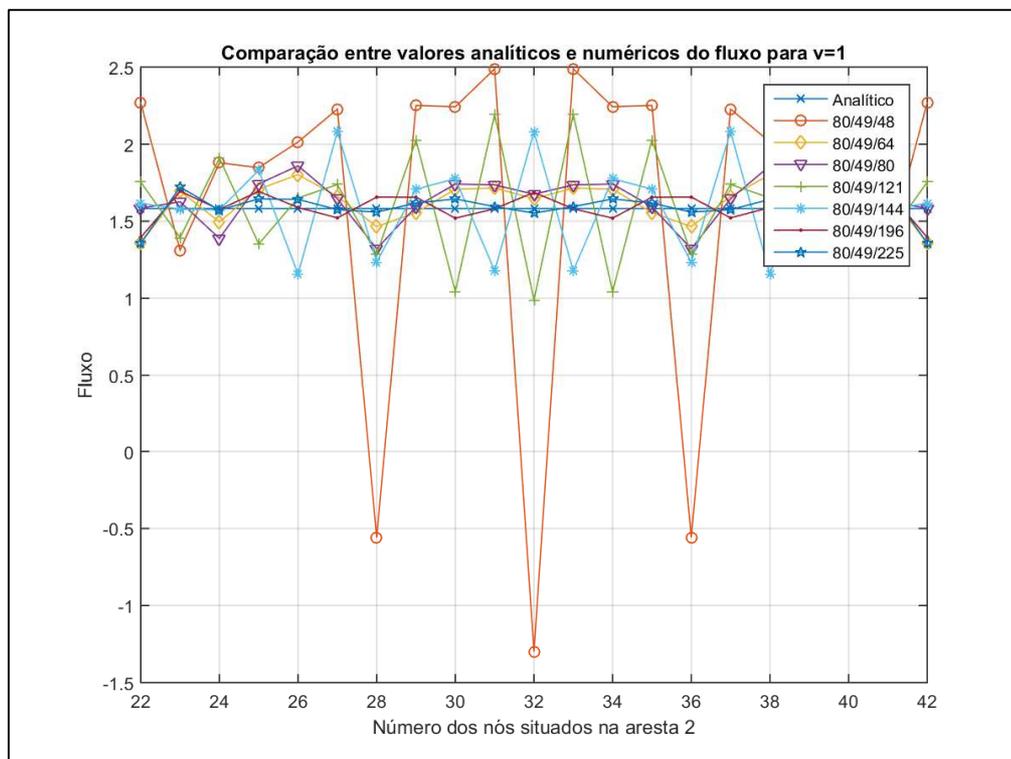


Figura 37 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

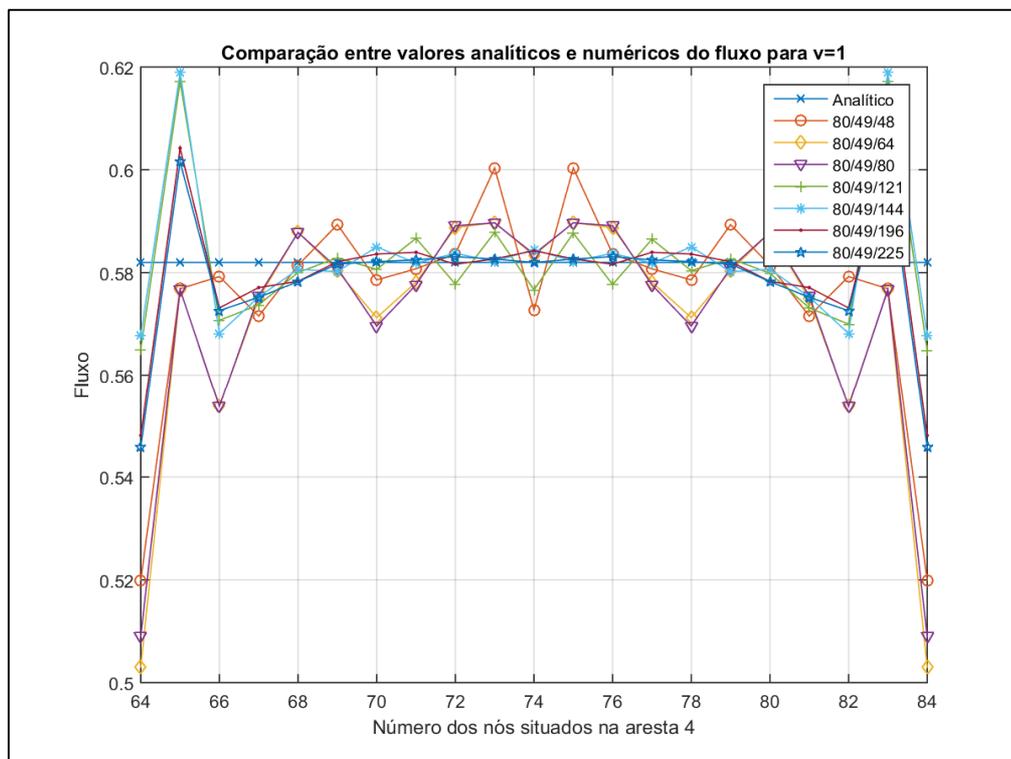


Figura 39 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 2 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

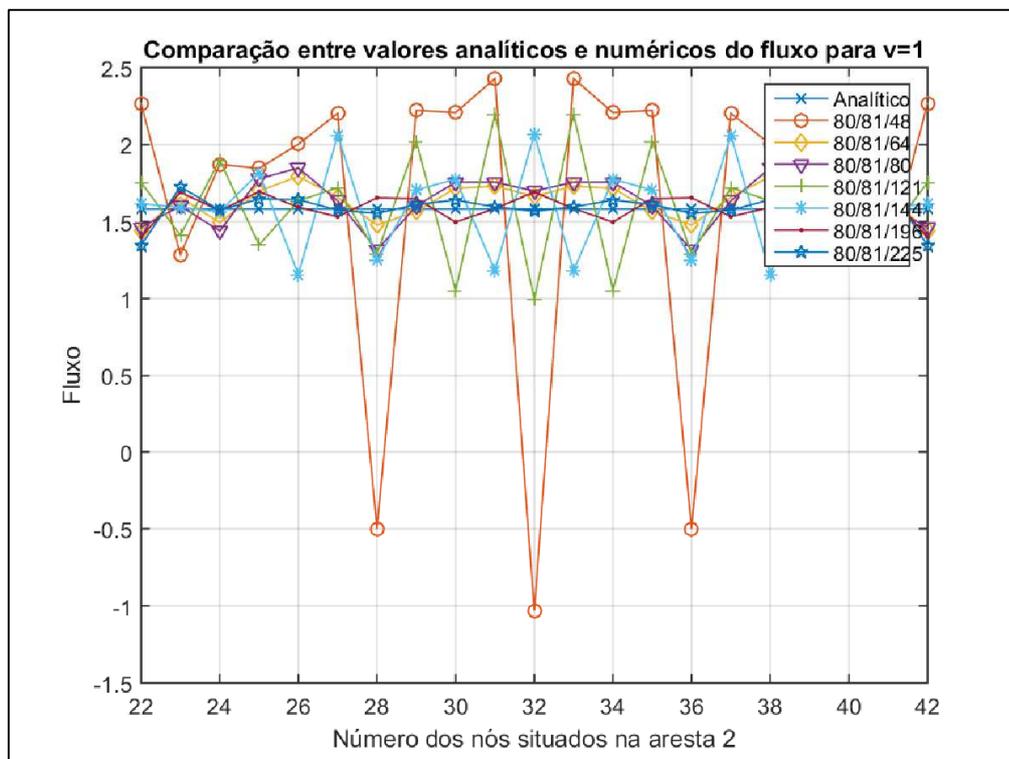


Figura 40 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 1 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

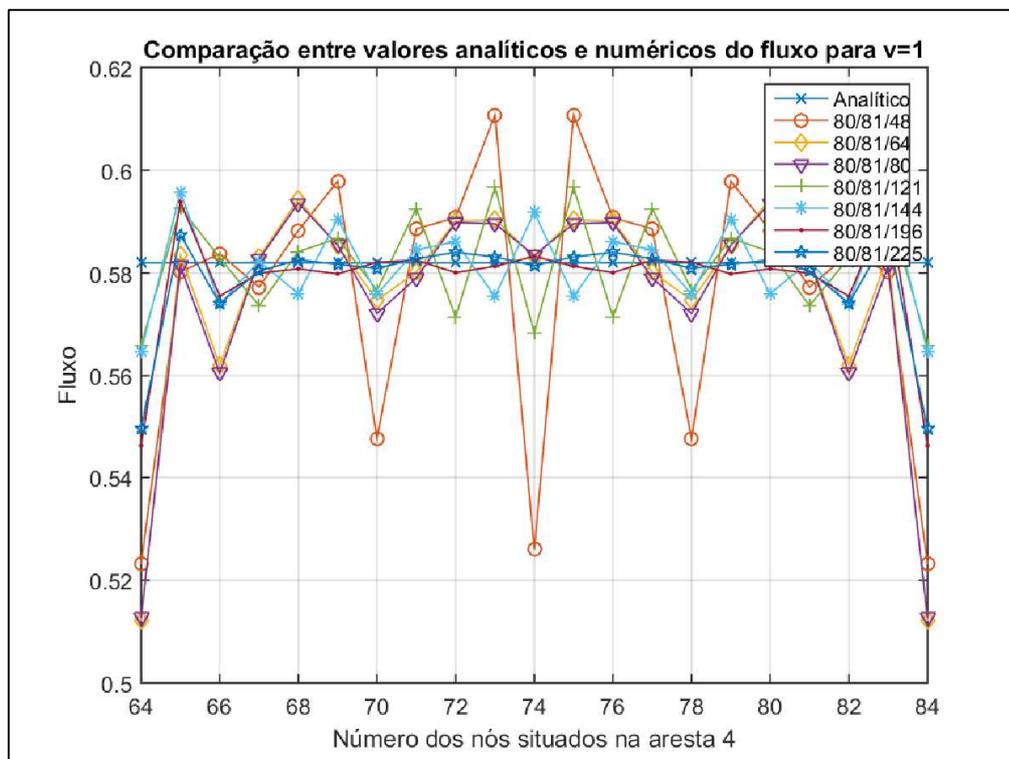


Figura 42 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

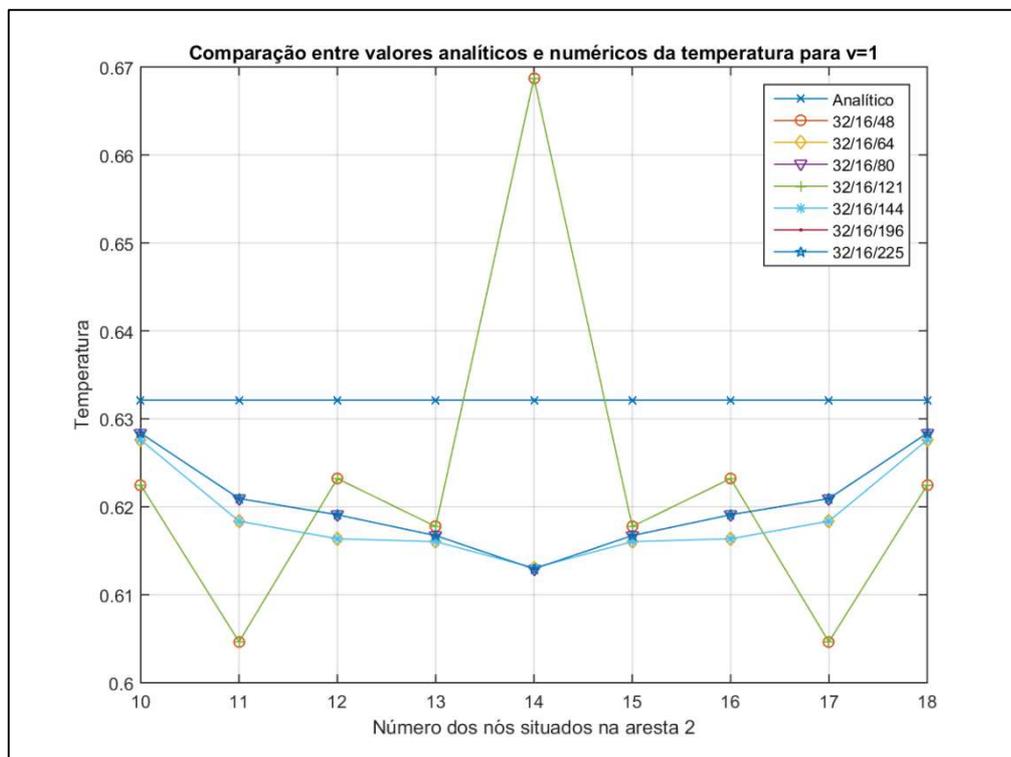


Figura 43 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

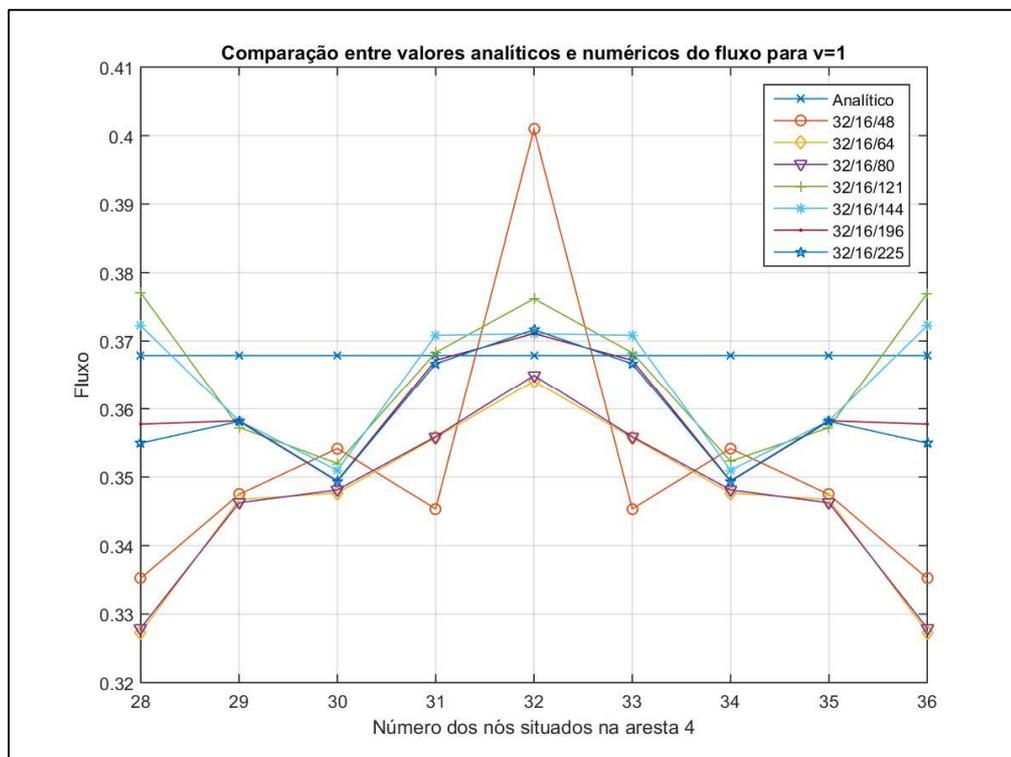


Figura 45 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

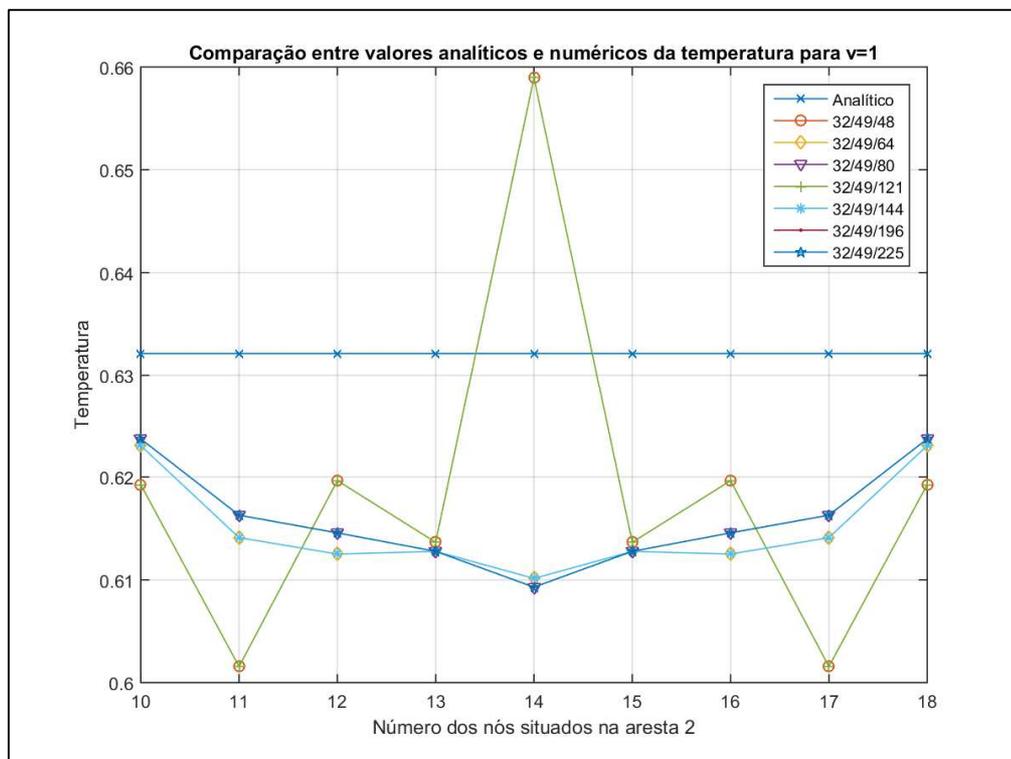


Figura 46 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

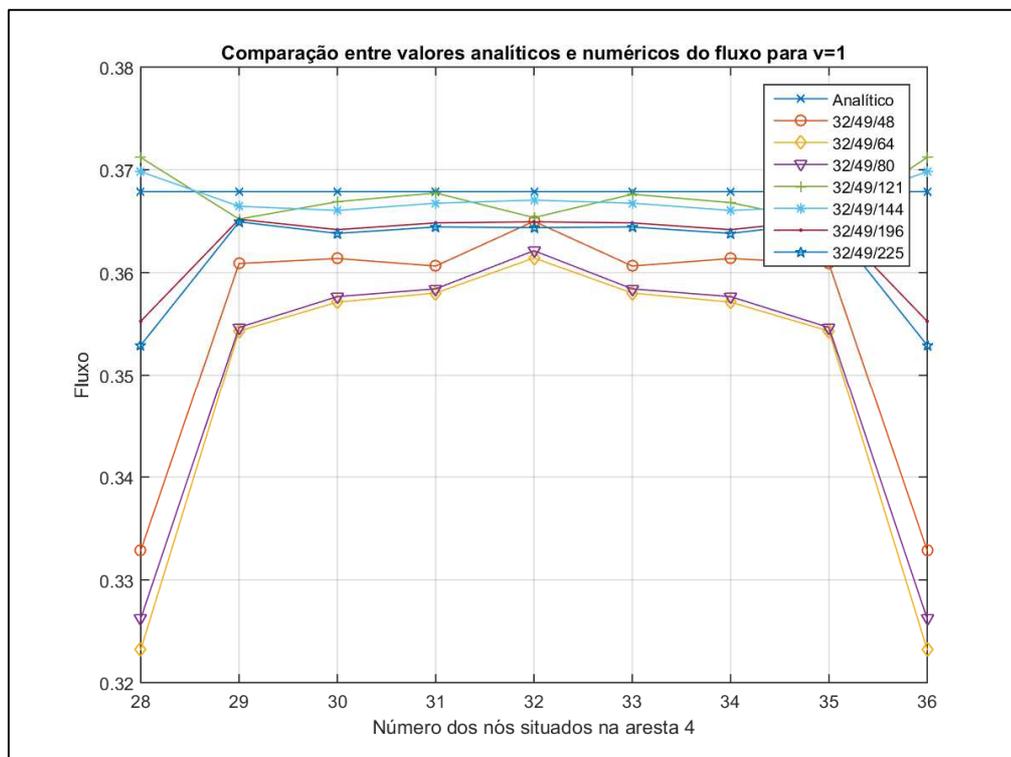


Figura 48 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

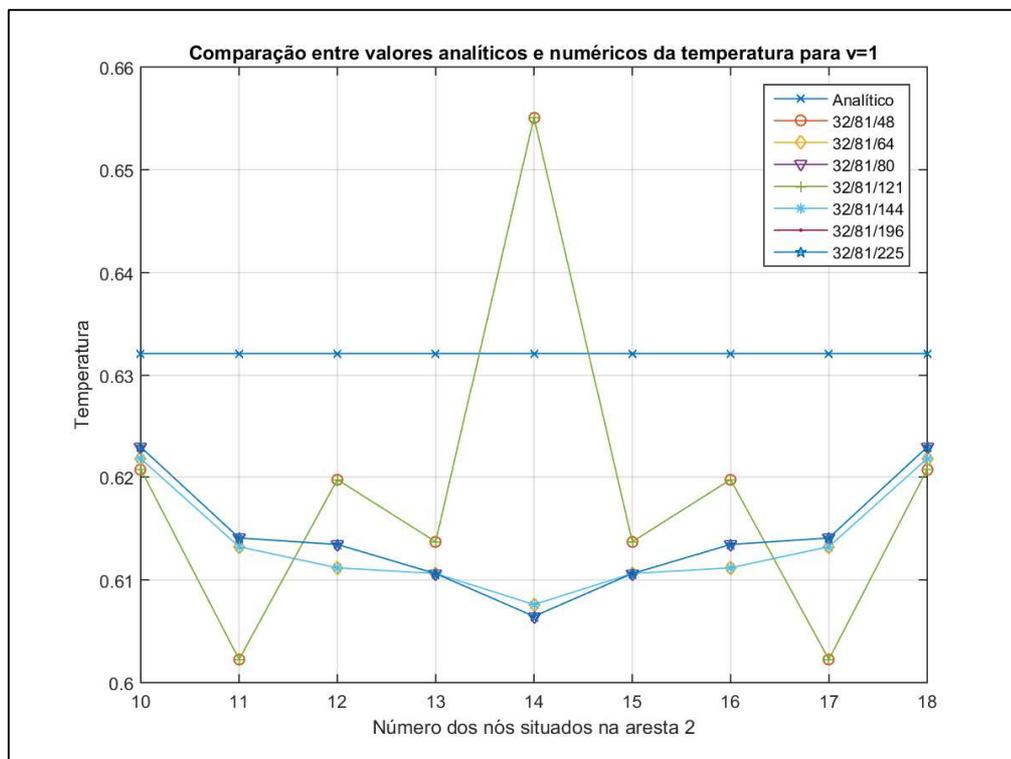


Figura 49 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

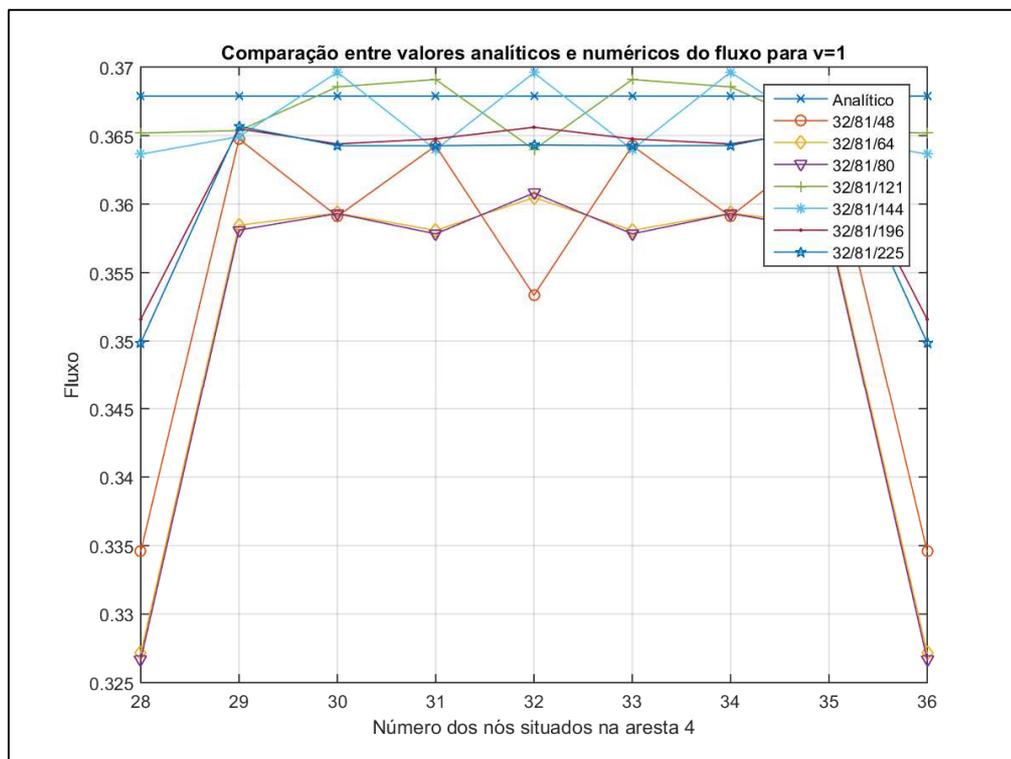


Figura 51 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

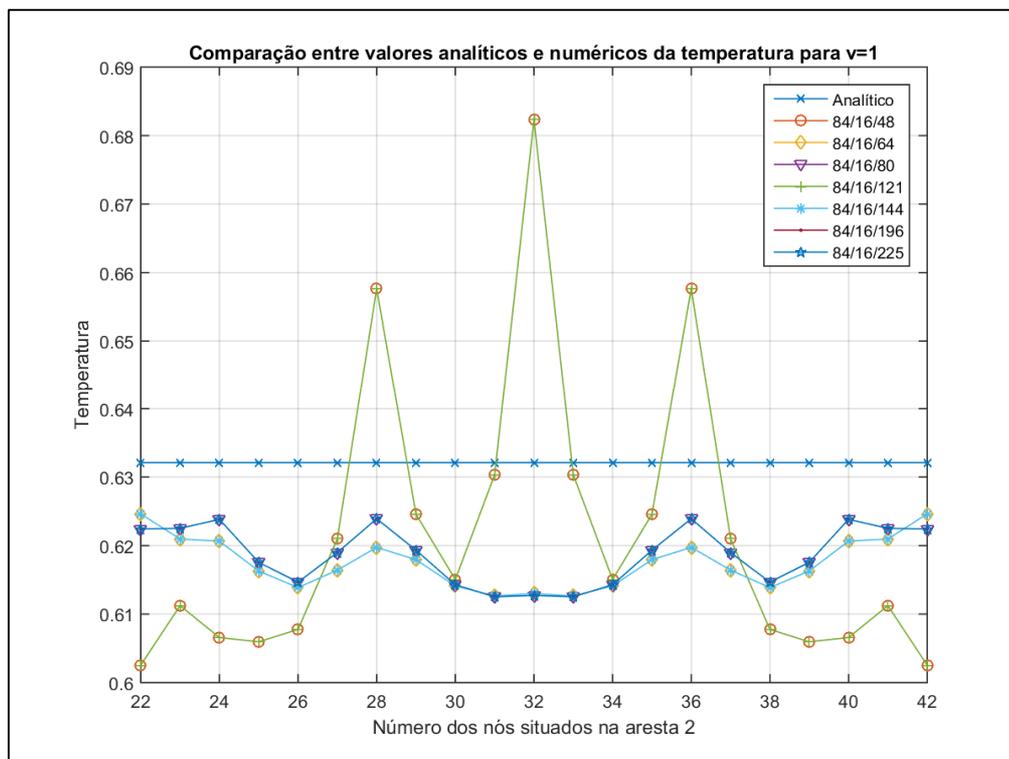


Figura 52 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos.

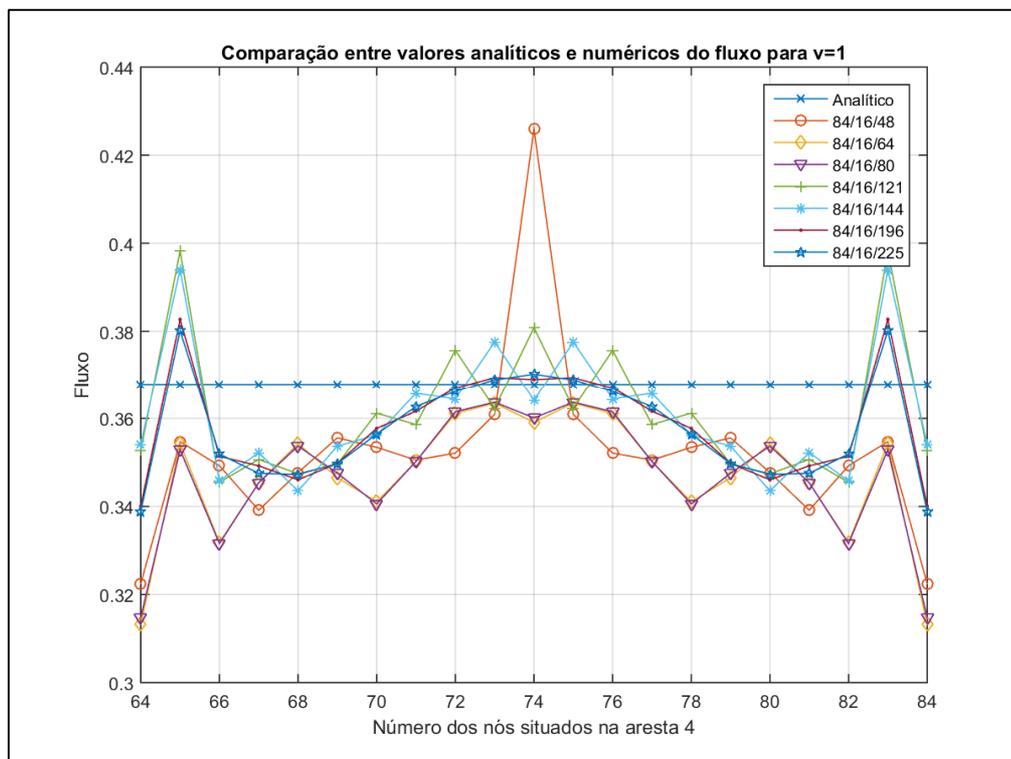


Figura 53 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

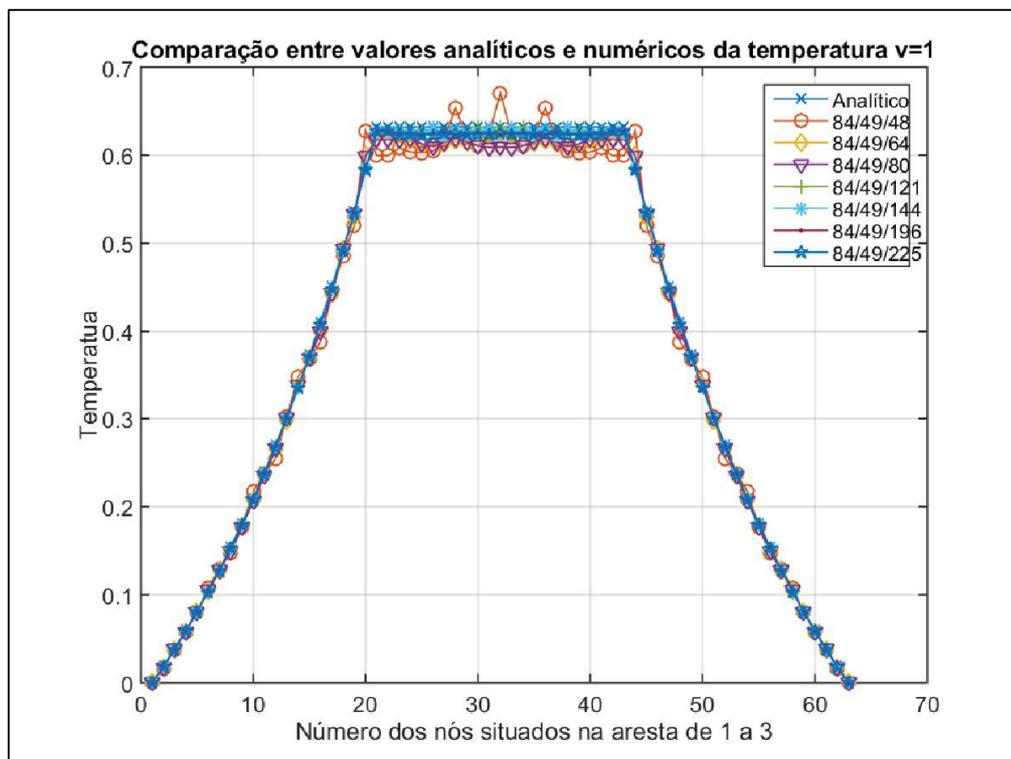


Figura 54 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

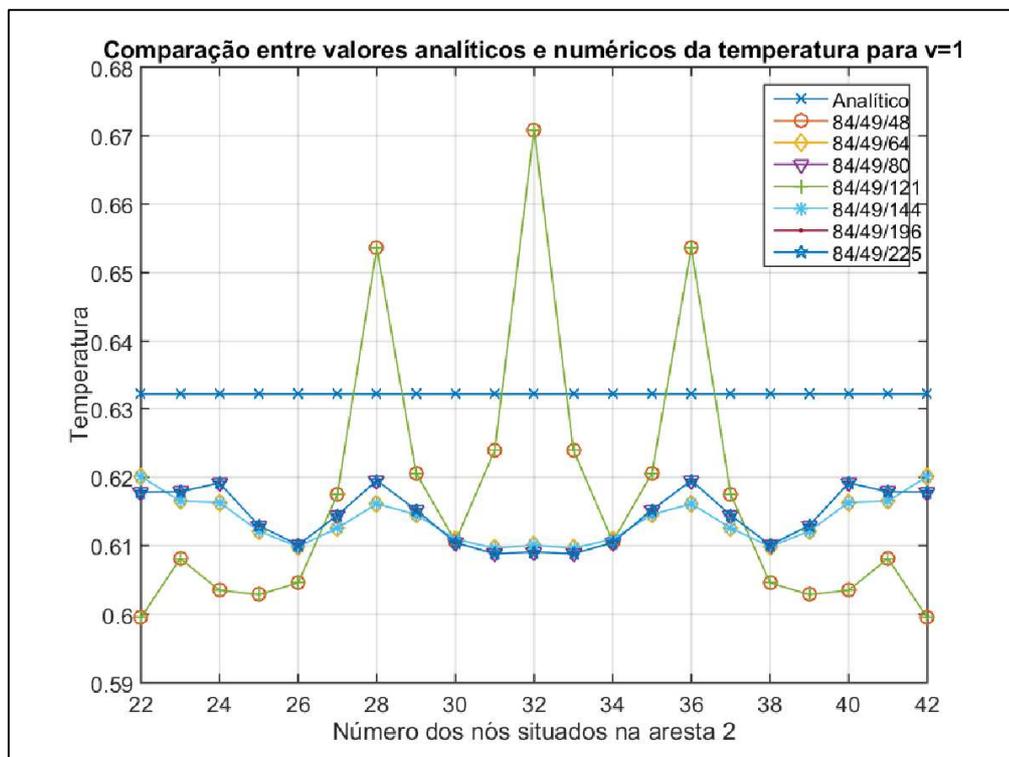


Figura 55 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos.

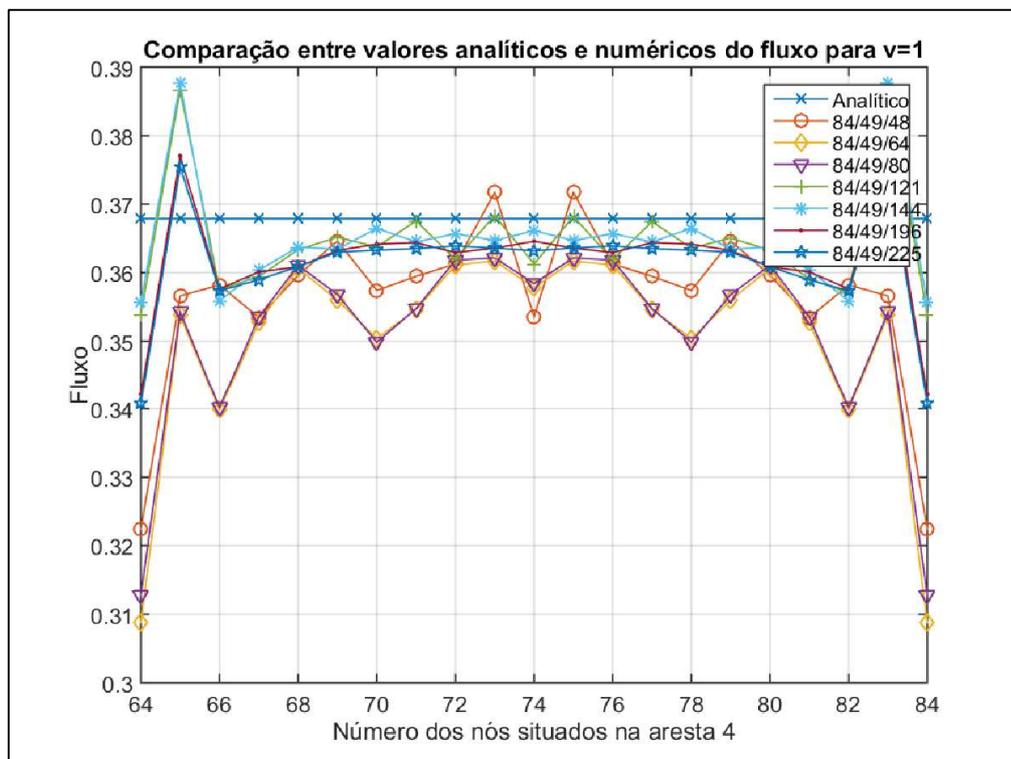


Figura 57 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos da temperatura calculados na aresta 2 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.

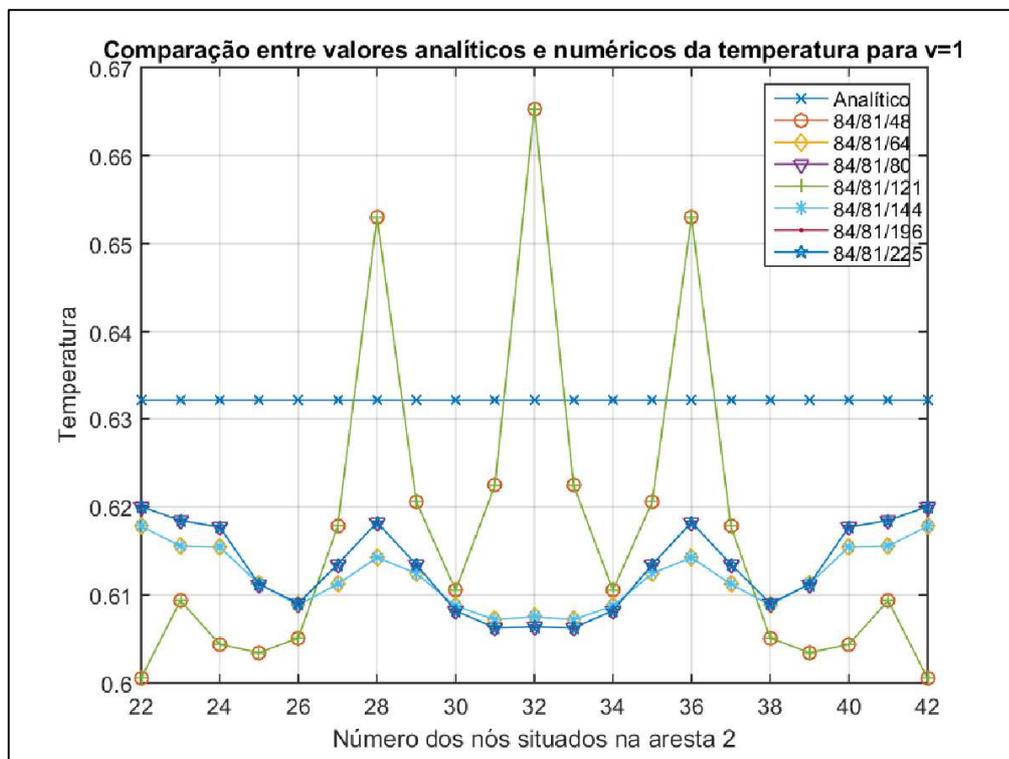
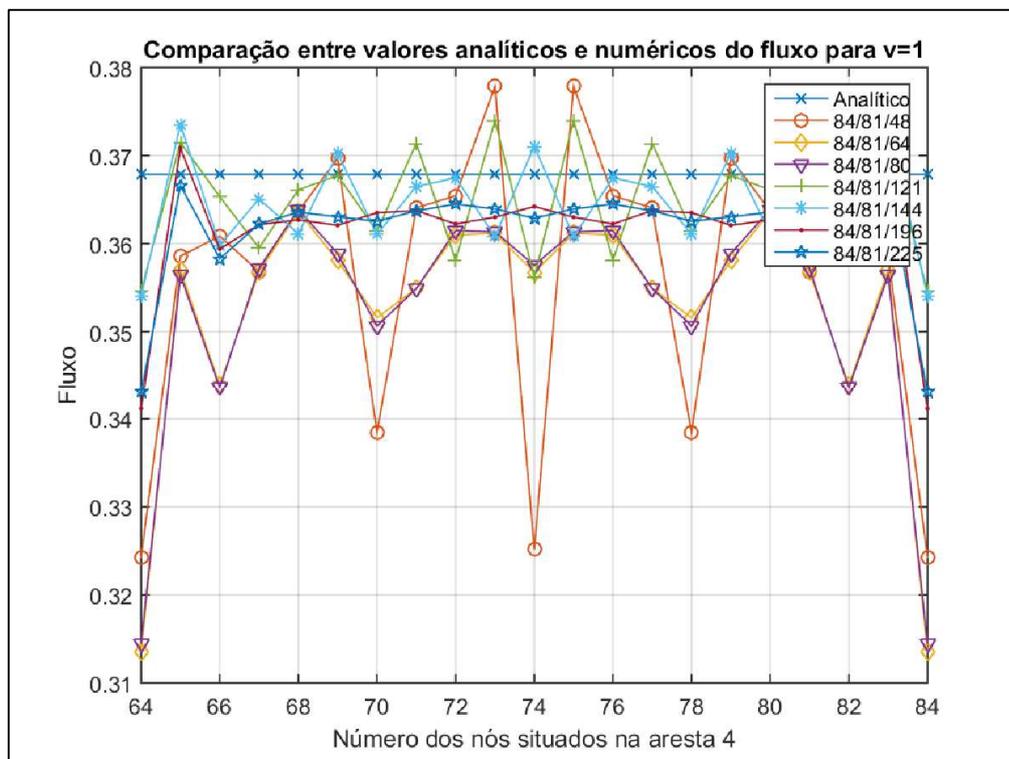


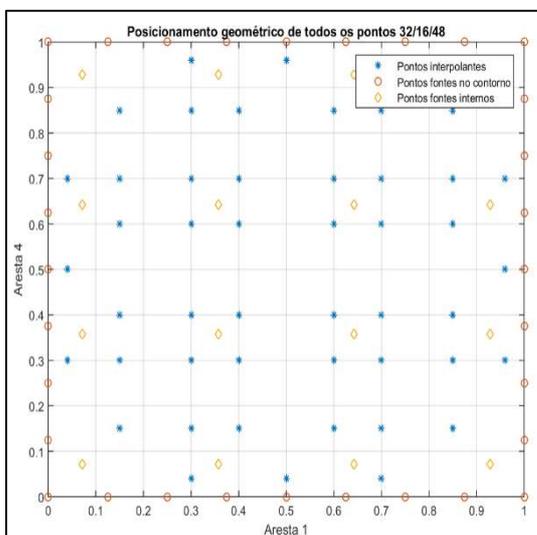
Figura 58 - Comparação entre os valores analíticos e numéricos do fluxo calculados na aresta 4 no problema 2 para malhas com 80 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos.



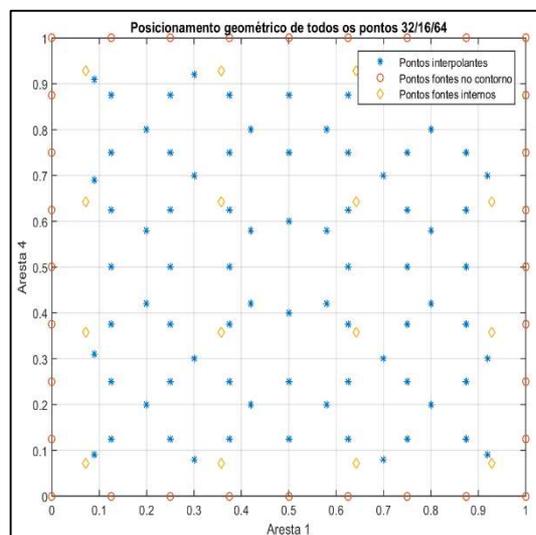
APÊNDICE B – POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTES NO CONTORNO, INTERNOS E DOS PONTOS INTERNOS DE INTERPOLAÇÃO

AP 2.1 DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS PARA AS MALHAS DE 32 ELEMENTOS DE CONTORNO E 16 PONTOS FONTES INTERNOS

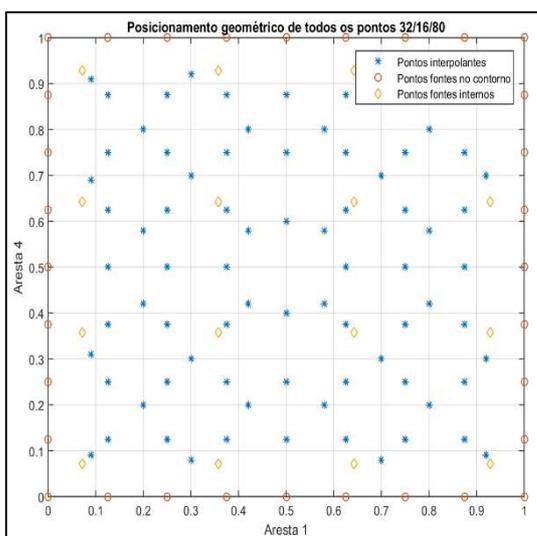
Figura 59 Distribuição dos pontos para as malhas de 32 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos. (a) 32/16/48, (b) 32/16/64, (c) 32/16/80, (d) 32/16/121, (e) 32/16/144, (f) 32/16/196 e (g) 32/16/225.



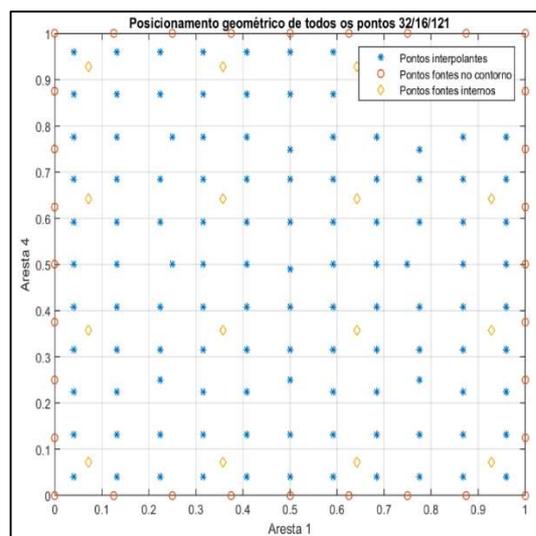
(a)



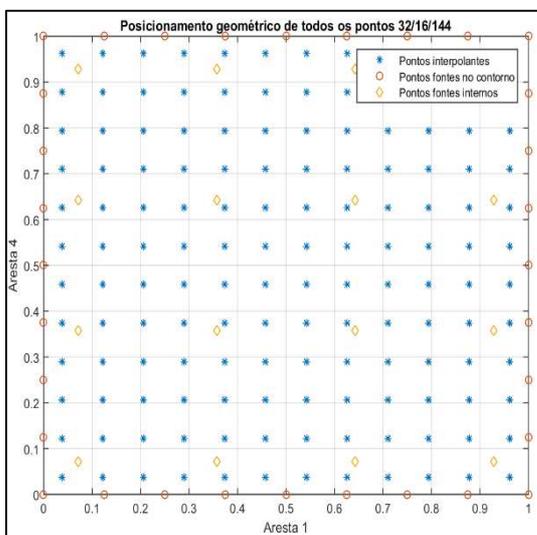
(b)



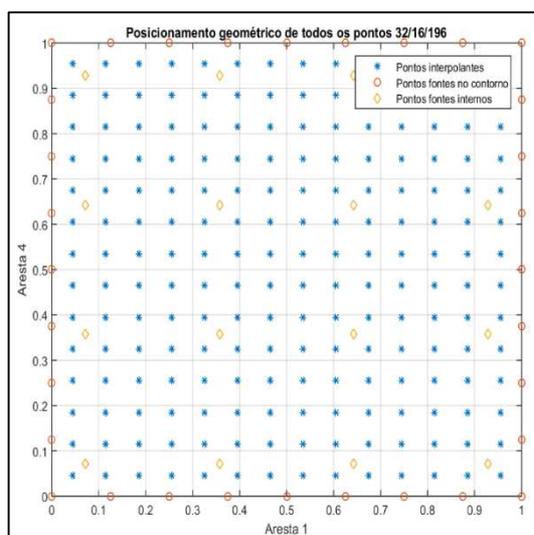
(c)



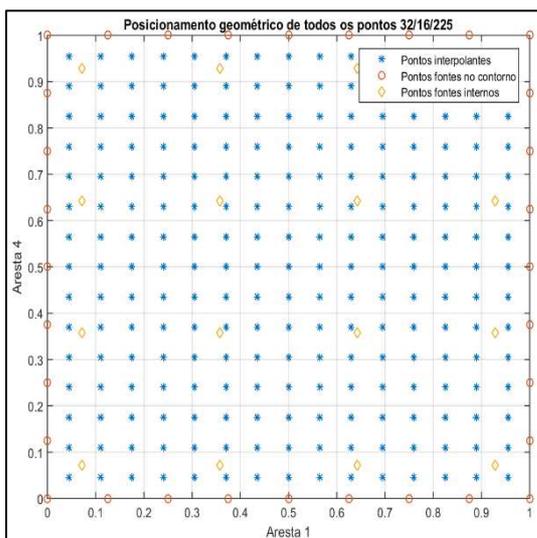
(d)



(e)

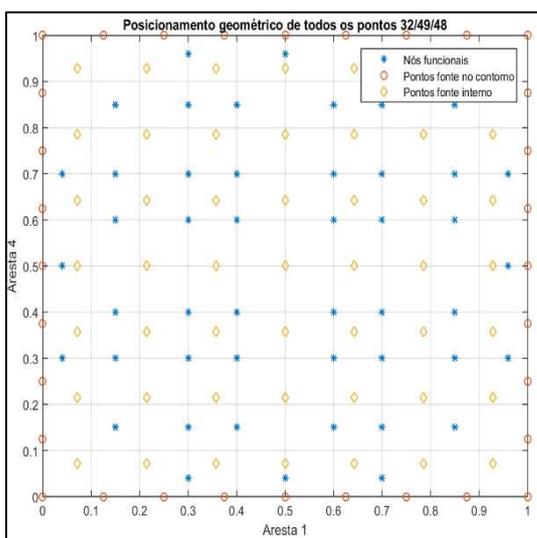


(f)

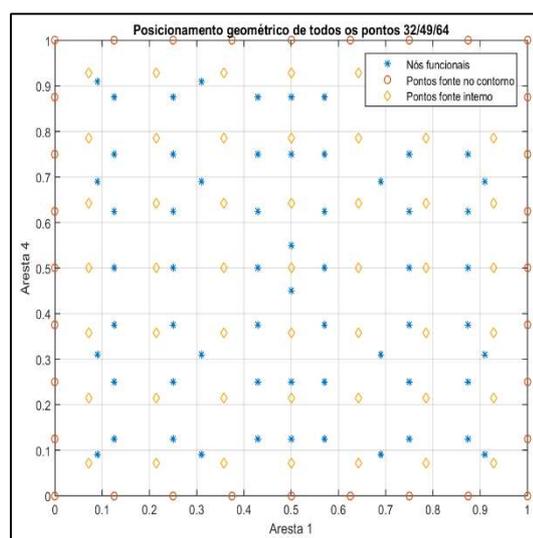


(g)

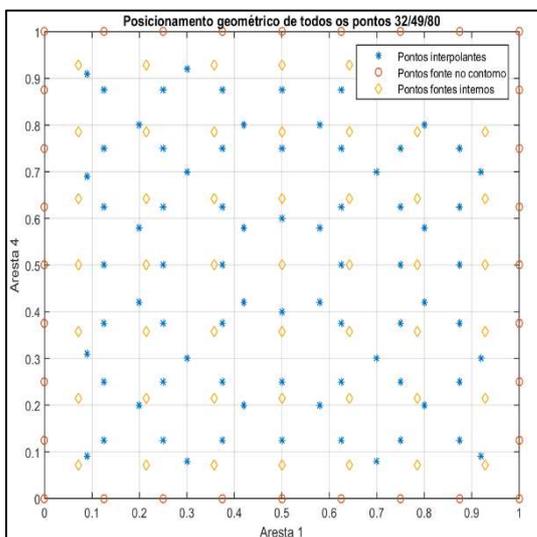
Figura 60 - Distribuição dos pontos para as malhas de 32 elementos de contorno e 49 pontos fontes internos. (a) 32/49/48, (b) 32/49/64, (c) 32/49/80, (d) 32/49/121, (e) 32/49/144, (f) 32/49/196 e (g) 32/49/225.



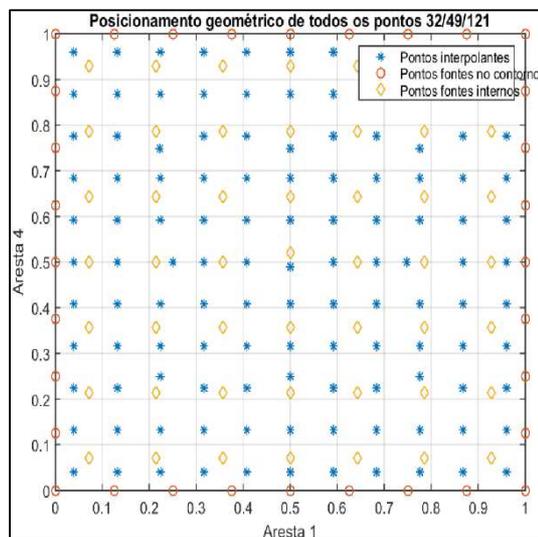
(a)



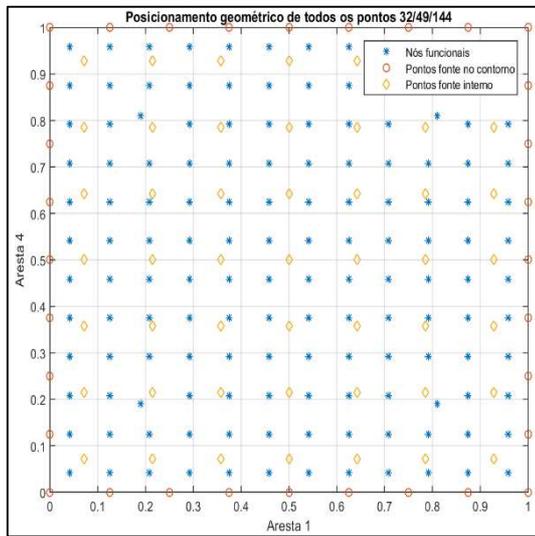
(b)



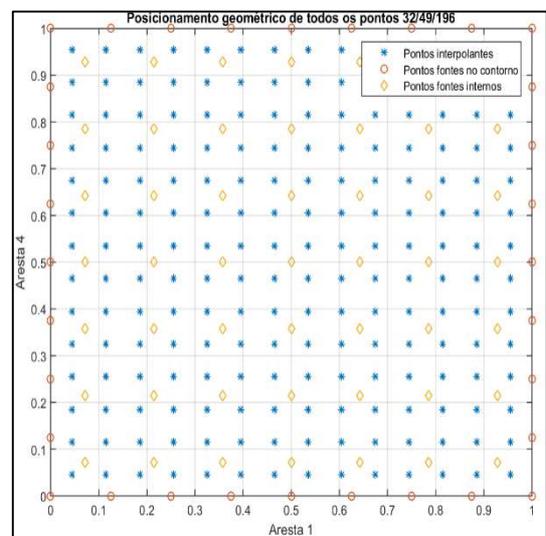
(c)



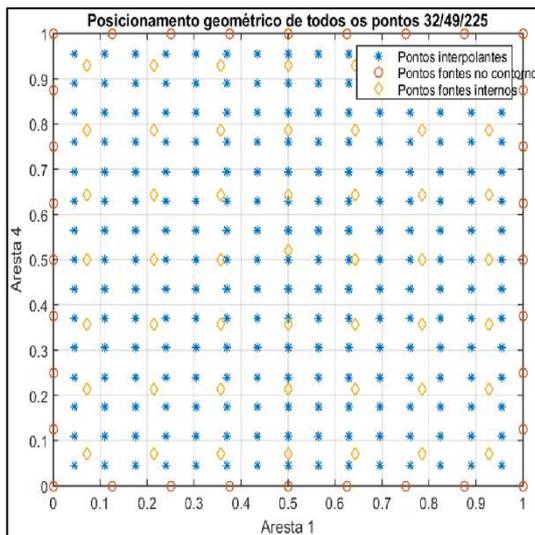
(d)



(e)

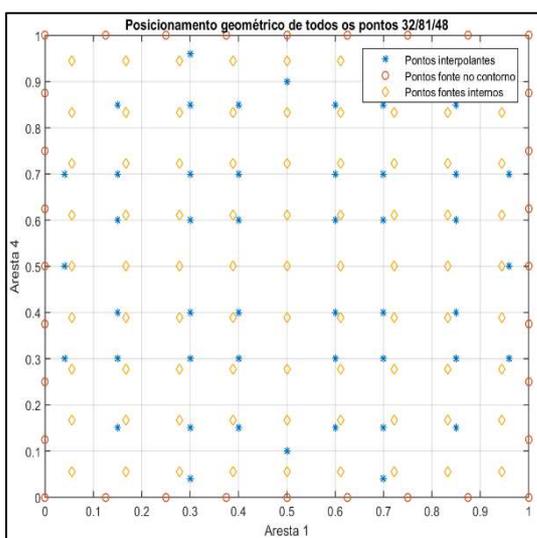


(f)

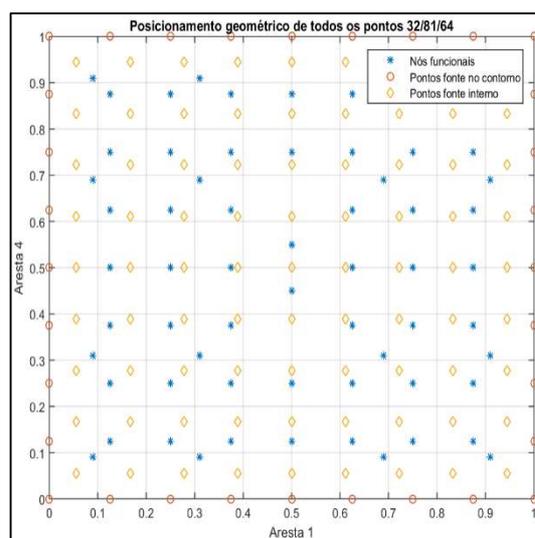


(g)

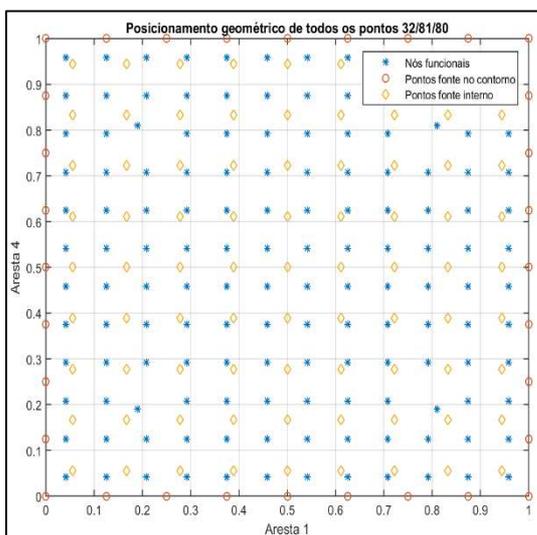
Figura 61 - Distribuição dos pontos para as malhas de 32 elementos de contorno e 81 pontos fontes internos. (a) 32/81/48, (b) 32/81/64, (c) 32/81/80, (d) 32/81/121, (e) 32/81/144, (f) 32/81/196 e (g) 32/81/225.



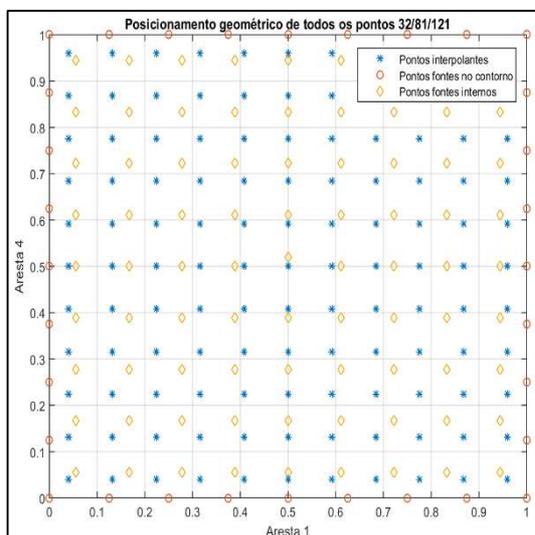
(a)



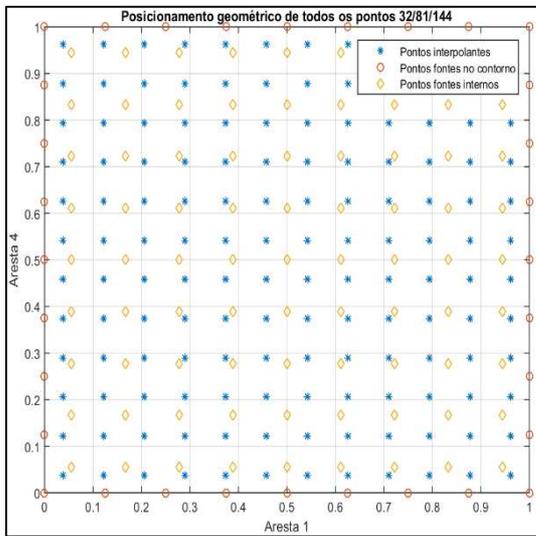
(b)



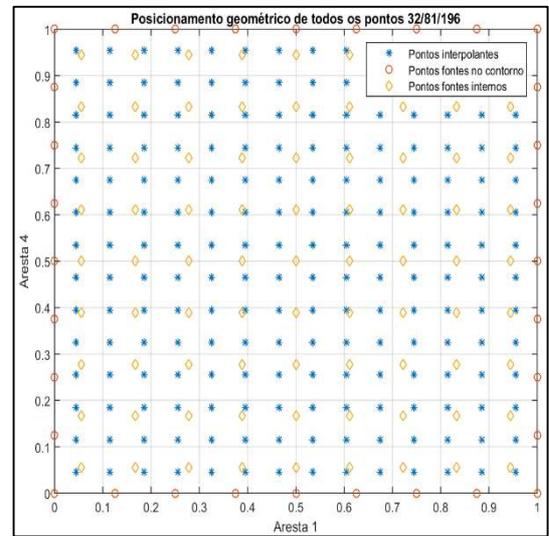
(c)



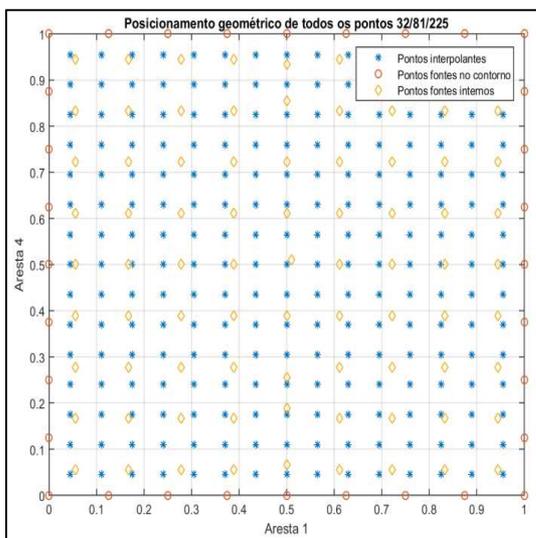
(d)



(e)

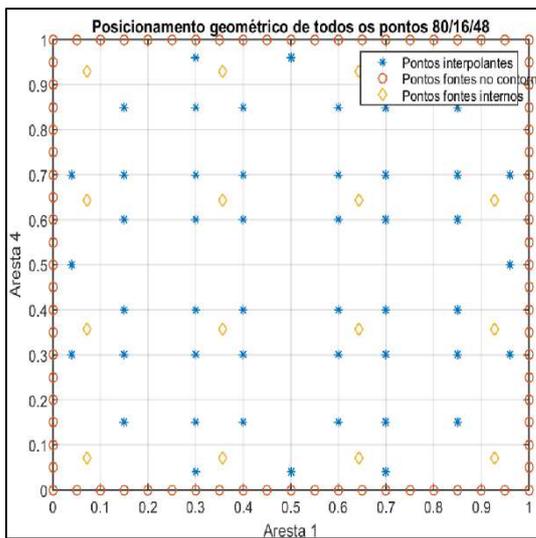


(f)

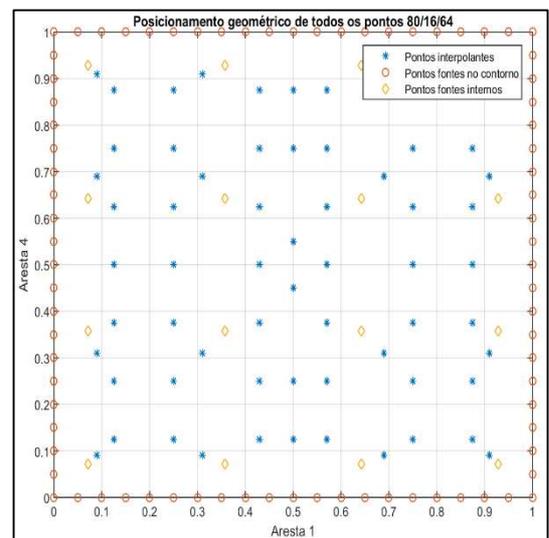


(g)

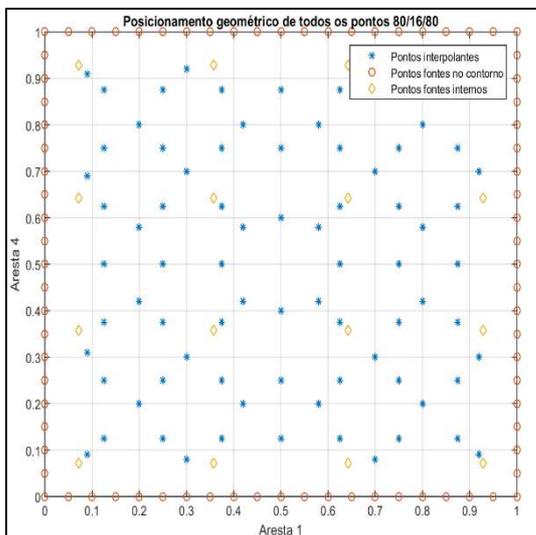
Figura 62 - Distribuição dos pontos para as malhas de 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos. (a) 80/16/48, (b) 80/16/64, (c) 80/16/80, (d) 80/16/121, (e) 80/16/144, (f) 80/16/196 e (g) 80/16/225.



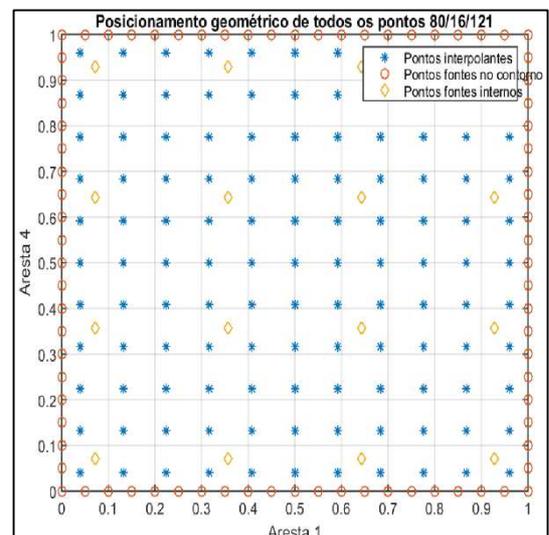
(a)



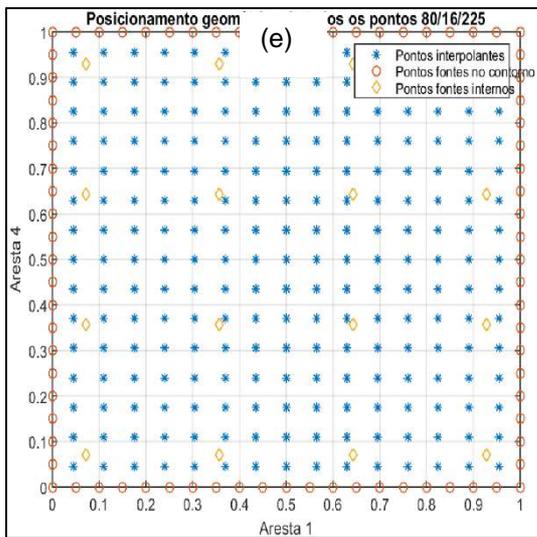
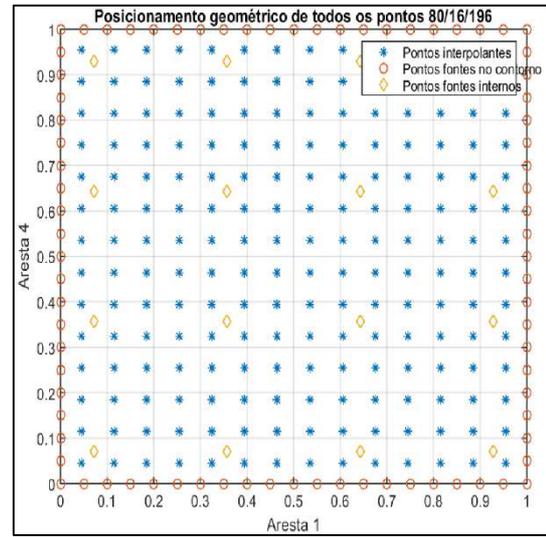
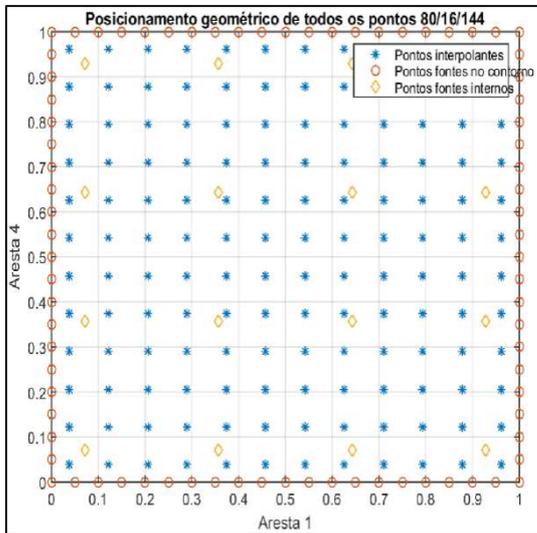
(b)



(c)



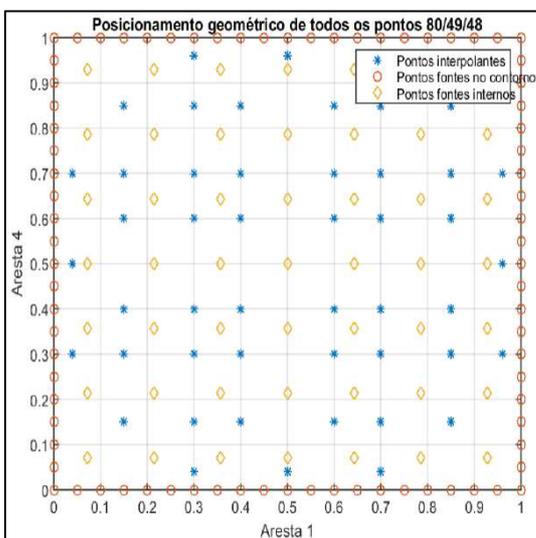
(d)



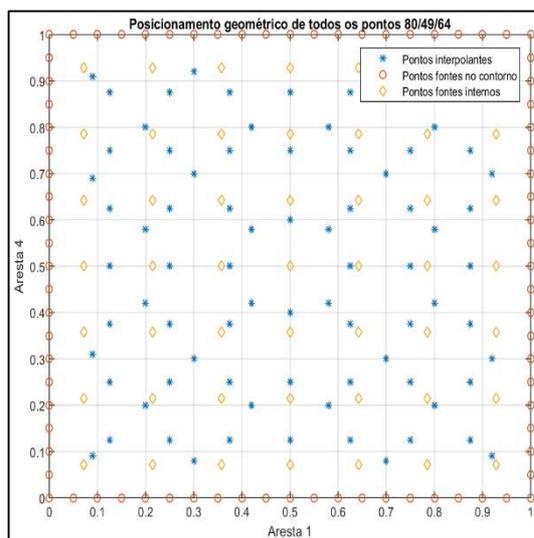
(g)

(f)

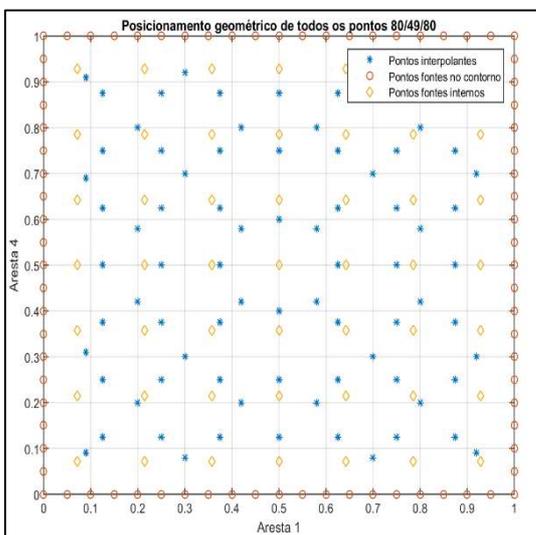
Figura 63 - Distribuição dos pontos para as malhas de 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos. (a) 80/49/48, (b) 80/49/64, (c) 80/49/80, (d) 80/49/121, (e) 80/49/144, (f) 80/49/196 e (g) 80/49/225.



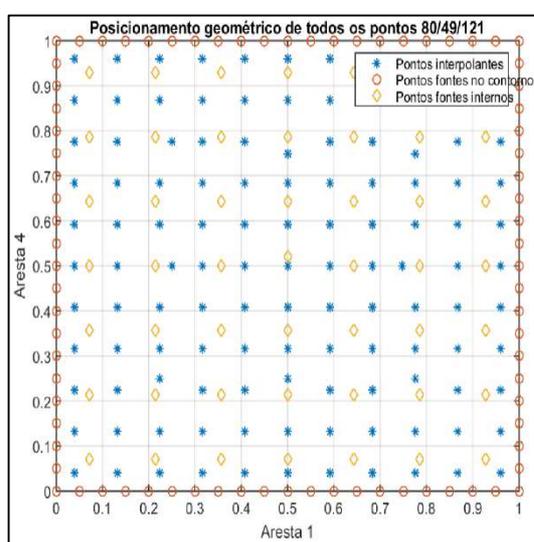
(a)



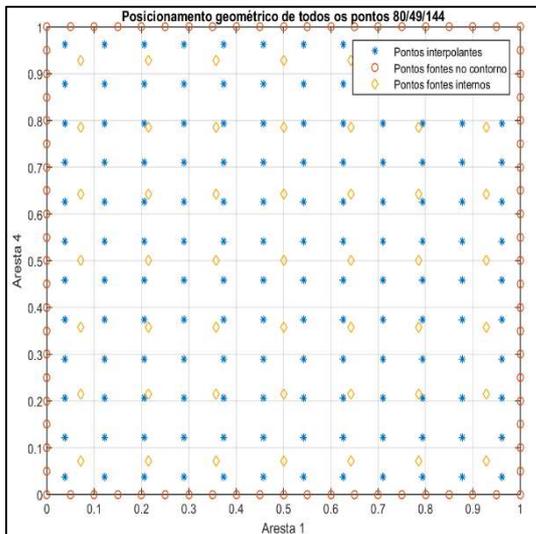
(b)



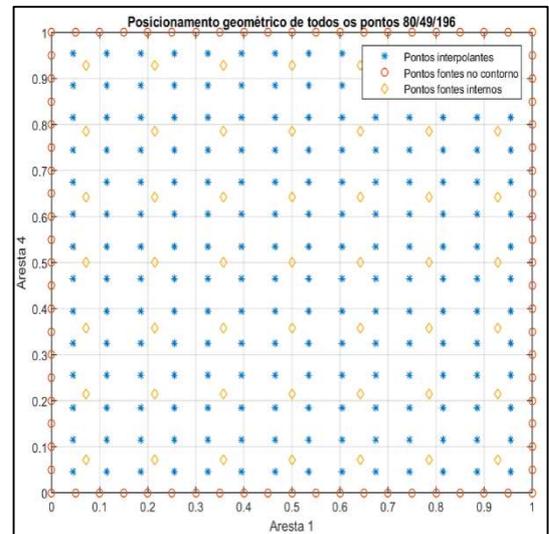
(c)



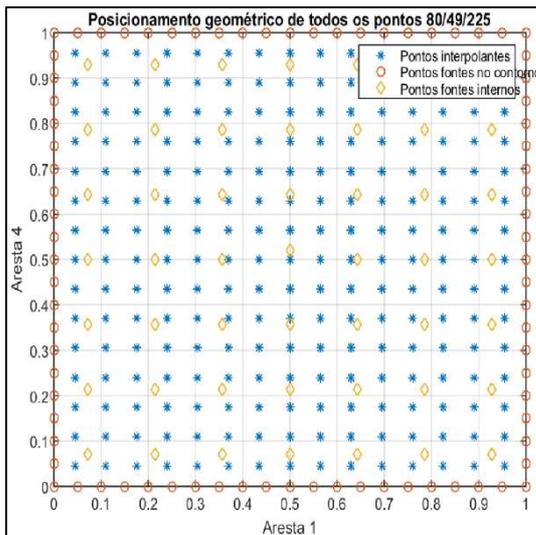
(d)



(e)

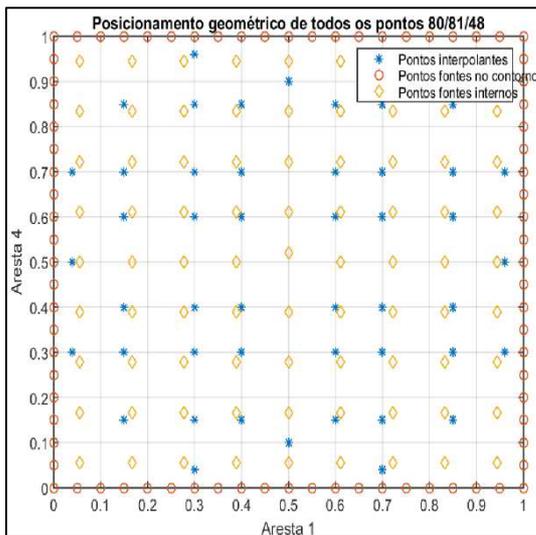


(f)

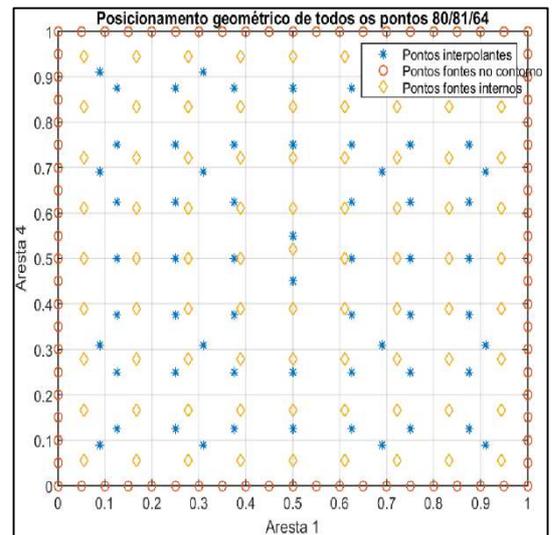


(g)

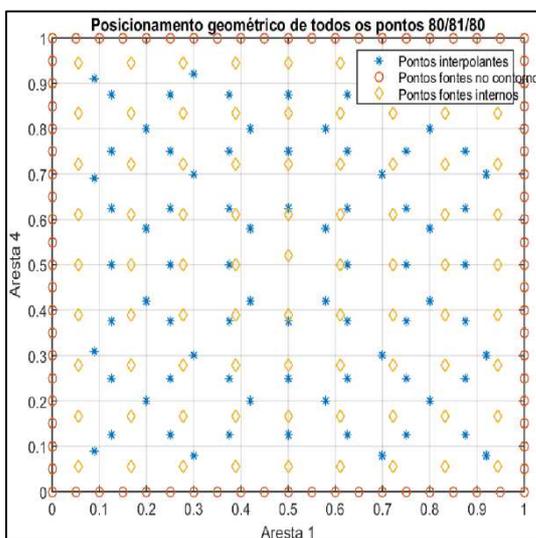
Figura 64 - Distribuição dos pontos para as malhas de 80 elementos de contorno e 16 pontos fontes internos. (a) 80/81/48, (b) 80/81/64, (c) 80/81/80, (d) 80/81/121, (e) 80/81/144, (f) 80/81/196 e (g) 80/81/225.



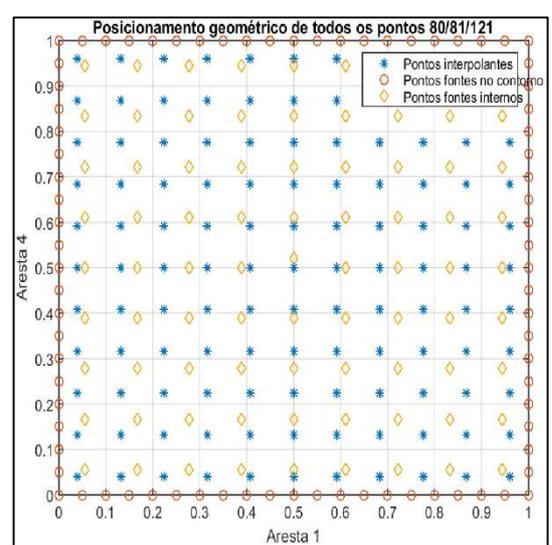
(a)



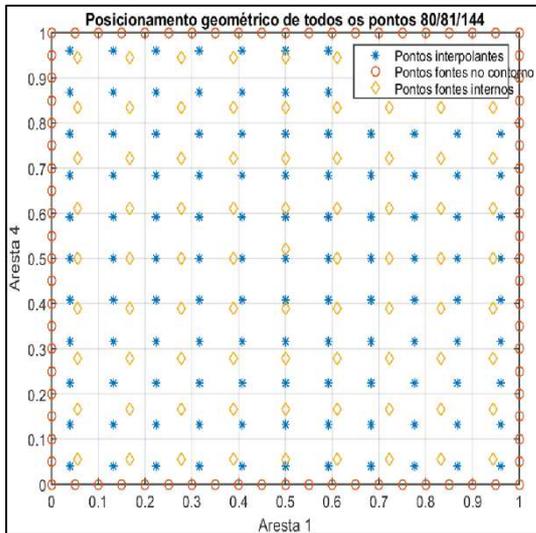
(b)



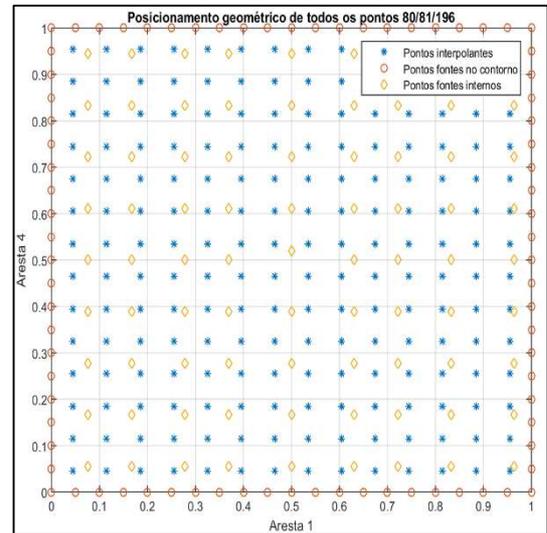
(c)



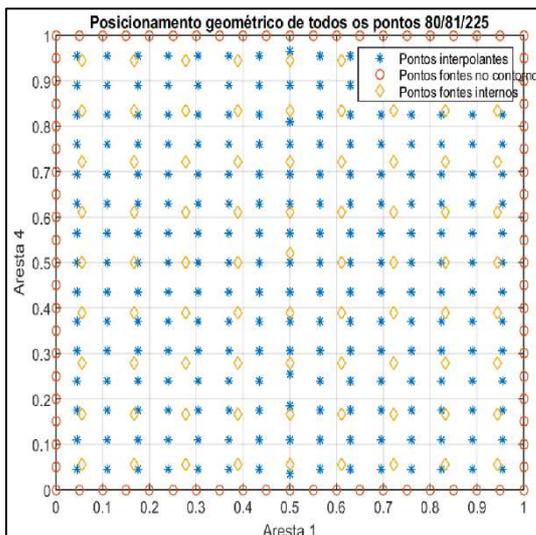
(d)



(e)



(f)



(g)