

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória, Março de 1999

Bulcão, André, 1972

Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade Usando Elementos de Ordem Superior Aplicada a Problemas de Campo Escalar Generalizado. [Vitória] 1999.

ix, 263p., 29,7 cm (UFES, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1999)

Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, PPGEM.

I. Método dos Elementos de Contorno

II. Métodos Numéricos

II. Campo Escalar Generalizado

I.

PPGEM.....II.

Título

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM DUPLA RECIPROCIDADE USANDO ELEMENTOS DE ORDEM SUPERIOR APLICADA A PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADO

RESUMO

No presente trabalho apresentam-se a formulação e a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para problemas englobados pela denominada Teoria de Campo Escalar, sendo que junto a sua formulação utiliza-se a Técnica da Dupla Reciprocidade (Dual Reciprocity Technique) para o tratamento das integrais de domínio para os casos onde os procedimentos tradicionais não conseguem transformar a equação integral em um sistema linear de equações algébricas envolvendo somente variáveis no contorno.

A Teoria de Campo Escalar encontra larga aplicação em diversas áreas da Engenharia, tais como: Termociências, Mecânica dos Flúidos, Mecânica dos Sólidos, Eletromagnetismo, Corrosão, dentre outras. Nas aplicações apresentadas os problemas são interpretados fisicamente, principalmente através da Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos.

São apresentadas diversas análises de problemas governados pelas seguintes Equações: Laplace, Poisson e de Difusão. Basicamente, com o propósito de avaliar-se o desempenho do Método dos Elementos de Contorno variam-se certos parâmetros que influenciam sua respostas, como, por exemplo, o nível de refinamento empregado nas discretizações e a utilização de diferentes tipos de elementos contorno. Para tanto, as soluções numéricas obtidas são comparadas junto às soluções analíticas ou com as soluções provenientes da aplicação de outros métodos numéricos. Em alguns casos, é realizado um paralelo entre o desempenho deste método frente ao Método dos Elementos Finitos ou ao Método dos Volumes Finitos.

FORMULATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH DUAL RECIPROCITY BY USING HIGHER ORDER ELEMENTS APPLIED TO GENERALIZED SCALAR FIELD PROBLEMS

ABSTRACT

The formulation and application of the Boundary Element Method to problems embodied by the so called Scalar Field Theory are presented. In the formulation, it is used the Dual Reciprocity Technique to treat domain integrals for which traditional procedures can not transform the integral equation into an algebraic equation linear system, only involving variables along the boundary.

The Scalar Field Theory is widely applied to several Engineering areas, such as: Thermosciences, Fluid mechanics, Solid Mechanics, Electromagnetism, Corrosion, among others. In the presented applications, the problems are physically interpreted mainly through Heat Transfer and Solid Mechanics.

Besides, several analysis of problems ruled by Laplace's, Poisson's and Diffusion Equations are presented. Basically, aiming to estimate the Boundary Element Method performance, certain parameters - which influence its results, such as the refinement level used in the discretizations - are varied and different boundary element types are considered. For such, the obtained numerical solutions are compared with the analytical ones, or even with those originated by the application of other numerical methods. In some cases, it is drawn a parallel between the performance of the Boundary Element method with the Finite Element Method, or either with the Finite Volume Method.

Aos meus pais e amigos

AGRADECIMENTOS

- À COMPANHIA SIDERÚRGICA DE TUBARÃO - C.S.T. (Vitória/ES), pelo indispensável apoio financeiro.
- À estrutura administrativa da Secretaria do Mestrado em Engenharia Mecânica, pela solicitude no atendimento às necessidades burocráticas.
- À Coordenadora do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Prof^a. Maria Ângela Loyola de Oliveira, por seu empenho em dissolver os inevitáveis embaraços e/ou dificuldades surgidas no transcorrer de todo o curso.
- A todo o Corpo Docente do Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo e, em especial aos professores:
 - Fernando César Meira Menandro, por sua disponibilidade em constantes trocas de idéias, no fornecimento de indicações bibliográficas e pelo se apoio no decorrer do curso;
 - Paulo César Oliveira, pela demonstração viva do conceito de fraternidade também transformada na parceira em trabalhos e no auxílio durante a construção do corpo desta dissertação.
- Ao Orientador: Prof. Carlos Friedrich Loeffler, pelo fortalecimento de uma amizade que se iniciou ainda durante minha graduação, consolidando-se e expandindo-se sob a forma de incentivo e indicações sempre presentes - precisas quanto à trajetória a seguir.
- Aos amigos, pela compreensão demonstrada enquanto permanecia mergulhado pelo meus estudos e pesquisas; e durante minha permanência na cidade de Vitória.
- A minha família; em especial: aos meus pais, Prof. Túlio Sérgio Bulcão, pelo crédito e paciência singular em atuar também como revisor do texto; e Prof^a. Ivéte Costa Bulcão, por sua paciência e compreensão hiper-singular.

Sumário

	INTRODUÇÃO	1
	Referências Bibliográficas	9
Cap. I	TEORIA DE CAMPO ESCALAR	10
	I.1 - Introdução	10
	I.2 - Formulação Matemática	12
	Referências Bibliográficas	18
Cap. II	ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS	19
	II.1 - Sistema de Coordenadas Naturais	19
	II.2 - Diferentes Tipos de Funções de Interpolação Polinomiais	20
	II.3 - Cálculo do Jacobiano	23
	II.4 - Cálculo do Vetor Normal	26
	II.5 - Principais Tipos de Elementos de Contorno	28
	II.6 - Tipos Especiais de Elementos De Contorno	33
	II.7 - Integração Numérica	39
	Referências Bibliográficas	55

Cap. III	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À EQUAÇÃO DE LAPLACE	57
	III.1 - Introdução	57
	III.2 - Discretização da Equação Integral	62
	III.3 - Introdução das Condições de Contorno	65
	III.4 - Procedimento Numérico para o Cálculo de $C(\xi)$	67
	III.5 - Recursos Auxiliares do Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Equação de Laplace	68
	III.6 - Aplicações Numéricas	73
	III.6.1 - 1ª Análise	74
	III.6.2 - 2ª Análise	80
	III.6.3 - 3ª Análise	90
	III.6.4 - 4ª Análise	101
	III.6.5 - 5ª Análise	121
	III.6.6 - 6ª Análise	126
	III.6.7 - 7ª Análise	131
	Referências Bibliográficas	139
Cap. IV	DUPLA RECIPROCIDADE	141
	IV.1 - Introdução	141
	IV.2 - Formulação Matemática	143
	IV.3 - Discretização da Equação Integral	146
	IV.4 - Funções Auxiliares	146
	IV.5 - Os Coeficientes α^j	149
	IV.6 - Tratamento dos Casos Transientes	150
	IV.7 - Tratamento dos Casos Não-Lineares	150
	Referências Bibliográficas	151
Cap. V	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	152

APLICADO À EQUAÇÃO DE POISSON	
V.1 - Introdução	152
V.2 - Aplicações Numéricas	156
V.2.1 - 1 ^a Análise	156
V.2.2 - 2 ^a Análise	161
V.2.3 - 3 ^a Análise	175
V.2.4 - 4 ^a Análise	179
V.2.5 - 5 ^a Análise	183
V.2.6 - 6 ^a Análise	194
Referências Bibliográficas	199
Cap. VI O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO	200
VI.1 - Introdução	200
VI.2 - Aplicações Numéricas	204
VI.2.1 - 1 ^a Análise	204
VI.2.2 - 2 ^a Análise	211
VI.2.3 - 3 ^a Análise	220
VI.2.4 - 4 ^a Análise	228
Referências Bibliográficas	241
CONCLUSÕES	242
Referências Bibliográficas	246
Bibliografia	247
Apêndices	249
Apêndice 1	250
Apêndice 2	252
Apêndice 3	256

INTRODUÇÃO

O alto nível de sofisticação dos problemas físicos analisados e resolvidos atualmente pela Engenharia resulta da utilização de poderosos métodos numéricos de solução, que utilizam-se de aproximações matemáticas consistentes. Tais métodos, geralmente, adotam alguma forma de discretização do domínio físico do problema, a fim de transformar a equação diferencial associada ao modelo matemático em um conjunto de equações algébricas.

Na grande maioria dos problemas atualmente analisados torna-se impraticável qualquer tratamento analítico existente, devido, principalmente, as geometrias e condições de contorno a que os problemas estão submetidos, mesmo para aqueles casos onde a equação diferencial de governo já encontra-se bastante simplificada, daí a grande importância dos métodos numéricos.

Desta forma, os métodos numéricos encontram-se em uma posição de destaque junto as diversas áreas de pesquisa, sendo objeto de estudo de inúmeros pesquisadores que concentram-se no aprimoramento e busca de novas técnicas numéricas que satisfaçam as crescentes exigências da Engenharia Moderna.

Um dos primeiros métodos numéricos desenvolvidos trata-se do Método das Diferenças Finitas, aplicado, até a atualidade, a uma extensa gama de problemas. Neste método, utiliza-se uma malha sobre todo o domínio físico do problema, a qual contém determinados pontos onde são efetuadas as aproximações envolvidas.

No Método das Diferenças Finitas as derivadas existentes na equação diferencial de governo são aproximadas utilizando-se de uma expansão truncada da série de Taylor [1]. Assim, expressa-se a equação algébrica resultante de tal aproximação em termos dos valores da função incógnita em alguns pontos específicos da malha utilizada, os pontos

nodais. O sistema de equações algébricas formado por tal procedimento é então resolvido aplicando-se as condições de contorno do problema.

Geralmente, tal esquema de aproximação mostra-se suficientemente robusto para representar de forma adequada a equação diferencial de governo. A principal dificuldade do Método das Diferenças Finitas consiste em sua aplicação para problemas contendo um domínio físico com formas geométricas intrincadas, pois, neste caso, tem-se dificuldades para o estabelecimento adequado da malha a ser utilizada para a discretização. Outra dificuldade surge na aplicação das condições de contorno, que em alguns casos, envolvem a criação de pontos nodais fictícios, que são externos ao domínio do problema, sendo que existem ainda casos que são tratados de forma iterativa.

A vantagem na utilização de esquemas envolvendo o Método das Diferenças Finitas, consiste em tais esquemas serem comparativamente econômicos, em relação a outros métodos numéricos, para a montagem do sistema linear de equações algébricas resultante, devido a simplicidade das operações envolvidas. Por este motivo, tais esquemas ainda são largamente utilizados atualmente, principalmente, em aplicações em áreas como a Mecânica dos Fluidos, a qual requer a aplicação de uma malha altamente refinada.

Recentemente desenvolveu-se, baseado em esquemas do tipo diferenças finitas, uma técnica numérica denominada Método dos Volumes Finitos. Em tal método numérico, aprimora-se a estrutura de discretização contida no Método das Diferenças Finitas, discretizando-se o domínio físico do problema através de uma série de volumes elementares, os volumes finitos.

Ao longo dos denominados volumes finitos impõe-se a continuidade das incógnitas do problema, que podem variar de acordo com as funções de interpolações adotadas (funções de interpolações constante, lineares, quadráticas ou cúbicas). Para a resolução do problema utiliza-se uma equação extra, dada pela imposição do princípio de conservação do fluxo nos volumes elementares, isto é, a conservação das grandezas derivadas. Devido a estas características tal método numérico possui indiscutível superioridade na precisão dos resultados quando comparado ao Método das Diferenças Finitas [2, 3].

O método numérico mais amplamente utilizado na atualidade trata-se do Método dos Elementos Finitos. Neste método numérico, para a discretização do domínio físico do problema é utilizada uma série de elementos dispostos sobre o domínio cuja forma

independe da equação diferencial do problema. Tais elementos são compostos por pontos nodais sobre os quais é equacionado o sistema de equações algébricas resultante.

Os denominados elementos finitos são pequenas porções do domínio físico do problema, onde a variação das incógnitas do problema no interior de tais elementos são aproximadas através da aplicação das chamadas funções de interpolação. Estabelece-se, então, uma sentença de Resíduos Ponderados, afim de proporcionar uma distribuição do erro envolvido em tal aproximação ao longo de todos os elementos finitos que compõem o domínio físico do problema através do uso de funções auxiliares ou de ponderação, que compõem o núcleo das integrais. Outra forma de interpretação para este processo de minimização do erro pode ser dada como sendo a obtenção do mínimo energético associado a um funcional [4, 5, 6].

O Método dos Elementos Finitos, foi inicialmente desenvolvido para a aplicação em Mecânica dos Sólidos, mas atualmente apresenta-se altamente difundido nos diversos outros ramos da Engenharia. Tal método foi gerado com o intuito de melhor representar problemas possuindo domínios físicos contendo uma geometria intrincada e de forma a simplificar as aplicações das condições de contorno associadas, eliminando assim algumas das dificuldades do Método das Diferenças Finitas.

A implementação computacional do Método dos Elementos Finitos consiste na montagem de sub-matrizes que computam as propriedades de cada elemento, através de coeficientes de influência, para então formar-se o sistema de equações algébricas associado ao domínio físico do problema, isto é, ao conjunto de elementos utilizados para a discretização.

No Método dos Elementos Finitos a aplicação das condições de contorno processa-se de maneira simples, e tem-se a possibilidade da representação de problemas com domínios possuindo uma geometria intrincada. Tais características fazem deste método numérico de cálculo uma ferramenta numérica muito mais versátil quando comparada ao Método das Diferenças Finitas.

As desvantagens do Método dos Elementos Finitos consistem na grande entrada de dados necessária para a discretização de todo o domínio físico do problema. Este fato torna-se ainda mais relevante em problemas tridimensionais, e em algumas situações o método apresenta resultados imprecisos, embora apresente convergência com o aumento do grau de refinamento utilizado na discretização.

O fato do Método dos Elementos Finitos apresentar resultados imprecisos ocorre, principalmente, para os casos onde as incógnitas apresentam descontinuidades, singularidades ou uma elevada taxa de variação. Tem-se também dificuldades para modelar problemas com domínios físicos infinitos e problemas de fronteira variável.

O Método dos Elementos de Contorno foi desenvolvido como sendo uma possível resposta a algumas das dificuldades e problemas associados a maioria dos métodos numéricos acima descritos. Este método requer a discretização apenas do contorno do domínio físico do problema, reduzindo assim enormemente o volume de dados necessários para a modelagem de um determinado problema.

A idéia básica deste método é a utilização de um procedimento matemático consistente, baseado em princípios das Equações Integrais, a fim de transformar a equação diferencial associada ao modelo matemático em uma expressão integral, onde os limites das integrações encontram-se somente sobre o contorno do domínio físico do problema [7-11].

Em seguida, tal expressão integral é discretizada utilizando-se de diversos elementos dispostos sobre o contorno do domínio físico do problema. Daí a denominação do Método dos Elementos de Contorno, sendo que tais elementos são formados por um conjunto de pontos nodais. A seguir as equações são expressas através de um sistema de equações algébricas, formado pelos denominados coeficientes de influência, que computam a influência de uma ação de domínio concentrada em determinado ponto sobre os pontos nodais de um determinado elemento de contorno.

É interessante notar que enquanto o Método das Diferenças Finitas envolve apenas aproximações realizadas sobre a equação diferencial de governo do problema, tanto o Método dos Elementos Finitos quanto o Método dos Elementos de Contorno envolvem o cálculo de integrais realizadas ao longo de seus respectivos elementos.

O Método dos Elementos Finitos requer a execução de integrações em seus elementos dispostos ao longo de todo o domínio físico do problema, onde as variações envolvidas são expressas através do uso das denominadas funções de interpolação polinomiais. Já no Método dos Elementos de Contorno, as integrais envolvidas são realizadas apenas ao longo dos elementos de contorno. No entanto, tais integrais são mais complexas do que as realizadas no Método dos Elementos Finitos, requerendo técnicas numéricas especiais de integração para a obtenção de resultados satisfatórios, devido ao caráter do núcleo das integrais, que envolve uma função auxiliar singular, a denominada solução fundamental.

Para a resolução do sistema de equações algébricas resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno e, por conseguinte, a obtenção da solução do problema, aplicam-se as condições de contorno associadas a cada ponto nodal. Este procedimento é feito de forma análoga ao realizado pelo Método dos Elementos Finitos.

Como no Método dos Elementos de Contorno a discretização é feita somente utilizando-se do contorno do domínio físico do problema, a dimensão do problema se reduz de uma unidade. Isto em termos práticos implica em uma redução considerável da quantidade de dados necessária à definição da malha a ser utilizada e do esforço computacional, já que o sistema de equações, apesar de ser formado por matrizes cheias e não simétricas, é geralmente de dimensão muito menor que as matrizes que seriam produzidas por outros métodos numéricos.

A seguir apresentam-se algumas vantagens do Método dos Elementos de Contorno em relação aos demais métodos numéricos apresentados anteriormente, mas em especial em relação ao Método dos Elementos Finitos, pois este corresponde ao método numérico mais utilizado na atualidade.

O Método dos Elementos de Contorno pode ser utilizado para modelar, sem dificuldades especiais, problemas envolvendo descontinuidades e singularidades associadas ao modelo matemático. Outra importante característica do método consiste no fato de poder ser utilizado para modelar problemas possuindo domínio físico infinito, sem a necessidade de truncar o domínio físico a uma distância finita.

O Método dos Elementos de Contorno apresenta uma menor entrada de dados para modelar-se um determinado problema, pois neste método a discretização limita-se apenas ao contorno do domínio físico do problema. Tal vantagem torna-se bem mais relevante no caso da análise de problemas tridimensionais. Quando pretende-se fazer análises com diferentes graus de refinamento para a discretização ou para a implantação de esquemas auto adaptativos esta característica do método também mostra-se muito atraente.

A abordagem de problemas envolvendo domínios físicos infinitos e semi-infinitos é feita de forma muito simples [9-11], pois neste caso requer-se apenas a discretização dos contornos internos, sem a necessidade da adoção de artifícios especiais para truncar o domínio físico a uma distância finita. Este fato explica a ascendência do Método dos Elementos de Contorno em problemas ligados a propagação de ondas em domínios abertos.

Efeitos concentrados e localizados são bem captados pelo Método dos Elementos de Contorno devido à característica singular da solução fundamental utilizada na formulação do método. Deste modo, consegue-se obter resultados satisfatórios sem a exigência de um elevado refinamento na região de concentração, sendo que tal fato não ocorre com o Método dos Elementos Finitos, pois a utilização de funções de ponderação polinomiais tende a suavizar concentrações e singularidades, requerendo assim um grande refinamento nestas regiões.

Os chamados problemas com fronteiras variáveis, onde, por exemplo, tem-se uma interface móvel entre duas substâncias diferentes, são freqüentemente encontrados na Engenharia. Tais problemas possuem solução mais simples através do Método dos Elementos de Contorno, pois evidentemente neste método a movimentação dessas fronteiras é tratada mais facilmente do que nos demais métodos de domínio.

No Método dos Elementos de Contorno o cálculo das variáveis internas ao contorno é feito em um “pós-processamento”, a partir da obtenção das variáveis no contorno, reaplicando-as na sentença integral do método. A melhoria da qualidade dos resultados para os pontos internos pode ser explicada pelo fato de que, a aplicação da sentença integral neste ponto promove um tipo de média dos resultados obtidos no contorno.

Sendo que, quando tais resultados são calculados em pontos afastados ao contorno, devido a um princípio equivalente, para casos escalares, ao Teorema de Saint Venant [12], pequenos erros cometidos nos pontos nodais funcionais no contorno são, então, atenuados; e quando tais resultados são calculados em pontos próximos ao contorno, além dos erros numéricos devidos as integrais quasi-singulares realizadas [7-11], pequenos erros cometidos nos pontos nodais funcionais terão uma participação mais efetiva no cálculo das grandezas para este ponto, tendo então uma precisão inferior.

O Método dos Elementos de Contorno pode ser formulado, basicamente, por dois modos distintos: pelas chamadas formulações diretas e indiretas. A formulação dita indireta do Método dos Elementos de Contorno possui a característica de não fornecer diretamente como solução o potencial e sua derivada normal ao contorno, ao contrário da formulação direta, adotada ao longo deste trabalho, onde tem-se diretamente como incógnitas o potencial e sua derivada normal ao contorno.

A formulação indireta do Método dos Elementos de Contorno baseia-se no fato de que qualquer função harmônica pode ser representada por uma distribuição contínua de

fontes ao longo do contorno do problema. Impondo-se a satisfação das condições de contorno, chega-se a equações integrais que envolvem a densidade da fonte como incógnita. Esta formulação apresenta a desvantagem conceitual da introdução de fontes, que normalmente não tem relação com a física do problema [9].

A formulação direta do Método dos Elementos de Contorno será exposta nos capítulos posteriores. Tal formulação possui a vantagem de fornecer diretamente como incógnitas do problema o potencial e sua derivada normal ao contorno, além de permitir a aplicação do método em superfícies regulares de Kellog [13], que admitem a existência de vértices e arestas; na formulação indireta o método aplica-se apenas as superfícies de Liapunov, superfícies com contornos suaves [14].

LIMITAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Assim como qualquer outro método numérico, a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno também apresenta suas desvantagens, dificuldades ou limitações no tratamento de certos tipos de problemas, embora tais restrições tenham amplitude relativamente reduzida face ao enorme campo de abrangência do método.

A primeira desvantagem do Método dos Elementos de Contorno encontra-se no fato de suas matrizes, geralmente, serem assimétricas e cheias, o que impede o uso de alguns algoritmos especialmente otimizados para solução de sistemas lineares de equações algébricas e a obtenção de autovalores e autovetores, pois tais algoritmos, largamente utilizados pelo Método dos Elementos Finitos, pressupõe que as matrizes sejam simétricas e bandedas.

Esta desvantagem é contornada com o emprego de algoritmos numéricos mais genéricos, que embora mais complexos, podem ser aplicados as matrizes características do Método dos Elementos de Contorno. Tais algoritmos perdem em termos de eficiência (tempo de processamento) em relação aos utilizados pelo Método dos Elementos Finitos, embora devido à crescente velocidade dos processadores atuais esta diferença pode não ser significante em alguns problemas.

Os denominados problemas esbeltos, problemas nos quais a razão quantitativa entre o domínio físico e o seu respectivo contorno é baixa, o desempenho do Método dos Elementos de Contorno não é competitivo, pois o método, nestes casos, perde uma de suas principais vantagens face aos métodos de domínio, que é a menor dimensão do sistema de equações algébricas.

Método dos Elementos de Contorno, por ser uma técnica de contorno, não é muito versátil quando aplicado em problemas setorialmente não homogêneos, embora seja possível resolvê-los com o recurso das sub-regiões [9, 11], onde discretiza-se cada setor homogêneo do domínio físico do problema.

Os problemas afetos à Teoria de Cascas, de larga aplicação estrutural em vasos de pressão, tampas e cúpulas de edifícios, tornam-se de difícil trato com o Método dos Elementos de Contorno, em virtude da complexidade da solução fundamental utilizada para a formulação do método. Esse é um fator de caráter geral: devido à correlação entre o problema estudado e a solução fundamental, quanto mais complicada for a equação diferencial de governo, mais intrincada será a formulação do Método dos Elementos de Contorno associada.

Existe ainda outra dificuldade, referente à tipologia dos operadores diferenciais envolvidos na composição da equação diferencial de governo de muitos problemas, particularmente na Mecânica dos Fluidos, que se incompatibilizam com o tratamento operacional que conduz à forma integral inversa, típica do Método dos Elementos de Contorno.

A última dificuldade e certamente o maior desafio do Método dos Elementos de Contorno refere-se ao tratamento do que se pode denominar de “ações de domínio”, compreendendo qualquer tipo de força de corpo, fontes ou sorvedouros. Aí se incluem os efeitos de inércia e outros que tipificam os casos dinâmicos e transientes. As ações de domínio são muito comuns em aplicações importantes englobadas pela Teoria de Campo Escalar, área esta na qual o Método dos Elementos de Contorno tem experimentado sua melhor aceitação como ferramenta numérica.

Esta questão do tratamento das “ações de domínio” pelo Método dos Elementos de Contorno será abordada de forma mais detalhada no Capítulo V, referente a Dupla Reciprocidade (Dual Reciprocity Technique), sendo esta uma das técnicas de maior importância para a resolução deste tipo de problema.

Referências Bibliográficas

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. ; MORGAN, K., “*Finite Elements and Approximation*”, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [2] OLIVEIRA, P.C., “Esquema Flux-Spline Aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural”, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, *Tese de Doutorado*, São Paulo, 1997.
- [3] VAREJÃO, L.M.C., “Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer”, University of Minnesota, *Tese de Doutorado*, EUA, 1979.
- [4] BATHE, K.J., “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [5] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L., “*The Finite Element Method*”, Vol. 1 e 2, Fourth Edition, MacGraw-Hill, London, 1991.
- [6] COOK, R.D., “*Finite Element Modeling for Stress Analysis*”, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [7] BREBBIA, C.A. e WALKER, S., “*Boundary Element Techniques in Engineering*”, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [8] BANERJEE, P.K., SHAW, R.P., “*Developments in Boundary Element Methods - 2*”, Applied Science Publishers, London, 1982.
- [9] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [10] PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. e WROBEL, L.C., “*The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- [11] KYTHE, P.K., “*An Introduction to boundary Element Methods*”, CRC Press, London, 1995.
- [12] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [12] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., “*Teoria da Elasticidade*”, Ed. Guanabara Dois, 3ª Edição, Rio de Janeiro, 1980.
- [13] ZAMBROZUSKI, N.J.M., “Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Propagação de Ondas Não Lineares Gravitacionais”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1992.
- [14] AZEVEDO, J.P.S., “Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1985.

Capítulo I

TEORIA DE CAMPO ESCALAR

I.1 - Introdução

A grande maioria dos problemas analisados pela Engenharia pode ser enquadrado na denominada Teoria de Campo. Tal teoria foi desenvolvida no início do século XIX justamente com o objetivo de integrar os diversos fenômenos físicos presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático.

A maior motivação para o desenvolvimento desta nova teoria era substituir os modelos estruturados no conceito de partículas, modelos mecanicistas, por modelos mais sofisticados envolvendo as noções de campo, potencial, linha de fluxos, etc... Embora os modelos mecanicistas fossem satisfatórios para a solução dos problemas no domínio da física clássica, esta nova abordagem proposta pela Teoria de Campo trouxe uma nova compreensão universalizada dos fenômenos envolvidos em toda a física.

A consolidação da Teoria de Campo unificando diversas áreas aparentemente distintas da física foi um passo muito importante para os pesquisadores da época, pois foi possível o estabelecimento de analogias entre os diferentes problemas físicos, proporcionando inúmeras vantagens, tanto na compreensão quanto na simulação dos fenômenos físicos envolvidos.

Esta ampla gama de problemas englobados pela Teoria de Campo advém do fato de que os princípios básicos da física aplicam-se indistintamente em suas diversas áreas, tais como: Mecânica dos Sólidos, Mecânica dos Flúidos, Termociências, Eletromagnetismo, etc...

O enfoque proposto pela Teoria de Campo associa a cada ponto material de um determinado domínio físico um ou mais números, representando uma determinada propriedade física nele contida. Quando a cada ponto material associa-se uma única propriedade física, diz-se existir um campo escalar, caso contrário, isto é, quando a cada ponto material associam-se mais de uma propriedade física para a resolução do problema, tem-se um campo vetorial.

Pode-se citar como exemplo de propriedades físicas que possuem uma representação na Teoria de Campo as seguintes grandezas: temperatura, pressão, densidade elétrica, deslocamentos, etc... O campo formado por tais grandezas possui a designação específica de cada fenômeno físico associado, tal como: campo térmico, campo de pressões, campo elétrico, campo de deslocamentos, campo gravitacional, etc...

Uma representação gráfica muito útil contida no modelo matemático concebido pela Teoria de Campo consiste no estabelecimento de uma rede de linhas de fluxos e linhas equipotenciais, que fornecem uma representação do comportamento da grandeza física no espaço considerado.

Neste trabalho são solucionados diversos problemas compreendidos pela Teoria de Campo Escalar. Dentre os casos que se inserem nesta categoria de problemas, é interessante destacar os seguintes:

- proteção catódica;
- condução de calor;
- escoamento potencial;
- fluxo através de meios porosos;
- condução elétrica;
- difusão de massa;
- torção de barras prismáticas;
- deflexão de membranas;
- propagação de ondas planas e cisalhantes;
- problemas de autovalor e autovetor.

I.2 - Formulação Matemática

Os problemas físicos compreendidos pela Teoria de Campo Escalar são governados pela seguinte equação diferencial envolvendo derivadas parciais, dada a seguir em notação indicial:

$$\left[K_{ij} u_{,j} \right]_{,i} - \lambda D^n(u) = p \quad i=1,2 \quad \text{Eq. I.2-1}$$

Sendo que: K_{ij} um diádico contendo as propriedades físicas do sistema nas direções coordenadas;

u o potencial ou variável básica;

λ um escalar

D^n um operador diferencial envolvendo derivadas temporais, na forma:

$$D^n(u) = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}$$

p uma função escalar conhecida, normalmente associada a ações internas ao domínio físico do problema.

A equação I.2-1 é denominada de Equação de Campo Escalar Generalizada, e neste ponto já encontra-se particularizada para sua aplicação a problemas bidimensionais.

Na equação I.2-1 caso as propriedades físicas, representadas pelo diádico K , dependam do valor do potencial, a equação, neste caso, é dita como sendo não-linear. Assim sendo, o princípio da superposição deixa de ser válido. Caso as propriedades físicas dependam das variáveis espaciais, o problema, embora linear, é dito como sendo fisicamente não-homogêneo ou heterogêneo.

Normalmente os problemas não-lineares são resolvidos iterativamente, transformando-os em uma seqüência de problemas lineares. Existem ainda técnicas que se utilizam de transformadas, como a Transformada de Kirchoff por exemplo [1, 2], onde após a aplicação deste procedimento o problema torna-se linear, associado agora ao espaço transformado, onde é então resolvido.

Como K_{ij} é uma grandeza diádica, com a escolha adequada de um sistema de coordenadas, pode-se eliminar os termos cruzados, isto é, promove-se uma diagonalização na

representação matricial de K_{ij} obtendo-se termos não nulos somente ao longo de sua diagonal principal.

Observe que expandindo-se a equação I.2-1 encontram-se termos convectivos ou advectivos, ligados a fenômenos de convecção ao longo do domínio físico do problema. Tais termos são expressos por parcelas envolvendo o produto das derivadas parciais do diádico K e do potencial u .

Considerando-se os casos onde o sistema de coordenadas encontra-se nas direções principais do diádico K e onde não existam fenômenos de convecção ao longo do domínio físico do problema, bem como homogeneidade e linearidade física, a equação I.2-1 pode ser expressa da seguinte forma:

$$K_{11}u_{,11} + K_{22}u_{,22} - \lambda D^n(u) = p \quad \text{Eq. I.2-2}$$

Adotando-se a hipótese de isotropia na modelagem do problema físico, não existe distinção do valor da propriedade física com as direções coordenadas, deste modo a equação I.2-2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$K[u_{,11} + u_{,22}] - \lambda D^n(u) = p \quad \text{Eq. I.2-3}$$

Destaca-se que existe a possibilidade da ocorrência de problemas que embora apresentem isotropia nas propriedades físicas sejam não-homogêneos ou então não-lineares.

A seguir apresentam-se casos particulares da equação I.2-3 definidos de acordo com a ordem do operador diferencial D , que representa as variações temporais existentes no modelo matemático do problema.

Casos onde a equação diferencial de governo, expressa pela equação I.2-4, apresente uma derivada temporal de segunda ordem representam modelos dinâmicos. Tais modelos matemáticos são ditos como sendo hiperbólicos, segundo a classificação das equações diferenciais parciais [3, 4].

$$K[u_{,11} + u_{,22}] - \lambda \ddot{u} = p \quad \text{Eq. I.2-4}$$

Tal equação diferencial descreve processos rápidos de transporte de energia, como a propagação de ondas em meios elásticos, por este motivo esta expressão, geralmente, recebe a denominação de Equação de Onda.

Casos onde a equação diferencial de governo, expressa pela equação I.2-5, apresente uma derivada temporal de primeira ordem, descrevem processos lentos de transformação. Tais problemas são transientes e aperiódicos e segundo a classificação das equações diferenciais parciais são classificados como sendo modelos matemáticos parabólicos.

$$K[u_{,11} + u_{,22}] - \lambda \dot{u} = p \quad \text{Eq. I.2-5}$$

A equação I.2-5 fisicamente descreve problemas de transferência de calor por condução, fluxo através de meios porosos (percolação), efeitos viscosos e difusão de partículas.

E finalmente, casos onde a equação diferencial de governo, expressa pela equação I.2-6, apresente uma derivada temporal de ordem zero, descrevem problemas cuja configuração de equilíbrio independe do tempo, ou seja, problemas estáticos ou estacionários. Tais configurações de equilíbrio são funções das condições de contorno e/ou da distribuição das ações de domínio, representadas pelo termo independente p.

$$K[u_{,11} + u_{,22}] - \lambda u = p \quad \text{Eq. I.2-6}$$

Esta equação diferencial é classificada como sendo do tipo elíptica. Sendo que tal equação ainda pode ser simplificada, dando origem a outras equações de grande aplicabilidade na Engenharia.

Na denominada Equação de Helmholtz considera-se a equação I.2-6 em sua forma homogênea, fazendo com que a função escalar p seja nula, conforme indicado pela equação I.2-7:

$$K[u_{,11} + u_{,22}] - \lambda u = 0 \quad \text{Eq. I.2-7}$$

Caso o escalar λ seja um valor desconhecido, a equação I.2-7 pode ser interpretada como sendo um problema de autovalor, onde objetiva-se encontrar um conjunto de valores para o escalar λ , os autovalores, associados a um outro conjunto de possíveis configurações do sistema, expressas pelos valores do potencial u, os autovetores, de tal forma a tornar a configuração do sistema auto-equilibrado, na ausência de qualquer solicitação externa.

Na equação I.2-6, adotando-se o escalar λ como sendo nulo chega-se a denominada Equação de Poisson, expressa pela equação I.2-8. Esta equação representa

problemas estacionários onde exista a presença de fontes ou ações de domínio atuando no interior do domínio físico do problema.

$$K[u_{,11} + u_{,22}] = p \quad \text{Eq. I.2-8}$$

A forma homogênea associada a equação I.2-8 é denominada Equação de Laplace, equação I.2-9, tratando-se do caso mais simples compreendido pela Teoria de Campo Escalar. É possível transformar matematicamente um problema expresso pela Equação de Poisson em um expresso pela Equação de Laplace e vice-versa, utilizando-se de uma nova função potencial (quase sempre sem significado físico) e adaptando-se as condições de contorno do problema.

$$K[u_{,11} + u_{,22}] = 0 \quad \text{Eq. I.2-9}$$

O modelo matemático expresso pela equação de Laplace, equação I.2-9, representa problemas onde as ações externas atuam exclusivamente junto ao contorno do domínio físico do problema. Deste modo, tais ações não aparecem de forma explícita junto a equação diferencial, mas sim encontram-se expressas pelas condições de contorno do problema.

Equações Diferenciais possuem, geralmente, um número infinito de soluções. Por este motivo quando um problema físico é expresso através de equações diferenciais, torna-se necessário a complementação da equação diferencial com certas informações adicionais, denominadas de condições de contorno ou condições iniciais, de forma que o problema físico fique bem especificado e apresente uma única solução.

Para os problemas estacionários ou em regime permanente estas informações adicionais recebem a denominação de condições de contorno. Para os problemas transientes ou dinâmicos, ou seja, onde existam derivadas temporais presentes no equacionamento do problema físico, estas informações adicionais são denominadas de condições iniciais, pois definem o comportamento do sistema no início da análise.

Assim sendo, a seguir apresentam-se os dois principais tipos de condições de contorno associadas aos diversos modelos matemáticos expostos anteriormente, sendo que estas mesmas condições podem ser extrapoladas como condições iniciais.

a) Condição de Contorno Essencial

Também denominada de condição de contorno de Dirichlet ou de primeira espécie. Neste caso prescreve-se o valor da variável básica ou potencial ao longo do contorno do domínio físico do problema, tal condição pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$u(\mathbf{X}) = \bar{u}(\mathbf{X}) \quad \text{Eq. I.2-10}$$

onde \mathbf{X} representa as variáveis espaciais do problema.

b) Condição de Contorno Natural

Também denominada de condição de contorno de Neumann ou de segunda espécie. Neste caso prescreve-se o valor da derivada primeira da variável básica com relação à direção normal externa ao contorno do domínio físico do problema. Tal condição pode ser expressa matematicamente como sendo:

$$q(\mathbf{X}) = \frac{\partial u(\mathbf{X})}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{X}) \quad \text{Eq. I.2-11}$$

sendo n a direção normal externa ao contorno.

Destaca-se que existem outros tipos de condições de contorno que ocorrem com certa frequência, sendo que tais condições de contorno são, na realidade, formas complexas ou combinações entre as condições de contorno essenciais e naturais. Têm-se a seguir alguns exemplos destas condições de contorno mais elaboradas:

i) Condição de Contorno Convectiva

Também denominada de condição de contorno de Robin. Este tipo de condição ocorre frequentemente em problemas ligados à transferência de calor e caracteriza o fluxo de calor por convecção ao longo do contorno do problema. Matematicamente tal condição é expressa da seguinte forma:

$$\bar{q}(\mathbf{X}) = h[u(\mathbf{X}) - b] \quad \text{Eq. I.2-12}$$

Onde para problemas térmicos, h é chamado de coeficiente de película e b representa uma temperatura de referência, geralmente tomada no infinito ou em um ponto afastado do domínio do fenômeno.

Percebe-se que a condição de contorno convectiva, na realidade, trata-se de uma condição de contorno natural, onde prescreve-se a derivada do potencial, ou seja, o fluxo, sendo expresso como uma função do potencial.

ii) Condição de Contorno Não-Linear

As condições de contorno desse tipo ocorrem principalmente nos chamados problemas de fronteira variável, e como o próprio nome sugere, apresenta uma não-linearidade, isto é, o valor a ser prescrito é uma função da variável básica do problema. Tais condições são expressas matematicamente pelas seguintes equações:

$$\bar{u}(X) = f(u(X)) \quad \text{Eq. I.2-13}$$

$$\bar{q}(X) = g(u(X)) \quad \text{Eq. I.2-14}$$

onde f e g são funções escalares.

iii) Condição de Contorno de Ordem Superior

Ocorrem em modelos matemáticos deficientes. Tais modelo sofreram simplificações matemáticas exageradas, como no estudo estrutural de alguns tipos de membranas [3].

Tais condições de contorno envolvem a prescrição de derivadas de ordem superior, A equação I.2-15 representa um tipo de condição de contorno dessa natureza. Normalmente essas prescrições são transformadas em condições de contorno essenciais ou naturais, na forma tradicional. Ressalta-se que existem outras formas mais exóticas envolvendo as derivadas.

$$\bar{p}(X) = \frac{\partial^2 u(X)}{\partial n^2} \quad \text{Eq. I.2-15}$$

Referências Bibliográficas

- [1] AZEVEDO, J.P.S., “Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1985.
- [2] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [3] LOEFFLER, C.F., “Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada”, *Revista Militar de Ciência e Engenharia*, jan/mar-1992.
- [4] TIKHONOV, A.N. ; SAMARSKII, A.A., “*Equations of Mathematical Physics*”, Dover Publications, New York, 1963.

Capítulo II

ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES PARA A APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

II.1 - Sistema de Coordenadas Naturais

Nos elementos de contorno bidimensionais aplica-se uma transformação de coordenadas do sistema global X , para um sistema de coordenadas sobre o elemento, de forma a operacionalizar as integrações nele realizadas. Este sistema de coordenadas é denominado de sistema de coordenadas naturais ou normais [1, 2, 3]. Tal sistema independe da forma do elemento de contorno, sendo a origem do sistema, $\eta=0$, centrada ao longo do comprimento do elemento. O sistema é escalonado de tal forma que $\eta=-1$ no extremo esquerdo do elemento e $\eta=+1$ no extremo direito do elemento, vide figura II.1-1.

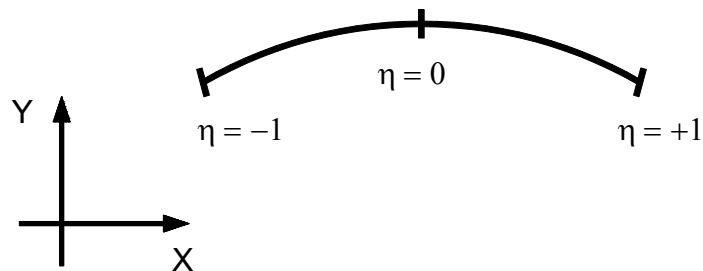


Figura II.1-1 - Representação do Sistema de Coordenadas Naturais

A transformação de coordenadas efetuada fornece uma normalização do comprimento do elemento de contorno, que neste caso encontra-se sempre limitado ao intervalo de -1 à +1.

A utilização do sistema de coordenadas naturais é conveniente principalmente por dois aspectos [3]: (i) sua adoção facilita a padronização e construção das funções de interpolação, responsáveis pela interpolação das grandezas físicas e geométricas ao longo do elemento; (ii) para a aplicação dos métodos de integrações numéricas, como no caso da quadratura de Gauss, onde os coeficiente e os pesos da quadratura já encontram-se normalizados para o intervalo de integração de -1 à +1 (justamente o intervalo do sistema de coordenadas naturais).

II.2 - Diferentes Tipos de Funções de Interpolação Polinomiais

Aplicam-se as chamadas funções de interpolação para aproximar tanto as variáveis básicas do problema quanto a geometria de um determinado elemento de contorno, através de valores definidos em determinados pontos sobre o elemento, chamados pontos nodais ou nós. Quando as funções de interpolação são utilizadas para aproximar a geometria, tais funções recebem a denominação de funções de forma, pois determinam a forma do elemento.

Os diferentes tipos de funções de interpolação já foram amplamente estudados e analisados na literatura especializada no Método dos Elementos Finitos [2, 3]. Neste método utilizam-se principalmente as denominadas funções de interpolações polinomiais ou funções de interpolação Lagrangeanas, pois utiliza-se a interpolação polinomial de Lagrange para determiná-las.

Neste trabalho utilizam-se as funções de interpolação polinomiais como sendo as funções de interpolação e as funções de forma. Destaca-se que as funções de interpolação e as funções de forma formam dois conjuntos de funções independentes, pois pode-se utilizar polinômios de graus diferentes para as aproximações das variáveis do problema e da geometria, respectivamente.

A idéia central na aplicação das funções de interpolação consiste em expressar uma função escalar qualquer $T(\eta)$, como sendo uma combinação linear, dada pela seguinte expressão:

$$T(\eta) = \sum_{j=1}^n N_j a_j \quad \text{Eq. II.2-1}$$

sendo N_j as funções de interpolação e os valores dos escalares a_j definidos como sendo os valores da grandeza escalar nos pontos nodais, isto é:

$$T(\eta_j) = T_j = a_j \quad \text{Eq. II.2-2}$$

Assim, as aproximações realizadas com tais funções seguem a seguinte estrutura geral, dada pela equação:

$$T(\eta) = \sum_{j=1}^n N_j(\eta) T_j \quad \text{Eq. II.2-3}$$

sendo T a variável a qual deseja-se aproximar, que tanto pode ser o potencial u ou sua derivada normal q . Neste caso, as funções N são denominadas funções de interpolação, pois interpolam o campo das variáveis; ou podem ser as coordenadas cartesianas do elemento, quando, então, as funções N são denominadas funções de forma, pois determinam a forma do elemento.

A seguir, apresentam-se os principais tipos de funções de interpolação polinomiais utilizadas, juntamente com as suas expressões matemáticas, bem como gráficos mostrando sua variação ao longo de um sistema de coordenadas naturais.

FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO CONSTANTE

Trata-se do tipo de interpolação mais simples, onde não é admitido nenhuma variação da função a qual se deseja aproximar ao longo do sistema de coordenadas naturais, vide figura II.2-1.

$$N_0(\eta) = 1 \quad \text{Eq. II.2-4}$$

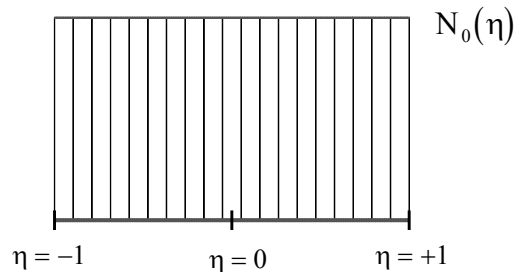


Figura II.2-1 - Função de Interpolação Constante ao longo do Sistema de Coordenadas Naturais

FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR

Neste caso, a função a qual se deseja aproximar pode variar linearmente ao longo do sistema de coordenadas naturais, sendo que os valores de T_1 e T_2 são os valores nodais da função nos pontos com coordenadas naturais $\eta = -1$ e $\eta = +1$, respectivamente.

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \qquad N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \qquad \text{Eqs. II.2-5}$$

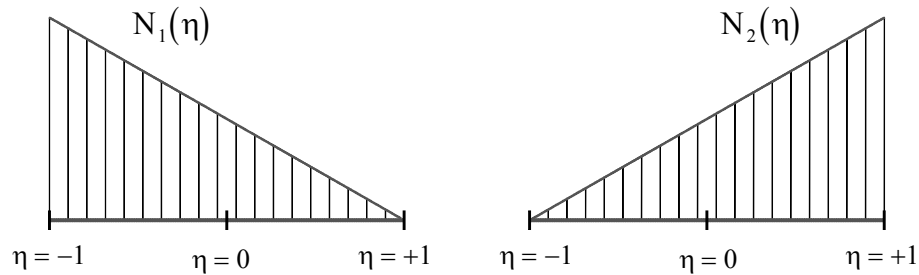


Figura II.2-2 - Funções de Interpolação Lineares ao longo dos Sistemas de Coordenadas Naturais

FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA

A variação da função, neste caso, segue um polinômio de 2^o grau. Os valores da função T_1 , T_2 e T_3 são computados nos pontos nodais com coordenadas $\eta = -1$, $\eta = +1$ e $\eta = 0$, respectivamente.

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1) \qquad N_2(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1) \qquad N_3(\eta) = (1 - \eta)(1 + \eta) \qquad \text{Eqs. II.2-6}$$

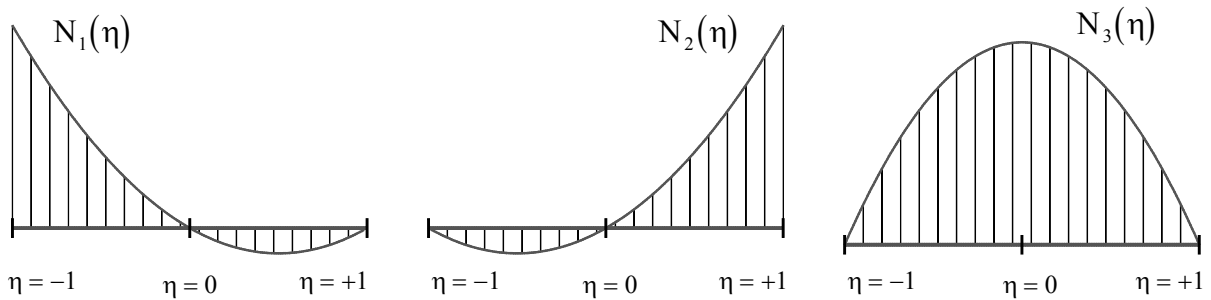


Figura II.2-3 - Funções de Interpolação Quadráticas ao longo dos Sistemas de Coordenadas Naturais

II.3 - Cálculo do Jacobiano

Durante a fase de implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno, torna-se necessário o cálculo do jacobiano da transformação do sistema de coordenadas globais do elemento para o sistema de coordenadas normais utilizadas ao longo de cada elemento de contorno. Isto pois as funções de interpolação utilizadas encontram-se expressas em termos do sistema de coordenadas normais, mas os limites das integrações realizadas ao longo de cada elemento de contorno estão no sistema de coordenadas cartesianas globais.

Expressa-se então a seguinte transformação de coordenadas:

$$d\Gamma = |J|d\eta \quad \text{Eq. II.3-1}$$

onde $|J|$ é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

De acordo com os princípios da geometria diferencial, tem-se que $d\Gamma$ pode ser aproximado como sendo dado pela equação II.3.2, vide figura II.3-1, a seguir:

$$(d\Gamma)^2 = (d\Gamma_x)^2 + (d\Gamma_y)^2 \quad \text{Eq. II.3-2}$$

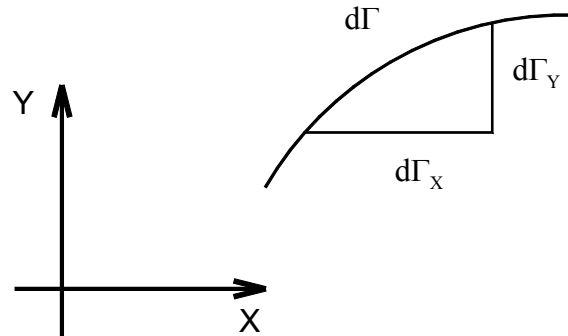


Figura II.3-1 - Representação bidimensional de $d\Gamma$

Operacionalizando a equação II.3-2 chega-se a seguinte expressão:

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y}{d\eta}\right)^2} d\eta \quad \text{Eq. II.3-3}$$

Substituindo-se a equação II.3-1 na equação II.3-3, encontra-se a expressão que representa o Jacobiano, para o caso bidimensional, dada a seguir:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Gamma_y}{\partial\eta}\right)^2} \quad \text{Eq. II.3-4}$$

A seguir apresentam-se as expressões analíticas para cálculo do Jacobiano para o caso dos elementos de contorno utilizando-se de funções de forma lineares e quadráticas. Ressalta-se que os elementos de contorno constantes e lineares utilizam-se de funções de forma lineares; assim, neste caso, os seus Jacobianos são idênticos.

JACOBIANO PARA ELEMENTOS DE CONTORNO CONSTANTES E LINEARES

As derivadas indicadas na equação II.3-4 podem ser obtidas diretamente a partir da equação II.2-3, que, neste caso, relaciona a variação das coordenadas globais com os seus valores nodais através das funções de forma, assim:

$$\frac{\partial\Gamma_x}{\partial\eta} = \frac{\partial N_1}{\partial\eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial\eta} x_2 \quad \frac{\partial\Gamma_y}{\partial\eta} = \frac{\partial N_1}{\partial\eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial\eta} y_2 \quad \text{Eqs. II.3-5}$$

onde x_i e y_i representam os valores das coordenadas cartesianas dos pontos iniciais e finais do elemento.

Utilizando-se das expressões para as funções de forma lineares, equações II.2-5, tem-se:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = +\frac{1}{2} \quad \text{Eqs. II.3-6}$$

Desenvolvendo-se a expressão para o jacobiano obtém-se então:

$$|J| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{Eq. II.3-7}$$

Tal equação para o Jacobiano pode ser interpretada como sendo a metade do comprimento do elemento. Observa-se que neste caso o Jacobiano apresenta um valor constante ao longo de todo o elemento, isto é, não varia com a alteração da coordenada adimensional η .

JACOBIANO PARA ELEMENTOS DE CONTORNO QUADRÁTICO

De maneira semelhante ao exposto anteriormente para o cálculo do Jacobiano para elementos de contorno constante e linear, as expressões neste caso são dadas a seguir:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 \quad \text{Eqs. II.3-8}$$

onde, neste caso, utilizando-se das funções de forma quadráticas, equações II.2-6, tem-se que:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \eta - \frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = \eta + \frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = -2\eta \quad \text{Eqs. II.3-9}$$

Desenvolvendo-se tais expressões para o jacobiano obtém-se então:

$$|J| = \sqrt{\left[(x_1 - 2x_2 + x_3)\eta + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right]^2 + \left[(y_1 - 2y_2 + y_3)\eta + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2} \quad \text{Eq. II.3-10}$$

Destaca-se que no caso dos elementos de contorno utilizando-se de funções de forma quadráticas o Jacobiano não é um valor constante ao longo do comprimento do elemento, e sim é uma função envolvendo a coordenada natural η .

II.4 - Cálculo do Vetor Normal

Uma etapa importante durante a fase de implementação computacional do Método dos Elementos de Contorno é a determinação do vetor normal ao contorno Γ , pois este parâmetro é utilizado junto as expressões matemáticas deste método, sendo, então, integradas dando origem ao sistema linear de equações algébricas resultante (vide Capítulo III).

Como representado na figura II.4-1 t e n são os vetores tangente e normal a curva Γ no ponto P , onde na origem deste sistema de coordenadas encontra-se o ponto ξ , sendo \vec{R} o vetor posição do ponto ξ ao ponto P .

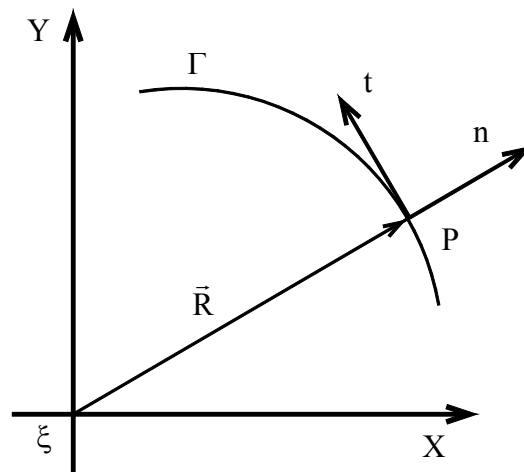


Figura II.4-1 - Representação dos vetores tangente e normal a curva Γ

De acordo com a figura II.4-2, pode-se expressar uma relação entre \vec{R} e a curva Γ , dada através da seguinte relação matemática:

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta \Gamma} = \frac{\overline{PQ}}{\Delta \Gamma} \quad \text{Eq. II.4-1}$$

Fazendo-se com que Q se desloque em direção ao ponto P , $Q \rightarrow P$, tem-se que $\Delta \Gamma \rightarrow 0$, desta forma a direção da corda PQ tende para a direção da tangente à curva em P , matematicamente:

$$\frac{d\vec{R}}{d\Gamma} = \lim_{\Delta \Gamma \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta \Gamma} = t \quad \text{Eq. II.4-2}$$

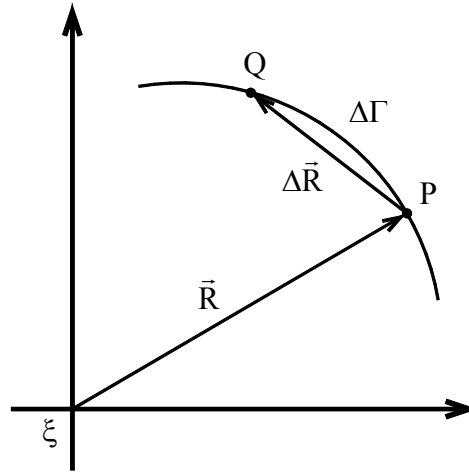


Figura II.4-2 - Representação do vetores $\Delta\vec{R}$ e de $\Delta\Gamma$

Empregando-se a regra da cadeia, pode-se expandir a equação II.4-2 através do uso das coordenadas naturais, e valendo-se da definição do Jacobiano para esta transformação de coordenadas, vide seção II.3, pode-se escrever:

$$t = \frac{d\vec{R}}{d\Gamma} = \frac{d\vec{R}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{d\vec{R}}{d\eta} \frac{1}{J} \quad \text{Eq. II.4-3}$$

Sendo J o Jacobiano da transformação de coordenadas globais para a coordenada natural.

As componentes da derivada de \vec{R} com relação a coordenada natural η podem ser obtidas diretamente através do uso das funções de interpolação para a representação da posição coordenada do ponto P em função da coordenada dos pontos nodais geométricos que compõe o elemento de contorno a qual o ponto P pertence, desta forma:

$$\frac{d\vec{R}}{d\eta} = \frac{dX}{d\eta} \vec{i} + \frac{dY}{d\eta} \vec{j} = \sum_{k=1}^L X_k \frac{dN_k}{d\eta} \vec{i} + \sum_{k=1}^L Y_k \frac{dN_k}{d\eta} \vec{j} \quad \text{Eq. II.4-4}$$

sendo L o número de pontos nodais geométricos do elemento de contorno em questão; \vec{i} e \vec{j} o vetores unitários nas direções coordenadas X e Y, respectivamente; X_k e Y_k as coordenadas globais dos pontos nodais geométricos nas direções coordenadas X e Y, respectivamente.

Desta forma tem-se determinado o vetor tangente t à curva Γ no ponto P, sendo que para a determinação do vetor normal utiliza-se dos conceitos do produto escalar e do produto vetorial entre os vetores tangente e normal. Tais relações são expressas pelas seguintes equações:

$$t \cdot n = 0 \quad \text{Eq. II.4-5}$$

$$t \times n = \vec{k} \quad \text{Eq. II.4-6}$$

sendo \vec{k} o vetor unitário na direção coordenada perpendicular ao eixos X e Y.

Pode-se então, finalmente, representar o vetor normal como sendo:

$$n = \frac{1}{J} \left[\frac{dY}{d\eta} \vec{i} - \frac{dX}{d\eta} \vec{j} \right] \quad \text{Eq. II.4-7}$$

II.5 - Principais Tipos de Elementos de Contorno

Para a discretização das equações integrais envolvidas, conforme Capítulo III, faz-se necessário a divisão do contorno Γ em elementos de contorno distintos, sobre os quais são definidas as variações das grandezas envolvidas no problema, neste caso o potencial e sua derivada, em função dos valores calculados em determinados pontos nos elementos. Tais pontos são denominados pontos nodais funcionais ou nós funcionais.

Cabe, neste momento, um breve apêndice para definir-se de maneira clara a diferença existente entre os denominados pontos nodais funcionais ou, simplesmente, nós funcionais e, os pontos nodais geométricos ou nós geométricos.

Os nós geométricos ou pontos nodais geométricos são utilizados para definir-se a geometria do elemento de contorno no sistema de coordenadas globais através de interpolações polinomiais usando as denominadas funções de forma, vide seção II.2.

Os nós funcionais ou pontos nodais funcionais são os pontos nodais utilizados para formação do sistema matricial resultante do Método dos Elementos de Contorno. Nestes pontos tem-se calculados os valores das incógnitas do problema, sendo que ao longo de um determinado elemento tais valores são obtidos utilizando-se interpolações polinomiais, através das denominadas funções de interpolação.

De acordo com a ordem e o tipo das funções de interpolação e de forma utilizadas para um determinado elemento de contorno pode ter-se a coincidência ou não dos nós funcionais e geométricos, conforme será exposto durante a apresentação dos principais tipos de elementos de contorno utilizados.

Um parâmetro importante na utilização do Método dos Elementos de Contorno como ferramenta numérica, consiste na escolha adequada do tipo de elemento de contorno empregado na modelagem a ser realizada e, por conseguinte, na resolução do problema [6]. Tal parâmetro influencia, principalmente, no número de elementos de contorno necessários para a obtenção de uma determinada precisão nos resultados, assim afetando a ordem do sistema linear de equações algébricas resultante.

CLASSIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS

No Método dos Elementos de Contorno utilizam-se dois conjuntos distintos de funções de interpolação. O primeiro conjunto é utilizado para a aproximação das variáveis físicas do problema, denominado de funções de interpolação; e o segundo conjunto é utilizado para a definição da forma do elemento, denominado de funções de forma.

Segundo a ordem dos polinômios utilizados nestes dois conjuntos distintos de funções de interpolação, os elementos de contorno podem ser classificados como sendo [3]:

i) Elementos Hipoparamétricos ou Subparamétricos

Neste caso, é utilizado um polinômio de maior grau para a aproximação da geometria e um polinômio de menor grau para a aproximação das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é maior do que o grau das funções de interpolação;

ii) Elementos Isoparamétricos

São os tipos de elementos mais comumente utilizados. Os elementos pertencentes a esta família apresentam funções de interpolação de mesmo grau para a aproximação da forma do elemento e das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é igual ao grau das funções de interpolação;

iii) Elementos Hiperparamétricos Ou Superparamétricos

Neste caso, é utilizado um polinômio de menor grau para a aproximação da geometria e um polinômio de maior grau para a aproximação das variáveis do problema. Isto é, o grau das funções de forma é menor do que o grau das funções de interpolação.

A seguir apresentam-se os principais tipos de elementos de contorno, sendo que somente alguns deles são utilizados nas modelagens realizadas ao longo deste trabalho.

ELEMENTO DE CONTORNO CONSTANTE

Este é o tipo mais simples de elemento de contorno existente. Sendo que, neste caso, para um determinado elemento de contorno não é admitida nenhuma alteração nos valores das variáveis físicas do problema ao longo de seu comprimento, estas são tomadas como sendo constantes.

Este elemento é classificado como sendo Hipoparamétrico, pois a geometria pode variar linearmente, usando funções de forma lineares, e as variáveis do problema utilizam-se de funções de interpolação constante.

No Método dos Elementos de Contorno aplicado à problemas de campo escalar, a literatura especializada indica que a utilização de elementos de contorno constante alcançam uma precisão bastante satisfatória, em termos de Engenharia, apesar de sua simplicidade [1, 4, 5].

Existem ainda certos casos onde devido a presença de descontinuidades no campo das variáveis do problema, que o uso deste tipo de elemento acarretam vantagens frente aos elementos de contorno com funções de interpolação de maior grau, pois, no caso dos elementos de contorno constante, o campo obtido para as variáveis do problema já é descontínuo devido a própria natureza da função de interpolação utilizada [6].

Na maioria dos casos, durante a implementação do elemento de contorno constante, adota-se o único nó funcional existente estando centralizado em relação ao comprimento do elemento, isto é, o nó funcional encontra-se na coordenada natural $\eta=0$.

Na figura II.5-1 podem ser observadas as posições dos nós funcionais e geométricos para um determinado elemento de contorno constante, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento.

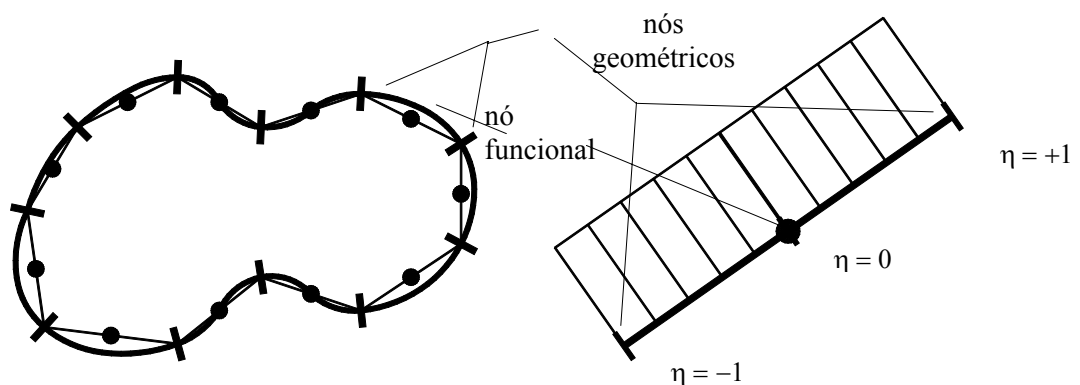


Figura II.5-1 - Representação de uma discretização com elementos de contorno constantes e os nós geométricos e funcionais de um elemento de contorno constante

Observe, de acordo com a figura II.5-1, que comete-se um erro de discretização, no caso de contornos não retilíneos, que pode vir a tornar-se bastante acentuado quando da utilização de um número reduzido de elementos de contorno com geometria retilínea. Mas à medida que o número de elementos de contorno utilizados na discretização aumenta, esse erro tende a diminuir.

ELEMENTO DE CONTORNO LINEAR

Este elemento de contorno é classificado como sendo isoparamétrico, pois tanto a geometria quanto as variáveis do problema utilizam funções de interpolações polinomiais lineares, com isso tem-se uma coincidência entre os nós geométricos e funcionais.

Na figura II.5-2 podem ser observadas as posições dos nós funcionais e geométricos para um determinado elemento de contorno linear, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento.

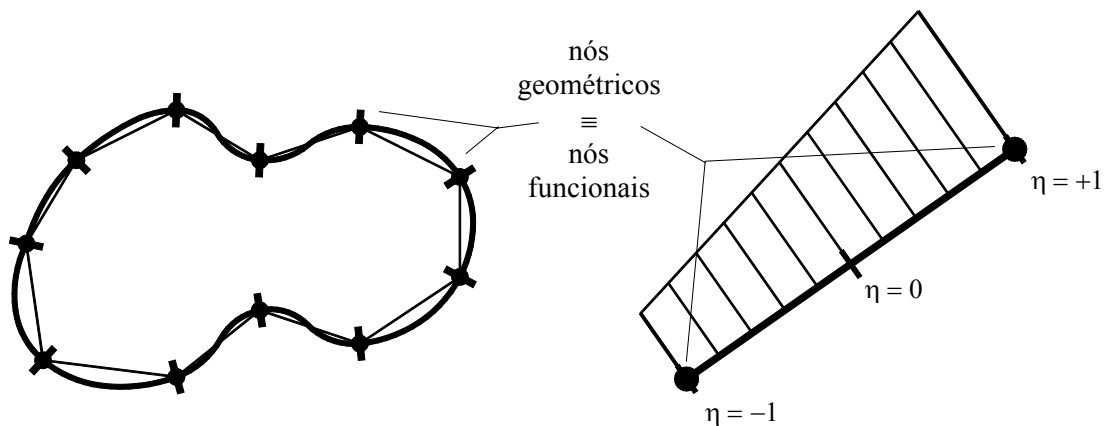


Figura II.5-2 - Representação de uma discretização com elementos de contorno lineares e os nós geométricos e funcionais de um elemento de contorno linear

Neste caso, como no caso anterior dos elementos de contorno constantes, torna-se também válida a observação feita a respeito do erro de discretização cometido, pois a geometria do elemento também é linear.

ELEMENTO DE CONTORNO QUADRÁTICO

Este elemento de contorno também é classificado como sendo isoparamétrico, pois sua geometria e as variáveis do problema utilizam-se de funções de interpolações polinomiais quadráticas afim de computar suas variações ao longo do elemento de contorno, desta forma, tem-se a coincidência entre os nós geométricos e funcionais.

De acordo com a figura II.5-3, pode-se observar a distribuição dos nós geométricos e funcionais para um determinado elemento de contorno quadrático, bem como um exemplo da discretização de um contorno usando tal elemento.

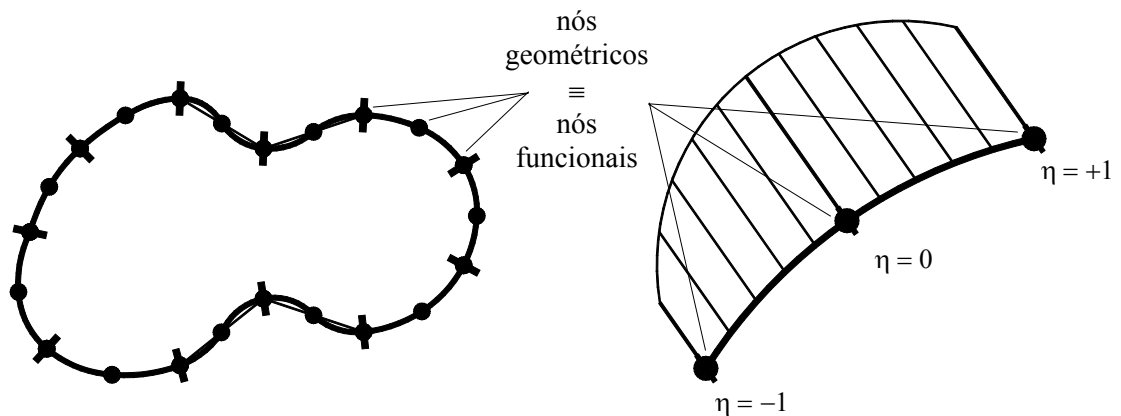


Figura II.5-3 - Representação de uma discretização com elementos de contorno quadráticos e os nós geométricos e funcionais de um elemento de contorno quadrático

De acordo com a figura II.5-3, observa-se que, neste caso, o erro de discretização, em comparação com erro de discretização cometido, utilizando-se de elementos de contorno com geometria retilínea reduziu-se sensivelmente, mas tal erro está sempre presente no caso de um contorno com uma configuração que não seja aparentada com a função de forma utilizada pelo elemento de contorno.

II.6 - Tipos Especiais de Elementos De Contorno

Tais elementos de contorno foram desenvolvidos afim de solucionar certos problemas que ocorrem devido a presença de descontinuidades geométricas, como a existência de cantos vivos no contorno do domínio físico a ser modelado; e descontinuidades físicas, através da imposição de condições de contorno descontínuas nos elementos.

Destaca-se que, tais problemas somente tornam-se relevantes quando as modelagens são realizadas utilizando-se de elementos de contorno ditos de ordem superior, isto é, elementos de contorno que utilizem funções de interpolação polinomiais que possuem um grau maior ou igual à unidade. Este fato acontece nos elementos de contorno lineares e quadráticos utilizados neste trabalho.

Ressalta-se que, a priori, os problemas de descontinuidades físicas só deveriam ocorrer quando da descontinuidade da derivada normal do potencial, visto que um valor de potencial descontínuo não possui um significado físico consistente. Assim, o modelo físico das equações diferenciais aqui analisadas não comporta este tipo de descontinuidade, que representaria, por exemplo, um único ponto material possuindo dois valores distintos de temperatura.

Apesar disso, existem certos casos que possuem soluções analíticas onde tal descontinuidade está presente no modelo matemático associado, sendo assim, neste trabalho também aplicam-se os elementos de contorno ditos especiais para solucionar este tipo de descontinuidade no potencial.

A seguir, com o propósito de tornar a apresentação mais didática para o problema das descontinuidades geométricas e/ou físicas, e a necessidade da adoção de elementos de contorno especiais, apresenta-se, inicialmente, o caso da descontinuidade envolvendo a derivada normal do potencial.

A descontinuidade da derivada normal do potencial pode ocorrer devido, basicamente, a dois procedimentos: tal descontinuidade pode ser prescrita quando da aplicação das condições de contorno (descontinuidade física) ou a descontinuidade pode ser causada por uma descontinuidade geométrica (um canto vivo por exemplo) que proporciona a existência de uma descontinuidade da normal ao contorno.

Conforme pode ser observado de acordo com a figura II.6-1 o fluxo é dependente do contorno a medida em que é definido pela derivação do potencial com respeito ao vetor normal n , isto é:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{Eq. II.6-1}$$

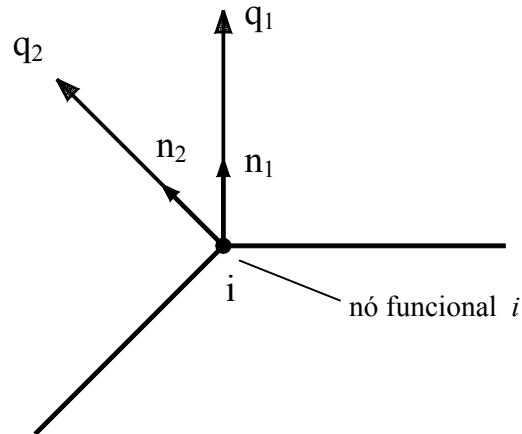


Figura II.6-1 - Descontinuidade no valor do fluxo devido a mudança de direção do vetor normal para o nó funcional i .

Observe que:

$$q_1 = \frac{\partial u}{\partial n_1} \neq q_2 = \frac{\partial u}{\partial n_2} \quad \text{Eq. II.6-2}$$

pois tem-se:

$$n_1 \neq n_2 \quad \text{Eq. II.6-3}$$

Adotando-se uma discretização com elementos de contorno constantes o problema da descontinuidade geométrica não apareceria, pois o ponto fonte é colocado no interior do elemento de contorno e, portanto, deslocado dos cantos vivos ou das descontinuidades geométricas. O campo das variáveis físicas do problema, formado pela utilização das funções de interpolação constante, é descontínuo por definição, logo o problema do tratamento das descontinuidades físicas é resolvido naturalmente.

Na figura II.6-2 encontram-se ilustrados outros casos em que ocorrem descontinuidades na derivada normal do potencial. Nestes casos a discretização, realizada com elementos utilizando funções de interpolação de ordem superior, deve ser tal que os

pontos onde haja uma descontinuidade, ou a descontinuidade seja esperada, se localize em nós funcionais extremos de dois elementos de contorno adjacentes.

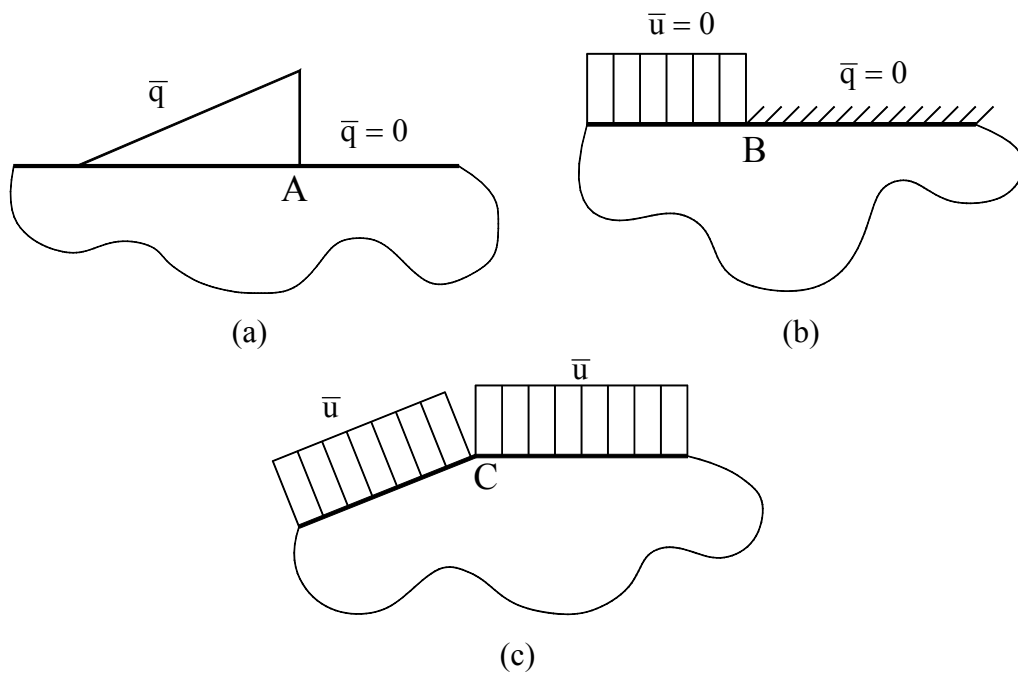


Figura II.6-2 - Representação dos diferentes tipos de descontinuidades: (a) derivada normal do potencial prescrita descontínua no ponto A; (b) derivada normal do potencial prescrita a esquerda do ponto B e potencial prescrita a direita do ponto B; (c) potenciais prescritos a direita e a esquerda do ponto C, onde o contorno não é suave.

As primeiras tentativas para solucionar os problemas das descontinuidades, consistiam em aumentar o refinamento da discretização nestas regiões, contudo, este procedimento além de aumentar o tamanho do sistema linear de equações algébricas resultante, pela adição de mais pontos nodais, nem sempre proporciona bons resultados.

Um procedimento recente desenvolvido para solucionar o problema da descontinuidade da derivada normal do potencial consiste em expressar seu valor em uma das faces como sendo proporcional ao valor na outra face do elemento de contorno adjacente. Tal procedimento é denominado de Tratamento Geométrico de Descontinuidade ou Técnica da Resultante Única [7, 8].

Outra maneira simples de resolver tal problema consiste na adoção do denominado “nó duplo”, isto é, a duplicação do nó extremo dos elementos de contorno (vide figura II.6-3), ou seja, neste caso tem-se dois nós funcionais pertencentes a diferentes elementos de contorno adjacentes, possuindo as mesmas coordenadas geométricas no sistema global, nós funcionais 3 e 4 na figura II.6-3.

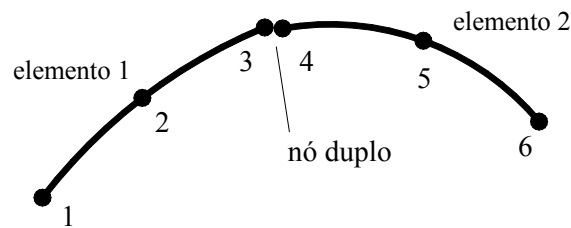


Figura II.6-3 - Representação dos nós funcionais existentes entre dois elementos de contorno quadráticos contendo um nó duplo entre os elementos.

Destaca-se que a inclusão do nó duplo proporciona um aumento na ordem de sistema de equações algébricas. No entanto, devido ao fato das descontinuidades encontrarem-se em número reduzido, se comparado ao número total de equações, esta característica não inviabiliza este procedimento de solução.

Na inclusão do nó duplo no método da colocação, aqui empregado para formação do sistema matricial resultante do Método dos Elementos de Contorno, produz a formação de duas linhas idênticas na matriz G , vide Capítulo III. Neste caso, quando tem-se o potencial prescrito nos dois nós funcionais referentes ao nó duplo, as linhas referentes da matriz G são passadas para a matriz final reordenada, de modo que tal matriz torna-se singular.

Na formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicando-se o método de Galerkin, a inclusão do nó duplo, dois nós funcionais com mesmas coordenadas geométricas globais, não proporciona linhas idênticas nas matrizes H e G . Assim, o sistema linear de equações algébricas resultante final não se torna singular como no método da colocação [8].

A seguir apresentam-se alguns procedimentos desenvolvidos para solucionar a possibilidade da ocorrência de singularidades na matriz resultante do Método dos Elementos de Contorno quando da utilização do método da colocação.

A solução que se apresenta mais viável, a priori, consiste no denominado nó duplo modificado, ou seja, deslocam-se os pontos nodais funcionais para o interior dos elementos contendo o nó duplo, modificando-se as funções de interpolação, fazendo com que sejam geradas equações algébricas lineares diferentes para os dois nós funcionais em questão. O elemento de contorno formulado desta forma é denominado de Elemento de Contorno Não Conforme.

Outra solução mais interessante consiste em deslocar-se apenas os pontos fontes ξ para o interior dos elementos de contorno contendo o nó duplo, mantendo-se as mesmas funções de interpolação. Deste modo, mantêm-se as incógnitas nos pontos nodais extremos dos elementos. O elemento de contorno formulado, adotando-se tal procedimento, é denominado Elemento Interpolado ou, mais apropriadamente, Elemento com Ponto de Colocação Não Nodal.

A seguir apresenta-se de forma mais detalhada a formulação do chamado Elemento com Ponto de Colocação Não Nodal, utilizada nas aplicações numéricas analisadas neste trabalho. Maiores informações sobre os demais métodos de tratamento de discontinuidades descritos anteriormente podem ser encontradas em Marques (1986), Jaime (1995) e Zambrozuski (1992) [7, 8, 9].

ELEMENTO DE CONTORNO COM PONTO DE COLOCAÇÃO NÃO NODAL

Neste procedimento, deslocam-se apenas os pontos fontes ξ referentes aos nós duplos associados a diferentes elementos de contorno adjacentes, mantendo-se a posição dos nós funcionais nos extremos dos elementos. Para tal, a incógnita no ponto fonte ξ , isto é, o ponto deslocado, passa a ser expressa através da utilização das funções de interpolação (vide seção II.2) em função dos valores das incógnitas nos pontos nodais funcionais, conforme observa-se na figura II.6-4.

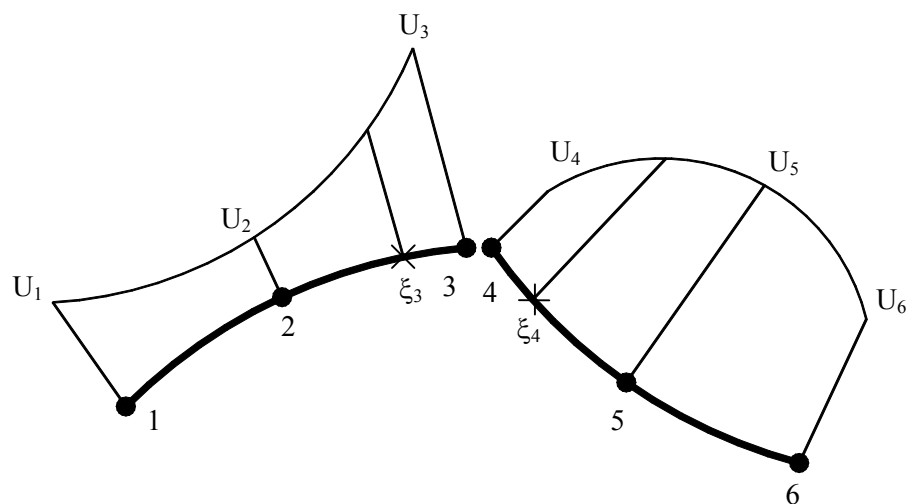


Figura II.6-4 - Representação de dois elementos de contorno quadráticos com pontos de colocação não nodais, pontos ξ_3 e ξ_4 .

Para definir-se a posição do ponto ξ , vide figura II.6-4, ao longo dos elementos de contorno com ponto de colocação não nodal, ponto ξ_4 , utiliza-se o sistema de coordenadas naturais sobre o elemento, o qual varia entre -1 e +1 (seção II.1). Neste trabalho refere-se a esta posição, através do parâmetro γ , definido como sendo o valor absoluto desta posição no sistema coordenadas naturais. Desta forma, quando desloca-se o ponto nodal funcional inicial de um elemento sua posição no sistema de coordenadas naturais é $-\gamma$ (ponto ξ_4), e, analogamente, quando desloca-se o ponto nodal funcional final de um elemento sua posição é $+\gamma$ (ponto ξ_3).

Pode-se, então, de acordo com a equação integral discretizada para o Método dos Elementos de Contorno, vide Capítulo III equação III.2-15 (repetida a seguir para maior comodidade), observar que o deslocamento do ponto fonte ξ não acarreta alteração no modo de cálculo das integrais sobre os elementos de contorno, mas somente no primeiro termo da equação II.6-4.

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma_j \quad \text{Eq. II.6-4}$$

De acordo com a figura II.6-3, apresenta-se a dedução para o ponto fonte ξ_3 , mas ressalta-se que o procedimento é análogo para o ponto fonte ξ_4 . Sabe-se que o potencial no ponto fonte ξ_3 pode ser expresso de acordo com as funções de interpolação através dos valores do potencial nos pontos nodais funcionais do elemento de contorno, equação II.2-3, vide seção II.2.

$$U(\xi_3) = \sum_{i=1}^3 U_i N_i \quad \text{Eq. II.6-5}$$

Para a completa definição do primeiro termo da equação II.6-4 resta apenas a definição do valor de $C(\xi)$ para este caso, mas de acordo com a equação III.1-13 sabe-se que o valor de $C(\xi)$ para contornos suaves é igual a 0,5. Como no caso dos elementos de contorno com ponto de colocação não nodal, o ponto fonte, neste caso ξ_3 , encontra-se no interior de um elemento de contorno onde a geometria é sempre suave, logo, neste caso, o valor de $C(\xi)=0,5$.

De posse desta informação e aplicando-se a equações II.6-5 no primeiro termo do lado esquerdo da equação II.6-4 encontra-se:

$$C(\xi_3)U(\xi_3) = \frac{1}{2} [U_1 N_1 + U_2 N_2 + U_3 N_3] \quad \text{Eq. II.6-6}$$

Desta forma a expressão integral discretizada do Método dos Elementos de Contorno, equação II.6-4, pode ser novamente reordenada de forma similar a apresentada na seção III.2, formando-se assim o sistema linear de equações algébricas. Este rearranjo é feito somando-se as novas contribuições na matriz H referentes a aplicação do deslocamento do ponto fonte ξ_3 , equação II.6-6.

Na utilização dos elementos de contorno com pontos de colocação não nodal surge um parâmetro importante, que consiste na escolha da distância de afastamento do ponto fonte ξ referente ao nó duplo, de tal forma a não distorcer os resultados e também não causar problemas de singularidade ou mal condicionamento no sistema.

Será apresentado na seção III.6 a análise de um problema envolvendo a equação de Laplace enfocando especificamente o efeito da variação da distância de afastamento do ponto fonte referente a um nó duplo.

II.7 - Integração Numérica

Sem dúvida, a integração numérica trata de um dos tópicos de maior relevância no Método dos Elementos de Contorno, sendo nas últimas décadas assunto de intensos trabalhos junto a diversos pesquisadores [10]. A importância desse tópico pode ser matematicamente caracterizada a partir da equação III.2-6 (repetida a seguir), onde os coeficientes ali representados podem ser chamados de coeficientes de influência, sendo que a precisão deste método está fortemente relacionada a obtenção correta de tais coeficientes.

$$[H]\{U\} = [G]\{Q\} \quad \text{Eq. II.7-1}$$

O cálculo analítico das integrais envolvidas torna-se praticamente inviável para elementos de ordem superior, isto é, onde a variação da variável básica ao longo do elemento não é considerada constante. Um agravante surge no caso de elementos com geometria não retilínea (elementos isoparamétricos quadráticos ou superiores) onde o Jacobiano, nestes casos, não é mais um valor constante e sim uma função da forma geométrica do elemento.

A filosofia das quadraturas numéricas consiste em obter-se o valor da integral almejada, através de uma combinação linear de valores da função a ser integrada, definida em

certos pontos de integração ζ_i , multiplicados por determinados coeficientes, os pesos ω_i , assim:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \omega_1 f(\zeta_1) + \omega_2 f(\zeta_2) + \dots + \omega_n f(\zeta_n) \quad \text{Eq. II.7-2}$$

A determinação dos pontos de integração ζ_i de avaliação da função $f(x)$ e dos pesos ω_i é feita de acordo com diversos procedimentos, que de forma geral podem ser agrupados em duas categorias [11]:

- quadraturas fixas - a escolha dos parâmetros ζ_i e ω_i não depende do comportamento da função $f(x)$; trata-se apenas de uma escolha do tipo de esquema de integração a ser utilizado; e,
- quadraturas adaptativas - neste caso a definição dos pontos de integração ζ_i é feita de acordo com o comportamento da função $f(x)$, de tal forma a obter-se uma maior concentração dos pontos ζ_i na região onde a função apresente uma variação mais acentuada.

Os métodos amplamente utilizados para o cálculo das integrais são baseados na quadratura gaussiana, devido a sua simplicidade e rapidez. O processo de integração via Quadratura de Gauss pode ser ilustrado de acordo com a expressão que se segue [2, 11, 12, 13], equação II.7-3. Tal esquema de integração possui a vantagem de calcular de forma precisa as integrais de funções polinomiais de grau $p = 2NG - 1$.

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{p=1}^{NG} W_p f(\zeta_p) \quad \text{Eq. II.7-3}$$

onde: NG - número de pontos de integração;

W_p - pesos da Quadratura de Gauss; e,

ζ_p - pontos de integração.

Os denominados pontos de integração, pontos ζ_p , são valores discretos, em coordenadas naturais, limitados entre $[-1; +1]$. Tais pontos não se encontram igualmente espaçados ao longo do intervalo de integração. Pode-se adotar um número qualquer de pontos de integração, sendo que para integrandos não expressos por funções polinomiais a

escolha de um maior número de pontos de integração proporcionará uma melhor avaliação da integral.

Mesmo quando existe singularidade na função a ser integrada, a quadratura de Gauss ainda pode ser utilizada, pois como ocorre na formulação direta de Elementos de Contorno - aqui adotada para a equação de Laplace - o valor Principal de Cauchy das integrais resultantes e o valor obtido via quadratura de Gauss são coincidentes quando estas são calculadas no sentido usual de integração [7, 9].

CLASSIFICAÇÃO DAS INTEGRAIS

De acordo com a função a ser integrada e o intervalo de integração, as integrais podem ser classificadas como sendo:

- Integrais Não Singulares - Quando o integrando, ao longo de todo o intervalo de integração, não apresenta nenhuma singularidade. Isto é, ao longo do intervalo de integração a função a ser integrada não tende para mais ou menos infinito;
- Integrais Singulares - Quando o integrando apresenta pelo menos uma singularidade ao longo do intervalo de integração. Isto é, neste intervalo a função tende para o infinito; e,
- Integrais Quase Singulares - Quando o ponto onde o integrando apresenta uma singularidade não pertence ao intervalo de integração. mas encontra-se próximo a ele. Neste caso, apesar de não se atingir a singularidade no intervalo de integração o integrando apresenta uma elevada taxa de crescimento, isto é um comportamento assintótico.

No caso específico do Método dos Elementos de Contorno aplicado a equação de Laplace, a solução fundamental envolve funções que se tornam singulares dependendo da distância do chamado ponto fonte em relação ao elemento de contorno ao qual se efetua a integração. Deve-se, então, procurar utilizar-se de um esquema de integração auto-adaptativo, pois conforme o caso, pode-se obter os três tipos de integrações: Singulares;

Quase Singulares e Não Singulares. No cálculo das integrais Singulares e Quase Singulares devem ser tomados cuidados especiais para a perfeita avaliação da integral.

Como o próprio nome sugere, um esquema de integração auto-adaptativo deve ser capaz de adaptar-se ao tipo de integração a ser efetuada. Sendo assim, tal esquema de integração deve tomar as medidas necessárias, quando for conveniente, para obter-se uma resposta com elevada precisão.

A vantagem dos esquemas de integração auto-adaptativos é que, com apenas um único procedimento de integração, consegue-se englobar todos os tipos possíveis de integrais a serem avaliadas pelo Método dos Elementos de Contorno.

A seguir apresenta-se o procedimento de integração utilizando uma transformação de coordenadas de 3ª ordem, que posteriormente será inserido em um esquema de integração auto-adaptativo, mas que, para sua melhor compreensão, optou-se por sua apresentação em separado. Também são apresentados a resolução de alguns exemplos de integrações singulares usando tal procedimento numérico.

TRANSFORMADA DE 3ª ORDEM

Nesta seção é apresentado o esquema de integração adaptativo proposto por Telles (1987), para o cálculo de integrais singulares, onde são apresentados apenas os casos de integrações unidimensionais, que são os tipos de integrações utilizadas neste trabalho. Para os casos bidimensionais o leitor pode encontrar maiores detalhes nas referências: Telles (1987) e Telles et al. (1994) [14, 15].

Tendo-se, inicialmente, a integral apresentada a seguir, equação II.7-4, onde a função a ser integrada $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$.

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad \text{Eq. II.7-4}$$

sendo η a coordenada natural da integral.

Adota-se então, uma transformação de coordenadas de 3ª ordem, dada de acordo com a seguinte relação:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad \text{Eq. II.7-5}$$

onde:

γ - é a coordenada fornecida pelos pontos de integração da Quadratura Gaussiana e, após a transformação, a coordenada η estará associada ao peso da Quadratura Gaussiana correspondente a ponto de integração γ ; e,

a, b, c, d - são parâmetros dependentes da posição do ponto de singularidade $\bar{\eta}$.

Tal transformação de coordenadas permanece válida sem a necessidade do recurso da partição do domínio para qualquer posição do ponto de singularidade e produz automaticamente uma maior concentração dos pontos de integração próximos ao ponto de singularidade [14].

Os parâmetros a, b, c & d são definidos pela aplicação das seguintes condições:

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

$$\frac{d\eta}{d\gamma} \Big|_{\bar{\eta}} = 0$$

Eqs. II.7-6

$$\frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \Big|_{\bar{\eta}} = 0$$

A terceira condição, equações II.7-6, implica que o Jacobiano dessa transformação deve preferivelmente reduzir a ordem da singularidade no ponto $\bar{\eta}$ e, a quarta condição é introduzida para produzir um ponto de mínimo no Jacobiano para o ponto $\bar{\eta}$ (um ponto de máximo no Jacobiano pode também ser obtido). Esta condição implica que o mínimo valor do Jacobiano está localizado onde o típico comportamento da função singular $f(\eta)$ apresenta um gradiente mais severo.

A aplicação das condições dadas nas expressões (II.7-6) à equação II.7-5, fornecem a solução em termos dos parâmetros a, b, c, d, que são dados por:

$$a = \frac{1}{Q}$$

$$b = \frac{-3\bar{\gamma}}{Q}$$

Eqs. II.7-7

$$c = \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q}$$

$$d = -b$$

sendo:

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \quad \text{Eqs. II.7-8}$$

onde $\bar{\gamma}$ é o valor da coordenada γ correspondente ao ponto de singularidade $\bar{\eta}$, isto é:

$$\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta} \quad \text{Eq. II.7-9}$$

O parâmetro $\bar{\gamma}$ pode ser obtido pela resolução da seguinte equação:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|} + \bar{\eta} \quad \text{Eq. II.7-10}$$

onde:

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad \text{Eq. II.7-11}$$

Voltando-se a equação (II.7-4), que neste ponto pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta(\gamma))J(\gamma)d\gamma \quad \text{Eqs. II.7-12}$$

onde $\eta(\gamma)$ é definido pela equação III.7-5 e $J(\gamma)$ é o Jacobiano da Transformação dado por:

$$J(\gamma) = \frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma} = 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c \quad \text{Eqs. II.7-13}$$

Na implementação numérica do esquema de integração utilizando-se da transformada de 3ª ordem, para o cálculo das integrais envolvidas no Método dos Elementos de Contorno, torna-se necessário algumas modificações, afim de obter-se um esquema de integração auto-adaptativo, de acordo com a distância do ponto fonte sobre o elemento de contorno ao longo do qual é feita a integração [15]. Isto é conseguido pela adição de certos parâmetros nas expressões acima apresentadas, conforme será exposto posteriormente.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE 3ª ORDEM

A seguir são apresentados e resolvidos alguns exemplos de integrais envolvendo funções singulares, tais exemplos foram colhidos de Telles (1987) [14]. Apresentam-se os valores das integrais utilizando-se da Transformada de 3ª ordem e do procedimento tradicional da quadratura de Gauss, ambos aplicados adotando-se diferentes números de pontos de integração. Tais resultados são, então, comparados com soluções de referência apresentadas em Telles (1987) [14].

Os pontos e os pesos referentes a quadratura gaussiana, utilizados nas integrações numéricas realizadas ao longo deste trabalho, foram obtidos da seguinte referência bibliográfica: Abramowitz et al. (1970) [12]. Tais valores foram alocados junto ao programa de computador utilizando-se variáveis reais de dupla precisão (16 casas decimais).

Exemplo 1.:
$$I = \int_{-1}^{+1} \ln(1 - \eta) d\eta = -0.613705639$$

A função logaritmo neperiano é indefinida para o ponto $\bar{\eta} = 1$, visto que o argumento desta função torna-se nulo para este valor. Sendo assim, a integral a ser avaliada torna-se singular neste ponto.

Neste caso, aplicando-se as equações II.7-10 e II.7-11, tem-se que:

$$\bar{\gamma} = 1$$

daí, obtêm-se:

$$Q = 4$$

Logo os coeficientes da transformada de 3ª ordem, obtidos de acordo com as equações II.7-7, são:

$$a = 0.25 \quad b = -0.75 \quad c = 0.75 \quad d = 0.75$$

Para melhor ilustrar o procedimento da transformada de 3ª ordem, que propicia uma nova reordenação dos pontos de integração para próximo do ponto de singularidade $\bar{\eta} = 1$, apresenta-se a tabela II.7-1 contendo as coordenadas dos pontos de integração, pontos de Gauss, e dos pontos após a aplicação da transformada de 3ª ordem, pontos de Gauss Transformados, para o caso da utilização de 10 pontos de integração.

Tabela II.7-1 - Comparação da distribuição dos pontos de integração para os diferentes esquemas de integração utilizados.

	Pontos de Gauss	Pontos de Gauss Transformados
1	-0.97390652	-0.92273641
2	-0.86506337	-0.62188772
3	-0.67940956	-0.18415860
4	-0.43339539	0.26372846
5	-0.14887434	0.62089667
6	0.14887434	0.84585798
7	0.43339539	0.95452420
8	0.67940956	0.99176257
9	0.86506337	0.99938577
10	0.97390652	0.99999556

Note que após a aplicação da Transformada de 3ª ordem os pontos de integração não mais apresentam simetria em relação a origem do sistema de coordenadas naturais e que há uma elevada concentração dos pontos de integração próximos a coordenada $\eta = 1$, isto é, o ponto de singularidade.

Na figura II.7-1, apresenta-se o gráfico contendo o erro percentual do procedimento tradicional da Quadratura de Gauss e o da Transformada de 3ª ordem, ambos em relação a solução de referência, para diferentes números de pontos de integração.

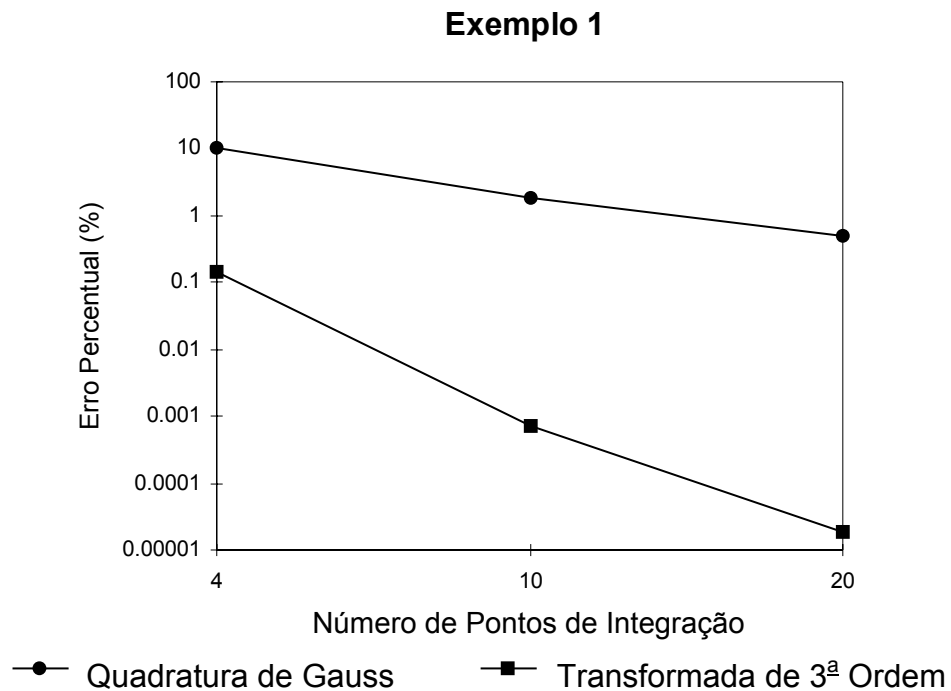


Figura II.7-1 - Gráfico comparativo do erro percentual para os diferentes esquemas de integração em função do número de pontos de integração - Exemplo 1.

Exemplo 2.:
$$I = \int_{-1}^{+1} \ln|0.3 + \eta| d\eta = -1.908598917$$

Esta integral torna-se singular para o ponto $\bar{\eta} = -0.3$.

Nestes caso tem-se:

$$\bar{\gamma} = -0.10281$$

então:

$$Q = 1.03171$$

Assim, seguindo o mesmo procedimento anterior encontra-se:

$$a = 0.96927 \quad b = 0.29895 \quad c = 0.03073 \quad d = -0.29895$$

A seguir, apresentam-se a tabela II.7-2 e a figura II.7-2 contendo informações semelhantes às apresentadas para o primeiro exemplo analisado.

Tabela II.7-2 - Comparação da distribuição dos pontos de integração para os diferentes esquemas de integração utilizados.

	Pontos de Gauss	Pontos de Gauss Transformados
1	-0.97390652	-0.94068367
2	-0.86506337	-0.72928248
3	-0.67940956	-0.48580986
4	-0.43339539	-0.33501862
5	-0.14887434	-0.30009475
6	0.14887434	-0.28454729
7	0.43339539	-0.15057161
8	0.67940956	0.16390243
9	0.86506337	0.57881340
10	0.97390652	0.90988851

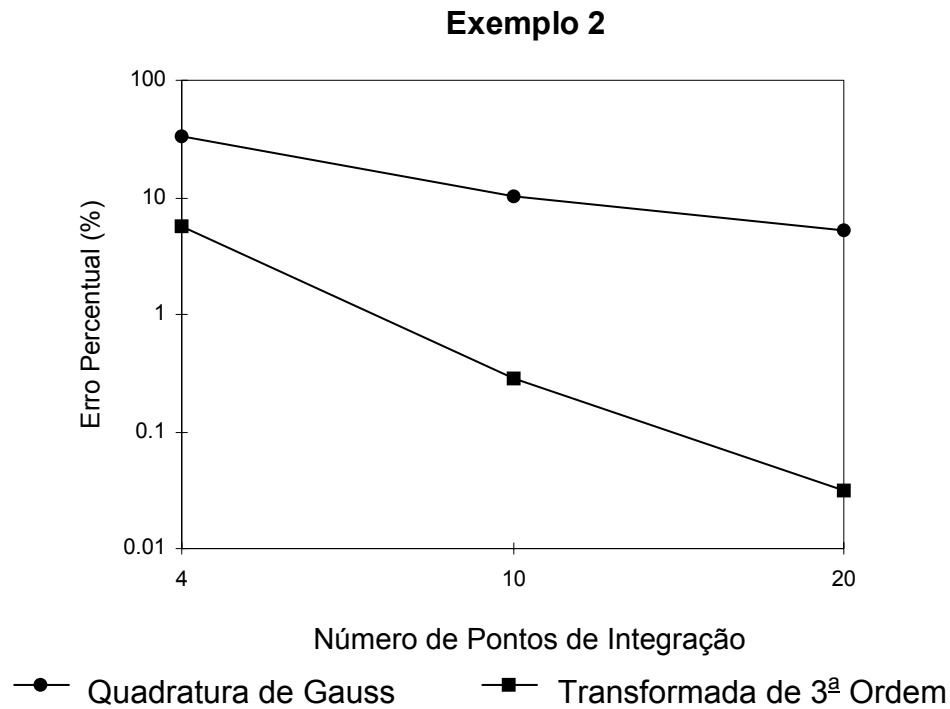


Figura II.7-2 - Gráfico comparativo do erro percentual para os diferentes esquemas de integração em função do número de pontos de integração - Exemplo 2.

Exemplo 3.:
$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{(1.1 - \eta)^2} = 9.52380952$$

Esta integral, não mais envolvendo a função logaritmo, é singular para o ponto $\bar{\eta} = 1.1$, visto que a função torna-se indefinida para este valor.

Seguindo-se, novamente, o procedimento da transformada de 3ª ordem obtém-se os seguintes valores para os parâmetros:

$$\bar{\gamma} = 2.13706 \quad e \quad Q = 14.70106$$

e finalmente:

$$a = 0.06802 \quad b = -0.4361 \quad c = 0.93198 \quad d = 0.4361$$

A seguir, apresenta-se a tabela II.7-3 contendo as distribuições dos pontos de integração para ambos os tipos de integrações efetuadas, Gaussiana e Transformada de 3ª ordem.

Tabela II.7-3 - Comparação da distribuição dos pontos de integração para os diferentes esquemas de integração utilizados.

	Pontos de Gauss	Pontos de Gauss Transformados
1	-0.97390652	-0.94803241
2	-0.86506337	-0.74050246
3	-0.67940956	-0.41972829
4	-0.43339539	-0.05526314
5	-0.14887434	0.28746536
6	0.14887434	0.56540939
7	0.43339539	0.76364128
8	0.67940956	0.88932628
9	0.86506337	0.96000649
10	0.97390652	0.99295634

Na figura II.7-3 apresenta-se o gráfico mostrando os valores do erro percentual em relação a solução de referencia, para o procedimento tradicional da Quadratura de Gauss e o da Transformada de 3ª ordem, para diferentes números de pontos de integração.

Note que, neste caso, para a transformada de 3ª ordem não houve uma melhora sensível na qualidade dos resultados, quando passou-se a utilizar-se de 20 pontos de integração ao invés de 10 pontos. Isto pois, provavelmente, já na resposta com 10 pontos de integração atingiu-se a precisão numérica máxima alcançada pelo compilador utilizado, sendo que o erro cometido resulta, basicamente, de erros de arredondamento e de truncamento.

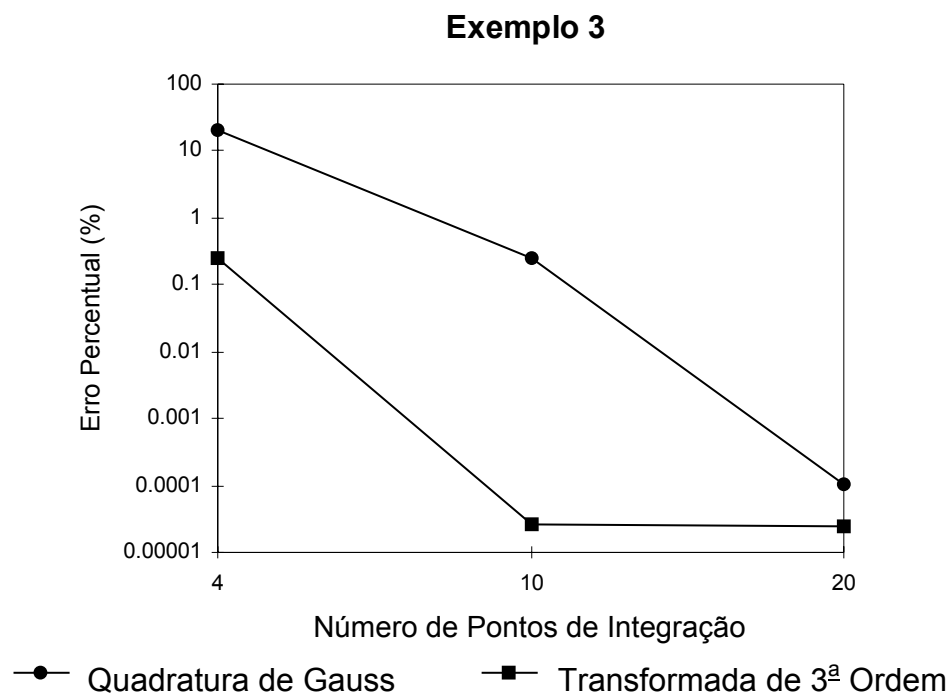


Figura II.7-3 - Gráfico comparativo do erro percentual para os diferentes esquemas de integração em função do número de pontos de integração - Exemplo 3.

De acordo com os exemplos apresentados, pode-se comprovar a elevada eficiência da Transformada de 3ª ordem para o cálculo de integrais singulares frente ao procedimento tradicional da Quadratura de Gauss.

Destaca-se que existem diversos esquemas de integração, mas neste trabalho optou-se pela utilização de um esquema de integração auto-adaptativo envolvendo a transformada de 3ª ordem, conforme será exposto a seguir, para o cálculo das integrais resultantes da aplicação do Método dos Elementos de Contorno.

ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO AUTO-ADAPTATIVO

Um esquema de integração auto-adaptativo aplicado ao Método dos Elementos de Contorno deve funcionar de acordo com a distância do chamado ponto fonte ξ em relação ao elemento de contorno sobre o qual é realizada a integração. Sendo assim, o esquema de integração auto-adaptativo deve ser capaz de resolver integrais singulares (quando o ponto fonte esta sobre o elemento), integrais quase-singulares (quando o ponto fonte encontra-se próximo ao elemento de integração) e integrais não singulares (quando o ponto fonte encontra-se distante do elemento de integração).

A primeira etapa a ser definida é uma variável, denominada de D , que atua como uma medida do tipo de integração a ser resolvida. Esse parâmetro é, então, definido como sendo:

$$D = \frac{2R_{\text{Min}}}{L} \quad \text{Eqs. II.7-14}$$

onde : R_{Min} - é a menor distância entre o ponto fonte e o elemento de integração; e,

L - é definido como sendo a distância entre os pontos extremos do elemento de contorno.

Outras medidas podem ser utilizadas para a definição de L . Por exemplo, uma alternativa plausível é a adoção do comprimento do elemento de contorno, embora esta nova definição somente irá diferenciar-se da distância ente os pontos extremos do elemento de contorno para elementos possuindo uma geometria curva (elementos quadráticos), mas tendo a desvantagem de ser uma medida computacionalmente mais onerosa.

Para o cálculo de R_{Min} existem dois procedimentos possíveis, o primeiro consiste em determinar-se a menor distância entre o ponto fonte ξ e o ponto sobre a curva que

define o elemento de integração, restrito ao intervalo onde o elemento é definido (vide figura II.7-4(a)); o segundo procedimento consiste em determinar-se a menor distância entre o ponto fonte ξ e a curva a qual está definido o elemento de integração (vide figura II.7-4(b)). Existem casos onde estes dois procedimentos apresentam o mesmo resultado, vide figura II.7-4(c). De acordo com Telles (1994) [15], é preferível a utilização da primeira hipótese para o cálculo de R_{Min} .

Na implementação realizada para o esquema de integração auto-adaptativo, para o programa computacional do Método dos Elementos de Contorno empregado nas diversas modelagens apresentadas ao longo deste trabalho, adotou-se a hipótese de que R_{Min} é determinado como sendo a menor distância entre o ponto fonte ξ e o ponto sobre a curva que define o elemento de integração, restrito ao seu intervalo de definição (figura II.7-4(a)).

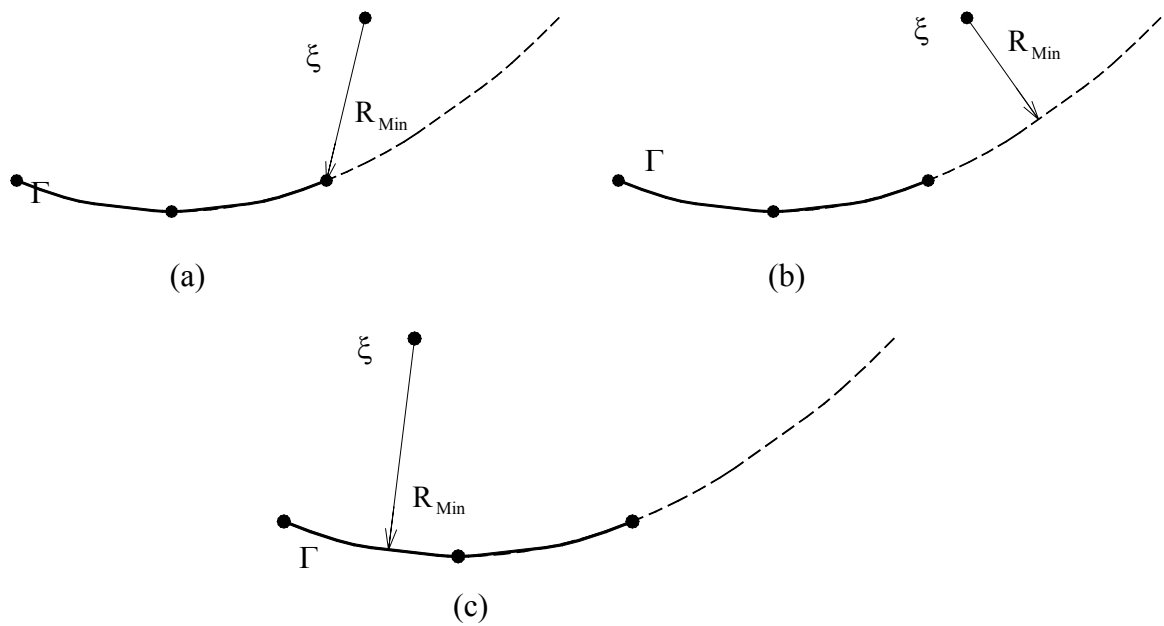


Figura II.7-4 - (a), (b) e (c) - Procedimentos para a definição da distância mínima R_{Min} entre o ponto fonte ξ e o elemento de integração.

Para o cálculo de R_{Min} utiliza-se um algoritmo de minimização, onde objetiva-se encontrar justamente a menor distância entre o elemento de integração e o ponto fonte. Para a definição da geometria do elemento de contorno utilizam-se as denominadas funções de forma, vide seção II.2. Desta forma não é necessária a definição na forma explícita de um polinômio correlacionando as coordenadas do elemento de contorno.

O algoritmo de minimização utilizado neste trabalho é o denominado Golden Section Search [13], devido a sua simplicidade e fácil implementação computacional, embora tal algoritmo apresente uma convergência linear.

Obtendo-se a distância mínima entre o ponto fonte ξ e o elemento de integração, de acordo com o primeiro procedimento proposto, encontra-se também desta forma definido o valor de $\bar{\eta}$, obtido em termos da coordenada natural η . A transformação de coordenadas de 3ª ordem pode então ser iniciada através dos cálculos dos parâmetros a , b , c , d , dados agora de acordo com as seguintes expressões:

$$a = \frac{(1 - \bar{r})}{Q}$$

$$b = \frac{-3(1 - \bar{r})\bar{\gamma}}{Q} \quad \text{Eqs. II.7-15}$$

$$c = \frac{(\bar{r} + 3\bar{\gamma}^2)}{Q}$$

$$d = -b$$

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2 \quad \text{Eq. II.7-16}$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{(q^2 + p^3)}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{(q^2 + p^3)}} + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{r}} \quad \text{Eq. II.7-17}$$

$$q = \frac{1}{2(1 + 2\bar{r})} \left[\left(\bar{\eta}(3 - 2\bar{r}) - \frac{2\bar{\eta}^3}{1 + 2\bar{r}} \right) \frac{1}{1 + 2\bar{r}} - \bar{\eta} \right] \quad \text{Eq. II.7-18}$$

$$p = \frac{1}{3(1 + 2\bar{r})} [4\bar{r}(1 - \bar{r}) + 3(1 - \bar{\eta}^2)] \quad \text{Eqs. II.7-19}$$

O parâmetro \bar{r} é uma função do valor obtido para o parâmetro D, equação II.7-14, sendo definido de acordo com os intervalos. De certa forma, através do parâmetro \bar{r} está sendo definido o tipo de integração a ser efetuada: integral singular, quase singular ou integral não singular. É justamente a introdução do parâmetro \bar{r} que faz com que o esquema de integração utilizando a transformada de 3ª ordem torne-se auto-adaptativo.

O valor de \bar{r} é definido como sendo:

$\bar{r} = 0$	$0.00 \geq D < 0.05$	
$\bar{r} = 0.85 + 0.24 \ln(D)$	$0.05 \geq D < 1.30$	
$\bar{r} = 0.893 + 0.0832 \ln(D)$	$1.30 \geq D < 3.618$	
$\bar{r} = 1$	$D \geq 3.618$	Eqs. II.7-20

Verifica-se que quando $\bar{r} = 1$, os pontos de integração obtidos através da transformação de coordenadas de 3ª ordem degeneram-se novamente nos pontos de Gauss e Jacobiano da transformação tornando-se unitário. A medida que o valor de \bar{r} tende para zero o efeito da transformação de coordenadas de 3ª ordem torna-se cada vez mais acentuado.

Pode-se melhorar ainda a precisão nos cálculos dos coeficientes relativos às integrais singulares para elementos de contorno contendo pontos de colocação não nodal, isto é, quando o ponto fonte ξ encontra-se sobre o elemento de integração, adotando-se uma partição do elemento de integração em dois subdomínios e, somente então, realizando-se a transformação de coordenadas de 3ª ordem para cada um dos subintervalos [7, 9].

O procedimento da bipartição do elemento de integração, pode ser melhor compreendido através da observação da figura II.7-5. Após a mudança de coordenadas indicada, torna-se necessária a introdução de um novo Jacobiano, devido à nova mudança de coordenadas realizada nas integrais resultantes. A expressão das integrais resultantes da aplicação deste procedimento de bipartição encontra-se indicada na equação II.7-21.

$$\int Ad\theta = \int A|J_{\theta/\alpha}|d\alpha + \int A|J_{\theta/\beta}|d\beta \quad \text{Eqs. II.7-21}$$

onde:

$J_{\theta/\alpha}$ - é o Jacobiano devido à transformação da coordenada adimensional θ para a coordenada adimensional α ; e,

$J_{\theta/\beta}$ - é o Jacobiano devido à transformação da coordenada adimensional θ para a coordenada adimensional β .

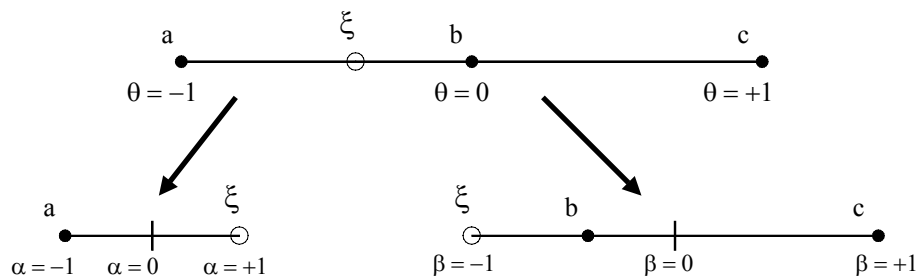


Figura II.7-5 - Esquema de bipartição para a integração singular de elementos de colocação não nodal.

Somente após a realização desta nova etapa inicial, isto é, a bipartição, é que se inicia a aplicação do procedimento de integração, utilizando-se a transformação de coordenadas de 3ª ordem. Observe que neste caso os pontos $\bar{\eta}$ adquirem obrigatoriamente os seguintes valores $\bar{\eta} = +1$ e $\bar{\eta} = -1$.

Cabe ressaltar que, no programa computacional desenvolvido para o Método dos Elementos de Contorno empregado nas diversas análises apresentadas ao longo de deste

trabalho, nas integrações numéricas foram utilizados 20 pontos de integração (pontos de Gauss) junto ao esquema de integração auto-adaptativo usando a transformada de 3ª ordem, além do recurso da bipartição do elemento, quando o ponto fonte ξ encontra-se sobre o elemento de integração.

Referências Bibliográficas

- [1] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [2] BATHE, K.J., “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [3] REDDY, J. N.; “An introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill International Editions, New York, 1986.
- [4] BREBBIA, C.A. e WALKER, S., “*Boundary Element Techniques in Engineering*”, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [5] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [6] BULCÃO, A., LOEFFLER, C.F., “Influência das Funções de Interpolação no Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Potencial Escalar”, *V Congresso Brasileiro de Estudantes de Engenharia Mecânica*, Anais em CD-ROM, Vitória, 1998.
- [7] JAIME, P.R., “Novas Contribuições à Simulação de Ondas Gravitacionais de Grande Amplitude pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1995.
- [8] MARQUES, E., “Combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e dos Elementos Finitos: Aplicação a Problemas de Potencial”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1986.
- [9] ZAMBROZUSKI, N.J.M., “Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Propagação de Ondas Não Lineares Gravitacionais”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1992.

- [10] TANAKA, M.; SLADEK, V. & SLADEK V.; “Regularization Techniques Applied to Boundary Element Methods”, *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, no 10, October 1994.
- [11] CLÁUDIO, D.M., MARIN, J.M., “*Cálculo Numérico Computacional - Teoria e Prática*”, 2^a Edição. Editora Atlas, São Paulo, 1994.
- [12] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, A., “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*”, Dover Publications, New York, 1970.
- [13] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. & FLANNERY B. P.; “*Numerical Recipes in Fortran 77, the Art of Scientific Computing*”, second Edition, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [14] TELLES, J. C. F.; “A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 959-973, 1987.
- [15] TELLES, J. C. F. & OLIVEIRA, R. F.; “Third Degree polynomial Transformation for Boundary Element Integrals: Further Improvements”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n. 13, pp. 135-141, 1994.

Capítulo III

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À EQUAÇÃO DE LAPLACE

III.1 - Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a formulação matemática do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas governados pela Equação de Laplace, equação I.2-9, vide Capítulo I. A formulação empregada neste trabalho trata da chamada formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, fornecendo diretamente como solução do problema o potencial e sua derivada normal ao contorno, sendo essa a formulação mais tradicional e difundida.

Apresenta-se, a seguir, em forma resumida, os procedimentos para a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Equação de Laplace. Maiores detalhes sobre esta e outras formulações podem ser colhidos em extensa bibliografia [1-4]. Os demais tipos de equações diferenciais abordados ao longo deste trabalho nada mais são do que extensões deste caso inicial. Sendo assim, na apresentação destes demais casos são feitas referências a este caso inicial, onde então serão apresentadas apenas as formulações dos demais termos adicionais existentes nas equações diferenciais de governo.

Existem dois caminhos distintos para chegar-se a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, que consiste na obtenção de uma equação integral, desenvolvida ao longo do contorno Γ , relacionando as variáveis básicas do problema e suas derivadas na direção normal ao contorno, (vide figura III.1-1) [5].

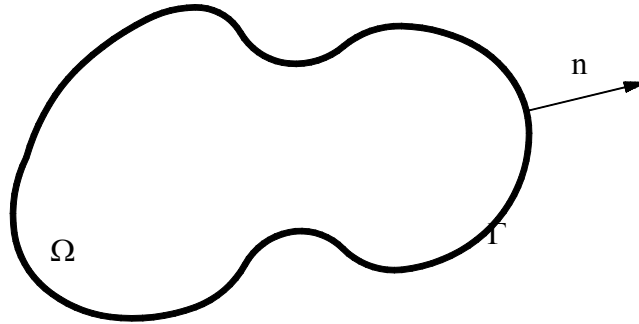


Figura III.1-1 - Representação do domínio físico Ω , o contorno Γ e sua derivada normal n

O primeiro caminho para obter-se a formulação do método consiste na utilização do Método dos Resíduos Ponderados para o estabelecimento da sentença integral. Esta é uma abordagem bastante utilizada em muitos trabalhos do gênero [1-6].

A segunda maneira fundamenta-se na denominada Segunda Identidade de Green, que relaciona as formas integrais Forte e Inversa associadas à equação diferencial de governo. Esse vínculo se processa matematicamente através de Integrações por partes e aplicação do Teorema da Divergência. Neste trabalho apresenta-se a formulação do método, através deste procedimento.

Para a dedução da formulação direta do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas governados pela equação de Laplace, através do uso da Segunda Identidade de Green, inicia-se pelo estabelecimento da Equação de Laplace em sua forma integral forte, dada por:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad \text{Eq. III.1-1}$$

Tal sentença integral também pode ser interpretada pelo enfoque do Método dos Resíduos Ponderados, onde, se faz uma ponderação dos resíduos da equação diferencial, integrando-a ao longo de todo o domínio físico do problema, através de uma função auxiliar u^* , considerando resíduos nulos no contorno. No Método dos Elementos de Contorno a função auxiliar u^* , denominada de solução fundamental, corresponde à solução analítica de um problema correlato.

Existem diversas soluções fundamentais dependendo do tipo de problema a ser analisado e mesmo da técnica a ser empregada [1-4]. Para os casos transientes, envolvendo derivadas temporais, pode-se formular o método através de soluções fundamentais dependentes do tempo [7], isto é, a própria solução fundamental apresenta uma variação

temporal; mas também pode-se utilizar de uma solução fundamental estacionária e empregar-se um esquema de avanço no tempo a fim de computar a variação temporal do problema.

No caso da equação de Laplace, a solução fundamental u^* corresponde a solução analítica de um problema governado pela equação de Poisson, tendo um domínio infinito onde a ação de domínio é concentrada em um único ponto através do uso da função Delta de Dirac, equação III.1-2.

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad \text{Eq. III.1-2}$$

Na equação III.1-2, Δ é a função Delta de Dirac; ξ é denominado de ponto fonte, representando o ponto de aplicação do carregamento concentrado no domínio infinito.

Para os casos bidimensionais, a solução fundamental u^* é dada pela seguinte equação:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad \text{Eq. III.1-3}$$

sendo $r(\xi; X)$ a distância euclidiana entre o ponto fonte ξ e um ponto genérico X do domínio infinito, denominado de ponto campo.

Dando prosseguimento a dedução da formulação do método, integra-se sucessivamente por partes a equação III.1-1, obtendo-se a denominada forma integral Inversa associada a Equação de Laplace, dada por:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega + \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u_{,i}^*)_{,i} d\Omega = 0 \quad \text{Eq. III.1-4}$$

O segundo e o terceiro membros da equação III.1-4 podem ser interpretados, via Método dos Resíduos Ponderados, como sendo a minimização dos erros cometidos no caso da não obediência às condições de contorno da Equação de Laplace.

Aplicando-se o Teorema da Divergência [1-4, 6] no segundo e terceiro membros da equação III.1-4, essas integrais ao longo do domínio são transformadas em integrais de contorno. Assim tem-se:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u^* u_{,i} n_i d\Gamma \quad \text{Eq. III.1-5}$$

$$\int_{\Omega} (u u_{,i}^*)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u u_{,i}^* n_i d\Omega \quad \text{Eq. III.1-6}$$

Nessas últimas equações, n indica a direção normal ao contorno Γ .

Neste ponto, a fim de simplificar a notação utilizada, definem-se as seguintes variáveis:

$$q = u_{,i} n_i \quad \text{Eq. III.1-7}$$

$$q^* = u^*_{,i} n_i \quad \text{Eq. III.1-8}$$

Derivando-se a expressão para a solução fundamental, equação III.1-3, encontra-se:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad \text{Eq. III.1-9}$$

Voltando-se a equação III.1-4 que, neste ponto, pode ser reescrita como sendo:

$$\int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = 0 \quad \text{Eq. III.1-10}$$

Para escrever a sentença integral, equação III.1-10, somente em termos de variáveis integradas ao longo do contorno Γ , deve-se tratar a primeira parcela do lado esquerdo desta equação, valendo-se das propriedades da função Delta de Dirac [1-4, 6]. Utilizando a equação III.1-2 e considerando o ponto fonte ξ no interior do domínio físico Ω , tem-se:

$$\int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = -\int_{\Omega} u \Delta(\xi; X) d\Omega = -u(\xi) \quad \text{Eq. III.1-11}$$

Para obter-se uma expressão mais geral, deve-se considerar os casos em que o ponto fonte ξ não se situa apenas em pontos no interior do domínio físico Ω , mas também em pontos fora do domínio físico do problema e pontos situados sobre o contorno Γ . Portanto, dessa forma, a equação III.1-11 torna-se:

$$\int_{\Omega} u \Delta(\xi; X) d\Omega = -C(\xi) u(\xi) \quad \text{Eq. III.1-12}$$

Onde o valor de $C(\xi)$ é agora definido em função da posição relativa do ponto fonte ξ em relação ao domínio físico do problema Ω . As possibilidades existentes podem ser expressas de acordo com a seguinte sentença:

$$C(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } (\xi \notin (\Omega + \Gamma)) \\ 1 & \text{se } ((\xi \in \Omega) \text{ e } (\xi \notin \Gamma)) \\ \alpha/2\pi & \text{se } (\xi \in \Gamma) \end{cases} \quad \text{Eq. III.1-13}$$

onde α é o ângulo em radianos, calculado na posição do ponto fonte ξ , formado pelo contorno na parcela interior ao domínio físico do problema, vide figura III.1-2.

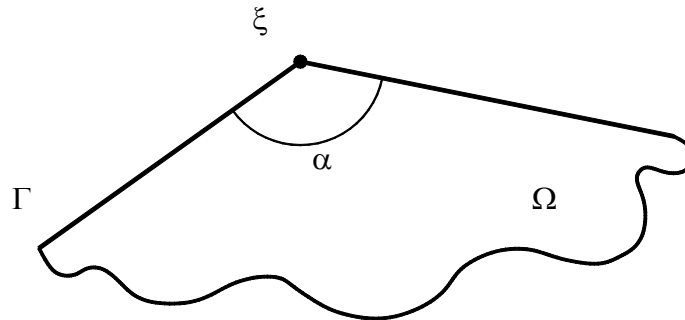


Figura III.1-2 - Representação do ângulo α , formado pelo contorno na parcela interior ao domínio físico do problema

Além deste, existe outro procedimento para o cálculo do valor de $C(\xi)$. Tal técnica será apresentada nos itens a seguir (seção III.4), pois leva em conta a discretização da equação integral do Método dos Elementos de Contorno e a aplicação das condições de contorno em um problema físico, tendo somente condições de contorno naturais prescritas ao longo do contorno Γ [2, 6].

Para o caso de contornos com geometria suave, isto é, onde não exista a presença de qualquer tipo de descontinuidade geométrica (cantos vivos), o valor de $C(\xi)$ é, então, definido como sendo 1/2.

De acordo com as equações III.1-10, III.1-12 e III.1-13, estabelece-se, então, a seguinte sentença integral, equação III.1-14, válida para qualquer posição relativa do ponto fonte ξ .

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = 0 \quad \text{Eq. III.1-14}$$

Observa-se que tal sentença envolve apenas integrais de contorno. Desta forma, cumpriu-se plenamente o objetivo da formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Equação de Laplace, onde, a partir de uma equação integral de domínio, obteve-se um conjunto de integrais envolvendo apenas valores no contorno.

III.2 - Discretização da Equação Integral

Com o objetivo de proceder a análise numérica, o próximo passo consiste na discretização da equação III.1-14 afim de obter-se um sistema matricial envolvendo equações algébricas lineares, de fácil resolução computacional.

O conceito de discretização consiste no estabelecimento de pontos pertencentes ao domínio contínuo do problema, de tal forma que tais pontos o representem adequadamente. Assim, passa-se, através de aproximações matemáticas consistentes, de uma equação diferencial envolvendo derivadas parciais para um sistema linear de equações algébricas.

Segundo a filosofia do Método dos Elementos de Contorno os pontos representativos do domínio físico do problema são alocados somente sobre elementos definidos no contorno do problema, daí a denominação do método. Isto é possível desde que se possa obter a formulação Inversa associada à equação diferencial do problema ou sejam empregadas algumas técnicas especiais.

Para a fase de discretização da equação integral considera-se o contorno original Γ como sendo formado por um conjunto de elementos de contorno distintos, sobre os quais são definidas as variações das grandezas envolvidas (u e q), através do uso das denominadas funções de interpolação, em função de valores obtidos em determinados pontos sobre o elemento de contorno. Tais pontos são denominado de nós ou pontos nodais funcionais, vide seção II.5.

Após a discretização do contorno Γ em diversos elementos de contorno, passa-se a expressar a equação III.1-14, repetida a seguir após um simples algebrismo, na forma de somatórios da contribuição de cada elemento discreto, equação III.2-1. Nestas equações encontram-se explícitos os argumentos de cada uma das variáveis envolvidas.

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma = \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \quad \text{Eq. III.1-14}$$

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma_j \quad \text{Eq. III.2-1}$$

Sendo NE o número de elementos nos quais o contorno Γ é discretizado.

Neste ponto são introduzidos basicamente dois tipos de aproximação na solução numérica da equação III.2-1. A primeira diz respeito à geometria dos elementos de contorno utilizados para a discretização, onde são utilizadas as denominadas funções de forma. A segunda aproximação diz respeito ao tipo de variação imposta para as variáveis básicas do problema ao longo dos elementos de contorno, através das funções de interpolação.

Na seção II.5 encontram-se expostos de forma detalhada os principais tipos de elementos de contorno. Destaca-se que nas aplicações resolvidas ao longo deste trabalho são utilizados somente elementos de contorno lineares ou elementos de contorno quadráticos, bem como elementos de contorno com ponto de colocação não nodal, quando estes forem necessários na discretização do domínio físico do problema.

A partir deste ponto, a dedução da equação integral para o Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas governados pela Equação de Laplace encontra-se particularizada para o caso da discretização ser efetuada utilizando-se de elementos de contorno quadráticos, embora isto não acarrete perdas na generalidade do desenvolvimento.

Os valores de $u(X)$ e $q(X)$ para cada elemento de contorno, expressos na equação III.2-1, são aproximados através do uso das funções de interpolação, vide seção II.2. Assim, representando-se tal aproximação em uma forma matricial apropriada e considerando-se que os valores das variáveis básicas do problema (u e q) são constantes para cada ponto nodal funcional, podendo, portanto, serem retirados das integrais, obtendo-se a seguinte sentença:

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{NE} [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^*(\xi; X) d\Gamma_j =$$

$$\sum_{j=1}^{NE} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} u^*(\xi; X) d\Gamma_j$$

Eq. III.2-2

Observe que na equação III.2-2 os valores das variáveis básicas do problema encontram-se numerados de 1 a 3, representando os pontos nodais funcionais inicial, final e intermediário de cada elemento de contorno “ j ”, indicando a variação dos diversos elementos de contornos quadráticos utilizados na discretização do problema.

Como as expressões para as funções de interpolação N_j são expressas em termos da coordenada natural η , vide seção II.1, é necessário relacionar $d\Gamma$, representado no

sistema de coordenadas globais X , com tal sistema de coordenadas. Isto é feito através do uso do Jacobiano da transformação de coordenadas (vide seção II.3). Levando-se em conta este fato, e expandindo-se a equação III.2-2, obtém-se então:

$$C(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ U_1^j \int_{-1}^{+1} N_1 q^*(\xi; X) J_j d\eta + U_2^j \int_{-1}^{+1} N_2 q^*(\xi; X) J_j d\eta + U_3^j \int_{-1}^{+1} N_3 q^*(\xi; X) J_j d\eta \right\} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ Q_1^j \int_{-1}^{+1} N_1 u^*(\xi; X) J_j d\eta + Q_2^j \int_{-1}^{+1} N_2 u^*(\xi; X) J_j d\eta + Q_3^j \int_{-1}^{+1} N_3 u^*(\xi; X) J_j d\eta \right\} \quad \text{Eq. III.2-3}$$

onde J_j representa o Jacobiano da transformação das coordenadas globais X para as coordenadas naturais η , referente ao elemento de contorno j ; enquanto U_i^j , Q_i^j representam os valores nos pontos nodais funcionais “i” para o potencial U ou sua derivada normal ao contorno Q , referentes ao elemento de contorno “j”.

Assim, pode-se reduzir a quantidade de variáveis expressas na equação III.2-3 através da definição das seguintes grandezas:

$$h_j^k = \int_{\Gamma_j} N_k q^*(\xi; X) J_j d\eta \quad \text{Eq. III.2-4}$$

$$g_j^k = \int_{\Gamma_j} N_k u^*(\xi; X) J_j d\eta \quad \text{Eq. III.2-5}$$

Finalmente, para a montagem do sistema linear de equações algébricas resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno, adota-se o procedimento denominado de Método da Colocação[1-4, 6], no qual gera-se o sistema matricial pela coincidência dos pontos fontes ξ com os pontos nodais funcionais, tendo-se assim um sistema de $N \times N$ equações algébricas lineares, sendo N o número de pontos nodais funcionais.

A representação deste sistema linear de equações algébricas resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno é dada pela seguinte expressão matricial:

$$[H]\{U\} = [G]\{Q\} \quad \text{Eq. III.2-6}$$

onde:

$\{U\}$ representa um vetor contendo os valores do potencial para todos os pontos nodais funcionais utilizados na discretização do domínio físico do problema;

$\{Q\}$ representa um vetor contendo os valores da derivada do potencial na direção ao contorno para os pontos nodais funcionais utilizados na discretização do domínio físico do problema;

$[G]$ é uma matriz contendo os denominados coeficientes de influência G_{ik} , sendo tais coeficientes resultantes do somatório das integrais dos termos g_j^k , equação III.2-5, com o ponto fonte ξ alocado sobre o ponto nodal “i”; e,

$[H]$ é uma matriz contendo os denominados coeficientes de influência H_{ik} , sendo tais coeficientes resultantes do somatório das integrais dos termos h_j^k , equação III.2-4, com o ponto fonte ξ alocado sobre o ponto nodal “i”. Ressalta-se que ao longo da diagonal principal da matriz H , soma-se o valor do coeficiente relativo a $C(\xi)$.

Os termos H_{ik} e G_{ik} acumulam as contribuições de h_j^k e g_j^k , respectivamente, dos elementos de contorno “j” que contém o nó “k”. Os pontos nodais funcionais extremos dos elementos de contorno recebem contribuições vindas dos dois elementos que chegam a estes pontos nodais funcionais, enquanto que o ponto nodal funcional intermediário dos elementos de contorno recebe somente a contribuição vinda do elemento ao qual pertence.

III.3 - Introdução das Condições de Contorno

O sistema linear de equações algébricas, resultante do Método dos Elementos de Contorno aplicado à Equação de Laplace, equação III.2-6, possui N equações, sendo N o número de pontos nodais funcionais, e $2N$ valores nodais, expressos pelos vetores U e Q , representando os valores do potencial e sua derivada na direção normal ao contorno, respectivamente.

Na resolução de um determinado problema, são impostas N condições de contorno, sendo uma condição associada a cada ponto nodal funcional. Desta forma, diminui-se o número de incógnitas para N , permitindo a reordenação do sistema de equações de tal forma que chega-se à seguinte expressão:

$$[A]\{x\} = [R]\{r\} \quad \text{Eq. III.3-1}$$

onde:

x - é um vetor contendo as incógnitas do problema para cada ponto nodal funcional, o potencial ou a sua derivada na direção normal ao contorno; e,
 r - é um vetor contendo os valores prescritos, impostos pelas condições de contorno associadas ao problema físico.

Inicialmente, para demonstrar-se o procedimento de reordenação das matrizes H e G da equação III.2-6, considera-se um problema onde prescrevem-se exclusivamente condições de contorno essenciais e naturais. Sendo assim, a equação III.2-6 pode ser representada em termos de sub-matrizes de acordo com a equação III.3-2.

$$\begin{bmatrix} [H]_{s\bar{U}} & [H]_{s\bar{Q}} \\ [H]_{i\bar{U}} & [H]_{i\bar{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{s\bar{U}} & [G]_{s\bar{Q}} \\ [G]_{i\bar{U}} & [G]_{i\bar{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.3-2}$$

Operacionalizando-se, passando os termos prescritos para o lado direito da equação III.3-2, vem:

$$\begin{bmatrix} -[G]_{s\bar{U}} & [H]_{s\bar{Q}} \\ -[G]_{i\bar{U}} & [H]_{i\bar{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[H]_{s\bar{U}} & [G]_{s\bar{Q}} \\ -[H]_{i\bar{U}} & [G]_{i\bar{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.3-3}$$

ou seja,

$$[A]\{x\} = [R]\{r\} \quad \text{Eq. III.3-4}$$

Finalmente, há o caso da prescrição de uma condição de contorno convectiva, expressa pela equação I.2-12 (vide seção I.2), repetida a seguir para maior comodidade: $\bar{q}(X) = h[u(X) - b]$. O rearranjo matricial é alcançado pela substituição da equação I.2-12 na equação III.2-6. Assim, considerando unicamente condições desse tipo:

$$[H]\{U\} = [G]\{h[U - b]\} \quad \text{Eq. III.3-5}$$

Passando as incógnitas para o lado direito da expressão, obtém-se:

$$[[H] - h[G]]\{U\} = [G]\{-hb\} \quad \text{Eq. III.3-6}$$

Desta maneira, chega-se novamente a um rearranjo matricial na forma da equação III.3-1.

III.4 - Procedimento Numérico para o Cálculo de $C(\xi)$

Como mencionado anteriormente, existe um procedimento numérico alternativo para o cálculo de $C(\xi)$, ao invés do uso da equação III.1-13, que é computacionalmente custosa, pois envolve a determinação do ângulo formado pelos elementos de contorno adjacentes à localização do ponto fonte ξ , vide seção III.1.

No caso genérico, os termos da diagonal de matriz H, que correspondem as valores de $C(\xi)$, somado aos valores referentes às contribuições vindas das integrais da derivada da solução fundamental u^* , vezes as funções de interpolação (equação III.2-4), podem ser calculados levando-se em conta que quando um campo uniforme de potencial é aplicado ao longo de um domínio físico finito, as derivadas do potencial, isto é, os fluxos direcionais, devem ser nulos em todo o domínio físico do problema.

Aplicando-se esta condição na expressão matricial do Método dos Elementos de Contorno, equação III.2-6, obtém-se:

$$[H]\{\bar{U}\} = [G]\{Q\} = \{0\} \quad \text{Eq. III.4-1}$$

sendo \bar{U} o valor uniforme do potencial prescrito ao longo do domínio físico Ω .

Alternativamente, a equação III.4-1 pode ser representada pela seguinte expressão, equação III.4-2, onde substitui-se o valor do potencial prescrito \bar{U} por um vetor contendo um valor desconhecido U, mas também constante ao longo de todo o domínio físico do problema:

$$[H]\{U\} = \{0\} \quad \text{Eq. III.4-2}$$

Assim, neste caso, para obterem-se soluções não triviais para o sistema de equações expresso pela equação III.4-2 a matriz H deve ser singular. Desta forma, o termo da diagonal da matriz H pode ser calculado por:

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } i \neq j)}}^N H_{ij} \quad \text{Eq. III.4-3}$$

Deste modo, o valor de $C(\xi)$ não precisa ser calculado explicitamente.

A expressão III.4-3 é válida somente para problemas com domínio físico finito. Para o cálculo de $C(\xi)$ para problemas com domínio físico infinito, tal equação deve ser modificada, pois ao não se discretizar os contornos infinitamente distantes admite-se que o potencial e sua derivada apresente o mesmo decaimento da solução fundamental u^* , de modo

que a condição de que a derivada deva ser nula para uma distribuição de potencial constante ao longo do contorno viola as condições de regularidade [5].

Para o caso de prescrever-se um potencial constante ao longo de um contorno, sendo o domínio físico do problema infinito, a integral expressa na equação III.4-4 sobre um contorno externo fictício posicionado no infinito Γ_∞ , terá um resultado não nulo [2, 5, 24], como indicado a seguir:

$$\int_{\Gamma_\infty} q^* d\Gamma = -1 \quad \text{Eq. III.4-4}$$

Deste modo, o termo da diagonal da matriz H é obtido através da seguinte equação:

$$H_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } i \neq j)}}^N H_{ij} \quad \text{Eq. III.4-5}$$

Cabe observar que a matriz H, para o caso de problemas tendo um domínio físico finito, é singular, pois, conforme exposto, a equação III.4-2 admite infinitas soluções não triviais correspondentes à superposição de estados de potencial constante. No caso de problemas envolvendo domínios físicos infinitos, em que admite-se que as condições de regularidade sejam satisfeitas, a superposição de estados de potencial constante não é mais livre, o que faz com a matriz H, neste caso, deixe de ser singular.

III.5 - Recursos Auxiliares do Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Equação de Laplace

CÁLCULO DAS VARIÁVEIS EM PONTOS INTERNOS

Neste item são apresentados a formulação matemática e os procedimentos que levam a implementação computacional para a obtenção de resultados, potencial e suas derivadas direcionais, para pontos pertencentes ao domínio físico do problema Ω e internos ao contorno Γ . Tais pontos são denominados de pontos internos.

De maneira geral, o cálculo das incógnitas para os pontos internos é feito em um “pós-processamento”, a partir da reaplicação da sentença integral do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se os valores obtidos para as variáveis no contorno. Este

procedimento produz uma melhoria na qualidade dos resultados para os pontos internos, pois, sob a ótica do Método dos Resíduos Ponderados, promove-se uma nova minimização dos resíduos na solução.

Inicialmente, para o cálculo do potencial nos pontos internos, considera-se a equação integral discretizada do Método dos Elementos de Contorno, equação III.2-2, empregando-se elementos de contorno quadráticos para a discretização do domínio físico, onde, neste caso, o ponto fonte ξ é coincidente com o ponto interno considerado. Desta forma, o valor de $C(\xi)$ é unitário, vide equação III.1-13. Deste modo obtém-se:

$$u(\xi) = -\sum_{j=1}^{NE} [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} q^* d\Gamma + \sum_{j=1}^{NE} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} u^* d\Gamma \quad \text{Eq. III.5-1}$$

Ressalta-se que os valores das variáveis no contorno U_i e Q_i , neste momento, já são conhecidos. Desta forma, a fim de obter-se o resultado do potencial em um ponto interno, precisa-se apenas calcular os resultados das integrais representadas na equação III.5-1, multiplicando-os pelos valores do potencial e sua derivada no contorno.

A equação III.5-1 pode ser representada em uma forma matricial mais conveniente; tem-se então:

$$u(\xi) = -\{U\}\{H\}^T + \{Q\}\{G\}^T \quad \text{Eq. III.5-2}$$

Para efetuar-se o cálculo dos valores das derivadas direcionais do potencial, isto é, os fluxos nas direções coordenadas, basta apenas aplicar-se uma derivada direcional na equação III.5-1, obtendo-se, então, a seguinte expressão:

$$q_{X_i}(\xi) = \frac{\partial u(\xi)}{\partial X_i} = -\sum_{j=1}^{NE} [U_1 \quad U_2 \quad U_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial X_i} d\Gamma + \sum_{j=1}^{NE} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^j \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial X_i} d\Gamma \quad \text{Eq. III.5-3}$$

Observe que de acordo com esta última equação, equação III.5-3, é necessária a obtenção das derivadas de u^* e q^* em relação as direções coordenadas. Tais expressões são apresentadas a seguir, sendo que as etapas para a dedução de tais expressões encontram-se ilustradas no Apêndice 1.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1}{2\pi r^2} [X(X) - X(\xi)] \quad \text{Eq. III.5-4}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{1}{2\pi r^2} [Y(X) - Y(\xi)] \quad \text{Eq. III.5-5}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 \frac{\partial x}{\partial n} - 2[X(X) - X(\xi)] \left[[X(X) - X(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} + [Y(X) - Y(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} \right] \right\} \quad \text{Eq. III.5-6}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial y} = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 \frac{\partial y}{\partial n} - 2[Y(X) - Y(\xi)] \left[[X(X) - X(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} + [Y(X) - Y(\xi)] \frac{\partial y}{\partial n} \right] \right\} \quad \text{Eq. III.5-7}$$

Alternativamente ao procedimento apresentado anteriormente, existe uma outra forma para obter-se os valores do potencial para os pontos internos, calculando-os simultaneamente com os valores das incógnitas para o contorno durante a resolução do sistema linear de equações algébricas resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno.

Neste procedimento a equação III.5-2 é posta em forma de sub-matrizes e introduzida junto à expressão matricial do Método dos Elementos de Contorno, equação III.2-6, também apresentada em forma de sub-matrizes. Deste rearranjo resulta a seguinte expressão matricial, equação III.5-8, que, então, após a aplicação das condições de contorno, é resolvida obtendo-se simultaneamente os valores das incógnitas no contorno e os valores do potencial para os pontos interno.

$$\begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [H'] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^C \\ \{U\}^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G] & [0] \\ [G'] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\}^C \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.5-8}$$

Onde H' e G' representam as matrizes obtidas para os pontos internos, de acordo com a equação III.5-2; os índices C e D indicam respectivamente os valores das incógnitas no contorno e no domínio (para os pontos internos).

SUB-REGIÕES

Uma das limitações do Método dos Elementos de Contorno é a solução de problemas não-homogêneos, devido à dificuldade de representar esta variação das propriedades físicas ao longo do domínio físico do problema utilizando-se de uma equação integral envolvendo somente variáveis no contorno.

Na solução de problemas setorialmente não-homogêneos, pode-se empregar o recurso denominado Sub-Regiões, onde o domínio físico do problema é dividido em sub-domínios de tal forma que cada sub-domínio seja, então, homogêneo.

Deste modo, aplica-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno à cada sub-domínio, denominado sub-região, gerando um sistema linear de equações algébricas para cada uma das sub-regiões. Posteriormente, tais sistemas de equações são agrupados introduzindo-se as condições de continuidade e equilíbrio nas interfaces de cada sub-domínio.

Para ilustrar o emprego da técnica de sub-regiões mais detalhadamente, considere, de acordo com a figura III.5-1, um domínio físico Ω constituído por dois sub-domínios Ω^1 e Ω^2 , possuindo propriedades físicas diferentes, K^1 e K^2 respectivamente.

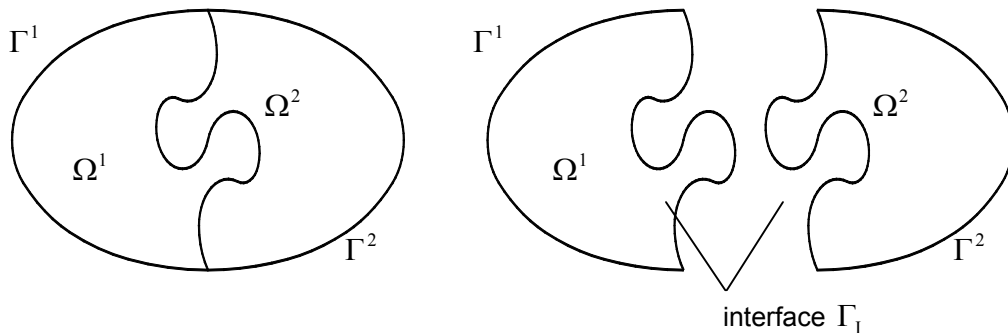


Figura III.5-1 - Representação do domínio físico Ω , onde $\Omega = \Omega^1 + \Omega^2$

Considerando o sistema matricial resultante do Método dos Elementos de Contorno, equação III.2-6, aplicado separadamente a cada uma das sub-regiões, representando-os em forma de sub-matrizes, obtém-se:

$$\text{sub-região 1: } \begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U_1^1\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_1^1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q_1^1\} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.5-9}$$

$$\text{sub-região 2: } \begin{bmatrix} [H^2] & [H_1^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^2\} \\ \{U_1^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^2] & [G_1^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q^2\} \\ \{Q_1^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.5-10}$$

onde os índices 1 e 2 indicam os termos pertencentes às sub-regiões Ω^1 e Ω^2 , respectivamente, e o índice I refere-se aos termos pertencentes à interface.

As condições de continuidade e equilíbrio aplicadas a interface podem ser expressas pelas equações III.5-11 e III.5-12, respectivamente

$$U_1^1 = U_1^2 = U_I \quad \text{Eq. III.5-11}$$

$$Q_1^1 = -\frac{K^2}{K^1} Q_1^2 = Q_I \quad \text{Eq. III.5-12}$$

Aplicando tais condições nos sistemas matriciais de cada sub-região, equações III.5-9e III.5-10, e reordenando-os de tal forma a poder expressá-los através de um único sistema linear de equações algébricas obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] & [0] \\ [0] & [H_1^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U_1\} \\ \{U^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [G_1^1] & [0] \\ [0] & -\frac{K^1}{K^2} [G_1^2] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q_1\} \\ \{Q^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.5-13}$$

Como nas interfaces tanto o potencial U_I , quanto sua derivada normal Q_I são sempre valores desconhecidos, o sistema, representado pela equação III.5-13, necessita ser rearranjado, de tal forma que as incógnitas nas interfaces U_I e Q_I localizem-se no lado esquerdo da expressão matricial, desta forma obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [H^1] & [H_1^1] & -[G_1^1] & [0] \\ [0] & [H_1^2] & \frac{K^1}{K^2} [G_1^2] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \{U_1\} \\ \{Q_1\} \\ \{U^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q^1\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{Q^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. III.5-14}$$

O sistema expresso pela equação III.5-14, após a aplicação das condições de contorno (de forma similar ao apresentado anteriormente), pode ser solucionado obtendo-se os valores das incógnitas do problema.

No apêndice 2 encontra-se um exemplo ilustrativo contendo o rearranjo matricial de um domínio físico formado por duas sub-regiões. Onde encontram-se explicitados os procedimentos de reordenação que fazem com que o sistema matricial, resultante da aplicação do Método dos Elementos de Contorno, para cada sub-região em separado seja posto na forma expressa pela equação III.3-1.

III.6 - Aplicações Numéricas

Nesta seção do trabalho são apresentadas diversas aplicações numéricas governadas pela Equação de Laplace. Os casos analisados são relativamente simples, pois além de outros fatores, objetiva-se a comparação das soluções numéricas obtidas via Método dos Elementos de Contorno com as respectivas respostas analíticas.

Destaca-se que apesar da Equação de Laplace ser o caso mais simples compreendido pela Teoria de Campo Escalar, devido as geometrias e condições de contorno a que os problemas estão submetidos, geralmente torna-se inviável a obtenção de soluções analíticas a não ser para determinados casos particulares.

Nas seções a seguir são apresentados inúmeros gráficos e tabelas contendo os resultados numéricos obtidos via Método dos Elementos de Contorno. Desta forma, proporcionam-se os recursos necessários para avaliar-se seu desempenho frente esta classe de problemas. Com o propósito de comparar-se o desempenho do Método dos Elementos de Contorno frente a outros métodos numéricos, em algumas das análises apresentadas são realizadas modelagens também através do Método dos Elementos Finitos.

Nas análises aplicando-se o Método dos Elementos Finitos são realizadas utilizando-se o software comercial ANSYS, em sua versão 5.4. Nessas, o domínio físico é discretizado por elementos isoparamétricos quadráticos, possuindo tais elementos uma geometria triangular ou retangular, conforme o caso que apresente uma melhor compatibilidade com o domínio físico do problema. Tais elementos são denominados, pelo programa ANSYS, como sendo PLANE35 e PLANE77, respectivamente.

Assim, com o propósito de tornar a comparação entre os métodos mais igualitária, nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno para efeito de comparação entre o Método dos Elementos Finitos, são utilizados elementos de contorno que possuem funções de interpolação da mesma ordem que às utilizadas pelo Método dos Elementos Finitos. Logo, para tais casos, são aplicados elementos de contorno quadráticos.

Ressalta-se que a comparação entre diferentes métodos numéricos é sempre muito polêmica, pois não se consegue estabelecer uma equivalência entre os diferentes tipos de entidades a que o domínio físico é discretizado (neste caso, elementos finitos e elementos de contorno). Além do número de entidades em que o domínio é discretizado, existem outros

parâmetros importantes que devem ser levados em conta, como por exemplo, a precisão alcançada nas respostas numéricas, a ordem do sistema linear de equações algébricas resultante e o tempo de processamento gasto para a obtenção dos resultados, embora neste trabalho este último parâmetro não seja levado em conta, visto que estão sendo comparados um software comercial e um acadêmico, que não se encontra otimizado neste sentido.

Nos casos onde comparam-se o Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, a confecção das discretizações para as modelagens via Método dos Elementos de Contorno são feitas a partir das discretizações criadas utilizando-se o gerador de malhas do programa ANSYS para as modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde aproveitam-se os pontos nodais sobre o contorno da geometria para a definição dos elementos de contorno quadráticos.

Em relação a valores que encontram-se localizados no interior do domínio físico do problema, para a comparação entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, são utilizados os pontos que encontram-se destacados nas figuras apresentadas que ilustram as discretizações via Método dos Elementos Finitos.

III.6.1 - 1^ª ANÁLISE

Esta primeira análise, bastante simples, consiste na solução de um problema possuindo um domínio físico Ω , sendo representado por um quadrado de lado $L = 10$ u.c. (Unidades de Comprimento), submetido a condições de contorno essenciais e naturais ao longo de suas arestas.

A geometria e as condições de contorno encontram-se representadas de acordo com a figura III.6.1-1. Observa-se que, neste caso, o problema torna-se unidimensional quando expresso em coordenadas cartesianas.

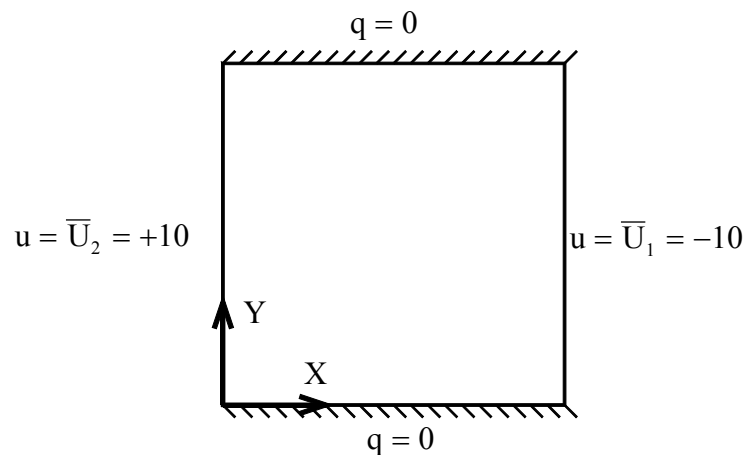


Figura III.6.1-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno

Assim, as condições de contorno, apresentadas na figura II.6.1-1, podem ser representadas matematicamente de acordo com as seguintes expressões:

$$u = \bar{U}_2 = +10 \quad \text{p/ } x = 0; 0 \leq y \leq 10$$

$$u = \bar{U}_1 = -10 \quad \text{p/ } x = 10; 0 \leq y \leq 10$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p/ } y = 0; 0 \leq x \leq 10$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p/ } y = 10; 0 \leq x \leq 10$$

Eqs. III.6.1-1

Tal problema pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo uma placa quadrada isolada termicamente ao longo de suas arestas horizontais e submetida a diferentes valores de temperatura em suas arestas verticais.

Objetivo

O objetivo pretendido com a exposição deste caso consiste na verificação da influência na solução numérica do parâmetro γ , que indica o quanto se desloca o ponto fonte ξ referente a um elemento de contorno com ponto de colocação não nodal, vide seção II.6. Desta forma, pretende-se obter um valor otimizado para tal parâmetro de modo a utilizá-lo nas demais modelagens.

Solução Analítica

A solução analítica deste caso pode ser obtida facilmente através de uma simples integração da equação diferencial de governo, Equação de Laplace (equação I.2-9),

expressa em sua forma unidimensional. Assim sendo, a solução analítica, em termos do potencial, é dada de acordo com a seguinte equação:

$$U(x) = C_1x + C_2 \quad \text{Eq. III.6.1-2}$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de integração, que após a aplicação das condições de contorno podem ser expressas por:

$$C_1 = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{L} \quad C_2 = \bar{U}_0 \quad \text{Eq. III.6.1-3}$$

sendo L o comprimento do lado do quadrado.

As expressões para as derivadas do potencial nas direções coordenadas são dadas de acordo com as seguintes equações:

$$q_x = \frac{du}{dx} = C_1 = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_0}{L} \quad \text{Eq. III.6.1-4}$$

$$q_y = \frac{du}{dy} = 0 \quad \text{Eq. III.6.1-5}$$

Discretização

Para a modelagem numérica de tal caso, utiliza-se uma discretização dada de acordo com a figura III.6.1-2. Onde encontram-se representados os pontos nodais funcionais dos elementos de contorno em questão. Nessa figura também encontram-se destacados os nós duplos utilizados nos elementos de contorno com pontos de colocação não nodal, bem como o conjunto de pontos internos aplicado para a obtenção dos valores das incógnitas do problema no interior do domínio físico do problema.

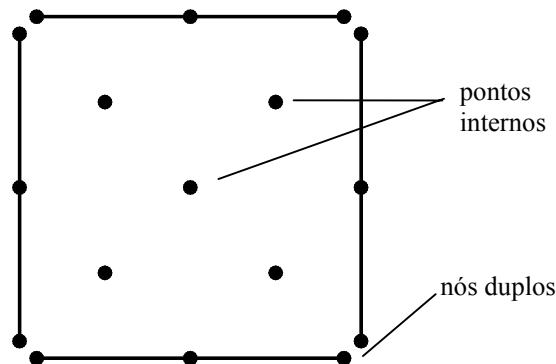


Figura III.6.1-2 - Representação dos pontos nodais funcionais e pontos internos, formando a discretização a ser utilizada nesta análise.

As análises numéricas são feitas empregando-se elementos de contorno lineares e quadráticos, e em ambos os casos aplica-se a discretização indicada de acordo com a figura III.6.1-2. Sendo assim, têm-se diferentes números de elementos de contorno utilizados nas modelagens dependendo do tipo de elemento adotado, mas mantém-se a mesma ordem do sistema linear de equações algébricas resultante. Tais parâmetros dessas análises encontram-se expressos na tabela III.6.1-1.

Tabela III.6.1-1 - Número de elementos e número de pontos nodais funcionais utilizados nas modelagens em função do tipo de elemento de contorno empregado.

	Número de Elementos	Número de Pontos Nodais Funcionais
Elemento de Contorno Linear	8	12
Elemento de Contorno Quadrático	4	12

Resultados Numéricos

Apresentam-se nas tabelas III.6.1-2, III.6.1-3, III.6.1-4 e III.6.1-5 os resultados numéricos obtidos através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos. Ressalta-se que em tais tabelas são apresentados os resultados para o potencial e sua derivada direcional para todos os pontos nodais funcionais presentes na discretização empregada, bem como as respostas para um conjunto de pontos internos, dispostos sob o domínio físico, (vide figura III.6.1-2).

Tabela III.6.1-2 - Resultados para o potencial e sua derivada normal ao contorno, para os pontos nodais funcionais empregados na discretização com elementos de contorno lineares, variando de acordo com o parâmetro γ .

Posição		Solução Analítica		$\gamma = 0.95$		$\gamma = 0.85$		$\gamma = 0.75$		$\gamma = 0.65$		$\gamma = 0.5$	
X	Y	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)
0.	0.	10.	0.	9.999998	0	10	0	10	0	10	0	10	0
5.	0.	0.	0.	-2.2674E-06	0	-1.6964E-13	0	3.2419E-14	0	6.5746E-08	0	-3.908E-14	0
10.	0.	-10.	0.	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0
10.	0.	-10.	-2.	-10	-2.000015	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	5.	-10.	-2.	-10	-1.99999	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	10.	-10.	-2.	-10	-2.000017	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	10.	-10.	0.	-9.999997	0	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0
5.	10.	0.	0.	-2.2674E-06	0	-2.3803E-13	0	1.199E-14	0	6.5746E-08	0	-1.7453E-13	0
0.	10.	10.	0.	9.999993	0	10	0	10	0	10	0	10	0
0.	10.	10.	2.	10	2.000014	10	2	10	2	10	2	10	2
0.	5.	10.	2.	10	1.999994	10	2	10	2	10	2	10	2
0.	0.	10.	2.	10	2.000012	10	2	10	2	10	2	10	2

Tabela III.6.1-3 - Resultados utilizando-se de elementos de contorno lineares para o potencial e sua derivada na direção coordenada X para os pontos internos, variando de acordo com o parâmetro γ .

Posição		Solução Analítica		$\gamma = 0.95$		$\gamma = 0.85$		$\gamma = 0.75$		$\gamma = 0.65$		$\gamma = 0.5$	
X	Y	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)
5.00	5.00	0.	-2.	-1.5068E-06	-2.000001	-1.3911E-13	-2	1.8541E-14	-2	4.681E-08	-2	6.1062E-15	-2
2.50	2.50	5.	-2.	5.000001	-2.000001	5	-2	5	-2	5	-2	5	-2
7.50	2.50	-5.	-2.	-5.000004	-2.000001	-5	-2	-5	-2	-5	-2	-5	-2
7.50	7.50	-5.	-2.	-5.000005	-2.000001	-5	-2	-5	-2	-5	-2	-5	-2
2.50	7.50	5.	-2.	5.000001	-2.000001	5	-2	5	-2	5	-2	5	-2

Tabela III.6.1-4 - Resultados para o potencial e sua derivada normal ao contorno, para os pontos nodais funcionais empregados na discretização com elementos de contorno quadráticos, variando de acordo com o parâmetro γ .

Posição		Solução Analítica		$\gamma = 0.95$		$\gamma = 0.85$		$\gamma = 0.75$		$\gamma = 0.65$		$\gamma = 0.5$	
X	Y	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)
0.	0.	10.	0.	9.999996	0	10	0	10	0	10	0	10	0
5.	0.	0.	0.	-8.0014E-07	0	-8.7708E-14	0	-1.3323E-15	0	4.4663E-08	0	5.9952E-15	0
10.	0.	-10.	0.	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0
10.	0.	-10.	-2.	-10	-2.000015	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	5.	-10.	-2.	-10	-1.999996	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	10.	-10.	-2.	-10	-2.000015	-10	-2	-10	-2	-10	-2	-10	-2
10.	10.	-10.	0.	-9.999996	0	-10	0	-10	0	-10	0	-10	0
5.	10.	0.	0.	-7.9061E-07	0	-7.927E-14	0	-3.9968E-15	0	4.4663E-08	0	-3.2419E-14	0
0.	10.	10.	0.	9.999993	0	10	0	10	0	10	0	10	0
0.	10.	10.	2.	10	2.000013	10	2	10	2	10	2	10	2
0.	5.	10.	2.	10	1.999997	10	2	10	2	10	2	10	2
0.	0.	10.	2.	10	2.000013	10	2	10	2	10	2	10	2

Tabela III.6.1-5 - Resultados utilizando-se de elementos de contorno quadráticos para o potencial e sua derivada na direção coordenada X para os pontos internos, variando de acordo com o parâmetro γ .

Posição		Solução Analítica		$\gamma = 0.95$		$\gamma = 0.85$		$\gamma = 0.75$		$\gamma = 0.65$		$\gamma = 0.5$	
X	Y	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)	Potencial	Fluxo(q_n)
5.00	5.00	0.	-2.	-5.7995E-07	-2.000001	-5.8176E-14	-2	-3.1086E-15	-2	3.0336E-08	-2	1.1546E-14	-2
2.50	2.50	5.	-2.	5.000001	-2.000001	5	-2	5	-2	5	-2	5	-2
7.50	2.50	-5.	-2.	-5.000002	-2.000001	-5	-2	-5	-2	-5	-2	-5	-2
7.50	7.50	-5.	-2.	-5.000002	-2.000001	-5	-2	-5	-2	-5	-2	-5	-2
2.50	7.50	5.	-2.	5.000001	-2.000001	5	-2	5	-2	5	-2	5	-2

De acordo com os resultados apresentados nas tabelas III.6.1-2, III.6.1-3, III.6.1-4 e III.6.1-5, observa-se que o parâmetro γ , que indica o quanto se desloca o ponto fonte ξ referente a um elemento de contorno com ponto de colocação não nodal, influencia de modo muito discreto o comportamento dos resultados.

Os resultados apresentados nesta primeira simulação mostram-se bastante equivalentes em termos de precisão para quaisquer das faixas de valores de γ escolhidos. Para uma avaliação do valor ótimo de γ dever-se-ia verificar a influência do aumento do grau de refinamento, mas, principalmente, a análise de outros problemas físicos. Assim sendo, nas demais análises realizadas ao longo deste trabalho optou-se pela adoção do parâmetro γ como sendo igual a 0.95.

III.6.2 - 2ª ANÁLISE

Este caso consiste na solução numérica de um problema governado pela Equação de Laplace, tendo um domínio físico como sendo um quadrado de lado $L = 6$ u.c., estando suas arestas submetidas a condições de contorno essenciais e naturais, conforme representado na figura IV.6.2-1.

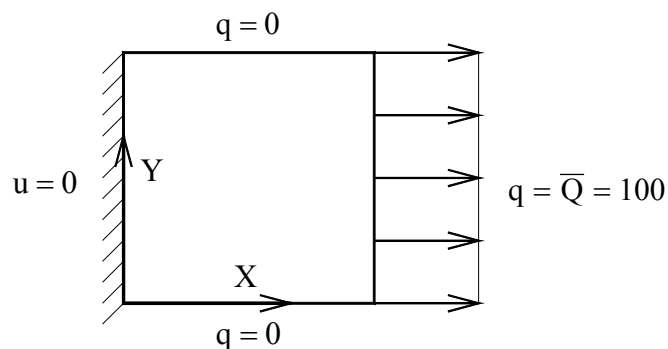


Figura III.6.2-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno

Assim, as condições de contorno, apresentadas na figura II.6.2-1, podem ser representadas matematicamente de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 u &= 0 & \text{p/ } x &= 0; 0 \leq y \leq 6 & \text{Eq. III.6.2-1} \\
 q &= \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{p/ } y &= 0; 0 \leq x \leq 6 \quad \text{e} \quad \text{p/ } y &= 6; 0 \leq x \leq 6 \\
 q &= \frac{\partial u}{\partial n} = 100 & \text{p/ } x &= 6; 0 \leq y \leq 6
 \end{aligned}$$

A interpretação física deste problema pode ser feita via Mecânica dos Sólidos como sendo o caso de uma barra engastada em um extremidade e submetida a uma tensão trativa na outra extremidade.

Objetivos

Pretende-se verificar a influência na solução numérica do uso de diferentes tipos de elementos de contorno, elementos constantes, lineares e quadráticos, que se diferenciam de acordo com a ordem da função de interpolação utilizada, vide seção II.5. Bem como a verificação do comportamento da solução numérica com o aumento do grau de refinamento utilizado nas discretizações [8].

Destaca-se que, devido ao problema ocasionado pela descontinuidade da derivada do potencial na direção normal ao contorno, vide seção II.6, nas modelagens realizadas com os elementos lineares e quadráticos, faz-se necessária a utilização de elementos de contorno com ponto de colocação não nodal. Desta forma, os sistemas lineares de equações algébricas resultantes, para estes casos, possuem uma ordem maior do que os sistemas obtidos nas modelagens realizadas com elementos constantes.

Solução Analítica

De acordo com a geometria e as condições de contorno impostas, representadas de acordo com a figura III.6.2-1, este problema torna-se unidimensional quando analisado em coordenadas cartesianas. De modo análogo ao realizado anteriormente, vide a 1ª análise (III.6.1), integrando-se a equação diferencial obtém-se:

$$U(x) = C_1 x + C_2 \quad \text{Eq. III.6.2-2}$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de integração. Aplicando-se as condições de contorno do problema, pode-se expressá-las como sendo:

$$C_1 = \bar{Q} \quad C_2 = 0 \quad \text{Eq. III.6.2-3}$$

onde \bar{Q} representa o valor da derivada do potencial prescrita na aresta vertical, vide figura III.6.2-1.

Deste modo, a solução analítica em termos do potencial é, então, dada de acordo com a seguinte equação:

$$U(x) = \bar{Q}x \quad \text{Eq. III.6.2-4}$$

As expressões para as derivadas do potencial nas direções coordenadas são dadas por:

$$q_x = \frac{du}{dx} = \bar{Q} \quad \text{Eq. III.6.2-5}$$

$$q_y = \frac{du}{dy} = 0 \quad \text{Eq. III.6.2-6}$$

Discretizações Utilizadas

Nas modelagens numéricas realizadas utilizam-se três discretizações com diferentes graus de refinamento, vide figura IV.6.2-2. Onde encontram-se representados os pontos nodais geométricos, sendo que a posição dos pontos nodais funcionais variam de acordo com o tipo de elemento de contorno utilizado na análise em questão, vide seção III.5.

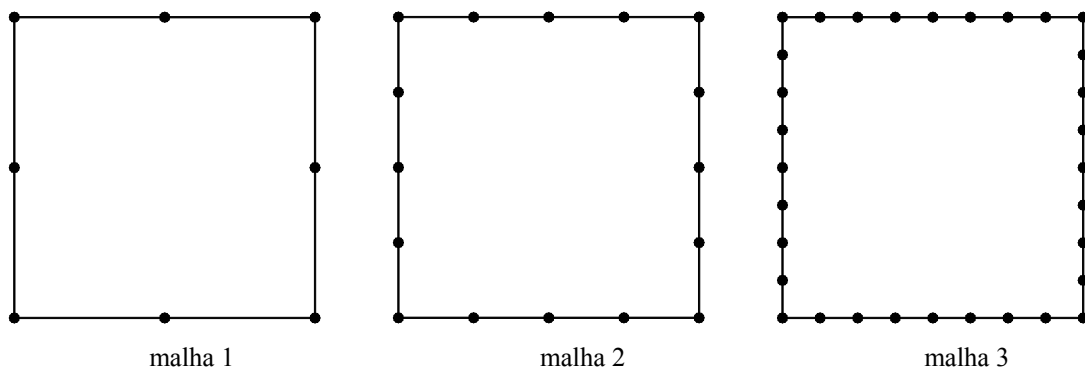


Figura III.6.2-2 - Apresentação dos nós geométricos para os diferentes tipos de elementos de contorno utilizados nas discretizações

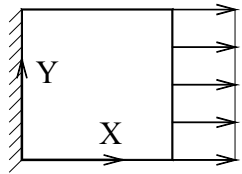
Na tabela III.6.2-1 encontram-se indicados os números de elementos de contorno e o número de pontos nodais funcionais para as combinações possíveis entre cada uma das discretizações e os tipos de elementos de contorno utilizados nas modelagens.

Tabela III.6.2-1 - Indicação do número de elementos e pontos nodais funcionais utilizados nas diversas modelagens com diferentes tipos de elementos de contorno.

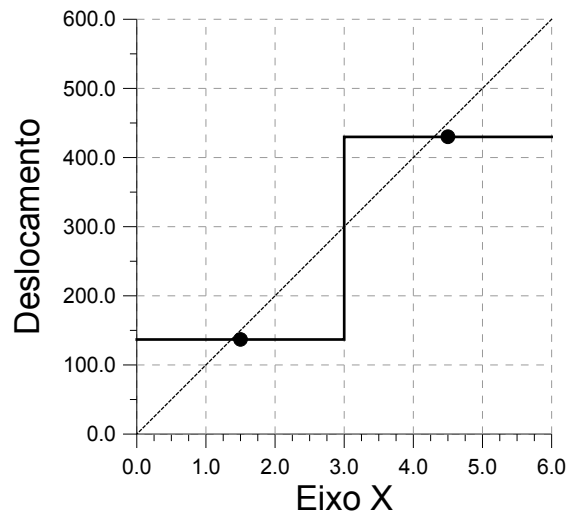
	Elemento de Contorno Constante		Elemento de Contorno Linear		Elemento de Contorno Quadrático	
	Número de Elementos	Pontos Nodais	Número de Elementos	Pontos Nodais	Número de Elementos	Pontos Nodais
Malha 1	8	8	8	12	4	12
Malha 2	16	16	16	20	8	20
Malha 3	32	32	32	36	16	36

Resultados Numéricos

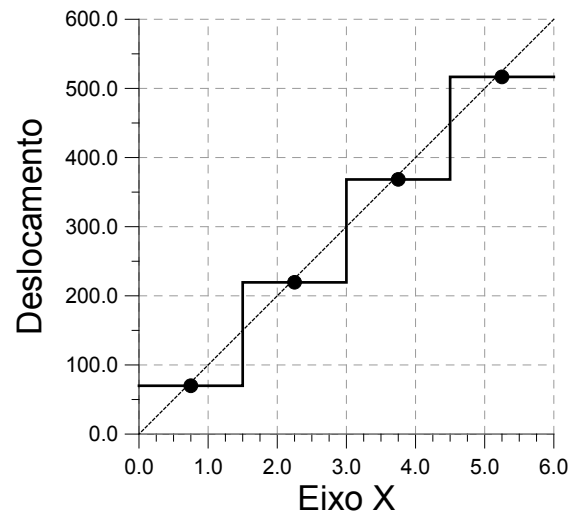
A seguir, apresentam-se gráficos, para as diferentes discretizações e tipos de elementos de contorno utilizados nas análises, contendo as soluções numéricas e analítica para o potencial, isto é, o deslocamento ao longo da aresta superior do quadrado. Nas respostas numéricas encontram-se indicados as posições e os valores dos deslocamentos para os pontos nodais funcionais, sendo que tais valores são interpolados ao longo dos elementos de contorno através do uso das funções de interpolação.



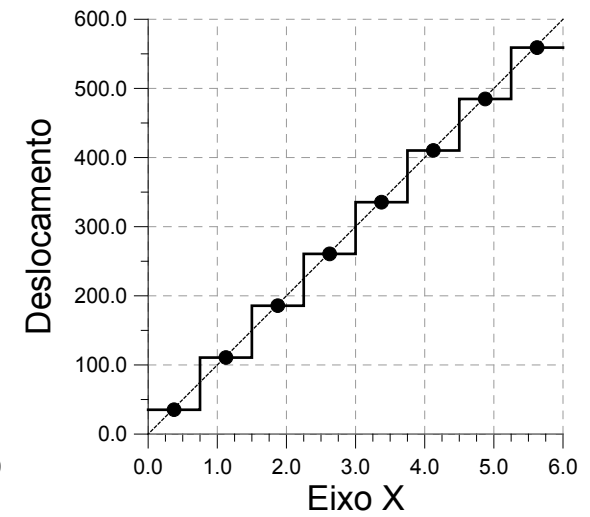
Representação do problema físico



Malha 1



Malha 2



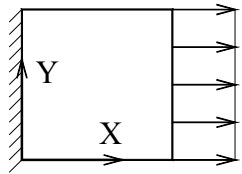
Malha 3

uça
 Solução via Método dos Elem

no

● Posição e valor para o p I funcional

Figura III.6.2-3- Soluções numéricas e analítica para o potencial ao longo da aresta superior do quadrado para as diferentes discretizações. Modelagens realizadas com elementos de contorno constante.



Representação do problema físico

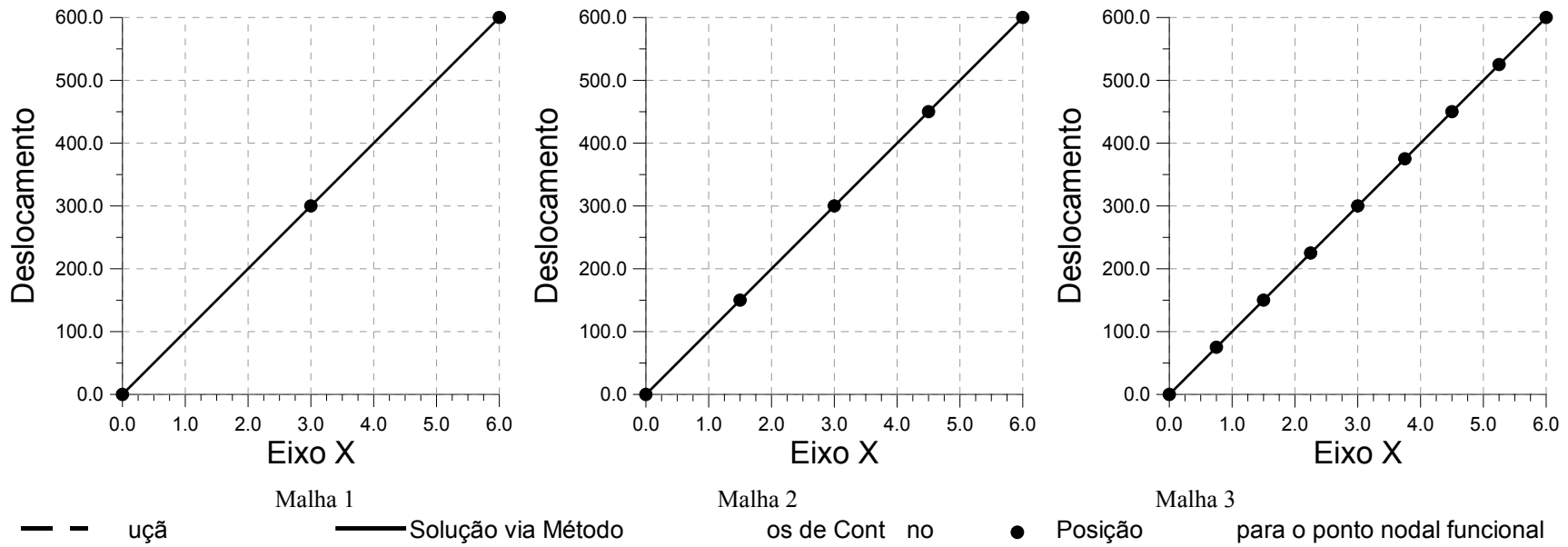
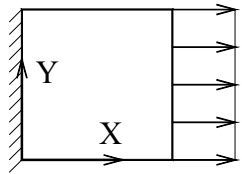


Figura III.6.2-4 - Soluções numéricas e analítica para o potencial ao longo da aresta superior do quadrado para as diferentes discretizações. Modelagens realizadas com elementos de contorno linear.



Representação do problema físico

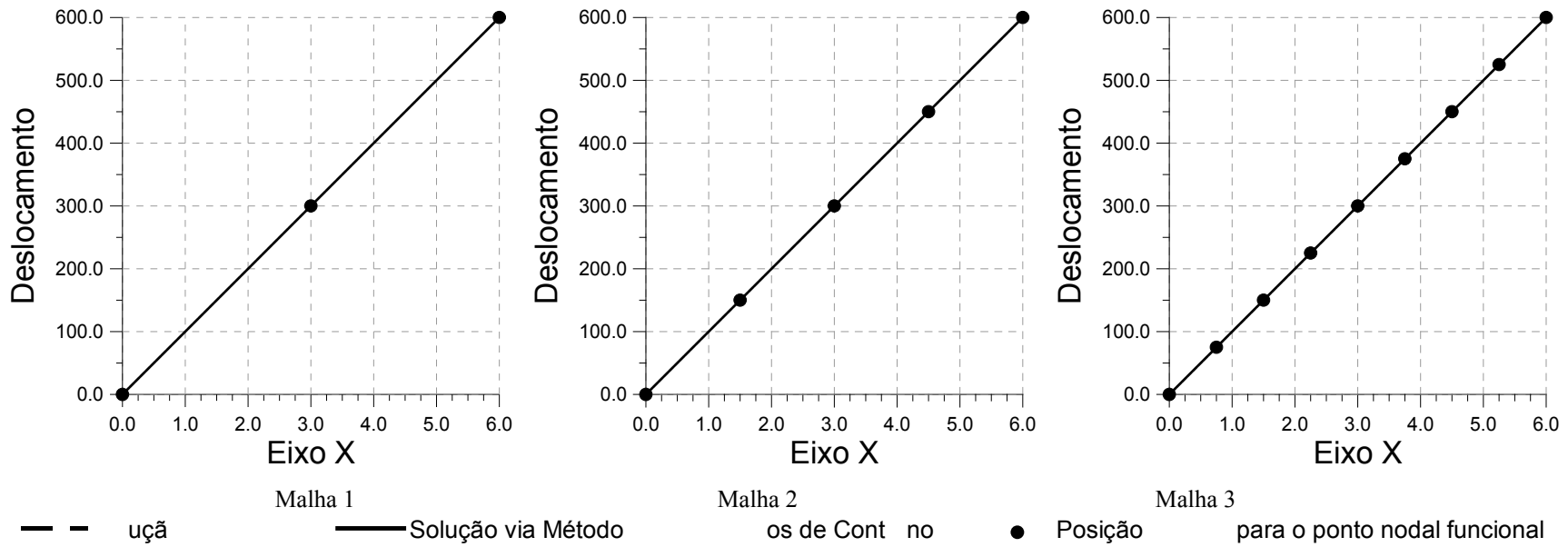


Figura III.6.2-5 - Soluções numéricas e analítica para o potencial ao longo da aresta superior do quadrado para as diferentes discretizações. Modelagens realizadas com elementos de contorno quadrático.

Nos gráficos apresentados para as modelagens utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos, já na discretização menos refinada existe uma perfeita coincidência entre as curvas contendo as soluções numéricas e analítica.

A fim de melhor apreciar os resultados provenientes da utilização dos elementos de contorno lineares e quadráticos nas modelagens realizadas são apresentadas tabelas contendo as soluções numéricas em termos do potencial e sua derivada direcional, tabelas III.6.2-2 e III.6.2-3, respectivamente.

Nas tabelas III.6.2-2 e III.6.2-3 é adotada uma convenção de forma a informar ao leitor de que maneira tais resultados foram obtidos. Essa convenção é a seguinte:

- valores em **negrito** - Indicam os resultados nos pontos nodais funcionais;
- valores em *itálico* - Indicam os valores obtidos através do uso das respectivas funções de interpolação para cada uma das modelagens; e,
- valores **sombreados** - Nas modelagens com elementos de contorno constante, indicam valores que foram calculados através da média aritmética entre as soluções de dois elementos adjacentes. Tais pontos encontram-se sobre a descontinuidade existente entre as respostas dos elementos de contorno constante, devido ao tipo de função de interpolação utilizada.

Tabela III.6.2-2 - Resultados para o potencial na aresta superior do quadrado nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

Posição Eixo X	Solução Analítica	elemento constante			elemento linear			elemento quadrático		
		malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3
6.000	600.000	<i>429.967</i>	<i>516.697</i>	<i>559.067</i>	600.000	600.000	600.000	600.021	600.011	600.006
5.625	562.500	<i>429.967</i>	<i>516.697</i>	559.067	<i>562.500</i>	<i>562.500</i>	<i>562.500</i>	<i>562.530</i>	<i>562.519</i>	<i>562.513</i>
5.250	525.000	<i>429.967</i>	516.697	<i>521.918</i>	<i>525.000</i>	<i>525.000</i>	525.000	<i>525.037</i>	<i>525.025</i>	525.018
4.875	487.500	<i>429.967</i>	<i>516.697</i>	484.770	<i>487.500</i>	<i>487.500</i>	<i>487.500</i>	<i>487.544</i>	<i>487.530</i>	<i>487.519</i>
4.500	450.000	429.967	<i>442.537</i>	<i>447.453</i>	<i>450.000</i>	450.000	450.000	<i>450.049</i>	450.033	450.018
4.125	412.500	<i>429.967</i>	<i>368.376</i>	410.136	<i>412.500</i>	<i>412.500</i>	<i>412.500</i>	<i>412.552</i>	<i>412.535</i>	<i>412.517</i>
3.750	375.000	<i>429.967</i>	368.376	<i>372.758</i>	<i>375.000</i>	<i>375.000</i>	375.000	<i>375.054</i>	<i>375.035</i>	375.017
3.375	337.500	<i>429.967</i>	<i>368.376</i>	335.380	<i>337.500</i>	<i>337.500</i>	<i>337.500</i>	<i>337.555</i>	<i>337.533</i>	<i>337.516</i>
3.000	300.000	283.400	<i>293.938</i>	<i>297.970</i>	300.000	300.000	300.000	300.054	300.030	300.016
2.625	262.500	<i>136.834</i>	<i>219.500</i>	260.559	<i>262.500</i>	<i>262.500</i>	<i>262.500</i>	<i>262.552</i>	<i>262.531</i>	<i>262.515</i>
2.250	225.000	<i>136.834</i>	219.500	<i>223.113</i>	<i>225.000</i>	<i>225.000</i>	225.000	<i>225.049</i>	<i>225.030</i>	225.015
1.875	187.500	<i>136.834</i>	<i>219.500</i>	185.667	<i>187.500</i>	<i>187.500</i>	<i>187.500</i>	<i>187.544</i>	<i>187.528</i>	<i>187.514</i>
1.500	150.000	136.834	<i>144.675</i>	<i>148.148</i>	<i>150.000</i>	150.000	150.000	<i>150.038</i>	150.025	150.014
1.125	112.500	<i>136.834</i>	<i>69.851</i>	110.629	<i>112.500</i>	<i>112.500</i>	<i>112.500</i>	<i>112.531</i>	<i>112.521</i>	<i>112.514</i>
0.750	75.000	<i>136.834</i>	69.851	<i>72.907</i>	<i>75.000</i>	<i>75.000</i>	75.000	<i>75.022</i>	<i>75.015</i>	75.012
0.375	37.500	<i>136.834</i>	<i>69.851</i>	35.186	<i>37.500</i>	<i>37.500</i>	<i>37.500</i>	<i>37.512</i>	<i>37.508</i>	<i>37.507</i>
0.000	0.000	<i>136.834</i>	<i>69.851</i>	<i>35.186</i>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

legenda: (valores em **negrito**) - valores obtidos nos pontos nodais funcionais;
 (valores **sombreados**) - média aritmética dos resultados dos elementos de contorno constantes adjacentes;
 (valores *em itálico*) - valores obtidos através das funções de interpolação.

Tabela III.6.2-3 - Resultados para a derivada do potencial com relação a direção normal na aresta esquerda do quadrado nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

Posição Eixo X	Solução Analítica	elemento constante			elemento linear			elemento quadrático		
		malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3
6.000	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	<i>-104.3403</i>	-100	-100	-100	-100.1246	-100.1256	-100.1275
5.625	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	-104.3403	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100.080629</i>	<i>-100.044434</i>	<i>-99.9867425</i>
5.250	-100	<i>-100</i>	-103.4363	<i>-100.99346</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	-100	<i>-100.042521</i>	<i>-99.98619</i>	-99.93809
4.875	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	-97.64662	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100.010275</i>	<i>-99.9508688</i>	<i>-99.9815425</i>
4.500	-100	-100	<i>-99.974025</i>	<i>-98.28386</i>	<i>-100</i>	-100	-100	<i>-99.9838925</i>	-99.93847	-100.1171
4.125	-100	<i>-100</i>	<i>-96.51175</i>	-98.9211	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-99.9633727</i>	<i>-99.9489938</i>	<i>-99.9855925</i>
3.750	-100	<i>-100</i>	-96.51175	<i>-98.98537</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	-100	<i>-99.9487156</i>	<i>-99.98244</i>	-99.94164
3.375	-100	<i>-100</i>	<i>-96.51175</i>	-99.04964	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-99.9399214</i>	<i>-100.038809</i>	<i>-99.9852425</i>
3.000	-100	-100	<i>-96.51175</i>	<i>-99.04964</i>	-100	-100	-100	-99.93699	-100.1181	-100.1164
2.625	-100	<i>-100</i>	<i>-96.51175</i>	-99.04964	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-99.9399214</i>	<i>-100.038809</i>	<i>-99.9852425</i>
2.250	-100	<i>-100</i>	-96.51175	<i>-98.98537</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	-100	<i>-99.9487156</i>	<i>-99.98244</i>	-99.94164
1.875	-100	<i>-100</i>	<i>-96.51175</i>	-98.9211	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-99.9633727</i>	<i>-99.9489938</i>	<i>-99.9855925</i>
1.500	-100	-100	<i>-99.974025</i>	<i>-98.28386</i>	<i>-100</i>	-100	-100	<i>-99.9838925</i>	-99.93847	-100.1171
1.125	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	-97.64662	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100.010275</i>	<i>-99.9508688</i>	<i>-99.9815425</i>
0.750	-100	<i>-100</i>	-103.4363	<i>-100.99346</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	-100	<i>-100.042521</i>	<i>-99.98619</i>	-99.93809
0.375	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	-104.3403	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100</i>	<i>-100.080629</i>	<i>-100.044434</i>	<i>-99.9867425</i>
0.000	-100	<i>-100</i>	<i>-103.4363</i>	<i>-104.3403</i>	-100	-100	-100	-100.1246	-100.1256	-100.1275

legenda: (valores em **negrito**) - valores obtidos nos pontos nodais funcionais;
 (valores **sombreados**) - média aritmética dos resultados dos elementos de contorno constantes adjacentes;
 (valores *em itálico*) - valores obtidos através das funções de interpolação.

De acordo com os resultados apresentados observa-se que:

Os valores obtidos para o potencial nas análises realizadas com elementos de contorno constantes apresentam convergência para a solução analítica. Nos pontos nodais funcionais destes elementos tem-se uma melhor aproximação dos valores da solução analítica;

Todas as modelagens, nos diferentes graus de refinamento utilizados para as discretizações, realizadas com elementos de contorno lineares apresentaram como soluções numéricas valores idênticos à solução analítica, tendo-se, então, um erro percentual nulo. Este fato pode ser explicado, pois a função de interpolação usada por este elemento de contorno é a mesma que expressa a solução analítica. Assim, sob a ótica do Método dos Resíduos Ponderados, ao efetuar a minimização dos resíduos devido a essa aproximação obtém-se resíduos nulos; e,

Nas modelagens realizadas com elementos de contorno quadráticos, as soluções numéricas, embora de excelente qualidade, não apresentam a precisão obtida utilizando-se elementos de contorno lineares. Esse fato pode ser explicado, pois, neste caso, as funções de interpolação empregadas possuem uma ordem mais elevada do que as utilizadas nos elementos de contorno lineares, deste modo, as integrações numéricas efetuadas para a montagem do sistema linear de equações algébricas resultante são mais complexas, tem-se então, refletida na resposta numérica do problema os erros numéricos das integrações realizadas.

III.6.3 - 3^a ANÁLISE

Neste caso, o domínio físico é representado por um quadrado de lado $L = 6$ u.c., onde suas arestas encontram-se submetidas unicamente a condições de contorno essenciais, conforme apresentado na figura III.6.3-1. Os valores impostos para as condições de contorno são ilustradas na figura mencionada e definidos de acordo com a equação III.6.3-1.

$$\bar{U}(x, y) = \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\sinh(\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 1 \quad \text{Eq. III.6.3-1}$$

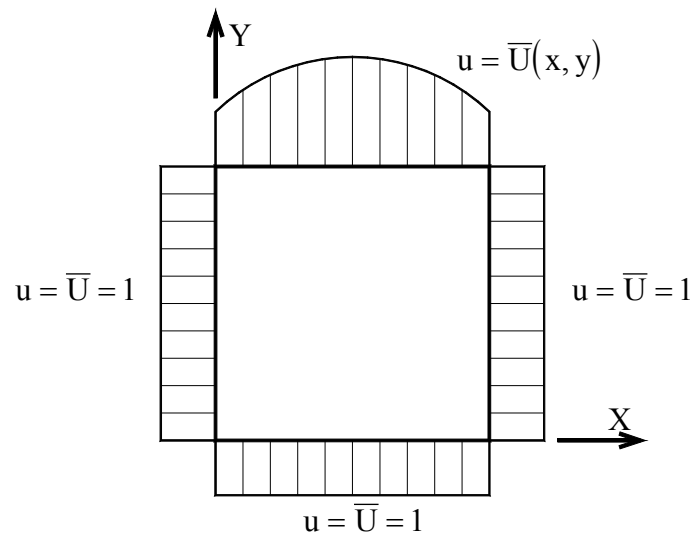


Figura III.6.3-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno.

De acordo com a figura III.6.3-1, observa-se que o problema é simétrico em relação a um eixo vertical passando pelo centro do quadrado.

A interpretação física desta análise pode ser feita através da Transferência de Calor, onde o potencial representa a temperatura. Deste modo, o problema representa as distribuições de temperatura e fluxos de calor que são obtidas ao longo de uma placa quadrada, quando suas arestas encontram-se sujeitas a uma distribuição de temperatura expressa pela equação III.6.3-1.

Objetivos e Discretizações Utilizadas

Os objetivos, bem como as discretizações utilizadas para esta análise são os mesmos apresentados para a 2ª análise, sendo portanto omitidos quando desta apresentação. Embora, neste caso, apresente-se uma comparação entre a resposta numérica do Método dos Elementos de Contorno e a solução analítica em termos do potencial para um conjunto de pontos internos, onde pretende-se verificar a taxa de convergência do método em função do aumento do grau de refinamento.

Solução Analítica

A solução analítica, em termos dos fluxos de calor na direção normal às arestas do quadrado são dadas de acordo com as expressões dadas a seguir [9, 10]. A figura III.6.3-2 apresenta uma ilustração de como varia o fluxo de calor na direção normal ao longo das arestas do quadrado.

para a aresta superior:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\pi}{L} \coth(\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{Eq. III.6.3-2}$$

para as arestas laterais:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\pi}{L \operatorname{senh}(\pi)} \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad \text{Eq. III.6.3-3}$$

para a aresta inferior:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\pi}{L \operatorname{senh}(\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{Eq. III.6.3-4}$$

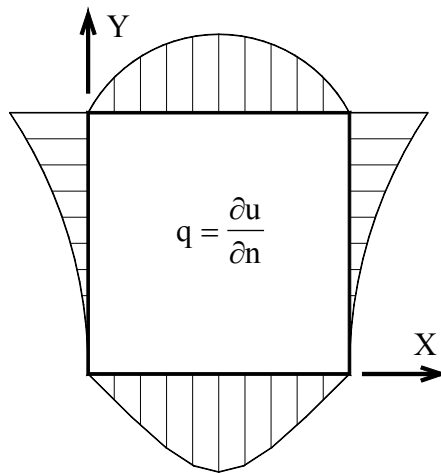
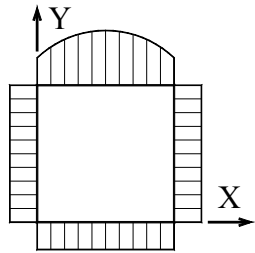


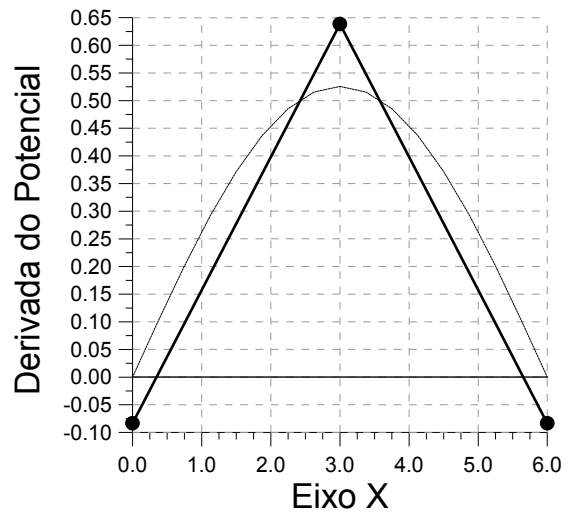
Figura III.6.3-2 - Representação da variação da derivada do potencial na direção normal ao longo do contorno do domínio físico do problema.

Resultados Numéricos

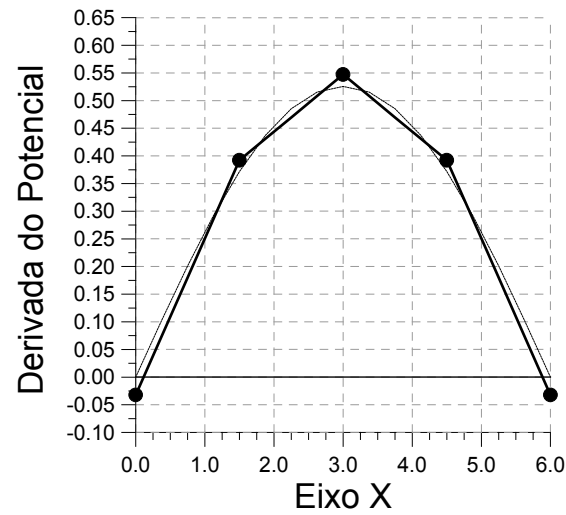
A seguir, apresentam-se os gráficos e as tabelas, para as diferentes discretizações e tipos de elementos de contorno utilizados nesta análise. Os gráficos e tabelas contém as mesmas informações e adotam as mesmas convenções usadas anteriormente, quando da exposição dos resultados do 2º caso analisado.



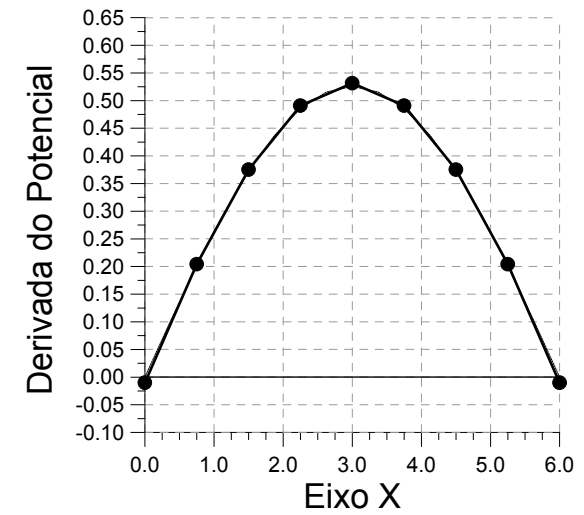
Representação do problema físico



Malha 1



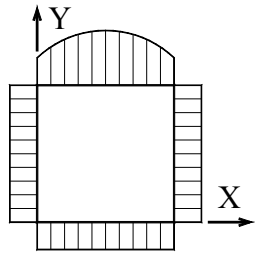
Malha 2



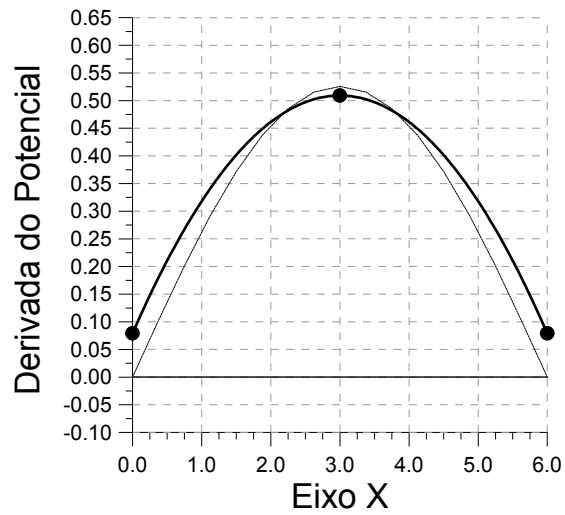
Malha 3

--- solução analítica —●— Solução via Método dos Elementos finitos ● Posição e valor para o potencial funcional

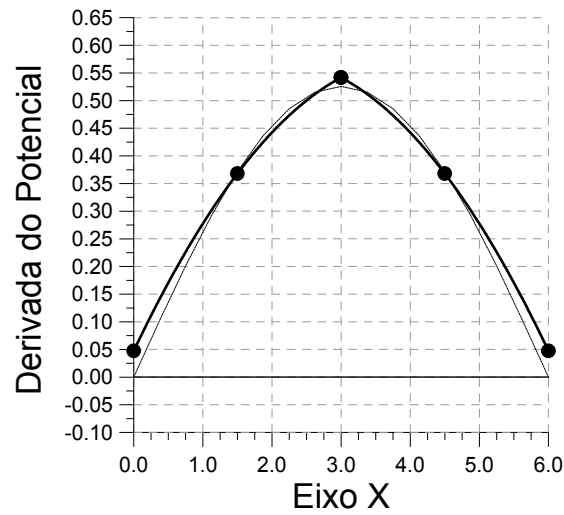
Figura III.6.3-4 - Soluções numéricas e analítica para a derivada do potencial na direção normal ao longo da aresta superior do quadrado para as diferentes discretizações. Modelagens realizadas com elementos de contorno lineares.



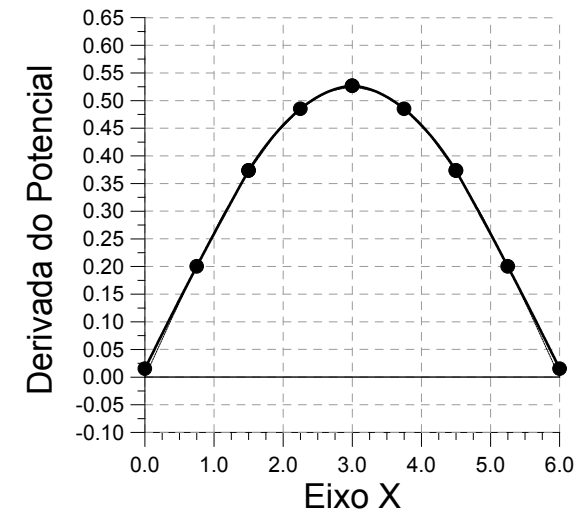
Representação do problema físico



Malha 1



Malha 2



Malha 3

— — — — — uça ————— Solução via Método dos Elem no ● Posição e valor para o p l funcional

Figura III.6.3-5 - Soluções numéricas e analítica para a derivada do potencial na direção normal ao longo da aresta superior do quadrado para as diferentes discretizações. Modelagens realizadas com elementos de contorno quadráticos.

Tabela III.6.3-1 - Resultados da derivada do potencial na direção normal ao contorno na aresta superior do quadrado, nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

x	sol. anal.	constante			linear			quadrático		
		malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3
6.000	0	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	<i>0.113809</i>	-0.08345708	-0.03214701	-0.01014372	0.07903221	0.04745169	0.01517218
5.625	0.10253128	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	0.113809	<i>0.00679024</i>	<i>0.07391449</i>	<i>0.09693354</i>	<i>0.17985123</i>	<i>0.14139918</i>	<i>0.10911008</i>
5.250	0.20112235	<i>0.3655847</i>	0.202438	<i>0.2054029</i>	<i>0.09703757</i>	<i>0.179976</i>	0.2040108	<i>0.26722772</i>	<i>0.22615926</i>	0.2001525
4.875	0.29198439	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	0.2969968	<i>0.18728489</i>	<i>0.2860375</i>	<i>0.2896264</i>	<i>0.34116166</i>	<i>0.30173193</i>	<i>0.28829944</i>
4.500	0.37162564	0.3655847	<i>0.3506379</i>	<i>0.36903675</i>	<i>0.27753221</i>	0.392099	0.375242	<i>0.40165307</i>	0.3681172	0.3735509
4.125	0.43698552	<i>0.3655847</i>	<i>0.4988378</i>	0.4410767	<i>0.36777953</i>	<i>0.43090078</i>	<i>0.4330805</i>	<i>0.44870194</i>	<i>0.42531506</i>	<i>0.4380595</i>
3.750	0.4855229	<i>0.3655847</i>	0.4988378	<i>0.4803219</i>	<i>0.45802686</i>	<i>0.46970255</i>	0.490919	<i>0.48230826</i>	<i>0.47332551</i>	0.4851258
3.375	0.51545957	<i>0.3655847</i>	<i>0.4988378</i>	0.5195671	<i>0.54827418</i>	<i>0.50850433</i>	<i>0.51116425</i>	<i>0.50247205</i>	<i>0.51214856</i>	<i>0.5147498</i>
3.000	0.52555802	<i>0.3655847</i>	<i>0.4988378</i>	<i>0.5195671</i>	0.6385215	0.5473061	0.5314095	0.5091933	0.5417842	0.5269315
2.625	0.51545957	<i>0.3655847</i>	<i>0.4988378</i>	0.5195671	<i>0.54827411</i>	<i>0.50850435</i>	<i>0.51116425</i>	<i>0.50247201</i>	<i>0.51214863</i>	<i>0.51474981</i>
2.250	0.4855229	<i>0.3655847</i>	0.4988378	<i>0.4803219</i>	<i>0.45802671</i>	<i>0.4697026</i>	0.490919	<i>0.48230818</i>	<i>0.47332561</i>	0.4851258
1.875	0.43698552	<i>0.3655847</i>	<i>0.4988378</i>	0.4410767	<i>0.36777932</i>	<i>0.43090085</i>	<i>0.43308045</i>	<i>0.44870181</i>	<i>0.42531513</i>	<i>0.43805946</i>
1.500	0.37162564	0.3655847	<i>0.3506379</i>	<i>0.36903675</i>	<i>0.27753193</i>	0.3920991	0.3752419	<i>0.4016529</i>	0.3681172	0.3735508
1.125	0.29198439	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	0.2969968	<i>0.18728453</i>	<i>0.28603735</i>	<i>0.28962655</i>	<i>0.34116146</i>	<i>0.30173182</i>	<i>0.28829955</i>
0.750	0.20112235	<i>0.3655847</i>	0.202438	<i>0.2054029</i>	<i>0.09703714</i>	<i>0.1799756</i>	0.2040112	<i>0.26722747</i>	<i>0.22615899</i>	0.2001525
0.375	0.10253128	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	0.113809	<i>0.00678974</i>	<i>0.07391384</i>	<i>0.09693274</i>	<i>0.17985094</i>	<i>0.1413987</i>	<i>0.10910967</i>
0.000	0	<i>0.3655847</i>	<i>0.202438</i>	<i>0.113809</i>	-0.08345765	-0.03214791	-0.01014572	0.07903188	0.04745096	0.01517104

legenda: (valores em **negrito**) - valores obtidos nos pontos nodais funcionais;
 (valores **sombreados**) - média aritmética dos resultados dos elementos de contorno constantes adjacentes;
 (valores *em itálico*) - valores obtidos através das funções de interpolação.

Tabela III.6.3-2 - Resultados da derivada do potencial na direção normal ao contorno na aresta lateral do quadrado, nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

x	sol. anal.	constante			linear			quadrático		
		malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3
6.000	-0.52359878	-0.3210705	-0.4213889	-0.4888191	-0.358483	-0.4808349	-0.5135812	-0.5662096	-0.5663439	-0.5372473
5.625	-0.42986701	-0.3210705	-0.4213889	-0.4888191	-0.32328176	-0.4158659	-0.43019755	-0.4869801	-0.46496257	-0.43604849
5.250	-0.35276128	-0.3210705	-0.4213889	-0.3842896	-0.28808052	-0.3508969	-0.3468139	-0.41379747	-0.37621079	-0.3524872
4.875	-0.28929936	-0.3210705	-0.4213889	-0.2797601	-0.25287928	-0.2859279	-0.28986025	-0.3466617	-0.30008857	-0.28656344
4.500	-0.23702671	-0.3210705	-0.2829825	-0.235527	-0.21767804	-0.2209589	-0.2329066	-0.28557281	-0.2365959	-0.2382772
4.125	-0.19392159	-0.3210705	-0.144576	-0.1912938	-0.1824768	-0.19002738	-0.19425435	-0.23053078	-0.18573279	-0.19485555
3.750	-0.1583168	-0.3210705	-0.144576	-0.1590641	-0.14727556	-0.15909585	-0.1556021	-0.18153562	-0.14749924	-0.1581096
3.375	-0.12883526	-0.3210705	-0.144576	-0.1268343	-0.11207432	-0.12816433	-0.12910265	-0.13858733	-0.12189524	-0.12803935
3.000	-0.10433669	-0.1703654	-0.1039151	-0.1046421	-0.07687308	-0.0972328	-0.1026032	-0.1016859	-0.1089208	-0.1046448
2.625	-0.08387358	-0.0196602	-0.06325421	-0.08244994	-0.06758883	-0.08220859	-0.08411389	-0.07083134	-0.08830439	-0.08423814
2.250	-0.06665446	-0.0196602	-0.06325421	-0.0666969	-0.05830458	-0.06718438	-0.06562457	-0.04602365	-0.0697517	-0.06657795
1.875	-0.05201334	-0.0196602	-0.06325421	-0.05094376	-0.04902034	-0.05216016	-0.0522567	-0.02726283	-0.05326275	-0.05166422
1.500	-0.03938396	-0.0196602	-0.0384625	-0.0392257	-0.03973609	-0.03713595	-0.03888883	-0.01454888	-0.03883753	-0.03949695
1.125	-0.02827783	-0.0196602	-0.01367083	-0.02750767	-0.03045184	-0.02825992	-0.028522	-0.00788179	-0.02647604	-0.02846731
0.750	-0.01826541	-0.0196602	-0.01367083	-0.0171385	-0.02116759	-0.01938389	-0.01815516	-0.00726157	-0.01617828	-0.01823136
0.375	-0.00895944	-0.0196602	-0.01367083	-0.00676939	-0.01188335	-0.01050787	-0.00940595	-0.01268822	-0.00794425	-0.00878909
0.000	0	-0.0196602	-0.01367083	-0.00676939	-0.0025991	-0.00163184	-0.00065673	-0.02416174	-0.00177395	-0.00014051

legenda: (valores em **negrito**) - valores obtidos nos pontos nodais funcionais;
 (valores **sombreados**) - média aritmética dos resultados dos elementos de contorno constantes adjacentes;
 (valores em *itálico*) - valores obtidos através das funções de interpolação.

Tabela III.6.3-3 - Resultados da derivada do potencial na direção normal ao contorno na aresta inferior do quadrado, nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

x	sol. anal.	constante			linear			quadrático		
		malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3	malha 1	malha 2	malha 3
6.000	0	-0.02485397	-0.01356032	-0.00681171	-0.00620316	-0.00210137	-0.00071352	-0.00241436	0.00044539	9.4203E-05
5.625	-0.00884504	-0.02485397	-0.01356032	-0.00681171	-0.01114612	-0.00983623	-0.0091708	-0.01274686	-0.00937759	-0.00895711
5.250	-0.01735017	-0.02485397	-0.01356032	-0.0158236	-0.01608909	-0.01757109	-0.01762808	-0.0217017	-0.01805001	-0.01734268
4.875	-0.02518854	-0.02485397	-0.01356032	-0.02483546	-0.02103205	-0.02530595	-0.02503809	-0.02927887	-0.02557188	-0.02506252
4.500	-0.03205893	-0.02485397	-0.0273322	-0.0310961	-0.02597502	-0.03304081	-0.03244809	-0.03547838	-0.03194318	-0.03211662
4.125	-0.03769732	-0.02485397	-0.04110407	-0.0373568	-0.03091798	-0.03647434	-0.03737662	-0.04030022	-0.03716393	-0.03774644
3.750	-0.04188701	-0.02485397	-0.04110407	-0.0407638	-0.03586094	-0.03990787	-0.04230515	-0.0437444	-0.04123411	-0.041842
3.375	-0.04446702	-0.02485397	-0.04110407	-0.04417087	-0.04080391	-0.0433414	-0.04403894	-0.04581091	-0.04415374	-0.04440331
3.000	-0.04533818	-0.024854	-0.0411041	-0.0441709	-0.04574687	-0.04677493	-0.04577272	-0.04649976	-0.04592281	-0.04543037
2.625	-0.04446702	-0.02485397	-0.04110407	-0.04417087	-0.04080385	-0.04334144	-0.04403894	-0.04581094	-0.04415381	-0.04440332
2.250	-0.04188701	-0.02485397	-0.04110407	-0.0407638	-0.03586083	-0.03990794	-0.04230516	-0.04374446	-0.04123421	-0.041842
1.875	-0.03769732	-0.02485397	-0.04110407	-0.0373568	-0.03091781	-0.03647445	-0.03737661	-0.04030032	-0.03716401	-0.03774641
1.500	-0.03205893	-0.02485397	-0.0273322	-0.0310961	-0.0259748	-0.03304095	-0.03244805	-0.03547851	-0.03194321	-0.03211654
1.125	-0.02518854	-0.02485397	-0.01356032	-0.02483546	-0.02103178	-0.02530583	-0.02503821	-0.02927903	-0.02557182	-0.02506267
0.750	-0.01735017	-0.02485397	-0.01356032	-0.0158236	-0.01608876	-0.01757071	-0.01762837	-0.0217019	-0.01804982	-0.01734274
0.375	-0.00884504	-0.02485397	-0.01356032	-0.00681171	-0.01114574	-0.0098356	-0.00917006	-0.01274709	-0.00937724	-0.00895674
0.000	0	-0.02485397	-0.01356032	-0.00681171	-0.00620272	-0.00210048	-0.00071174	-0.00241463	0.00044595	9.5337E-05

legenda: (valores em **negrito**) - valores obtidos nos pontos nodais funcionais;
 (valores **sombreados**) - média aritmética dos resultados dos elementos de contorno constantes adjacentes;
 (valores em *itálico*) - valores obtidos através das funções de interpolação.

De acordo com os gráficos e tabelas apresentados, pode-se tecer os seguintes comentários a respeito da comportamento da solução numérica:

Para as modelagens realizadas utilizando-se de elementos de contorno constantes observa-se que a solução numérica tende a convergir para a solução analítica com o aumento do grau do refinamento e que os valores obtidos para os pontos nodais funcionais destes elementos apresentam uma excelente aproximação da solução analítica nestes pontos.

Nas modelagens usando elementos de contorno lineares, verifica-se que a solução numérica apresenta uma ótima convergência para a resposta analítica com o aumento do grau de refinamento, embora, neste caso, os resultados numéricos para os pontos nodais funcionais não apresentem uma boa aproximação da solução analítica nestes pontos para as malhas menos refinadas. Mas, de modo geral, os valores obtidos ao longo de todos os elementos aproximam de forma bastante razoável o comportamento da solução analítica.

Esse pior desempenho do elemento de contorno linear, quando comparado com o elemento de contorno constante (vide tabelas III.6.3-1 e III.6.3-2), tem ligação com o perfil da resposta, simétricos com relação aos eixos baricêntricos, que torna mais difícil sua boa representação com a interpolação linear, para malhas não muito refinadas. Quando a resposta tem perfil monotônico, como nas arestas laterais, o desempenho do elemento de contorno linear é nitidamente superior ao elemento de contorno constante (vide tabela III.6.3-.3). Nos casos gerais de perfis não simétricos e não monotônicos, o elemento de contorno linear oferece resultados superiores, como será visto mais à frente.

A utilização de elementos de contorno quadráticos, nas modelagens realizadas para este caso, apresentam os melhores desempenhos na aproximação da solução analítica ao longo de todos os elementos de contorno, pois tais elementos possuem funções de interpolação que representam com maior exatidão a distribuição da solução analítica.

Com o propósito de melhor apreciar a taxa de convergência do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos de contorno possuindo diferentes tipos de funções de interpolação, apresenta-se a seguir um gráfico contendo a média do erro percentual em termos do potencial para um conjunto de cinco pontos internos, dispostos de acordo com a figura III.6.3-6, variando-se o número de pontos nodais funcionais empregados nas diversas discretizações.

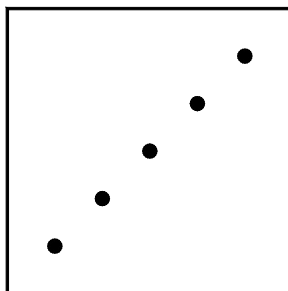


Figura III.6.3-6 - Representação do conjunto de pontos internos dispostos sob o domínio físico.

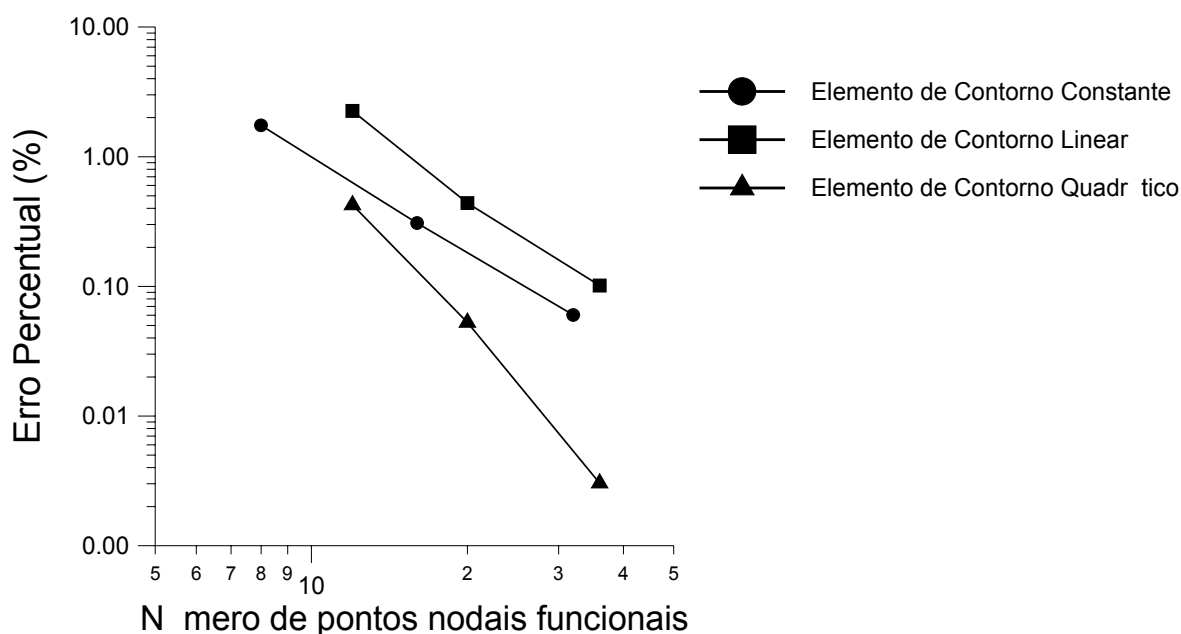


Figura III.6.3-7 - Média do erro percentual para o conjunto de pontos internos, referentes as modelagens realizadas com os diferentes tipos de elementos de contorno

Observando-se os resultados expressos no gráfico da figura III.6.3-7, pode-se tecer os seguintes comentários a respeito das taxas de convergências apresentadas pelos diferentes tipos de elementos de contornos utilizados nas modelagens:

Inicialmente pode-se, sem dúvida alguma, comprovar o excelente desempenho das modelagens realizadas com os elementos de contorno quadráticos, o que, de certa forma, ratifica os ótimos resultados apresentados anteriormente;

Para o cálculo do potencial nos pontos internos, realizado em um pós-processamento, utilizam-se os valores das incógnitas nos pontos nodais funcionais, situados sobre o contorno do domínio físico, que, neste ponto, já encontram-se definidos. Assim sendo, a precisão dos valores calculados para as incógnitas nos pontos internos estão intimamente ligados a acurácia alcançada para os valores nestes pontos nodais funcionais;

Esta linha de raciocínio pode, de certo modo, explicar o desempenho alcançado pelas modelagens realizadas utilizando-se os elementos de contorno constantes frente aos elementos de contorno lineares, pois, como exaltado anteriormente, para os valores nos pontos nodais funcionais, os elementos de contorno constantes apresentam um excelente desempenho. Já as modelagens realizadas com os elementos de contorno lineares apresentam uma melhor aproximação para a resposta analítica ao longo do comprimento de todo o elemento de contorno, mas nos pontos nodais funcionais a acurácia dos resultados é menor, o que pode ser comprovado de acordo com as figuras III.6.3-3 e III.6.3-4; e,

De forma geral, os resultados numéricos apresentados atendem perfeitamente aos objetivos pretendidos ao aplicar-se um método numérico para a obtenção da solução de um problema de Engenharia, até mesmo para as discretizações menos refinadas, pois, para tais casos, tem-se um erro percentual em relação a solução analítica inferior a 5%.

III.6.4 - 4ª ANÁLISE

O problema físico desta 4ª análise consiste de um caso governado pela Equação de Laplace, onde são prescritas condições de contorno essenciais e naturais [9-11]. O domínio físico Ω , representado por um semicírculo de raio $R= 10$ u.c., pode ser observado de acordo com a figura III.6.4-1, juntamente com as condições de contorno e o sistema de coordenadas adotado.

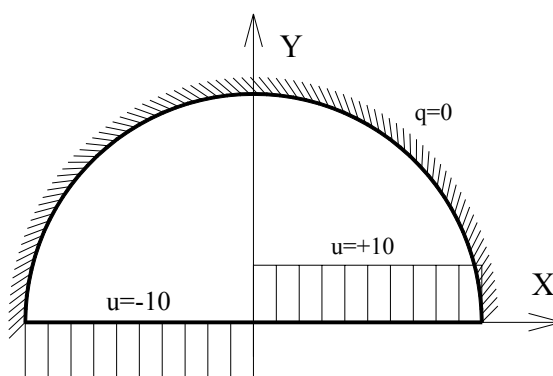


Figura III.6.4-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno.

As condições de contorno apresentadas na figura II.6.4-1, considerando-se um sistema de coordenadas polares possuindo a mesma origem que o sistema de coordenadas cartesianas indicado, podem ser representadas matematicamente de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{array}{ll}
 u = +10 & \text{p/ } \theta = 0; 0 < r \leq +10 \\
 u = -10 & \text{p/ } \theta = \pi; 0 < r \leq +10 \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{p/ } r = +10; 0 \leq \theta \leq \pi
 \end{array}
 \tag{Eq. III.6.4-1}$$

Destaca-se que, de acordo com os valores prescritos para as condições de contorno essenciais, tem-se uma descontinuidade no potencial prescrito. Esta característica do modelo matemático adotado não possui um significado no modelo físico, pois, neste caso, ter-se-ia um mesmo ponto material com diferentes valores de temperatura, por exemplo.

A simulação computacional deste caso apresenta grandes dificuldades numéricas, justamente devido às características da solução analítica, em termos da derivada do potencial na direção normal ao contorno, particularmente na região central do semicírculo, onde prescreve-se a descontinuidade do potencial, pois neste ponto a solução analítica apresenta uma singularidade.

A interpretação física deste caso pode ser feita, através da Transferência de Calor, como sendo uma placa semicircular isolada termicamente ao longo de seu contorno circular e sujeita a diferentes temperaturas ao longo de sua aresta retilínea.

Objetivo

Nesta análise, além da verificação da influência do tipo de elemento de contorno utilizado nas modelagens do problema e do grau de refinamento utilizado nas discretizações, objetiva-se qualificar as alterações apresentadas nas soluções numéricas em função de dois modos distintos de modelar-se e prescrever-se os valores do potencial no ponto central do semicírculo onde tem-se a descontinuidade do potencial.

Apresenta-se também uma comparação de desempenho entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, utilizando-se discretizações possuindo o mesmo grau de refinamento no contorno do domínio físico [11]. São comparadas as soluções

numéricas com os resultados analíticos para o potencial e sua derivada normal em pontos sob o contorno e sobre domínio físico do problema.

Solução Analítica

Este Problema torna-se unidimensional quando analisado analiticamente através de um sistema de coordenadas polares localizado no meio do semicírculo. Desta forma, a solução analítica em termos do potencial é dada de acordo com a seguinte expressão [9, 10]:

$$u(r) = \frac{\bar{U}_1}{\pi} \theta + \bar{U}_2 \quad \text{Eq. III.6.4-2}$$

sendo \bar{U}_1 e \bar{U}_2 os potenciais prescritos na aresta horizontal do semicírculo com $\theta = 180^\circ$ e $\theta = 0^\circ$, respectivamente.

A equação representando a derivada do potencial na direção normal ao contorno na aresta horizontal do semicírculo é dada por:

$$q(x) = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\bar{U}_1}{\pi} \frac{1}{x} \quad \text{Eq. III.6.4-3}$$

Observe que, de acordo com esta expressão, quando x tende para zero, isto é, para o ponto onde prescreve-se a descontinuidade no potencial, o valor da derivada do potencial na direção normal tende para mais ou menos infinito, sendo que o perfil formado é anti-simétrico em relação a origem do sistema de coordenadas cartesianas adotado, vide figura III.6.4-1.

Discretizações Utilizadas

Como neste caso são utilizados vários conjuntos de discretizações, de acordo com os objetivos pretendidos, as discretizações utilizadas serão apresentadas junto à exposição de cada uma das análises, a fim de tornar a exposição dos resultados mais clara e didática.

Resultados Numéricos

Nesta primeira série de resultados numéricos, o problema é modelado utilizando-se de diferentes tipos de elementos de contorno, com o objetivo de verificar a influência das funções de interpolação no método.

Para as análises com elementos de contorno lineares e quadráticos a região da descontinuidade é modelada sem a utilização do recurso do nó duplo, elemento de contorno com ponto de colocação não nodal. Desta forma, para os elementos lineares o ponto de singularidade encontra-se no extremo de dois elementos adjacentes, e para os elementos quadráticos o ponto de singularidade encontra-se no ponto nodal funcional intermediário de um elemento. Em ambos os casos, neste ponto, prescreve-se como condição de contorno essencial a média dos valores prescritos ao longo da aresta horizontal do semicírculo.

De acordo com a figura III.6.4-2, encontram-se representadas as duas discretizações utilizadas, onde estão representados os pontos nodais geométricos dos elementos de contorno. Observa-se que adota-se na região central da aresta horizontal do semicírculo uma maior concentração dos pontos nodais, com o propósito de melhor captar a singularidade existente.

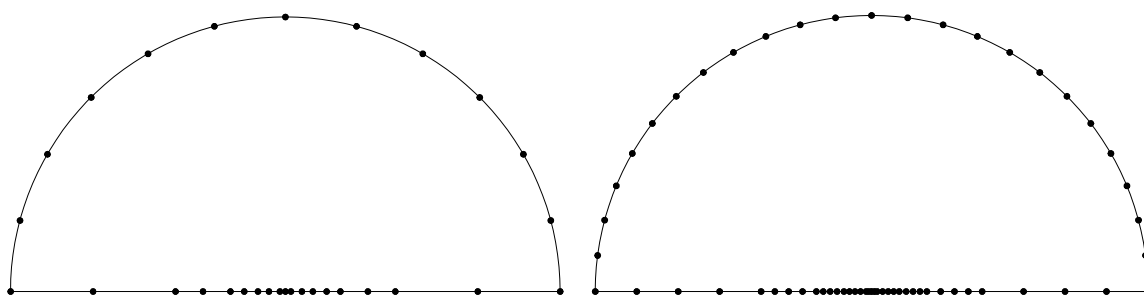


Figura III.6.4-2 - Apresentação dos nós geométricos nos diferentes tipos de discretizações utilizadas para as modelagens via Método dos Elementos de Contorno.

Na tabela III.6.4-1 encontram-se indicados os números de elementos de contorno e de pontos nodais funcionais presentes em cada uma das discretizações, sendo modeladas com os diferentes tipos de elementos de contorno utilizados.

Tabela III.6.4-1 - Número de elementos e número de pontos nodais funcionais utilizados nas modelagens em função do tipo de elemento de contorno empregado.

Elemento de Contorno	Malha 1		Malha 2	
	Número de Elementos	Número de Pontos Nodais Funcionais	Número de Elementos	Número de Pontos Nodais Funcionais
Constante	30	30	60	60
Linear	30	32	60	62
Quadrático	15	32	30	62

A seguir apresenta-se a tabela III.6.4-2 contendo os resultados numérico e analítico para o potencial ao longo dos pontos nodais funcionais pertencentes a aresta superior do semicírculo, onde a posição dos pontos nodais funcionais é representada em função do ângulo formado entre o eixo X e a reta que liga a origem do sistema de coordenadas e o ponto nodal funcional em questão.

Ressalta-se que apresentam-se apenas os resultados numéricos para os pontos nodais funcionais com posições variando entre 0 e 90 graus, visto que o problema é anti-simétrico em relação a um eixo vertical passando pela origem do sistema de coordenadas adotado.

Na tabela III.6.4-3 encontram-se representados os resultados para a derivada do potencial na direção normal ao contorno para a aresta horizontal do semicírculo, para os pontos nodais funcionais que encontram-se no sentido positivo do eixo X do sistema de coordenadas cartesianas.

Tabela III.6.4-2 - Resultados para o potencial na face superior do semicírculo nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas, utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

teta	sol analítica	constante		linear		quadrática	
		malha1	malha2	malha1	malha2	malha1	malha2
0.00	-10			-10	-10	-10	-10
3.75	-9.58333333		-9.607172				
7.50	-9.16666667	-9.219442			-9.16563		-9.166375
11.25	-8.75		-8.765687				
15.00	-8.33333333			-8.331282	-8.332937	-8.330891	-8.333076
18.75	-7.91666667		-7.928149				
22.50	-7.5	-7.532047			-7.499857		-7.499776
26.25	-7.08333333		-7.092188				
30.00	-6.66666667			-6.667747	-6.666624	-6.665976	-6.666465
33.75	-6.25		-6.256987				
37.50	-5.83333333	-5.853402			-5.833329		-5.833154
41.25	-5.41666667		-5.422222				
45.00	-5			-5.00158	-5.000006	-4.999811	-4.999845
48.75	-4.58333333		-4.587736				
52.50	-4.16666667	-4.179047			-4.166671		-4.166535
56.25	-3.75		-3.75342				
60.00	-3.33333333			-3.334587	-3.333331	-3.333251	-3.333224
63.75	-2.91666667		-2.919223				
67.50	-2.5	-2.506804			-2.499989		-2.499912
71.25	-2.08333333		-2.08511				
75.00	-1.66666667			-1.667332	-1.66666	-1.666622	-1.66661
78.75	-1.25		-1.251048				
82.50	-0.83333333	-0.8355106			-0.8333283		-0.8333038
86.25	-0.41666667		-0.4170129				
90.00	0			-2.6978E-14	2.6539E-07	-4.3299E-15	3.5142E-07

Tabela III.6.4-3 - Resultados para a derivada do potencial com relação a normal na face inferior do semicírculo nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas, utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

x	sol analítica	constante		linear		quadrática	
		malha1	malha2	malha1	malha2	malha1	malha2
0	-----	-	-	1.6709E-13	-7.8832E-09	1.2712E-13	-1.0534E-08
0.05	-127.323954		-155.7522				
0.1	-63.6619772	-78.50177			-106.7028		-91.316
0.15	-42.4413182		-36.93123				
0.2	-31.8309886			-47.56511	-25.596	-49.27326	-20.53552
0.3	-21.2206591		-21.42595				
0.4	-15.9154943	-15.3429			-16.11582		-16.69968
0.5	-12.7323954		-12.47821				
0.6	-10.6103295			-5.801112	-10.39029	-9.242132	-10.2078
0.7	-9.09456818		-9.020897				
0.8	-7.95774715	-7.739305			-7.91257		-7.988781
0.9	-7.07355303		-7.057011				
1	-6.36619772			-6.65727	-6.325106	-8.233835	-6.36631
1.125	-5.65884242		-5.657479				
1.25	-5.09295818	-5.070848			-5.063448		-5.094851
1.375	-4.62996198		-4.616555				
1.5	-4.24413182			-4.05033	-4.227271	-4.145182	-4.255772
1.625	-3.91766014		-3.910881				
1.75	-3.63782727	-3.67514			-3.627304		-3.637223
1.875	-3.39530545		-3.430065				
2	-3.18309886			-3.118041	-3.165508	-3.287906	-3.184407
2.25	-2.82942121		-2.842004				
2.5	-2.54647909	-2.568055			-2.52849		-2.544968
2.75	-2.31498099		-2.310403				
3	-2.12206591			-2.070913	-2.111987	-2.108263	-2.126578
3.25	-1.95883007		-1.958099				
3.5	-1.81891364	-1.886715			-1.812503		-1.817429
3.75	-1.69765273		-1.746643				
4	-1.59154943			-1.536678	-1.574292	-1.582247	-1.58721
4.75	-1.34025215		-1.348873				
5.5	-1.1574905	-1.166365			-1.141504		-1.156205
6.25	-1.01859164		-1.010979				
7	-0.90945682			-0.8834832	-0.9024898	-0.9036428	-0.9135504
7.75	-0.82144487		-0.8097766				
8.5	-0.74896444	-0.7503863			-0.7505688		-0.7482062
9.25	-0.68823759		-0.7033339				
10	-0.63661977			-0.5774936	-0.6094409	-0.6632063	-0.639534

Observe que, devido ao modo como a região de descontinuidade do potencial é modelada nesta análise, a derivada do potencial na direção normal para o ponto de singularidade, nas análises realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos, apresenta um valor praticamente nulo e que, para os demais pontos nodais funcionais dos elementos ao qual este ponto pertence, sua resposta numérica é perturbada, mas este fato se mantém restrito a uma pequena região próxima ao ponto de descontinuidade.

De maneira geral, para os pontos nodais funcionais afastados do ponto de descontinuidade, os resultados numéricos apresentam um excelente desempenho para todas as modelagens realizadas. Comparando-se os resultados para um mesmo tipo de elemento de contorno e variando-se o grau de refinamento utilizado nas discretizações, observa-se que a solução numérica tende a convergir para a resposta analítica.

De forma a melhor apreciar os resultados numéricos, para as diferentes análises realizadas com diferentes tipos de elementos de contorno, na região próxima ao ponto de descontinuidade, apresentam-se a seguir gráficos (vide figura III.6.4-3) onde são plotados os resultados numéricos, utilizando as funções de interpolação referente a cada elemento para, interpolarem-se os demais valores da derivada do potencial na direção normal, para pontos ao longo do comprimento dos elementos, junto com uma curva representando a solução analítica.

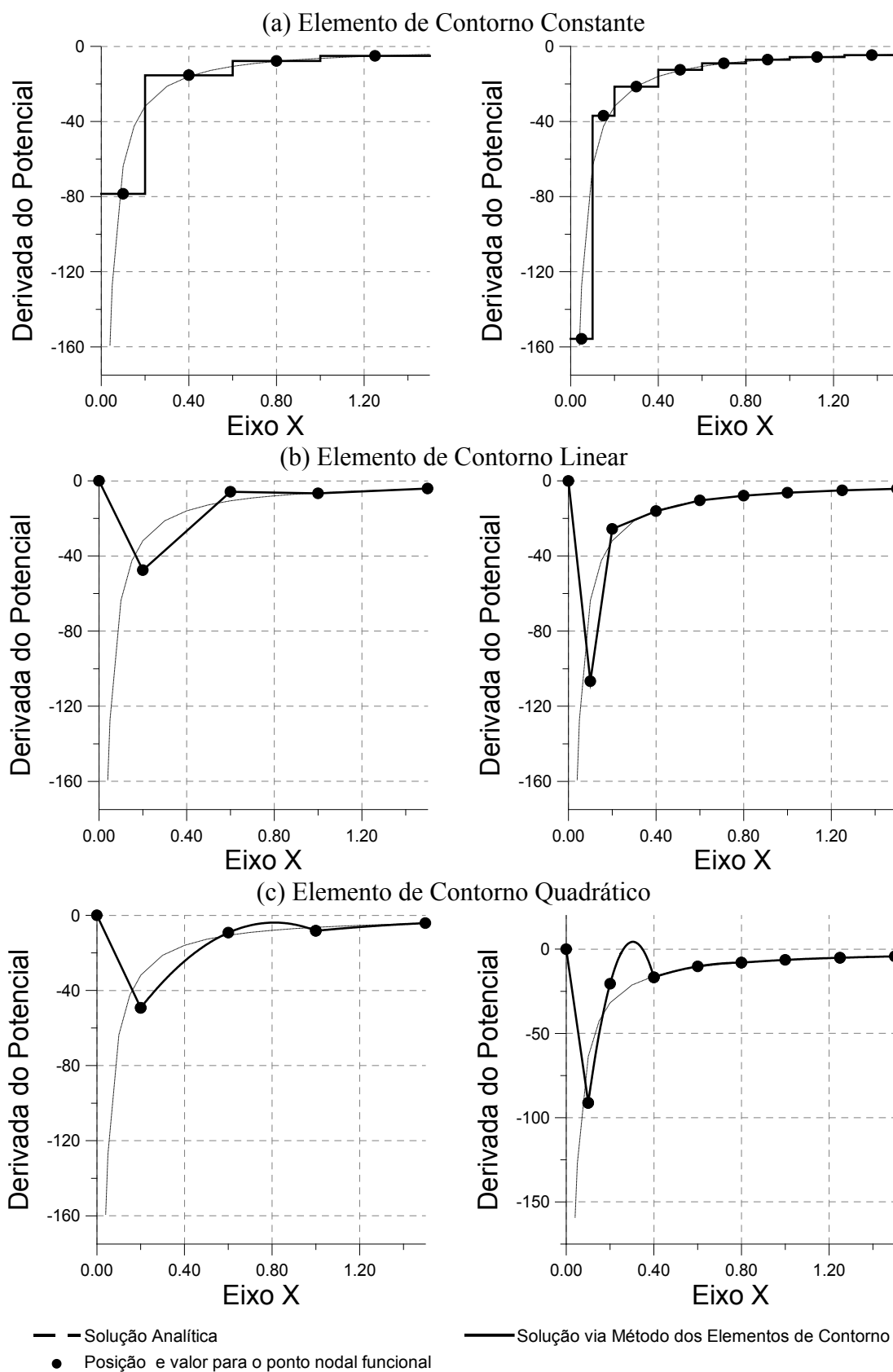


Figura IV.6.4-3 - Soluções numéricas e analítica para a derivada do potencial na direção normal ao longo da aresta horizontal do semicírculo, na região próxima ao ponto de descontinuidade, para as modelagens realizadas com diferentes tipos de elementos de contorno.

Destaca-se, que nas modelagens utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos, o resultado impreciso do ponto nodal funcional, que encontra-se imediatamente após o ponto de singularidade, perturba de forma considerável a resposta numérica para o elemento de contorno adjacente.

Nas modelagens realizadas com elementos de contorno constantes, observa-se uma excelente aproximação do valor da solução analítica para os pontos nodais funcionais deste elemento.

Para a segunda série de resultados numéricos, apresentados a seguir, também utilizando-se de modelagens com diferentes tipos de elementos de contorno e de discretizações com diferentes graus de refinamento, o ponto de descontinuidade do potencial é modelado de forma diversa ao apresentado anteriormente.

Nas análises com elementos de contorno lineares e quadráticos o ponto de descontinuidade do potencial é modelado com a utilização do recurso do nó duplo, isto é, elementos de contorno com ponto de colocação não nodal. Desta forma, tal ponto sempre encontra-se no extremo de um elemento de contorno e o valor da condição de contorno essencial é prescrita semelhantemente aos demais pontos nodais funcionais pertencentes à aresta horizontal do semicírculo.

Na figura III.6.4-4 encontram-se representadas as discretizações utilizadas, onde apresentam-se os pontos nodais geométricos. Também, neste caso, adota-se uma maior concentração de elementos de contorno na região central da aresta horizontal do semicírculo, para uma melhor captação da singularidade existente.

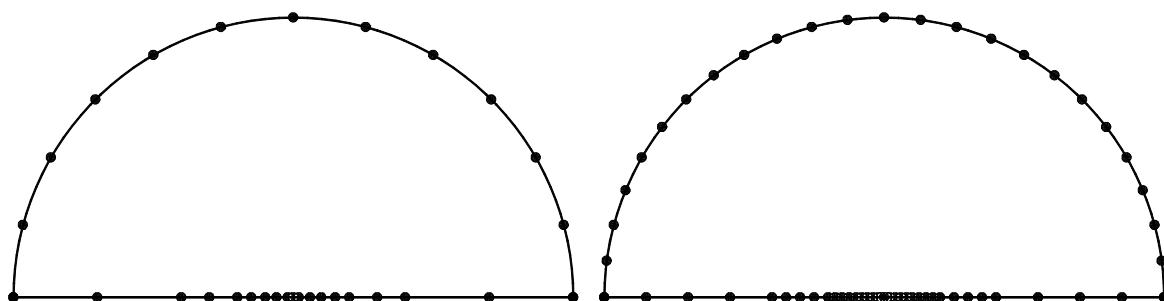


Figura III.6.4-4 - Apresentação dos pontos nodais geométricos nos diferentes tipos de discretizações utilizadas para as modelagens via Método dos Elementos de Contorno.

De acordo com a tabela III.6.4-4, têm-se indicados os números de elementos de contorno e de pontos nodais funcionais presentes em cada uma das discretizações, conforme os tipos de elementos de contorno utilizados nas diversas modelagens.

Tabela III.6.4-4 - Número de elementos e número de pontos nodais funcionais utilizados nas modelagens em função do tipo de elemento de contorno empregado.

Elemento de Contorno	Malha 1		Malha 2	
	Número de Elementos	Número de Pontos Nodais Funcionais	Número de Elementos	Número de Pontos Nodais Funcionais
Constante	32	32	64	64
Linear	32	35	64	67
Quadrático	16	35	32	67

Na tabela III.6.4-5, dada a seguir, apresentam-se os resultados numéricos obtidos para o potencial nos pontos nodais funcionais situados ao longo da aresta superior do semicírculo, sendo as posições dos pontos referenciadas em termos do ângulo formado entre o eixo X e a reta que liga a origem do sistema de coordenadas e o referido ponto nodal.

Por tratar-se de um problema anti-simétrico, são expostos os resultados numéricos somente dos pontos nodais funcionais cujas posições se encontrem formando um ângulo entre 0 e 90 graus.

Para a derivada do potencial na direção normal ao contorno, para os pontos nodais funcionais pertencentes a aresta horizontal do semicírculo no sentido positivo do eixo X do sistema de coordenadas cartesianas, os resultados numéricos para as diversas modelagens encontram-se expressos na tabela III.6.4-6.

Tabela III.6.4-5 - Resultados para o potencial na face superior do semicírculo nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

teta	sol analítica	constante		linear		quadrática	
		malha1	malha2	malha1	malha2	malha1	malha2
0.00	-10			-10.00876	-10.00239	-9.997198	-9.999621
3.75	-9.583333333		-9.607169				
7.50	-9.166666667	-9.219415			-9.165842		-9.166569
11.25	-8.75		-8.76568				
15.00	-8.333333333			-8.332598	-8.333141	-8.331936	-8.333286
18.75	-7.916666667		-7.928138				
22.50	-7.5	-7.531984			-7.500086		-8.333286
26.25	-7.083333333		-7.092174				
30.00	-6.666666667			-6.669194	-6.66688	-6.667448	-6.666669
33.75	-6.25		-6.256971				
37.50	-5.833333333	-5.853317			-5.833603		-5.833347
41.25	-5.416666667		-5.422205				
45.00	-5			-5.003028	-5.000283	-5.001358	-5.000022
48.75	-4.583333333		-4.587719				
52.50	-4.166666667	-4.178963			-4.166935		-4.166691
56.25	-3.75		-3.753404				
60.00	-3.333333333			-3.335778	-3.333566	-3.334528	-3.333355
63.75	-2.916666667		-2.919209				
67.50	-2.5	-2.506742			-2.50018		-2.500014
71.25	-2.083333333		-2.0851				
75.00	-1.666666667			-1.668006	-1.666795	-1.667343	-1.66668
78.75	-1.25		-1.251042				
82.50	-0.833333333	-0.8354883			-0.8333978		-0.8333394
86.25	-0.416666667		-0.4170107				
90.00	0			-4.8961E-14	2.6541E-07	4.0026E-12	3.5142E-07

Tabela III.6.4-6- - Resultados para a derivada do potencial com relação a normal na face inferior do semicírculo nas análises realizadas para as diferentes discretizações modeladas utilizando-se de elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

x	sol analítica	constante		linear		quadrática	
		malha1	malha2	malha1	malha2	malha1	malha2
0	-----			-1773.287	-3547.092	-1144.683	-2293.669
0.025	-254.647909		-311.5128				
0.04	-159.154943						
0.05	-127.323954	-155.8658			455.7004		-12.52861
0.075	-84.8826363		-72.02751				
0.1	-63.6619772			227.7455	-129.732	-4.630131	-201.8911
0.125	-50.9295818		-50.36783				
0.15	-42.4413182	-39.51791			-26.71394		-36.85509
0.175	-36.3782727		-38.67741				
0.2	-31.8309886			-48.35474	-30.00137	-72.17133	-37.08409
0.3	-21.2206591		-21.63345				
0.4	-15.9154943	-16.5579			-14.63267		-15.31944
0.5	-12.7323954		-12.49917				
0.6	-10.6103295			-4.28768	-10.4114	-6.617916	-11.35795
0.7	-9.09456818		-9.030762				
0.8	-7.95774715	-7.696597			-7.831306		-7.920134
0.9	-7.07355303		-7.061518				
1	-6.36619772			-6.651999	-6.298328	-9.816798	-6.42404
1.125	-5.65884242		-5.659813				
1.25	-5.09295818	-5.081492			-5.047632		-5.088283
1.375	-4.62996198		-4.617811				
1.5	-4.24413182			-3.98689	-4.218371	-4.014244	-4.252202
1.625	-3.91766014		-3.911645				
1.75	-3.63782727	-3.677931			-3.621614		-3.636726
1.875	-3.39530545		-3.430575				
2	-3.18309886			-3.102101	-3.161749	-3.360416	-3.179666
2.25	-2.82942121		-2.842299				
2.5	-2.54647909	-2.569146			-2.526591		-2.545742
2.75	-2.31498099		-2.310559				
3	-2.12206591			-2.065362	-2.11086	-2.097496	-2.123599
3.25	-1.95883007		-1.958195				
3.5	-1.81891364	-1.88711			-1.811783		-1.818137
3.75	-1.69765273		-1.74671				
4	-1.59154943			-1.534636	-1.573819	-1.582731	-1.585462
4.75	-1.34025215		-1.348906				
5.5	-1.1574905	-1.166478			-1.141291		-1.156912
6.25	-1.01859164		-1.010993				
7	-0.90945682			-0.8814641	-0.9024255	-0.9034742	-0.9124017
7.75	-0.82144487		-0.8097852				
8.5	-0.74896444	-0.7504234			-0.7497234		-0.7486742
9.25	-0.68823759		-0.7033414				
10	-0.63661977			-0.5805501	-0.6109449	-0.6621271	-0.6385041

De acordo com a tabela III.6.4-5, para a solução numérica em termos do potencial, para os elementos de contorno lineares e quadráticos, a nova forma de modelar-se a descontinuidade do potencial acarretou uma pequena perda de precisão em alguns pontos, se comparado com os valores obtidos anteriormente tabela III.6.4-2, mas, de maneira geral, o método continua a apresentar uma excelente convergência para a solução analítica.

Para a solução numérica em termos da derivada do potencial na direção normal ao contorno, nas análises realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos, nos pontos nodais funcionais pertencentes à aresta horizontal do semicírculo, de acordo com a tabela III.6.4-6, observa-se que na região muito próxima ao ponto de descontinuidade do potencial, esta nova modelagem trouxe uma grande alteração nos valores calculados, embora o valor obtido para o ponto de descontinuidade apresente uma melhora na representação da singularidade existente.

Como observado anteriormente, nas análises efetuadas com elementos de contorno lineares e quadráticos, o valor obtido para a derivada do potencial na direção normal ao contorno no ponto de descontinuidade do potencial produz uma perturbação no valor obtido para o ponto nodal funcional imediatamente após este ponto.

Desta forma, para uma melhor visualização deste fenômeno, são apresentados diversos gráficos, figura III.6.4-5, contendo as curvas para as soluções analítica e numéricas, sendo que, esta última, é obtida através do uso das funções de interpolação referentes a cada tipo de elemento de contorno adotado nas diversas análises.

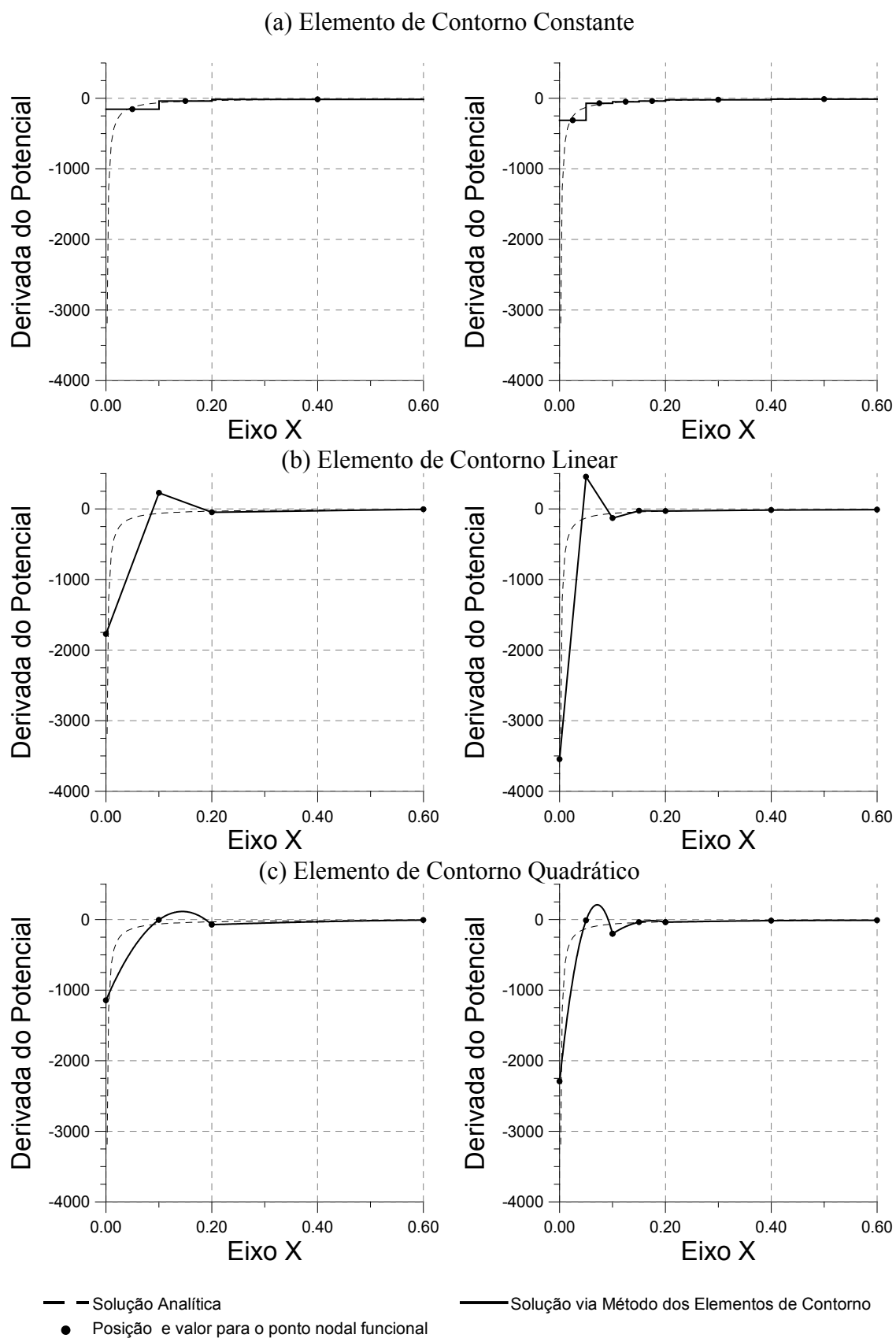


Figura III.6.4-5 - Soluções numéricas e analítica para a derivada do potencial na direção normal ao longo da aresta horizontal do semicírculo, na região próxima ao ponto de descontinuidade, para as modelagens realizadas com diferentes tipos de elementos de contorno.

De acordo com os gráficos apresentados, figuras III.6.4-3 e III.6.4-5, referentes as modelagens realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos utilizando-se de duas maneiras distintas para modelar-se o ponto de descontinuidade do potencial, embora as discretizações equivalentes possuam uma pequena diferença no número de pontos nodais funcionais, comparando-as pode-se tecer os seguintes comentários:

Observou-se que em ambas as formas de modelar-se o ponto de descontinuidade do potencial, obtiveram-se excelentes resultados, e que, para os pontos que encontram-se distantes da descontinuidade, os resultados numéricos quase não apresentaram variações, indicando que as diferenças encontram-se situadas em uma pequena região do domínio físico próximo ao ponto de descontinuidade; e,

Em ambas as modelagens observaram-se grandes distorções nas respostas dos elementos de contorno adjacentes ou no próprio elemento que contém o ponto de descontinuidade do potencial, representando a grande dificuldade computacional na modelagem deste problema, devido a descontinuidade do potencial não possuir um significado físico no modelo matemático adotado.

A fim de verificar o comportamento do Método dos Elementos de Contorno no cálculo do potencial em pontos pertencentes ao interior do domínio físico nas diferentes modelagens realizadas, empregando-se a segunda forma de representar o ponto de descontinuidade, utiliza-se de um conjunto contendo 35 pontos internos, dispostos sob o domínio físico de acordo com a figura III.6.4-6.

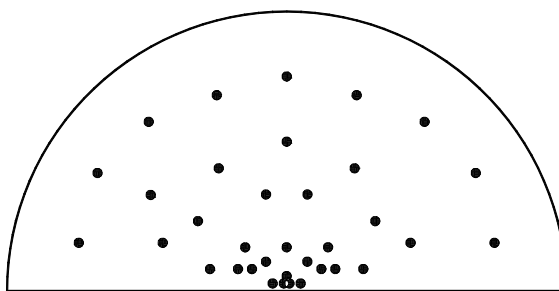


Figura III.6.4-6 - Representação do conjunto de pontos internos dispostos sob o domínio físico

A seguir, apresenta-se a tabela III.6.4-7 contendo a média do erro percentual para o potencial entre as soluções numéricas e analíticas, segundo o conjunto de 35 pontos internos (vide figura III.6.4-6), referentes às modelagens utilizando-se do segundo conjunto de discretizações (figura III.6.4-4), isto é, no caso de elementos de contorno lineares e

quadráticos, utiliza-se o recurso do elemento de contorno com ponto de colocação não nodal para modelar o ponto de descontinuidade do potencial.

Tabela III.6.4-7 - Indicação da média do erro percentual para o conjunto de pontos internos utilizando-se diferentes discretizações e elementos de contorno

	constante		linear		quadrática	
	malha1	malha2	malha1	malha2	malha1	malha2
Média do Erro Percentual	0.11120543	0.02918976	0.96949376	0.1206445	0.68703723	0.01724578

De acordo com os resultados apresentados para a média do erro percentual, tabela III.6.4-7, percebe-se a excelente qualidade das soluções numéricas para os pontos internos e a convergência das mesmas com o refinamento das discretizações utilizadas. Tais resultados podem ser melhor visualizados se expressos em um gráfico em escala logarítmica, figura III.6.4-7, onde, então, pode-se tecer vários comentários interessantes a respeito das taxas de convergência do Método dos Elementos de Contorno utilizando-se de diferentes tipos de elementos de contorno.

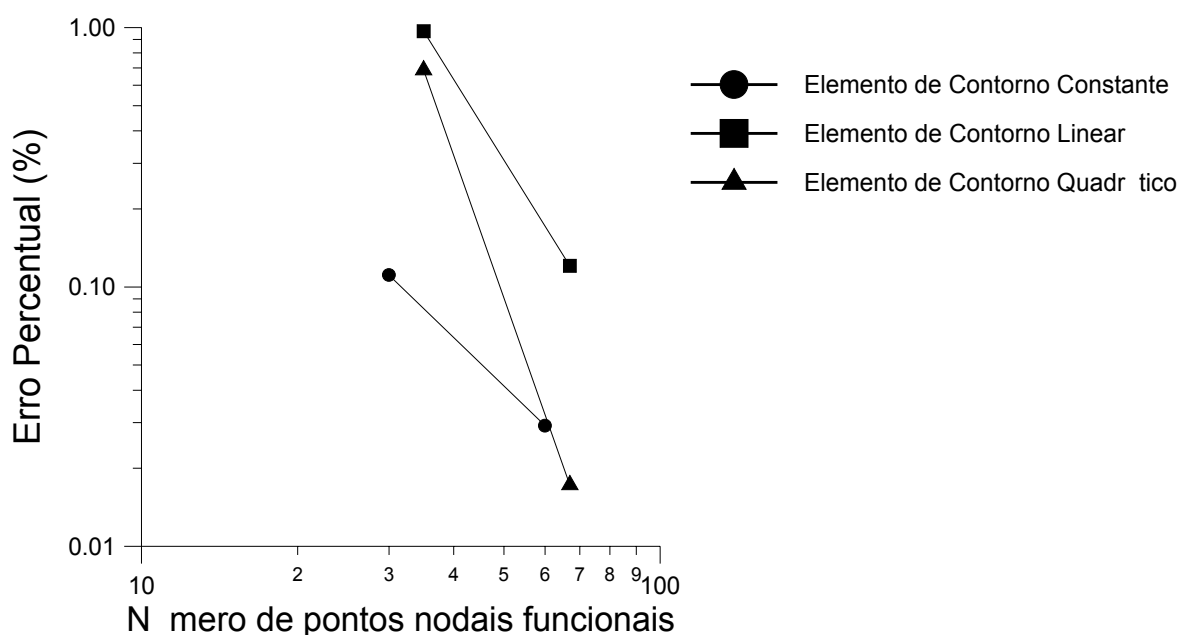


Figura III.6.4-7 - Média do erro percentual para o conjunto de pontos internos, referente às modelagens realizadas com os diferentes tipos de elementos de contorno

Uma representação da taxa de convergência de uma determinada modelagem realizada com um determinado tipo de elemento de contorno é expressa com sendo a inclinação da reta que une a média do erro percentual entre duas discretizações distintas. Assim sendo, pode concluir-se que o melhor desempenho é alcançado utilizando-se as

modelagens com elementos de contorno quadráticos, pois a reta que une a média do erro percentual entre as duas discretizações utilizadas apresenta a maior inclinação, sendo que, para a discretização mais refinada, tem-se o menor valor alcançado em todas as modelagens para a média do erro percentual, vide figura III.6.4-7.

Na modelagem realizada com elementos de contorno constantes, inicialmente apresenta um melhor desempenho, mas, à medida que refinam-se as discretizações, os elementos de contorno ditos de ordem superior (elementos lineares e quadráticos) apresentam uma convergência mais acentuada para a solução analítica.

Com o intuito de avaliar o desempenho do Método dos Elementos de Contorno junto a outros métodos numéricos, são apresentadas algumas comparações frente ao Método dos Elementos Finitos, onde são aferidas a precisão da solução em termos do potencial e sua derivada normal em pontos sobre o contorno e no interior do domínio físico do problema.

A seguir, na figura III.6.4-8, apresentam-se as discretizações utilizadas para as modelagens via Método dos Elementos Finitos, sendo que os pontos que encontram-se destacados em seu interior são empregados para a avaliação dos resultados numéricos obtidos pelos métodos numéricos empregados. Destaca-se que, nesta figura, cada um dos triângulos representa um elemento finito isoparamétrico quadrático.

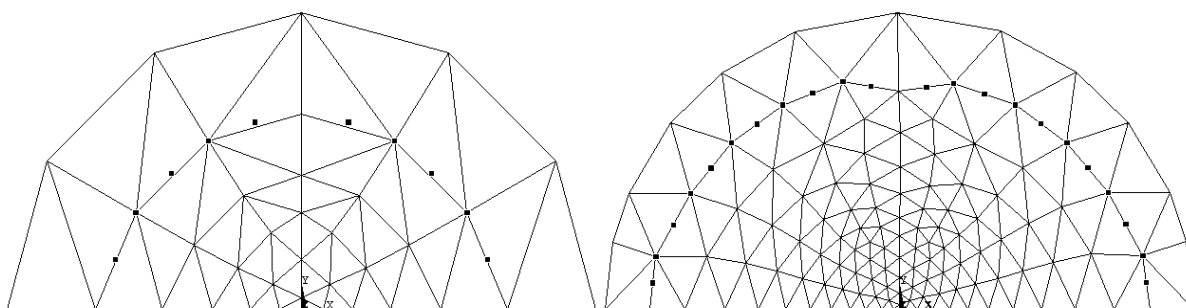


Figura III.6.4-8- Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se pontos no interior do domínio empregados para a comparação dos resultados numéricos.

Desta forma, na tabela III.6.4-8, encontram-se indicados os números de pontos nodais e o número de elementos resultantes do processo de discretização do domínio físico, para ambos os métodos numéricos empregados.

Tabela III.6.4-8- Indicação do número de pontos nodais e elementos utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno

	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos
malha 1	127	54	38	18
malha2	465	214	74	36

Na figura III.6.4-9 apresentam-se os gráficos, em escala logarítmica, contendo a média do erro percentual para uma série de pontos selecionados no interior do domínio físico e sob o contorno da geometria, para as análises realizadas via Método dos Elementos de Contorno e Método dos Elementos Finitos.

De acordo com os gráficos apresentados, vide figura III.6.4-9, pode-se tecer o seguinte comentário a respeito da precisão alcançada pelos métodos numéricos empregados:

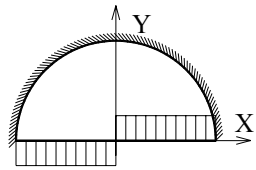
De maneira geral, pode-se considerar que os resultados apresentados pelo Método dos Elementos de Contorno como sendo superiores aos alcançados pelo Método dos Elementos Finitos, pois além de apresentarem uma precisão bastante superior, o número de pontos nodais, e por conseqüência, a ordem do sistema de equações algébricas resultante, são bem menores nas modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno.

Nos gráficos contendo a média do erro percentual para a derivada do potencial para os pontos nodais sobre o contorno e no interior do domínio físico, respectivamente os gráficos da figura III.6.4-9 (b) e (c), conclui-se que:

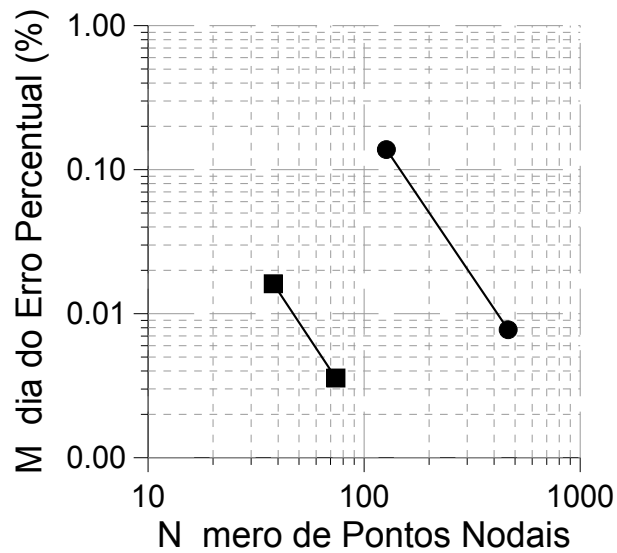
Existe uma grande perda de precisão nos resultados apresentados em comparação aos resultados alcançados para o potencial, pelo Método dos Elementos Finitos, pois neste método os valores para a derivada do potencial são calculados a partir da derivação do campo obtido para o potencial, sendo que esta operação sempre resulta em uma perda na qualidade dos resultados, conforme pôde ser constatado; e,

Para o Método dos Elementos de Contorno, observa-se uma sensível melhoria nos resultados apresentados para os pontos internos, confirmando as expectativas, pois tais valores são obtidos empregando-se novamente a sentença do método. A melhoria da qualidade dos resultados para os pontos internos pode ser explicada pelo fato de que, a

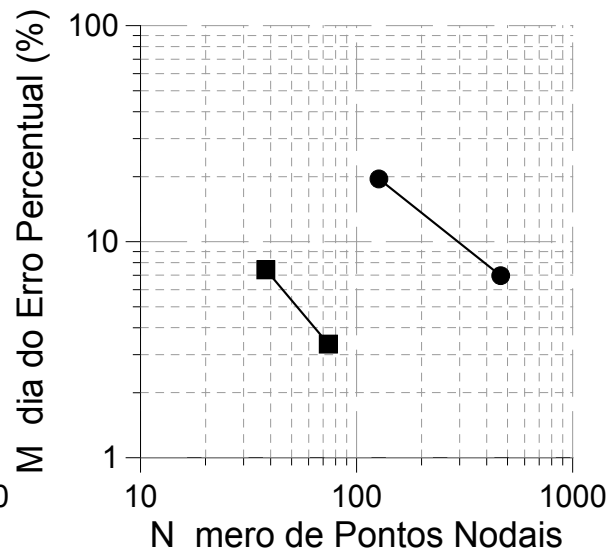
aplicação da sentença integral neste ponto promove um tipo de média dos resultados obtidos no contorno.



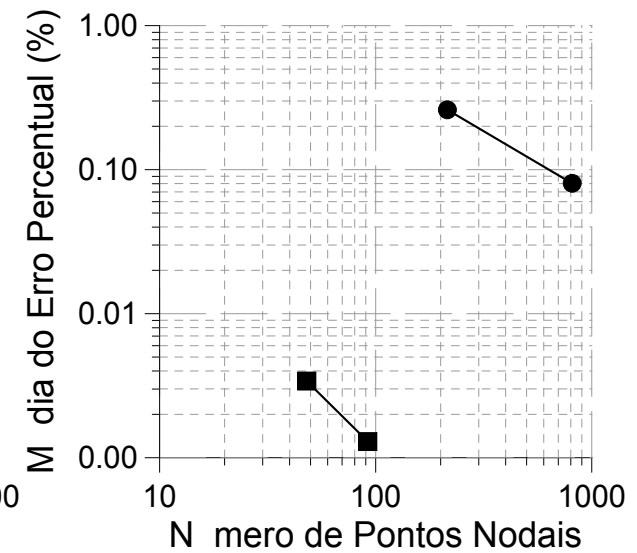
Representação física do problema



(a)



(b)



(c)

■ Método dos Elementos de Contorno ● Método dos Elementos Finitos

Figura III.6.4-9 - Média do erro percentual, referente às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno, para:
 (a) Potencial, pontos nodais sobre o contorno
 (b) Derivada do Potencial (direção normal), pontos nodais sobre o contorno
 (c) Derivada do Potencial (direção radial), pontos nodais no interior do domínio.

III.6.5 - 5ª ANÁLISE

Neste caso aproveita-se a simetria existente, modelando-se, assim, apenas $\frac{1}{4}$ do domínio físico real do problema. Desta forma, de acordo com a figura III.6.5-1, representa-se o domínio físico utilizado, juntamente com as dimensões, condições de contorno adotadas para esta análise e o sistema de coordenadas cartesianas. Destaca-se que o sistema de coordenadas polares, utilizado quando da dedução da solução analítica deste caso, possui a mesma origem que o sistema cartesiano.

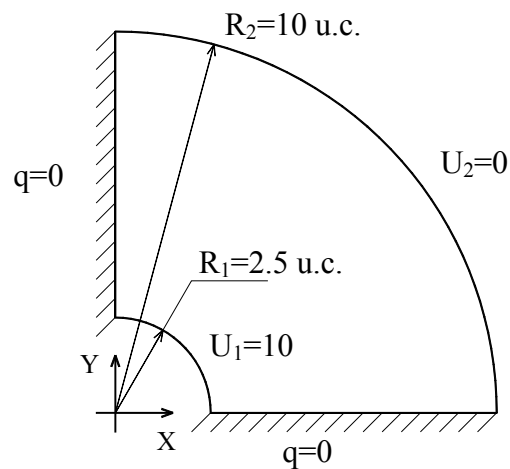


Figura III.6.5-1- Representação do domínio físico e condições de contorno

As condições de contorno indicadas na figura III.6.5-1, considerando-se um sistema de coordenadas polares possuindo a mesma origem que o sistema de coordenadas cartesianas indicado, podem ser expressas matematicamente através das seguintes expressões:

$$u = \bar{U}_1 = +10 \quad \text{p/ } r = 2.5; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$u = \bar{U}_2 = 0 \quad \text{p/ } r = 10; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p/ } \theta = 0; 2.5 \leq r \leq 10$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{p/ } \theta = \pi/2; 2.5 \leq r \leq 10$$

Eq. III.6.5-1

Fisicamente este caso, interpretado através da Transferência de Calor, representa o problema de um tubo infinitamente longo sujeito às temperaturas U_1 e U_2 , respectivamente sobre sua parede interna ($R_1 = 2.5$ u.c.) e externa ($R_2 = 10$ u.c.), onde

objetiva-se encontrar a distribuição de temperatura presente, variando ao longo da espessura da tubulação.

Objetivo

Com esta análise, pretende-se comparar os resultados numéricos apresentados pelos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, utilizando-se, em ambos, de elementos isoparamétricos quadráticos, para discretizações com diferentes graus de refinamento, a fim de avaliar-se as taxas de convergências apresentadas por estes métodos numéricos [11].

Solução Analítica

A solução analítica deste caso é dada em termos de um sistema de coordenadas polares localizado no centro do domínio físico real do problema, sendo expressa pela seguinte equação [2, 6, 9]:

$$u(r) = U_1 + \frac{U_1 - U_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \quad \text{Eq. III.6.5-1}$$

sendo U_1 , R_1 e U_2 , R_2 respectivamente as temperaturas e os raios da tubulação associados ao diâmetro interno e externo.

Discretizações Utilizadas

Segundo os procedimentos adotados para os casos onde são efetuadas comparações entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, a seguir encontram-se representadas na figura III.6.5-2 as discretizações empregadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se os pontos nodais no interior do domínio físico utilizados para a comparação das respostas numéricas.

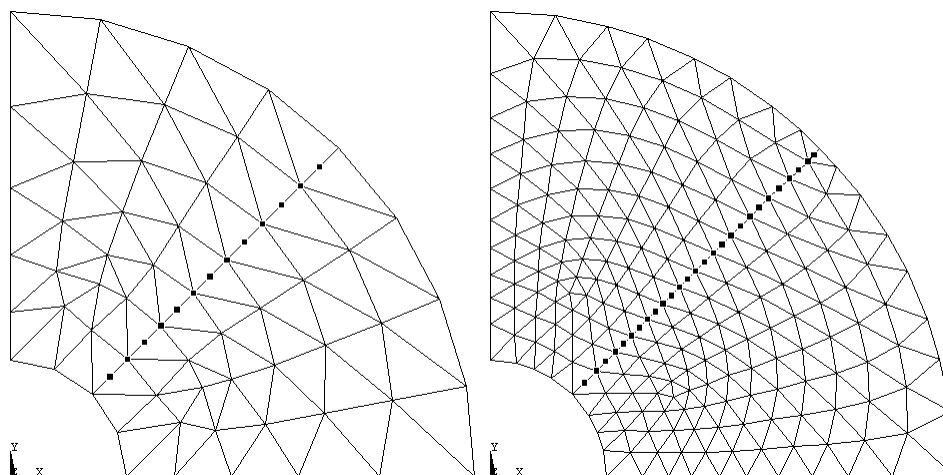


Figura III.6.5-2- Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se pontos no interior do domínio empregados para a comparação dos resultados numéricos

Na tabela III.6.5-1, encontram-se indicados os números de pontos nodais e o número de elementos resultantes do processo de discretização do domínio físico, utilizados nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

Tabela III.6.5-1 - Indicação do número de pontos nodais e elementos utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno

	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos
malha 1	215	96	48	22
malha2	813	384	92	44

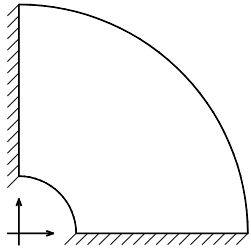
Resultados Numéricos

A seguir, apresentam-se, na figura III.6.5-3, os gráficos contendo a média do erro percentual para as soluções numéricas em termos do potencial e sua derivada, segundo as posições relativas dos pontos nodais sobre o domínio físico do problema, versus o número total de pontos nodais utilizados nas modelagens.

De acordo com os resultados numéricos apresentados, pode-se tecer os seguintes comentários a respeito do comportamento das respostas numéricas:

Comparando-se os gráficos para a média do erro percentual para o potencial em pontos nodais sobre o contorno e pontos no interior do domínio físico do problema, figura III.6.5-3 (a) e (b), respectivamente, observa-se um pequena melhoria na qualidade dos resultados apresentados pelo Método dos Elementos de Contorno, provavelmente devido ao fato de que já na discretização mais grosseira, para os pontos nodais sobre o contorno, a média do erro percentual é extremamente baixa, em torno de 0.004 %; assim, ao aplicar-se novamente a sentença integral do método para o cálculo do potencial no interior do domínio físico o ganho de precisão, neste caso, é irrelevante; e,

Os resultados apresentados pelo Método dos Elementos de Contorno mostraram-se bastante superiores ao Método dos Elementos Finitos, principalmente, como já era esperado, no cálculo dos valores da derivada do potencial, que no Método dos Elementos Finitos apresentam uma qualidade inferior aos valores obtidos para o potencial.



Representação do problema físico

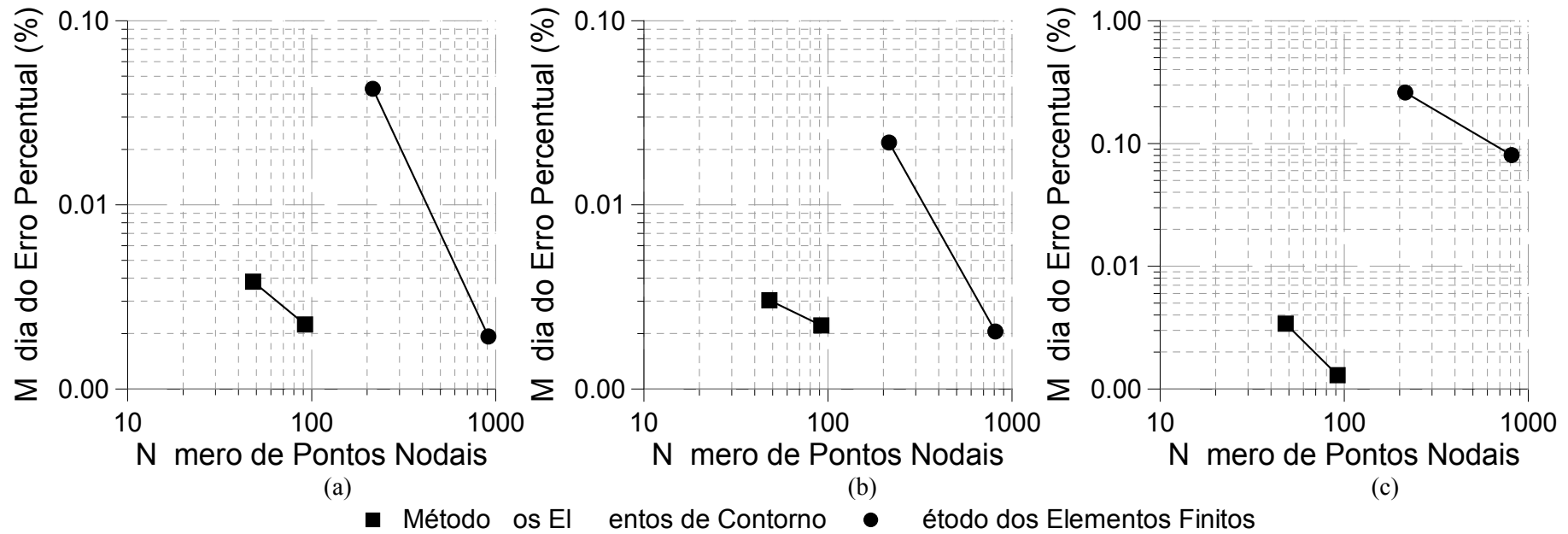


Figura III.6.5-3 - Média do erro percentual, referente às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de contorno, para

- (a) Potencial, pontos nodais sobre o contorno;
- (b) Potencial, pontos nodais no interior do domínio
- (c) Derivada do Potencial (direção radial), pontos nodais no interior do domínio.

III.6-6 - 6ª ANÁLISE

Nesta análise o domínio físico apresenta uma geometria circular, sendo que, embora este problema possua simetria em relação a um dos eixos coordenados, para sua modelagem tal característica não é utilizada. Assim, na figura III.6.6-1 encontram-se representadas a geometria e as condições de contorno impostas para esta análise.

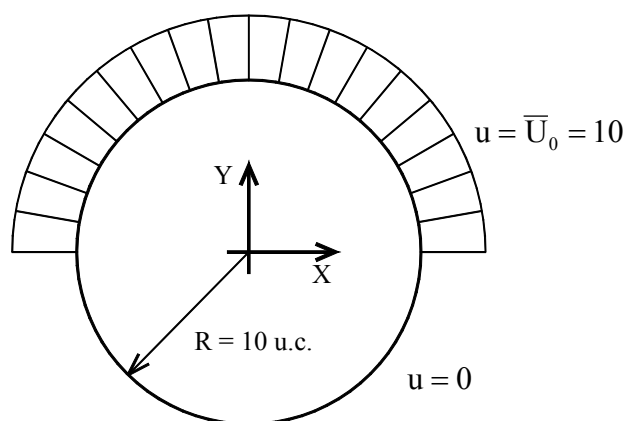


Figura III.6.6-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno

A seguir apresentam-se expressões matemáticas representando as condições de contorno utilizadas nesta análise, indicadas de acordo com a figura III.6.6-1. Destaca-se que o sistema de coordenadas polares, utilizado nas expressões matemáticas das condições de contorno e quando da dedução da solução analítica deste caso, possui a mesma origem que o sistema de coordenadas cartesiano.

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{U}_0 = +10 & p/ \quad r = 10; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\
 u &= 0 & p/ \quad r = 10; \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{Eq. III.6.6-1}$$

Um problema físico apresentando tais geometria e condições de contorno pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo o caso onde um cilindro infinitamente longo encontra-se submetido a uma distribuição de temperatura ao longo de sua superfície externa, como sendo dada, de acordo com a figura III.6.6-1.

Ressalta-se que de acordo com os valores prescritos para as condições de contorno essenciais, ao longo da superfície externa do cilindro, tem-se uma descontinuidade no potencial prescrito. Esta característica não possui um significado físico no modelo

matemático adotado, pois, neste caso, ter-se-ia um mesmo ponto material com diferentes valores de temperatura, por exemplo.

Objetivo

Neste caso, objetiva-se a comparação entre as respostas numéricas, em termos do potencial e sua derivada normal, obtidas numericamente através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno para determinados pontos no interior e sobre o contorno do domínio físico do problema. São apresentadas tais comparações para duas discretizações com diferentes graus de refinamento.

Nas modelagens realizadas com os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno são utilizados elementos isoparamétricos possuindo funções de interpolação quadráticas, a fim de tentar proporcionar uma comparação mais igualitária, mas, embora os elementos apresentem funções de interpolação de mesma ordem, não se pode afirmar de forma alguma que exista uma equivalência entre eles, pois tais métodos possuem formulações bastante distintas.

Solução Analítica

A solução analítica deste caso é obtida equacionando-se o problema em termos de um sistema de coordenadas polares, posicionado no centro do domínio físico. Desta forma, a solução analítica para o potencial pode ser expressa através de uma Série de Fourier, de acordo com a seguinte equação [2]:

$$\frac{u(r, \theta)}{\bar{U}_0} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \pi} \left(\frac{r}{R} \right)^n \text{sen } n\theta \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \text{Eq. III.6.6-2}$$

sendo \bar{U}_0 a temperatura não nula prescrita e R o raio externo do cilindro.

Discretizações Utilizadas:

Segundo os procedimentos adotados para os casos onde são efetuadas comparações entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, a seguir encontram-se representadas na figura III.6.6-2 as discretizações empregadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos. Observe que o ponto de descontinuidade do potencial encontra-se sobre os extremos de dois elementos adjacentes.

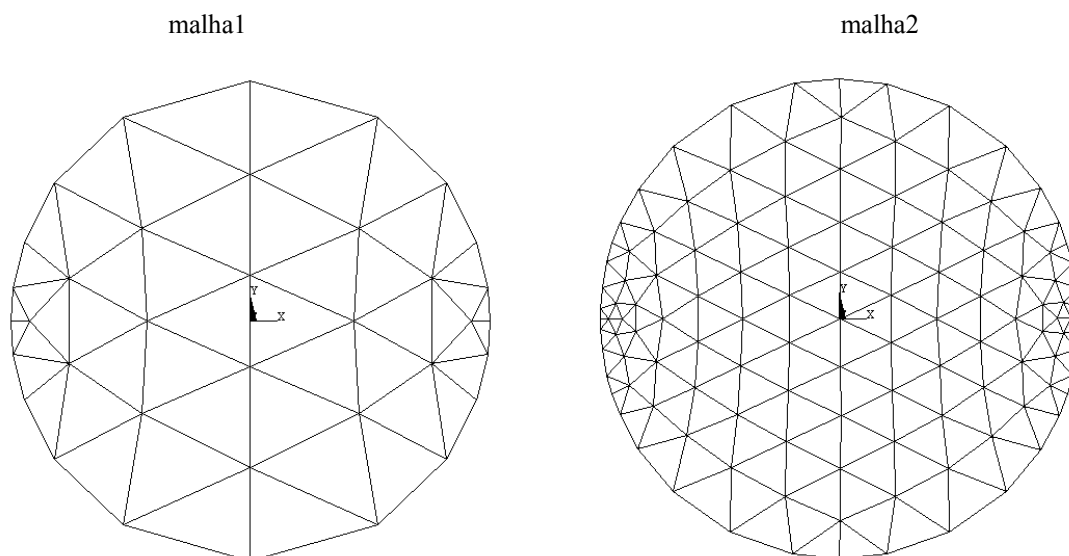


Figura III.6.6-2 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos

Desta forma, para as discretizações a serem utilizadas pelo Método dos Elementos de Contorno, aproveitam-se os pontos nodais situados sobre o contorno do domínio físico das discretizações feitas para o Método dos Elementos Finitos, a fim de definir-se a posição dos elementos de contorno. Assim, as discretizações para os diferentes métodos numéricos possuem o mesmo grau de refinamento ao longo do contorno da geometria a ser modelada.

Na tabela III.6.6-1, encontram-se indicados os números de pontos nodais e o número de elementos resultantes do processo de discretização do domínio físico para ambos os métodos numéricos empregados.

Tabela III.6.6-1 - Indicação do número de pontos nodais e elementos utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Métodos dos Elementos de Contorno

	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos
malha 1	121	50	40	20
malha2	441	200	80	40

Em ambos os métodos numéricos empregados nesta análise, para a prescrição da condição de contorno para os pontos de descontinuidade do potencial, prescreve-se o valor médio dos potenciais prescritos ao longo da superfície externa do cilindro. Assim sendo, nestes pontos, prescreve-se o valor do potencial com sendo igual 5.

Destaca-se que nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno poder-se-ia adotar o recurso dos denominados elementos de contorno com ponto de colocação não nodal como uma alternativa para a prescrição desta descontinuidade da condição de contorno. Contudo, optou-se por modelar tais pontos de forma semelhante em ambos os métodos numéricos, para não se introduzirem diferenças na forma da prescrição das condições de contorno.

Resultados Numéricos

Apresentam-se a seguir nas tabelas III.6.6-2 e III.6.6-3 respectivamente para as duas discretizações empregadas, os resultados numéricos obtidos para o potencial, através da utilização dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, assim como seu valor analítico e o erro percentual calculado para um conjunto de pontos no interior do domínio físico do problema, posicionados nas proximidades do eixo Y.

Segundo os resultados apresentados, observa-se, de maneira geral, uma superioridade na precisão dos valores obtidos através do Método dos Elementos de Contorno. Desta forma, pode-se concluir que este método apresentou um melhor desempenho também nesta análise, ainda mais levando-se em conta a grande diferença existente entre os números de pontos nodais empregados pelos diferentes métodos numéricos para as discretizações apresentando um mesmo grau de refinamento ao longo do contorno do domínio físico, (vide tabela III.6.6-1).

Tabela III.6.6-2 - Resultado apresentado para o potencial, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, referentes às modelagens realizadas junto à primeira discretização - Malha 1.

Posição sobre o eixo:		Solução Analítica	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
X	Y	Potencial	Potencial	erro (%)	Potencial	erro (%)
1.43E-05	-8.055	0.6831729	0.67808	0.74547789	0.6832815	0.01589345
2.85E-05	-6.11	1.50834109	1.5139	0.36854486	1.508532	0.01265558
1.65E-04	-4.0171	2.56824205	2.5682	0.00163736	2.56848	0.00926418
3.01E-04	-1.9241	3.78986892	3.7912	0.03512201	3.790037	0.00443474
1.11E-15	2.22E-16	5	5	0	5	0
-3.01E-04	1.9241	6.21013108	6.2088	0.02143398	6.209963	0.00270659
-1.65E-04	4.0171	7.43175795	7.4318	0.00056583	7.43152	0.00320188
-2.85E-05	6.11	8.49165891	8.4861	0.06546322	8.491468	0.0022483
-1.43E-05	8.055	9.3168271	9.3219	0.05444883	9.316718	0.00117098

Tabela III.6.6-3 - Resultado apresentado para o potencial, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, referentes às modelagens realizadas junto à primeira discretização - Malha 2.

Posição sobre o eixo:		Solução Analítica	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
X	Y	Potencial	Potencial	erro (%)	Potencial	erro (%)
0.021884	-9.2093	0.26189161	0.26137	0.19917116	0.2618625	0.0111175
0.043767	-8.4186	0.54522211	0.54498	0.04440563	0.5451218	0.01840127
0.040337	-7.3345	0.97128073	0.9707	0.05979004	0.9710697	0.02173162
0.036908	-6.2505	1.44358939	1.4428	0.05468253	1.443257	0.02303063
0.043666	-5.1513	1.97169937	1.9706	0.05575758	1.971238	0.02340518
0.050425	-4.0522	2.54897655	2.5477	0.05008081	2.548386	0.02317341
0.031594	-3.0143	3.13616363	3.1346	0.04985799	3.135461	0.02240908
0.012763	-1.9763	3.75785311	3.7561	0.04665199	3.757056	0.02121643
0.025855	-0.99003	4.37177039	4.3699	0.04278346	4.370904	0.01982186
0.038946	-0.0037127	4.99763639	4.9957	0.03874604	4.996732	0.01809955
0.021507	0.98406	5.62446437	5.6226	0.03314745	5.623559	0.01609953
0.0040674	1.9718	6.23938784	6.2375	0.03025685	6.238518	0.01394309
0.021849	3.0106	6.86166845	6.86	0.02431547	6.860865	0.01171058
0.039632	4.0493	7.44941898	7.4478	0.02173295	7.44871	0.00951814
0.033585	5.149	8.02712741	8.0259	0.01529071	8.026541	0.00730583
0.027538	6.2488	8.55561991	8.5546	0.01192094	8.555164	0.00532907
0.040551	7.3354	9.02909214	9.0285	0.00655815	9.028765	0.00362333
0.053563	8.4221	9.45609915	9.4557	0.00422104	9.455898	0.0021272
0.026781	9.2111	9.73873247	9.7389	0.00172027	9.738621	0.00114459

III.6-7 - 7ª ANÁLISE

A interpretação física deste caso é feita, através da Mecânica dos Fluidos, como sendo um problema englobado pela Teoria do Escoamento Potencial, onde, através da utilização de uma função potencial escalar, simula-se o comportamento de um fluido ideal, tendo uma velocidade uniforme no infinito e que, no seu interior, encontra-se imerso um cilindro infinitamente longo girando em torno de seu próprio eixo, conforme pode ser observado na figura III.6.7-1.

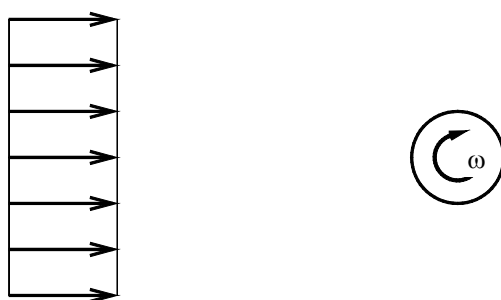


Figura III.6.7-1 - Representação física do problema.

A Teoria do Escoamento Potencial considera que os elementos do fluido em movimento no campo do escoamento não sofre rotações, isto é, o escoamento é dito irrotacional. Para garantir-se que tal condição seja válida, o fluido deve apresentar viscosidade nula, e assim é denominado de fluido ideal.

Um ponto importante a ser destacado consiste no fato de que, a priori, a rotação do cilindro não deveria influenciar o escoamento em torno do cilindro, visto que o fluido é considerado como sendo ideal, isto é, possui viscosidade nula. Desta forma, o cilindro não conseguiria afetar o perfil de velocidades do escoamento ao seu redor. Mas ressalta-se que a Teoria de Escoamentos Potenciais é apenas um recurso matemático para a representação física aproximada de casos reais.

Para a formulação matemática dos problemas envolvendo a Teoria do Escoamento Potencial, governados pela Equação de Laplace (equação I.2-9), definem-se duas funções potenciais escalares: função potencial de velocidade Φ e função linha de corrente ψ . Sendo que as derivadas direcionais de tais funções possuem um significado físico de velocidades [12, 13].

A função linha de corrente é o instrumento matemático utilizado para descrever qualquer conformação típica do escoamento, dando noções das formas das linhas de corrente, que são, em determinado instante, tangentes ao sentido do fluxo em todos os pontos de um campo de escoamento [14].

São definidas as velocidades do fluido, em termos das derivadas direcionais da função linha de corrente, através das seguintes expressões:

$$V_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad V_y \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \text{Eq. III.6.7-1}$$

Destaca-se que qualquer linha de corrente fechada pode ser substituída por um corpo sólido, contendo a mesma configuração geométrica desta linha, imerso no fluido em movimento sem ocasionar nenhuma alteração no escoamento.

Objetivo

Os objetivos pretendidos com esta análise são a comparação dos resultados numéricos, obtidos através da aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, frente à solução analítica, assim como a visualização do perfil de velocidade em determinados pontos selecionados no interior do domínio físico do problema [11, 15].

Solução Analítica

Devido ao fato das equações serem lineares, a solução analítica de problemas envolvendo a Teoria do Escoamento Potencial é feita através da superposição de escoamentos planos elementares, a fim de compor, desta forma, a solução analítica do problema em questão.

Deste modo, a solução analítica para o escoamento potencial existente em torno de um cilindro possuindo uma rotação sobre seu eixo, tendo o fluido uma velocidade constante no infinito, é dada pela superposição dos seguintes casos elementares: Dipólo, Vórtex (sentido anti-horário) e um escoamento uniforme, e utilizando-se a função linha de corrente ψ , é expressa de acordo com a equação, dada a seguir em coordenadas polares:[14]

$$u(r; \theta) = \psi(r; \theta) = U \cdot r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{k}{2\pi} \ln(r) \qquad \text{Eq. III.6.7-2}$$

sendo a o raio do cilindro, k a potência do vórtex e U a velocidade do escoamento uniforme.

Tanto nas análises numéricas realizadas, para a prescrição das condições de contorno, como para a obtenção da solução analítica, adotaram-se os seguintes valores para os parâmetros anteriormente citados, que definem, tanto a geometria, quanto o escoamento em torno do cilindro:

Velocidade do fluido no infinito na direção X: $U = 10 \text{ u.c./s}$;

Raio do cilindro: $a = 10 \text{ u.c.}$;

Potência do Vórtex: $k = 682.2$.

Discretização Utilizada

Para a modelagem deste caso não é possível aproveitar uma das características importantes do Método dos Elementos de Contorno, que consiste da análise de problemas possuindo um domínio físico infinito, discretizando-se apenas os contornos internos, pois necessita-se de um contorno externo ao cilindro para a prescrição das condições de contorno. Neste caso, prescreve-se condições de contorno essenciais, onde seus valores definidos de acordo com equação II.6.7-3, tendo sido, anteriormente, definidos os parâmetros U , a e k .

Desta forma, na figura III.6.7-2 encontra-se representada a discretização empregada para a modelagem via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se determinados pontos no interior do domínio que são utilizados para a comparação dos resultados numéricos obtidos. Sendo que o cilindro, de raio 10 u.c., encontra-se centrado em um quadrado de lado 100 u.c., estando o sistema de coordenadas posicionado de acordo com a figura.

Para a modelagem via Método dos Elementos de Contorno adota-se a mesma forma de confecção das discretizações das análises anteriores, onde comparavam-se os desempenhos dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno. Utilizam-se os pontos nodais sobre o contorno para a definição dos elementos de contorno.

Assim, na tabela III.6.7-1 apresentam-se os números de pontos nodais e o número de elementos utilizados nas modelagens via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

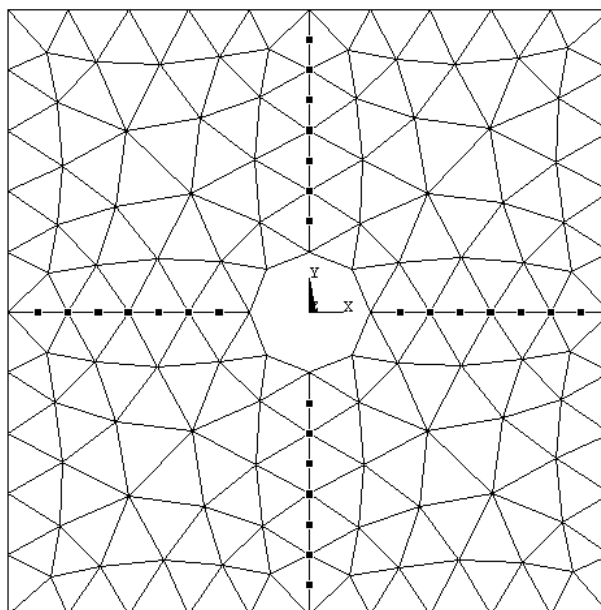


Figura III.6.7-2 - Representação da discretização utilizada na modelagem realizada via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se os pontos no interior do domínio empregados para a comparação dos resultados numéricos

Tabela III.6.7-1 - Indicação do número de pontos nodais e elementos utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno

	Método dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno	
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos
malha 1	496	224	100	48

A prescrição das condições de contorno nos pontos nodais sobre o contorno, em ambos os métodos numéricos empregados, são realizadas de acordo com os valores obtidos através da aplicação da solução analítica para estes determinados pontos nodais. Desta forma, são prescritas condições de contorno essenciais ao longo de todo o contorno do domínio físico utilizado para as modelagens.

Resultados Numéricos

A seguir, nas tabelas III.6.7-2, III.6.7-3, III.6.7-4 e III.6.7-5 apresentam-se os resultados numéricos para o potencial e suas derivadas direcionais no conjunto de pontos situados no interior do domínio físico, destacados na figura III.6.7-2, referentes as análises realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

Destaca-se que nestas tabelas os resultados apresentados para o Método dos Elementos Finitos, obtidos através da utilização do software comercial ANSYS, versão 5.4, para os pontos nodais situados no meio das arestas dos elementos, não são apresentados os valores das derivadas direcionais, visto que tal programa não possui uma opção para a saída destas incógnitas em uma lista de dados nestes pontos.

Tabela III.6.7-2 - Resultados apresentados para o potencial e suas derivadas direcionais, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno referentes aos pontos internos posicionados no sentido negativo do eixo X.

Posição		Método dos Elementos Finitos			Método dos Elementos de Contorno			Solução Analítica		
x	y	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$
-45	0	413.29	-	-	413.3045	-2.4124	9.5061	413.3031	2.4127	9.5062
-40	0	400.51	2.7095	-9.3731	400.5185	-2.7139	9.3751	400.5150	2.7143	9.3750
-35	0	385.99	-	-	386.0230	-3.1016	9.1839	386.0170	3.1021	9.1837
-30	0	369.24	3.6115	-8.874	369.2891	-3.6185	8.8893	369.2803	3.6191	8.8889
-25	0	349.41	-	-	349.4970	-4.3422	8.4006	349.4850	4.3429	8.4000
-20	0	325.15	5.381	-7.4152	325.2734	-5.4278	7.5011	325.2575	5.4287	7.5000
-15	0	293.83	-	-	294.0439	-7.2369	5.5578	294.0228	7.2382	5.5556

Tabela III.6.7-3 - Resultados apresentados para o potencial e suas derivadas direcionais, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno referentes aos pontos internos posicionados no sentido positivo do eixo X.

Posição		Método dos Elementos Finitos			Método dos Elementos de Contorno			Solução Analítica		
x	y	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$
45	0	413.29	-	-	413.3045	2.4124	9.5061	413.3031	-2.4127	9.5062
40	0	400.5	-2.7101	-9.3734	400.5185	2.7139	9.3751	400.5150	-2.7143	9.3750
35	0	385.99	-	-	386.0230	3.1016	9.1839	386.0170	-3.1021	9.1837
30	0	369.24	-3.6123	-8.8747	369.2891	3.6185	8.8893	369.2803	-3.6191	8.8889
25	0	349.41	-	-	349.4970	4.3422	8.4006	349.4850	-4.3429	8.4000
20	0	325.14	-5.384	-7.4265	325.2734	5.4278	7.5011	325.2575	-5.4287	7.5000
15	0	293.81	-	-	294.0439	7.2369	5.5578	294.0228	-7.2382	5.5556

Tabela III.6.7-4 - Resultados apresentados para o potencial e suas derivadas direcionais, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno referentes aos pontos internos posicionados no sentido negativo do eixo Y.

Posição		Método dos Elementos Finitos			Método dos Elementos de Contorno			Solução Analítica		
x	y	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$
0	-15	210.95	-	-	210.6773	0.0000	7.2044	210.6895	0.0000	7.2062
0	-20	175.32	0.0017383	-7.0035	175.2516	0.0000	7.0704	175.2575	0.0000	7.0713
0	-25	139.57	-	-	139.4826	0.0000	7.2565	139.4850	0.0000	7.2571
0	-30	102.68	-4.832E-05	-7.4921	102.6135	0.0000	7.4916	102.6136	0.0000	7.4920
0	-35	64.64	-	-	64.5901	0.0000	7.7139	64.5884	0.0000	7.7142
0	-40	25.55	0.00001693	-7.9156	25.5181	0.0000	7.9104	25.5150	0.0000	7.9107
0	-45	-14.459	-	-	-14.4704	0.0000	8.0809	-14.4746	0.0000	8.0811

Tabela III.6.7-5 - Resultados apresentados para o potencial e suas derivadas direcionais, obtidos nas modelagens realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno referentes aos pontos internos posicionados no sentido positivo do eixo Y.

Posição		Método dos Elementos Finitos			Método dos Elementos de Contorno			Solução Analítica		
x	y	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$	Potencial (ψ)	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial x}$	Derivada $\frac{\partial\psi}{\partial y}$
0	15	376.7	0	0	377.4105	0.0000	21.6783	377.3561	0.0000	21.6827
0	20	474.97	0.013081	-17.768	475.2951	0.0000	17.9261	475.2575	0.0000	17.9287
0	25	559.25	0	0	559.5114	0.0000	15.9410	559.4850	0.0000	15.9429
0	30	635.81	0.00059664	-14.716	635.9646	0.0000	14.7287	635.9470	0.0000	14.7302
0	35	707.34	0	0	707.4559	0.0000	13.9171	707.4456	0.0000	13.9184
0	40	775.46	0.00031128	-13.335	775.5190	0.0000	13.3381	775.5150	0.0000	13.3393
0	45	841.05	0	0	841.0794	0.0000	12.9057	841.0809	0.0000	12.9066

De acordo com os resultados apresentados, observa-se uma excelente concordância entre as soluções numéricas e a solução analítica, tanto para o potencial quanto para suas derivadas direcionais, sendo que os valores obtidos através do Método dos Elementos de Contorno apresentam uma melhor acurácia e pode-se considerá-los como tendo um melhor desempenho, ainda mais levando-se em conta a grande diferença existente entre os números de pontos nodais empregados para as modelagens realizadas através dos métodos numéricos utilizados neste caso.

A seguir, com o intuito de proporcionar uma melhor visualização do perfil de velocidades existentes em determinados pontos próximos ao cilindro em movimento, apresenta-se na figura III.6.7-3 a representação vetorial do campo de velocidade para determinados pontos situados sobre os eixos coordenados. Esta figura é confeccionada através dos resultados numéricos obtidos com a utilização do Método dos Elementos de Contorno, considerando-se tais pontos, destacados na figura III.6.7-2, como sendo pontos internos.

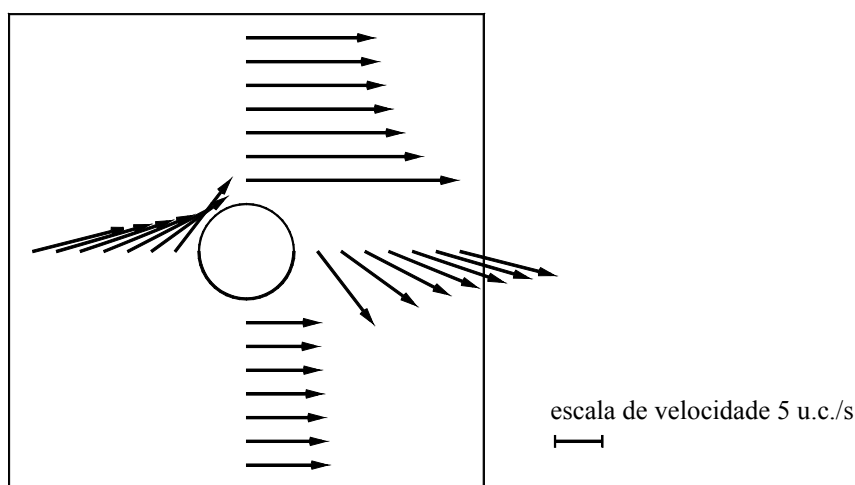


Figura III.6.7-3 - Representação vetorial do campo de velocidades do escoamento para pontos situados sobre os eixos coordenados.

Através da figura III.6.7-3, pode-se perceber claramente o efeito da rotação do cilindro sobre o escoamento uniforme em que se encontra imerso. Rigorosamente, de acordo com a solução analítica, no lugar do cilindro deve-se considerar uma fonte rotativa (um vórtex), mas como as linhas de corrente formadas encontram-se fechadas, esta fonte é substituída pelo cilindro girando, isto é, por um corpo sólido imerso no fluido, para então ter-se a representação física deste caso.

Referências Bibliográficas

- [1] BREBBIA, C.A. e WALKER, S., “*Boundary Element Techniques in Engineering*”, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [2] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [3] BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., “Steady and Unsteady Potential Problems Using the Boundary Element Method”, *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, Chapter 1, Prineridge Press, 1980.
- [4] KYTHE, P.K., “An Introduction to boundary Element Methods”, CRC Press, London, 1995.
- [5] AZEVEDO, J.P.S., “Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1985.
- [6] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [7] MANSUR, W.J., “A Time-Stepping Scheme to Solve Transient Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method”, *Ph.D. Thesis*, University of Southampton, Southampton, U.K., 1983.
- [8] BULCÃO, A., LOEFFLER, C.F., “Influência das Funções de Interpolação no Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Potencial Escalar”, *V Congresso Brasileiro de Estudantes de Engenharia Mecânica*, Anais em CD-ROM, Vitória, 1998.
- [9] FIGUEIREDO, T.G.B., “*A New Boundary Element Formulation in Engineering*”, Lecture Notes in Engineering n. 68, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] HALBRITTER, A.L., TELLES, J.C.F., MANSUR, W.J., “Aplicação dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo”, *Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares*, pp. 707-724, Porto Alegre, 1978.
- [11] BULCÃO, A., LOEFFLER, C.F., “Comparação dos Métodos dos Elementos de Contorno e Elementos Finitos em Problemas de Potencial Escalar”, *III SIMMEC - Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, pp. 431-440, Ouro Preto - MG, 1998.
- [12] SHAMES, I.H., “*Mecânica dos Fluidos*”, vol. 2, Edgard Blücher, São Paulo, 1973.

- [13] STREETER, V. L., “*Mecânica dos Fluidos*”, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1977.
- [14] FOX, R.W. e MACDONALD, A.T., “*Introdução à Mecânica dos Fluidos*”, Guanabara S.A., Rio de Janeiro, 1988.
- [15] MASSARO, C.A.M., BULCÃO, A., LOEFFLER, C.F., “Simulação Computacional de Escoamentos Potenciais Através do Método dos Elementos de Contorno”, *V CREEM - Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica*, Anais em CD-ROM, Vitória - ES, 1998.

Capítulo IV

DUPLA RECIPROCIDADE

IV.1 - Introdução

Existem inúmeras classes de problemas, tanto na Teoria de Campo Escalar como na Elasticidade, em que, na formulação do Método dos Elementos de Contorno, quando aplicada à equação integral de governo do problema, não é possível transformar, somente utilizando-se dos procedimentos tradicionais, todas as integrais inicialmente de domínio em integrais envolvendo variáveis somente no contorno [1].

Os termos na equação diferencial de governo que resultam nestas integrais de domínio, na Teoria de Campo Escalar, estão associadas as denominadas “ações de domínio”, tal como quaisquer tipos de forças de corpo, efeitos de inércia ou outros que tipifiquem os casos dinâmicos e transientes.

Assim, com o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno surgiram diferentes propostas para resolver as dificuldades na formulação do método associadas as tais integrais de domínio [1], sendo as mais importantes descritas a seguir:

Integração Analítica das Integrais

Este procedimento, embora produza resultados bastante precisos, é aplicado somente a um número restrito de casos para os quais tais integrações analíticas tornam-se possíveis de serem calculadas.

Expansão por Série de Fourier

A Expansão por Série de Fourier não é uma técnica muito conveniente para ser aplicada na maioria dos casos, pois, embora o procedimento seja genérico, o cálculo dos coeficientes da expansão em série pode ser computacionalmente muito oneroso. Esta técnica foi aplicada com sucesso para alguns casos relativamente simples.

Técnica do Vetor de Galerkin

Esta aproximação usa uma solução fundamental de alta ordem e a Identidade de Green (Teorema da Divergência) para transformar certos tipos de integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Também, neste caso, a principal dificuldade resulta na aplicação deste procedimento aos casos que não sejam comparativamente simples.

Método da Múltipla Reciprocidade

Trata-se de uma extensão da Técnica do Vetor de Galerkin a qual utiliza várias soluções fundamentais de alta ordem, ao invés de apenas uma solução fundamental. Este procedimento foi usado com sucesso para solução de problemas dependentes do tempo, sendo que a principal desvantagem deste método reside na complexidade para sua aplicação em problemas não lineares.

Dupla Reciprocidade

A mais importante técnica para resolver os problemas de ação de domínio consiste na denominada “Dupla Reciprocidade” (Dual Reciprocity Technique) criada por Nardini e Brebbia [2], em 1982, com a finalidade de resolver problemas dinâmicos como alternativa à formulação com soluções fundamentais dependentes do tempo apresentada por Mansur (1983) [3], e em diversos outros artigos anteriores a esta data.

De maneira sucinta a técnica consiste na substituição da ação de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, capazes de serem operacionalizadas e, de transformar suas integrais em integrais de contorno, também através da aplicação do Teorema da Divergência. Da semelhança entre esse procedimento e o modo tradicional de obtenção da forma integral inversa, resulta a denominação Dupla Reciprocidade.

Em 1988, Loeffler e Mansur estenderam o uso da Dupla Reciprocidade para solução de ações de domínio gerais, substituindo com eficiência a integração por células e mesmo o Tensor de Galerkin [4].

Exigindo menor complexidade da solução fundamental, a Dupla Reciprocidade pode ser considerada, assim como outros recursos, como componente de um grupo de formulações menos ortodoxas que vem permitindo ao Método dos Elementos de Contorno ampliar seu campo de atuação.

IV.2 - Formulação Matemática

O desenvolvimento matemático da Dupla Reciprocidade, aplicado as equações de Poisson, Helmholtz e aos casos transientes - respectivamente as equações I.2-6, I.2-7, I.2-5 e I.2-4 - inicia-se após o estabelecimento da forma integral forte associada as equações diferenciais de governo.

Analisando-se as expressões integrais, observa-se que, em todos os casos aqui abordados, pode-se separar no lado esquerdo de cada uma das equações integrais um termo que refere-se à Equação de Laplace. Assim, tais sentenças integrais podem ser escritas como sendo:

$$\text{Eq. De Poisson} \quad \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{K} \int_{\Omega} p u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-1}$$

$$\text{Eq. De Helmholtz} \quad \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{\lambda}{K} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-2}$$

$$\text{Eq. De Difusão} \quad \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{\lambda}{K} \int_{\Omega} \dot{u} u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-3}$$

$$\text{Eq. Da Onda} \quad \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{\lambda}{K} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-4}$$

De maneira geral, as expressões integrais das equações IV.2-1, IV.2-2, IV.2-3 e IV.2-4 possuem a mesma forma geral, dada a seguir:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{\lambda}{K} \int_{\Omega} \Phi u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-5}$$

onde a função Φ varia conforme o caso analisado.

O lado esquerdo da equação IV.2-5, que refere-se à Equação de Laplace, é operacionalizado de maneira idêntica ao apresentado no Capítulo III. Resta apenas, para a transformação da expressão V.2-5 em uma equação integral envolvendo variáveis no contorno, desenvolver-se o lado direito da referida equação. Isso pode ser feito aproximando-se a função Φ por uma combinação linear de funções, da seguinte forma:

$$\Phi(X, t) \cong \alpha^j(t)F^j(X) \quad \text{Eq. IV.2-6}$$

Este procedimento assemelha-se a uma separação de variáveis. Os coeficientes α^j são inicialmente desconhecidos e as funções F^j são denominadas de funções de aproximação.

Substituindo-se a equação IV.2-6 na sentença integral do lado direito da equação IV.2-5, os coeficientes α^j podem ser retirados da integral, pois trata-se de uma integração envolvendo variáveis espaciais; deste modo, neste ponto, a integral de domínio pode ser escrita como sendo:

$$\int_{\Omega} \Phi u^* d\Omega \cong \alpha^j \int_{\Omega} F^j u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-7}$$

Admite-se a existência de funções $\psi^j(X)$ que sejam primitivas das funções $F^j(X)$, de tal forma que:

$$\psi_{,ii}^j = F^j \quad \text{Eq. IV.2-8}$$

Até o momento, nenhuma outra restrição é imposta às funções de aproximação F^j , a não ser que satisfaçam a equação IV.2-8. Na realidade, existem diferentes tipos de funções que obedecem tal relação. A questão de qual tipo de função de aproximação deva ser adotada será considerada na seção IV.4.

Introduzindo-se esta última expressão, equação IV.2-8, na equação IV.2-7, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \Phi u^* d\Omega \cong \alpha^j \int_{\Omega} \psi_{,ii}^j u^* d\Omega \quad \text{Eq. IV.2-9}$$

Observa-se que o integrando do lado direito da equação IV.2-9 assemelha-se a Equação de Laplace escrita em sua forma integral forte, assim o mesmo tratamento matemático apresentado no Capítulo IV pode ser aplicado à esta parcela da expressão.

Desta operação advém a denominação Técnica de Dupla Reciprocidade (Dual Reciprocity Technique), pois aplica-se à Segunda Identidade de Green ou Princípio da Reciprocidade em ambos os lados da equação IV.2.5. A primeira aplicação refere-se aos termos da Equação de Laplace e a segunda a transformação da integral de domínio.

Após a aplicação deste procedimento é possível escrever a integral de domínio, dada pelo lado esquerdo da equação IV.2-9, unicamente em termos de integrais envolvendo variáveis no contorno. Desta forma obtém-se:

$$\int_{\Omega} \Phi u^* d\Omega \cong -\alpha^j \left\{ C(\xi) \psi^j(\xi) + \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma \right\} \quad \text{Eq. IV.2-10}$$

onde:

$$\eta^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial n} = \psi^j_{,i} n_i \quad \text{Eq. IV.2-11}$$

Agrupando-se as expressões desenvolvidas para ambos os lados da equação IV.2-5, sendo o lado esquerdo referente a Equação de Laplace e o lado direito referente a integral de domínio, obtém-se a expressão integral do Método dos Elementos de Contorno aplicado às Equações de Poisson, Helmholtz e aos casos transientes, dada a seguir:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = \frac{\lambda}{K} \alpha^j \left(C(\xi)\psi^j + \int_{\Gamma} \psi^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma \right) \quad \text{Eq. IV.2-12}$$

O passo seguinte consiste na discretização de tal sentença integral, utilizando-se dos elementos de contorno, a fim de obter um sistema linear de equações algébricas.

IV.3 - Discretização da Equação Integral

É interessante destacar, neste momento, que, embora ψ^j e η^j sejam funções conhecidas, uma vez que a função de aproximação F^j é definida, não é necessário a aproximação de tais funções através do uso das funções de interpolação para cada elemento de contorno, utilizando-se dos pontos nodais funcionais, mas se esta aproximação for utilizada nas integrais do lado direito da equação IV.2-12, implica na obtenção das mesmas matrizes H e G definidas no Capítulo III.

A aproximação das funções ψ^j e η^j , através das funções de interpolação, não introduzem um erro apreciável nos resultados, possuindo a grande vantagem de poder aproveitar-se as integrações realizadas para o cálculo das matrizes H e G, aumentando-se assim enormemente a eficiência deste método [1, 5].

Após a introdução das funções de interpolação e da integração sobre cada elemento de contorno, a equação IV.2-12 pode ser escrita como sendo:

$$C(\xi)U_i(\xi) + \sum_{k=1}^N H_{ik} U_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} Q_k = \sum_{j=1}^N \alpha^j \left(C(\xi)\psi_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik}\psi_{ij} - \sum_{k=1}^N G_{ik}\eta_{ij} \right) \quad \text{Eq. IV.3-1}$$

IV.4 - Funções Auxiliares

A formulação com Dupla Reciprocidade emprega um conjunto de funções auxiliares F^j , ψ^j e η^j apenas como sendo um recurso para transformar-se as integrais de domínio em integrais de contorno. Mas, tão logo se apliquem os procedimentos matemáticos necessários, as equações integrais são reescritas em termos das variáveis originais.

Para a escolha da solução auxiliar F^j , e por conseqüência a definição das funções ψ^j e η^j , existem, basicamente, duas restrições:

- i) A função auxiliar F^j deve satisfazer a equação IV.22-8; e,

ii) A matriz F formada pelos coeficientes da função auxiliar F^j , em uma das etapas da formulação, necessita ser invertida, logo a função auxiliar F^j deve formar uma matriz não-singular.

Na escolha das funções auxiliares F^j , devem ser evitadas funções matemáticas com elevado grau de complexidade, que possuam singularidades e altos gradientes. Deve ser dada preferência a funções simples e flexíveis.

Diversos autores propuseram inúmeros tipos de funções auxiliares [1, 6, 7], que, de maneira geral, podem ser agrupados como pertencentes a uma das seguintes categoria de funções:

- 1 - Combinações de funções pertencentes aos elementos do triângulo de Pascal;
- 2 - Combinações de funções trigonométricas, e;
- 3 - Combinações de uma série de funções envolvendo a função distância euclidiana r (utilizada na solução fundamental).

Neste trabalho, adota-se uma função auxiliar F^j pertencente a terceira categoria de funções acima expostas. A seguir, tal classe de funções auxiliares é apresentada de maneira mais detalhada.

A série completa das funções auxiliares F^j envolvendo a função distância euclidiana r , pode ser representada pela seguinte expressão:

$$F = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad \text{Eq. IV.4-1}$$

Desta forma, as funções ψ^j e η^j são expressas por:

$$\psi^j = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \frac{r^4}{16} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \quad \text{Eq. IV.4-2}$$

$$\eta^j = \left(r_x \frac{\partial X}{\partial n} + r_y \frac{\partial Y}{\partial n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} + \frac{r^2}{4} + \dots + \frac{r^m}{(m+2)} \right) \quad \text{Eq. IV.4-3}$$

A princípio, qualquer conjunto de funções pode ser retirado da série de funções auxiliares envolvendo a distância euclidiana r , equação IV.4-1, para formar a função auxiliar F^j [6]. Esta escolha influencia, embora de modo discreto, o resultado obtido para tal aproximação. Em Loeffler & Bulcão (1997) [8] encontra-se uma comparação de resultados envolvendo este parâmetro na solução de um problema governado pela Equação de Poisson.

A maioria dos pesquisadores adotam, devido a simplicidade e a acurácia dos resultados alcançados, a função auxiliar F^j como sendo simplesmente igual à função distância euclidiana r . A seguir são tecidos alguns comentários a respeito deste caso e da função auxiliar F^j adotada neste trabalho. Maiores detalhes a respeito de outros tipos de funções auxiliares podem ser obtidos em [1, 2, 6, 7, 9, 10]

$$\text{Função Auxiliar } F^j(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)$$

Esta revela-se uma opção bastante adequada. Tal função auxiliar foi utilizada em inúmeros trabalhos, obtendo-se excelentes resultados, vide, por exemplo, Loeffler (1988) [4].

Neste caso a matriz F formada pela função auxiliar F^j contém coeficientes nulos ao longo de sua diagonal principal, sendo não-singular somente se não se utiliza o recurso do nó duplo ou elementos de contorno com pontos de colocação não nodal (vide Capítulo II), assim como no caso da aplicação de elementos de contorno constante para a discretização da geometria.

No presente trabalho, optou-se pela utilização dos elementos de contorno com pontos de colocação não nodal, para o tratamento de problemas envolvendo a descontinuidade da derivada do potencial em relação ao contorno, vide Seção II.5, desta forma, a função auxiliar $F^j = r$ necessita ser ligeiramente modificada, para:

$$\text{Função Auxiliar } F^j(\mathbf{X}) = r(\mathbf{X}; \mathbf{X}^j)(1 + \delta_{x_j})$$

Este é o artifício matemático utilizado para evitar-se a singularidade na matriz F , adotando-se elementos de contorno com ponto de colocação não nodal. Quando o ponto X^j coincide com o nó geométrico X , tem-se:

$$\delta_{x_j} = 1.0 \quad \text{Eq. IV.4-4}$$

em quaisquer outras situações:

$$\delta_{x_j} = 0.0 \quad \text{Eq. IV.4-5}$$

IV.5 - Os Coeficientes α^j

Neste item considera-se a obtenção dos coeficientes α^j presentes na equação IV.2-12. Tais coeficientes são provenientes da aproximação imposta para a grandeza presente no integrando da integral de domínio, representada por:

$$\Phi(X, t) \cong \alpha^j(t)F^j(X) \quad \text{Eq. IV.5-1}$$

Tal equação pode ser posta em uma forma matricial, mais adequada ao tratamento matemático a ser efetuado. Deste modo tem-se:

$$\{\Phi\} \cong \{\alpha\}[F] \quad \text{Eq. IV.5-2}$$

onde o vetor Φ representa os valores nos pontos nodais funcionais da grandeza referente a cada um dos tipos de equações de governo analisadas.

No caso da Equação de Poisson:

$$\{\Phi\} = \{p\} \quad \therefore \quad \{\alpha\} = [F]^{-1}\{p\} \quad \text{Eq. IV.5-3}$$

onde p representa o valor da “ação de domínio” atuando nos pontos nodais funcionais.

Para os demais casos, tem-se:

$$\{\Phi\} = \{u\} \quad \therefore \quad \{\alpha\} = [F]^{-1}\{u\} \quad (\text{Eq. De Helmholtz}) \quad \text{Eq. IV.5-4}$$

$$\{\Phi\} = \{\dot{u}\} \quad \therefore \quad \{\alpha\} = [F]^{-1}\{\dot{u}\} \quad (\text{Eq. De Difusão}) \quad \text{Eq. IV.5-5}$$

$$\{\Phi\} = \{\ddot{u}\} \quad \therefore \quad \{\alpha\} = [F]^{-1}\{\ddot{u}\} \quad (\text{Eq. Da Onda}) \quad \text{Eq. IV.5-6}$$

IV.6 - Tratamento dos Casos Transientes

Nos casos transientes, equações IV.5-5 e IV.5-6, as derivadas temporais presentes nas expressões matriciais do Método dos Elementos de Contorno são aproximadas através de um esquema do tipo Diferenças Finitas, onde, então, utiliza-se um esquema de avanço no tempo para a obtenção da solução. Maiores detalhes sobre a formulação destes casos podem ser encontrados nas seguintes referências: Loeffler (1988), Partridge et. all (1992) e Niku et. all (1996); [4, 1, 10].

IV.7 - Tratamento dos Casos Não-Lineares

Em um dos exemplos abordados neste trabalho, vide Capítulo V, o termo Φ da equação IV.2-5 apresenta uma não-linearidade física. Neste caso, o termo α também é obtido diretamente da equação IV.5-3.

Para a resolução dos casos não-lineares utiliza-se um esquema do tipo step-by-step [1], onde o termo α pode ser atualizado da seguinte forma:

- i) principia-se definindo-se um campo inicial $\{u_0\}$, a partir deste encontra-se $\{u_1\}$ como sendo a solução do sistema linear de equações algébricas resultantes, após a aplicação das condições de contorno.
- ii) Para a nova iteração calcula-se novamente o valor de $\{u_n\}$ a partir de $\{u_{n-1}\}$, e assim sucessivamente.
- iii) O critério de parada consiste em $|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon$, sendo ε a acurácia requerida.

Destaca-se que outros esquemas para a atualização do termo não-linear podem ser empregados, como por exemplo um esquema impondo uma espécie de relaxação do tipo: $u_n \equiv u_{n-1} + \beta u_n$, onde β é o fator de relaxação.

Referências Bibliográficas

- [1] PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. e WROBEL, L.C., “*The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- [2] NARDINI, D. ; BREBBIA, C.A. ; “A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements”, *Boundary Element Methods in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [3] MANSUR, W.J., “Time Stepping Scheme to Solve Transient Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method”, *Ph. D. Thesis*, University of Southampton, U.K., 1983.
- [4] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [5] YAMADA, T. ; WROBEL, L.C.; POWER, H.; “On the Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method”, *Engineering Analysis with Boundary Element*, n. 13, 291-298, 1994.
- [6] GOLBERG, M.A., CHEN, C.S.; BOWMAN, H.; POWER, H.; “Some Comments on the Use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method”, *Computational Mechanics*, n. 21, 141-148, 1998.
- [7] PARTRIDGE, P.W., ”Dual Reciprocity BEM: Comparison of Local and Global Approximation Functions for Convection, Diffusion and other Problems”, *XV CILAMCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, pp.747-590, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 1994.
- [8] LOEFFLER, C.F., BULCÃO, A., “Avaliação Computacional do Comportamento das Funções Auxiliares na Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade”, *XX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, pp. 106-107, Gramado - RS, 1997.
- [9] JUMARHON, B.; AMINI, S.; CHEN, K.; “On the Boundary Element Dual Reciprocity Method”, *Engineering Analysis with Boundary Element*, n. 20, 205-211, 1997.
- [10] NIKU, S.M.; ADEY, R.A.; “Computational Aspect of the Dual Reciprocity Methods for Dynamics”, *Engineering Analysis with Boundary Element*, n. 18, 43-61, 1996.

Capítulo V

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À EQUAÇÃO DE POISSON

V.1 - Introdução

Nesta seção do trabalho são apresentadas diversas aplicações numéricas governadas pela Equação de Poisson, equação I.2-8. Os casos aqui analisados possuem relativa simplicidade, pois além de outros fatores, objetiva-se a comparação das soluções numéricas obtidas via Método dos Elementos de Contorno com as respectivas respostas analíticas, ou então, com a aplicação de outros métodos numéricos.

Destaca-se que, apesar da aparente simplicidade apresentada pela Equação de Poisson, compreendida pela denominada Teoria de Campo Escalar (vide Capítulo I), devido às geometrias e condições de contorno a que os problemas encontram-se submetidos, na grande maioria dos casos, torna-se impossível a obtenção de soluções analíticas, a não ser para um limitado conjunto de casos particulares.

Existem, além dos casos afetos à Transferência de Calor em que a ação de domínio representa um fluxo de calor prescrito ao longo do domínio, duas outras interpretações físicas de relativa importância e que são utilizadas com frequência no decorrer desta seção do trabalho. São elas ligadas à Mecânica dos Sólidos, onde, no primeiro caso, têm-se os problemas relacionados à torção de barras com seções transversais constantes, onde utiliza-se o conceito da denominada função de tensão [1]; no segundo caso, os problemas encontram-se relacionados à deformação de membranas, em que a ação de domínio representa uma pressão prescrita na extensão do domínio físico.

Entre estas duas últimas formas de interpretação física dos problemas governados pela Equação de Poisson, existe um importante elo de ligação, muito utilizado como uma forma de determinar as regiões onde ocorrem as tensões máximas devido à torção: trata-se da denominada analogia da membrana.

Através da analogia da membrana sabe-se que, em uma membrana, as regiões que apresentam as máximas inclinações são as mesmas regiões que, em um problema de torção, apresentam as máximas tensões cisalhantes. Isto, pois a tensão, neste caso, é definida como sendo a derivada da função de tensão, ou seja, a sua curvatura da membrana.

Além de proporcionar uma melhor interpretação física dos problemas ligados à torção de barras com seções transversais constantes, esta analogia possui uma aplicação prática, pois através da construção de moldes geometricamente semelhantes à seção transversal da barra em questão e utilizando-se de uma película de sabão, isto é, de uma membrana, impõem-se uma determinada pressão para avaliar-se as regiões de tensões máximas em tal seção, onde os seguintes pontos podem ser demonstrados [1, 2]:

- A tensão de cisalhamento em qualquer ponto é proporcional à inclinação da membrana distendida no mesmo ponto;
- A direção de uma tensão de cisalhamento particular em um ponto é perpendicular à inclinação da membrana no mesmo ponto; e,
- O dobro do volume envolvido pela membrana é proporcional ao torque suportado pela seção transversal da barra.

Nas seções a seguir são apresentados diversos gráficos e tabelas contendo os resultados numéricos obtidos através da aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Desta forma, proporcionam-se os recursos necessários para avaliar seu desempenho perante esta classe de problemas. Com o propósito de comparar-se o desempenho do Método dos Elementos de Contorno frente a outros métodos numéricos, em algumas das análises apresentadas, são realizadas modelagens através do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Volumes Finitos.

Assim, como nos casos governados pela Equação de Laplace, vide seção IV.6, as análises aplicando-se o Método dos Elementos Finitos são realizadas utilizando-se o software comercial ANSYS, em sua versão 5.4. Sendo que o domínio físico é discretizado por elementos isoparamétricos quadráticos, possuindo tais elementos uma geometria triangular ou retangular, conforme o caso que apresente uma melhor compatibilidade com o

domínio físico do problema. Tais elementos são denominados, pelo programa ANSYS, como sendo respectivamente PLANE35 e PLANE77.

Assim, com o propósito de tornar a comparação entre os métodos mais igualitária, nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno, para efeito de comparação entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos, são utilizados elementos de contorno que possuem funções de interpolação da mesma ordem que às utilizadas por estes métodos. Logo, para tais casos, são aplicados elementos de contorno quadráticos.

Ressalta-se, novamente, que a comparação entre diferentes métodos numéricos é sempre muito polêmica, pois não se consegue estabelecer uma equivalência entre os diferentes tipos de entidades a que o domínio físico é discretizado, neste caso, elementos de contorno, elementos finitos e volumes finitos. Além do número de entidades em que o domínio é discretizado, existem outros parâmetros importantes que devem ser levados em conta, como por exemplo, a precisão alcançada nas respostas numéricas, a ordem do sistema linear de equações algébricas resultante e o tempo de processamento gasto para a obtenção dos resultados.

Este fato torna-se ainda mais relevante no caso das comparações realizadas entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Volumes Finitos, visto que tratam-se de métodos que não apresentam praticamente nenhuma similaridade, pois a formulação do Método dos Volumes Finitos [3, 4] é uma formulação diferencial, onde aprimora-se a estrutura do Método das Diferenças Finitas, impondo-se a compatibilidade dos fluxos nas interfaces dos volumes elementares e a condição de continuidade da variável dependente, sendo, além disso, um método iterativo.

Visto que utiliza-se de um software comercial para as modelagens realizadas através do Método dos Elementos Finitos e de um software acadêmico para as modelagens empregando o Método dos Elementos de Contorno, não são realizadas comparações envolvendo tempo de processamento para a obtenção das soluções numéricas. Destaca-se que, apesar do software utilizado para as modelagens via Método dos Volumes Finitos também tratar-se de um software acadêmico, ainda assim, não são realizadas comparações neste sentido, pois este é um método numérico iterativo, o que resulta em uma séria desvantagem neste tipo de abordagem.

Nos casos onde comparam-se o Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, adota-se o mesmo procedimento anterior para a confecção das discretizações para as modelagens via Método dos Elementos de Contorno, isto é, elas são feitas a partir das discretizações geradas através do programa ANSYS para as modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde aproveitam-se os pontos nodais sobre o contorno da geometria para a definição dos elementos de contorno quadráticos.

No caso de problemas governados pela Equação de Poisson para o Método dos Elementos de Contorno formulado através da Dupla Reciprocidade é necessária, para uma boa representação da ação de domínio, a adoção de pontos internos interpolantes, sendo a posição e o número destes pontos tomados sendo idênticos aos demais pontos nodais que formam as discretizações no Método dos Elementos Finitos.

Para a comparação das respostas numéricas entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, são utilizados os valores obtidos para as incógnitas em alguns pontos no interior do domínio físico do problema que encontram-se destacados nas figuras que ilustram as discretizações via Método dos Elementos Finitos. Tais pontos são considerados como sendo o conjunto de pontos internos empregados pelo Método dos Elementos de Contorno.

Nos casos onde comparam-se o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Volumes Finitos, adota-se um procedimento semelhante ao realizado nas comparações entre os Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno. Neste caso, definem-se as posições dos elementos de contorno em função das discretizações empregadas pelo Método dos Volumes Finitos.

O critério adotado para as confecção das discretizações é o seguinte: emprega-se a dimensão lateral de um volume finito utilizado nas modelagens como sendo o comprimento dos elementos de contorno empregados nas discretizações. Desta forma, geram-se, em ambos os métodos numéricos, discretizações uniformes.

A posição dos pontos internos interpolantes, utilizados pelo Método dos Elementos de Contorno para uma melhor representação das ações de domínio, é definida de duas formas:

- na primeira, tais pontos encontram-se centrados em relação aos volumes de controle, pois, deste modo, definem-se pontos onde são obtidos os resultados numéricos, através do

Método dos Elementos de Contorno nas mesmas posições coordenadas, onde são obtidas as respostas em termos do potencial no Método dos Volumes Finitos; e,

- na segunda, adota-se um conjunto de cinco pontos internos interpolantes, dispostos simetricamente, associado a cada volume de controle. Desta forma, tem-se uma melhor representação das ações de domínio.

Este procedimento para a confecção das discretizações, nos casos onde são comparados os desempenhos do Método dos Volumes Finitos e do Método dos Elementos de Contorno, será melhor compreendido observando-se as diferentes discretizações assim confeccionadas, quando estas forem apresentadas nos casos apresentados a seguir.

V.2 - Aplicações Numéricas

V.2.1 - 1ª ANÁLISE

Este primeiro caso governado pela Equação de Poisson, equação II.2-8, possui um domínio físico circular, onde são prescritas unicamente condições de contorno essenciais, sendo que a ação de domínio apresenta um valor constante ao longo de todo o domínio físico do problema igual a 10 unidades de ações de domínio (u.a.d.) e a propriedade física K é considerada unitária.

Na figura V.2.1-1 encontram-se representados o domínio físico do problema, as condições de contorno e a localização do sistema de coordenadas adotado para esta análise, bem como a dimensão geométrica empregada para o raio do círculo. A seguir, as condições de contorno são representadas matematicamente através das seguintes expressões, (dadas em coordenadas polares):

$$u(r, \theta) = 0 \quad p / \quad r = 10; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{Eq. V.2.1-1}$$

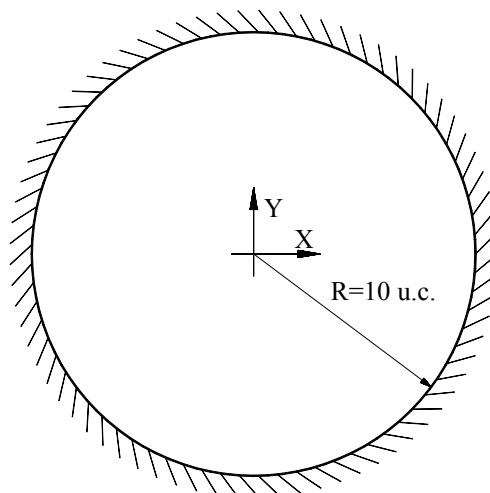


Figura V.2.1-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno

A interpretação física deste caso pode ser feita através da Mecânica dos Sólidos, como sendo um problema de Torção em um eixo de seção transversal constante e circular, ou, valendo-se da analogia da membrana, pode ser considerado como sendo o caso de uma membrana circular uniformemente carregada ao longo de sua área.

Objetivo

O objetivo pretendido com esta análise é a comparação do desempenho entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno para esta classe de problemas envolvendo ações de domínio. Como este intuito, são utilizadas discretizações com diferentes graus de refinamento, onde comparam-se os valores calculados para as incógnitas em pontos situados tanto no contorno quanto no interior do domínio físico do problema.

Solução Analítica

A solução analítica deste caso é obtida considerando-se a equação diferencial do problema, equação de Poisson, expressa através de um sistema de coordenadas polares, convenientemente localizado, e levando-se em conta a simetria circunferencial existente, a fim de simplificar a referida equação diferencial. Desta forma, a solução analítica, em termos da grandeza potencial, é dada de acordo com a seguinte expressão:

$$u(r) = \frac{-P}{4K}(R^2 - r^2) \quad \text{Eq. V.2.1-2}$$

sendo: K a propriedade física associada ao modelo matemático, P o valor relacionado a ação de domínio, prescrita como tendo um valor constante ao longo de todo o domínio físico do problema, R o raio externo da circunferência e r a coordenada radial.

Discretização

A seguir, na figura V.2.1-2, apresentam-se as discretizações utilizadas para as modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde adota-se a mesma forma de confecção das discretizações a serem empregadas nas modelagens via Método dos Elementos de Contorno, isto é, utilizam-se os pontos nodais sobre o contorno para a definição dos elementos de contorno quadráticos, sendo que os demais pontos nodais no interior do domínio físico do problema são definidos como sendo pontos internos interpolantes.

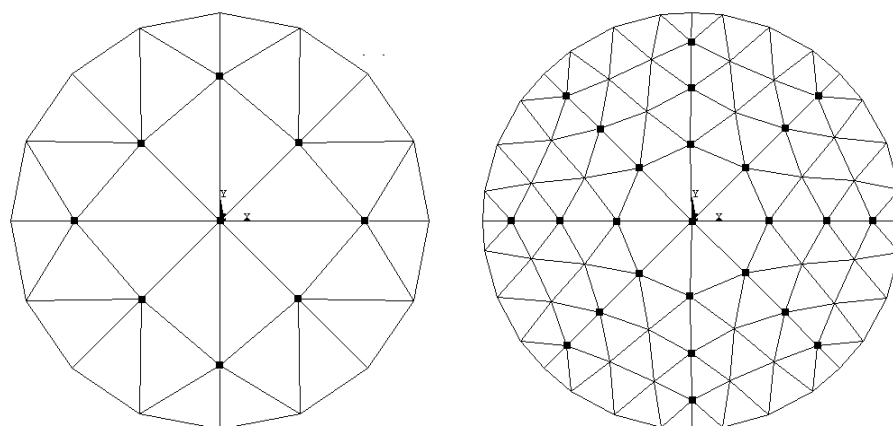


Figura V.2.1-2 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se os pontos no interior do domínio empregados para a comparação dos resultados numéricos.

Na figura V.2.1-2 encontram-se destacados determinados pontos nodais no interior do domínio físico do problema. Tais pontos são empregados para a comparação dos resultados obtidos para as incógnitas do problema entre os diferentes métodos numéricos, através da apresentação de gráficos contendo a média do erro percentual entre as soluções numéricas e analítica, versus o número de pontos nodais utilizados nas modelagens.

Desta forma, na tabela V.2.1-1 encontram-se indicados os números de pontos nodais e o número de elementos resultantes do processo de discretização do domínio físico para ambos os métodos numéricos empregados, assim como o número de pontos internos interpolantes utilizados pelo Método dos Elementos de Contorno.

Tabela V.2.1-1 - Número de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes utilizados nas discretizações, referentes às modelagens via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

	Métodos dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno		
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos	Número de pontos internos interpolantes
malha 1	81	32	32	16	49
malha 2	289	128	64	32	225

Resultados Numéricos

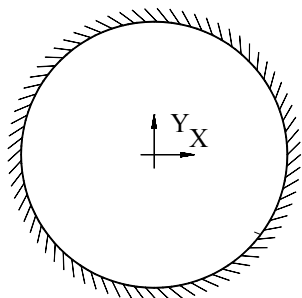
A seguir, apresentam-se, na figura V.2.1-3, os gráficos contendo a média do erro percentual entre as soluções numéricas e a solução analítica, em termos do potencial e suas derivadas direcionais, segundo as posições relativas dos pontos nodais sobre o domínio físico do problema, versus o número total de pontos nodais utilizados nas modelagens.

De acordo com os resultados apresentados, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito do comportamento das respostas apresentadas pelos diferentes métodos numéricos empregados nesta análise:

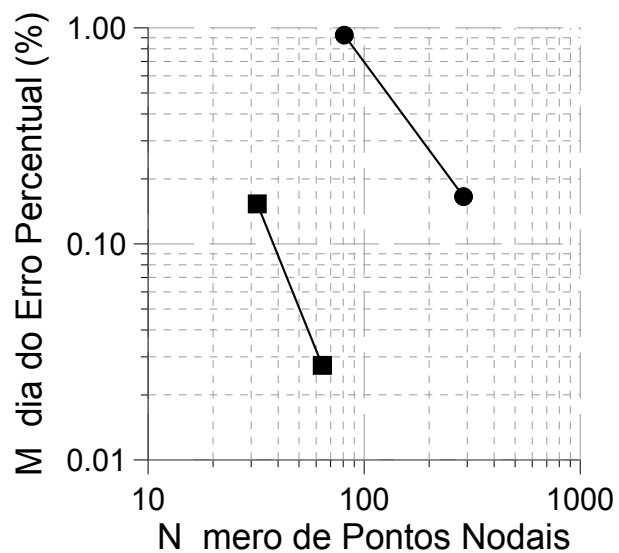
Os resultados apresentados, de modo geral, pelo Método dos Elementos de Contorno, mostraram-se bastante superiores ao Método dos Elementos Finitos, principalmente, como já era esperado, no cálculo dos valores da derivada do potencial, que no Método dos Elementos Finitos apresenta uma qualidade inferior aos valores obtidos para o potencial;

Observa-se uma taxa de convergência, isto é, a inclinação da reta que une os valores calculados para a média do erro percentual entre duas discretizações diferentes, bastante semelhante para ambos os métodos, no caso dos valores obtidos para a grandeza potencial em pontos pertencentes ao interior do domínio físico do problema; e,

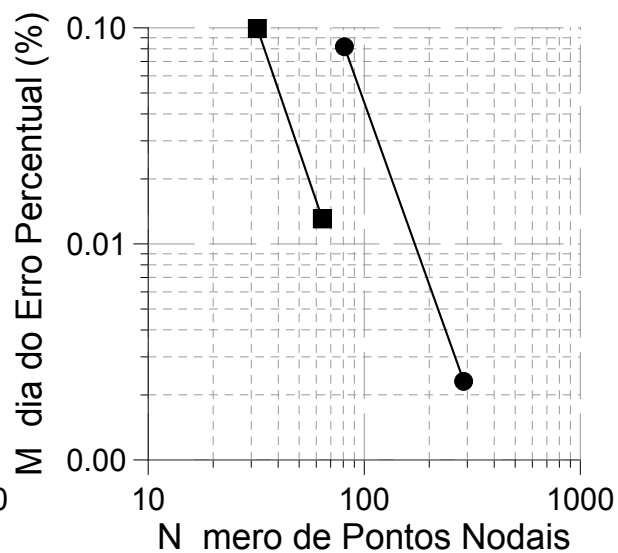
Considerando-se a grande diferença existente entre os números de pontos nodais adotados nas discretizações, pode-se admitir uma superioridade do Método dos Elementos de Contorno frente ao Método dos Elementos Finitos para esta análise realizada em um problema físico governado pela Equação de Poisson.



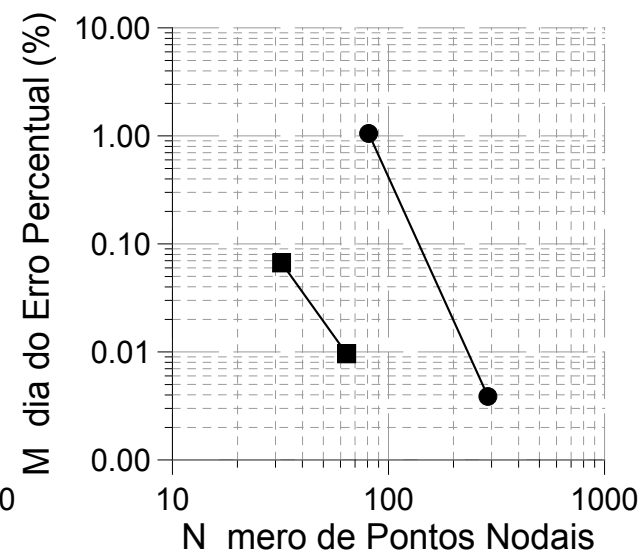
Representação física do problema



(a)



(b)



(c)

■ Método dos Elementos de Contorno ● Método dos Elementos Finitos

Figura V.2.1-3 - Média do erro percentual referente às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno, para:

- (a) Derivada do Potencial (direção normal), nos pontos nodais sobre o contorno;
- (b) Potencial, nos pontos nodais no interior do domínio;
- (c) Derivada do Potencial (direção radial), nos pontos nodais no interior do domínio.

Com o intuito de visualizar a distribuição do potencial ao longo do domínio físico do problema, isto é, o deslocamento, interpretando-se fisicamente este caso sob a ótica de um problema relacionado à deformação de uma membrana, apresenta-se a seguir, na figura V.2.1-4, a representação das linhas equipotenciais sobre o domínio físico do problema, confeccionadas utilizando-se os valores obtidos numericamente através do Método dos Elementos de Contorno para a discretização mais refinada.

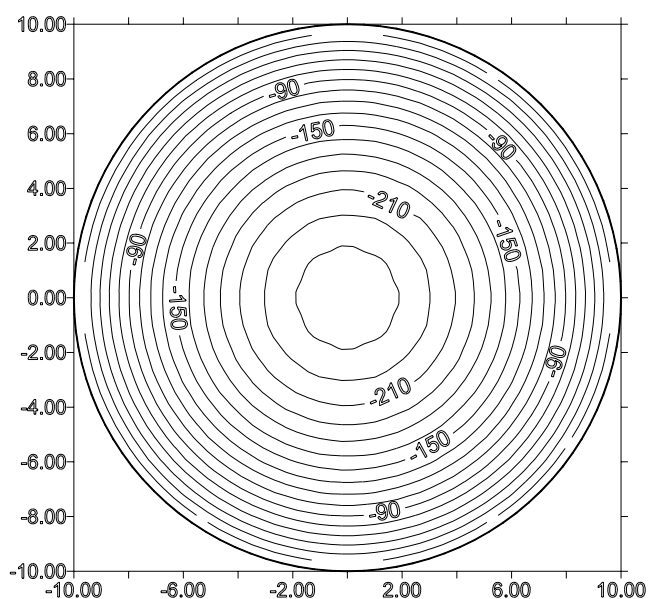


Figura V.2.1-4 - Representação das linhas equipotenciais sobre o domínio físico do problema, valores obtidos numericamente através do Método dos Elementos de Contorno.

V.2-2 - 2ª ANÁLISE

Nesta segunda análise, envolvendo problemas governados pela Equação de Poisson, apresenta-se o caso onde o domínio físico, representado por um quadrado de lado 10 u.c., que encontra-se submetido a uma ação de domínio uniforme ao longo de todo o domínio físico, de valor 10 u.a.d., sendo que ao longo de suas arestas são prescritas condições de contorno essenciais nulas, representadas matematicamente pela seguinte expressões:

$$u = 0 \quad \text{p/ } x = 0; 0 \leq y \leq 10 \quad \text{e} \quad \text{p/ } x = 10; 0 \leq y \leq 10$$

Eqs. V.2.2-1

$$u = 0 \quad \text{p/ } y = 0; 0 \leq x \leq 10 \quad \text{e} \quad \text{p/ } y = 10; 0 \leq x \leq 10$$

Ilustra-se na figura V.2.2-1 o domínio físico, a localização do sistema de coordenadas adotado e as dimensões geométricas utilizadas nesta análise.

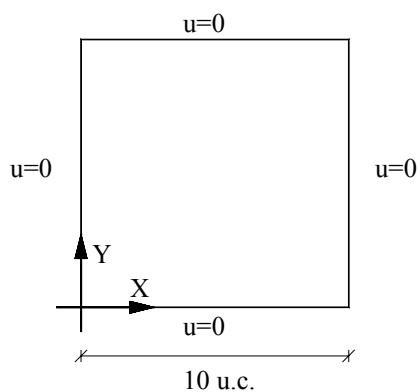


Figura V.2.2-1- Representação do domínio físico e condições de contorno

Este caso pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo um problema onde uma placa quadrada em que a temperatura de suas arestas são mantidas constantes a um valor nulo e sobre todo o domínio físico encontra-se uma fonte de geração de calor, expressa pela ação de domínio.

Também pode-se interpretá-lo, através da Mecânica dos Sólidos, tratando-se do problema de uma membrana quadrada uniformemente carregada, ou um problema de torção em uma barra de seção transversal quadrada, onde a ação de domínio é proporcional ao ângulo de torção.

Objetivos

Pretende-se com as modelagens deste caso, apresentadas a seguir, verificar a influência de certos parâmetros nas respostas numéricas, obtidas através da aplicação da Dupla Reciprocidade no Método dos Elementos de Contorno. São verificadas as influências dos tipos de elementos de contorno, do número de pontos internos interpolantes e do grau de refinamento utilizados nas diversas discretizações aplicadas nesta análise.

Posteriormente, com o propósito de comparar-se o desempenho do Método dos Elementos de Contorno frente ao Método dos Elementos Finitos nesta classe de problemas

governados pela Equação de Poisson, são apresentadas comparações entre as soluções numéricas obtidas através da aplicação destes métodos.

Solução Analítica

A solução analítica deste caso em termos do potencial é representada através de uma série matemática envolvendo funções trigonométricas e hiperbólicas, sendo que a expressão geral para a superfície deformada da membrana, isto é, os valores para o potencial, é dada de acordo com [1]:

$$u = \frac{16P a}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y / 2a)}{\cosh(n\pi b / 2a)} \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) \quad \text{Eq. V.2.2-2}$$

onde P representa o valor da ação de domínio, constante ao longo de todo o domínio físico, sendo que o sistema de coordenadas adotado, bem como o significado geométrico de a e b podem ser observados de acordo com a figura V.2.2-2.

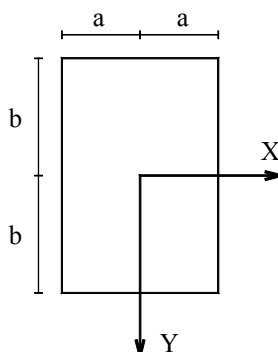


Figura V.2.2-2 - Representação do domínio físico, relações geométricas e sistema de coordenadas empregados pela solução analítica.

Para o presente caso, onde o domínio físico é um quadrado, os parâmetros geométricos a e b são idênticos, sendo iguais à metade do comprimento do lado quadrado.

Discretizações Utilizadas

Neste item apresenta-se um conjunto de discretizações utilizadas para verificar-se a influência na resposta numérica, através do Método dos Elementos de Contorno, dos diferentes tipos de elementos (lineares e quadráticos), do número de elementos e do número de pontos internos interpolantes.

Tais discretizações, possuem um domínio físico quadrado tendo comprimento característico igual a 10 u.c., são formadas de tal forma que os elementos de contorno, para uma determinada discretização, tenham todos o mesmo comprimento. Destaca-se que nos vértices do quadrado, devido a descontinuidade do vetor normal, são utilizados os denominados elementos de contorno com pontos de colocação não nodal, vide seção II.6.

Ressalta-se que, como nas comparações entre os diferentes tipos de elementos de contorno (lineares e quadráticos), mantém-se constante o número de pontos nodais funcionais, sendo que, portanto, o comprimento dos elementos de contorno quadráticos é o dobro do comprimento dos elementos de contorno lineares para uma determinada discretização.

A fim de formar os bancos de entrada de dados utilizados nas diversas modelagens, adota-se uma combinação entre o conjunto de discretizações do contorno do domínio físico, possuindo diferentes graus de refinamento, e o conjunto de pontos internos interpolantes, onde varia-se o número e suas disposições ao longo do domínio físico.

Assim, na figura V.2.2-3 encontram-se representados os conjuntos de discretizações e de pontos internos interpolantes, que formam, através de combinações entre si, os diversos bancos de entrada de dados utilizados nas modelagens.

Na tabela V.2.2-1 indicam-se o número de pontos nodais funcionais e o número de elementos de contorno existentes em cada uma das discretizações, dadas de acordo com a figura V.2.2-3, considerando-se as modelagens realizadas utilizando elementos de contornos lineares ou quadráticos.

Tabela V.2.2-1 - Indicação do número de pontos nodais e de elementos de contorno utilizados nas diversas modelagens com diferentes tipos de elementos de contorno

Discretização	Número de Pontos Nodais Funcionais	Número de Elementos de Contorno	
		Lineares	Quadráticos
Malha 1	20	16	8
Malha 2	36	32	16
Malha 3	68	64	32
Malha 4	132	128	64

Desta forma, na tabela V.2.2-2 indica-se o número de pontos internos presentes em cada uma das disposições empregadas nas diversas modelagens realizadas para este caso, conforme ilustradas na figura V.2.2-3.

Tabela V.2.2-2 - Indicação do número de pontos internos interpolantes presentes em cada uma das diferentes disposições utilizadas nas diversas modelagens.

Disposição de Pontos Internos	Número de Pontos Internos Interpolantes
Pontos Internos - PI1	5
Pontos Internos - PI2	33
Pontos Internos - PI3	161

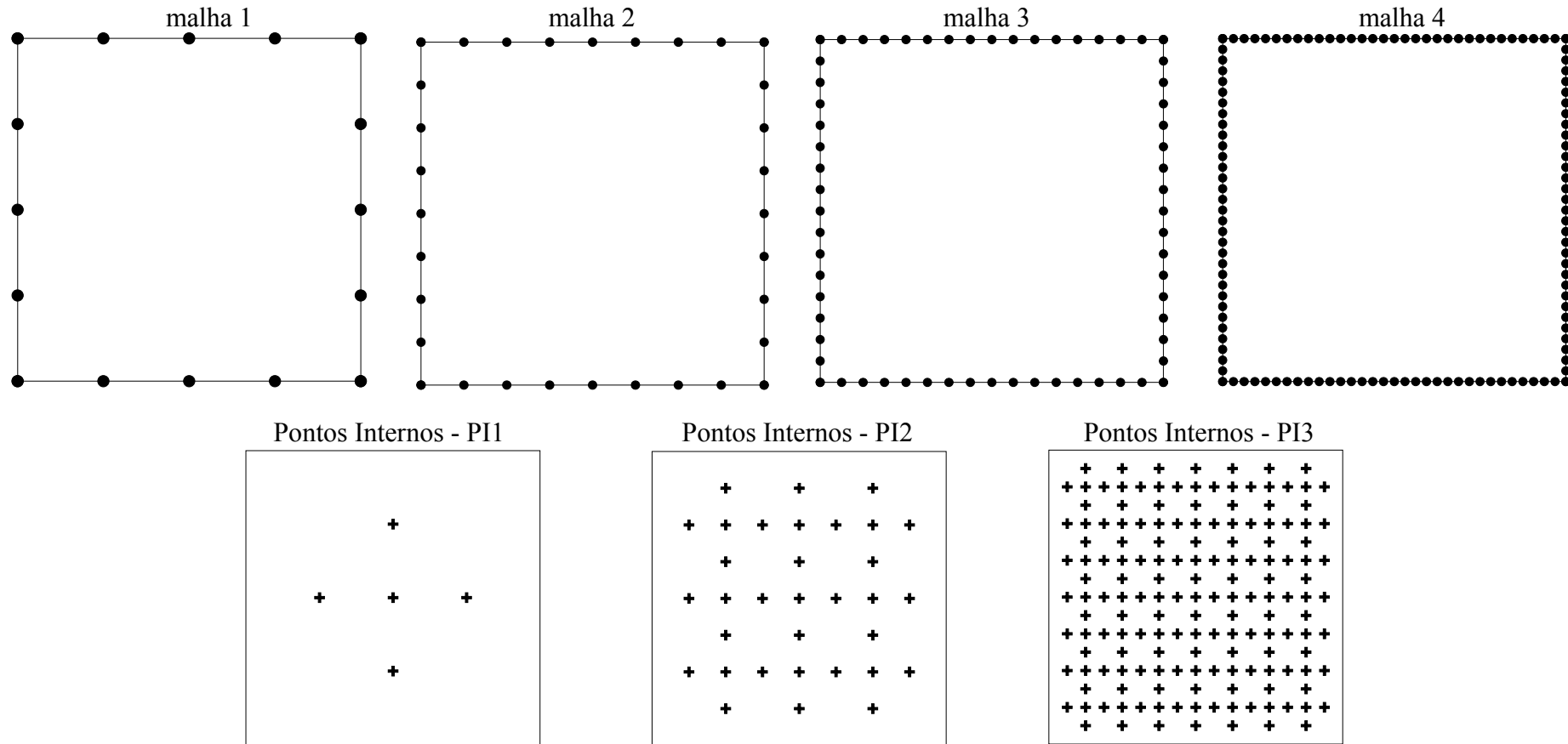


Figura V.2.2--3 - Representação dos conjuntos de discretizações e de pontos internos interpolantes, que formam os diversos bancos de entrada de dados utilizados nas modelagens

Resultados Numéricos

A seguir apresentam-se gráficos comparando-se os resultados numéricos, obtidos via Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se elementos de contorno lineares e quadráticos, para determinados pontos selecionados sobre o domínio físico do problema. As posições de tais pontos encontram-se destacadas de acordo com a figura V.2.2-4, sendo que o sistema de coordenadas utilizado encontra-se posicionado de acordo com a figura V.2.2-1, isto é, no vértice inferior esquerdo do quadrado.

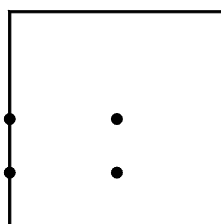


Figura V.2.2-4 - Representação das posições dos pontos selecionados para a comparação dos resultados numéricos.

Observe que foram selecionados dois pontos no interior do domínio físico e dois pontos sobre o contorno, onde têm-se como respostas numéricas, respectivamente o potencial e sua derivada normal ao contorno, onde, então, são realizadas comparações entre as diversas modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno com os valores calculados analiticamente.

Nos gráficos apresentados a seguir mantém-se fixa a disposição dos pontos internos interpolantes e variam-se as discretizações para o contorno do domínio físico do problema. Desta forma, pode-se visualizar o comportamento da resposta numérica, através do cálculo do erro percentual para determinados pontos entre as soluções numérica e analítica, variando-se o grau de refinamento utilizado nas discretizações, estando fixa uma determinada disposição dos pontos internos interpolantes. Sendo que, tais casos são modelados empregando-se diferentes tipos de elementos de contorno.

Analisando-se os resultados indicados nos gráficos das figuras V.2.2-5 e V.2.2-6, respectivamente para as modelagens realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos, pode-se tecer os seguintes comentários:

Observa-se que a obtenção de uma resposta numérica com uma boa precisão está condicionada a um certo nível de refinamento da discretização, pois verifica-se que, com o aumento do grau de refinamento, a resposta numérica tende a convergir para a solução do

problema. No entanto, os resultados também são afetados por outros parâmetros, como por exemplo, o tipo de elemento de contorno e o número de pontos internos interpolantes utilizados nas modelagens;

Com o aumento do número de pontos internos interpolantes, fixada uma determinada discretização, de maneira geral, ocorre uma melhoria na qualidade dos resultados numéricos, pois, desta forma, melhora-se a representação das ações de domínio. Embora, conforme pôde ser observado, exista uma forte influência do tipo de elemento de contorno utilizado nas modelagens e da incógnita a qual avalia-se a resposta numérica, pois o potencial mostrou-se mais sensível a este fator;

Destaca-se que existe um limite para a melhoria dos resultados com o aumento do grau de refinamento das discretizações e o número de pontos internos interpolantes utilizados nas modelagens, pois, como todo método numérico, devido a representação imprecisa dos números reais, dentre outros tipos de erros numéricos, com o aumento do número de operação matemáticas envolvidas acumulam-se erros numéricos, o que, de certa forma, transforma-se em um limite para a acurácia dos métodos numéricos;

De acordo com a figura V.2.2-5, para as modelagens realizadas com elementos de contorno lineares, vê-se que a utilização de pontos internos interpolantes numa proporção mais elevada com relação ao número de ponto nodais funcionais ocasiona uma perturbação na forma dos gráficos, quando comparados com os gráficos equivalentes obtidos com emprego dos elementos de contorno quadráticos, figura V.2.2-6;

Os gráficos confeccionados através da utilização de elementos de contorno quadráticos apresentam, para o caso do potencial, um comportamento que enquadra-se perfeitamente de acordo com as expectativas, pois, nestes casos, aumentando-se, tanto o grau de refinamento das discretizações, quanto o número de pontos internos interpolantes a solução numérica estabiliza-se e tende a convergir até um determinado limite; e,

Ressalta-se que, mesmo nos gráficos que apresentam uma certa divergência para a solução analítica do problema, aumentando-se o número de elementos de contorno ou o número de pontos internos interpolantes, os valores alcançados para o erro percentual, mesmo nestes casos, encontram-se próximos a 1 %, o que atende, de forma mais do que satisfatória, os objetivos pretendidos com uma análise numérica aplicada a um problema de Engenharia.

Elementos de Contorno Lineares

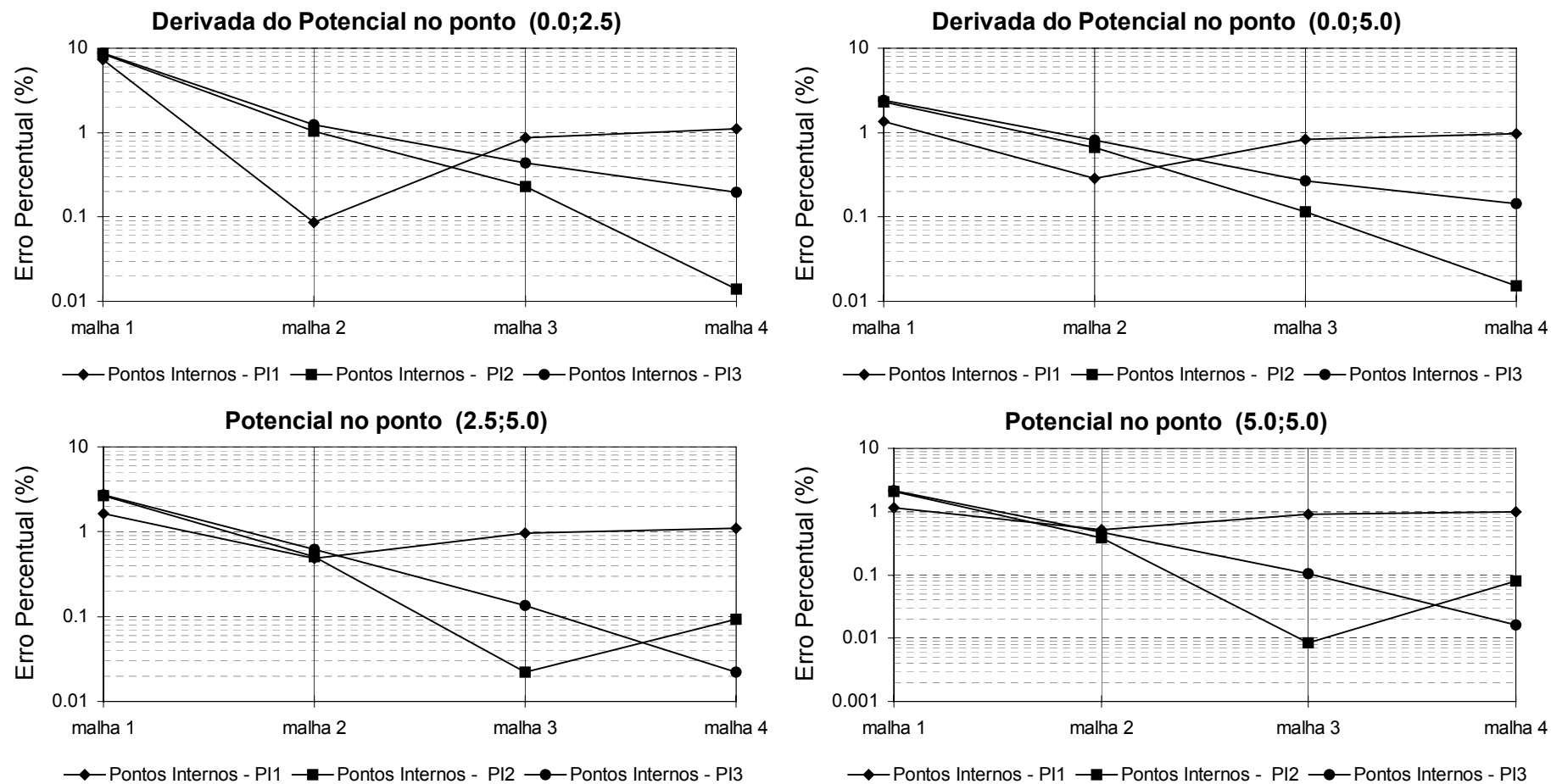


Figura V.2.2-5 - Gráficos dos erros percentuais nos pontos seleccionados para as diversas modelagens realizadas com a utilização de elementos de contorno lineares, referentes às várias combinações entre as discretizações e os pontos internos interpolantes.

Elementos de Contorno Quadráticos

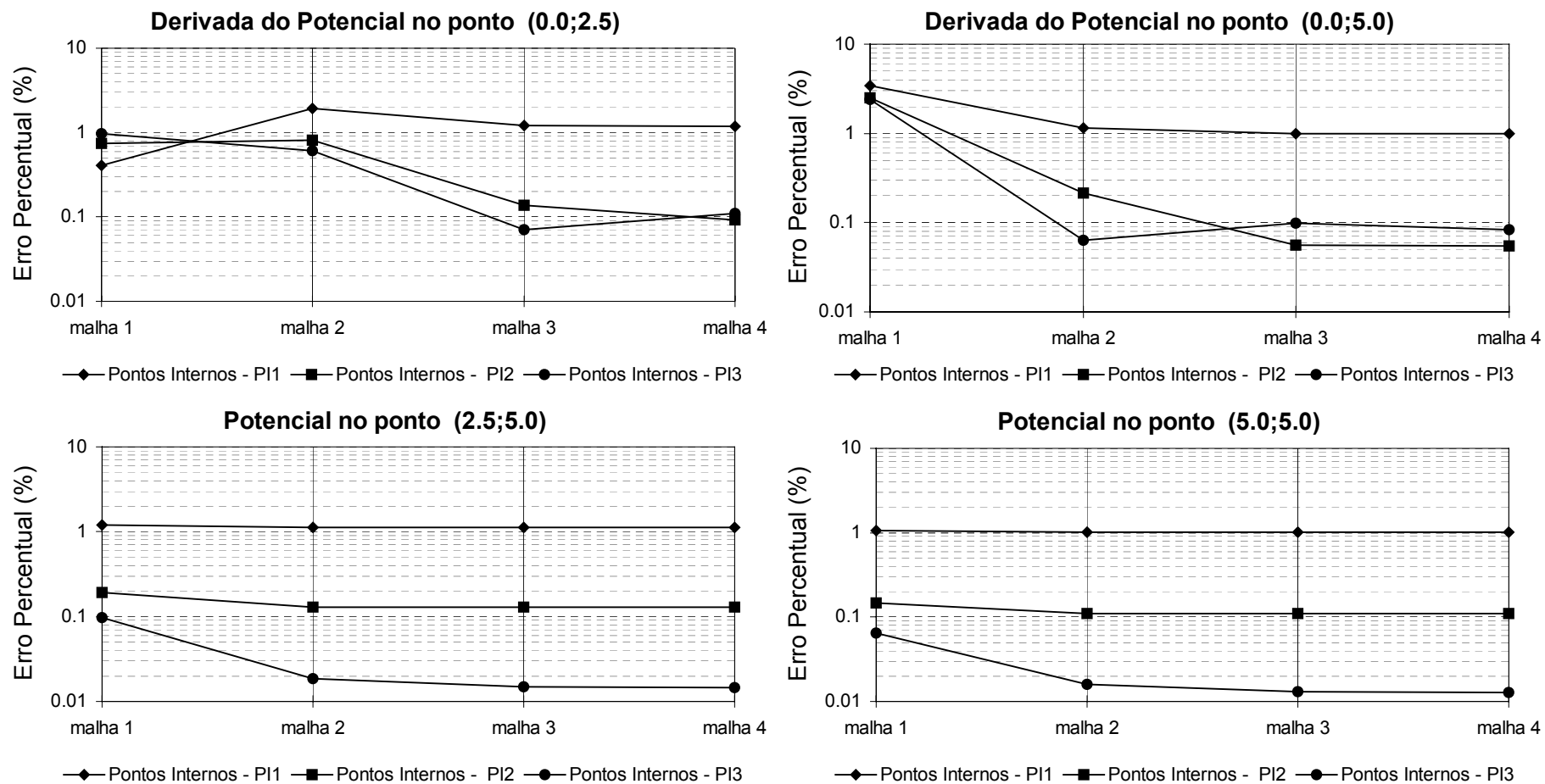


Figura V.2.2-6 - Gráficos dos erros percentuais nos pontos seleccionados para as diversas modelagens realizadas com a utilização de elementos de contorno quadráticos, referentes às várias combinações entre as discretizações e os pontos internos interpolantes.

Com o intuito de comparar o desempenho do Método dos Elementos de Contorno frente ao Método dos Elementos Finitos, são apresentados a seguir alguns gráficos onde avaliam-se a precisão das soluções numéricas em termos do potencial e sua derivada normal em determinados pontos sobre o contorno e no interior do domínio físico do problema.

Na figura V.2.2-7 apresentam-se as discretizações utilizadas para as modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos, sendo que os pontos que encontram-se destacados em seu interior são empregados para a avaliação dos resultados numéricos. Destaca-se que nesta figura cada um dos retângulos representa um elemento finito isoparamétrico quadrático.

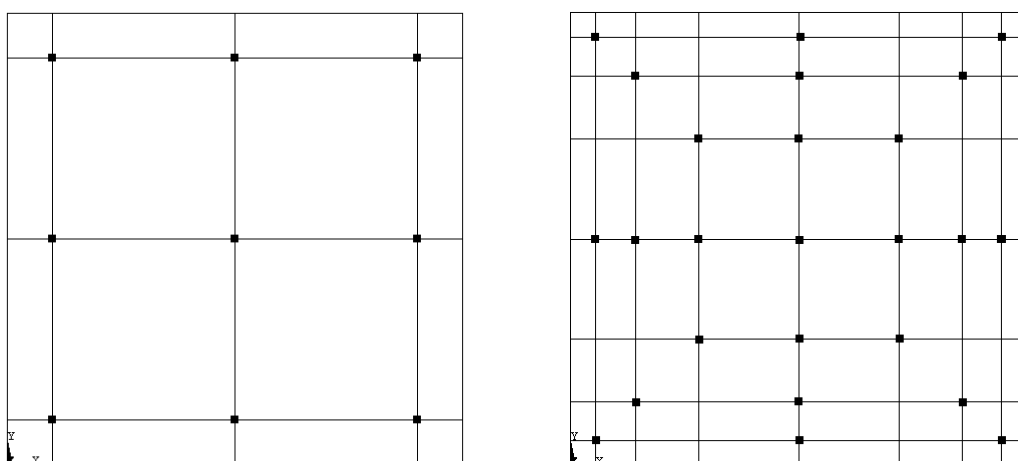


Figura V.2.2-7 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se os pontos no interior do domínio físico empregados para a comparação dos resultados numéricos.

Na confecção das discretizações para as modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno adota-se o procedimento definido anteriormente, vide item III.6. Desta forma, empregam-se as discretizações para o Método dos Elementos Finitos utilizando-se os pontos nodais sobre o contorno para a definição dos elementos de contorno quadráticos e os demais pontos nodais como sendo pontos internos interpolantes.

Na tabela V.2.2-3 indicam-se os números de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes resultantes do processo de discretização para as modelagens realizadas através do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos de Contorno.

Tabela V.2.2-1 - Indicação do número de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes utilizados nas discretizações referentes as modelagens via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno

	Métodos dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno		
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos	Número de pontos internos interpolantes
malha 1	65	16	36	16	49
malha 2	225	64	68	32	193

Na figura V.2.2-8 apresentam-se os gráficos, em escala logarítmica, contendo a média do erro percentual para os pontos selecionados no interior do domínio físico do problema e sob o contorno da geometria, para as análises realizadas através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

De acordo com os gráficos apresentados, vide figura V.2.2-8, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito da precisão alcançada e do comportamento apresentado pelos métodos numéricos:

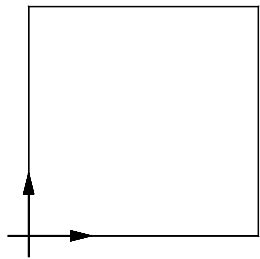
Pode-se considerar que os resultados apresentados pelo Método dos Elementos de Contorno como sendo superiores aos alcançados pelo Método dos Elementos Finitos, pois além de, em alguns casos, apresentarem uma precisão mais elevada, deve também ser levado em conta a diferença existente entre o número de pontos nodais existentes nas modelagens realizadas através destes métodos, o que reflete na ordem do sistema linear de equações algébricas a ser resolvido para a obtenção dos resultados numéricos;

Nos gráficos referentes a média do erro percentual para a derivada do potencial, figura V.2.2-8 (a) e (c), observa-se uma desvantagem do Método dos Elementos Finitos frente ao Método dos Elementos de Contorno, pois neste primeiro método numérico tais resultados são calculados através da derivação do campo obtido para o potencial, sendo que esta operação resulta em uma perda na qualidade dos resultados, conforme pôde ser comprovado;

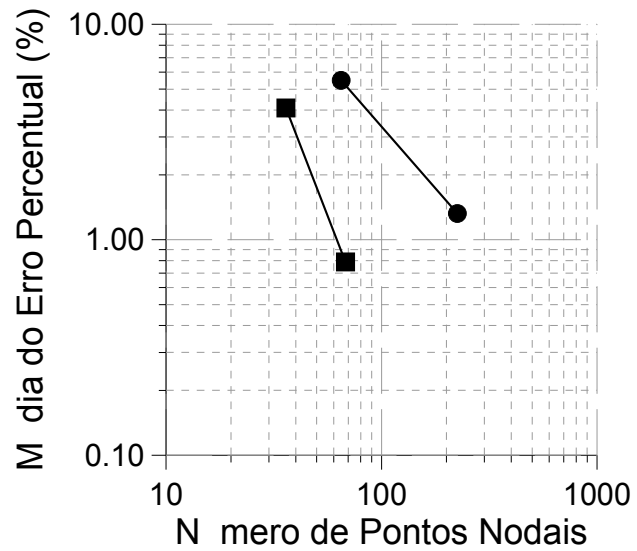
Para os resultados apresentados pelo Método dos Elementos de Contorno observa-se, confirmando as expectativas, que os valores obtidos para os pontos no interior do domínio apresentam uma precisão maior que os obtidos para os pontos nodais funcionais sobre o contorno da geometria, pois em tais casos emprega-se novamente a sentença integral

do método, representando uma nova ponderação dos resíduos, conforme pode ser observado comparando-se os gráficos (a) e (c), da figura V.2.2-8; e,

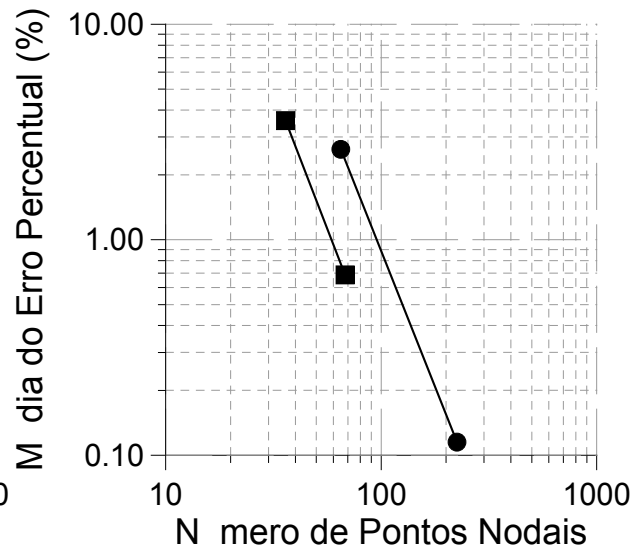
De maneira geral, os resultados numéricos apresentados por ambos os métodos numéricos mostraram-se amplamente satisfatórios, pois nestes casos, para todas as modelagens realizadas, obtiveram-se, para a média do erro percentual, valores inferiores a 5 %, o que atende plenamente os objetivos pretendidos com uma análise numérica a um problema de Engenharia.



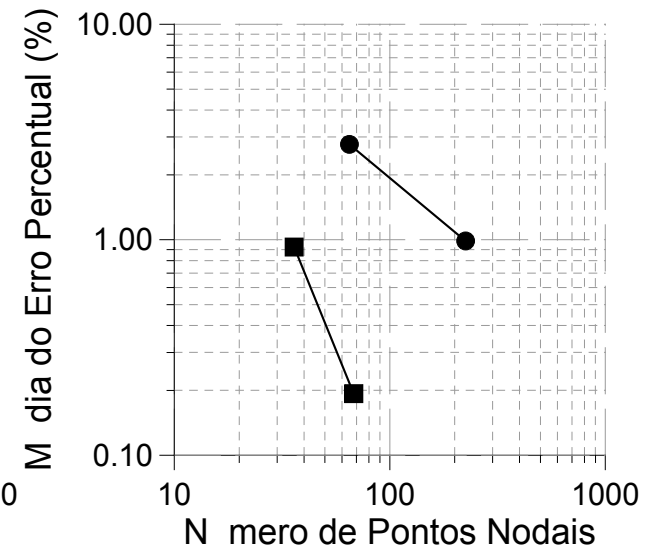
Representação do problema físico



(a)



(b)



(c)

■ Método dos Elementos de Contorno ● Método dos Elementos Finitos

Figura V.2.2-8 - Média do erro percentual referente às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno, para: (a) Derivada do Potencial (direção normal), nos pontos nodais sobre o contorno; (b) Potencial, nos pontos nodais no interior do domínio; (c) Derivada do Potencial (módulo), nos pontos nodais no interior do domínio.

V.2.3 - 3ª ANÁLISE

Nesta terceira análise governada pela Equação de Poisson, o domínio físico, expresso por um triângulo equilátero, encontra-se submetido unicamente a condições de contorno essenciais, sendo que a ação de domínio apresenta um valor constante ao longo de todo o domínio físico do problema, tendo um valor igual a 10 unidades de ações de domínio (u.a.d.), e a propriedade física K é considerada unitária.

As condições de contorno deste problema, de acordo com o sistema de coordenadas indicado na figura V.2.3-1, podem ser expressas matematicamente através das seguintes equações dadas a seguir, onde a representa a altura do triângulo equilátero.

$$\begin{aligned}
 u(x,y) = \bar{U} = 0 \quad p/ \quad x = (-2/\sqrt{3})y + (2/3)a \quad 0 \leq y \leq (+\sqrt{3}/2)a \\
 u(x,y) = \bar{U} = 0 \quad p/ \quad x = (+2/\sqrt{3})y + (2/3)a \quad (-\sqrt{3}/2)a \leq y \leq 0 \\
 u(x,y) = \bar{U} = 0 \quad p/ \quad x = (-1/3)a \quad (-\sqrt{3}/2)a \leq y \leq (+\sqrt{3}/2)a
 \end{aligned}
 \tag{Eq. V.2.3-1}$$

Um problema formulado com tais características pode ser interpretado fisicamente, através da Mecânica dos Sólidos, como sendo o caso de torção em um eixo triangular com seção transversal constante, onde, então, o potencial representa a função de tensão e sua derivada possui o significado físico de uma tensão cisalhante.

Objetivo Pretendido

Pretende-se com esta análise a comparação dos resultados numéricos obtidos através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno, onde comparam-se os valores, obtidos numericamente através de diferentes modelagens, para o potencial em um conjunto de pontos no interior do domínio físico e para a derivada do potencial na direção normal ao contorno no ponto médio da aresta do triângulo equilátero, representando o ponto onde tem-se a tensão cisalhante máxima. tais resultados numéricos são comparados com a solução analítica deste caso.

Solução Analítica

A solução analítica deste caso, apresentado por Saint-Venant [1], para o estudo do problema de torção em barras possuindo seções transversais constantes, foi desenvolvido através do artifício matemático da denominada função de tensão, sendo esta uma função escalar, onde suas derivadas direcionais possuem um significado físico de tensões. Desta forma, a solução analítica em termos do potencial para o caso de uma seção transversal na forma de um triângulo equilátero, vide figura V.2.3-1, é dada de acordo com a seguinte expressão:

$$u = \frac{P}{2} \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27}a^2 \right] \quad \text{Eq. V.2.3-2}$$

onde u é a função de tensão, sendo que P representa a ação de domínio, constante ao longo de todo o domínio físico do problema, e o sistema de coordenadas adotado, bem como o significado geométrico do parâmetro a , são apresentados na figura V.2.3-1.

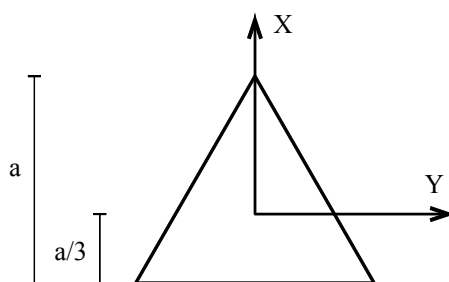


Figura V.2.3-1- Representação do domínio físico e sistema de coordenadas empregadas pela solução analítica.

Neste caso, o máximo valor, em módulo, da derivada do potencial, isto é, o valor da tensão máxima, no problema interpretado como sendo um caso de torção, ocorre nos pontos médios dos lados do triângulo, e é expresso de acordo com a equação dada a seguir:

$$\tau_{\max} = P a \quad \text{Eq. V.2.3-3}$$

Discretizações Utilizadas

De acordo com os procedimentos definidos anteriormente, para os casos onde são efetuadas comparações entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, a seguir, na figura V.2.3-2, encontram-se representadas as discretizações utilizadas nas modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos. Observe que, neste

caso, o sistema de coordenadas encontra-se definido no vértice esquerdo do triângulo equilátero.

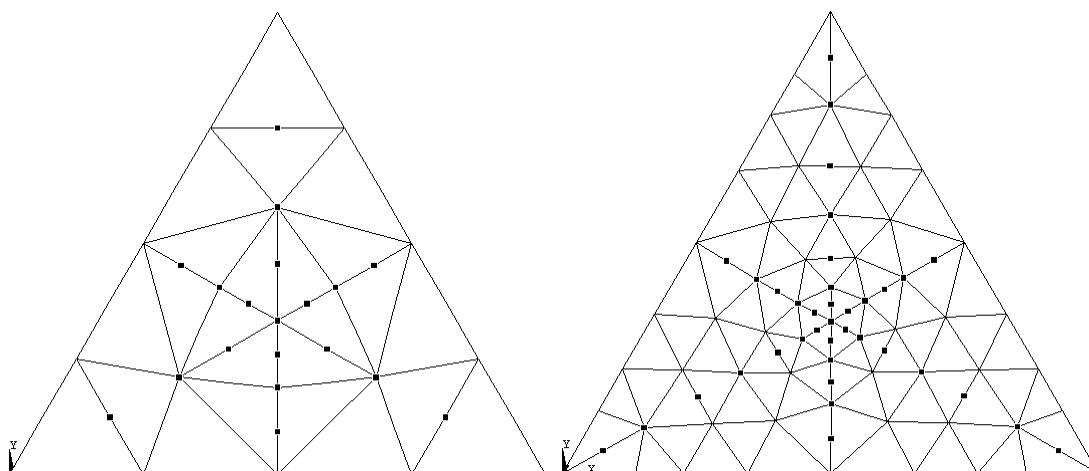


Figura V.2.3-2 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Elementos Finitos, onde destacam-se os pontos no interior do domínio, empregados para a comparação dos resultados numéricos.

Para as modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno, aproveitam-se os pontos nodais das discretizações referentes ao Método dos Elementos Finitos para definirem-se os elementos de contorno quadráticos e os pontos internos interpolantes. Desta forma, na tabela V.2.3-1, encontram-se indicados os números de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes resultante do processo de discretização do domínio físico do problema, para ambos os métodos numéricos empregados.

Tabela V.2.3-1 - Indicação do número de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

	Métodos dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno		
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos	Número de Pontos Internos Interpolantes
malha 1	61	24	27	12	34
malha 2	205	90	51	24	154

Resultados Numéricos

Na figura V.2.3-3 apresentam-se gráficos contendo o erro percentual entre as soluções numéricas e analítica para a derivada do potencial na direção normal ao contorno no ponto médio da aresta do triângulo equilátero, figura V.2.3-3 (a), representando a precisão

alcançada para o valor máximo da tensão cisalhante, e a média do erro percentual das soluções numéricas em relação à solução analítica em termos da grandeza potencial, figura V.2.3-3 (b), nos conjuntos de pontos no interior do domínio físico do problema, conforme figura V.2.3-2.

Segundo os resultados apresentados para a derivada do potencial na direção normal ao contorno no ponto médio da aresta do triângulo equilátero, observa-se uma grande superioridade na precisão da resposta obtida através do Método dos Elementos de Contorno, pois, conforme mencionado anteriormente, o Método dos Elementos Finitos apresenta uma menor acurácia no cálculo das grandezas derivadas, embora tais resultados sejam plenamente satisfatórios do ponto de vista da Engenharia.

Para a figura V.2.3-3 (b), referente à média do erro percentual para o potencial nos pontos selecionados no interior do domínio físico, destaca-se que a precisão dos resultados das modelagens realizadas através do Método dos Elementos Finitos mostraram-se melhores quando comparados aos valores do erro percentual obtidos para a derivada do potencial, figura V.2.3-3 (a), mas comparando-os com os resultados das modelagens via Método dos Elementos de Contorno, vê-se que este método também apresenta um excelente desempenho nestes pontos.

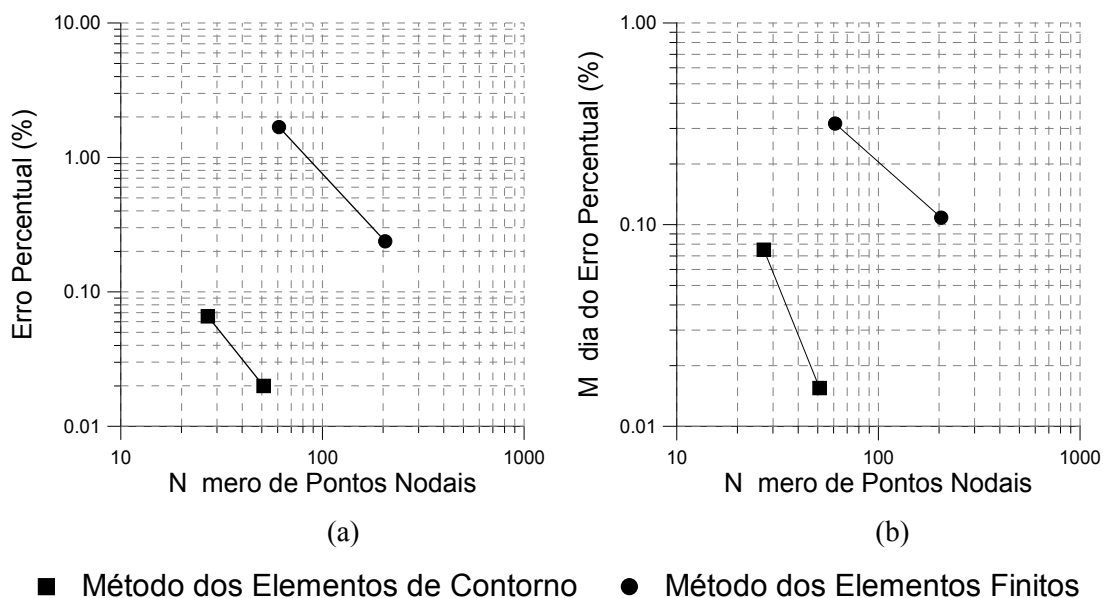


Figura V.2.3-3 - Erro percentual entre as soluções numéricas e analítica para: (a) derivada do potencial na direção normal ao contorno no ponto médio da aresta do triângulo; (b) Média para o conjunto de pontos no interior do domínio, em termos da grandeza potencial.

V.2.4 - 4ª ANÁLISE

Nesta aplicação tem-se o domínio físico representando um perfil circular aberto, indicado de acordo com a figura V.2.4-1, onde impõem-se condições de contorno essenciais nulas ao longo de todo o contorno deste perfil, e prescreve-se uma ação de domínio constante, de valor igual a 10 unidades de ações de domínio (u.a.d.). O sistema de coordenadas adotado, assim como as características geométricas desta análise também podem ser observadas na referida figura.

Considerando-se um sistemas de coordenadas polares alocado na mesma posição do sistema de coordenadas cartesianas, figura V.2.4-1, as condições de contorno imposta a este problema podem ser matematicamente expressas através das seguintes equações, segundo este dois sistemas de coordenadas:

$$u(x,y) = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } x = 0; \quad 2.7 \leq y \leq 3.0$$

$$u(x,y) = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } y = 0; \quad -3.0 \leq y \leq -2.7$$

$$u(r,\theta) = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } r = 2.7; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi/2$$

$$u(r,\theta) = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } r = 3.0; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi/2$$

Eq. V.2.4-1

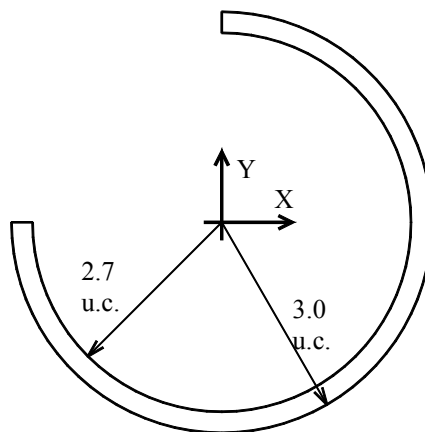


Figura V.2.4-1 - Representação do domínio físico e características geométricas.

Este caso representa o problema de torção em uma peça, tendo com seção transversal o perfil circular aberto (indicado na figura V.2.4-1). Desta forma, tem-se a torção em uma peça possuindo um perfil esbelto.

Objetivos Pretendidos

Objetiva-se, além da comparação entre as respostas numéricas, calculadas através da aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno utilizando-se de elementos usando funções de interpolação quadráticas, em termos do valor máximo obtido para a derivada do potencial na direção normal ao contorno da geometria, a apreciação do comportamento do Método dos Elementos de Contorno frente a um problema possuindo uma geometria esbelta, isto é, uma alta relação entre o contorno e o domínio físico do problema.

Solução Analítica

Problemas desta natureza, de torção em peças com geometrias esbeltas, possuem soluções analíticas aproximadas através do uso da analogia da membrana[1, 2]. Onde desprezam-se os efeitos da curvatura do perfil, transformando-o em um perfil retangular, e os efeitos causados pelos menores lados deste retângulo assim formado.

Tem-se, então, que a tensão de cisalhamento máxima é aproximada como sendo dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{\max} = cG\theta \quad \text{Eq. V.2.4-2}$$

onde: c representa o menor lado referente ao perfil retangular formado pela retificação do perfil circular aberto, isto é, neste caso, indica a diferença entre os raios externo e interno do perfil circular aberto; e ,

$G\theta$ representa a metade do valor numérico da ação de domínio prescrita, logo, tem-se que: $G\theta = 5.0$ u.a.d.

Discretizações Utilizadas

Na figura V.2.4-2 encontram-se representadas as discretizações utilizadas nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos Finitos, sendo que nesta figura cada um dos triângulos representa um elemento finito isoparamétrico quadrático.

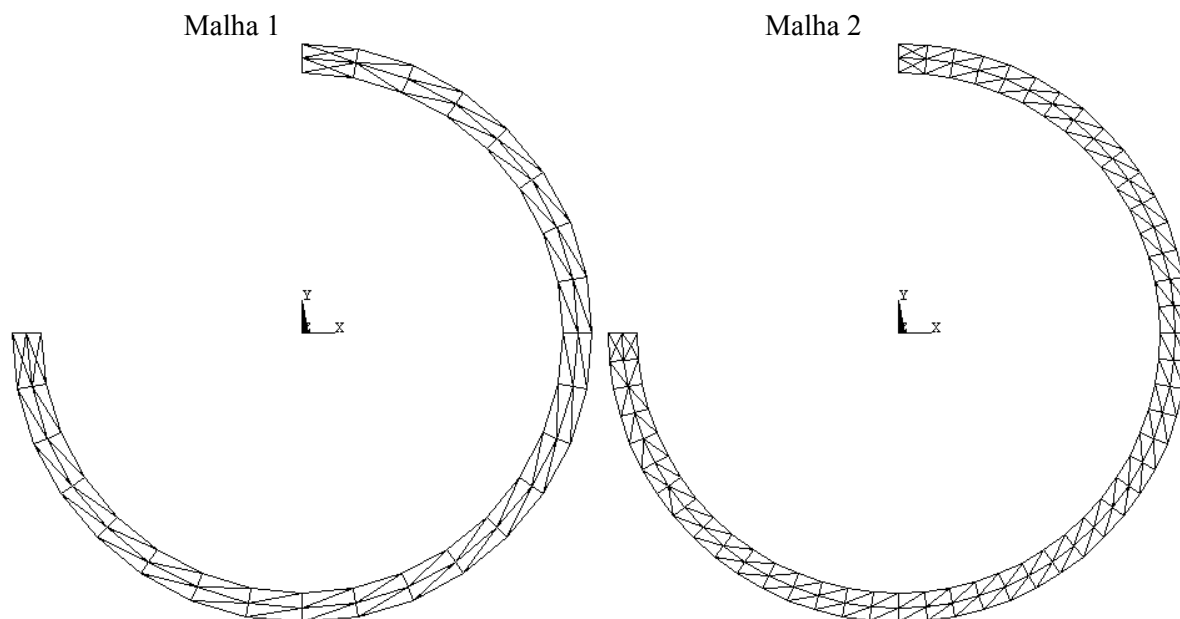


Figura V.2.4-2 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens realizadas via Método dos Elementos Finitos.

As discretizações para as modelagens via Método dos Elementos de Contorno são confeccionadas empregando-se os pontos nodais das discretizações utilizadas pelo Método dos Elementos Finitos para definirem-se os diversos elementos de contorno quadráticos e pontos internos interpolantes. Desta forma, na tabela V.2.4-1, indicam-se os números de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes resultantes do processo de discretização para estes métodos numéricos.

Tabela V.2.4-1 - Indicação do número de pontos nodais, de elementos e de pontos internos interpolantes utilizados nas discretizações referentes às modelagens via Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

	Métodos dos Elementos Finitos		Método dos Elementos de Contorno		
	Número de pontos nodais	Número de elementos	Número de pontos nodais funcionais	Número de elementos	Número de pontos internos interpolantes
malha 1	261	104	108	52	157
malha 2	501	200	204	100	301

Resultados Numéricos

Apresentam-se na tabela V.2.4-2 os resultados numéricos obtidos através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno para o valor da máxima tensão

cisalhante, isto é, o valor máximo da derivada do potencial na direção normal ao contorno, referentes às discretizações empregadas nesta modelagem.

Tabela V.2.4-2 - Resultados para máxima tensão cisalhante obtidos através dos Métodos dos Elementos Finitos e Elementos de Contorno.

	Valor da Tensão Cisalhante Máxima		
	Solução Analítica Aproximada	Método dos Elementos Finitos	Método dos Elementos de Contorno
Malha 1	0.15	0.1655	0.15912
Malha 2	0.15	0.15342	0.17668

De acordo com os resultados apresentados na tabela V.2.4-2, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito dos valores apresentados para a tensão cisalhante máxima e do comportamento das respostas numéricas, para os métodos numéricos empregados nesta análise:

Comparando-se a solução analítica aproximada com os valores obtidos através do Método dos Elementos Finitos, observa-se que as respostas numéricas, com o aumento do grau de refinamento utilizado nas discretizações, tendem a se aproximar deste valor, sendo que, talvez a convergência não seja ainda maior visto tratar-se de uma solução analítica aproximada;

Para o Método dos Elementos de Contorno devido, provavelmente, devido ao grande número de elementos e pontos internos interpolantes empregados na discretização mais refinada, e por tratar-se de um problema possuindo uma geometria bastante esbelta, o resultado numérico apresentou uma divergência com relação a solução de referência. Isto se confirma, pois na discretização menos refinada o método apresenta um bom desempenho, comparando-o com o resultado equivalente a modelagem realizada através do Método dos Elementos Finitos e com a solução analítica aproximada; e,

Destaca-se que, normalmente, quando o domínio físico do problema apresenta uma configuração geométrica esbelta, não são esperados bons desempenhos do Método dos Elementos de Contorno, ainda mais quando utilizam-se discretizações demasiadamente refinadas, devido aos erros numéricos acumulados no processo de integração para a montagem do sistema linear de equações algébricas.

V.2.5 - 5ª ANÁLISE

Neste item, apresenta-se a análise de um problema físico mais complexo, portanto não possuindo solução analítica. Tal problema é apresentado em Kelkar, (1990) [5], onde, em tal referência, avalia-se a taxa de convergência do Método dos Volumes Finitos, relativo às diversas iterações realizadas até a satisfação do critério de parada adotado, para casos envolvendo grandes diferenças entre as propriedades físicas dos materiais.

O problema físico em si consiste de um domínio físico quadrado, de lado unitário, onde existem duas sub-regiões distintas. Na figura V.2.5-1 ilustra-se o domínio físico, composto pelas sub-regiões I e II, e o sistema de coordenadas adotado.

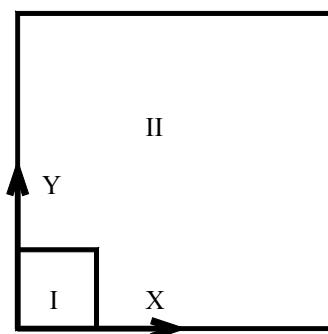


Figura V.2.5-1 - Representação do domínio físico, composto de duas sub-regiões distintas, e do sistema de coordenadas adotado.

A sub-região I é composta por um quadrado, sendo o comprimento de seu lado igual a 0.25 unidades de comprimento (u.c.), localizado no vértice inferior esquerdo do domínio físico do problema, e sobre esta sub-região prescreve uma ação de domínio de valor - 8 u.a.d.. A sub-região II é formada pelo domínio físico do problema subtraindo-se a sub-região I, vide figura V.2.5-1.

As condições de contorno impostas para este caso são condições de contorno essenciais, ao longo da aresta superior do domínio físico, e condições de contorno naturais nulas, representando a simetria existente no problema físico real, ao longo das demais arestas do domínio físico, conforme pode ser observado de acordo com a figura V.2.5-2, onde apresenta-se o domínio físico sobre a geometria real do problema. Tais condições de contorno podem ser expressas matematicamente através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 u = \bar{U} = 0 & & p / y = 1.0; 0 \leq x \leq 1.0 \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & & p / y = 0; 0 \leq x \leq 1.0 \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & & p / x = 0; 0 \leq y \leq 1.0 \\
 q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & & p / x = 1.0; 0 \leq y \leq 1.0
 \end{aligned}$$

Eq. V.2.5-1

A interpretação física deste caso é feita através da Transferência de Calor, onde pode-se supor a existência de uma placa infinitamente longa contendo diversos circuitos integrados, igualmente espaçados e possuindo uma taxa de geração de calor idêntica para cada um deles. Sendo que, as arestas desta placa são mantidas a uma temperatura fixa, de valor nulo, vide figura V.2.5-2.

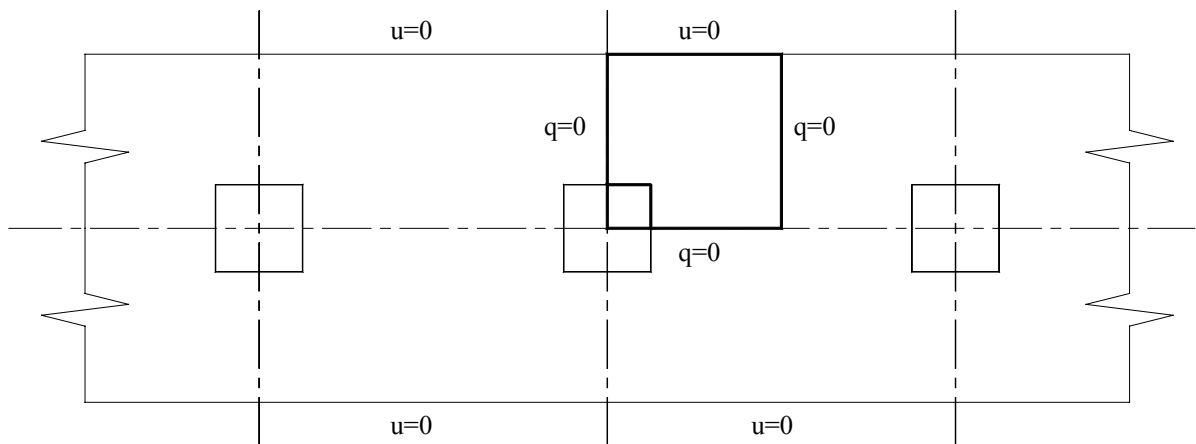


Figura V.2.5-2 - Representação do domínio físico e condições de contorno sobre a geometria real do problema.

Outra interpretação física interessante para este problema, dada através da Mecânica dos Sólidos, é supor este caso como representando um problema relacionado à deformação de uma membrana, sendo que, para tal membrana, na direção horizontal tem-se um comprimento infinitamente longo e na direção vertical um comprimento lateral igual a 2 unidades de comprimento, vide figura V.2.5-2.

Em tal membrana encontram-se igualmente espaçadas diversas sub-regiões onde impõem-se uma determinada distribuição de pressão de valor constante, igual à -8 u.a.d., expressa pela ação de domínio. Nos casos em que variam-se as propriedades físicas das sub-regiões em que é composto o domínio físico, segundo este enfoque, alteram-se as relações entre a rigidez da membrana e a rigidez das sub-regiões onde prescreve-se a pressão.

No domínio físico adotado para esta análise modela-se apenas $1/4$ de um circuito integrado, representado pela sub-região I, onde a ação de domínio, neste caso, a taxa de geração de calor de valor igual a -8 (u.a.d.) unidades de ação de domínio, encontra-se restrita apenas a esta sub-região.

Destaca-se que, neste caso, modela-se apenas uma pequena porção da geometria real do problema, aproveitando-se as simetrias existentes. Assim, pode-se realizar uma análise numérica mais precisa utilizando-se um grau de refinamento muito menor do que seria necessário para a obtenção de resultados semelhantes adotando-se uma discretização plena da geometria real do problema.

Objetivos Pretendidos

Como, neste caso, não existem soluções analíticas disponíveis, as soluções numéricas obtidas são comparadas com uma determinada solução numérica de referência, modelada para tal fim com um alto grau de refinamento. Assim sendo, objetiva-se a comparação das respostas numéricas calculadas através do Método dos Volumes Finitos e do Método dos Elementos de Contorno, para discretizações com um menor grau de refinamento em relação à solução numérica de referência.

Para a solução numérica de referência foram utilizados os resultados alcançados através do Método dos Volumes Finitos, obtidos aplicando-se uma discretização possuindo 108×108 volumes finitos, divididos igualmente ao longo do domínio físico do problema.

Como critério de comparação do desempenho, entre os métodos numéricos aqui empregados, adota-se o máximo valor alcançado para a grandeza potencial, isto é, a temperatura em relação à solução numérica de referência, para as diversas modelagens realizadas com diferentes níveis de refinamento, e com a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões variando.

São também apresentados alguns gráficos onde comparam-se as formas dos perfis de temperatura, ao longo de todo o domínio físico do problema, obtidos numericamente através do Método dos Elementos de Contorno com as respectivas soluções numéricas de referência para diferentes valores da relação entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Desta forma, fornece-se subsídios para uma avaliação do desempenho destes métodos numéricos empregados neste problema físico complexo, governado pela Equação de

Poisson. Destaca-se que, avalia-se apenas a precisão final dos resultados numéricos alcançados, não sendo feita nenhuma análise em relação ao tempo computacional de processamento, pelos motivos apresentados anteriormente, vide item V.1.

Discretizações Utilizadas

Nas modelagens realizadas empregam-se, para cada um dos métodos numéricos utilizados, duas discretizações com diferentes níveis de refinamento. Sendo que, conforme a convenção adotada para a confecção das discretizações via Método dos Elementos de Contorno onde são feitas comparações com o Método dos Volumes Finitos (item V.1), para cada uma destas discretizações empregam-se dois critérios para a adoção dos pontos internos interpolantes.

A seguir, na figura V.2.5-3, apresentam-se as discretizações utilizadas pelo Método dos Volumes Finitos, onde tem-se, respectivamente, 16 e 64 volumes finitos. Observe que a sub-região I encontra-se inteiramente limitada pelos volumes finitos.

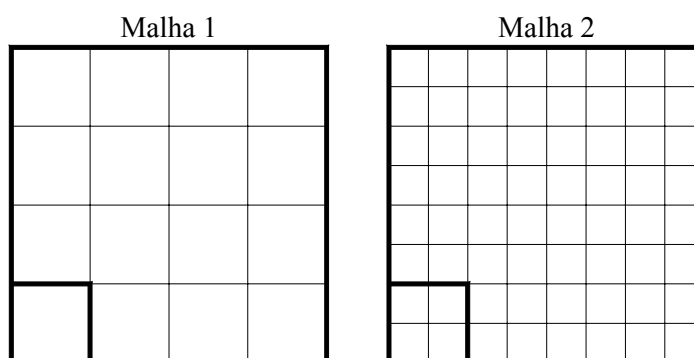


Figura V.2.5-3 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Volumes Finitos.

Assim sendo, para o Método dos Elementos de Contorno, adota-se como tamanho dos elementos de contorno quadráticos (referentes as duas discretizações indicadas na figura V.2.5-3) o comprimento lateral dos volumes finitos, o que, após este processo, representam discretizações contendo, respectivamente, 20 e 40 elementos de contorno quadráticos.

Na figura V.2.5-4 apresentam-se as diferentes disposições dos pontos internos interpolantes e elementos de contorno para as discretizações empregadas nas modelagens efetuadas pelo Método dos Elementos de Contorno, respectivamente, com 20 e 40 elementos de contorno quadráticos.

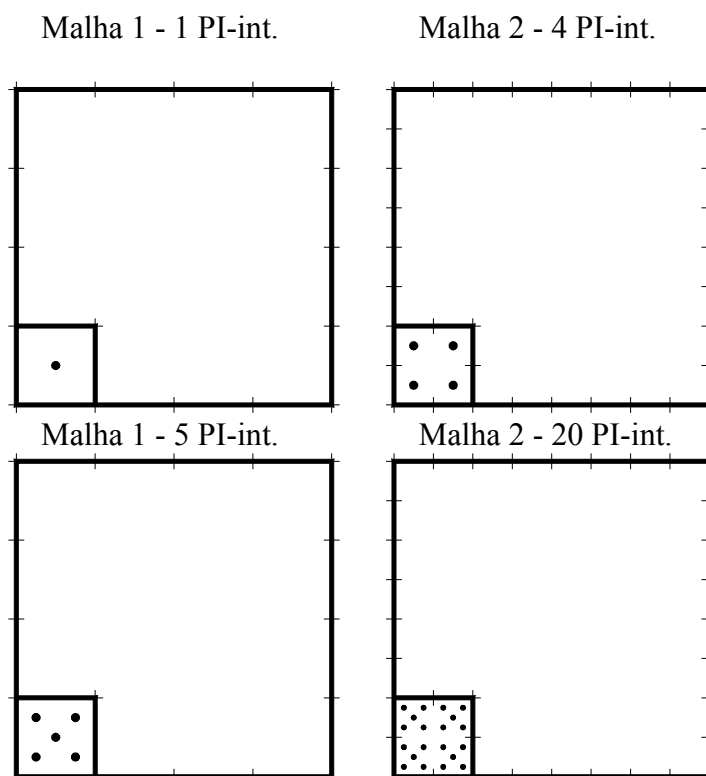


Figura V.2.5-4 - Representação das discretizações utilizadas nas modelagens via Método dos Volumes Finitos.

A seguir, na tabela V.2.5-1 encontram-se indicados os números de entidades, volumes finitos ou elementos de contorno, em que o domínio físico do problema é discretizado, assim como o número de pontos internos interpolantes, para as modelagens realizadas através do Método dos Volumes Finitos e Elementos de Contorno, referentes as discretizações com diferentes graus de refinamento.

Tabela V.2.5-1 - Indicação do número de volumes finitos, de elementos de contorno e de pontos internos interpolantes utilizados nas discretizações referentes às modelagens realizadas, respectivamente, via Método dos Volumes Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

	Método dos Volumes Finitos	Método dos Elementos de Contorno		
		Número de Pontos Internos Interpolantes (PI-int)		Número de Elementos de Contorno
	Número de Volumes Finitos (v.f.)	1 PI -int. para cada v.f.	5 PI -int. para cada v.f.	
Malha 1	16	1	5	20
Malha 2	64	4	20	40

Resultados Numéricos

Inicialmente, a fim de avaliar-se a acurácia dos resultados numéricos obtidos através do Método dos Elementos de Contorno, apresentam-se gráficos contendo linhas equipotenciais ao longo de todo o domínio físico do problema, variando-se a relação entre as propriedades físicas da sub-região I sobre a sub-região II, tendo os seguintes valores: 1; 10 e 100; e comparando-os com as respectivas soluções numéricas de referência obtidas através do Método dos Volumes Finitos, com uma discretização contendo 108 x 108 volumes finitos.

Nestes gráficos, para as modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno, aplicam-se as discretizações mais refinadas, possuindo ainda o maior número de pontos internos interpolantes, isto é, utiliza-se a discretização com as seguintes características: 40 elementos de contorno quadráticos e 20 pontos internos interpolantes sobre a sub-região I. Apenas com o propósito de obterem-se os valores para o potencial, para a confecção de tais gráficos, definiram-se 300 pontos internos ao longo da sub-região II seguindo o mesmo padrão apresentado na sub-região I para esta discretização.

A seguir na figura V.2.5-5, apresentam-se, então, os gráficos contendo o perfil de temperatura ao longo da placa, para as diferentes relações entre a propriedade física do circuito integrado (sub-região I) sobre a propriedade física da placa (sub-região II), referentes à solução numérica de referência e aquela calculada através do Método dos Elementos de Contorno com uma discretização contendo 40 elementos e 20 pontos internos interpolantes sobre a sub-região I.

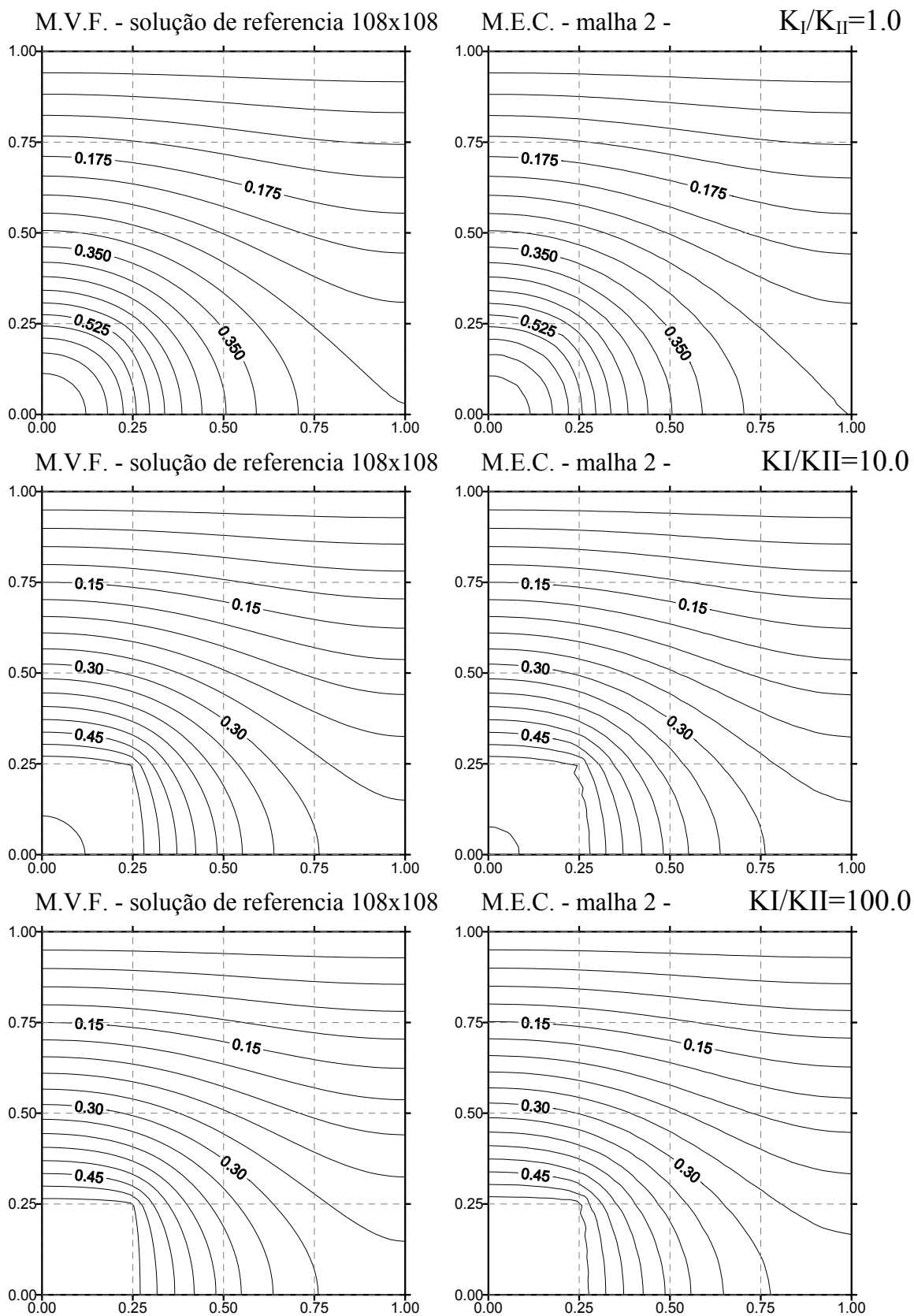


Figura V.2.5-5 - Representação dos perfis de temperatura ao longo do domínio físico, para as modelagens com diferentes relações entre a propriedade física da sub-região I (K_I) sobre a propriedade física da sub-região II (K_{II}), referentes à solução numérica de referência (108 x 108 volumes finitos) e a solução via Método dos Elementos de Contorno (40 elementos e 20 pontos internos interpolantes).

De acordo com os resultados apresentados na figura V.2.5-5, observa-se uma excelente concordância entre os perfis de temperatura para a solução numérica de referência e a solução numérica via Método dos Elementos de Contorno, para as diversas relações entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Comparando-se os diversos gráficos da figura V.2.5-5, variando-se a relação entre as propriedades físicas da sub-região I sobre a sub-região II, observa-se que, a medida que tal relação aumenta, o número de isotermas presentes na sub-região I diminui, pois tendo esta sub-região uma propriedade física maior em relação a sub-região II, o perfil de temperatura tende a ser mais homogêneo, isto faz com a temperatura máxima, alcançada no ponto de coordenadas (0.0,0.0), tende a diminuir.

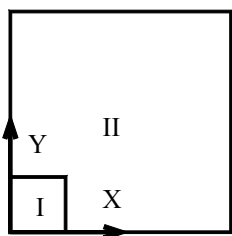
A fim de melhor avaliar este efeito, apresentam-se na tabela V.2.5-2 os resultados numéricos para o máximo valor do potencial, obtidos para as diversas modelagens realizadas, variando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões, para os diferentes graus de refinamento utilizados nas discretizações de ambos os métodos numéricos. Sendo que, tais valores são comparados com as soluções numéricas de referência.

De acordo com os valores apresentados na tabela V.2.5-2, observa-se uma excelente concordância entre os resultados numéricos para as discretizações menos refinadas utilizadas pelos Métodos dos Volumes Finitos e Elementos de Contorno e a solução numérica de referência. Destaca-se que, nas modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno, quando aplicam-se mais pontos internos interpolantes, para uma mesma discretização do contorno da geometria, melhora-se a representação das ações de domínio, desta forma, tem-se uma melhor precisão em tais casos.

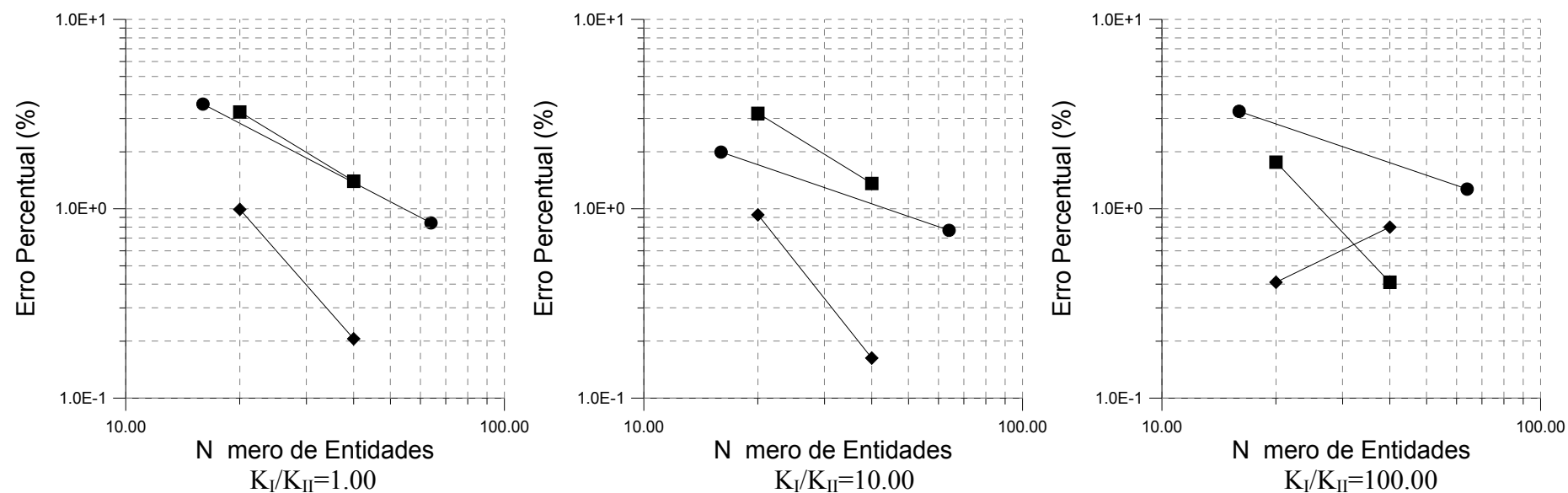
A seguir, apresentam-se, na figura V.2.5-6, os gráficos contendo o erro percentual para a temperatura máxima alcançada ao longo de todo o domínio físico para as diversas modelagens realizadas com os diferentes métodos numéricos, variando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Tabela V.2.5-2 - Resultados numéricos apresentados para o valor máximo da temperatura ao longo do domínio físico, variando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões, para as diferentes modelagens realizadas via Método dos Volumes Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

$K_I / K_{II} = 1.00$		solução de referência = 0.692808					
	Método dos Volumes Finitos		Método dos Elementos de Contorno				
	temp. máx.	erro (%)	modelagens com 1 e 4 pontos internos interpolantes		modelagens com 5 e 20 pontos internos interpolantes		
	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	
Malha 1	0.668071	3.57054191	0.670311	3.24722001	0.6859291	0.99290135	
Malha 2	0.68698	0.8412143	0.6831261	1.39748675	0.6913831	0.20567026	
$K_I / K_{II} = 10.00$		solução de referência = 0.542502					
	Método dos Volumes Finitos		Método dos Elementos de Contorno				
	temp. máx.	erro (%)	modelagens com 1 e 4 pontos internos interpolantes		modelagens com 5 e 20 pontos internos interpolantes		
	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	
Malha 1	0.553295	1.98948575	0.5251814	3.19272556	0.5374587	0.92963713	
Malha 2	0.546672	0.76866076	0.5351264	1.35955259	0.5416188	0.16280124	
$K_I / K_{II} = 100.00$		solução de referência = 0.524585					
	Método dos Volumes Finitos		Método dos Elementos de Contorno				
	temp. máx.	erro (%)	modelagens com 1 e 4 pontos internos interpolantes		modelagens com 5 e 20 pontos internos interpolantes		
	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	temp. máx.	erro (%)	
Malha 1	0.541731	3.26848842	0.5153381	1.76270766	0.5224386	0.40916153	
Malha 2	0.531245	1.269575	0.5224386	0.40916153	0.5287799	0.79966068	



Representação do domínio físico do problema



- Método dos Elementos de Contorno - 1 ponto interno interpolante
- ◆ Método dos Elementos de Contorno - 5 ponto interno interpolante
- Método dos Volumes Finitos

Figura V.2.5-6 - Erro percentual para a temperatura máxima presente no domínio físico para as diversas modelagens realizadas com os diferentes métodos numéricos, variando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Segundo os gráficos apresentados, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito das taxas de convergência referentes as diversas modelagens realizadas variando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões:

Para o Método dos Volumes Finitos, aumentando-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões provoca-se um aumento do número de iterações necessária para atingir o critério de parada preestabelecido. Isto pois, em tais casos, a distribuição dos perfis de temperaturas e fluxos tornam-se mais intrincados, requerendo assim um maior número de iterações;

Tal problema não se apresenta nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno, pois este método adota um esquema direto de solução do sistema linear de equações algébricas, não sendo portanto um método iterativo. Assim, as modelagens com diferentes relações entre as propriedades físicas das sub-regiões processam-se, praticamente, com o mesmo custo computacional para uma determinada discretização;

Comparando-se a precisão alcançada para o valor da temperatura máxima, nas modelagens realizadas via Método dos Volumes Finitos e via Método dos Elementos de Contorno, empregando-se o critério da adoção de 5 pontos internos interpolantes para cada volume de controle, observa-se uma nítida vantagem do Método dos Elementos de Contorno; e,

Finalmente, comparando-se as respostas numéricas apresentadas pelo Método dos Elementos de Contorno, referentes as modelagens realizadas adotando-se os dois critérios para a distribuição dos pontos internos interpolantes sobre a sub-região I, vê-se claramente que, quando empregam-se mais pontos internos interpolantes, melhora-se a representação das ações de domínio, refletindo em um aumento da precisão dos resultados numéricos. Embora no caso em que a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões é igual a 100 ($K_I/K_{II}=100$), referente a discretização utilizando 40 elementos de contorno quadráticos, houve uma queda na precisão desta resposta numérica.

V.2.6 - 6ª ANÁLISE

A seguir apresenta-se a análise de um problema através da aplicação do Método dos Elementos de Contorno, sendo tal problema governado pela Equação de Poisson, onde o termo independente desta equação é uma função escalar dependente do potencial, ou seja, $P = P(x, y, u(x, y))$ [6]. Desta forma, o problema torna-se não-linear e é resolvido iterativamente, como exposto no Capítulo IV.

Na figura V.2.6-1 ilustra-se o domínio físico e as condições de contorno impostas para este caso, bem como as características geométricas e a localização do sistema de coordenadas adotado. Tais condições de contorno podem ser expressas matematicamente através das seguintes equações:

$$u = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } x = 0; 0 \leq y \leq 10$$

$$u = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } x = 10; 0 \leq y \leq 10$$

$$u = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } y = 0; 0 \leq x \leq 10$$

$$u = \bar{U} = 0 \quad \text{p/ } y = 10; 0 \leq x \leq 10$$

Eqs. III.6.1-1

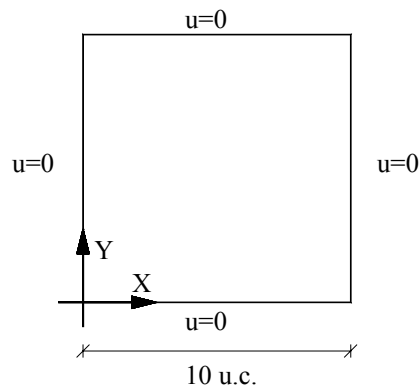


Figura V.2.6-1 - Representação do domínio físico, características geométricas e condições de contorno impostas.

A função escalar empregada para representar a ação de domínio, presente na Equação de Poisson, é expressa de acordo com a seguinte sentença matemática:

$$P(u(x; y)) = 10.00 \left[\text{sen} \left(\left| \frac{u(x; y)}{U_{\text{máx}}} \right| \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right] \quad \text{Eq. V.2.6-2}$$

onde U_{\max} indica o valor máximo do potencial presente ao longo de todo o domínio físico do problema.

Analisando-se tal equação, observa-se que os valores assumidos para o termo independente da Equação de Poisson variam entre 10 e 20 unidades de ações de domínio (u.a.d.), respectivamente, quando o valor do potencial é nulo, e quando se está sobre o(s) ponto(s) onde o potencial apresenta seu valor máximo.

Um problema físico possuindo tais características pode ser interpretado, através da Mecânica dos Sólidos, como tratando-se do caso de uma membrana em que a pressão imposta, representada pela ação de domínio, obedece a equação V.2.6-2.

Objetivo

Com esta análise pretende-se avaliar o comportamento do Método dos Elementos de Contorno frente a problemas não-lineares, em que a não-linearidade encontra-se no termo independente da Equação de Poisson. Verificando-se a estabilidade do esquema proposto para tal tratamento, vide Capítulo IV.

Como neste caso não se tem uma solução analítica disponível para a comparação dos resultados numéricos e tal problema não é modelado através de nenhum outro método numérico, não há portanto uma solução de referência. Esse exemplo limita-se a apresentação dos resultados numéricos obtidos e a ilustração do perfil final do termo independente sobre o domínio físico do problema.

Apenas como uma forma de ter-se um valor em ordem de grandeza para o deslocamento máximo da membrana, isto é, o valor máximo alcançado pelo potencial, e da forma de sua distribuição ao longo do domínio físico do problema, apresentam-se os resultados numéricos referentes a um problema, onde a ação de domínio é adotada como sendo igual a 20 unidades de ações de domínio (u.a.d.) em toda a extensão do domínio físico do problema.

Discretizações Utilizadas

Nas modelagens realizadas para este problema utiliza-se o conjunto de discretizações apresentadas na seção V.2.2 deste Capítulo, visto tratar-se do mesmo domínio físico. Sendo que, neste caso, empregam-se somente as seguintes combinações entre as discretizações e as disposições dos pontos internos interpolantes:

- Malha 2 e Pontos Internos PI3;
- Malha 3 e Pontos Internos PI3;
- Malha 4 e Pontos Internos PI3.

Resultados Numéricos

Inicialmente, apresentam-se, na figura V.2.6-2, os gráficos contendo a distribuição das linhas equipotenciais sobre o domínio físico do problema, para as modelagens realizadas com a utilização de elementos de contorno quadráticos, referentes ao caso da ação de domínio não-linear, expressa pela equação V.2.6-1, e ao caso da ação de domínio constante igual a 20 unidades de ações de domínio (u.a.d.).

Tais resultados são obtidos, nestes dois problemas distintos, utilizando-se a discretização representada pela malha 4, junto com a disposição de pontos internos interpolantes PI3, conforme a figura V.2.2-3.

Ação de Domínio Não-Linear P = 20.00

$$P(u(x; y)) = 10.00 \left[\operatorname{sen} \left(\left| \frac{u(x; y)}{U_{\text{máx}}} \right| \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right]$$

Ação de Domínio Constante:

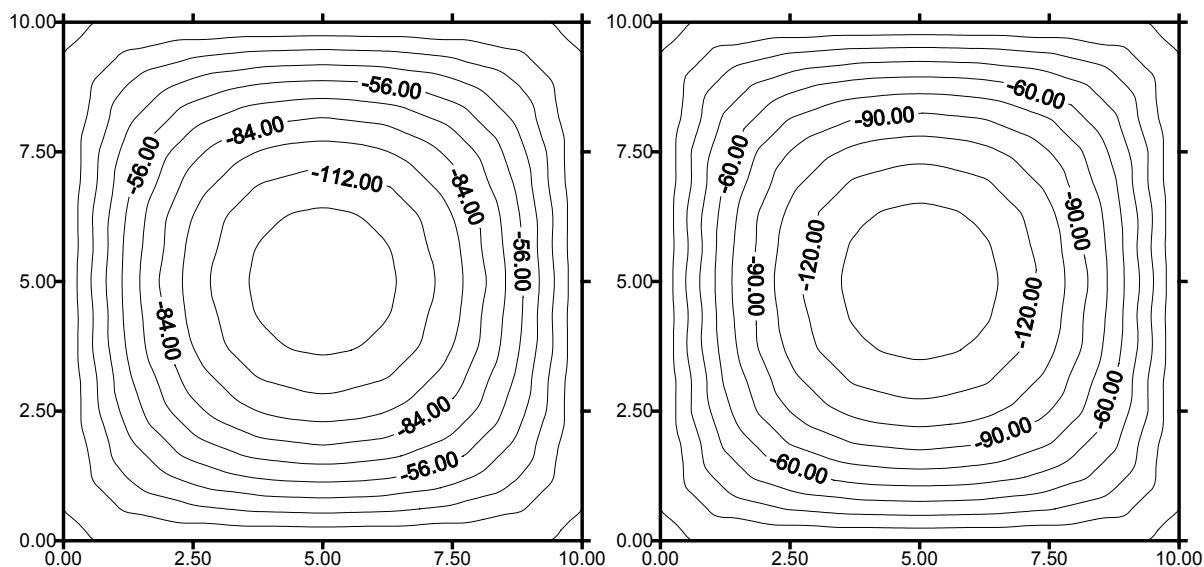


Figura VI.2.6-2 - Representação das linhas equipotenciais sobre o domínio físico, referentes ao caso da ação de domínio não-linear e ao caso da ação de domínio constante.

Observando-se a figura V.2.6-2, percebe-se que a distribuição do potencial apresenta-se de forma similar em ambos os casos e que, como esperado, o valor do deslocamento máximo nestas modelagens ocorre no caso onde a ação de domínio é constante, pois nesta situação, tem-se uma maior força resultante atuante sobre a membrana.

Como critério de convergência para atingir-se a solução numérica do problema não-linear, adotou-se que a máxima diferença entre os valores do potencial, para todos os pontos internos interpolantes, referentes a duas iterações consecutivas, deva ser menor que 1×10^{-9} .

Após atingida a convergência, para o caso não-linear, tem-se representado na figura V.2.6-3 o perfil final do valor da ação de domínio, expressa pela equação V.2.6-2.

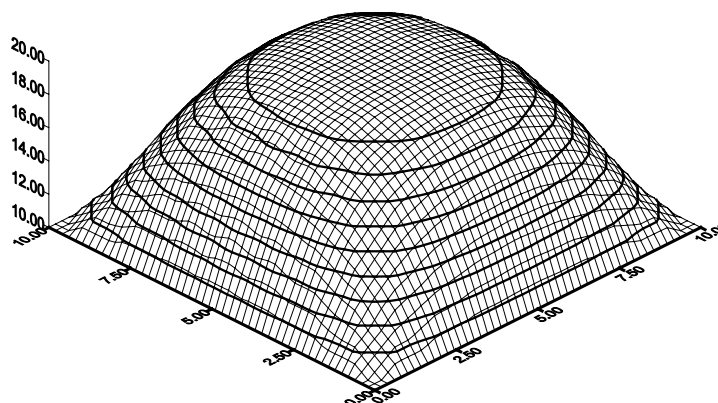


Figura VI.2.6-3 - Representação do perfil para os valores da ação de domínio, após atingida a convergência da solução numérica, para o caso não-linear expresso de acordo com a equação V.2.6-2.

Destaca-se que, no caso da ação de domínio ser constante igual a 20.0 unidades de ações de domínio (u.a.d.) ao longo de todo o domínio físico, o valor analítico máximo do potencial, isto é, o ponto de deslocamento máximo em uma membrana com tal geometria e sujeita a esta ação de domínio, é de -147.3427.

A seguir na tabela V.2.6-1, referente ao caso não-linear, expressam-se os resultados numéricos obtidos para o valor máximo do potencial e o número de iterações necessárias para a satisfação do critério de convergência adotado, para as modelagens realizadas empregando-se as discretizações anteriormente mencionadas, utilizando-se de elementos de contorno lineares ou quadráticos.

Tabela VI.2.6-1 - Resultados para o valor máximo do potencial ao longo do domínio físico e o número de iteração, obtidos numericamente através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos lineares ou quadráticos, referentes às diversas modelagens realizadas.

Elementos de Contorno	Malha 4 - PI3		Malha 3 - PI3		Malha 2 - PI3	
	Número de Iterações	Valor Máximo Potencial	Número de Iterações	Valor Máximo Potencial	Número de Iterações	Valor Máximo Potencial
lineares	10	-136.8785	10	-136.9836	10	-137.4341
quadráticos	10	-136.8461	10	-136.851	11	-136.8757

De acordo com a tabela V.2.6-1, observa-se que em ambas as modelagens realizadas, utilizando-se de diferentes tipos de elementos de contorno, com o aumento do número de pontos nodais funcionais o resultado para o valor máximo do potencial apresenta

um comportamento monotônico. Sendo que, os valores referentes às análises empregando-se elementos de contorno quadráticos apresentam uma maior estabilidade.

Segundo os resultados apresentados, pode-se considerar que, para os casos onde a não-linearidade encontra-se expressa junto a ação de domínio, nos problemas governados pela Equação de Poisson, o Método dos Elementos de Contorno apresentou um excelente desempenho, necessitando, em média, de apenas 10 iterações para a satisfação do critério de convergência adotado.

Referências Bibliográficas

- [1] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., “*Teoria da Elasticidade*”, Ed. Guanabara Dois, 3ª Edição, Rio de Janeiro, 1980.
- [2] POPOV, E.P., “*Introdução à Mecânica dos Sólidos*”, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1978.
- [3] VAREJÃO, L.M.C., “Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer”, University of Minnesota, *Tese de Doutorado*, EUA, 1979.
- [4] OLIVEIRA, P.C., “Esquema Flux-Spline Aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural”, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, *Tese de Doutorado*, São Paulo, 1997.
- [5] KELKAR, K.M., “Iterative Method for the Numerical Prediction of Heat Transfer in Problems Involving Large Differences in Thermal Conductivity”, *Numerical Heat Transfer*, Part B, vol. 17, pp. 113-128, 1990.
- [6] PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. e WROBEL, L.C., “*The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.

Capítulo VI

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

VI.1 - Introdução

Nesta seção do trabalho são apresentadas diversas aplicações numéricas governadas pela equação de Difusão, equação I.2-5. Inicialmente apresentam-se alguns casos relativamente simples, por possuírem soluções analíticas, onde objetiva-se a verificação do desempenho alcançado nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se elementos lineares e quadráticos. A seguir, analisa-se um caso de maior complexidade, onde compara-se este método numérico frente ao Método dos Volumes Finitos.

Nestas aplicações, as mesmas interpretações físicas e analogias apresentadas no Capítulo V, quando da análise dos problemas governados pela Equação de Poisson, também são válidas. Sendo que, em tais aplicações, deve-se levar em conta a variação temporal existente, até atingir-se um estágio em que o problema entra em regime permanente, condição em que a solução apresentada tende para a resposta do mesmo problema físico analisado através do modelo matemático expresso pela Equação de Poisson.

Na análise apresentada em que são realizadas comparações entre o Método dos Elementos de Contorno e Método dos Volumes Finitos, adota-se o mesmo critério empregado anteriormente para a confecção das discretizações a serem utilizadas por estes métodos numéricos. Neste caso, as ressalvas feitas anteriormente com relação a comparação entre diferentes métodos numéricos também são verdadeiras e devem ser levadas em conta.

Um ponto importante que deve ser destacado é que adota-se como critério de comparação entre as soluções numéricas e analítica o erro percentual presente entre tais valores. Mas, a medida que o valor tomado como referência, isto é, a solução analítica, aproxima-se de um valor nulo o divisor da expressão para o erro percentual aproxima-se de zero, com isto esta medida deixa de refletir a concordância entre tais valores.

A título de ilustração do comentário feito acima, no caso limite, imagina-se um problema onde a solução analítica apresente um valor nulo, desta forma, para qualquer valor apresentado para a solução numérica, diferente de zero, tem-se um erro percentual infinito. Este comportamento da função erro percentual encontra-se claramente em algumas das análises apresentadas a seguir, onde, devido a este fato, também expressam-se em tabelas os valores absolutos das soluções numérica e analítica, a fim de ter-se mais um parâmetro para a avaliação da resposta numérica.

De maneira geral, objetiva-se com estas análises a comparação entre as soluções numéricas, obtidas através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos, e a solução analítica, para determinados pontos selecionados sobre o domínio físico do problema, de modo a poder acompanhar-se o desenvolvimento das soluções numéricas ao longo do tempo. Caso não exista solução analítica disponível, a solução numérica é comparada com uma determinada solução numérica de referência, modelada para tal fim com um alto grau de refinamento.

Desta forma, apresentam-se os subsídios necessários para uma avaliação do desempenho do Método dos Elementos de Contorno frente a esta classe de problemas governados pela Equação de Difusão. Sendo que ainda, em determinados casos, são feitas comparações entre diferentes métodos numéricos, em termos da precisão alcançada para a resposta numérica.

Como a maioria das análises efetuadas para esta classe de problemas possuem o mesmo domínio físico, representado por um quadrado de lado unitário, a seguir, apresenta-se a discretização empregada em tais casos, de forma a tornar a exposição dos problemas menos repetitiva para o leitor.

Discretização Utilizada

Desta forma, nas modelagens onde o domínio físico é representado por um quadrado, adota-se o mesmo conjunto de discretizações para todos os casos, variando-se apenas o tipo de elemento de contorno empregado e mantendo-se fixo o mesmo número de pontos nodais e de pontos internos interpolantes. Tem-se, então, na figura VI.1-1, a representação dos pontos nodais geométricos sob o contorno do domínio físico do problema, composto por um quadrado de lado unitário, assim como a indicação da distribuição dos pontos internos interpolantes sobre o domínio físico do problema.

Na tabela VI.1-1 encontram-se indicados os números de pontos nodais funcionais, de elementos de contorno e de pontos internos interpolantes resultantes do processo de discretização do domínio físico para as análises realizadas através do Método dos Elementos de Contorno utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos.

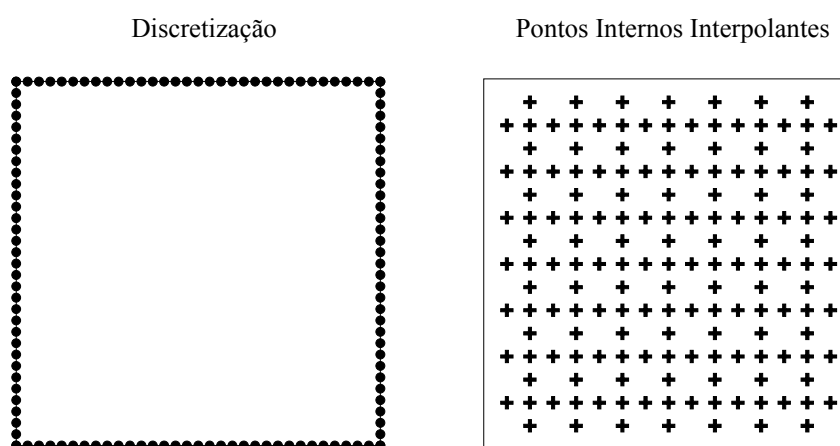


Figura VII.1-1 - Representação da discretização e do conjunto de pontos internos interpolantes utilizados nas modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno para as análises dos casos transientes, onde o domínio físico é composto por um quadrado de lado unitário.

Tabela VII.1-1 - Indicação do número de pontos nodais funcionais, de pontos internos interpolantes e de elementos de contorno utilizados, variando-se o tipo de elemento de contorno.

Número de Pontos Nodais Funcionais	Número de Pontos Internos Interpolantes	Número de Elementos de Contorno	
		Lineares	Quadráticos
132	161	128	64

Discretização Temporal

Nos casos transientes faz-se necessária a adoção de um esquema de avanço da solução numérica ao longo do tempo [1, 2, 3]. Desta forma, substitui-se o tempo contínuo por determinados instantes, próximos o suficiente para representarem as derivadas temporais presentes na equação integral de governo através de um esquema do tipo diferenças finitas, vide Capítulo IV.

Geralmente, nas análises envolvendo o Método dos Elementos de Contorno, recomenda-se a adoção de intervalos de tempo que permitam ao menor elemento de contorno presente na discretização captar a “passagem” do carregamento transiente. Assim, aconselha-se a utilização da seguinte relação [1, 2, 4]:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{c}{\lambda K} \quad \text{Eq. VI.1-1}$$

onde: λ e K são as propriedades físicas relacionadas ao domínio físico do problema; e c representa o comprimento do menor dos elementos de contorno presentes na discretização.

Sendo assim, nas análises efetuadas em que emprega-se a discretização indicada na figura VI.1-1, utiliza-se um intervalo de tempo igual a 0.01 unidades de tempo (u.t.), pois, nestes casos, as propriedades físicas são unitárias e o comprimento do menor elemento de contorno, modelando-se o problema com elementos de contorno lineares, é 0.03125 unidades de comprimento (u.c.). Deste modo, verifica-se que o valor adotado para o intervalo de tempo atende a recomendação expressa pela equação VI.1-1.

VI.2 - Aplicações Numéricas

VI.2.1 - 1ª ANÁLISE

Nesta seção é apresentado o caso em que sobre o contorno do domínio físico do problema, formado por quadrado de lado unitário, impõem-se condições de contorno essenciais e naturais, dadas de acordo com as seguintes expressões matemáticas:

$$\begin{aligned} \bar{U}(0; y; t) = +1 & \quad \bar{U}(1; y; t) = 0 & \text{Eq. VI.2.1-1} \\ \bar{Q}(x; 0; t) = \frac{\partial u(x; 0; t)}{\partial n} = 0 & \quad \bar{Q}(x; 1; t) = \frac{\partial u(x; 1; t)}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$

Tais condições encontram-se ilustradas na figura VI.2.1-1, onde também pode-se observar o sistema de coordenadas cartesianas adotado.

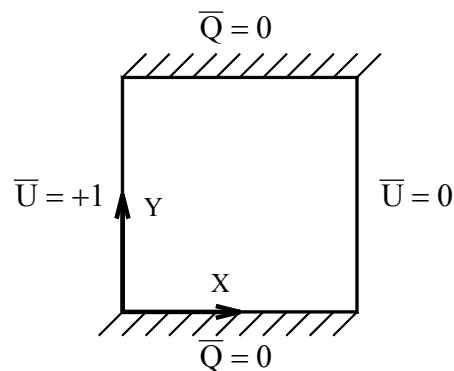


Figura VII.2.1-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno.

No instante inicial prescreve-se, em todo o domínio físico do problema, o potencial possuindo um valor nulo, isto é, a condição inicial é tomada como sendo nula. Matematicamente tal condição pode ser representada de acordo com a seguinte expressão:

$$u(x; y; t) = 0 \quad \text{Eq. VI.2.1-2}$$

Este caso pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo um problema em que, no instante inicial, toda a placa encontra-se a uma temperatura nula, sendo que, nos demais intervalos de tempo, impõem-se diferentes temperaturas ao longo de suas arestas verticais, mantendo-se suas arestas horizontais isoladas

termicamente. Desta forma, o perfil de temperaturas, ao longo do domínio físico, altera-se até atingir-se a condição de estacionaridade.

Solução Analítica

De acordo com a geometria do problema, condições de contorno e condição inicial impostas, este caso torna-se unidimensional, significando que somente existe variação das incógnitas do problema ao longo da direção coordenada X.

A solução analítica deste caso, apresentada em Taigbenu (1984) [5], é representada pela seguinte expressão:

$$u(x; y; t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-n^2 \pi^2 t) \text{sen}[(1-x)n\pi] \quad \text{Eq. VI.2.1-3}$$

Sendo que os valores apresentados para a solução analítica neste trabalho são calculados utilizando-se dos primeiros 500 termos desta série.

Resultados Numéricos

Inicialmente apresentam-se, na figura VI.2.1-2, gráficos contendo a distribuição da grandeza potencial, ao longo de todo o domínio físico do problema, para diferentes intervalos de tempo, referente à modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos. Tais gráficos são apresentados com o propósito de proporcionar uma melhor compreensão do problema físico, pois, deste modo, pode-se visualizar o avanço da solução numérica com o decorrer do tempo de análise.

Para cada um dos determinados intervalos de tempo analisados, ilustra-se a distribuição do potencial, obtida numericamente pelo Método dos Elementos de Contorno, através da representação das linhas equipotenciais, isto é, as isotermas, sobre o domínio físico do problema. Assim, pode-se observar o comportamento da solução numérica em todo o domínio, verificando-se, por exemplo, a uniformidade da resposta ao longo da direção Y.

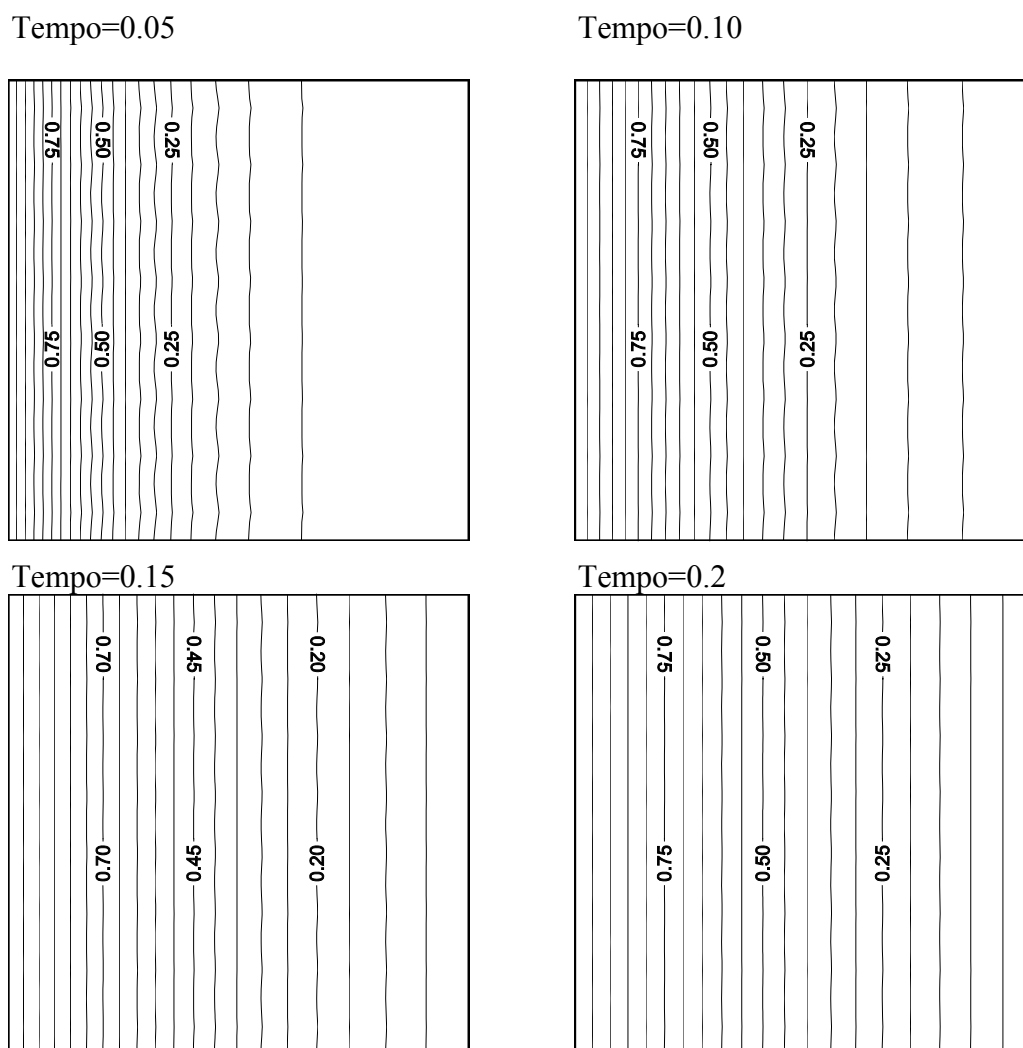


Figura VI.2.1-2 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos.

Na figura VI.2.1-3 encontram-se representados os pontos selecionados no interior do domínio físico do problema (pontos A, B e C), onde são comparados os valores obtidos numericamente para o potencial ao longo de diversos intervalos de tempo. As coordenadas de tais pontos sobre o eixo X são, respectivamente, $X=0.25$; $X=0.50$ e $X=0.75$.

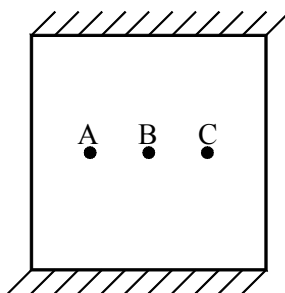


Figura VI.2.1-3 - Representação dos pontos selecionados no interior do domínio físico para a comparação dos resultados numéricos

A seguir, apresenta-se na figura VI.2.1-4 os gráficos representando a variação do potencial em tais pontos, isto é, a temperatura, ao longo do tempo, obtidos analiticamente e numericamente através do Método dos Elementos de Contorno utilizando-se de elementos de contorno quadráticos. Nesta figura pode-se observar a ótima coincidência entre a solução numérica, representada em apenas alguns intervalos de tempo e os valores calculados analiticamente.

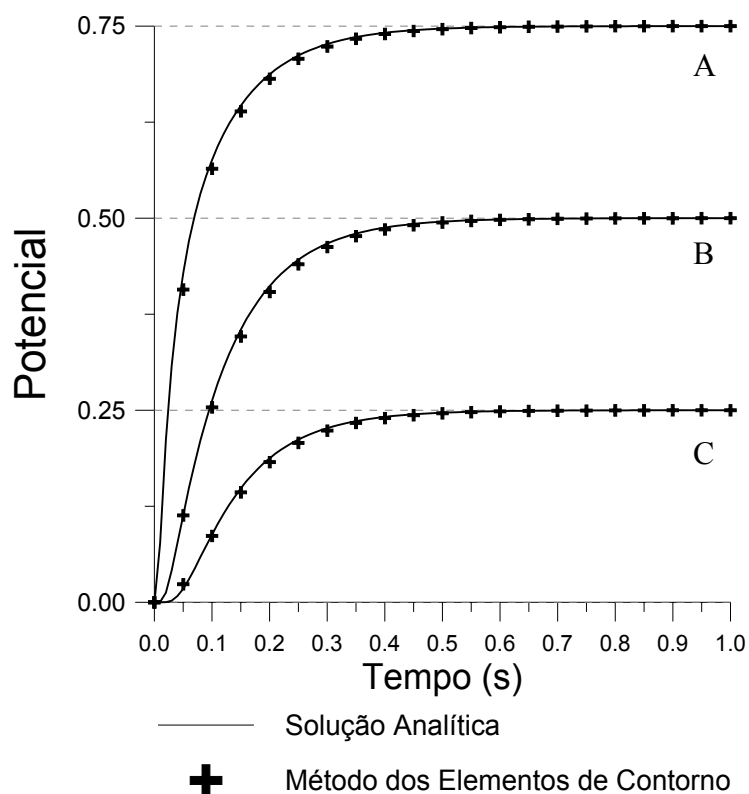


Figura VI.2.1-4 - Representação da variação do potencial ao longo do tempo nos pontos selecionados sobre o domínio físico.

Nas tabelas VI.2.1-1 e VI.2.1-2 apresentam-se as comparações entre a solução analítica e as soluções numéricas, obtidas, respectivamente, através da aplicação de elementos de contorno lineares e quadráticos, para os pontos selecionados em determinados instantes de tempo. Destaca-se que, inicialmente, tem-se um elevado erro percentual devido ao fato dos valores para o potencial encontrarem-se situados muito próximos de zero.

Os resultados apresentados nas tabelas VI.2.1-1 e VI.2.1-2 podem ser melhor visualizados em uma forma gráfica, conforme expresso na figura VI.2.1-5, plotando-se para cada um dos pontos selecionados os erros percentuais, em escala logarítmica, para as diferentes modelagens realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos.

Tabela VI.2.1-1 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos selecionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno lineares.

Tempo	Solução Analítica			Elementos de Contorno Lineares			Erro Percentual (%)		
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C
	X=0.25	X=0.50	X=0.75	X=0.25	X=0.50	X=0.75	X=0.25	X=0.50	X=0.75
0.02	0.21129955	0.01241933	0.00017683	0.1917143	0.02462007	0.00278721	9.26894903	98.2399108	1476.17171
0.04	0.37675912	0.07709976	0.00800005	0.3518083	0.08099483	0.01427562	6.62248531	5.05198989	78.444233
0.06	0.47048598	0.14889977	0.03007478	0.451378	0.1449699	0.03479279	4.06132917	2.63927259	15.6876065
0.08	0.53195893	0.21112271	0.05901467	0.5174235	0.2036259	0.06020169	2.73243525	3.55092688	2.0113931
0.1	0.5760595	0.26275627	0.08834391	0.5645462	0.2538561	0.08648527	1.99863	3.38723404	2.10386432
0.12	0.60948439	0.30523485	0.11506201	0.5999625	0.2959242	0.1112149	1.56228534	3.05032433	3.34350751
0.14	0.63568044	0.34012014	0.13821291	0.6275223	0.3308994	0.1332939	1.28337088	2.71102328	3.55900566
0.16	0.65662353	0.36875907	0.15777337	0.649462	0.3599069	0.1524225	1.09065937	2.40052985	3.39149088
0.18	0.67356114	0.39226833	0.17408321	0.6671859	0.3839458	0.1687044	0.94649711	2.1216432	3.08979388
0.2	0.6873495	0.41156643	0.18758654	0.6816385	0.4038617	0.1824174	0.83087214	1.87205019	2.75560236
0.3	0.72669155	0.46704011	0.22669613	0.7234716	0.462498	0.2234993	0.44309775	0.97253183	1.41018199
0.4	0.74131357	0.48771559	0.24131366	0.7396567	0.4853711	0.2396576	0.2235043	0.48070885	0.68626699
0.5	0.74676251	0.4954215	0.24676252	0.7459654	0.4942935	0.2459655	0.10674266	0.22768589	0.32298904
0.6	0.74879336	0.49829356	0.24879336	0.7484262	0.497774	0.2484262	0.04903408	0.10426765	0.14757789
0.7	0.74955028	0.499364	0.24955028	0.7493861	0.4991317	0.2493861	0.02190344	0.04651838	0.06578927
0.8	0.74983238	0.49976296	0.24983238	0.7497606	0.4996613	0.2497605	0.00957345	0.02034091	0.02877322
0.9	0.74993753	0.49991165	0.24993753	0.7499066	0.4998679	0.2499066	0.00412414	0.00875194	0.0123745
1	0.74997672	0.49996707	0.24997672	0.7499636	0.4999485	0.2499636	0.00174891	0.00371464	0.00524704
1.25	0.74999803	0.49999721	0.24999803	0.7499966	0.4999951	0.2499966	0.00019006	0.00042151	0.00057018
1.5	0.74999983	0.49999976	0.24999983	0.7499997	0.4999996	0.2499997	1.7673E-05	3.2637E-05	5.3019E-05
1.75	0.74999999	0.49999998	0.24999999	0.75	0.5	0.25	1.8934E-06	4.0166E-06	5.6803E-06
2	0.75	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	1.6057E-07	3.4063E-07	4.8172E-07

Tabela VI.2.1-2 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos selecionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno quadráticos.

Tempo	Solução Analítica			Elementos de Contorno Quadráticos			Erro Percentual (%)		
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C
	X=0.25	X=0.50	X=0.75	X=0.25	X=0.50	X=0.75	X=0.25	X=0.50	X=0.75
0.02	0.21129955	0.01241933	0.00017683	0.1916254	0.02460596	0.00275794	9.311022	98.1262975	1459.61721
0.04	0.37675912	0.07709976	0.00800005	0.3517274	0.08096181	0.01424306	6.64395792	5.00916226	78.0372353
0.06	0.47048598	0.14889977	0.03007478	0.451314	0.1449263	0.03476151	4.07493212	2.66855404	15.5835991
0.08	0.53195893	0.21112271	0.05901467	0.5173703	0.2035786	0.06017025	2.74243602	3.57333091	1.95811822
0.1	0.5760595	0.26275627	0.08834391	0.5645003	0.2538088	0.08645348	2.00659793	3.40523551	2.13984869
0.12	0.60948439	0.30523485	0.11506201	0.5999221	0.2958788	0.1111835	1.56891389	3.06519813	3.37079714
0.14	0.63568044	0.34012014	0.13821291	0.6274865	0.3308567	0.1332636	1.28900264	2.72357767	3.58092836
0.16	0.65662353	0.36875907	0.15777337	0.6494301	0.3598674	0.1523939	1.09551756	2.41124146	3.40961815
0.18	0.67356114	0.39226833	0.17408321	0.6671574	0.3839096	0.1686779	0.95072835	2.13087158	3.10501649
0.2	0.6873495	0.41156643	0.18758654	0.6816131	0.4038289	0.1823932	0.83456749	1.88001974	2.76850308
0.3	0.72669155	0.46704011	0.22669613	0.723458	0.4624796	0.2234857	0.44496924	0.97647153	1.41618121
0.4	0.74131357	0.48771559	0.24131366	0.7396498	0.4853618	0.2396508	0.22443508	0.4826157	0.6890849
0.5	0.74676251	0.4954215	0.24676252	0.7459622	0.494289	0.2459622	0.10717118	0.22859421	0.32432636
0.6	0.74879336	0.49829356	0.24879336	0.7484247	0.4977719	0.2484247	0.04923441	0.10468909	0.1481808
0.7	0.74955028	0.499364	0.24955028	0.7493854	0.4991307	0.2493854	0.02199683	0.04671864	0.06606977
0.8	0.74983238	0.49976296	0.24983238	0.7497602	0.4996609	0.2497602	0.00962679	0.02042095	0.0288933
0.9	0.74993753	0.49991165	0.24993753	0.7499065	0.4998677	0.2499065	0.00413748	0.00879195	0.01241451
1	0.74997672	0.49996707	0.24997672	0.7499635	0.4999484	0.2499635	0.00176224	0.00373465	0.00528705
1.25	0.74999803	0.49999721	0.24999803	0.7499965	0.4999951	0.2499965	0.00020339	0.00042151	0.00061018
1.5	0.74999983	0.49999976	0.24999983	0.7499997	0.4999995	0.2499997	1.7673E-05	5.2637E-05	5.3019E-05
1.75	0.74999999	0.49999998	0.24999999	0.75	0.5	0.25	1.8934E-06	4.0166E-06	5.6803E-06
2	0.75	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	1.6057E-07	3.4063E-07	4.8172E-07

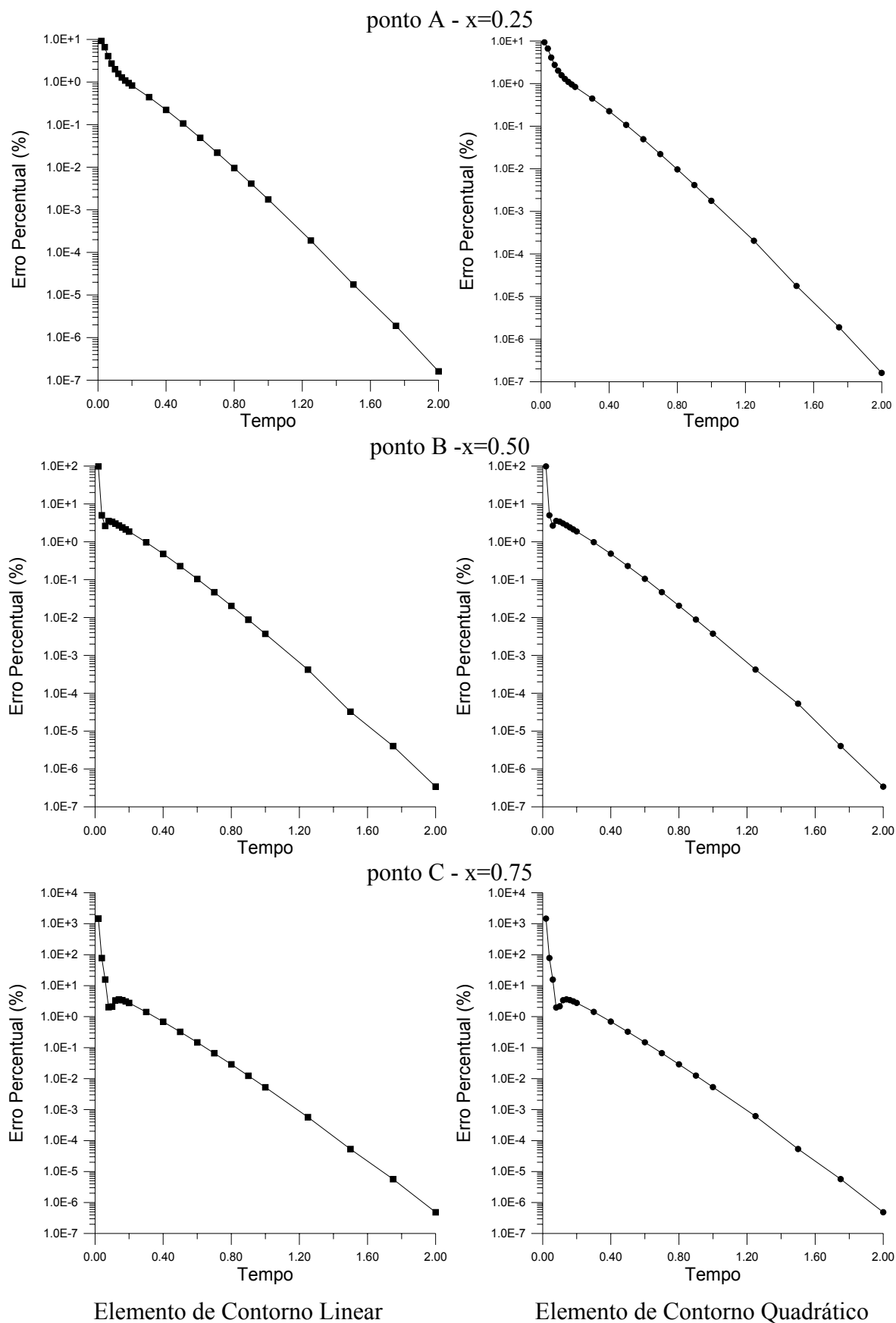


Figura VI.2.1-5 - Variação do erro percentual ao longo de tempo, entre as soluções numéricas e analítica, referentes aos pontos selecionados no interior do domínio físico do problema.

De acordo com as diversas tabelas e gráficos apresentados, indicando a comparação entre as soluções numéricas e analítica nos pontos selecionados em determinados intervalos de tempo, pode-se tecer os seguintes comentários a respeito da influência dos diferentes tipos de elementos de contorno utilizados nas modelagens:

- Com a aplicação dos diferentes tipos de elementos de contorno, praticamente, não houve alteração no comportamento das soluções numéricas ao longo do tempo, talvez, devido ao fato de que tais resultados sejam para pontos no interior do domínio físico do problema, onde o método sabidamente apresenta uma maior precisão, e por utilizar-se uma distribuição com um razoável nível de refinamento, o que, de certa forma, diminui a influência do tipo de elemento de contorno utilizado nas modelagens; e,
- Destaca-se o excelente comportamento do Método dos Elementos de Contorno, que representou mais do que satisfatoriamente a variação da solução ao longo do tempo, até atingir-se o estágio em que o problema entra em regime permanente.

VI.2.2 - 2ª ANÁLISE

Nesta análise o contorno do domínio físico do problema encontra-se submetido unicamente a condições de contorno naturais, conforme indicado na figura VI.2.2-1, sendo que tais condições são representadas matematicamente de acordo com as expressões dadas a seguir:

$$\frac{\partial u(0; y; t)}{\partial n} = +1 \qquad \frac{\partial u(1; y; t)}{\partial n} = -1 \qquad \text{Eqs. VI.2.2-1}$$

$$\frac{\partial u(x; 0; t)}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial u(x; 1; t)}{\partial n} = 0 \qquad \text{Eqs. VI.2.2-2}$$

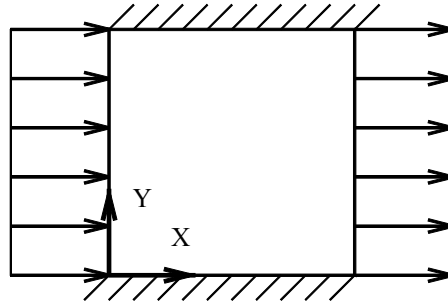


Figura VI.2.2-1 - Representação do domínio físico e condições de contorno.

No instante inicial o domínio físico do problema encontra-se sobre uma distribuição nula do potencial, isto é expresso matematicamente através da condição inicial, representada de acordo com a seguinte expressão:

$$u(x; y; 0) = 0 \quad \text{Eq. VI.2.2-3}$$

Deste modo, um problema físico apresentando tais condições de contorno e condição inicial pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo o caso em que, no instante inicial, toda a placa encontra-se a uma temperatura nula, e, a partir deste instante, mantêm-se as arestas horizontais isoladas termicamente, enquanto que nas arestas verticais impõem-se fluxos de calor. Desta forma, o perfil de temperaturas, ao longo do domínio físico, altera-se até atingir-se o regime permanente.

Solução Analítica

Este problema torna-se unidimensional devido às condições de contorno impostas e à geometria do domínio físico do problema. Desta forma, a solução analítica, apresentada por Taigbenu (1985) [5], é dada de acordo com a seguinte expressão:

$$u(x; y; t) = -x + \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \exp[-(2k-1)^2 \pi^2 t] \cos[(2k-1)\pi x] \quad \text{Eq. VI.2.2-4}$$

Sendo que os valores apresentados para a solução analítica deste caso foram calculados utilizando-se os primeiros 300 termos desta série.

Resultados Numéricos

Na figura VI.2.2-2, apresentada a seguir, têm-se os gráficos relativos à distribuição do potencial ao longo de todo o domínio físico do problema, para alguns intervalos de tempo, referente à modelagem realizada com a utilização de elementos de contorno quadráticos. Assim, têm-se os subsídios necessários para uma melhor interpretação

da física envolvida neste problema, através da visualização do comportamento da solução numérica em diferentes intervalos de tempo.

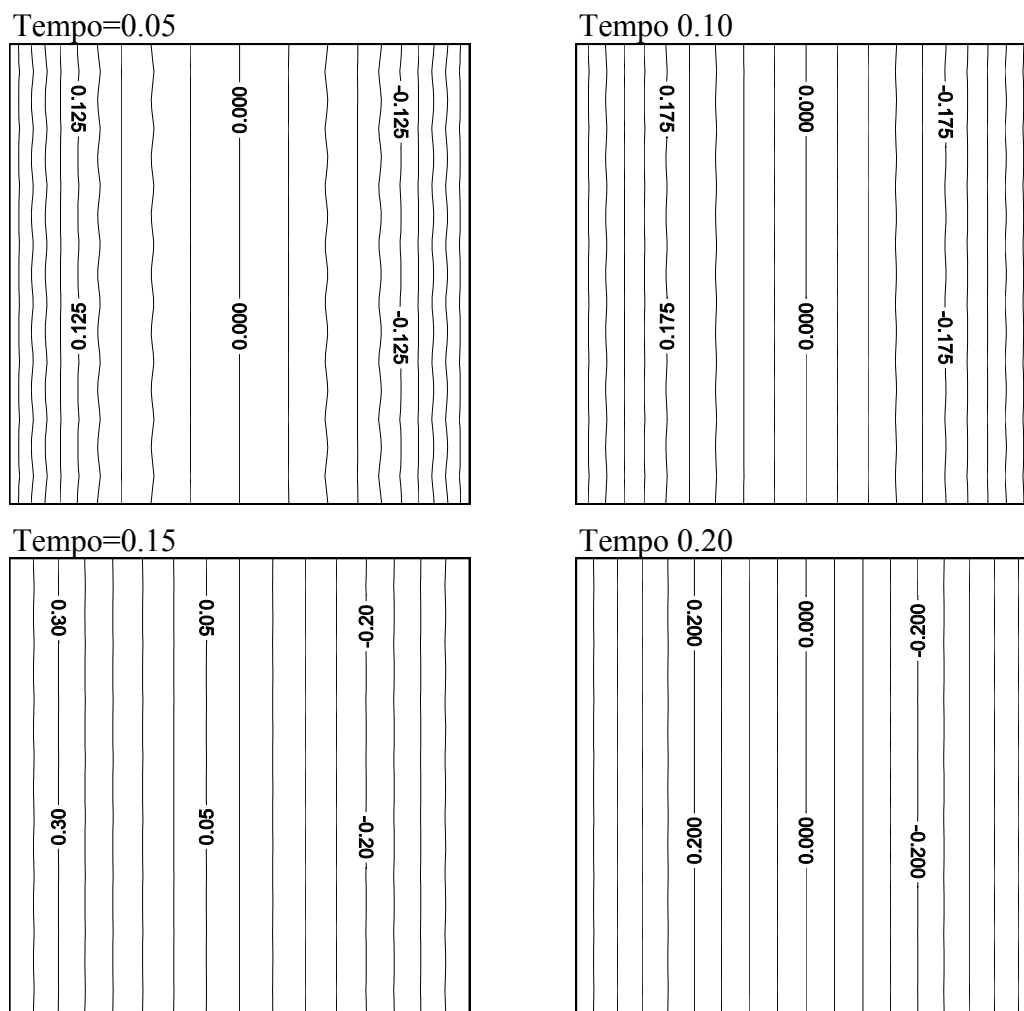


Figura VI.2.2-2 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos.

A solução deste caso em termos do potencial é anti-simétrica em relação a um eixo vertical passando pelo centro do domínio físico do problema. Deste modo, com o propósito de visualizar a variação da resposta ao longo de diversos intervalos de tempo, são definidos um conjunto de pontos posicionados sobre o domínio físico de acordo com a figura VI.2.2-3. As coordenadas de tais pontos sobre o eixo X são, respectivamente, $X = 0.00$; $X = 0.125$; $X = 0.250$ e $X = 0.375$.

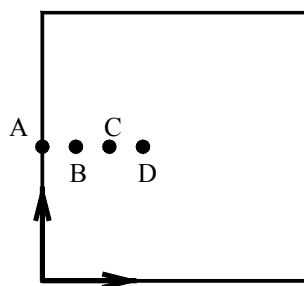


Figura VI.2.2-3 - Representação dos pontos selecionados no interior do domínio físico para a comparação dos resultados numéricos

Tem-se, então, na figura VI.2.2-4, o gráfico onde representa-se a variação do potencial em tais pontos, com os valores obtidos analiticamente e numericamente através da aplicação do Método dos Elementos de Contorno, empregando-se elementos de contorno quadráticos. Neste gráfico observa-se a ótima coincidência apresentada entre as soluções, nos diversos intervalos de tempo em que a solução numérica é plotada sobre a solução analítica.

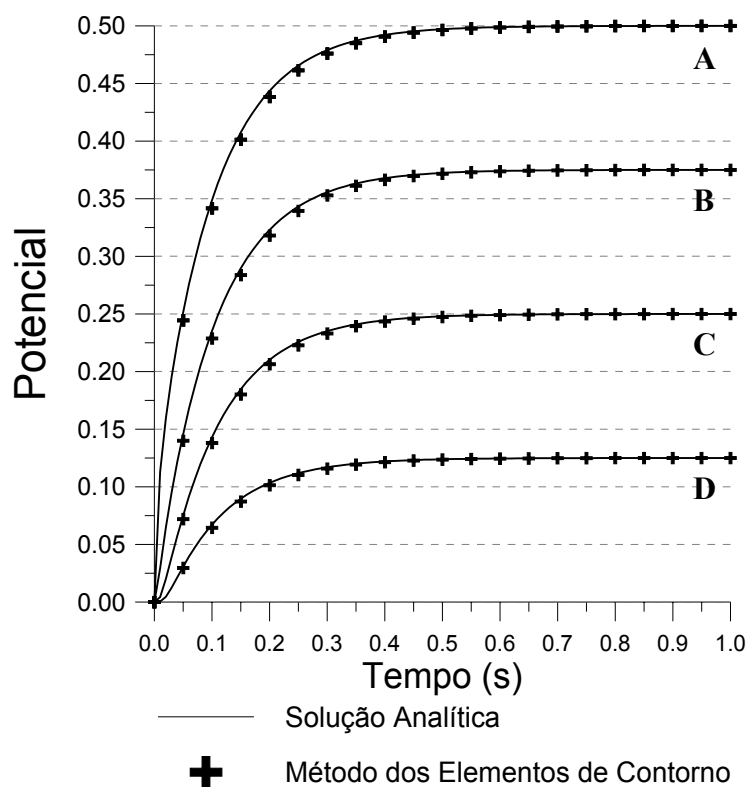


Figura VI.2.2-4 - Representação da variação do potencial ao longo do tempo nos pontos selecionados sobre o domínio físico.

Para verificar a influência da aplicação de diferentes tipos de elementos de contorno (elementos lineares e quadráticos), utilizados nas modelagens deste caso, os valores numéricos obtidos são comparados com a solução analítica nos pontos selecionados sobre o

domínio físico do problema, vide figura VI.2.2-3, em intervalos de tempo distintos, conforme expresso nas tabelas VI.2.2-1 e VI.2.2-2, respectivamente para os elementos lineares e quadráticos.

Pode-se melhor interpretar os resultados apresentados para o erro percentual ao longo do tempo nas modelagens realizadas com elementos de contorno lineares e quadráticos, expressos nas tabelas VI.2.2-1 e VI.2.2-2, representando-os graficamente. Assim, tal parâmetro é representado em um eixo possuindo uma escala logarítmica, conforme encontra-se indicado nas figuras VI.2.2-5 e VI.2.2-6, referente aos pontos selecionados sobre o domínio físico para as comparações entre as soluções numéricas e analítica, conforme expresso na figura VI.2.2-3.

Segundo os diversos gráficos e tabelas apresentados para esta análise, para as modelagens empregando diferentes tipos de elementos de contorno, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito do comportamento do Método dos Elementos de Contorno:

A utilização destes diferentes tipos de elementos de contorno não ocasionou praticamente nenhuma alteração na precisão e no comportamento da solução numérica. Sendo que, de acordo com as figuras VI.2.2-5 e VI.2.2-6, observa-se que as soluções numéricas apresentadas possuem as mesmas características para a função erro percentual ao longo dos intervalos de tempo analisados; e,

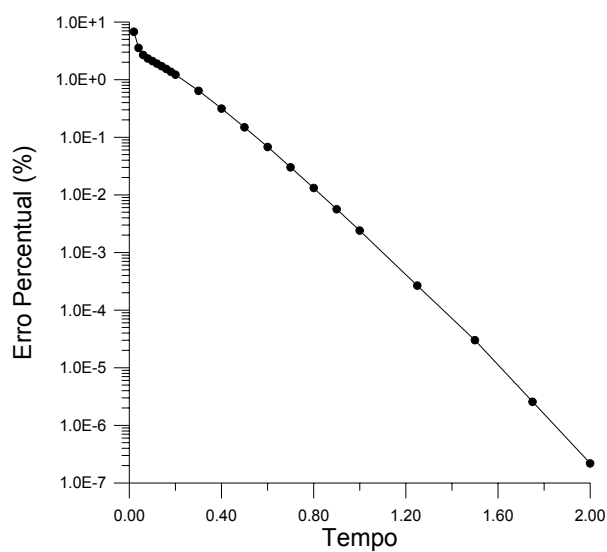
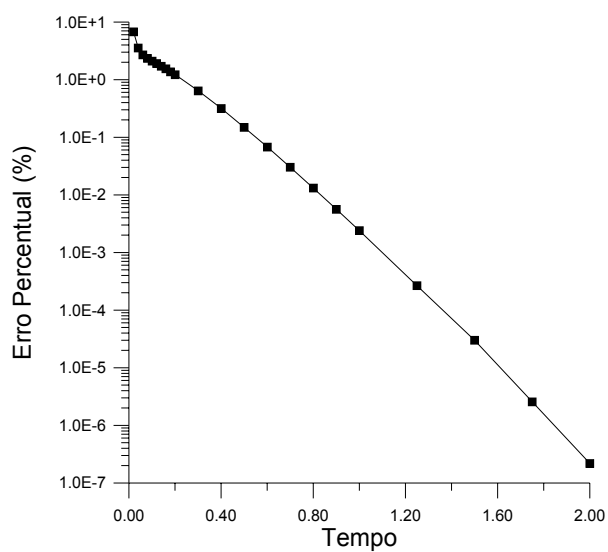
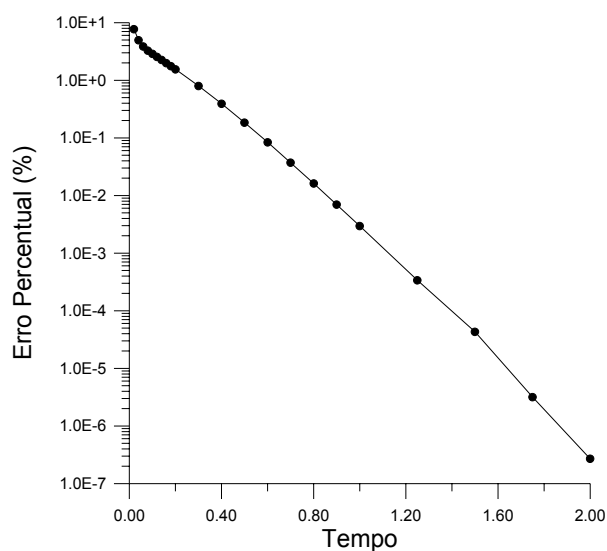
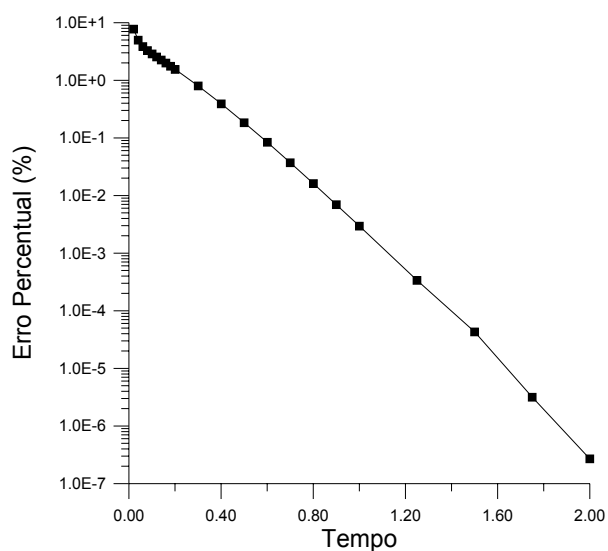
De maneira geral, a utilização do Método dos Elementos de Contorno mostrou-se muito eficiente para a representação da variação do potencial ao longo do tempo. Sendo que tais resultados atendem satisfatoriamente bem os interesses relativos à aplicação de uma análise numérica em um problema de Engenharia.

Tabela VI.2.2-1 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos selecionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno lineares.

tempo	Solução Analítica				Elementos de Contorno Lineares				Erro Percentual (%)			
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D
	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375
0.02	0.15957687	0.0647675	0.02022633	0.00461962	0.1487905	0.05975726	0.02174199	0.00685274	6.75935644	7.73572633	7.49347343	48.3399681
0.04	0.22561842	0.12220348	0.05780784	0.02168317	0.2176201	0.1161161	0.05540838	0.02147309	3.54506677	4.98134961	4.1507485	0.96884087
0.06	0.27560977	0.16780857	0.09164077	0.0394147	0.2681904	0.1613306	0.08741959	0.0375254	2.69198352	3.86033329	4.60622914	4.79338932
0.08	0.31594729	0.20497745	0.11990731	0.05461433	0.3085626	0.1982472	0.1149682	0.05206074	2.3373172	3.28341218	4.1191042	4.67567374
0.1	0.34894095	0.23544302	0.14319396	0.06720037	0.3415978	0.228668	0.1380595	0.06445338	2.10441138	2.87756268	3.58566901	4.0877611
0.12	0.37600443	0.2604436	0.16232338	0.07755033	0.3688481	0.2538197	0.1572589	0.07481569	1.90325586	2.54331443	3.1199969	3.5262777
0.14	0.3982166	0.2809645	0.17802852	0.08604941	0.3913869	0.2746388	0.1731807	0.08342519	1.71507204	2.25142263	2.72305909	3.04967047
0.16	0.41644931	0.29780924	0.19092078	0.09302657	0.4100458	0.2918784	0.1863732	0.09056332	1.53764426	1.99149056	2.38192119	2.64790394
0.18	0.43141587	0.31163653	0.2015037	0.098754	0.4254973	0.3061558	0.1973013	0.09647743	1.37189461	1.758693	2.08552226	2.30529084
0.2	0.44370144	0.32298691	0.21019091	0.10345547	0.4382942	0.3179806	0.2063527	0.1013763	1.21866574	1.55000423	1.82605705	2.00972832
0.3	0.47901708	0.35561431	0.23516284	0.11697019	0.4759505	0.352777	0.2329886	0.1157927	0.64018275	0.79786272	0.92456714	1.00665478
0.4	0.4921795	0.3677748	0.24447007	0.12200723	0.4906268	0.3663387	0.2433699	0.1214115	0.31547494	0.39048431	0.45002381	0.48827056
0.5	0.49708524	0.37230711	0.24793895	0.12388457	0.4963468	0.3716243	0.2474159	0.1236014	0.14855389	0.18340031	0.21096042	0.22857522
0.6	0.49891365	0.37399634	0.24923183	0.12458427	0.4985762	0.3736843	0.2489929	0.1244549	0.06763613	0.08343389	0.09586723	0.10384159
0.7	0.49959511	0.37462593	0.2497137	0.12484505	0.4994451	0.3744872	0.2496075	0.1247875	0.03002578	0.03703105	0.04252776	0.04610057
0.8	0.49984909	0.37486058	0.24989329	0.12494225	0.4997837	0.3748001	0.249847	0.1249172	0.01308261	0.01613411	0.01852505	0.02004967
0.9	0.49994376	0.37494804	0.24996023	0.12497848	0.4999157	0.3749221	0.2499404	0.1249677	0.00561181	0.00691755	0.00793303	0.00862254
1	0.49997904	0.37498063	0.24998518	0.12499198	0.4999671	0.3749696	0.2499767	0.1249874	0.00238758	0.0029423	0.00339108	0.0036626
1.25	0.49999822	0.37499836	0.24999874	0.12499932	0.4999969	0.3749971	0.2499978	0.1249988	0.00026445	0.00033536	0.00037718	0.00041575
1.5	0.49999985	0.37499986	0.24999989	0.12499994	0.4999997	0.3749997	0.2499998	0.1249999	2.9848E-05	4.2857E-05	3.7358E-05	3.3845E-05
1.75	0.49999999	0.37499999	0.24999999	0.125	0.5	0.375	0.25	0.125	2.5571E-06	3.1499E-06	3.6162E-06	3.9142E-06
2	0.5	0.375	0.25	0.125	0.5	0.375	0.25	0.125	2.1685E-07	2.6713E-07	3.0667E-07	3.3194E-07

Tabela VI.2.2-2 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos selecionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno quadráticos.

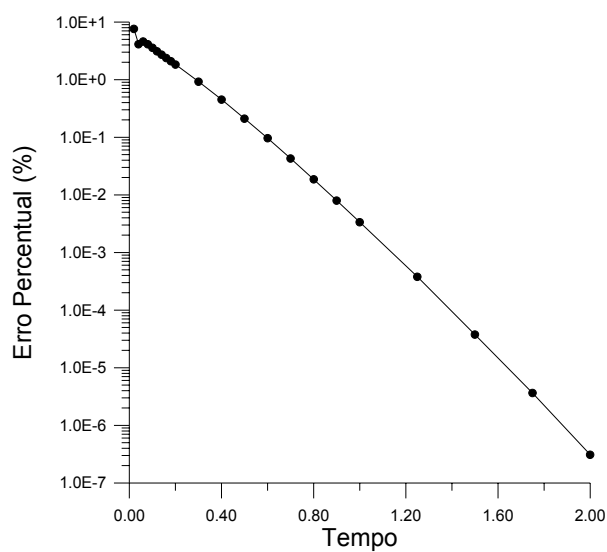
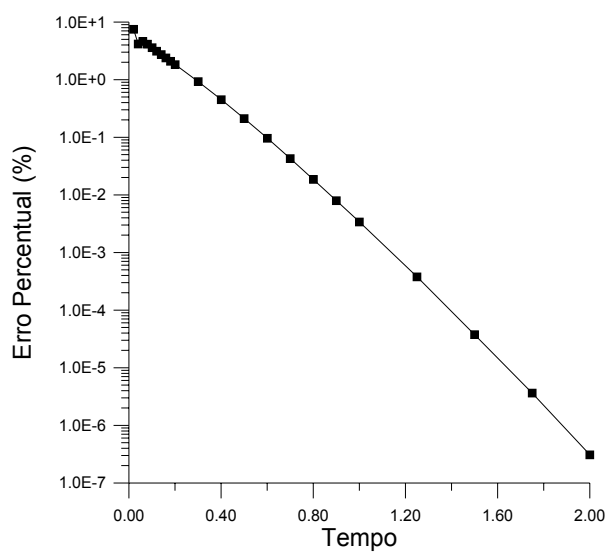
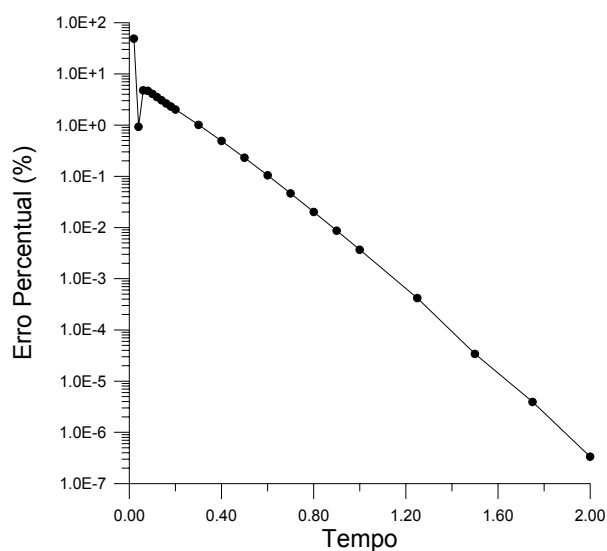
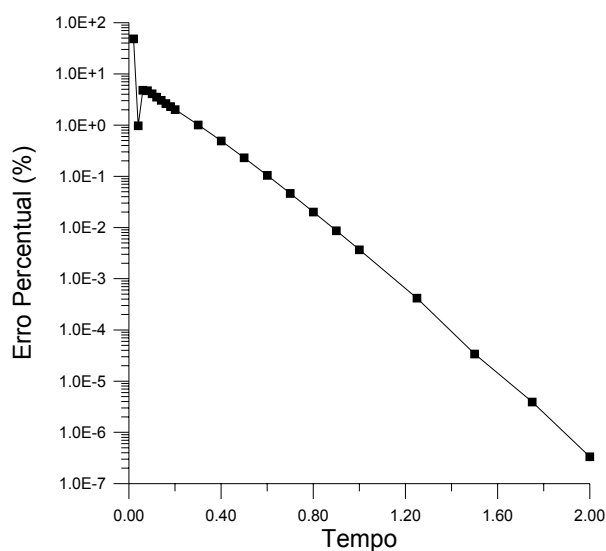
tempo	Solução Analítica				Elementos de Contorno Lineares				Erro Percentual (%)			
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D
	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375	x=0.00	x=0.125	x=0.250	x=0.375
0.02	0.15957687	0.0647675	0.02022633	0.00461962	0.1488023	0.05979175	0.02175714	0.00685797	6.75196188	7.68247431	7.56837577	48.4532025
0.04	0.22561842	0.12220348	0.05780784	0.02168317	0.2176431	0.1161506	0.05542881	0.02148214	3.53487256	4.95311801	4.11540728	0.92710342
0.06	0.27560977	0.16780857	0.09164077	0.0394147	0.268214	0.1613628	0.08744024	0.0375353	2.68342068	3.84114476	4.58369551	4.76827179
0.08	0.31594729	0.20497745	0.11990731	0.05461433	0.3085845	0.1982758	0.1149872	0.05207007	2.33038567	3.26945943	4.10325862	4.65859031
0.1	0.34894095	0.23544302	0.14319396	0.06720037	0.3416172	0.2286928	0.1380761	0.06446165	2.0988517	2.86702935	3.57407634	4.07545462
0.12	0.37600443	0.2604436	0.16232338	0.07755033	0.3688648	0.2538409	0.1572732	0.07482284	1.89881442	2.53517447	3.11118733	3.51705788
0.14	0.3982166	0.2809645	0.17802852	0.08604941	0.3914013	0.2746568	0.1731929	0.0834313	1.71145591	2.24501613	2.71620626	3.0425699
0.16	0.41644931	0.29780924	0.19092078	0.09302657	0.410058	0.2918936	0.1863836	0.09056852	1.53471473	1.98638662	2.37647391	2.64231413
0.18	0.43141587	0.31163653	0.2015037	0.098754	0.4255077	0.3061687	0.19731	0.09648182	1.36948395	1.75455356	2.08120472	2.30084545
0.2	0.44370144	0.32298691	0.21019091	0.10345547	0.438303	0.3179915	0.2063601	0.10138	1.21668242	1.54662948	1.82253644	2.00615191
0.3	0.47901708	0.35561431	0.23516284	0.11697019	0.4759543	0.3527815	0.2329917	0.1157943	0.63938946	0.79659731	0.9232489	1.00528691
0.4	0.4921795	0.3677748	0.24447007	0.12200723	0.4906284	0.3663406	0.2433712	0.1214122	0.31514986	0.38996768	0.44949205	0.48769682
0.5	0.49708524	0.37230711	0.24793895	0.12388457	0.4963475	0.3716251	0.2474165	0.1236017	0.14841307	0.18318543	0.21071843	0.22833306
0.6	0.49891365	0.37399634	0.24923183	0.12458427	0.4985765	0.3736846	0.2489931	0.124455	0.067576	0.08335367	0.09578698	0.10376132
0.7	0.49959511	0.37462593	0.2497137	0.12484505	0.4994452	0.3744874	0.2496076	0.1247876	0.03000576	0.03697767	0.04248771	0.04602047
0.8	0.49984909	0.37486058	0.24989329	0.12494225	0.4997838	0.3748002	0.249847	0.1249172	0.01306261	0.01610743	0.01852505	0.02004967
0.9	0.49994376	0.37494804	0.24996023	0.12497848	0.4999157	0.3749221	0.2499404	0.1249677	0.00561181	0.00691755	0.00793303	0.00862254
1	0.49997904	0.37498063	0.24998518	0.12499198	0.4999671	0.3749696	0.2499768	0.1249874	0.00238758	0.0029423	0.00335108	0.0036626
1.25	0.49999822	0.37499836	0.24999874	0.12499932	0.4999969	0.3749971	0.2499978	0.1249988	0.00026445	0.00033536	0.00037718	0.00041575
1.5	0.49999985	0.37499986	0.24999989	0.12499994	0.4999997	0.3749997	0.2499998	0.1249999	2.9848E-05	4.2857E-05	3.7358E-05	3.3845E-05
1.75	0.49999999	0.37499999	0.24999999	0.125	0.5	0.375	0.25	0.125	2.5571E-06	3.1499E-06	3.6162E-06	3.9142E-06
2	0.5	0.375	0.25	0.125	0.5	0.375	0.25	0.125	2.1685E-07	2.6713E-07	3.0667E-07	3.3194E-07

ponto A - $x=0.00$ ponto B - $x=0.125$ 

Elemento de Contorno Linear

Elemento de Contorno Quadrático

Figura VI.2.2-5 - Variação do erro percentual ao longo de tempo, entre as soluções numéricas e analítica, referentes aos pontos selecionados no interior do domínio físico do problema.

ponto C - $x=0.250$ ponto D - $x=0.375$ 

Elemento de Contorno Linear

Elemento de Contorno Quadrático

Figura VI.2.2-6 - Variação do erro percentual ao longo de tempo, entre as soluções numéricas e analítica, referentes aos pontos selecionados no interior do domínio físico do problema.

VI.2.3 - 3ª ANÁLISE

O domínio físico empregado nesta modelagem encontra-se submetido a condições de contorno essenciais, de valor nulo, ao longo de todas suas arestas; representadas matematicamente através das equações apresentadas a seguir (equação VI.2.3-1). Sendo que, no instante inicial o domínio físico, encontra-se com uma distribuição para o potencial dada de acordo com a equação VI.2.3-2.

$$\bar{U}(0; y; t) = 0 \quad \bar{U}(1; y; t) = 0 \quad \text{Eq. VI.2.3-1}$$

$$\bar{U}(x; 0; t) = 0 \quad \bar{U}(x; 1; t) = 0$$

$$u(x; y; t) = 100\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \quad \text{Eq. VI.2.3-2}$$

Segundo tais condições, este problema pode ser interpretado fisicamente, através da Transferência de Calor, como sendo um caso onde inicialmente a placa encontra-se sobre uma determinada distribuição de temperatura, dada pela equação VI.2.3-2, e com o passar do tempo resfria-se, mantendo a uma temperatura nula ao longo de suas arestas, até apresentar uma temperatura nula em todo o domínio físico, isto é, até atingir a reposta em regime permanente de um problema sujeito às condições de contorno impostas neste caso.

Solução Analítica

A solução analítica é expressa de acordo com a equação dada a seguir [6], sendo que o sistema de coordenadas encontra-se posicionado no vértice inferior esquerdo do quadrado, conforme representado anteriormente, de acordo com a figura VI.2.2-1.

$$u(x; y; t) = 100\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)\exp[-2\pi^2 t] \quad \text{Eq. VI.2.3-3}$$

Resultados Numéricos

Apresentam-se a seguir, na figura VI.2.3-1, os gráficos relativos à distribuição do potencial, presente em todo o domínio físico do problema, para diferentes intervalos de tempo, referentes à modelagem realizada utilizando-se de elementos de contorno quadráticos. Desta forma, proporciona-se uma melhor compreensão do problema, pois pode-se visualizar o comportamento da solução numérica em diferentes intervalos de tempo.

Tais gráficos apresentam a distribuição do potencial ao longo do domínio físico através de linhas equipotenciais, isto é, as isotermas presentes sobre a placa quadrada. Destaca-se que, em alguns gráficos (principalmente na região central), devido ao número de pontos no interior do domínio onde têm-se calculados os valores do potencial e, ainda, ao procedimento utilizado na confecção destes gráficos, os resultados são interpolados.

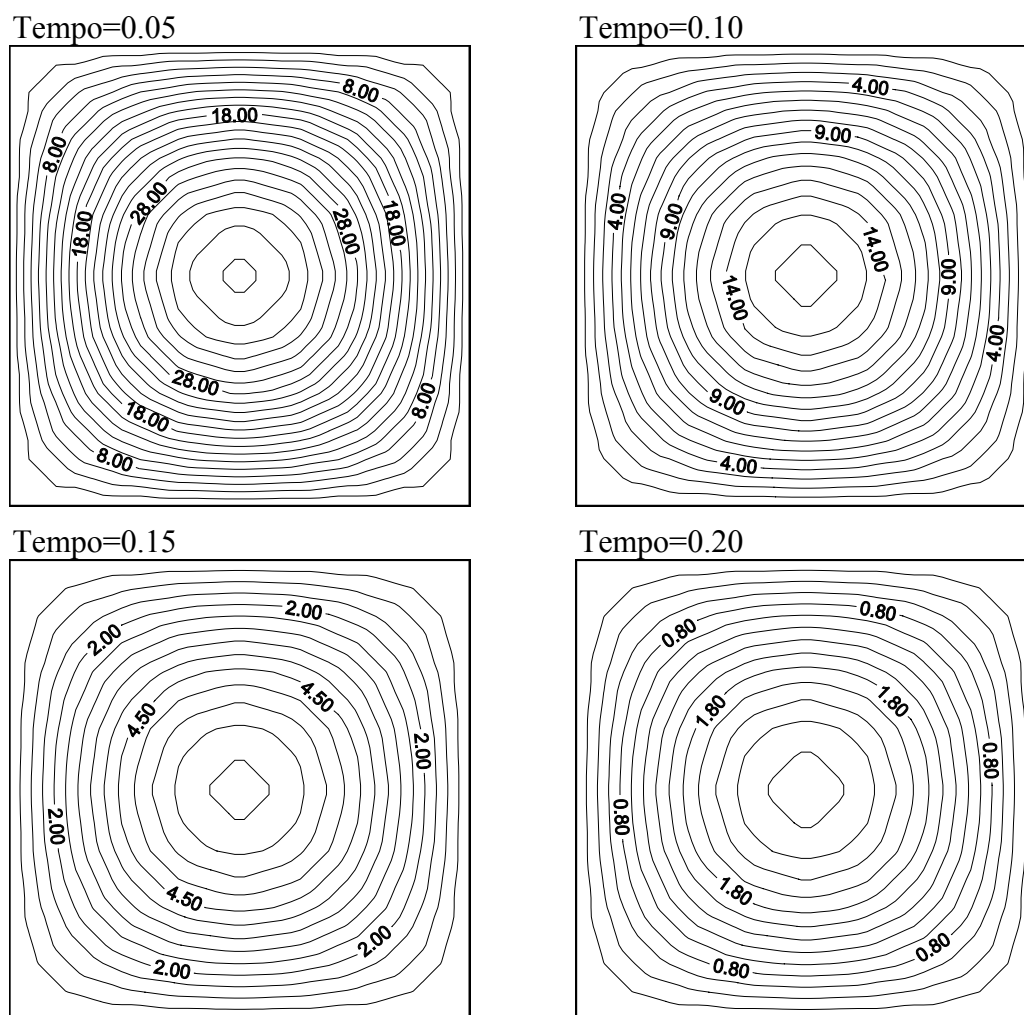


Figura VI.2.3-1 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos.

Observa-se que a solução deste problema é simétrica em relação a um sistema de eixos coordenados posicionados no centro do domínio físico. Portanto, selecionam-se três pontos sobre o domínio físico do problema, localizados de acordo com a figura VI.2.3-2, para a comparação dos valores obtidos numericamente através do Método dos Elementos de Contorno com a solução analítica para diversos intervalos de tempo.

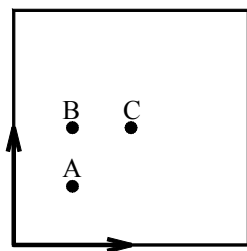


Figura VI.2.3-2 - Representação dos pontos selecionados no interior do domínio físico para a comparação dos resultados numéricos

A seguir apresenta-se na figura VI.2.3-3 os gráficos representando a variação do potencial ao longo do tempo para estes determinados pontos, obtidos analiticamente e numericamente através do Método dos Elementos de Contorno utilizando-se de elementos de contorno quadráticos. Nestes gráficos pode-se observar a quase coincidência entre estas soluções, indicando um bom desempenho do método.

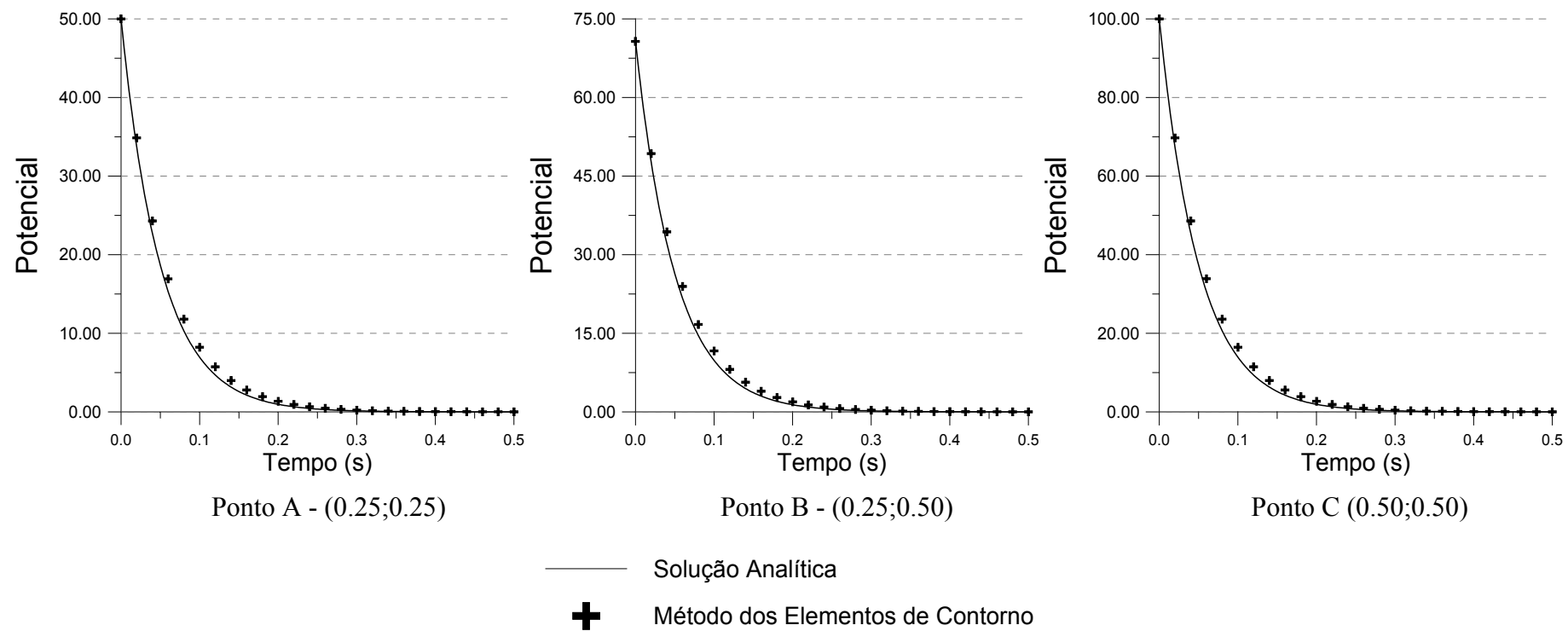


Figura VI.2.3-3 - Representação da variação do potencial ao longo do tempo nos pontos seleccionados sobre o domínio físico.

A fim de verificar a influência do uso de diferentes tipos de elementos de contorno, elementos lineares e quadráticos, aplicados à modelagem deste caso, apresentam-se nas tabelas VI.2.3-1 e VI.2.3-2 as comparações entre a solução analítica e as soluções numéricas, correspondentes aos pontos indicados na figura VI.2.3-2, para determinados intervalos de tempo.

Observa-se em tais tabelas que, a medida que o tempo de análise aumenta, os valores absolutos para a distribuição do potencial tendem para zero. Com isso, devido a característica da função erro potencial, os valores calculados para o erro potencial deixam de ser representativos. Sendo que pode-se observar a concordância entre as soluções numéricas e a analítica através dos apresentados para o potencial.

Os valores apresentados para o erro percentual referentes às modelagens realizadas utilizando-se de elementos de contorno lineares e quadráticos, vide tabelas VI.2.3-1 e VI.2.3-2, podem ser melhor visualizados em uma forma gráfica, de acordo com a figura VI.2.3-4, onde plotam-se para cada um dos pontos selecionados sobre o domínio físico, os erros percentuais, em escala logarítmica, variando ao longo do tempo.

Pode-se chegar a diversas conclusões a respeito dos resultados alcançados com as modelagens realizadas, através do Método dos Elementos de Contorno, empregando elementos de contorno com diferentes tipos de funções de interpolação, analisando-se os diversos gráficos e tabelas anteriormente apresentados. Dentre elas têm-se:

Devido ao fato das discretizações utilizadas nesta análise apresentarem um elevado grau de refinamento, não é possível verificar, de maneira clara, a influência na solução numérica decorrente da aplicação dos diferentes tipos de elementos de contorno. Este fato ainda agrava-se pelo motivo das comparações serem realizadas para pontos no interior do domínio físico, onde a solução numérica possui uma qualidade ainda maior; e,

Pode-se destacar o excelente desempenho apresentado pelo Método dos Elementos de Contorno nas modelagens realizadas, onde em todos os intervalos de tempo analisados, representou-se de maneira mais do que satisfatória, para uma aplicação em Engenharia, o comportamento da solução analítica em todo o domínio físico.

Tabela VI.2.3-1 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos selecionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno lineares.

Tempo	Solução Analítica			Elementos de Contorno Lineares			Erro Percentual (%)		
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C
0.01	41.0434359	58.0441837	82.0868717	41.74602	59.03847	83.49564	1.71180632	1.71298187	1.71619192
0.02	33.6912726	47.6466546	67.3825451	34.85382	49.29212	69.71425	3.45058928	3.45347522	3.46039894
0.03	27.6561117	39.1116482	55.3122234	29.09951	41.15466	58.20689	5.21909341	5.22353787	5.23332173
0.04	22.7020369	32.1055285	45.4040739	24.29533	34.36061	48.59857	7.0182824	7.0239662	7.03570375
0.05	18.6353919	26.354424	37.2707839	20.28438	28.68818	40.57607	8.84868997	8.85527216	8.86830319
0.06	15.2972103	21.6335222	30.5944206	16.93565	23.95219	33.87778	10.7107093	10.7179392	10.7318896
0.07	12.5570014	17.7582817	25.1140028	14.13979	19.99804	28.28517	12.6048295	12.6124722	12.627088
0.08	10.3076496	14.5772179	20.6152992	11.8055	16.69667	23.61577	14.5314444	14.5394829	14.5545826
0.09	8.46122712	11.9659822	16.9224542	9.856582	13.9403	19.71719	16.4911644	16.4994216	16.5149553
0.1	6.94555666	9.82250042	13.8911133	8.229405	11.63897	16.46219	18.4844557	18.4929448	18.5087878
0.11	5.70139018	8.06298332	11.4027804	6.870852	9.717555	13.74454	20.5118713	20.5205891	20.5367424
0.12	4.68009285	6.61865078	9.3601857	5.736578	8.113334	11.47553	22.5740212	22.582899	22.5993839
0.13	3.84174181	5.43304338	7.68348363	4.789556	6.773946	9.581095	24.6714702	24.6805065	24.6972788
0.14	3.15356568	4.45981535	6.30713135	3.998873	5.655671	7.999403	26.8048112	26.8140171	26.831083
0.15	2.58866341	3.6609229	5.17732682	3.338719	4.722006	6.678824	28.9746278	28.9840328	29.0013984
0.16	2.12495281	3.00513709	4.24990563	2.787548	3.942475	5.576252	31.1816423	31.1911864	31.2088429
0.17	1.74430729	2.46682303	3.48861458	2.327366	3.291632	4.655698	33.4263757	33.4360821	33.4540658
0.18	1.43184729	2.02493786	2.86369458	1.943153	2.748234	3.887113	35.7095142	35.7194243	35.7376946
0.19	1.17535865	1.66220814	2.3507173	1.622368	2.294542	3.24541	38.0317406	38.0417978	38.0604127
0.2	0.96481515	1.36445466	1.92963029	1.35454	1.915748	2.709642	40.3937331	40.4039321	40.4228578
0.3	0.13402357	0.18953794	0.26804713	0.2229542	0.3153278	0.446001	66.3544764	135.277878	66.3890225
0.5	0.00258616	0.00365738	0.00517232	0.00604037	0.00854299	0.01208324	133.565194	230.335141	133.613605

Tabela VI.2.3-2 - Resultados obtidos para o potencial em determinados instantes de tempo para os pontos seleccionados. Análise realizada utilizando-se elementos de contorno quadráticos.

Tempo	Solução Analítica			Elementos de Contorno Quadráticos			Erro Percentual (%)		
	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto A	Ponto B	Ponto C
0.01	41.0434359	58.0441837	82.0868717	41.7448	59.03749	83.49538	1.70883386	1.71129351	1.71587518
0.02	33.6912726	47.6466546	67.3825451	34.85138	49.29007	69.71344	3.44334705	3.44917272	3.45919685
0.03	27.6561117	39.1116482	55.3122234	29.0963	41.15181	58.20539	5.20748658	5.21625104	5.23060986
0.04	22.7020369	32.1055285	45.4040739	24.29176	34.35727	48.59639	7.00255694	7.013563	7.03090242
0.05	18.6353919	26.354424	37.2707839	20.28071	28.68458	40.57334	8.82899626	8.84161222	8.86097841
0.06	15.2972103	21.6335222	30.5944206	16.93205	23.94851	33.87466	10.6871756	10.7009285	10.7216916
0.07	12.5570014	17.7582817	25.1140028	14.13636	19.99441	28.28184	12.5775141	12.592031	12.6138285
0.08	10.3076496	14.5772179	20.6152992	11.80229	16.69317	23.61235	14.5003025	14.5154729	14.537993
0.09	8.46122712	11.9659822	16.9224542	9.853615	13.93699	19.7138	16.4560986	16.4717599	16.4949227
0.1	6.94555666	9.82250042	13.8911133	8.226692	11.63588	16.45891	18.4453947	18.4614864	18.4851756
0.11	5.70139018	8.06298332	11.4027804	6.868393	9.714696	13.74141	20.4687414	20.4851307	20.5092929
0.12	4.68009285	6.61865078	9.3601857	5.734362	8.11072	11.4726	22.5266717	22.5434045	22.5680811
0.13	3.84174181	5.43304338	7.68348363	4.78757	6.771573	9.57838	24.6197749	24.6368293	24.6619433
0.14	3.15356568	4.45981535	6.30713135	3.997102	5.653531	7.996912	26.7486525	26.7660331	26.791588
0.15	2.58866341	3.6609229	5.17732682	3.337148	4.720086	6.676556	28.9139401	28.931587	28.957592
0.16	2.12495281	3.00513709	4.24990563	2.786157	3.940761	5.574202	31.116182	31.1341507	31.1606065
0.17	1.74430729	2.46682303	3.48861458	2.326139	3.290109	4.653856	33.3560326	33.3743427	33.4012655
0.18	1.43184729	2.02493786	2.86369458	1.942074	2.746885	3.885466	35.634157	35.652805	35.6801815
0.19	1.17535865	1.66220814	2.3507173	1.621422	2.293351	3.243943	37.9512546	37.9701461	37.9980063
0.2	0.96481515	1.36445466	1.92963029	1.353712	1.9147	2.708342	40.3079135	40.3271249	40.3554874
0.3	0.13402357	0.18953794	0.26804713	0.2227553	0.3150667	0.4456616	66.2060696	135.083061	66.262403
0.5	0.00258616	0.00365738	0.00517232	0.00603159	0.00853112	0.01206726	133.225578	229.876004	133.304653

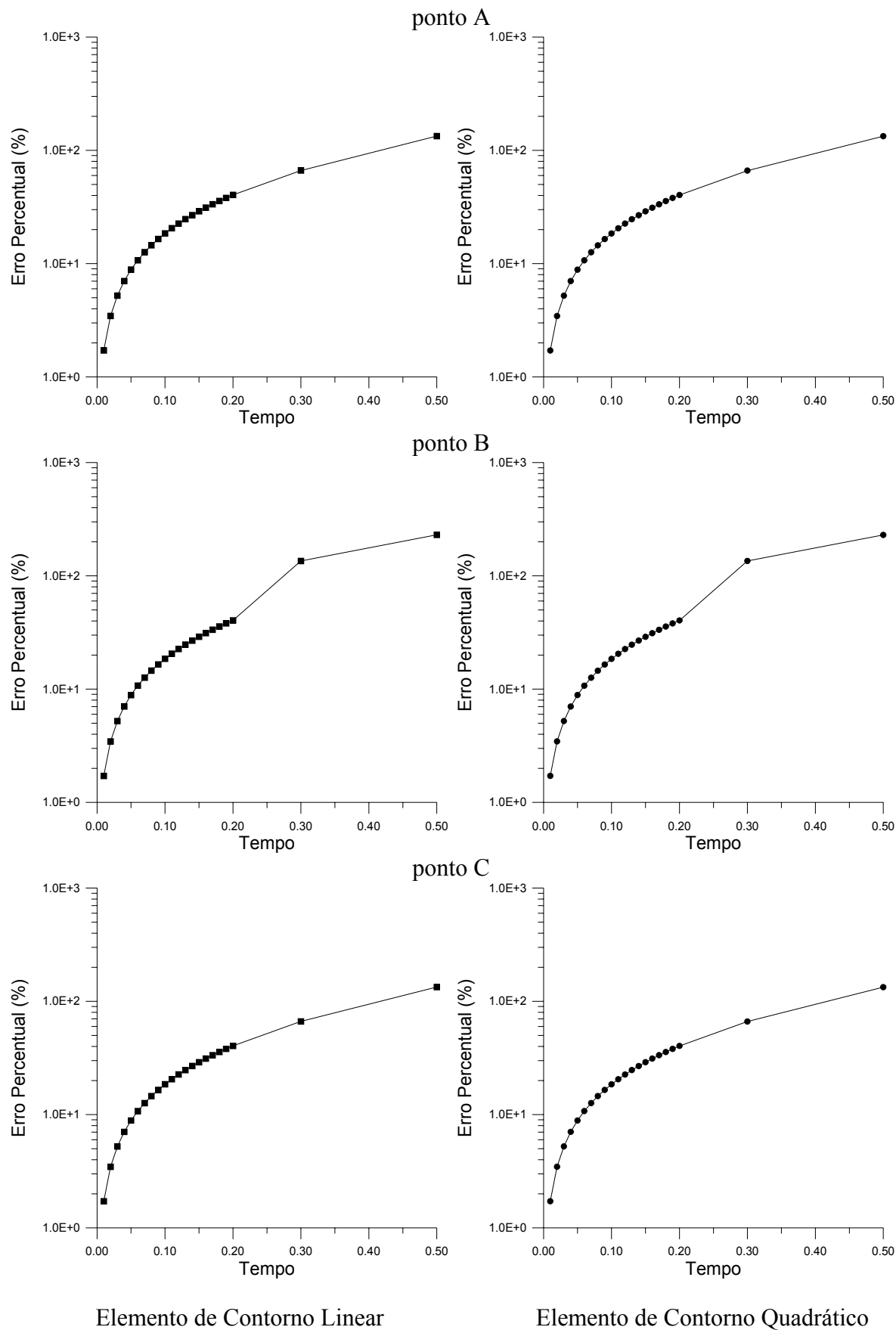


Figura VI.2.3-4 - Variação do erro percentual ao longo de tempo, entre as soluções numéricas e analítica, referentes aos pontos selecionados no interior do domínio físico do problema.

VI.2.4 - 4ª ANÁLISE

Neste item modela-se a análise transiente referente ao problema físico interpretado como sendo uma placa infinitamente longa contendo diversos circuitos integrados igualmente espaçados (vide figura V.2.5-2). A análise em regime permanente deste problema encontra-se exposta na seção V.2.5.

Assim, os comentários iniciais para a apresentação do problema, onde ilustram-se o domínio físico, as condições de contorno prescritas e as diversas interpretações físicas (estando, neste caso, o modelo matemático aplicado à Transferência de Calor ou à Mecânica dos Sólidos), são exatamente os mesmos realizados anteriormente na seção V.2.5, referentes à 5ª Análise, sendo, portanto, aqui omitidos.

Para que um problema transiente, neste caso governado pela Equação de Difusão, equação I.2-5, encontre-se bem posto, além da definição de sua geometria e da prescrição das condições de contorno, faz-se necessário a imposição da denominada condição inicial, isto é, são necessárias informações adicionais a respeito da distribuição do potencial ao longo de todo o domínio físico do problema no instante inicial de análise.

Sendo assim, nas diversas modelagens realizadas para este caso considera-se que, no instante inicial, tem-se uma distribuição nula para o potencial. Matematicamente esta condição é expressa de acordo com a seguinte equação:

$$u(x;y;0) = 0 \quad \text{Eq. VI.2.4-1}$$

Desta maneira, pode-se considerar a distribuição do potencial variando com o tempo ao longo do domínio físico, neste caso, como representando a variação da temperatura sobre o domínio físico do problema, desde o instante inicial, onde o domínio apresenta uma distribuição nula de temperatura, até um determinado instante em que atinge-se a condição de regime permanente.

Considerando-se este problema interpretado fisicamente através da Mecânica dos Sólidos, representando a deformação de uma membrana, por analogia tem-se que, no instante inicial, a membrana encontra-se indeformada e, após a aplicação do carregamento (sobre a sub-região I), as soluções, nos vários intervalos de tempo, indicam as diversas configurações quase-estáticas apresentadas pela membrana, até atingir-se a condição de equilíbrio permanente.

Objetivos Pretendidos

Inicialmente, pretende-se verificar o comportamento apresentado pela solução numérica deste problema, obtida através da aplicação do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos de contorno quadráticos. Sendo que, para tal fim, aplica-se uma discretização pouco refinada, justamente com o propósito de averiguar a robustez do método no cálculo desta intrincada distribuição do potencial ao longo de tempo.

Em uma segunda etapa, realiza-se uma comparação entre o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, onde traçam-se gráficos indicando a distribuição do potencial ao longo do tempo, para determinados pontos no interior do domínio físico do problema, plotados sobre uma solução numérica de referência, obtida utilizando-se uma discretização com um alto grau de refinamento.

São realizadas diversas modelagens considerando-se a relação existente entre a propriedade física da sub-região I e a propriedade física da sub-região II, conforme apresentado anteriormente no caso da análise deste problema em regime permanente, governado pela Equação de Poisson (vide seção VI.2.5, referente à 5ª análise).

Discretizações Utilizadas

Como nesta análise são utilizados basicamente dois conjuntos de discretizações, variando, de acordo com os objetivos pretendidos, com as modelagens, as discretizações empregadas serão apresentadas junto à exposição de cada uma destas modelagens, a fim de tornar a apresentação mais clara e didática.

Resultados Numéricos

Inicialmente apresentam-se os resultados numéricos em termos do potencial, obtidos através do Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se de elementos de contorno quadráticos, para alguns intervalos de tempo, referente a cada uma das análises em que varia-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Tais resultados são apresentados em uma forma gráfica, de maneira a permitir a visualização de forma clara, da distribuição do potencial ao longo de todo o domínio físico do problema, em cada um dos intervalos de tempo analisados. Para tanto, são plotadas as linhas equipotenciais sobre o domínio físico.

A discretização utilizada nestas modelagens encontra-se ilustrada na figura VI.2.4-1, onde pode-se observar a distribuição dos diversos elementos de contorno quadráticos ao longo do contorno da geometria das sub-regiões I e II, as quais formam o domínio físico do problema, assim como a localização dos pontos internos interpolantes em cada uma das sub-regiões.

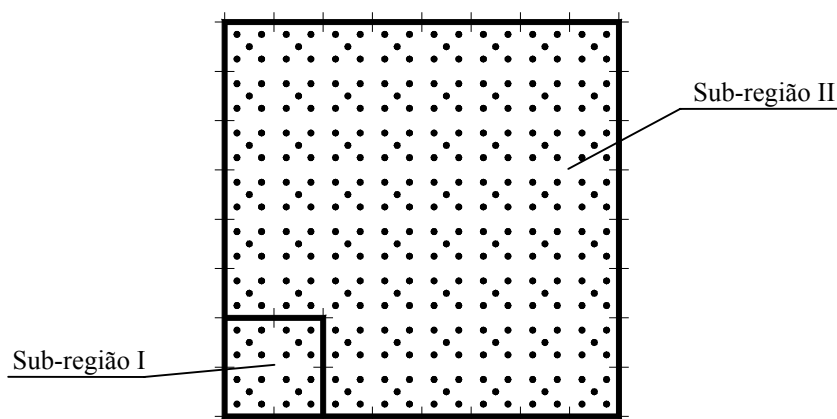


Figura VI.2.4-1 - Representação da discretização e do conjunto de pontos internos interpolantes utilizados nas modelagens realizadas via Método dos Elementos de Contorno para as análises transientes.

Ressalta-se que esta discretização é idêntica à utilizada anteriormente, quando da análise deste problema em regime permanente em que foram apresentadas comparações entre os Métodos dos Volumes Finitos e Elementos de Contorno, sendo que, na presente análise, os pontos no interior do domínio da sub-região II também são pontos internos interpolantes. Embora, neste momento, não sejam realizadas comparações entre estes diferentes métodos numéricos, optou-se pela reutilização de tal discretização.

Na tabela VI.2.4-1 encontram-se indicados os números de elementos de contorno quadráticos, de pontos nodais funcionais e de pontos internos interpolantes presentes na discretização utilizada nestas modelagens.

Tabela VI.2.4-1 - Indicação do número de pontos nodais funcionais, de pontos internos interpolantes e de elementos de contorno utilizados nas modelagens.

Número de Elementos de Contorno Quadráticos	Número de Pontos Nodais Funcionais	Número de Pontos Internos Interpolantes
40	90	320

Discretização Temporal

Contrariando a recomendação a respeito da escolha do intervalo de tempo a ser utilizado nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno, expressa pela equação VI.1-1, nas análises apresentadas a seguir, utiliza-se um único intervalo de tempo, como sendo igual a 0.02 (também empregado na análises via Método dos Volumes Finitos).

Destaca-se que este intervalo atende a tal recomendação apenas para o caso da propriedade da sub-região I ser unitária, pois nesta situação tem-se:

$$\Delta t = 0.02 \leq 0.03125 = \frac{1}{2} \frac{c}{\lambda K} \quad \text{Eq. VI.2.4-2}$$

onde: λ e K são as propriedades físicas relacionadas ao domínio físico do problema; e c representa o comprimento do menor dos elementos de contorno presentes na discretização.

Para os demais valores empregados para a propriedade física da sub-região I nas modelagens realizadas, o Método dos Elementos de Contorno apresentou um comportamento estável. Desta forma, pode-se concluir, pelo resultados apresentados a seguir, que este método aplicado à Equação de Difusão é muito menos sensível a escolha do intervalo de tempo do que quando aplicado a Equação da Onda (equação I.2-4) [1], pois adotando-se a equação VI.1-1, para o caso em que a propriedade física é igual a 100, ter-se-ia que utilizar um intervalo de tempo 100 vezes menor do que o empregado nas modelagens apresentadas a seguir.

A seguir apresentam-se os gráficos contendo a distribuição das linhas equipotenciais sobre o domínio físico do problema, inicialmente para o caso em que a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões I e II é unitária, isto é, $K_I/K_{II} = 1.0$, e posteriormente para os seguintes valores: $K_I/K_{II} = 10.0$ e $K_I/K_{II} = 100.0$.

Tais gráficos são ilustrados em 6 instantes de tempo distintos, respectivamente $t = 0.04$; $t = 0.12$; $t = 0.30$; $t = 0.60$; $t = 1.00$ e $t = 10.00$. De tal modo que pode-se observar de que forma se comporta a distribuição do potencial, desde o instante inicial até atingir-se a condição de regime permanente. Isto para as modelagens realizadas com os diferentes valores de K_I/K_{II} .

Desta forma, na figura VI.2.4-2, apresentam-se os gráficos referentes ao caso em que $K_I/K_{II} = 1.00$. Em tal situação, sob o ponto de vista da Transferência de Calor, pode-

se considerar que a placa e o circuito integrado são formados por um mesmo material, sendo que tem-se, ao longo do circuito integrado (sub-região I), uma taxa de geração de calor.

A seguir, nas figuras VI.2.4-3 e VI.2.4-4 ilustram-se os gráficos referentes à situação em que $K_I/K_{II} = 10.00$ e $K_I/K_{II} = 100.00$, respectivamente. Observe que em tais situações, interpretando fisicamente o problema através da Transferência de Calor, a condutividade térmica (propriedade física K) da sub-região I é maior do que a condutividade térmica da sub-região II, desta forma, a temperatura se mantém mais uniforme sobre o circuito integrado, estando as isothermas quase que restritas a sub-região II.

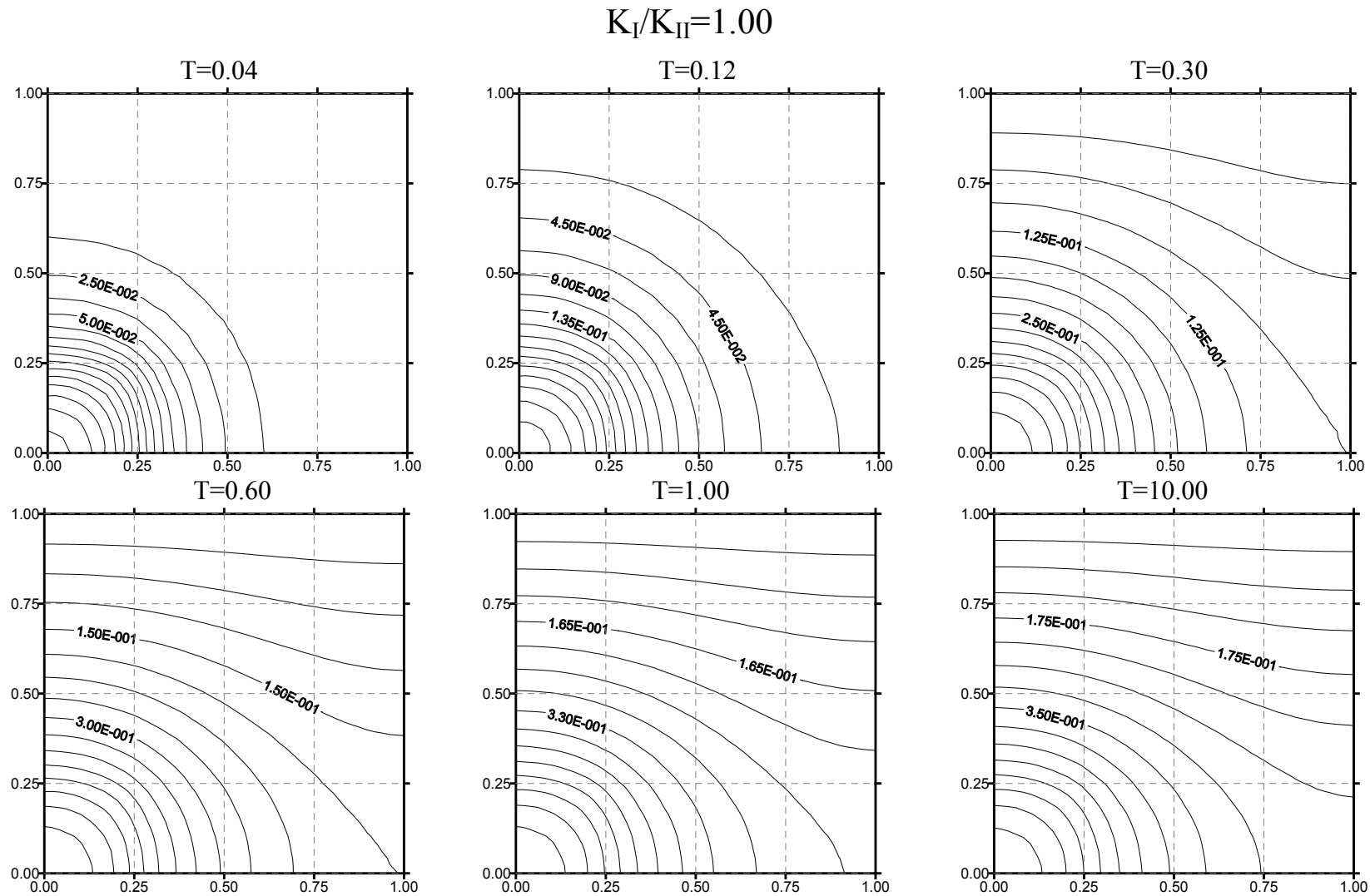


Figura VI.2.4-2 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos. Para a seguinte relação entre as propriedades físicas das sub-regiões: $K_I/K_{II}=1.00$

$$K_I/K_{II}=10.00$$



Figura VI.2.4-3 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos. Para a seguinte relação entre as propriedades físicas das sub-regiões: $K_I/K_{II}=10.00$

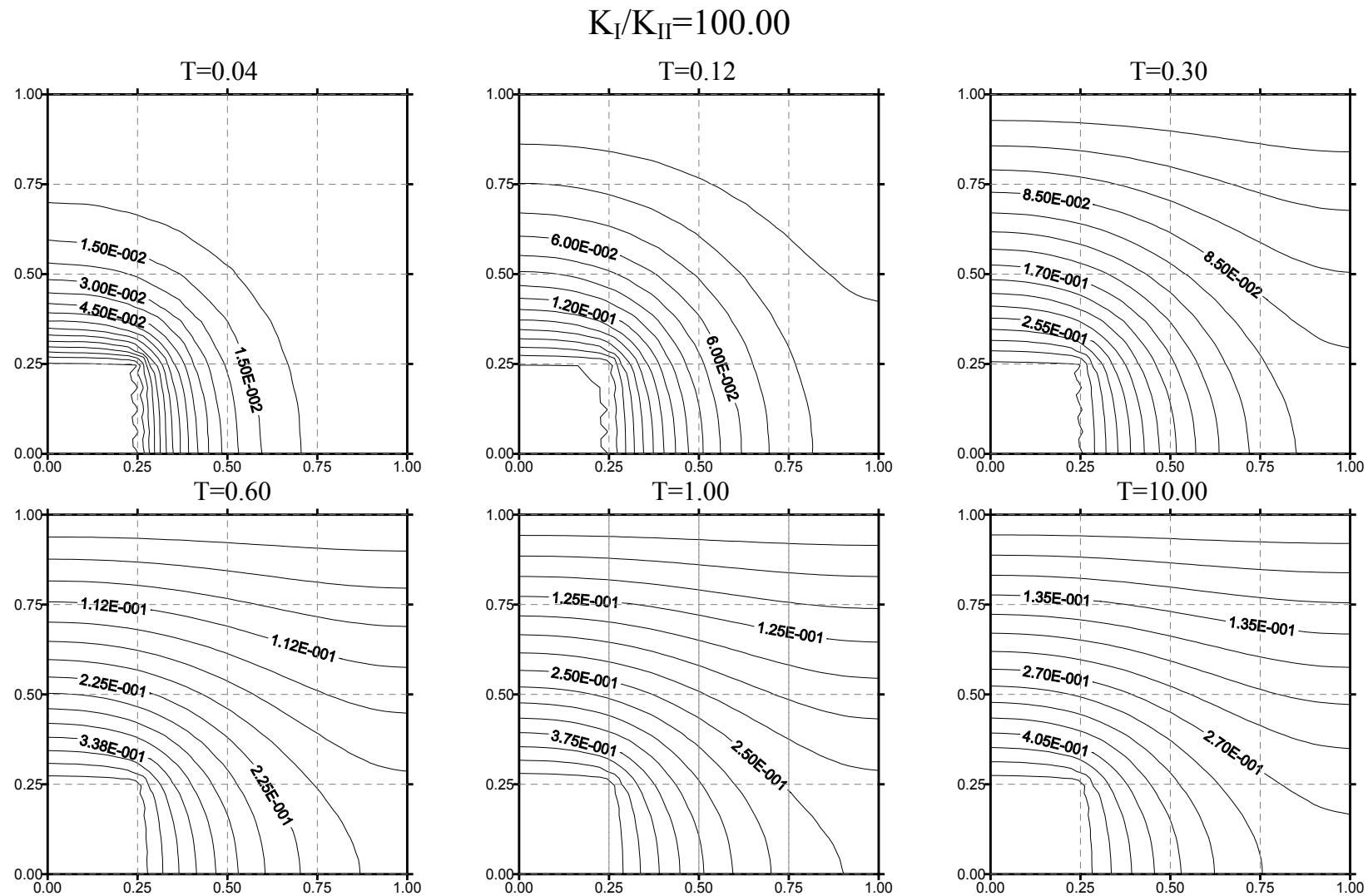


Figura VI.2.4-4 - Distribuição das linhas equipotenciais para diferentes intervalos de tempo, modelagem realizada com elementos de contorno quadráticos. Para a seguinte relação entre as propriedades físicas das sub-regiões: $K_I/K_{II}=100.00$

Além dos comentários feitos anteriormente sobre o comportamento da distribuição de temperatura na análise deste problema transiente, considerando-se as diversas modelagens apresentadas com diferentes valores para a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões, analisando-se os gráficos das figuras VII.2.4-2, VII.2.4-3 e VII.2.4-4, podem-se tecer os seguintes comentários:

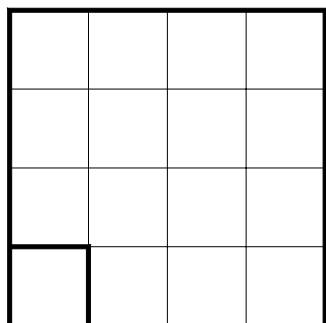
Em alguns dos gráficos apresentados, têm-se, nas proximidades da fronteira da sub-região I, uma pequena distorção nas linha equipotenciais. Este fato ocorre principalmente devido ao “software” gráfico utilizado, que adota uma interpolação entre os pontos onde são obtidos os resultados numéricos para o potencial, e a distribuição adotada para tais pontos sobre o domínio físico do problema;

A partir da forma dos perfis, para a distribuição do potencial, obtidos numericamente para as distintas modelagens, nos diversos intervalos de tempo, e através da análise da física envolvida neste problema, pode-se considerar que os resultados apresentados mostram-se bastante coerentes, em tais caso, com o comportamento esperado para a variação do potencial ao longo do tempo; e,

Conforme poderá ser observado posteriormente, nos gráficos referentes ao tempo de análise $t = 10.00$, o problema já encontra-se em regime permanente. Desta forma, tais gráficos podem ser comparados com os gráficos apresentados anteriormente na seção VI.2, considerando-se este problema físico modelado matematicamente, utilizando a Equação de Poisson. Efetuando-se tais comparações, pode-se observar uma excelente concordância entre os perfis para a distribuição do potencial ao longo do domínio físico do problema, para todos os diferentes valores adotados para a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões I e II.

A seguir são apresentadas as comparações realizadas, entre o Método dos Volumes Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, relativas a este problema. Para tanto são empregadas discretizações semelhantes às utilizadas na seção V. Sendo que, no presente caso, são introduzidos pontos internos interpolantes sob a sub-região II de forma a representar a ação de domínio existente. Na figura VI.2.4-5 são apresentadas tais discretizações.

Método dos Volumes Finitos



Método dos Elementos de Contorno

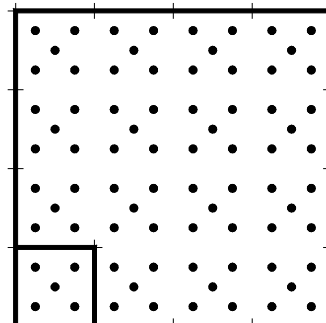


Figura VI.2.4-5 - Discretizações empregadas pelos Métodos dos Volumes Finitos e Elementos de Contorno, nos casos onde são realizadas comparações entre tais métodos numéricos.

Observa-se que, propositadamente, somente são empregadas as discretizações contendo um baixo grau de refinamento visando averiguar a robustez dos métodos numéricos no cálculo das variáveis. Na tabela VI.2.4-2 encontram-se indicados os números de entidades, volumes finitos e elementos de contorno, em que o domínio físico do problema é discretizado, assim como, o número de pontos internos interpolantes utilizados nas modelagens realizadas através do Método dos Elementos de Contorno.

Tabela VI.2.4-2 - Indicação do número de volumes finitos, de elementos de contorno e de pontos internos interpolantes, utilizados nas discretizações referentes as modelagens realizadas, respectivamente, via Método dos Volumes Finitos e Método dos Elementos de Contorno.

Método dos Volumes Finitos	Método dos Elementos de Contorno	
Número de Volumes Finitos	Número de Pontos Internos Interpolantes (PI-int)	Número de Elementos de Contorno
16	80	20

A fim de efetuar as comparações entre os diferentes métodos numéricos, são selecionados determinados pontos no interior do domínio físico do problema, de tal forma a acompanhar o valor do potencial em tais pontos, ao longo de alguns instantes de tempo definidos. Sendo que, tais valores são plotados em gráficos contendo as curvas representando a variação do potencial ao longo do tempo para a solução numérica adotada como referência.

A solução numérica de referência adotada para esta análise é obtida através da aplicação do Método dos Volumes Finitos, onde utiliza-se uma discretização altamente refinada, contendo 108 x 108 volumes finitos, e empregando-se um intervalo de tempo de 0.02.

Na figura VI.2.4-6 encontram-se representados, sobre o domínio físico do problema, os pontos selecionados ao longo da diagonal do quadrado, que são utilizados para a comparação entre as soluções numéricas. Destaca-se que estes pontos estão centralizados em relação aos volumes finitos presentes na discretização de tal método numérico.

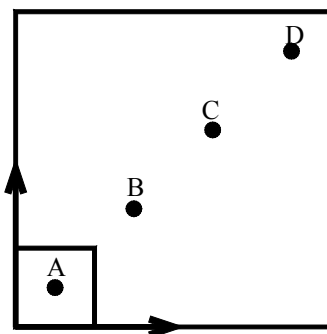


Figura VI.2.4-6 - Representação dos pontos selecionados no interior do domínio físico para a comparação dos resultados numéricos.

A seguir, na figura VI.2.4-7, apresentam-se os gráficos referentes às modelagens realizadas através da aplicação do Método dos Elementos de Contorno e do Método dos Volumes Finitos, para os diferentes valores adotados nas modelagens realizadas para a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões I e II.

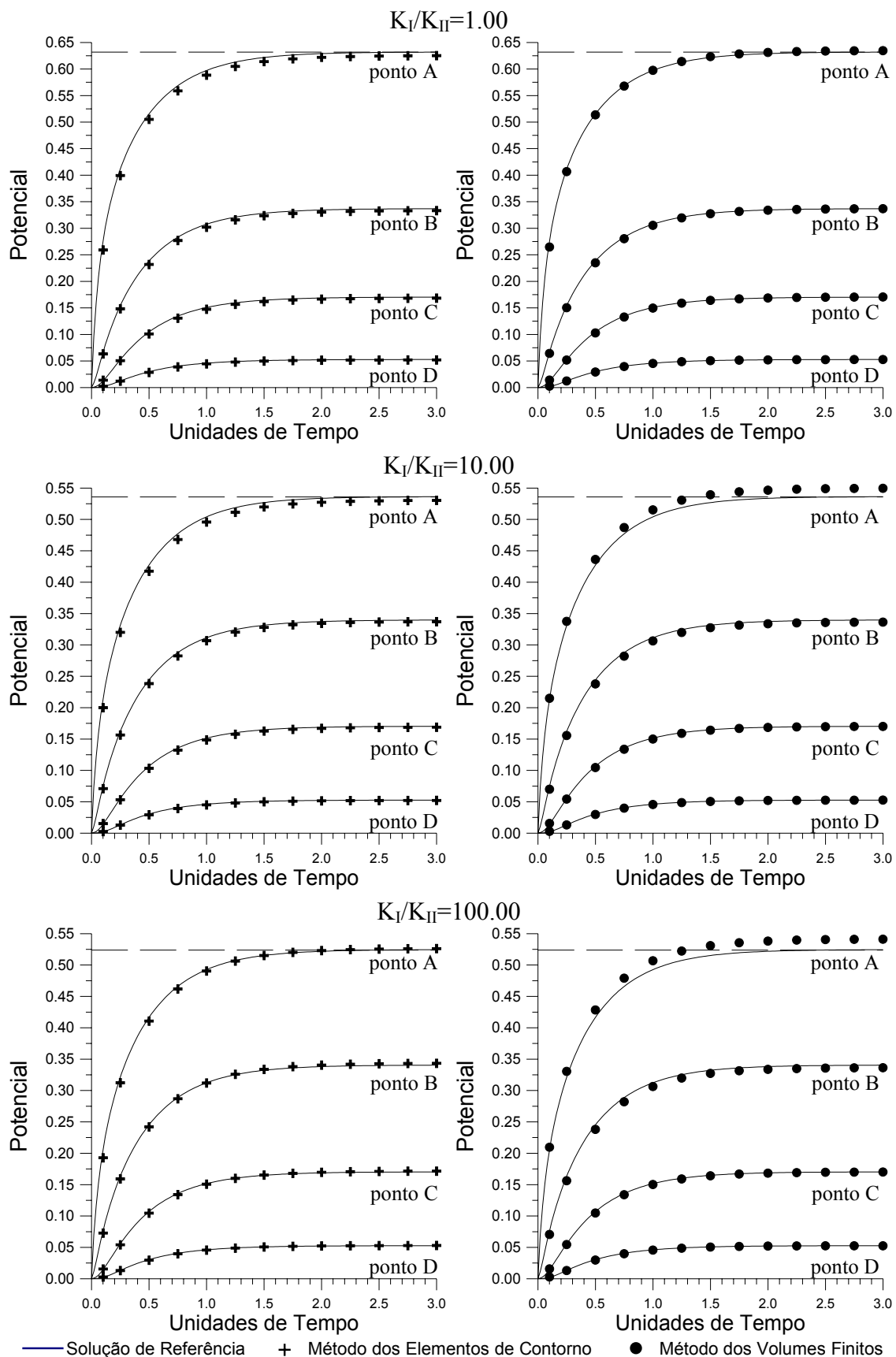


Figura VI.2.4-7 - Representação da variação do potencial ao longo do tempo nos pontos selecionados sobre o domínio físico, para as diferentes modelagens realizadas. (-) Solução Numérica de Referência; (+) Método dos Elementos de Contorno; (●) Método dos Volumes Finitos

De acordo com os diversos gráficos apresentados, na figura VI.2.4-7, podem-se tecer os seguintes comentários a respeito dos diferentes métodos numéricos:

- De maneira geral, levando-se em conta o baixo grau de refinamento adotado nas discretizações de ambos os métodos numéricos, pode-se considerar que obtiveram-se ótimas aproximações, ao longo de todo o tempo de análise, para o valor do potencial nos pontos selecionados, isto em relação à solução numérica de referência;
- Observa-se que, no Método dos Volumes Finitos, a medida que aumenta-se a relação entre as propriedades físicas das sub-regiões I e II (K_I/K_{II}), para o ponto situado no interior da sub-região I, que encontra-se nas proximidades do vértice inferior do domínio físico (onde são prescritas condições de contorno naturais), tem-se um pior desempenho deste método em relação a solução de referência;
- Tal fato pode ser explicado considerando-se que em tais casos a distribuição do potencial torna-se mais intrincada e que, devido a aproximação empregada por tal método para o tratamento de cantos no contorno do domínio físico do problema, comete-se um maior erro no valor estimado para este valor do potencial. Isto, provavelmente, ainda agrava-se devido ao tipo de condição de contorno imposta; e,
- Destaca-se que o Método dos Elementos de Contorno apresentou um comportamento mais estável para o cálculo do potencial em todos os pontos selecionados no interior do domínio físico do problema, para as várias modelagens realizadas com os diferentes valores da relação entre as propriedades físicas das sub-regiões.

Referências Bibliográficas

- [1] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [2] MANSUR, W.J., “A Time-Stepping Scheme to Solve Transient Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method”, *Ph.D. Thesis*, University of Southampton, Southampton, U.K., 1983.
- [3] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] BATHE, K.J., “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [5] TAIGBENU, E., LIGGETT, J.A., “Boundary Element Calculations of Diffusion Equation”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 11 N^o. 3, pp. 311-328, March, 1985.
- [6] KYTHE, P.K., “An Introduction to boundary Element Methods”, CRC Press, London, 1995.

CONCLUSÕES

A formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade mostrou-se eficaz para a obtenção das soluções numéricas para os tipos de equações aqui analisadas - Equação de Laplace, de Poisson e de Difusão -, englobadas pela Teoria de Campo Escalar, apresentando as seguintes vantagens e desvantagens:

Nos casos governados pela Equação de Poisson, onde a ação de domínio possui um valor constante, existem outras formulações eficientes, que apresentam uma qualidade ainda maior, mas que perdem quanto à generalidade apresentada pela formulação adotada; e,

Nos casos transientes, existem as formulações com soluções fundamentais dependentes do tempo que, embora sejam muito precisas, são computacionalmente muito custosas e possuem uma formulação mais complexa, perdendo, também, em termos da generalidade.

Esta formulação do Método dos Elementos de Contorno permite (ao método) sua aplicação em quase todos os tipos de problemas englobados pela Teoria de Campo Escalar, ampliando assim, de forma significativa, sua área de atuação, sendo que os ótimos resultados aqui apresentados, justificam plenamente o esforço e investimento computacional para tal fim.

Embora não tenham sido abordados de maneira explícita neste trabalho, a formulação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade possui subsídios que permitem, nos casos governados pelas Equações de Poisson e de Difusão, a aplicação de ações de domínio com os mais variados tipos e formas de carregamento, sem nenhuma dificuldade extra associada. Também faculta a prescrição de ações de domínio

restritas à determinada região do domínio com ou sem o emprego das denominadas sub-regiões, isto é, sem a necessidade da criação de novos sub-domínios [1, 2].

A formulação apresentada já mostrou sua excelência em outros trabalhos, tais como em Loeffler (1988) [1] e Partridge et. ali. (1992) [2], como sendo uma excelente opção no tratamento de outros tipos de Equações Diferenciais, como por exemplo a Equação de Helmholtz e a Equação da Onda, onde a formulação tradicional do método é insuficiente para a transformação do problema em termos de equações integrais envolvendo apenas variáveis no contorno do domínio físico. A maioria destes trabalhos foi feita aplicando-se elementos de contorno constantes. Desta forma, de acordo com os resultados aqui apresentados, espera-se resultados ainda melhores quando da utilização dos elementos de ordem superior.

Assim, uma sugestão para posteriores trabalhos consiste justamente na utilização destes elementos ditos de ordem superior junto a Dupla Reciprocidade, frente aos modelos matemáticos expressos pela Equação de Helmholtz e pela Equação da Onda, onde existem problemas numéricos relevantes associados à obtenção das respostas numéricas.

Conforme pôde-se observar nos diversos problemas analisados o uso de elementos de contorno de ordem superior, elementos lineares e quadráticos, de maneira geral, apresentaram um excelente desempenho quanto a precisão alcançada pela resposta numérica. Embora destaque-se que, nos casos governados pela Equação de Laplace, onde comparam-se a aplicação de elementos de contorno constantes (com tais elementos), às modelagens realizadas com os elementos de contorno constantes, já mostraram-se suficientemente precisas, dependendo obviamente do grau de refinamento utilizado, para os propósitos de Engenharia.

Ressalta-se que apesar de não ter sido apresentado nenhum caso onde a geometria do domínio físico do problema seja consideravelmente intrincada, espera-se que, nestes casos, a aplicação dos elementos de contorno quadráticos conduzam a um resultado com uma maior acurácia, do que se, em tal modelagem, fossem utilizados elementos de contorno constantes ou lineares, pois estes elementos aproximam a geometria usando funções de interpolação lineares. Deste modo, tem-se um maior erro na representação de domínios físicos não retilíneos, que reflete diretamente no cálculo dos coeficientes do sistema linear de equações algébricas resultante.

Destaca-se ainda que, nas modelagens realizadas utilizando-se de elementos de contorno constantes, os resultados apresentados no ponto nodal funcional deste elemento

possui uma ótima aproximação para o valor da incógnita do problema, mas que, devido ao tipo de função de interpolação empregada, ao longo do comprimento de tais elementos, os resultados não possuem esta característica, a não ser no caso onde a resposta do problema assemelha-se à ordem da função de interpolação utilizada.

Os diferentes tipos de elementos de contorno, diferenciando-se através da ordem das funções de interpolação empregada em sua formulação, possuem certas características que se tornam extremamente vantajosas em algumas situações específicas, como por exemplo:

O elemento de contorno constante que, normalmente, devido a natureza do tipo de aproximação de suas incógnitas ao longo de seu comprimento, na junção entre dois elementos consecutivos apresentam um perfil descontínuo para as incógnitas do problema. Tal característica é desejável quando da prescrição de condições de contorno descontínuas ou quando é esperado um resultado singular em determinado ponto, definindo-se a junção de tais elementos neste ponto de descontinuidade; e,

Os elementos de contorno linear e quadrático mostram um melhor desempenho, em relação ao elemento constante, principalmente quando da utilização de discretizações com um menor grau de refinamento, apresentando uma melhor aproximação para os valores das incógnitas ao longo de todos o comprimento do elemento, ainda mais no caso dos elementos de contorno quadráticos, levando-se em conta o comentário feito anteriormente a respeito de problemas com geometrias intrincadas, onde espera-se um melhor desempenho deste elemento.

Uma proposta interessante referente a programação computacional seria justamente a implementação em um único software onde se empregariam, simultaneamente, todos estes tipos de elementos de contorno. Deste modo, seriam aproveitadas as características vantajosas de cada um deles em uma única discretização, empregando-os quando estes se mostrarem mais convenientes.

De acordo com os diversos gráficos e tabelas apresentados contendo o erro percentual entre as soluções numéricas e analíticas, para o caso da utilização de elementos de contorno lineares e quadráticos, observou-se que as respostas numéricas obtidas através do emprego dos elementos de contorno quadráticos mostraram-se mais estáveis quando do aumento do grau de refinamento das discretizações, isto é, mostraram-se menos susceptíveis

ao acúmulo dos erros numéricos que deterioram a qualidade dos resultados numéricos calculados.

Nas comparações realizadas entre o Métodos dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos frente ao Método dos Elementos de Contorno, com a formulação de Dupla Reciprocidade aqui empregada, na grande maioria dos casos analisados, este último mostrou-se superior em vários aspectos, principalmente na precisão alcançada com os resultados numéricos para um determinado número de entidades empregadas, elementos finitos ou volumes finitos, e elementos de contorno.

Aqui cabe destacar que a comparação entre quaisquer métodos numéricos diferentes é sempre muito polêmica, ainda mais tratando-se de métodos com formulações tão distintas, como no caso do Método dos Volumes Finitos, pois não se consegue estabelecer uma equivalência perfeita entre as entidades elementares em que o domínio físico é discretizado, neste caso, entre um volume finito e um elemento de contorno.

Uma das deficiências do Método dos Elementos de Contorno é apresentada na análise realizada em um dos problemas governados pela Equação de Poisson. Trata-se do seu emprego junto a problemas contendo domínios físicos esbeltos, onde devido ao alto grau de refinamento utilizado na discretização, e, de certo modo, agravado pela forma geométrica do problema, ocasionou uma queda na qualidade dos resultados após um novo refinamento desta discretização inicial.

Este fato pode ser explicado através do tipo de solução fundamental empregada na formulação do método aqui adotada, que por possuir um decaimento logarítmico, dá origem a um sistema linear de equações algébricas contendo matrizes cheias. Desta forma, com o refinamento as matrizes crescem de tamanho, sendo que os coeficientes de influência calculados para um determinado ponto em relação a um elemento de contorno distante, embora pequenos em relação aos demais, possuem erros numéricos, devido principalmente, ao cálculo das integrais envolvidas, dando assim origem a um sistema que não representa corretamente o modelo matemático.

Uma alternativa proposta para minimizar ao máximo tal problema, embora sejam necessários testes para sua validação, é a utilização do recurso das sub-regiões. Desta forma, geram-se sub-domínios, onde embora exista a compatibilidade (acoplamento) entre eles, diminuir-se-ia sensivelmente a influência do comportamento de um ponto em relação a um elemento distante, pertencente a uma outra sub-região, que deste modo não teria uma

relação direta com tal ponto. Neste caso, as matrizes apresentar-se-iam em blocos após a formação do sistema linear de equações algébricas global, isto é, considerando-se todas as sub-regiões.

Referências Bibliográficas

- [1] LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- [2] PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. e WROBEL, L.C., “*The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.

Bibliografia

- ARPACI, V.S., “*Conduction Heat Transfer*”, Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A., 1966.
- AZEVEDO, J.P.S., “Análise de Problemas Não Lineares de Transferência de Calor pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1985.
- BANERJEE, P.K., SHAW, R.P., “*Developments in Boundary Element Methods - 2*”, Applied Science Publishers, London, 1982.
- BATHE, K.J., “*Finite Element Procedures*”, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- BREBBIA, C.A. e WALKER, S., “*Boundary Element Techniques in Engineering*”, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., “*Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*”, Springer-Verlag, New York, 1984.
- BREBBIA, C.A., WROBEL, L.C., “Steady and Unsteady Potential Problems Using the Boundary Element Method”, *Recent Advances in Numerical Methods in Fluids*, Chapter 1, Prineridge Press, 1980.
- COOK, R.D., “*Finite Element Modeling for Stress Analysis*”, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- FIGUEIREDO, T.G.B., “*A New Boundary Element Formulation in Engineering*”, Lecture Notes in Engineering n. 68, Springer-Verlag, New York, 1991.
- FOX, R.W. e MACDONALD, A.T., “*Introdução à Mecânica dos Fluidos*”, Guanabara S.A., Rio de Janeiro, 1988.
- GOLUB, G.H., VAN LOAN, C.F., “*Matrix Computations*”, 3rd Ed., Johns Hopkins University Press, London, 1996.
- JAIME, P.R., “Novas Contribuições à Simulação de Ondas Gravitacionais de Grande Amplitude pelo Método dos Elementos de Contorno”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1995.
- KYTHE, P.K., “*An Introduction to boundary Element Methods*”, CRC Press, London, 1995.
- LOEFFLER, C.F., “Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada”, *Revista Militar de Ciência e Engenharia*, jan/mar-1992.
- LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.
- MANSUR, W.J., “A Time-Stepping Scheme to Solve Transient Wave Propagation Problems

- Using the Boundary Element Method”, *Ph.D. Thesis*, University of Southampton, Southampton, U.K., 1983.
- MARQUES, E., “Combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e dos Elementos Finitos: Aplicação a Problemas de Potencial”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1986.
- MYERS, G.E., “*Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*”, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- OLIVEIRA, P.C., “Esquema Flux-Spline Aplicado em Cavidades Abertas com Convecção Natural”, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, *Tese de Doutorado*, São Paulo, 1997.
- PARTRIDGE, P.W. , BREBBIA, C.A. e WROBEL, L.C., “*The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*”, Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- PINA, H.L.G., FERNANDES, J.L.M., “Applications in Transient Heat Conduction”, *Topics in Boundary Element Research*, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1994.
- POPOV, E.P., “*Introdução à Mecânica dos Sólidos*”, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1978.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. & FLANNERY B. P.; “*Numerical Recipes in Fortran 77, the Art of Scientific Computing*”, second Edition, Cambridge University Press, New York, 1996.
- REDDY, J. N.; “An introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill International Editions, New York, 1986.
- SHAMES, I.H., “*Mecânica dos Fluidos*”, vol. 2, Edgard Blücher, São Paulo, 1973.
- STREETER, V. L., “*Mecânica dos Fluidos*”, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1977.
- TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., “*Teoria da Elasticidade*”, Ed. Guanabara Dois, 3^a Edição, Rio de Janeiro, 1980.
- VAREJÃO, L.M.C., “Flux-Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer”, University of Minnesota, *Tese de Doutorado*, EUA, 1979.
- ZAMBROZUSKI, N.J.M., “Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Propagação de Ondas Não Lineares Gravitacionais”, *Tese de Mestrado*, COPPE-UFRJ, 1992.
- ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L., “*The Finite Element Method*”, Vol. 1 e 2, Fourth Edition, MacGraw-Hill, London, 1991.

Apêndices

Apêndice 1 - Cálculo das derivadas direcionais das funções u^* e q^*

Inicialmente, para o caso de u^* , que é dado de acordo com a seguinte equação:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad \text{Eq. AP.1-1}$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial u^*}{\partial X_i} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial X_i} \quad \text{Eq. AP.1-2}$$

De acordo com a expressão para a distância radial r , pode-se obter:

$$\frac{\partial r}{\partial X_i} = \frac{[X_i(X) - X_i(\xi)]}{r} \quad \text{Eq. AP.1-3}$$

Desta forma, substituído a expressão anterior encontra-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial X_i} = \frac{1}{2\pi r^2} [X_i(X) - X_i(\xi)] \quad \text{Eq. AP.1-4}$$

Para o caso do cálculo da derivada direcional de q^* , dada de acordo com a seguinte equação:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r(\xi; X)} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n} \quad \text{Eq. AP.1-5}$$

Esta equação pode ser expressa em notação indicial, como sendo:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,j} n_j \quad \text{Eq. AP.1-6}$$

Desta forma, a derivada direcional é expressa por:

$$\frac{\partial q^*}{\partial X_i} = q^*_{,i} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} r_{,j} n_j \right]_{,i} \quad \text{Eq. AP.1-7}$$

Desenvolvendo esta equação obtém-se:

$$q^*_{,i} = -\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r^2} (r_{,j} n_j) r_{,i} + \frac{1}{r} (r_{,j} n_j)_{,i} \right] = -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{r_{,j} r_{,i} n_j}{r^2} + \frac{1}{r} [r_{,ji} n_j + r_{,j} n_{j,i}] \right\} \quad \text{Eq. AP.1-8}$$

Mas sabe-se que: $n_{j,i} = 0$ pois, $n_{j,i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial X_j}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial X_j}{\partial X_i} = 0$

Também, introduzindo-se as seguintes expressões:

$$r_{j,i} = \begin{pmatrix} r_j \\ r \end{pmatrix}_i \quad r_i = \begin{pmatrix} -r_i \\ r \end{pmatrix} \quad r_j = \begin{pmatrix} r_j \\ r \end{pmatrix} \quad \text{Eq. AP.1-9}$$

Encontra-se:

$$q_{,i}^* = -\frac{1}{2\pi} \left\{ + \frac{r_j r_i n_j}{r^4} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r_j \\ r \end{pmatrix}_i n_j \right\} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ + \frac{r_j r_i n_j}{r^4} + \frac{1}{r} \left(-\frac{r_j}{r^2} r_i + \frac{r_{j,i}}{r} \right) n_j \right\} \quad \text{Eq. AP.1-10}$$

$$q_{,i}^* = -\frac{1}{2\pi} \left\{ + \frac{r_j r_i n_j}{r^4} + \frac{1}{r^3} r_j \frac{r_i}{r} n_j - \frac{1}{r^2} \delta_{ji} n_j \right\} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ + \frac{r_j r_i n_j}{r^4} + \frac{r_j r_i n_j}{r^4} - \frac{1}{r^2} n_i \right\} \quad \text{Eq. AP.1-11}$$

$$q_{,i}^* = \frac{1}{2\pi} \left\{ -2 \frac{r_j r_i n_j}{r^4} + \frac{r^2}{r^4} n_i \right\} \quad \text{Eq. AP.1-12}$$

Finalmente:

$$q_{,i}^* = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 n_i - 2 r_i r_j n_j \right\} \quad \text{Eq. AP.1-13}$$

Expandindo-se a equação anterior obtém-se:

$$\frac{\partial q^*(\xi^i; X)}{\partial X_i(\xi)} = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 \frac{\partial X_i(X)}{\partial n(X)} - 2 [X_i(X) - X_i(\xi)] [X_j(X) - X_j(\xi)] \frac{\partial X_j(X)}{\partial n(X)} \right\} \quad \text{Eq. AP.1-14}$$

Assim:

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 \frac{\partial x}{\partial n} - 2 [X(X) - X(\xi)] \left[[X(X) - X(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} + [Y(X) - Y(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} \right] \right\} \quad \text{Eq. AP.1-15}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial y} = \frac{1}{2\pi r^4} \left\{ r^2 \frac{\partial y}{\partial n} - 2 [Y(X) - Y(\xi)] \left[[X(X) - X(\xi)] \frac{\partial x}{\partial n} + [Y(X) - Y(\xi)] \frac{\partial y}{\partial n} \right] \right\} \quad \text{Eq. AP.1-16}$$

Apêndice 2 - Rearranjo Matricial para o Caso da Existência de Sub-região em um Problema Governado Pela Equação de Laplace

A seguir apresenta-se um exemplo do rearranjo matricial, para um problema governado pela Equação de Laplace, tendo um domínio físico Ω composto por duas sub-regiões Ω^1 e Ω^2 , isto é, $\Omega = \Omega^1 + \Omega^2$, as sub-regiões possuem propriedades físicas diferentes, K^1 e K^2 respectivamente a Ω^1 e Ω^2 .

Na figura AP.2-1 representa-se o domínio físico Ω discretizado através de elementos de contorno, onde encontram-se apresentados esquematicamente os pontos nodais funcionais utilizados.

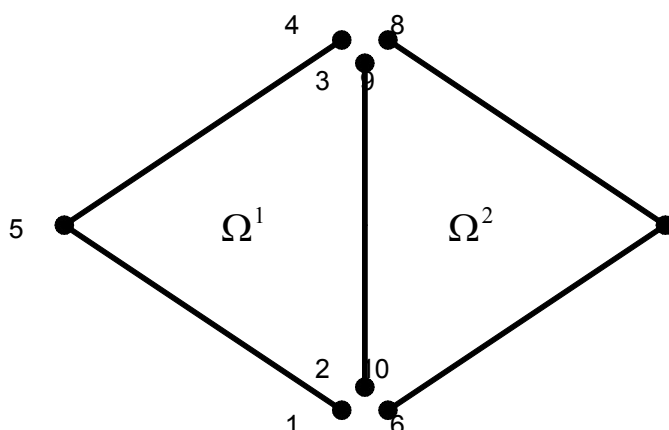


Figura AP.2-1 - Representação do domínio físico Ω , o contorno Γ e sua derivada normal n

A seguir, aplicando-se o Método dos Elementos de contorno, tem-se o sistema matricial completo, agrupando as contribuições de cada uma das duas sub-regiões em separado:

$$\begin{bmatrix}
H_{1.1} & H_{1.2} & H_{1.3} & H_{1.4} & H_{1.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
H_{2.1} & H_{2.2} & H_{2.3} & H_{2.4} & H_{2.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
H_{3.1} & H_{3.2} & H_{3.3} & H_{3.4} & H_{3.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
H_{4.1} & H_{4.2} & H_{4.3} & H_{4.4} & H_{4.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
H_{5.1} & H_{5.2} & H_{5.3} & H_{5.4} & H_{5.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{6.6} & H_{6.7} & H_{6.8} & H_{6.9} & H_{6.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{7.6} & H_{7.7} & H_{7.8} & H_{7.9} & H_{7.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{8.6} & H_{8.7} & H_{8.8} & H_{8.9} & H_{9.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{9.6} & H_{9.7} & H_{9.8} & H_{9.9} & H_{9.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{10.6} & H_{10.7} & H_{10.8} & H_{10.9} & H_{10.10}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
U_1 \\
U_2 \\
U_3 \\
U_4 \\
U_5 \\
U_6 \\
U_7 \\
U_8 \\
U_9 \\
U_{10}
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
G_{1.1} & G_{1.2} & G_{1.3} & G_{1.4} & G_{1.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{2.1} & G_{2.2} & G_{2.3} & G_{2.4} & G_{2.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{3.1} & G_{3.2} & G_{3.3} & G_{3.4} & G_{3.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{4.1} & G_{4.2} & G_{4.3} & G_{4.4} & G_{4.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{5.1} & G_{5.2} & G_{5.3} & G_{5.4} & G_{5.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{6.6} & G_{6.7} & G_{6.8} & G_{6.9} & G_{6.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{7.6} & G_{7.7} & G_{7.8} & G_{7.9} & G_{7.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{8.6} & G_{8.7} & G_{8.8} & G_{8.9} & G_{9.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{9.6} & G_{9.7} & G_{9.8} & G_{9.9} & G_{9.10} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{10.6} & G_{10.7} & G_{10.8} & G_{10.9} & G_{10.10}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
Q_1 \\
Q_2 \\
Q_3 \\
Q_4 \\
Q_5 \\
Q_6 \\
Q_7 \\
Q_8 \\
Q_9 \\
Q_{10}
\end{Bmatrix}$$

Eq. AP.2-1

Utilizando-se as condições de continuidade e equilíbrio na interface, vide equações III.5-11 e III.5-12 respectivamente, representadas através das seguintes expressões:

$$U_2 = U_{10} \qquad U_3 = U_9 \qquad Q_2 = cQ_{10} \qquad U_3 = cQ_9 \qquad \text{Eq. AP.2-2}$$

sendo: $c = -\frac{K^2}{K^1}$

Desta forma, o sistema matricial pode ser expresso por:

$$\begin{bmatrix}
 H_{1.1} & H_{1.4} & H_{1.5} & H_{1.2} & H_{1.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{2.1} & H_{2.4} & H_{2.5} & H_{2.2} & H_{2.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{3.1} & H_{3.4} & H_{3.5} & H_{3.2} & H_{3.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{4.1} & H_{4.4} & H_{4.5} & H_{4.2} & H_{4.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{5.1} & H_{5.4} & H_{5.5} & H_{5.2} & H_{5.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{6.10} & H_{6.9} & H_{6.6} & H_{6.7} & H_{6.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{7.10} & H_{7.9} & H_{7.6} & H_{7.7} & H_{7.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{8.10} & H_{8.9} & H_{8.6} & H_{8.7} & H_{8.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{9.10} & H_{9.9} & H_{9.6} & H_{9.7} & H_{9.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{10.10} & H_{10.9} & H_{10.6} & H_{10.7} & H_{10.8} & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8 \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{1.1} & G_{1.4} & G_{1.5} & G_{1.2} & G_{1.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{2.1} & G_{2.4} & G_{2.5} & G_{2.2} & G_{2.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{3.1} & G_{3.4} & G_{3.5} & G_{3.2} & G_{3.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{4.1} & G_{4.4} & G_{4.5} & G_{4.2} & G_{4.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{5.1} & G_{5.4} & G_{5.5} & G_{5.2} & G_{5.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{6.10} & cG_{6.9} & G_{6.6} & G_{6.7} & G_{6.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{7.10} & cG_{7.9} & G_{7.6} & G_{7.7} & G_{7.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{8.10} & cG_{8.9} & G_{8.6} & G_{8.7} & G_{8.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{9.10} & cG_{9.9} & G_{9.6} & G_{9.7} & G_{9.8} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{10.10} & cG_{10.9} & G_{10.6} & G_{10.7} & G_{10.8} & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8 \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{bmatrix}
 \quad \text{Eq. AP.2-3}$$

Sendo que, após uma nova reordenação no sistema matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
 H_{1.1} & H_{1.4} & H_{1.5} & H_{1.2} & H_{1.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{2.1} & H_{2.4} & H_{2.5} & H_{2.2} & H_{2.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{3.1} & H_{3.4} & H_{3.5} & H_{3.2} & H_{3.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{4.1} & H_{4.4} & H_{4.5} & H_{4.2} & H_{4.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{5.1} & H_{5.4} & H_{5.5} & H_{5.2} & H_{5.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{6.10} & H_{6.9} & \cdot & H_{6.6} & H_{6.7} & H_{6.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{7.10} & H_{7.9} & \cdot & H_{7.6} & H_{7.7} & H_{7.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{8.10} & H_{8.9} & \cdot & H_{8.6} & H_{8.7} & H_{8.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{9.10} & H_{9.9} & \cdot & H_{9.6} & H_{9.7} & H_{9.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{10.10} & H_{10.9} & \cdot & H_{10.6} & H_{10.7} & H_{10.8} & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{1.1} & G_{1.4} & G_{1.5} & G_{1.2} & G_{1.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{2.1} & G_{2.4} & G_{2.5} & G_{2.2} & G_{2.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{3.1} & G_{3.4} & G_{3.5} & G_{3.2} & G_{3.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{4.1} & G_{4.4} & G_{4.5} & G_{4.2} & G_{4.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{5.1} & G_{5.4} & G_{5.5} & G_{5.2} & G_{5.3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{6.10} & cG_{6.9} & \cdot & G_{6.6} & G_{6.7} & G_{6.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{7.10} & cG_{7.9} & \cdot & G_{7.6} & G_{7.7} & G_{7.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{8.10} & cG_{8.9} & \cdot & G_{8.6} & G_{8.7} & G_{8.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{9.10} & cG_{9.9} & \cdot & G_{9.6} & G_{9.7} & G_{9.8} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & cG_{10.10} & cG_{10.9} & \cdot & G_{10.6} & G_{10.7} & G_{10.8} & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8
 \end{bmatrix}
 \quad \text{Eq. AP.2-4}$$

Passando-se os valores incógnitos da interface para o lado esquerdo da expressão matricial encontra-se finalmente:

$$\begin{bmatrix}
 H_{1.1} & H_{1.4} & H_{1.5} & H_{1.2} & H_{1.3} & -G_{1.2} & -G_{1.3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{2.1} & H_{2.4} & H_{2.5} & H_{2.2} & H_{2.3} & -G_{2.2} & -G_{2.3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{3.1} & H_{3.4} & H_{3.5} & H_{3.2} & H_{3.3} & -G_{3.2} & -G_{3.3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{4.1} & H_{4.4} & H_{4.5} & H_{4.2} & H_{4.3} & -G_{4.2} & -G_{4.3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H_{5.1} & H_{5.4} & H_{5.5} & H_{5.2} & H_{5.3} & -G_{5.2} & -G_{5.3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{6.10} & H_{6.9} & -cG_{6.10} & -cG_{6.9} & H_{6.6} & H_{6.7} & H_{6.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{7.10} & H_{7.9} & -cG_{7.10} & -cG_{7.9} & H_{7.6} & H_{7.7} & H_{7.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{8.10} & H_{8.9} & -cG_{8.10} & -cG_{8.9} & H_{8.6} & H_{8.7} & H_{8.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{9.10} & H_{9.9} & -cG_{9.10} & -cG_{9.9} & H_{9.6} & H_{9.7} & H_{9.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & H_{10.10} & H_{10.9} & -cG_{10.10} & -cG_{10.9} & H_{10.6} & H_{10.7} & H_{10.8}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{1.1} & G_{1.4} & G_{1.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{2.1} & G_{2.4} & G_{2.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{3.1} & G_{3.4} & G_{3.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{4.1} & G_{4.4} & G_{4.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 G_{5.1} & G_{5.4} & G_{5.5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{6.6} & G_{6.7} & G_{6.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{7.6} & G_{7.7} & G_{7.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{8.6} & G_{8.7} & G_{8.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{9.6} & G_{9.7} & G_{9.8} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{10.6} & G_{10.7} & G_{10.8}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8
 \end{Bmatrix}$$

Eq. AP.2-5

Para a formação do sistema matricial na forma da equação III.3-1, o próximo passo a ser dado consiste na aplicação das condições de contorno associadas à cada ponto nodal funcional pertencente ao contorno.

Apêndice 3 - Interpretação Geométrica das Função Auxiliar F^j na Dupla Reciprocidade

Um dos aspectos importantes da Dupla Reciprocidade consiste na aproximação da ação de domínio, expressa pela seguinte equação:

$$\Phi(X, t) \cong \alpha^j(t)F^j(X) \quad \text{Eq. AP.3-1}$$

onde F^j é uma função auxiliar, relacionando os pontos X do domínio e os pontos de interpolação A^j, X^j (vide Capítulo IV). Tal equação representa uma combinação linear de funções.

Nesta seção são apresentados diversos gráficos e tabelas para proporcionar uma melhor interpretação geométrica das funções auxiliares F^j e da aproximação representada pela equação acima, aplicando-se tal aproximação para representar determinadas ações de domínio.

As funções auxiliares F^j aqui analisadas pertencem à categoria das denominadas funções radiais, expressas por uma combinação de funções envolvendo a distância euclidiana r . Tais funções podem ser representadas pela seguinte expressão:

$$F = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad \text{Eq. AP.3-2}$$

A seguir, com o propósito de ilustrar a aproximação de uma ação de domínio através do uso da expressão AP.3-1 apresenta-se o caso de uma ação de domínio, de valor 10 unidades de ações de domínio (u.a.d.), constante ao longo de um domínio físico quadrado de lado L igual a 2 unidades de comprimento (u.c.).

Na figura AP.3-1 representa-se o domínio físico onde aplica-se a aproximação da ação de domínio. Nesta figura, representam-se os pontos interpolantes, onde são prescritos os valores da ação de domínio, neste caso constante igual a 10 unidades de ações de domínio (u.a.d.).

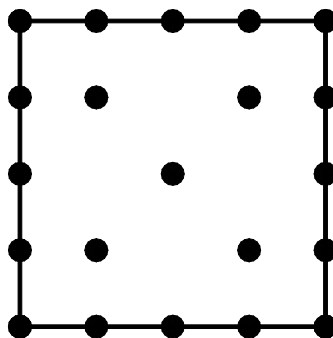


Figura AP.3-1 -Disposição dos pontos interpolantes da ação de domínio sob o domínio físico

De acordo com as dimensões geométricas e o valor constante da ação de domínio pode-se determinar o volume formado por esta ao longo do domínio físico do problema, como sendo:

$$\text{Volume da ação de domínio} = 2 \text{ u.c.} \times 2 \text{ u.c.} \times 10 \text{ u.a.d.}$$

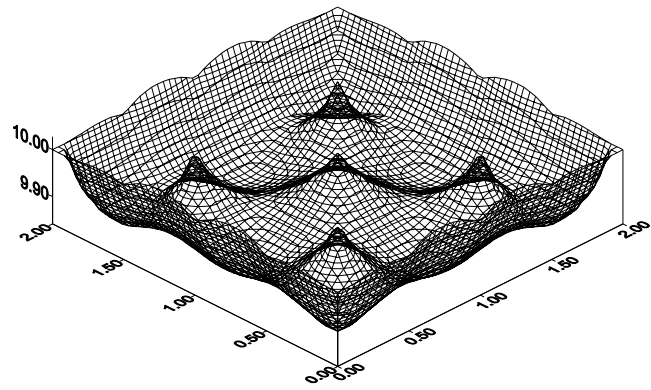
$$\text{Volume da ação de domínio} = 40 \text{ u.c.}^2 \text{ u.a.d.}$$

Os resultados obtidos para o volume da ação de domínio, através das aproximações realizadas, podem ser visualizados de acordo com a tabela AP.3-1.

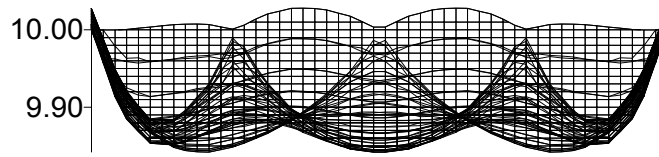
Tabela AP.3-1 - Resultado para o volume da ação de domínio variando-se as funções auxiliares

Função	Volume
$F = r$	39.6045
$F = r^3$	40.0677
$F = r^5$	39.9441
$F = r + r^3$	39.1632
$F = r + r^2 + r^3$	39.5583
$F = r + r^3 + r^5$	40.7394

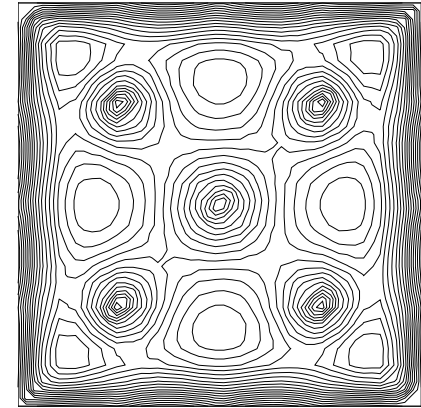
A seguir apresentam-se gráficos contendo uma perspectiva, uma vista lateral e uma vista superior (contendo linha equipotenciais) de como a ação de domínio é aproximada ao longo do domínio físico do problema, para as diversas combinações analisadas para a função auxiliar F^j .



a)



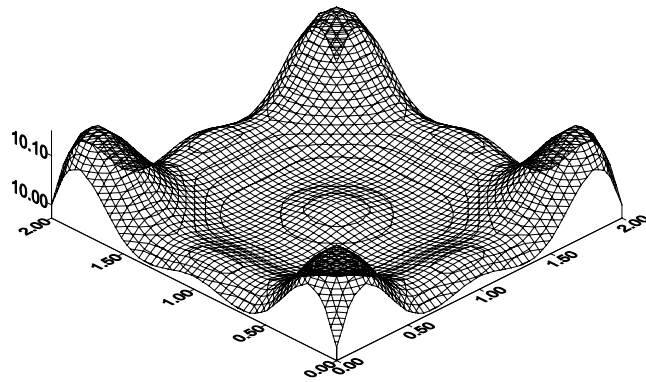
b)



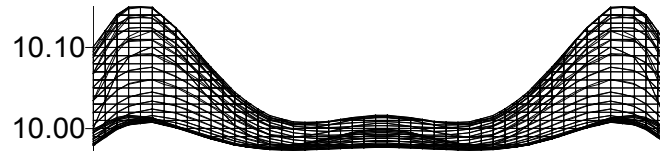
c)

Figura AP.3-2 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r$

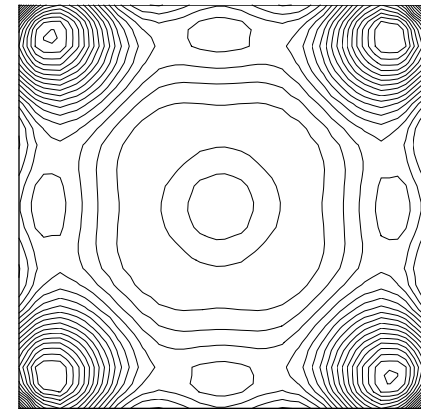
a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior



a)



b)



c)

Figura AP.3-3 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r^3$

a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior

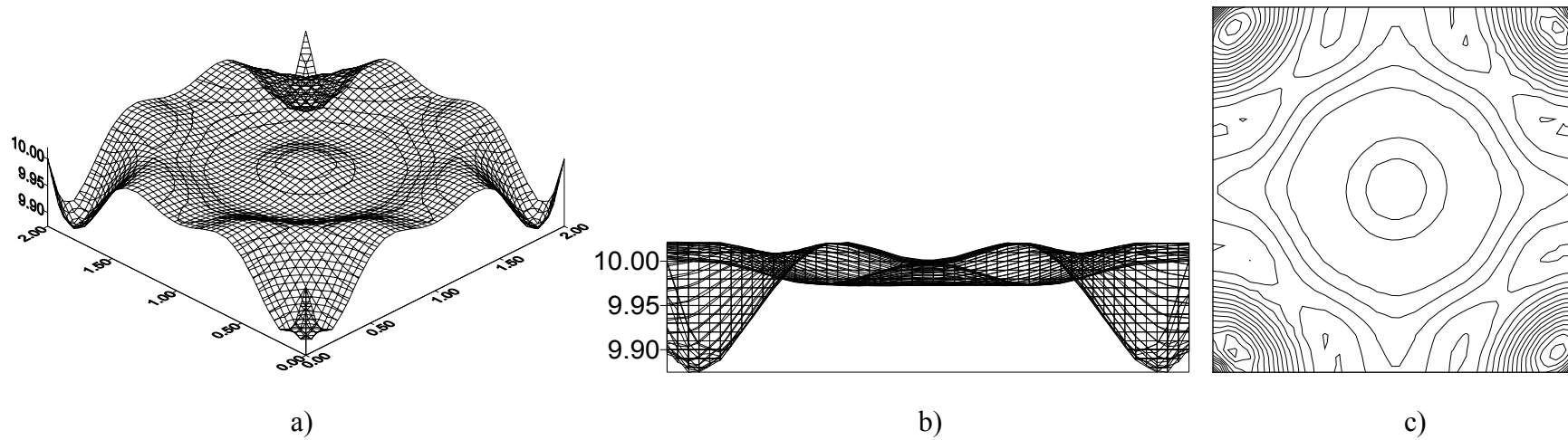


Figura AP.3-4 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r^5$
 a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior

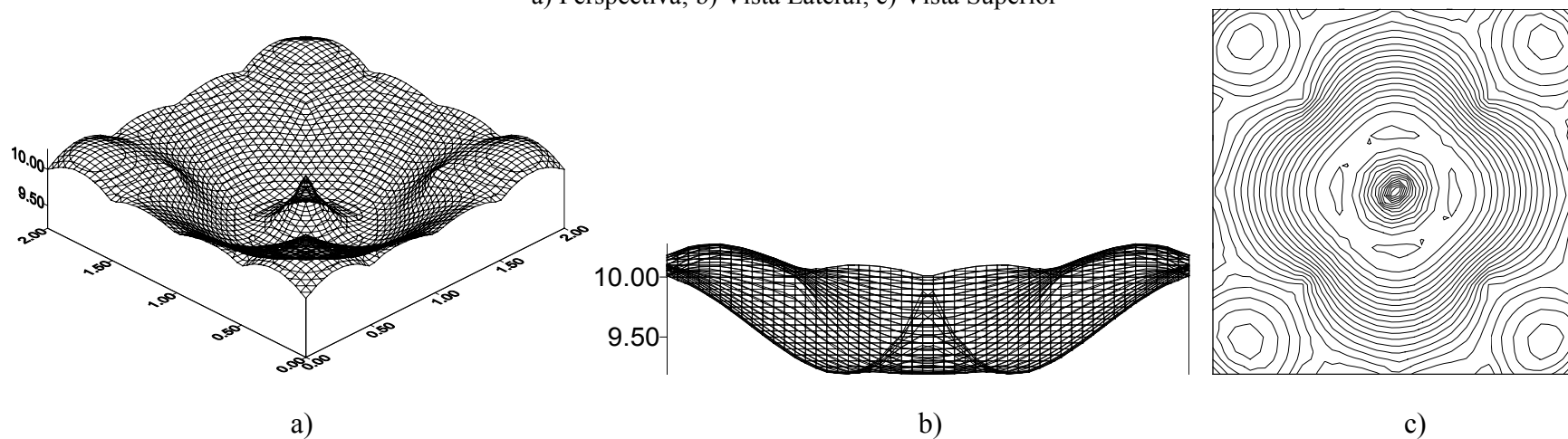


Figura AP.3-5 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r + r^3$
 a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior

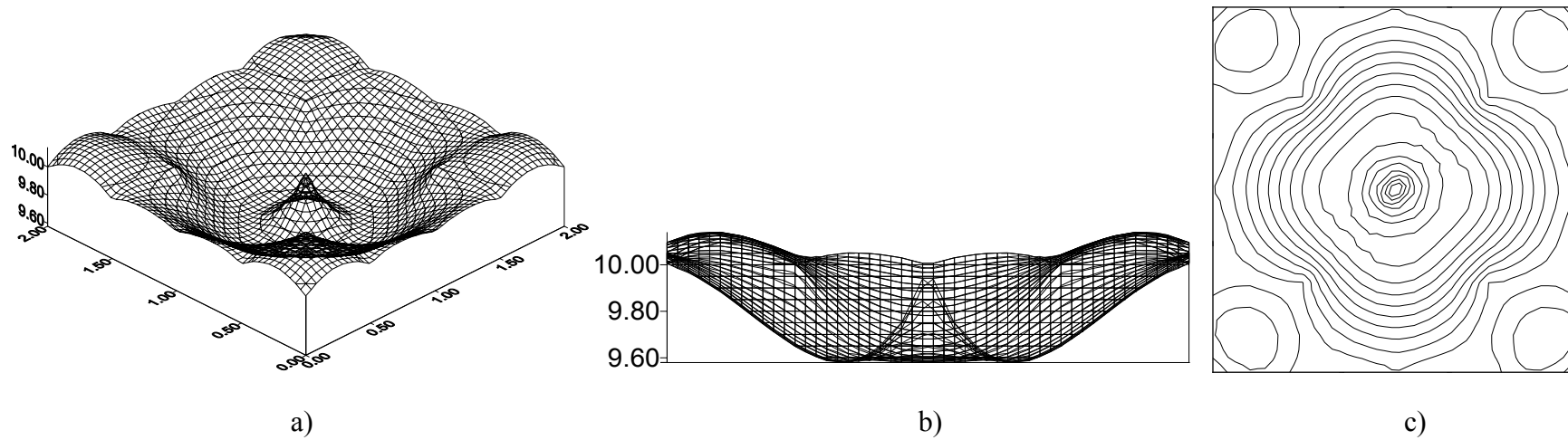


Figura AP.3-6 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r + r^2 + r^3$
 a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior

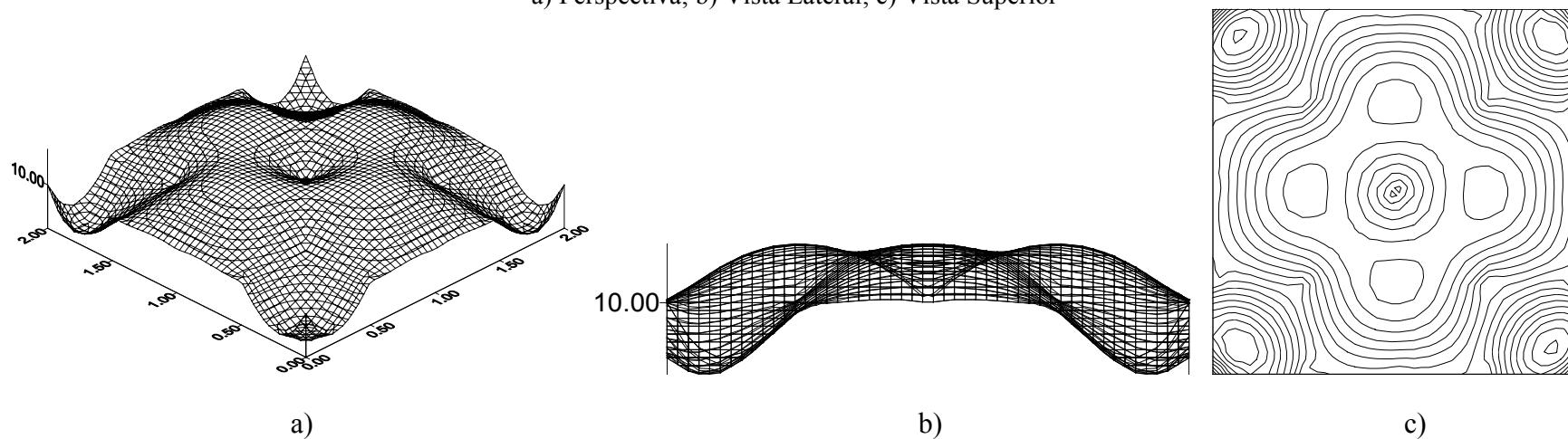


Figura AP.3-7 - Representação da aproximação da ação de domínio ao longo do domínio físico, utilizando-se da função auxiliar $F = r + r^3 + r^5$
 a) Perspectiva; b) Vista Lateral; c) Vista Superior

Segundo os gráficos apresentados, observa-se que o uso da aproximação da ação de domínio, fornece os mesmos valores prescritos nos pontos onde prescreveu-se a “ação de domínio” e para os demais pontos pertencentes ao domínio físico apresentam seus valores interpolados de acordo com a função auxiliar utilizada.

Pode-se concluir que, segundo os resultados aqui apresentados, a escolha da função auxiliar como sendo simplesmente $F = r$ é bastante adequada pois apresenta o mais baixo custo computacional, além do fato de que, de acordo com a tabela AP.3-1, todas as funções auxiliares adotadas apresentaram um erro insignificante no cálculo do volume da ação de domínio sobre o domínio físico do problema.

De forma a melhor demonstrar o aspecto interpolante das funções auxiliares F^j , apresenta-se a seguir dois casos onde intencionalmente, em determinado ponto do domínio físico do problema, prescreve-se erroneamente o valor da ação de domínio como sendo um valor nulo.

O domínio físico destas análises é composto por um quadrado de lado igual a 2 unidades de comprimento (u.c.), sendo que, na figura AP.3-8, apresenta-se sua discretização contendo os pontos interpolantes, onde são prescritas as ações de domínio. Tal discretização é utilizada nos dois casos analisados a seguir.

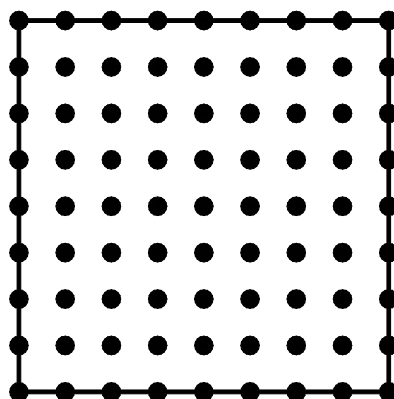


Figura AP.3-8 -Disposição dos pontos interpolantes da ação de domínio sob o domínio físico

No primeiro caso, a ação de domínio é constante de valor 10 (u.a.d.) ao longo do domínio físico. Ressalta-se que, em seu ponto central, prescreve-se erroneamente o valor da ação de domínio como sendo nulo. A figura AP.3-9 contém os gráficos ilustrativos desta análise.

No segundo caso apresentado, a ação de domínio possui uma variação linear, sendo seu valor numérico igual a coordenada X do ponto em questão, sendo que no ponto central do domínio físico prescreve-se erroneamente o valor da ação de domínio como sendo nulo. Na figura AP.3-10 apresentam-se os gráficos ilustrativos desta análise.

De acordo com os gráficos, apresentados nas figuras AP.3-9 e AP.3-10, observa-se que, ao redor do ponto central, onde prescreveu-se erroneamente o valor da ação de domínio, tem-se uma distorção do comportamento da ação de domínio, mas esta distorção encontra-se limitada a uma pequena parcela do domínio. Além do mais, para os pontos interpolantes que encontram-se ao redor do ponto central, a aproximação utilizada para a ação de domínio faz com que, nestes pontos, a função passe obrigatoriamente pelos valores prescritos.

De fato, observa-se que a prescrição errônea de um valor da ação de domínio para um único ponto interpolante não afeta de forma significativa o comportamento da função de aproximação, desde que se utilize um número adequado de pontos interpolantes. Consequentemente, não há alteração significativa da resposta numérica de um problema com estas características, conforme pode ser observado em Loeffler (1988).

Referência Bibliográfica

LOEFFLER, C.F., “Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar”, *Tese de Doutorado*, COPPE-UFRJ, 1988.

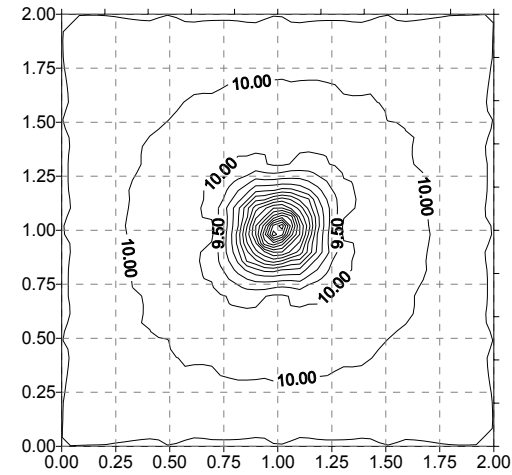
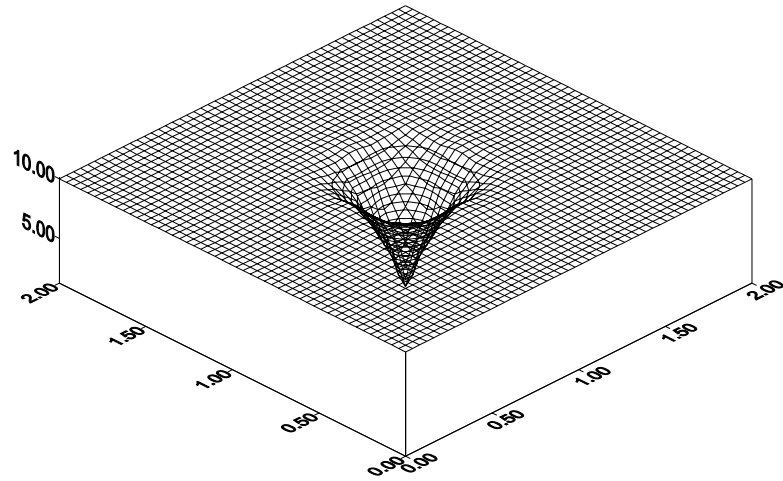


Figura AP.3-9 - Comportamento da função de aproximação ao longo do domínio físico, quando da prescrição errônea em um dos pontos interpolantes. Caso com uma distribuição constante da ação de domínio.

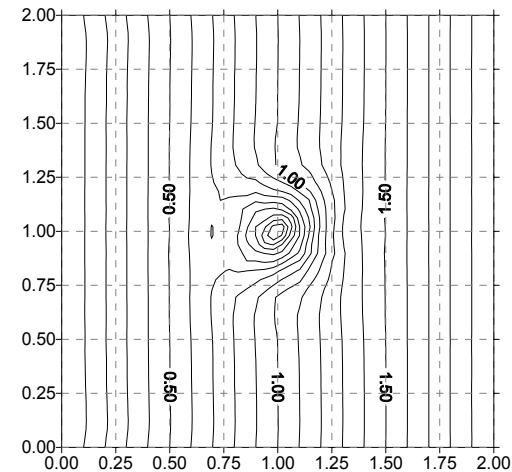
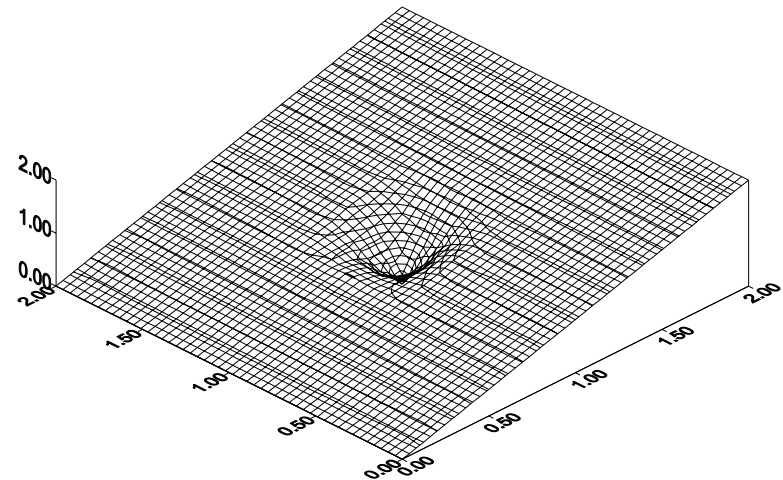


Figura AP.3-10 - Comportamento da função de aproximação ao longo do domínio físico, quando da prescrição errônea em um dos pontos interpolantes. Caso com uma distribuição linear da ação de domínio.