



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Filipe Lopes Cruzeiro

Uma comparação entre elementos de contorno contínuos e descontínuos na solução de problemas de Laplace

Vitória, ES

2024

Filipe Lopes Cruzeiro

Uma comparação entre elementos de contorno contínuos e descontínuos na solução de problemas de Laplace

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Centro Tecnológico

Departamento de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

Vitória, ES

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

C955c Cruzeiro, Filipe Lopes, 1999-
Uma comparação entre elementos de contorno contínuos e
descontínuos na solução de problemas de Laplace / Filipe Lopes
Cruzeiro. - 2024.
69 f. : il.

Orientador: Luciano de Oliveira Castro Lara.
Coorientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) -
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Elementos de contorno. 2. Métodos numéricos. 3.
Elementos Descontínuos. I. Lara, Luciano de Oliveira Castro. II.
Loeffler Neto, Carlos Friedrich. III. Universidade Federal do
Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

UMA COMPARAÇÃO ENTRE ELEMENTOS DE CONTORNO CONTÍNUOS E DESCONTÍNUOS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE LAPLACE

FILIPPE LOPES CRUZEIRO

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Luciano De Oliveira Castro Lara
(Orientador – PPGEM/UFES)

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto
(Coorientador – PPGEM/UFES)

Prof. Dr. Lucas Silveira Campos
(Examinador Externo – DEM/UFES)

Dr. André Bulcão
(Examinador Externo – CENPES/Petrobrás)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória/ES, 09 de setembro de 2024.

Documento original assinado eletronicamente, conforme MP 2200-2/2001, art. 10, § 2º, por:

LUCAS SILVEIRA CAMPOS
CIDADÃO
assinado em 03/10/2024 15:24:23 -03:00

ANDRE BULCAO
CIDADÃO
assinado em 15/10/2024 18:30:28 -03:00

LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA
CIDADÃO
assinado em 03/10/2024 17:28:37 -03:00

CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO
CIDADÃO
assinado em 14/10/2024 09:16:25 -03:00



INFORMAÇÕES DO DOCUMENTO

Documento capturado em 15/10/2024 18:30:28 (HORÁRIO DE BRASÍLIA - UTC-3)
por ANDRÉIA GUZI EYNG (CIDADÃO)
Valor Legal: ORIGINAL | Natureza: DOCUMENTO NATO-DIGITAL

A disponibilidade do documento pode ser conferida pelo link: <https://e-docs.es.gov.br/d/2024-F5FXQP>

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder força, saúde e sabedoria ao longo desta jornada. Sem a Sua orientação divina, eu não teria alcançado este marco importante na minha vida acadêmica e pessoal.

Agradeço de coração aos meus pais, cuja paciência, amor e apoio incondicional foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui. Vocês sempre acreditaram em mim, mesmo nos momentos em que eu duvidei de mim mesmo. Sua fé e encorajamento foram o combustível que me impulsionou a seguir em frente.

Ao professor Luciano de Oliveira Castro Lara, meu orientador, expresso minha mais profunda gratidão. Seu conhecimento, dedicação e orientação foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por todas as reuniões, sugestões valiosas e paciência ao longo deste processo. Suas contribuições foram inestimáveis e seu comprometimento com minha formação acadêmica fez toda a diferença.

Ao professor Carlos Friedrich Loeffler Neto, meu co-orientador, sou igualmente grato. Sua experiência, conselhos e suporte foram fundamentais para a realização desta dissertação. Agradeço por compartilhar seu tempo e conhecimento comigo, e por me ajudar a enfrentar os desafios que surgiram ao longo do caminho.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) pelo apoio financeiro concedido, que foi essencial para a realização desta pesquisa. O suporte proporcionado pela FAPES viabilizou o desenvolvimento deste trabalho e contribuiu diretamente para o avanço do conhecimento na área. Sou grato por essa oportunidade e por todo o incentivo à ciência e inovação no Espírito Santo.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Cada palavra de incentivo, cada gesto de apoio e cada contribuição foram essenciais para que este sonho se tornasse realidade.

*"Cada pessoa deve trabalhar para o seu aperfeiçoamento e,
ao mesmo tempo, participar da responsabilidade
coletiva por toda a humanidade."
(Marie Curie)*

Resumo

O método dos elementos de contorno (MEC) é uma técnica poderosa para a solução de problemas da mecânica do contínuo e, junto ao método dos elementos finitos e ao método das diferenças finitas, modificou totalmente o projeto em engenharia. Este método surgiu como uma alternativa entre os outros métodos numéricos, principalmente em problemas que demandam grande precisão, como problemas de concentração de tensões e problemas com domínio infinito.

A principal característica do método dos elementos de contorno é a integração apenas nas fronteiras do problema, ou seja, os elementos estão situados apenas no contorno. Em alguns casos, é necessário o posicionamento de pontos fonte no domínio, seja para a inserção de graus de liberdade, como em problemas relacionados à vibração de películas, seja para a obtenção de propriedades específicas naquele ponto, como uma fonte de calor. Contudo, em equações auto-adjuntas, como a equação de Laplace, não é necessário colocar pontos no domínio, discretizando-se apenas o contorno. Para esse tipo de problema, a qualidade da solução dependerá da forma como os elementos são construídos e da sua quantidade.

Na sua forma mais simples, o MEC possui um elemento que tem apenas um ponto fonte em seu centro, e as propriedades deste ponto são adotadas para todo o elemento. Outra formulação são os elementos lineares contínuos, que possuem dois pontos funcionais posicionados sobre os pontos geométricos, e esses pontos funcionais são compartilhados com os elementos vizinhos. Essa formulação evoluiu para a utilização de elementos de alta ordem, sendo bastante comum o uso de elementos quadráticos e cúbicos. Esses elementos possuem algumas deficiências, como a necessidade de tratamento especial nas quinas, além da dificuldade de gerar malhas para a técnica de subdomínio.

Esses problemas levaram à criação de um tipo de elemento chamado descontínuo. Esse tipo de elemento se caracteriza pela descontinuidade entre o elemento i e os outros elementos adjacentes, ou seja, não há compartilhamento de pontos funcionais entre os elementos. A utilização desse elemento é uma característica própria do MEC, não podendo ser aplicada nos outros métodos clássicos.

Este trabalho analisará a eficiência do método dos elementos de contorno descontínuo na solução da equação de Laplace, avaliando a qualidade e a ordem de convergência dessa formulação em relação à formulação contínua.

Palavras-chaves: Método dos elementos de contorno, Elementos descontínuos, Métodos numéricos.

Abstract

The Boundary Element Method (BEM) is one of the most powerful techniques for solving continuum mechanics problems and, along with the Finite Element Method (FEM) and the Finite Difference Method (FDM), has completely transformed engineering. The Boundary Element Method emerged as a powerful alternative among other numerical methods, particularly for problems requiring high precision, such as stress concentration problems and problems with infinite domains.

The main characteristic of the Boundary Element Method is the integration only at the boundaries of the problem, meaning the elements are located solely on the boundary. In some cases, it is necessary to place source points within the domain, either to introduce degrees of freedom, as in problems related to membrane vibrations, or to obtain specific properties at that point, such as a heat source. However, in self-adjoint equations, such as the Laplace equation, it is not necessary to place points within the domain, with only the boundary being discretized. For this type of problem, the quality of the solution will depend on how the elements are constructed.

In its simplest form, BEM has an element with only one source point at its center, and the properties of this point are adopted for the entire element. Another formulation involves continuous linear elements, which have two functional points positioned on geometric points, and these functional points are shared with neighboring elements. This formulation evolved to include high-order elements, with quadratic and cubic elements being quite common. These elements have some deficiencies, such as the need for special treatment at corners, as well as the difficulty of generating meshes for the subdomain technique.

These problems led to the creation of a type of element called discontinuous. This type of element is characterized by discontinuity between element i and the adjacent elements, meaning there is no sharing of functional points between elements. The use of this element is a specific feature of BEM, and it cannot be applied in other classical methods.

This work will analyze the efficiency of the discontinuous Boundary Element Method in solving the Laplace equation, evaluating the quality and the order of convergence of this formulation compared to the continuous formulation.

Keywords: Boundary Element Method, Discontinuous Elements, Numerical Methods.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Geometria do experimento de Darcy Fonte: Tese Nascimento	22
Figura 2 – Volume de controle diferencial, $dx dy$, para a análise da condução em coordenadas cartesianas.	25
Figura 3 – Contornos original e adaptado.	29
Figura 4 – Angulo interno do contorno	30
Figura 5 – Conversão de coordenadas cartesianas para polares	32
Figura 6 – Elemento constante	34
Figura 7 – Elemento Linear	35
Figura 8 – Elemento Quadrático	35
Figura 9 – Elemento Constante	35
Figura 10 – Representação básica do elemento contínuo	37
Figura 11 – Função de forma linear	38
Figura 12 – Elemento descontínuo	40
Figura 13 – funções de forma do Elemento Contínuo	41
Figura 14 – Pesos do Elemento Descontínuo	41
Figura 15 – Placa quadrada com fluxo unidimensional	43
Figura 16 – Malha com elementos descontínuos	44
Figura 17 – Definição do ponto ótimo do ponto fonte	44
Figura 18 – Erro dos pontos internos para a placa com fluxo linear	45
Figura 19 – Fluxo normal para cada ponto no contorno	46
Figura 20 – Erro baseado na norma do máximo	46
Figura 21 – Gráfico log-log do erro médio	47
Figura 22 – Placa quadrada com todas as condições de Dirichlet	48
Figura 23 – Determinação da posição dos pontos fontes	48
Figura 24 – Comparação de erro entre os elementos descontínuos e contínuos	49
Figura 25 – Regressão linear para o erro do problema de Dirichlet	49
Figura 26 – Geometria do cilindro oco	50
Figura 27 – Geometria simulada	50
Figura 28 – Comparação de erro médio entre diferentes tipos de elementos	51
Figura 29 – Comparação de erro máximo entre elementos contínuos e descontínuos	51
Figura 30 – Regressão linear para o problema	52
Figura 31 – Placa de domínio quadrado com condições de contorno de Dirichlet . .	53
Figura 32 – Erro médio para o segundo problema de Dirichlet	53
Figura 33 – Erro máximo para o segundo problema de Dirichlet	54
Figura 34 – Regressão linear para o segundo problema de Dirichlet	54
Figura 35 – função pulso retangular	65

Figura 36 – Função Delta de Dirac	66
Figura 37 – (a) Descrição gráfica regra do trapézio, (b) Descrição de uma formulação com pontos colocados em posições intermediárias.	67

Lista de tabelas

Tabela 1 – Erro nas laterais	46
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MECC	Método dos Elementos de Contorno Contínuo
MECD	Método dos Elementos de Contorno Descontínuo
MDF	Método das Diferenças Finitas

Lista de símbolos

Ω	Domínio
ω	Pesos
Γ	Contorno
u	Potencial
$\mathbf{n}$	vetor normal
q^*	Solução fundamental do fluxo
u^*	Solução fundamental do potencial
k	Condutividade
∇	Operador diferencial nabla
r	distância euclidiana
$\delta(x - d)$	Função delta de Dirac

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	21
1.2	Descrição do trabalho	21
2	A EQUAÇÃO DE LAPLACE	22
2.1	Lei de Darcy	22
2.2	A equação da Difusão térmica	24
3	FORMULAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS POTENCIAIS	27
4	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE	32
5	TIPOS DE ELEMENTOS EM 2D	34
5.1	Elemento Constante	35
5.2	Elemento linear contínuo	37
5.3	Elemento descontínuos	39
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	42
6.1	Placa quadrada com difusão unidimensional	43
6.2	Placa quadrada com todas as condições de Dirichlet	47
6.3	Um quarto de cilindro	50
6.4	Placa com outras condições de contorno de Dirichlet	52
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICES	62
	APÊNDICE A – CONCEITOS MATEMÁTICOS ESSENCIAIS	63
A.1	Teorema do Divergente	63
A.2	Delta de Dirac	65
A.3	Quadratura de Gauss	67

1 Introdução

As técnicas de análise numérica na engenharia são baseadas na representação de um problema contínuo em uma série de equações discretas. Diversas técnicas podem ser utilizadas para a descrição desses modelos físicos da mecânica do contínuo, dentre as quais pode-se citar o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC) (BREBBIA; WALKER, 2016; MARTINS, 2012).

O método das diferenças finitas é um dos métodos mais utilizados. O MDF consiste na divisão do domínio em pequenas partes que transmitem informações entre si. Essas pequenas partes são chamadas de elementos. Normalmente, o método das diferenças finitas se baseia na série de Taylor truncada, ou seja, o método aproxima a solução de uma equação diferencial por meio de uma série de equações obtidas pela simplificação da série de Taylor, mais um erro advindo do truncamento dessa série (CHAPRA; CANALE, 2016).

O método dos elementos finitos é uma técnica computacional poderosa utilizada para resolver equações diferenciais e integrais que surgem em diversos campos da engenharia e das ciências aplicadas. O MEF é uma generalização dos métodos variacionais clássicos (como o método de Ritz) e dos métodos de resíduos ponderados (como os métodos de Galerkin na forma fraca, mínimos quadrados, colocação, etc.), que se baseiam na ideia de que a solução u de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de parâmetros desconhecidos c_j e funções ϕ_j adequadamente selecionadas em todo o domínio. Os parâmetros c_j são então determinados de forma que a equação diferencial seja satisfeita, muitas vezes, em um sentido integral ponderado. As funções ϕ_j , chamadas de funções de aproximação, são escolhidas para que satisfaçam as condições de contorno (REDDY; GARTLING, 2010).

A ideia central do método dos elementos finitos é considerar um domínio como um conjunto de formas geométricas simples, chamadas elementos finitos, para as quais é possível gerar sistematicamente as funções de aproximação necessárias para a solução de equações diferenciais através de métodos variacionais e de resíduos ponderados. A capacidade de representar domínios com geometrias irregulares por meio de uma coleção de elementos finitos torna esse método uma ferramenta prática e valiosa para resolver problemas de contorno, problemas de valor inicial e problemas de autovalores em diversos campos da engenharia (REDDY; GARTLING, 2010).

O MEF tem sido uma das técnicas mais populares e mais usadas em análises estruturais nas últimas décadas. Essa ferramenta já está estabelecido na indústria, principalmente em programas comerciais como Ansys e Abaqus. Assim, nos resta uma questão

central: por que utilizar o MEC se o MEF já está estabelecido na engenharia?

Algumas desvantagens do MEF podem ser citadas, como o fato de ser necessária a discretização de todo o domínio. Isso pode ser laborioso e consumir uma grande quantidade de tempo, principalmente em casos em que o domínio possua muitos cantos, furos e rasgos. Por conseguinte, para problemas com domínios infinitos, é necessário criar um domínio fictício, reduzindo a acurácia do método. Ademais, o MEF pode se tornar inviável para problemas descritos por equações diferenciais de alta ordem. Por fim, o MEF é efetivo em calcular a variável primária, mas não tem a mesma eficiência em calcular suas derivadas.

Algumas dessas questões são solucionadas com a utilização de programas especializados, porém esses programas são caros e necessitam de um conhecimento específico de diferentes áreas da engenharia ([KATSIKADELIS, 2016](#)).

Por outro lado, o MEC possui diversas vantagens, como: a discretização é feita somente nas fronteiras do corpo, reduzindo o número de elementos desconhecidos em uma ordem de magnitude. Além disso, o MEC é funcional em trabalhar com domínios infinitos, graças à utilização da solução fundamental, que é usada como função de ponderação. O método é particularmente eficaz em calcular com precisão as derivadas da função de campo. Ele lida facilmente com forças e momentos concentrados, seja dentro do domínio ou na sua fronteira. O MEC permite a avaliação da solução e de suas derivadas em qualquer ponto do domínio do problema e em qualquer instante de tempo. Isso é possível porque o método utiliza uma representação integral da solução como uma expressão matemática contínua, que pode ser diferenciada e utilizada como uma fórmula matemática. Por fim, o MEC é eficiente em resolver problemas com geometrias específicas, como trincas.

O método dos elementos de contorno se destaca dos demais métodos, especialmente em problemas de campo escalar, sobretudo nos casos térmicos que envolvem problemas como a difusão de temperatura, alguns tipos de escoamento potencial, fluxo em meios porosos e outros casos que devem ser expressos em função de um potencial, governados pela equação de Laplace. É muito útil em casos de fronteiras móveis, comuns nesta área, demandando fácil remanejamento e refinamento de malha. A precisão do MEC nestes casos tende a ser superior aos demais métodos, o que é justificado pela sua constituição matemática, pois emprega uma formulação integral na qual se emprega a solução fundamental como função auxiliar. Esta função é relacionada ao problema que se quer resolver e permite maior precisão do que as funções polinomiais usualmente empregadas nos métodos de domínio como o MEF.

Ainda, é importante a compreensão de como surgiu o MEC. Em 1828, Green publicou sua formulação para a solução de problemas associados à eletricidade e eletromagnetismo, os quais podem ser modelados pela equação de Laplace. Green formulou a equação integral para a solução dos problemas de Dirichlet e Neumann, utilizando a função de Green para resolver esses problemas. Em 1872, uma nova formulação para problemas de

elasticidade foi apresentada por Betti; esse trabalho pode ser considerado uma continuação do trabalho de Green para a equação de Navier na elasticidade. O trabalho de Betti foi continuado por Somigliana, que obteve uma solução para problemas de elasticidade, incluindo forças de corpo e diferentes condições de contorno ([KATSIKADELIS, 2016](#)).

Alguns autores atribuem a criação do MEC a Fredholm, que, no início do século XX, foi o primeiro a utilizar equações integrais singulares de contorno para encontrar as quantidades desconhecidas de contorno em problemas de teoria do potencial ([KATSIKADELIS, 2016](#)).

Em 1963, Jaswon e Symm introduziram um método numérico para resolver equações integrais de contorno de Fredholm. Essa técnica envolve a divisão da fronteira em pequenos segmentos e a suposição de uma densidade de fonte constante dentro de cada segmento. Ao aplicar o método de colocação, a equação discretizada é avaliada em pontos específicos dentro de cada segmento, e os coeficientes de influência são aproximadamente calculados usando a regra de Simpson. Coeficientes singulares resultantes da autoinfluência são tratados analiticamente para problemas do tipo Dirichlet ou somados para problemas de Neumann. Essa abordagem resulta em um sistema de equações algébricas lineares que podem ser resolvidas numericamente. Jaswon e Symm aplicaram com sucesso essas técnicas para obter soluções precisas para problemas bidimensionais simples de Neumann e Dirichlet. Além disso, propuseram uma formulação numérica mais geral para resolver problemas de valores de contorno de Cauchy utilizando a terceira identidade de Green, onde os valores de contorno e as derivadas normais atuam como densidades de fonte fictícias ([BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977](#)), ([KATSIKADELIS, 2016](#)).

Já no final da década de 1980, era possível encontrar inúmeras publicações na literatura, onde o MEC foi aplicado a uma grande variedade de problemas de engenharia. Entre eles estão problemas estáticos e dinâmicos ([BESKOS, 1987](#)), lineares ou não lineares ([GRILLI; SKOURUP; SVENDSEN, 1989](#)), de elasticidade ([GHOSH; RAJIYAH; GHOSH; MUKHERJEE, 1986](#)), placas e cascas ([HARTMANN; ZOTEMANTEL, 1986](#)), ([BESKOS, 1987](#)), problemas de elastodinâmica ([POLIZZOTTO, 1988](#)), engenharia de ondas e terremotos, geomecânica ([BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977](#)) e engenharia de fundações, viscoelasticidade, interação solo-estrutura, interação fluido-estrutura, dinâmica de fluidos, contato unilateral, mecânica da fratura, eletricidade e eletromagnetismo, condução de calor, acústica, aerodinâmica, corrosão, otimização, análise de sensibilidade, problemas inversos, problemas de identificação de sistemas, etc. Pode-se dizer que hoje o MEC amadureceu e se tornou um método poderoso para a análise de problemas de engenharia, e uma alternativa aos métodos de domínio. O método foi estabelecido pelo nome MEC, que é atribuído à abordagem usada para resolver as equações integrais de contorno (ou seja, discretização da fronteira em elementos). Software baseado no MEC foi desenvolvido para computadores de arquitetura simples ou paralela, juntamente com pacotes profissionais de alto desempenho,

como o BEASY. Em 1978, C. Brebbia organizou a primeira conferência internacional sobre o MEC, e desde então, conferências sobre o MEC têm sido organizadas anualmente pela sociedade internacional de elementos de contorno e pelo Instituto de Tecnologia de Wessex (Reino Unido), onde os principais desenvolvimentos no campo têm sido apresentados. Além disso, todas as conferências sobre mecânica computacional dedicam sessões ao MEC.

Um dos principais fatores que influenciam a qualidade do método dos elementos de contorno é o tipo de elemento utilizado. O elemento constante foi o primeiro a ser empregado; Jaswon ([JASWON, 1963](#)) e Symm ([SYMM, 1963](#)) o utilizaram em suas publicações, onde apresentaram a formulação para problemas potenciais. Em seu livro, Brebbia apresenta a solução para diversos problemas usando esse tipo de elemento ([CA, 1984](#)). Em outros trabalhos, como em ([BREBBIA; WALKER, 1981](#)) e ([KATSIKADELIS, 2016](#)), problemas potenciais são resolvidos utilizando elementos constantes. Problemas de eletroestática são solucionados por Brebbia e Dominguez em seu livro ([BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994](#)).

O elemento linear é um dos principais tipos de elementos até hoje e tem sido aplicado em diversos problemas. Em várias publicações, como ([CA, 1984](#); [BREBBIA; WALKER, 1981](#); [KATSIKADELIS, 2016](#); [BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994](#)), problemas potenciais foram solucionados utilizando o MEC com elementos lineares contínuos.

Lara et al. ([LARA; LOEFFLER; BARBOSA; MANSUR, 2018](#)) utilizaram o elemento linear para solucionar problemas de elasticidade homogênea por partes, empregando a técnica de suposição de subdomínios. Loeffler et al. ([LOEFFLER; PINHEIRO; CHACALTANA; LARA, 2024](#)) aplicaram a técnica de interpolação direta do Método de Elemento de Contorno com elemento linear para solucionar a equação de condução-convecção-reação, apresentando uma formulação eficaz para esse tipo de problema.

A técnica de superposição modal foi empregada por Santos para a solução de problemas de propagação de ondas acústicas, utilizando a interpolação direta ([SANTOS; LOEFFLER; LARA, 2024](#)). Barbosa utilizou a técnica de superposição de domínio para resolver problemas regidos pela equação de Laplace em três dimensões, também empregando elementos lineares ([BARBOSA; LARA; LOEFFLER, 2020](#)).

Balista comparou o uso do MEC com elementos lineares, tanto com a técnica de interpolação direta quanto com a dupla reciprocidade, na solução da equação de Helmholtz para integrais de domínio ([BALISTA; LOEFFLER; LARA; JOÃO, 2023](#)). No estudo de Barbosa ([BARBOSA; LOEFFLER; LARA, 2019](#)), o elemento linear foi utilizado para resolver problemas de vibração livre em três dimensões.

Contudo, elementos constantes e lineares não são capazes de aproximar perfeitamente fronteiras curvilíneas. Por esse motivo, foi proposto um tipo de elemento chamado de alta ordem ([RICCARDELLA, 1973](#); [LACHAT, 1975](#)). No contexto do MEC, são chamados

elementos de alta ordem os elementos polinomiais com ordem maior que um. Assim, são aplicados principalmente dois tipos de elementos de alta ordem: o elemento quadrático, composto por três pontos fontes e descrito por uma equação de segunda ordem, e o elemento cúbico, formado por quatro pontos fontes e descrito por uma função polinomial de terceira ordem.

Lachat e Watson utilizam este tipo de função para construir um elemento para a solução de problemas em três dimensões (LACHAT; WATSON, 1976), enquanto Wu et al. (WU; RIZZO; SHIPPY; WAGNER, 1977) utilizam os elementos quadráticos para a solução de problemas de campos magnéticos.

Atualmente, há um grande número de aplicações do MEC com elementos de alta ordem. Os elementos quadráticos são utilizados por Stikan para a solução de estruturas delgadas, obtendo uma acurácia aceitável em seus resultados (STIKAN; MOURA; LOEFFLER; LARA, 2024). Em (PTASZNY, 2015), o elemento quadrático é usado na discretização de uma estrutura tridimensional porosa.

Existem diversos tipos de elementos além dos citados, e esses elementos especiais têm inúmeras aplicações, sendo amplamente utilizados em programas comerciais. As *b-splines* permitem reproduzir de maneira exata entidades que seriam apenas aproximadas por funções polinomiais, incluindo seções cônicas circulares (CAMPOS; ALBUQUERQUE; WROBEL, 2017). Turco e Aristodemo descreveram a utilização das *b-splines* no método dos elementos de contorno (TURCO; ARISTODEMO, 1998). Simpson et al. utilizaram esse tipo de elemento para a discretização de superfícies em 3D, afirmando que as *b-splines* são uma excelente solução para garantir a continuidade necessária em problemas de eletromagnetismo (SIMPSON; LIU; VAZQUEZ; EVANS, 2018). Em (WEI; XIANG, 2021), as *b-splines* são utilizadas para a solução de problemas de elasticidade e potenciais.

Outro método de interpolação amplamente utilizado é a interpolação por funções de base radial (IFBR), que surgiu no início dos anos 1970 como uma alternativa para resolver equações diferenciais em domínios irregulares (SLAK; KOSEC, 2019; SHU; DING; YEO, 2003; TOLSTYKH; SHIROBOKOV, 2003; WRIGHT; FORNBERG, 2006). Desde então, diversos métodos, como o método dos elementos finitos (LONG; FARQUHARSON, 2017), o método das diferenças finitas (FORNBERG; DRISCOLL; WRIGHT; CHARLES, 2002) e o MEC (MAI-DUY; TRAN-CONG, 2003), têm demonstrado bons resultados ao utilizar IFBR. No trabalho de Mai-Duy e Tran-Cong (2003), o MEC com IFBR foi empregado para resolver problemas de transferência de calor, apresentando uma formulação que utilizava indiretamente IFBR para interpolar a temperatura e o gradiente normal.

Nas fases iniciais das aplicações do MEC, a maioria dos códigos utilizava elementos contínuos, como os elementos lineares e quadráticos. No entanto, na prática, muitos problemas apresentam descontinuidades de trações ou fluxos devido a cantos ou diferentes tipos de carregamentos. Essas descontinuidades podem ser tratadas usando várias técnicas.

A forma mais simples de lidar com uma descontinuidade em um canto é arredondar todas as arestas ou cantos, mas isso não é uma solução satisfatória, pois altera fundamentalmente o caráter do problema (XU; BREBBIA, 1986).

Uma solução para esse problema é a utilização de nós duplos. A abordagem de um único nó assume que as trações, assim como os deslocamentos, são iguais para dois elementos adjacentes, o que pode não ser o caso em um canto. Portanto, o método pode fornecer resultados imprecisos. Já o nó duplo independente consiste em assumir dois nós no mesmo ponto. As equações resultantes são independentes devido às diferentes condições de contorno em um e no outro lado. Caso as condições sejam de Dirichlet, os pontos fonte podem ser deslocados dos nós geométricos de uma pequena quantidade, eliminando a possibilidade de se gerar equações redundantes. O maior problema dos elementos contínuos, contudo, consiste na definição dos elementos pertencentes de uma dada sub-região a partir dos nós geométricos comuns. Outra questão consiste na ideia de usar nós de canto com relações auxiliares que pode ser útil em alguns problemas, mas deve-se ter cuidado ao trabalhar com o sistema de equações matriciais, pois as relações auxiliares podem alterar o sistema de referência em consideração, como demonstrado por Georgiou (GEORGIOU, 1981). Essa mudança no sistema de referência pode ser importante ao tentar combinar elementos de contorno com elementos finitos, unindo diferentes regiões de elementos de contorno.

Para contornar essas dificuldades foi proposto um novo tipo de elemento, que é denominado elemento descontínuo (XU; BREBBIA, 1986; TELLES; WROBEL; BREBBIA, 1984; PARREIRA, 1988). Uma das principais vantagens dos elementos descontínuos é que eles resolvem completamente o problema de representar arestas ou cantos e também podem modelar cargas descontínuas. Na prática, a vantagem mais importante dos elementos descontínuos é que, ao usá-los, as malhas podem ser modificadas com muito mais facilidade do que se fossem usados elementos contínuos (XU; BREBBIA, 1986). Assim o elemento descontínuo tem sido uma ferramenta de grande importância para o MEC. Em aplicações de elasticidade o elemento descontínuo é importante para a aplicação de cargas descontínuas (GAO; GUO; ZHANG, 2007) (UBESSI; MARCZAK, 2016). Ainda, o elemento descontínuo possui aplicações em problemas dinâmicos para auxiliar na descontinuidade da tração nos cantos em problemas de difração de ondas 3D (TADEU; ANTONIO, 2000), Li faz a análise de problemas de elastodinâmica usando o elemento descontínuo (LI et al., 2021), e Sun faz a análise de acústica automotiva utilizando os elementos isogeométricos descontínuos (SUN; TREVELYAN; HATTORI; LU, 2019). E por fim, os elementos descontínuos tem uma grande participação na mecânica da fratura, pois esse tipo de elemento facilita a modelagem da raiz da trinca (TREVELYAN, 1992), (MI; ALIABADI, 1994).

1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo a análise do método dos elementos de contorno com elementos descontínuos aplicado a problemas potenciais, com base na comparação o MEC com elementos descontínuo e do MEC com elemento contínuo com nós duplos nos cantos, onde será avaliado o erro e ordem de convergência. Quatro exemplos serão apresentados inclusive dois problemas de Dirichlet, esse tipo de problema possui todas as condições de contorno sendo variáveis primais, assim, apesar da variável primal ser contínua, o fluxo possui uma forte descontinuidade nos cantos.

1.2 Descrição do trabalho

No [Apêndice A](#) serão apresentados conceitos matemáticos essenciais para a devida compreensão do MEC, neste capítulo serão apresentados os conceitos do teorema do divergente, do Delta de Dirac e da quadratura de Gauss.

No [Capítulo 2](#), será apresentada a formulação de dois problemas físicos regidos pela a equação de Laplace, nesse capítulo deduzir-se-á a equação principal da Lei de Darcy, e posteriormente a equação diferencial para a condução de calor. No [Capítulo 3](#) é deduzido a formulação inversa da equação de Laplace, esta formulação é a utilizada na discretização do MEC.

No [Capítulo 5](#) serão revistos os principais tipos de elementos, sendo citado o elemento constante, o elemento linear e o elemento quadrático. Ainda neste capítulo, será apresentado o elemento linear descontínuo. No [Capítulo 6](#) serão apresentados quatro problemas resolvidos pelo MEC com elementos contínuos e descontínuos. E, finalmente, as considerações finais são apresentadas no [Capítulo 7](#).

2 A equação de Laplace

A equação de Laplace é capaz de descrever o comportamento de diversos problemas da engenharia, dentre eles cita-se a condução de calor, o escoamento de águas subterrâneas e o comportamento de campos elétricos e magnéticos. Neste capítulo será apresentada a formulação para os problemas de transferência de calor e de escoamento em meios porosos descrita por Darcy.

2.1 Lei de Darcy

A Lei de Darcy é uma ferramenta simultaneamente simples e poderosa, essencial para engenheiros de reservatório ao avaliarem qualitativa e simplificada os fatores que influenciam o fluxo multifásico em meios porosos. Sua aplicação conceitual possibilita inferências iniciais sobre o problema, mesmo quando estudos detalhados ainda não foram conduzidos (NASCIMENTO, 2021).

Em 1856, na cidade de Dijon, França, Darcy (1856) dedicou-se à investigação do comportamento do fluxo de água por meio de um filtro vertical contendo areia. O experimento de Darcy simula o fluxo de água sob pressão por meio de um cilindro de seção transversal A , preenchido com areia até uma altura L , conforme ilustrado na Figura 1.

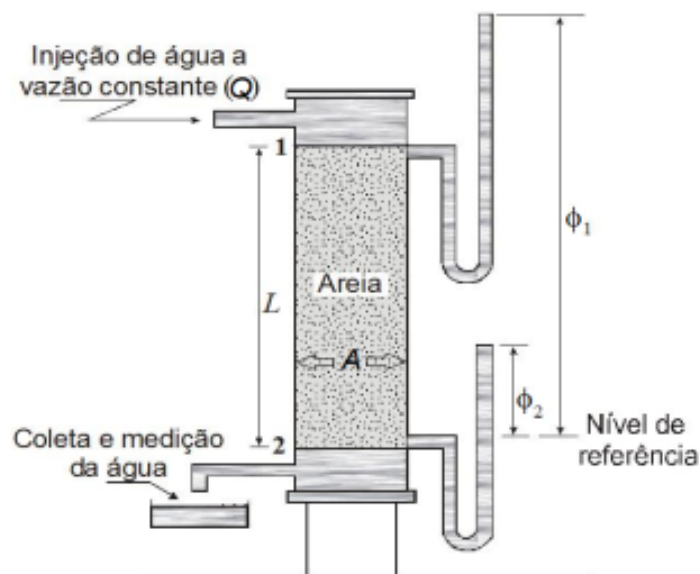


Figura 1 – Geometria do experimento de Darcy
Fonte: Tese Nascimento

O resultado desse trabalho foi a formulação da seguinte equação por Darcy (1856) para descrever o fluxo em meios porosos:

$$Q = \frac{KA(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (2.1)$$

Aqui, Q representa a vazão volumétrica do fluido, A é a área da seção transversal do dispositivo, L é o comprimento percorrido pelo fluido ou a 'altura de areia', Φ_1 e Φ_2 representam as alturas piezométricas nas seções inicial e final do fluxo, e K denota a condutividade hidráulica do meio, conforme definido por Bear (1972) (BEAR, 1972) da seguinte maneira:

$$K = \frac{\kappa \rho g}{\mu} \quad (2.2)$$

Nesta equação ρ representa a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica e g representa a aceleração da gravidade. A permeabilidade absoluta κ é uma propriedade intrínseca do meio poroso, não dependente do tipo específico de fluido que o ocupa. Por outro lado, a condutividade hidráulica K, influenciada por ρ e μ , é dependente do fluido em movimento.

Os fatores críticos da Lei de Darcy residem na permeabilidade do meio poroso, sujeita a variações significativas devido ao volume de vazios do material e à temperatura da água no momento do ensaio. Um mesmo solo pode apresentar permeabilidades distintas conforme sua condição.

Ao dividir ambos os lados da Equação 2.1 por A, obtém-se a expressão para a velocidade aparente ou a vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal, representada por q.

$$q = \frac{K(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (2.3)$$

Reescrevendo:

$$q = \frac{-K\Delta\Phi}{L} \quad (2.4)$$

Ao aplicar a propriedade do cálculo fazendo o limite do comprimento L tender a zero, tem-se:

$$q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.5)$$

Por fim:

$$q = -K\nabla\Phi \quad (2.6)$$

Dado um escoamento potencial irrotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times q &= 0 \\ \nabla \times (-K\nabla\Phi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

O princípio de conservação da massa é definido através da equação da continuidade incompressível como sendo:

$$\nabla \cdot q = 0 \quad (2.8)$$

Assim:

$$\nabla \cdot (-K\nabla\Phi) = 0 \quad (2.9)$$

Se K é uma constante:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.10)$$

Esta, por fim, é tida como a equação de Laplace.

2.2 A equação da Difusão térmica

A determinação do campo de temperatura em um meio que resulta das características de temperatura ou fluxo conhecido na fronteira é uma dos principais objetivos de uma análise da condução de calor em um corpo.

A determinação deste campo pode ser realizada de forma analítica para casos mais simples. Porém para casos mais complexos é necessário técnicas de modelagem numéricas como o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno.

Considere um meio homogêneo, sem movimento macroscópico de partículas, assim os efeitos da convecção podem ser desconsiderados, e a distribuição de temperaturas descrita em coordenadas cartesianas. Como não há movimento, não há variações na energia mecânica nem trabalho sendo realizado no sistema; apenas formas térmicas de energia são relevantes. Com gradientes de temperatura, ocorre transferência de calor por condução através das superfícies de controle, vide [Figura 2](#). As taxas de transferência de calor perpendiculares a essas superfícies nas posições x e y são representadas por q_x e

q_y , respectivamente. As taxas de transferência de calor nas superfícies opostas podem ser expressas como uma expansão em série de Taylor, desconsiderando os termos de ordem superior.

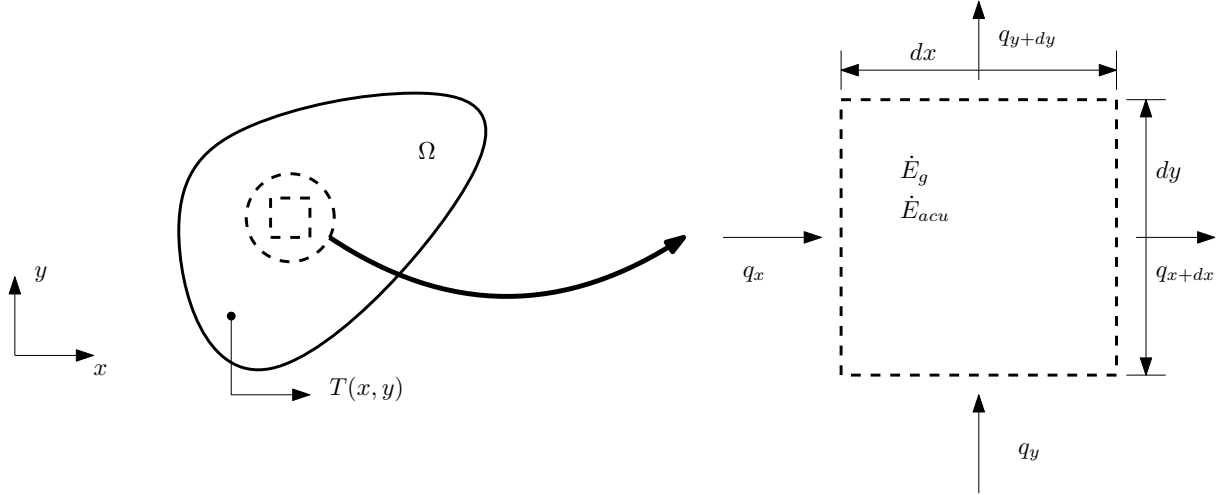


Figura 2 – Volume de controle diferencial, $dx dy$, para a análise da condução em coordenadas cartesianas.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.11)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.12)$$

Considere que exista uma fonte de energia interna dada por:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy \quad (2.13)$$

sendo $\dot{q}$ a taxa de geração de energia por metros cúbicos. Ainda é possível determinar uma taxa de acúmulo de energia, como não é considerado mudanças de fase, o acúmulo de energia é dado por:

$$\dot{E}_{acu} = \frac{\partial U_{sens}}{\partial t} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dx dy = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy \quad (2.14)$$

Sendo $\dot{E}_{acu}$ a energia acumulada, refere-se à energia total armazenada em um sistema; sendo U_{sens} a energia sensível, refere-se à energia térmica que pode ser medida por uma mudança de temperatura; sendo E_{ent} a energia entrado no volume de controle; sendo E_{sai} a energia sai, refere-se à energia que deixa um sistema, podendo ser na forma de trabalho ou calor; sendo c_p a capacidade calorífica a pressão constante, refere-se à quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de uma unidade de massa em um grau Celsius a pressão constante; sendo c_v a capacidade calorífica a volume constante, refere-se à quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de uma unidade

de massa em um grau Celsius a volume constante. Como a substância é incompressível, $c_p = c_v$.

Com base na primeira lei da termodinâmica:

$$\dot{E}_{\text{ent}} + \dot{E}_g - \dot{E}_{\text{sai}} = \dot{E}_{\text{acu}} \quad (2.15)$$

reescrevendo:

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdy - q_{x+dx} - q_{y+dy} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdy \quad (2.16)$$

utilizado a [Equação 2.11](#) e a [Equação 2.12](#)

Utilizando a Lei de Fourier, pode-se determinar as taxas de transferência de calor por condução para um material isentrópico:

$$\begin{aligned} q_x &= -k \, dy \, dz \, \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \, dx \, dz \, \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim pode-se obter a *equação do calor* em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

Considerando a condutividade térmica constante e dividindo a equação por essa propriedade, obtém-se

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

Agora, considerando que o processo está em regime permanente, o termo dependente do tempo é eliminado.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.20)$$

Desconsiderando a geração de energia interna:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

como $T = T(x, y)$, obtém-se:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.22)$$

3 Formulação do MEC para problemas potenciais

O MEC pode ser descrito totalmente em integrais de contorno para as equações auto-adjuntas, este é o caso da equação de Laplace, [Equação 3.1](#), essa equação é muito importante pois rege uma grande gama de problemas físicos como, eletroestática, eletromagnetismo, difusão térmica, e escoamento em meios porosos. Assim, é de suma importância a discretização desta equação através de métodos numéricos, para assim, possibilitar a solução de problemas reais que devido alguns fatores como complexidade geométrica, não possuem solução analítica.

$$\nabla^2 u = 0 \quad (x, y \in \Omega). \quad (3.1)$$

Nesse capítulo será desenvolvida a formulação inversa, que é a utilizada no MEC, para a equação de Laplace em duas dimensões.

Multiplicando a equação de Laplace por uma função de pesos $\omega(x, y)$ e integrando no domínio Ω , é obtida a formulação forte da equação de Laplace, então pelo método dos resíduos ponderados assumimos que essa equação é igual a zero. Veja a [Equação 3.2](#)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega &= 0, \\ \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \omega d\Omega &= 0, \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega dA + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \omega d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

O teorema de Gauss-Green, garante a transformação de uma integral no domínio em uma integral no contorno, o teorema é dado por:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) n_x d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega \quad (3.3)$$

em que Γ indica o contorno do domínio e Ω o domínio. e n_x é a componente normal ao contorno. Aplicando esse teorema a primeira parte da [Equação 3.2](#):

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \omega \right) d\Omega. \quad (3.4)$$

Utilizando a relação da derivada do produto das funções pode-se reescrever:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \omega d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \omega n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} d\Omega. \quad (3.5)$$

Fazendo o mesmo para a coordenada y :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \omega d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial y} \omega n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} d\Omega. \quad (3.6)$$

Considerando a igualdade:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} d\Omega \quad (3.7)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} n_y d\Omega. \quad (3.8)$$

e aplicar a [Equação 3.5](#) e a [Equação 3.6](#) na [Equação 3.2](#), onde obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = 0. \quad (3.9)$$

Aplicando as igualdades da [Equação 3.7](#) e [Equação 3.8](#) na [Equação 3.9](#) temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + u \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para eliminar as integrais de domínio, o peso ω deve ser corretamente definido. Por razões numéricas, a escolha mais adequada é a função cujo laplaciano é o delta de Dirac:

$$\nabla^2 \omega = -\frac{\delta(x - x_d)}{k}, \quad (3.11)$$

Implicando que $\omega = u^*$, que é a solução fundamental para o problema de potencial, que para o caso bidimensional é:

$$u^* = \frac{-1}{2\pi k} \ln r. \quad (3.12)$$

Então tem-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} u \frac{[-\delta(x - x_d)]}{k} d\Omega,$$

Em que x_d é a coordenada do ponto fonte. Tomando o ponto fonte no interior do domínio A , pela propriedade do delta de Dirac.

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} du - \frac{u(x_d, y_d)}{k} = 0. \quad (3.13)$$

Multiplicando os termos por $-k$, obtém-se:

$$\int -k \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u \left(\frac{k \partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma + u(x_d, y_d) = 0, \quad (3.14)$$

$$u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma. \quad (3.15)$$

Sendo q^* a solução fundamental para o fluxo de calor dado pela [Equação 3.16](#).

$$q^* = -k \frac{\partial u^*}{\partial n}. \quad (3.16)$$

A fim de considerar o ponto (x_d, y_d) no contorno, faz-se uma pequena modificação no mesmo. Assim, tem-se:

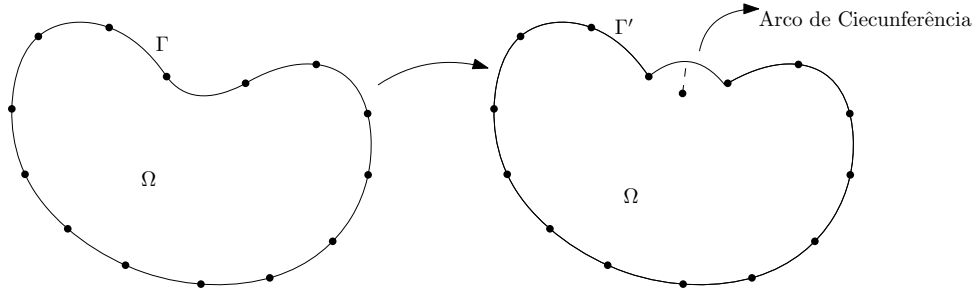


Figura 3 – Contornos original e adaptado.

assim:

$$u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma - \Gamma^*} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma - \Gamma^*} u^* q d\Gamma + \int_{\Gamma^*} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma^*} u^* q d\Gamma. \quad (3.17)$$

Conforme a equação a seguir:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y], \quad (3.18)$$

com $r = [(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]$, logo

$$\int_{\Gamma^*} u q^* d\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] d\Gamma. \quad (3.19)$$

Em Γ^* , tem-se:

$$\vec{r} = (x - x_d)\vec{i} + (y - y_d)\vec{j}, \quad (3.20)$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}, \quad (3.21)$$

$$\vec{n} = \frac{(x - x_d)\vec{i} + (y - y_d)\vec{j}}{r}, \quad (3.22)$$

sendo $\vec{n}$ um vetor unitário. Quando $r_x = (x - x_d)$ e $r_y = (y - y_d)$ tem-se:

$$\vec{n} = \frac{r_x \vec{i} + r_y \vec{j}}{r} \quad (3.23)$$

com

$$n_x = \frac{r_x}{r} \quad \text{e} \quad n_y = \frac{r_y}{r}. \quad (3.24)$$

Assim

$$\int_{\Gamma^*}^{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{u}{2\pi r^2} \left(r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right) \varepsilon d\theta. \quad (3.25)$$

As variáveis referidas são definidas na [Figura 4](#) Observando que $r = \varepsilon$ para qualquer

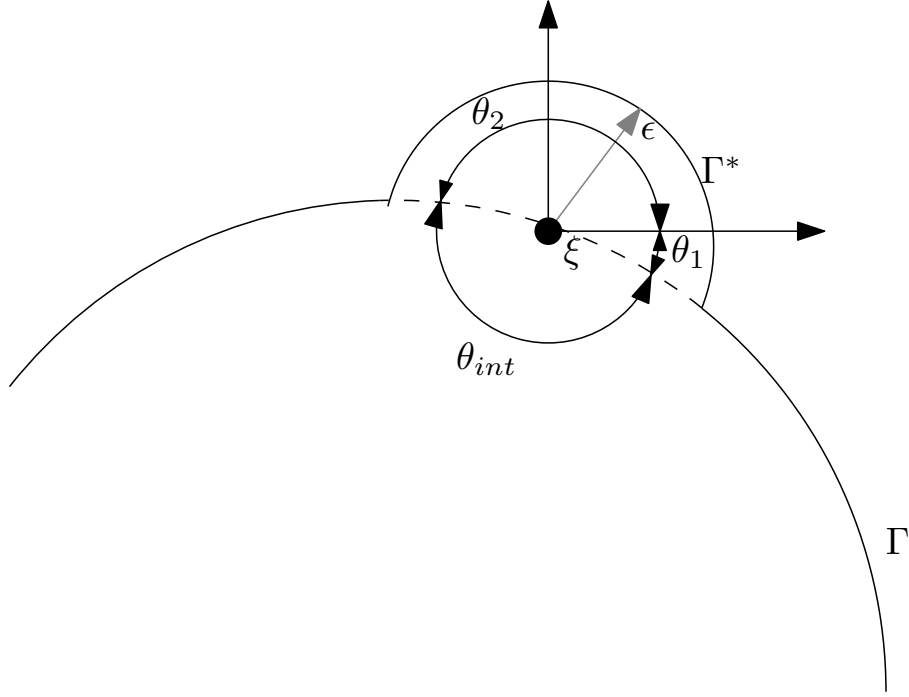


Figura 4 – Ângulo interno do contorno

θ , portanto;

$$\int_{\Gamma^*} u q^* d\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{u}{2\pi \varepsilon^2} \left(\frac{r_x^2 + r_y^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{u}{2\pi} d\theta. \quad (3.26)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, u assume o valor de $u(d)$. Por fim, tem-se

$$\int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \frac{u(d)(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}. \quad (3.27)$$

A mesma análise deve ser feita para:

$$\int_{\Gamma^*} u^* q d\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi r} \ln r q r d\theta. \quad (3.28)$$

Como $r = \varepsilon = \text{constante}$, tem-se:

$$\int_{\Gamma^*} u^* q d\Gamma = \frac{-1}{2\pi k} \varepsilon \ln \varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} q d\theta. \quad (3.29)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se:

$$\int_{\Gamma^*} u^* q d\Gamma = \frac{-1}{2\pi k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon (\theta_2 - \theta_1), \quad (3.30)$$

$$\int_{\Gamma^*} u^* q d\Gamma = 0. \quad (3.31)$$

Voltando a equação original, segue:

$$u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma + \frac{u(x_d, y_d)(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} - 0, \quad (3.32)$$

$$u(x_d, y_d) \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma, \quad (3.33)$$

$$u(x_d, y_d) \left[\frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma. \quad (3.34)$$

Assim:

$$\frac{\theta_{int}}{2\pi} u(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma, \quad (3.35)$$

que é a integral de contorno quando o ponto fonte pertence ao contorno.

Quando o ponto fonte não pertence ao contorno nem ao domínio, devido à propriedade do delta de Dirac, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = 0. \quad (3.36)$$

Generalizando, a equação integral de contorno pode ser escrita como

$$cu(x_d, y_d) = \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma, \quad (3.37)$$

onde

$$c = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi}, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao contorno} \\ 0, & \text{se } (x_d, y_d) \notin \text{ao domínio ou ao contorno} \end{cases}$$

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$c = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (3.38)$$

4 Solução fundamental para a equação de Laplace

A principal característica que difere o MEC dos demais métodos clássicos é a utilização da solução fundamental. Por exemplo, o MEF utiliza uma equação qualquer como função de ponderação, enquanto o MEC utiliza a solução fundamental, que nada mais é que a solução para um problema específico que se assemelha ao problema alvo, isso implica em um aumento de precisão do MEC.

Para a equação de Laplace, obtém-se a solução fundamental para a equação de Poisson, a solução fundamental é a solução para uma fonte concentrada em um ponto dentro de um domínio infinito.

Matematicamente, esse problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\nabla^2 u^* = -\frac{\delta(x - x_d, y - y_d)}{k} \quad (4.1)$$

sendo k a condutividade do meio, e $\delta(x - x_d, y - y_d)$ é a função delta de Dirac.

Reescrevendo a equação [Equação 4.1](#), em coordenadas polares como representado na [Figura 5](#). Sendo θ o Angulo formado entre o ponto fonte e o ponto campo.

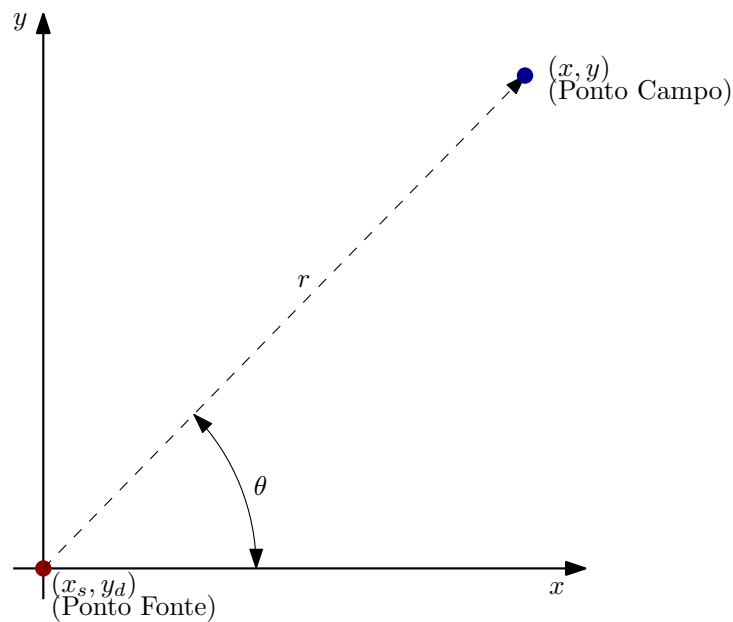


Figura 5 – Conversão de coordenadas cartesianas para polares

Logo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = -\frac{\delta(x - x_d, y - y_d)}{k} \quad (4.2)$$

r é a distância euclidiana entre o ponto fonte e o ponto campo.

Como a solução é axis-simétrica e o potencial é nulo para todo o domínio exceto no ponto fonte, têm-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) = -\frac{\delta(r)}{2\pi r k}, \quad (4.3)$$

integrando duas vezes:

$$u^* = A \ln r + B \quad (4.4)$$

Agora basta definir as constantes A e B . Como é necessário uma solução particular, define-se $B = 0$.

A pode ser definido aplicando a equação em um domínio circular com um ponto fonte como origem, e aplicando o Teorema de Green, dado por:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (4.5)$$

No círculo $\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}$, a equação se torna:

$$\int_{\Omega} \frac{\delta(x - x_d, y - y_d)}{k} d\Omega = \int_0^{2\pi} A \frac{1}{r} r d\theta. \quad (4.6)$$

integrando os dois lados, sendo que no lado esquerdo é aplicado a propriedade do Delta de Dirac

$$\frac{1}{k} = 2\pi A, \quad (4.7)$$

rearranjando para A :

$$A = \frac{1}{2\pi k}. \quad (4.8)$$

Assim a solução fundamental para a equação de Laplace é:

$$u^* = \frac{1}{2\pi k} \ln r \quad (4.9)$$

5 Tipos de elementos em 2D

Neste capítulo será discutido diferentes tipos de elementos que podem ser utilizados no MEC, primeiramente, com enfoque nos elementos clássicos, que são os constantes, lineares contínuos e quadráticos contínuos, e a posteriori, focando-se nos elementos especiais e descontínuos.

Considerando um domínio Ω com uma fronteira Γ , o método dos elementos de contorno consiste na discretização do contorno em pequenas seções que são chamadas de elementos de contorno. Normalmente são empregados elementos constantes, lineares e quadráticos. Nestes elementos tem-se dois tipos diferentes de pontos, os pontos geométricos, que são responsáveis por delimitar o elemento, e os pontos funcionais, que são os pontos que serão utilizados para atribuir as propriedades da fronteira. No caso do elemento constante o seguimento é aproximado por uma reta, e o ponto funcional, neste trabalho também referido como ponto fonte, é posicionado no centro do elemento, e é adotado como propriedade de todo o elemento a propriedade deste ponto, [Figura 6](#). O elemento que possui dois pontos fontes, um no começo e outro no final do elemento é chamado de elemento linear, e as propriedades dos elementos variam linearmente entre os dois pontos, o elemento linear é demonstrado na [Figura 7](#). Finalmente, para os elementos quadráticos, a geometria é aproximada por um arco parabólico. O elemento tem três nós, dois dos quais são colocados nas extremidades e o terceiro em algum ponto intermediário, geralmente no ponto médio, o elemento quadrático está representado na [Figura 8](#). Para os elementos lineares e quadráticos, a geometria do segmento é representada isoparametricamente, ou seja, a geometria e a quantidade de fronteira são aproximadas sobre o elemento por polinômios do mesmo grau ([KATSIKADELIS, 2016](#)).

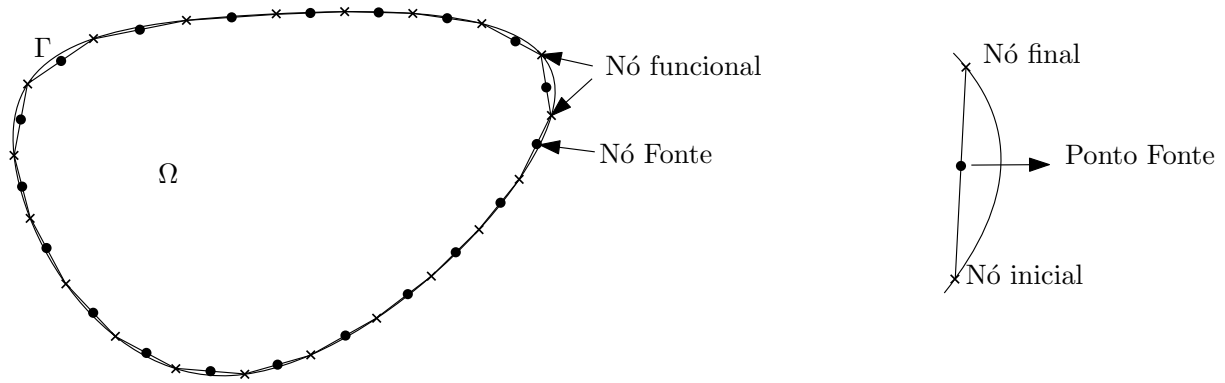


Figura 6 – Elemento constante

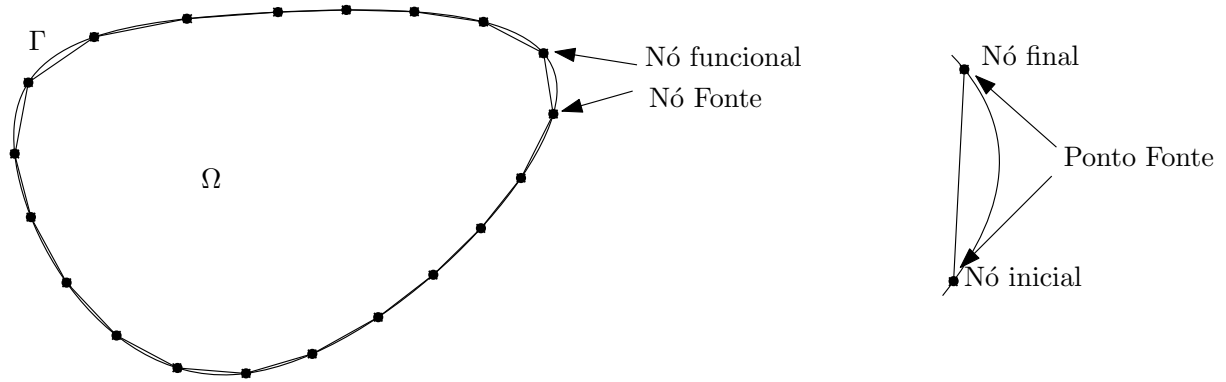


Figura 7 – Elemento Linear

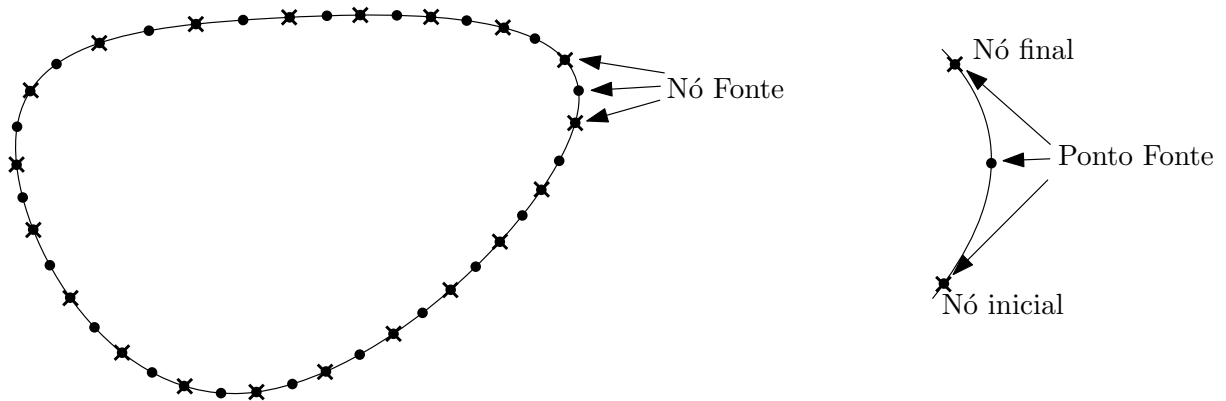


Figura 8 – Elemento Quadrático

5.1 Elemento Constante

Na discretização utilizando elementos constantes, o contorno Γ é dividido em um número de elementos finitos, e retilíneos. Neste tipo de elemento é posicionado um único ponto fonte no centro do elemento, e o valor do potencial e do fluxo é estendido para todo o elemento, ou seja, u e q é constante em todo o elemento, [Figura 9](#).

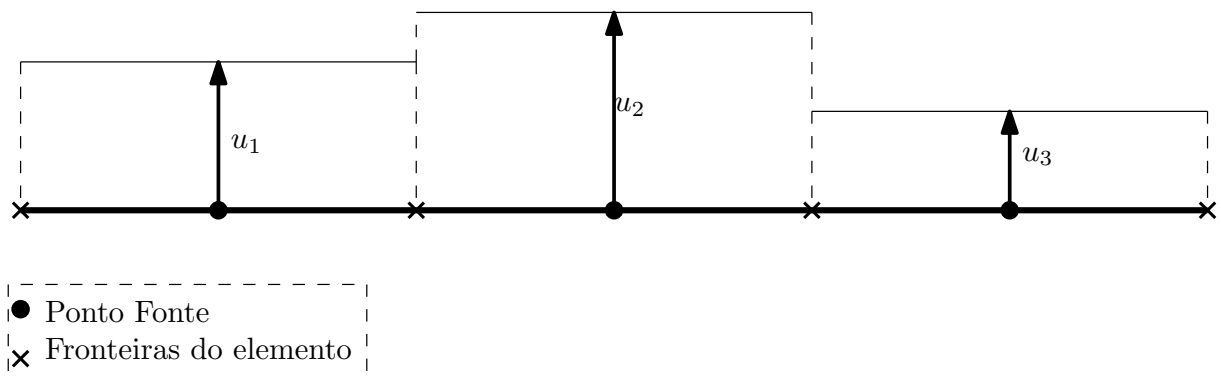


Figura 9 – Elemento Constante

Como o j -ésimo ponto sempre estará posicionado no centro do j -ésimo elemento, o valor de c , descrito na [Equação 3.37](#), sempre será $1/2$, pois se trata de uma superfície

suave. Assim tem-se a seguinte equação integral no contorno. Assim

$$\frac{1}{2}u^{(i)}(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left[u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^n \left[q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right], \quad (5.1)$$

Reorganizando:

$$-\frac{1}{2}u^{(i)}(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left[u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right] = \sum_{j=1}^n \left[q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right]. \quad (5.2)$$

Definindo

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma - \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad (5.3)$$

e

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma. \quad (5.4)$$

Reescrevendo a equação na forma matricial.

$$\sum_{j=1}^n [H_{ij}u_j] = \sum_{j=1}^n [G_{ij}q_j]. \quad (5.5)$$

As matrizes H e G são $N \times N$ sendo N o número de elementos e u e q são vetores.

Assumindo condições de contorno mistas, considerando que Γ_1 tem o potencial prescrito e Γ_2 tem o fluxo conhecido, ou seja, em Γ_1 deseja-se calcular o fluxo e de Γ_2 deseja-se o potencial. O contorno é discretizado em duas regiões constantes, sendo respeitada a relação $N_1 + N_2 = N$ e $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Separando as condições de contorno prescritas das não prescrita podemos escrever o seguinte sistema matricial.

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_1 \\ \{\bar{q}\}_2 \end{Bmatrix}. \quad (5.6)$$

Nesse sistema $\bar{u}_1$ e $\bar{q}_1$ são os valores conhecidos e u_2 e q_2 os desconhecidos. Separando as grandezas conhecidas para um lado da igualdade e as desconhecidas para o outro, é obtido um sistema que pode ser resolvido.

$$[A] \{X\} = \{B\}, \quad (5.7)$$

sendo

$$[A] = \begin{bmatrix} [H_{12}] & -[G_{11}] \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\{X\} = \left\{ \{u\}_2 \{u_n\}_1 \right\}, \quad (5.9)$$

$$\{B\} = -[H_{11}] \{\bar{u}\}_1 + [G_{12}] \{\bar{u}_n\}_2, \quad (5.10)$$

O vetor $\{X\}$ contém os valores que é o objetivo, Assim resolvendo o sistema obtém-se a solução do nosso problema.

5.2 Elemento linear contínuo

Nesta seção será tratado a utilização do elemento linear contínuo no método dos elementos de contorno. Esse elemento consiste no posicionamento dos pontos funcionais sobre os pontos geométricos, assim possui-se dois pontos fontes, sendo posicionado um no começo do elemento e outro no final do elemento. A variação dentro do elemento seguirá uma função linear que será tratada ainda nesta seção. Para esse tipo de elemento o último ponto fonte do j -ésimo elemento é compartilhado com o $j + 1$ -ésimo elemento, assim o número de pontos fonte é o mesmo que o número de elementos. A representação do elemento pode ser visualizado na [Figura 10](#)

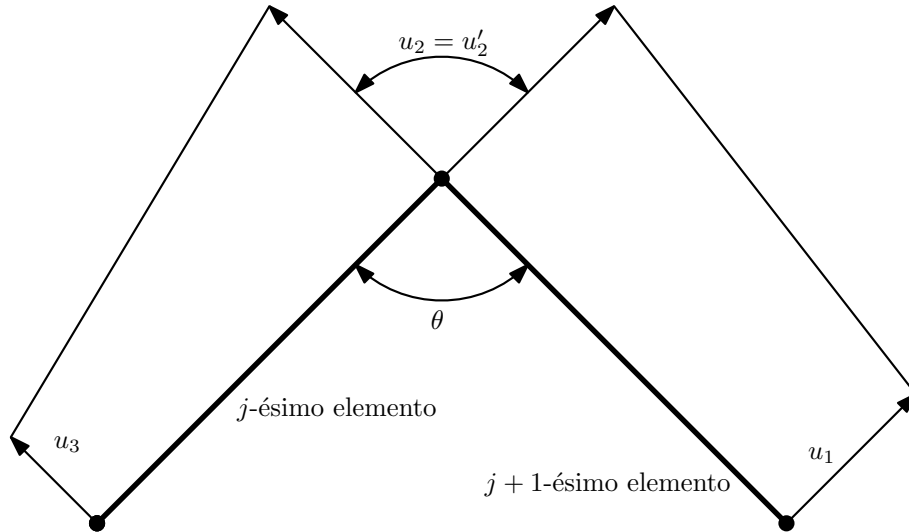


Figura 10 – Representação básica do elemento contínuo

Diferente do elemento constante, os pontos fontes no elemento linear contínuo, nem sempre serão posicionados em fronteiras suaves. Logo c_i não será sempre $1/2$, assim c_i será dado por:

$$c_i = \frac{\theta}{2\pi}, \quad (5.11)$$

em que, θ é o ângulo do canto em radianos. Assim discretizando em elementos de contorno lineares lineares, logo:

$$cu(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \right], \quad (5.12)$$

sendo,

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2$$

e

$$q = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2.$$

onde u_1 e u_2 são os potenciais do primeiro e do último ponto funcional do elemento respectivamente, e ϕ_1 e ϕ_2 são as funções de forma que regem a distribuição de temperatura do elemento.

Os valores de ϕ_1 e ϕ_2 em termos de coordenadas adimensionais, que variam de -1 a 1 as duas funções de interpolação são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (5.13)$$

O comportamento da função de forma pode ser observado na [Figura 11](#) Escrevendo de

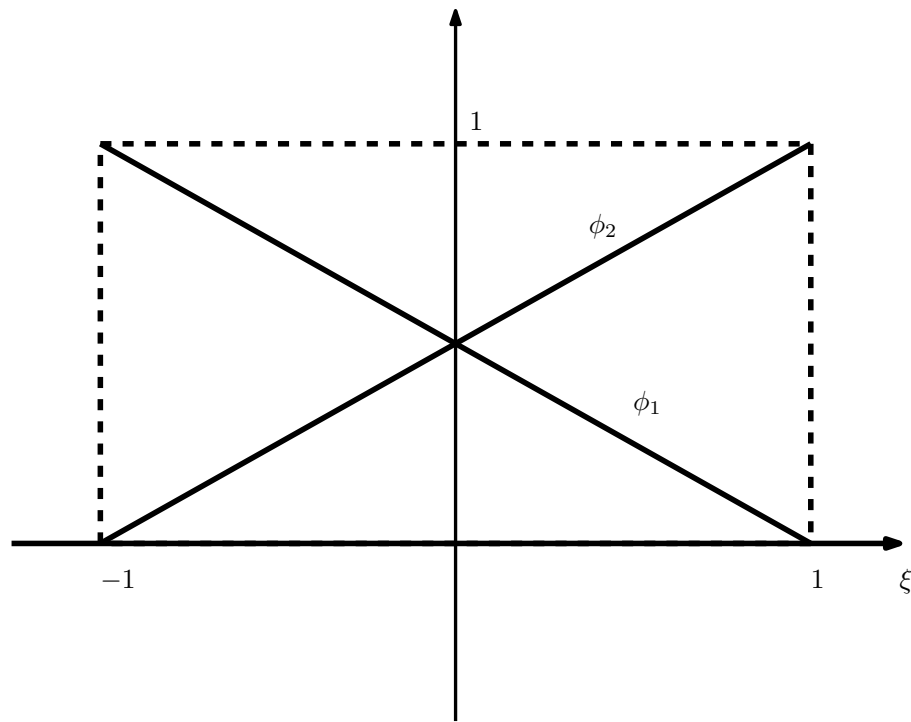


Figura 11 – Função de forma linear

forma matricial:

$$u = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

e

$$q = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo, a integral discretizada de forma matricial:

$$c(\xi)u(\xi) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j q^* d\Gamma \right\} - \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j d\Gamma \right\}.$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$cu(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right\},$$

onde

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma,$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma,$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma$$

e

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma.$$

5.3 Elemento descontínuos

Para melhorar a solução em que dois fluxos são desconhecidos no nó da quina, onde anteriormente existia apenas uma equação, o nó fonte que era compartilhado entre dois elementos pode ser dividido e inserido no interior dos dois elementos. Dessa forma, existe uma equação para cada nó fonte, conforme ilustrado na [Figura 12](#). Anteriormente, como o nó fonte era compartilhado por dois elementos, era necessário calculá-lo apenas uma vez. Contudo, agora existe uma equação para cada nó fonte, o que aumenta o total de nós fontes para o elemento linear, igualando-o ao número total de elementos mais um nó adicional para cada elemento descontínuo. Essa modificação pode ser aplicada tanto nos elementos que estão no contorno suave do domínio em estudo quanto nas quinas ([BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994](#)). No Método dos Elementos de Contorno Contínuo (MECC), para o elemento linear, o nó fonte é posicionado nas mesmas coordenadas do nó geométrico, mas no Método dos Elementos de Contorno descontínuo (MECD), o nó geométrico é mantido na sua posição e o nó fonte pode variar sua posição dentro do elemento. Assim, no elemento isoparamétrico, a integral é feita de $\xi = -1$ até $\xi = 1$, porém o nó fonte é posicionado dentro do elemento, exigindo a alteração das funções de pesos.

Os valores de u e q podem ser obtidos em qualquer ponto do elemento, parametrizados pelas seguintes equações:

$$u(\xi) = \phi_1 u^1 + \phi_2 u^2 = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

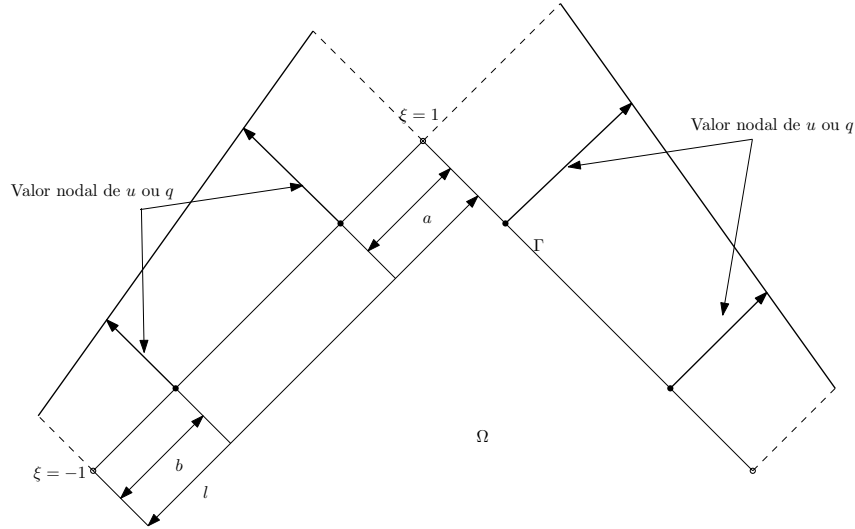


Figura 12 – Elemento descontínuo

$$q(\xi) = \phi_1 q^1 + \phi_2 q^2 = [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Uma maneira prática de modificar o elemento de contorno para um elemento descontínuo é utilizando o polinômio interpolador de Lagrange para determinar as funções de forma ϕ . Além disso, essa formulação pode ser facilmente adaptada para polinômios de ordem superior.

É sempre possível construir um polinômio $P_{n-1}(x)$ de grau $n - 1$ que passe por n pontos conhecidos e distintos.

Uma forma conhecida de obter esse polinômio é utilizando o polinômio interpolador de Lagrange, dado pela equação:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n y_i \ell_i(x) \quad (5.16)$$

sendo $\ell_i(x)$ chamado de função cardinal, que pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.17)$$

Assim, fazendo $n = 2$, a interpolação é uma função linear do tipo $P_1(x) = y_1 \ell_1(x) + y_2 \ell_2(x)$, onde:

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \ell_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.18)$$

Trazendo isso para o método dos elementos de contorno, a função de forma do

elemento isoparamétrico linear pode ser obtida por:

$$\phi_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \quad (5.19)$$

assumindo que $\xi_1 = -\xi_2$:

$$\phi_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{-\xi_2 - \xi_2} = \frac{\xi - \xi_2}{-2\xi_2}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{\xi + \xi_2}{\xi_2 + \xi_2} = \frac{\xi + \xi_2}{2\xi_2} \quad (5.20)$$

Note que na [Equação 5.20](#), se $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 1$, a função de forma se reduz à função de forma contínua. Contudo, agora seleciona-se uma posição do ponto fonte entre -1 e 1 e utilizar uma equação geral do método dos elementos de contorno sem alterar a formulação tradicional. Na [Figura 13](#) e na [Figura 14](#), observa-se como essas funções de forma são apresentadas para o MECC e o MECD, respectivamente.

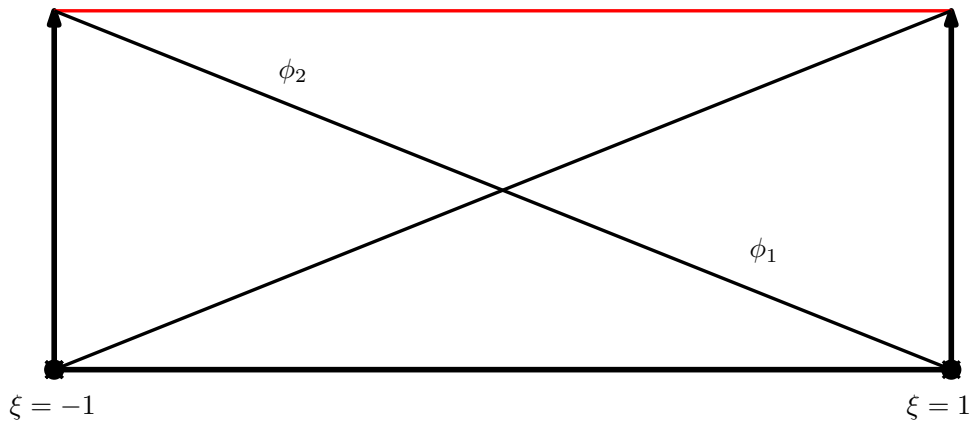


Figura 13 – funções de forma do Elemento Contínuo

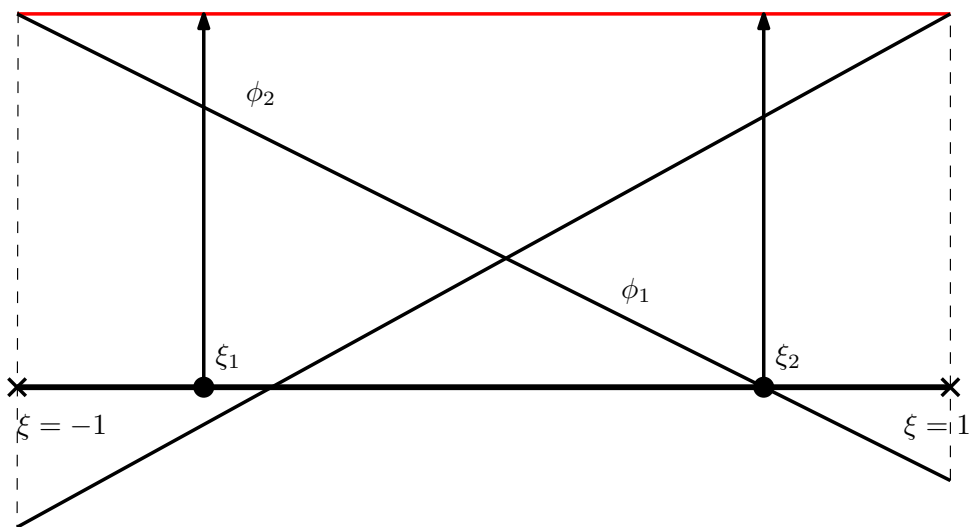


Figura 14 – Pesos do Elemento Descontínuo

6 Exemplos numéricos

Nesse capítulo serão apresentados os resultados das simulações feitas com o MEC com elementos descontínuos e com Elementos contínuos. A intenção é avaliar o comportamento das duas formulações buscando compreender e comparar com as bibliografias existentes. As conclusões serão baseadas no erro de cada formulação em relação ao resultado analítico de cada problema.

Em relação à Especificações de Hardware utilizado, é utilizado a seguinte configuração:

- Processador: **Intel Core i7-10750H**
- Número de núcleos: **6**
- Frequência do processador: **2.6 GHz**
- Memória RAM: **16 GB, DDR4**
- Armazenamento: **512 GB, SSD**

Em relação ao código utilizado:

- Ambos os códigos foram implementados em *FORTRAN 90* com precisão dupla.
- Foram utilizados 20 pontos de Gauss na integração. junto a regularização proposta por Johnston e David em seu trabalho ([JOHNSTON; ELLIOTT, 2005](#)), para evitar singularidades.
- foram simulados diversas malhas com diferentes graus de refinamento.

Neste trabalho, recorreu-se ao critério de avaliação da média do erro relativo percentual descrito na [Equação 6.1](#); este é igual à diferença entre os valores numéricos e analíticos dividida pelo módulo do maior valor analítico.

$$E = \sum_{i=1}^N |V_a - V_n|_i \frac{100}{N |M_{ant}|} \quad (6.1)$$

Na [Equação 6.1](#), os termos V_a e V_n representam os valores do potencial analítico e do potencial numérico calculado no ponto i respectivamente; M_{ant} é o maior valor analítico encontrado na varredura de cada problema; e N caracteriza o número de potenciais calculados ou graus de liberdade.

6.1 Placa quadrada com difusão unidimensional

Neste primeiro exemplo será testada a capacidade dos dois métodos, MECC e MECD, trabalharem com uma geometria com bordas retas e com condições de contorno mista. Para isso foi escolhido um problema com domínio quadrado 6×6 tendo valores de potencial prescrito nas fronteiras da esquerda e da direita, e considera-se a fronteira do topo e da base como sendo perfeitamente isolado, ou seja, o fluxo normal nessas fronteiras é nulo, veja a [Figura 15](#).

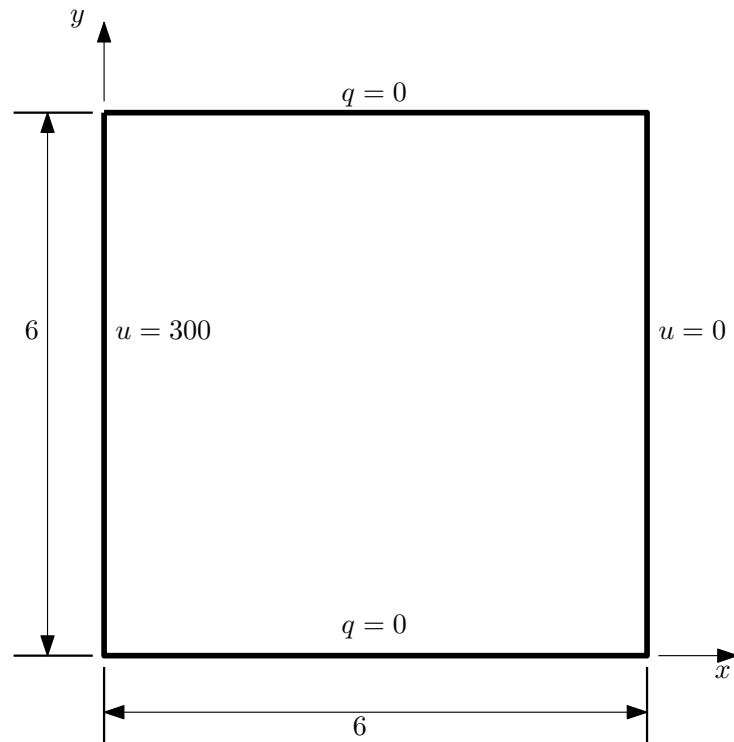


Figura 15 – Placa quadrada com fluxo unidimensional

A solução analítica para esse problema é dada por

$$u(x, y) = 300 - 50x, \quad (6.2)$$

e o fluxo na direção x é dado por

$$q(x, y) = -50. \quad (6.3)$$

A qualidade da solução do potencial será avaliada no domínio do problema, como a qualidade da solução no domínio depende diretamente da qualidade da solução do contorno, é possível fazer as considerações para esses pontos. Para esse problema serão utilizados um total de 100 pontos internos e serão testadas malhas com diferente quantidade de pontos no contorno. Resalta-se que serão utilizados elementos lineares nas simulações.

Inicialmente é definida a posição ideal do ponto fonte dentro do elemento descontínuo, para isso o problema é solucionado diversas vezes com 124 pontos no contorno, a posição do ponto fonte é variada de $0,05 < \xi < 0,95$. Um exemplo da malha utilizada neste trabalho pode ser observada na Figura 16, note que todos os elementos são descontínuos, logo o número de pontos fonte é duas vezes o número de elementos. Na Figura 17 nota-se que o menor erro é obtido para $\xi = 0,95$, assim essa posição de ponto fonte é definida para todas as malhas descontínuas deste problema, vale ressaltar que todos os elementos da malha são descontínuos.

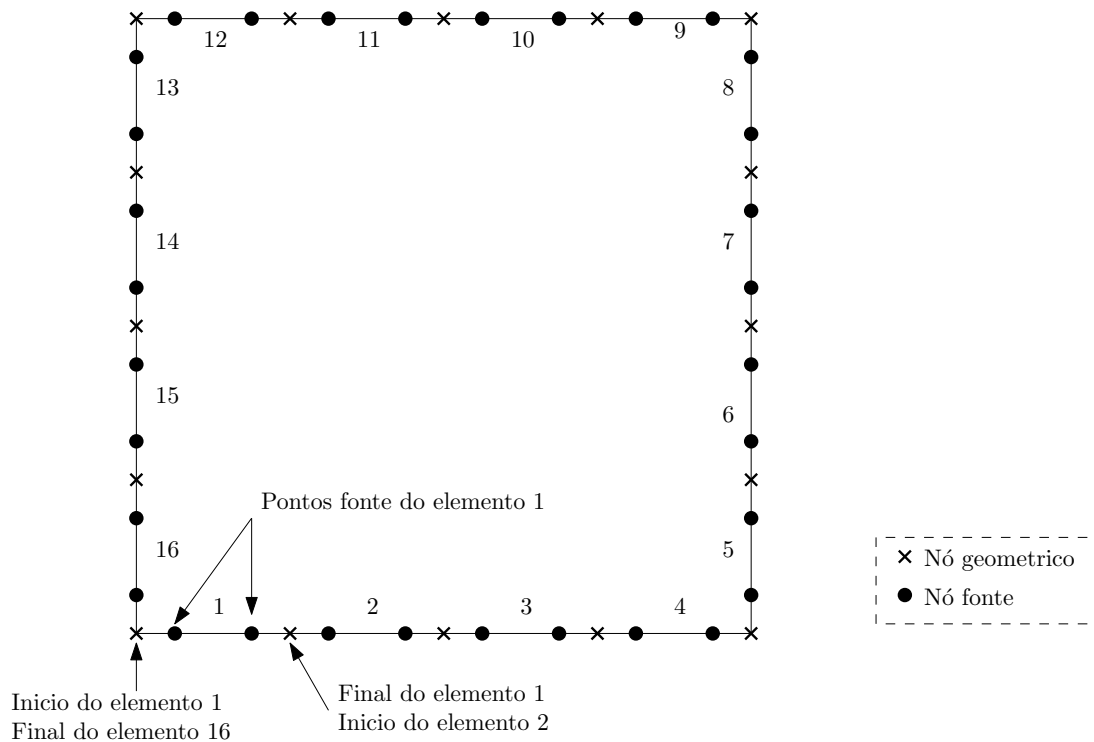


Figura 16 – Malha com elementos descontínuos

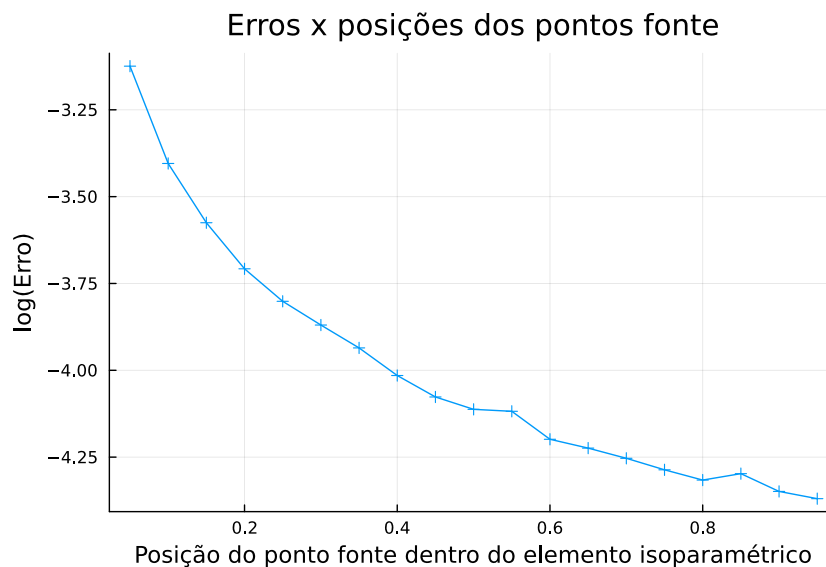


Figura 17 – Definição do ponto ótimo do ponto fonte

As malhas contínuas terão nós duplos nas quinas, sendo utilizado afastamento de 10%. Prosseguindo, faz-se a análise do erro do potencial no domínio do problema, são analisados 100 pontos internos e é adotado o erro médio desses pontos.

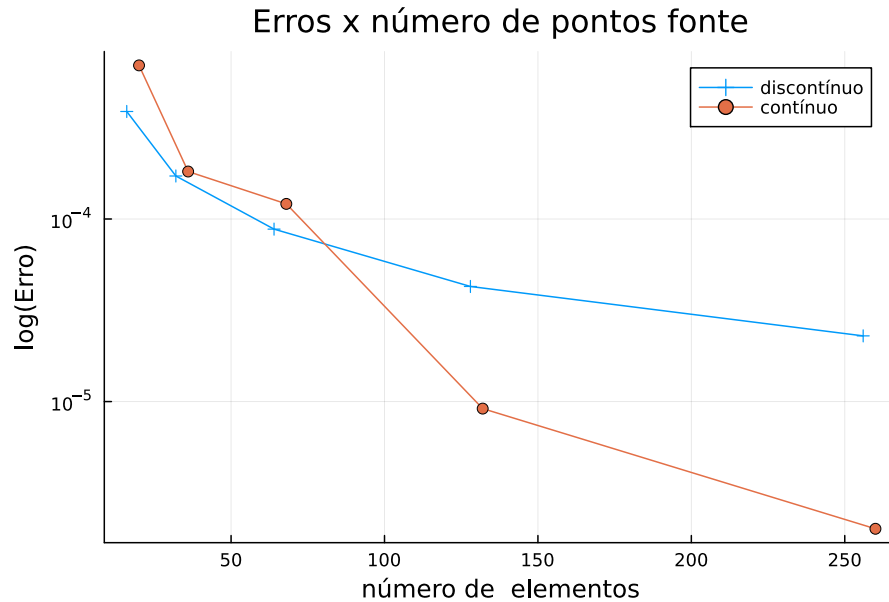


Figura 18 – Erro dos pontos internos para a placa com fluxo linear

Na Figura 18, nota-se que a formulação contínua é pior para as malhas menos refinadas, porém para malha de 128 elementos, o elemento contínuo supera o descontínuo. Isso indica que mesmo que o elemento descontínuo inicia com menor erro, o elemento contínuo possui uma ordem de convergência maior, por esse motivo este supera o elemento descontínuo.

Outra análise conveniente é a qualidade do fluxo nas fronteiras laterais, apesar do potencial se contínuo, o fluxo normal é descontínuo nas quinas. Para facilitar a visualização desta descontinuidade pode-se observar a Figura 19, esta figura apresenta o fluxo normal para cada elemento, sendo os elementos enumerados no sentido anti-horário a partir da origem como na Figura 19, vale ressaltar que existem peculiaridades em cada tipo de malha, descontínua ou contínua, logo essa figura deve ser tomada somente como modelo e não representa especificamente as malhas utilizadas. Note na Figura 19 que existe uma grande descontinuidade entre os elementos 5 e 6, 10 e 11, 15 e 16, 20 e 1, para a seção inferior e superior isso é indiferente pois é condição de contorno, mas para as laterais isso é importante pois o fluxo é a quantidade desejada.

A análise do fluxo será baseada para o MEC descontínuo com 128 pontos fonte e o MEC contínuo com 132 pontos fonte, note na Tabela 1 que dois fenômenos ocorrem, primeiramente o erro em uma das laterais é superior (na lateral direita) no elemento descontínuo, enquanto no contínuo é muito próximo, além disso, o erro do fluxo é menor no elemento descontínuo, mesmo que para o potencial o MECC seja superior.

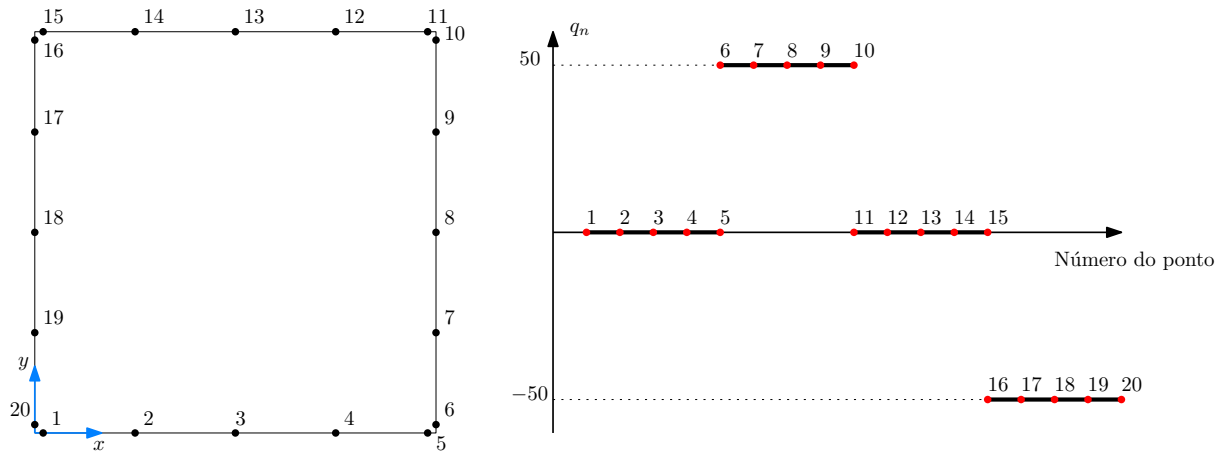


Figura 19 – Fluxo normal para cada ponto no contorno

Tipo de elemento	Número de pontos Fontes	Erro médio	
		Lateral Direita	Lateral esquerda
Descontínuo	128	1.64E-03	1.85E-02
Contínuo	132	4.40E-02	4.40E-02

Tabela 1 – Erro nas laterais

Outro aspecto importante na análise de erro é a métrica utilizada para aferir a precisão. Uma métrica comum é a conhecida norma do máximo, que define a norma como o elemento com o maior valor absoluto ([KATSIKADELIS, 2016](#)). Essa norma define que a norma de um vetor é o valor da maior componente em módulo, para esse problema os resultados podem ser visualizados na [Figura 20](#).

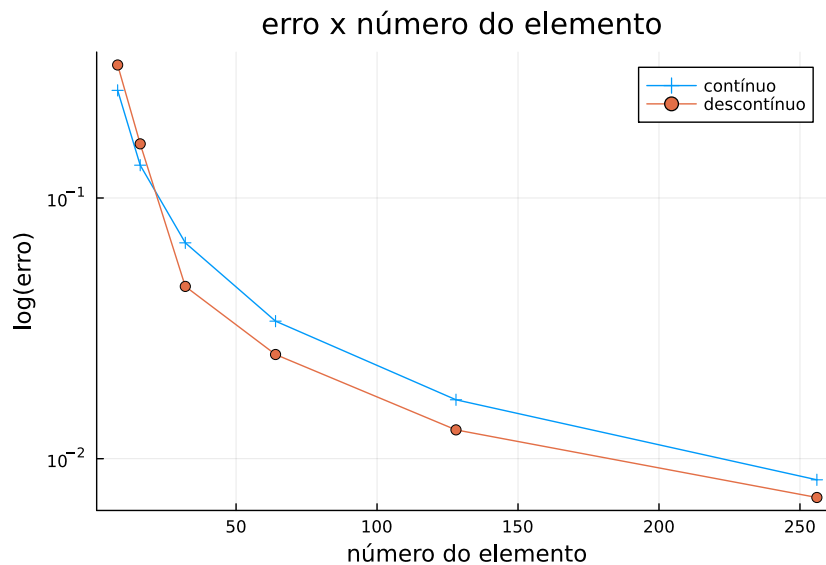


Figura 20 – Erro baseado na norma do máximo

Na [Figura 20](#) podemos perceber que para esse tipo de métrica o MECD é superior, isso acontece pelo fato do elemento contínuo possuir uma deficiência em calcular os pontos que estão próximos as quinas gerando um erro superior nesses pontos e isso fica evidenciado

nesse gráfico.

A ordem de convergência é avaliada pela inclinação do gráfico Log-log do erro pelo número de pontos, este gráfico pode ser observado na [Figura 21](#).

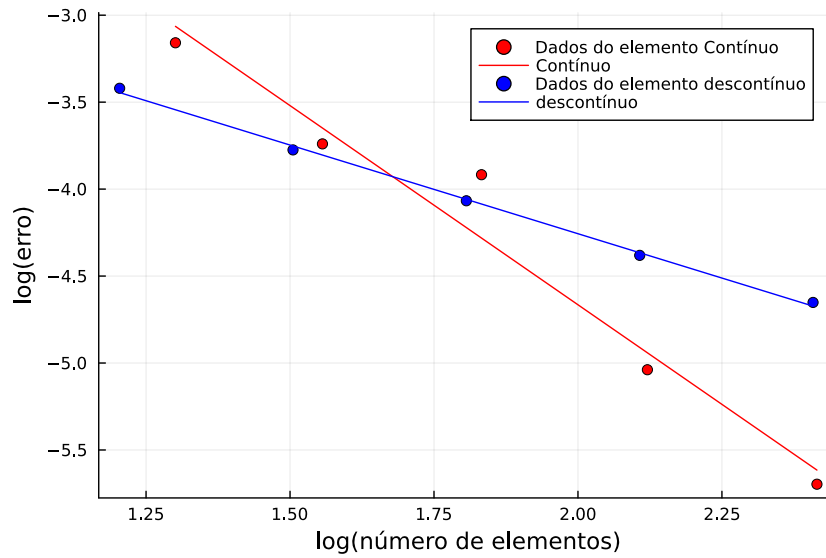


Figura 21 – Gráfico log-log do erro médio

A inclinação da reta associada ao MECC é $-2,29$, enquanto a inclinação da reta associada ao MECD é $-1,01$, indicando que a ordem de convergência do MECC é superior, fica evidente que apesar do MECD ter erro menor para malhas pouco refinadas ele é inferior para malhas mais refinadas.

6.2 Placa quadrada com todas as condições de Dirichlet

Esse exemplo é importante para a demonstração da importância do MECD. É comum ler que o MEC calcula simultaneamente o potencial e o fluxo de um problema, porém essa afirmação apesar de correta está incompleta. O potencial é uma grandeza escalar, logo esta possui seu valor pontual, porém o fluxo é uma grandeza vetorial, logo possui intensidade e direção. O MEC, calcula apenas a componente normal do fluxo, então nas quinas o fluxo que antes estava sendo calculado na direção x , passa a ser calculado na direção y , isso pode produzir uma intensa descontinuidade na solução para o fluxo, na [Figura 22](#) é mostrado um problema com todas as condições de contorno sendo condições Dirichlet.

A solução analítica para este problema pode ser obtida pela [Equação 6.4](#):

$$u = 100 \left(1 - \left[\frac{16n \cos(n\pi)}{\pi(4n^2 - 1) \sinh(n\pi)} \right] \sin(n\pi y) \sinh(n\pi x) + \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y) \right) \quad (6.4)$$

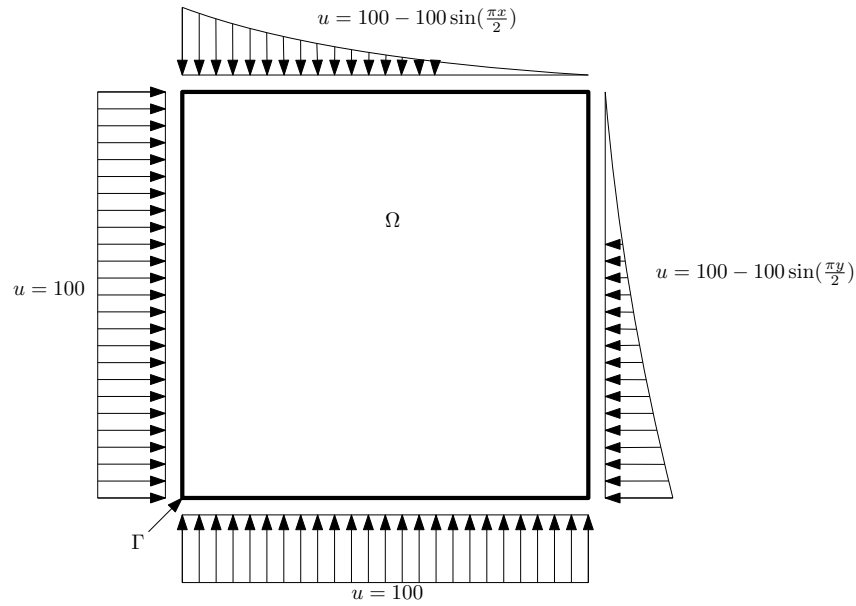


Figura 22 – Placa quadrada com todas as condições de Dirichlet

Esse exemplo é de grande importância, para a análise, pois com todas as condições de contorno sendo de Dirichlet a descontinuidade no fluxo é essencial para a qualidade da solução. O posição do ponto fonte é determinada solucionando diversas malhas, a posição do ponto fonte é variada de $\xi = 0,05$ a $\xi = 0,95$. Analisando o erro das diversas malhas estudadas, nota-se a existência de pontos ótimos, mas não há uma grande discrepância entre os pontos mais no centro do elemento. Será adotado a posição $\xi = 0,40$ para a simulação desse problema.

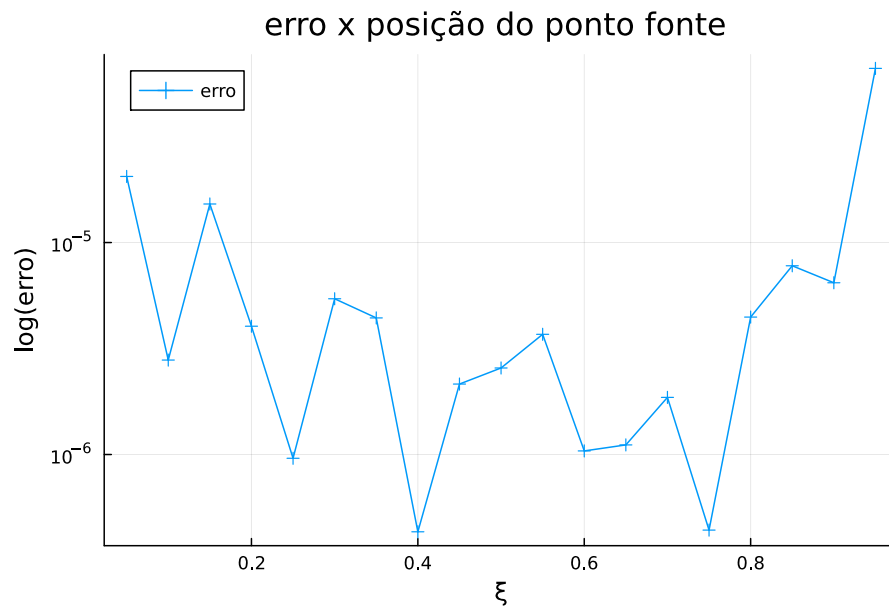


Figura 23 – Determinação da posição dos pontos fontes

A análise do erro será novamente feita com o erro médio, serão avaliados diversas malhas com níveis diferentes de discretização. O resultado da análise pode ser visualizada

na Figura 24.

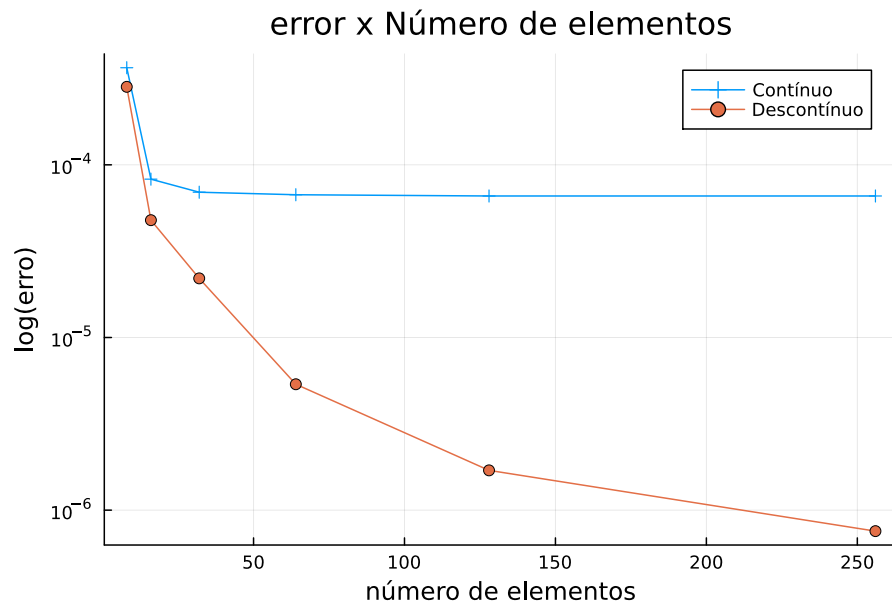


Figura 24 – Comparação de erro entre os elementos descontínuos e contínuos

Na Figura 24 pode-se notar que o MEC descontínuo é superior ao contínuo para esse problema. Para a sua melhor malha o MECD obteve um erro mínimo de 10^{-7} , enquanto o MECC rapidamente convergiu e manteve seu erro em 10^{-4} . Essa superioridade é advinda da melhor capacidade de representar as grandes discontinuidades existentes no fluxo das quinas. O MEC contínuo tem sua capacidade limitada por essa descontinuidade.

A análise da ordem de convergência implica que o problema descontínuo converge mais rápido. a inclinação da reta associada a elemento descontínuo é -1.69 , enquanto o associado ao contínuo é de -0.38 , isso pode ser visualizado na Figura 25

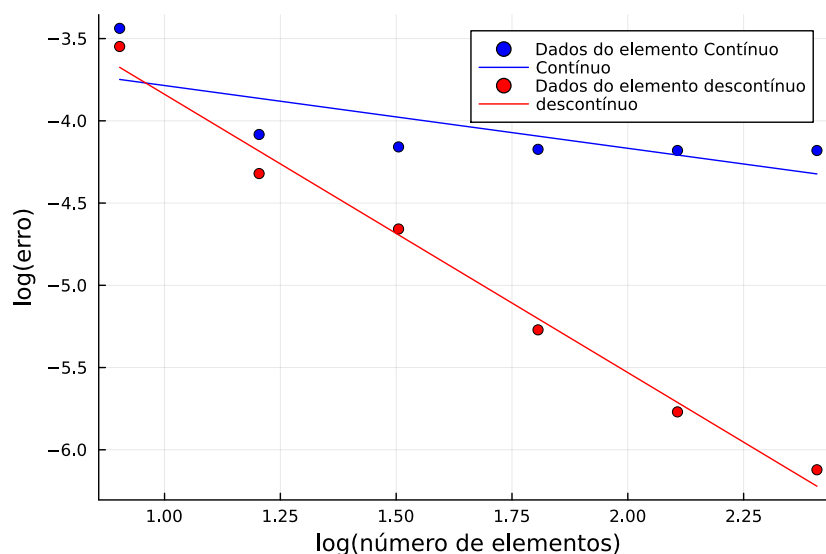


Figura 25 – Regressão linear para o erro do problema de Dirichlet

6.3 Um quarto de cilindro

Considera-se um cilindro oco, tal como um tubo, como mostrado na [Figura 26](#) considera-se que a temperatura na fronteira interna (Γ_i), e é conhecido o fluxo na fronteira externa (Γ_e).

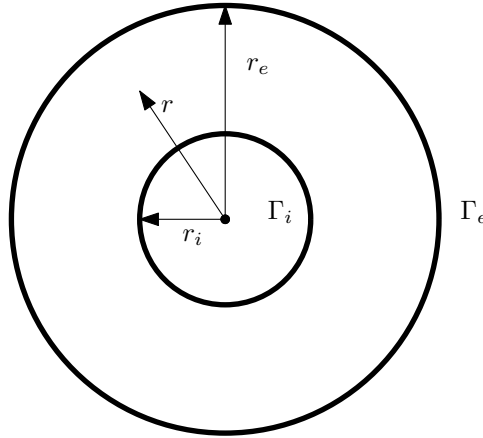


Figura 26 – Geometria do cilindro oco

Como esse problema é axis-simétrico pode-se apenas simular uma parte do problema, bastando apenas determinar corretamente as condições de contorno adequadas para as fronteiras fictícias. Na [Figura 27](#) pode-se ver a geometria simulada.

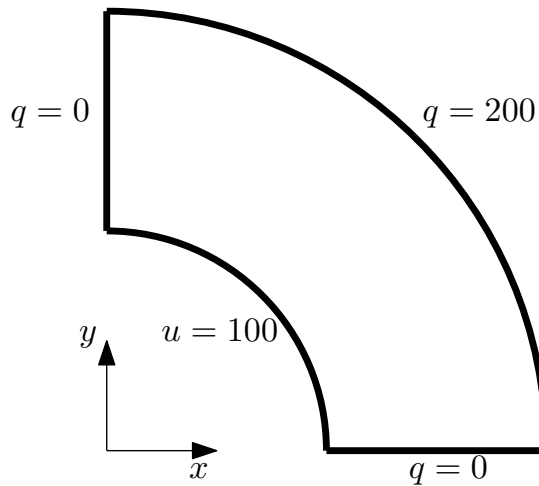


Figura 27 – Geometria simulada

Para este problema, serão adotados: $r_i = 1$, $r_e = 2$, e $k = 1$, os contornos externo e interno terão o mesmo número de pontos. A solução analítica para a temperatura é dada pela [Equação 6.5](#):

$$u(r) = u_i + q_e r_e \log\left(\frac{r}{r_i}\right) \quad (6.5)$$

e para o fluxo pela [Equação 6.6](#):

$$q(r) = q_e \frac{r_e}{r} \quad (6.6)$$

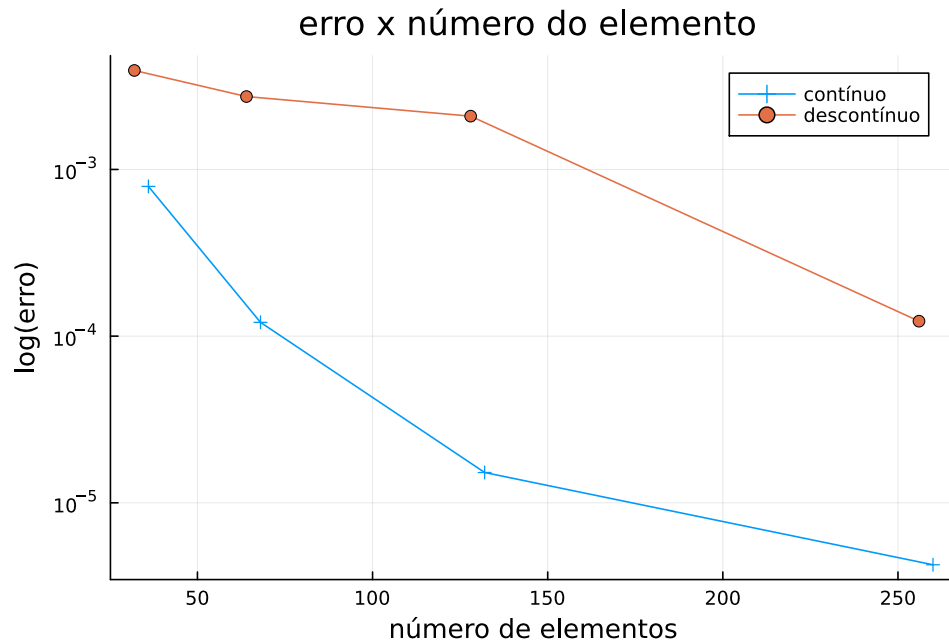


Figura 28 – Comparação de erro médio entre diferentes tipos de elementos

O processo de calibração foi feito seguindo o mesmo princípio do exemplo anterior e para esse problema foi adotado $\xi = 0,75$.

O método dos elementos de contorno descontínuo foi inferior ao método contínuo. Apesar de ambos os métodos convergirem, o MECC apresentou convergência estável e erro mínimo na ordem de 10^{-5} para a malha de 256 elementos. O MECD também convergiu para a solução, e a sua melhor disposição foi para a malha de 256 elementos, com um erro na ordem de 10^{-4} . Na Figura 29 é mostrado a análise de erro máximo, note que para

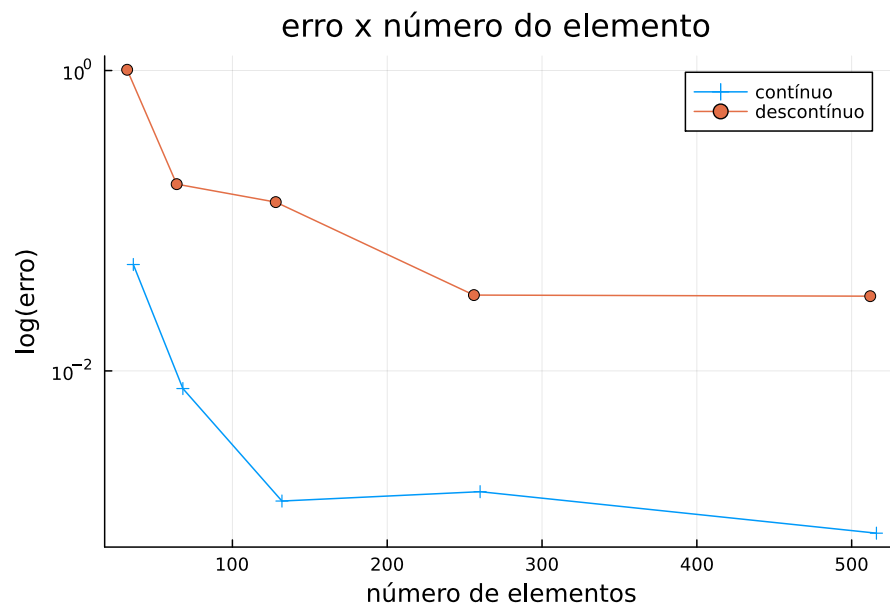


Figura 29 – Comparação de erro máximo entre elementos contínuos e descontínuos

esse exemplo a solução do MECD se demonstra inferior novamente, o MECD teve como

sua melhor marca, o erro na ordem de 10^{-2} , enquanto isso, o MECC superou o MECD em pelo menos uma ordem de grandeza para todas as malhas testadas. Esse problema tem em sua maioria condições de Newmann prescritas, o que implica que a maior parte dos valores calculados são o potencial que é contínuo, assim uma função contínua pode representar melhor a solução.

Na Figura 30 é possível observar que a ordem de convergência do elemento descontínuo, com inclinação de $-1,63$, foi inferior a ordem de convergência do contínuo, que por sua vez possui uma inclinação de $-2,56$. Assim, para o problema apresentado o método descontínuo foi inferior em todos os critérios apresentados.

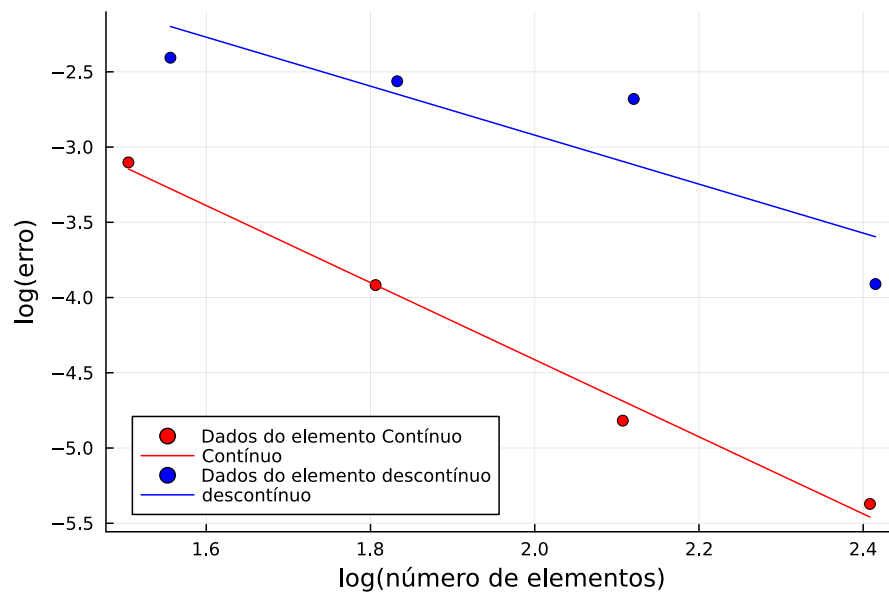


Figura 30 – Regressão linear para o problema

6.4 Placa com outras condições de contorno de Dirichlet

Este problema é importante para mostrar que o comportamento de uma formulação é diferente para cada problema estudado. Na Figura 31 é apresentado um problema com todas as condições de contorno de Dirichlet. As condições de contorno podem ser observadas na Figura 31. E sua solução analítica é apresentada nas Equação 6.7, Equação 6.8 e Equação 6.9. Nesse problema as discontinuidades são apenas no fluxo nas quinas da base, e não se mostram tão intensas quanto as do problema da seção 6.2

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\sinh(n\pi)} \left(\frac{-\pi n \sin(\pi n) - 2 \cos(\pi n) + 2}{\pi^3 n^3} \right) \sinh(n\pi(y-1)) \sin(n\pi x) \quad (6.7)$$

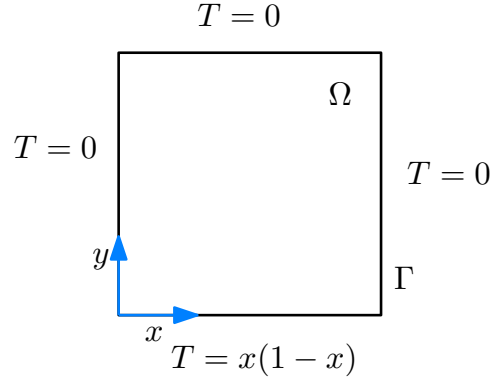


Figura 31 – Placa de domínio quadrado com condições de contorno de Dirichlet

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2n\pi}{\sinh(n\pi)} \left(\frac{-\pi n \sin(\pi n) - 2 \cos(\pi n) + 2}{\pi^3 n^3} \right) \sinh(n\pi(1 - y)) \cos(n\pi x) \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{\sinh(n\pi)} \left(\frac{-\pi n \sin(\pi n) - 2 \cos(\pi n) + 2}{\pi^3 n^3} \right) \cosh(n\pi(1 - y)) \cos(n\pi x) \quad (6.9)$$

A comparação entre os métodos é feita com as duas métricas, a do erro máximo dentre os pontos avaliados e o erro médio dentre todos os pontos internos. Para esse problema foi adotado $\xi = 0,50$.

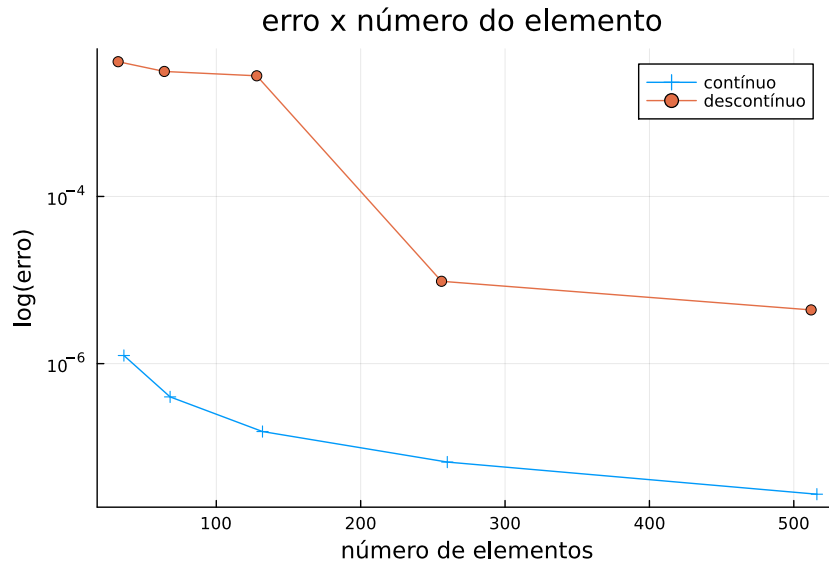


Figura 32 – Erro médio para o segundo problema de Dirichlet

Na [Figura 33](#) é possível observar o erro médio para os dois métodos, note que o elemento contínuo é superior para esse problema sendo mais estável e com um erro menor. Enquanto o MECC alcançou o patamar de 10^{-8} , por sua vez, o MECD não pode ultrapassar a marca de 10^{-6} . O mesmo comportamento ocorre com o erro máximo, em

que o elemento descontínuo propiciou um erro máximo menor, sendo o a pior malha do contínuo equivalente a melhor do descontínuo. O comportamento desse problema difere do problema de Dirichlet da [seção 6.2](#), que o método descontínuo é superior. Esse problema, apesar de ter condições de Dirichlet em todas as condições de contorno, a descontinuidade no fluxo não é tão forte quanto a que existe no exemplo da [seção 6.2](#).

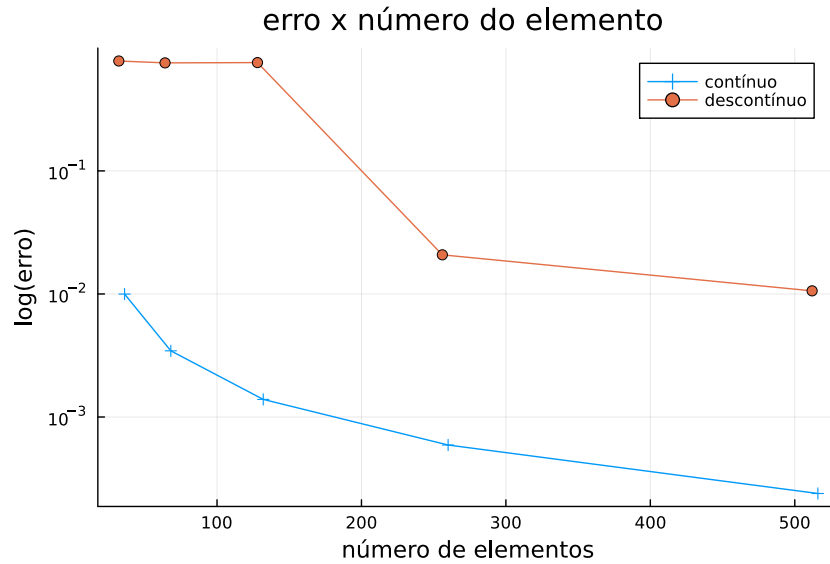


Figura 33 – Erro máximo para o segundo problema de Dirichlet

A ordem de convergência para a formulação contínua foi de -1.36 , e apesar dessa formulação ser superior a descontínua, a formulação descontínua possui ordem de convergência superior, com inclinação de -2.93 , conforme mostrado na [Figura 34](#).

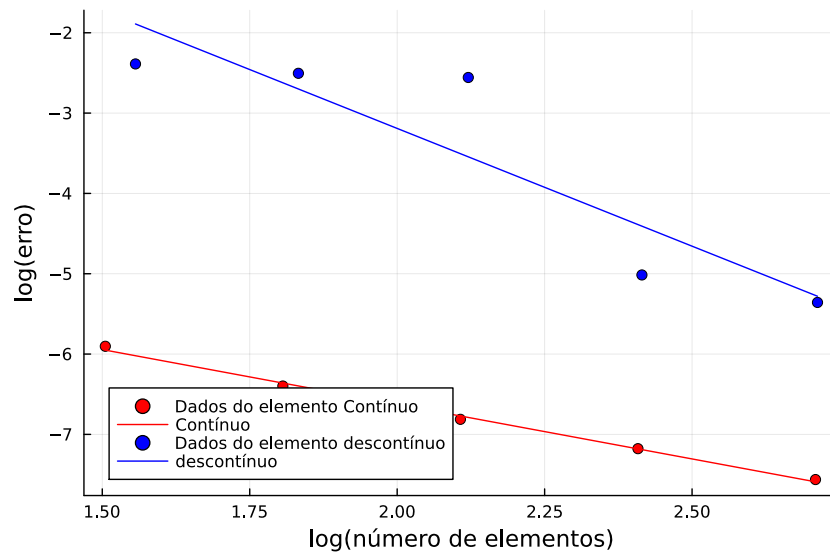


Figura 34 – Regressão linear para o segundo problema de Dirichlet

7 Considerações Finais

O método de elementos de contorno é uma das principais ferramentas para a solução de problemas da mecânica do contínuo, em que se destaca na precisão de suas soluções. Uma das suas excentricidades é a capacidade de suportar descontinuidades entre seus elementos, essa característica pode ser utilizada para a facilitação de construção de malhas, além de garantir melhores resultados para alguns problemas.

Neste trabalho foram comparadas duas formulações do MEC para problemas potenciais, uma com elementos contínuos e outra para elementos descontínuos. Diferentes problemas foram analisados. Nestes exemplos foram utilizadas diferentes condições de contorno.

No primeiro exemplo foi avaliado a solução para a difusão em uma placa quadrada, em que devido suas condições de contorno é obtida uma variação linear de temperatura ao longo da placa, nesse problema o MECD possui erros menores para as malhas pobre, porém o MECC possui ordem de convergência maior, assim para malhas mais refinadas o MECC é superior. Quando avalia-se o erro máximo obtido entre os pontos de análise, nota-se que o MECD demonstra-se superior que o MECC. Além disso, o erro para o fluxo é menor no MECD.

Para o segundo exemplo, é estudado um problema de Dirichlet, nesse problema o MECD foi superior ao MECC, devido as grandes descontinuidades de fluxo nas quinas o MECD obteve vantagem na sua formulação.

Para o terceiro exemplo, a maior parte das condições de contorno do tipo fluxo prescrito, isso implica que a variável que é majoritariamente calculada é o potencial, o potencial necessariamente deve ser contínuo. Nesse exemplo o MECC foi superior, essa superioridade se deve ao fato de que uma formulação contínua pode ter maior capacidade de calcular funções contínuas simples, que nesse caso é o potencial do tubo.

Por fim, foi simulado um segundo problema com condições de Dirichlet, porém esse problema não apresenta grandes descontinuidades no fluxo em duas de suas quinas, assim a qualidade da solução foi maior para para o MECC. Vale ressaltar que como o MEC, através da integração, relaciona cada ponto fonte com todos elementos no contorno, a solução será influenciada por todo o contorno, isso permite a utilização do elemento descontínuo.

O Método dos elementos de contorno descontínuo é uma ferramenta que é amplamente utilizada, principalmente em problemas de elasticidade, para facilitar a aplicação de carregamentos descontínuos, e em problemas de análise de trincas, sendo esse uma

ferramenta que auxilia na construção da geometria da ponta da trinca, além disso é comumente utilizado em problemas modelados com a técnica da separação de domínios, pois facilita a determinação das condições de contorno, tornando a compatibilização dos elementos nas fronteiras dos domínios desnecessária. Para problemas potenciais este se demonstrou uma ferramenta importante para problemas com grandes descontinuidades no fluxo das quina, e ainda alguns problemas que possuem erros localizados. Contudo, não é simples a previsão que se este método terá a acurácia inferior ou superior ao método contínuo, apenas é possível afirmar que ambos convergem para a solução esperada.

Para trabalhos futuros, é necessário a análise do condicionamento das matrizes, uma vez que o MECD da maneira que foi aplicado dobra o número de elementos da matriz. Ainda, outras formulações do MEC podem ser estudadas, como a equação de Helmholtz e da difusão-advecção, pois pode ocorrer divergências dos resultados obtidos para essa formulação.

Referências

- BALISTA, T. G.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L.; JOÃO, M. W. Comparisons between direct interpolation and reciprocity techniques of the boundary element method for solving two-dimensional helmholtz problems. *Engineering Computations*, Emerald Publishing Limited, v. 40, n. 9/10, p. 2841–2861, 2023. Citado na página 18.
- BARBOSA, J.; LARA, L.; LOEFFLER, C. The domain superposition technique for solving three-dimensional piecewise homogeneous laplace problems. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 199, p. 85–94, 2020. Citado na página 18.
- BARBOSA, J.; LOEFFLER, C.; LARA, L. The direct interpolation boundary element technique applied to three-dimensional scalar free vibration problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 108, p. 295–300, 2019. Citado na página 18.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. [S.l.]: Courier Corporation, 1972. Citado na página 23.
- BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis. 1987. Citado na página 17.
- BREBBIA; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 1, n. 7, p. 372–378, 1977. Citado na página 17.
- BREBBIA, C.; WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. In: *International symposium on erosion and sediment transport in*. [S.l.: s.n.], 1981. v. 25, p. 31. Citado na página 18.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary elements: an introductory course*. [S.l.]: WIT press, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 39.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. *Boundary element techniques in engineering*. [S.l.]: Elsevier, 2016. Citado na página 15.
- CA, B. Boundary element techniques. *Theory and application in engineering*., Springer, 1984. Citado na página 18.
- CAMPOS, L. S.; ALBUQUERQUE, É. L. de; WROBEL, L. C. An aca accelerated isogeometric boundary element analysis of potential problems with non-uniform boundary conditions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 80, p. 108–115, 2017. Citado na página 19.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 67.
- FORNBERG, B.; DRISCOLL, T. A.; WRIGHT, G.; CHARLES, R. Observations on the behavior of radial basis function approximations near boundaries. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 43, n. 3-5, p. 473–490, 2002. Citado na página 19.

- GAO, X.-W.; GUO, L.; ZHANG, C. Three-step multi-domain bem solver for nonhomogeneous material problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 31, n. 12, p. 965–973, 2007. ISSN 0955-7997. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799707001038>>. Citado na página 20.
- GEORGIU, P. *The coupling of the direct boundary element method with the finite element displacement technique in elastostatics*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1981. Citado na página 20.
- GHOSH, N.; RAJIYAH, H.; GHOSH, S.; MUKHERJEE, S. A new boundary element method formulation for linear elasticity. 1986. Citado na página 17.
- GRILLI, S. T.; SKOURUP, J.; SVENDSEN, I. An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 97–107, 1989. Citado na página 17.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 23, n. 11, p. 2049–2069, 1986. Citado na página 17.
- JASWON, M. Integral equation methods in potential theory. i. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 275, n. 1360, p. 23–32, 1963. Citado na página 18.
- JOHNSTON, P. R.; ELLIOTT, D. A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 62, n. 4, p. 564–578, 2005. Citado na página 42.
- KATSIKADELIS, J. T. *The boundary element method for engineers and scientists: theory and applications*. [S.l.]: Academic Press, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 18, 34 e 46.
- LACHAT, J.; WATSON, J. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 10, n. 5, p. 991–1005, 1976. Citado na página 19.
- LACHAT, J. C. A. *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. Tese (Doutorado) — University of Southampton, 1975. Citado na página 18.
- LARA, L.; LOEFFLER, C.; BARBOSA, J.; MANSUR, W. The technique of domain superposition to solve piecewise homogeneous elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 94, p. 1–9, 2018. Citado na página 18.
- LI, Y.; ZHANG, N.; GONG, Y.; MAO, W.; ZHANG, S. Three-dimensional elastodynamic analysis employing partially discontinuous boundary elements. *Algorithms*, MDPI, v. 14, n. 5, p. 129, 2021. Citado na página 20.
- LOEFFLER, C. F.; PINHEIRO, V. P.; CHACALTANA, J. T. A.; LARA, L. d. O. C. Direct interpolation boundary element method applied for solving steady-state convection-diffusion-reaction problems with variable velocity field. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 154, p. 107383, 2024. Citado na página 18.

- LONG, J.; FARQUHARSON, C. Three-dimensional controlled-source em modeling with radial basis function-generated finite differences: A meshless approach. In: ONEPETRO. *2017 SEG International Exposition and Annual Meeting*. [S.l.], 2017. Citado na página 19.
- MAI-DUY, N.; TRAN-CONG, T. Rbf interpolation of boundary values in the bem for heat transfer problems. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, MCB UP Ltd, 2003. Citado na página 19.
- MARTINS, J. B. *Numerical Methods in Geomechanics: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, University of Minho, Braga, Portugal, held at Vimeiro, August 24–September 4, 1981*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 92. Citado na página 15.
- MI, Y.; ALIABADI, M. Three-dimensional crack growth simulation using bem. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 871–878, 1994. Citado na página 20.
- NASCIMENTO, L. G. Um simulador de reservatório baseado em formulações do método de elementos de contorno isogeométricos. 2021. Citado na página 22.
- PARREIRA, P. On the accuracy of continuous and discontinuous boundary elements. *Engineering Analysis*, v. 5, n. 4, p. 205–211, 1988. ISSN 0264-682X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0264682X88900184>>. Citado na página 20.
- POLIZZOTTO, C. An energy approach to the boundary element method. part i: Elastic solids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 69, n. 2, p. 167–184, 1988. Citado na página 17.
- PTASZNY, J. Accuracy of the fast multipole boundary element method with quadratic elements in the analysis of 3d porous structures. *Computational Mechanics*, Springer, v. 56, p. 477–490, 2015. Citado na página 19.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. [S.l.]: CRC press, 2010. Citado na página 15.
- RICCARDELLA, P. C. *AN IMPLEMENTATION OF THE BOUNDARY-INTEGRAL TECHNIQUE FOR PLANAR PROBLEMS OF ELASTICITY AND ELASTO-PLASTICITY*. [S.l.]: ProQuest Dissertations Publishing, 1973. Citado na página 18.
- SANTOS, Á. d. J. d.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. d. O. C. A stability analysis of the direct interpolation boundary element method applied to acoustic wave propagation problems using the modal superposition technique. *Latin American Journal of Solids and Structures*, SciELO Brasil, v. 21, p. e520, 2024. Citado na página 18.
- SHU, C.; DING, H.; YEO, K. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible navier–stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 192, n. 7-8, p. 941–954, 2003. Citado na página 19.
- SIMPSON, R. N.; LIU, Z.; VAZQUEZ, R.; EVANS, J. A. An isogeometric boundary element method for electromagnetic scattering with compatible b-spline discretizations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 362, p. 264–289, 2018. Citado na página 19.

- SLAK, J.; KOSEC, G. Adaptive radial basis function-generated finite differences method for contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 119, n. 7, p. 661–686, 2019. Citado na página 19.
- STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006. Citado na página 63.
- STIKAN, R. P.; MOURA, L. C. de; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. d. O. C. Solving slender axisymmetric structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 162, p. 141–156, 2024. Citado na página 19.
- SUN, Y.; TREVELYAN, J.; HATTORI, G.; LU, C. Discontinuous isogeometric boundary element (igabem) formulations in 3d automotive acoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 105, p. 303–311, 2019. Citado na página 20.
- SYMM, G. Integral equation methods in potential theory. ii. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 275, n. 1360, p. 33–46, 1963. Citado na página 18.
- TADEU, A.; ANTONIO, J. Use of constant, linear and quadratic boundary elements in 3d wave diffraction analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 24, n. 2, p. 131–144, 2000. Citado na página 20.
- TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. Boundary element techniques: theory and applications in engineering. (*No Title*), 1984. Citado na página 20.
- TOLSTYKH, A.; SHIROBOKOV, D. On using radial basis functions in a “finite difference mode” with applications to elasticity problems. *Computational Mechanics*, Springer, v. 33, n. 1, p. 68–79, 2003. Citado na página 19.
- TREVELYAN, J. Use of discontinuous boundary elements for fracture mechanics analysis. *Engineering analysis with boundary elements*, Elsevier, v. 10, n. 4, p. 353–358, 1992. Citado na página 20.
- TURCO, E.; ARISTODEMO, M. A three-dimensional b-spline boundary element. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 155, n. 1-2, p. 119–128, 1998. Citado na página 19.
- UBESSI, C. J.; MARCZAK, R. J. On the solution of 3d frictional contact problems with boundary element method and discontinuous elements using a generalized newton method with line search. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, n. 7, p. 186–198, 2016. Citado na página 20.
- WEI, Q.; XIANG, J. B-spline wavelet boundary element method for three-dimensional problems. *Acta Mechanica*, Springer, v. 232, n. 8, p. 3233–3257, 2021. Citado na página 19.
- WRIGHT, G. B.; FORNBERG, B. Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 212, n. 1, p. 99–123, 2006. Citado na página 19.
- WU, Y.; RIZZO, F.; SHIPPY, D.; WAGNER, J. An advanced boundary integral equation method for two-dimensional electromagnetic field problems. *Electric Machines and Electromechanics*, Taylor & Francis, v. 1, n. 4, p. 301–313, 1977. Citado na página 19.

XU, J.; BREBBIA, C. Optimum positions for the nodes in discontinuous boundary elements. In: SPRINGER. *Boundary Elements VIII: Proceedings of the 8th International Conference, Tokyo, Japan, September 1986*. [S.l.], 1986. p. 751–767. Citado na página [20](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Conceitos Matemáticos essenciais

A.1 Teorema do Divergente

O teorema de Gauss é responsável por fornecer uma relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples e uma integral dupla que é delimitada pela curva.

O teorema de Green afirma que, se C é uma curva plana simples, fechada, contínua por partes e orientada positivamente, em que D é a área delimitada por essa curva, se essa curva possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas, sobre uma região aberta que contenha o domínio, então, (STEWART, 2006):

$$\iint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (\text{A.1})$$

Para a conversão deste teorema para a sua forma vetorial, primeiramente, busca-se alguns conceitos matemáticos preliminares.

Dado um campo vetorial $\mathbf{F}$ definido como $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ o divergente da função $\mathbf{F}$ é dado por:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

Esse divergente pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e $\mathbf{F}$, sendo $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Considerando este mesmo campo vetorial $\mathbf{F}$ o seu rotacional de um campo tridimensional é definido por:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{A.3})$$

O rotacional também pode ser definido com o auxílio do operador ∇ , considerando o operador como um vetor, defini-se o rotacional como um produto vetorial entre ∇ e $\mathbf{F}$, assim escreve-se em forma de um determinante, logo

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
&= \text{rot } \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Estes operadores apresentados serão necessários para a apresentação do teorema de Green em sua forma vetorial, que por sua vez será a base para o teorema do divergente. Considerando uma área plana D , limitada por um contorno C , e um campo vetorial $\mathbf{F}$ contido em um espaço cartesiano tridimensional. Sendo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, esse campo tem como integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy, \tag{A.5}$$

logo o seu rotacional será

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \tag{A.6}$$

então Teorema de Green é reescrito como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA \tag{A.7}$$

Se o vetor tangente unitário é dado por:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j} \tag{A.8}$$

sendo

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b \tag{A.9}$$

Assim o vetor normal unitário é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \mathbf{j} \tag{A.10}$$

logo:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t) |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\
&= \int_a^s \left[\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt \\
&= \int_c^b P(x(t), y(t))y'(t) \, dt - Q(x(t), y(t))x'(t) \, dt \\
&= \int_C P \, dy - Q \, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA
\end{aligned} \tag{A.11}$$

reescrevendo de forma conveniente temos:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) dA \tag{A.12}$$

A.2 Delta de Dirac

Na engenharia, é muito comum a utilização de fenômenos que ocorrem pontualmente. Esse é o caso de uma força em uma viga, a modelagem de um sumidouro, ou uma fonte na mecânica dos fluidos, ou uma fonte de calor pontual. Apesar destas fontes serem matematicamente úteis, elas são abstratas, mas acabam tendo uma importância muito grande na engenharia. Assim é importante a utilização de ferramentas importantes para a modelagem destes fenômenos pontuais, assim neste capítulo será introduzido o conceito da função Delta de Dirac.

Considere uma função f que representa uma carga aplicada como a [Equação A.13](#), vide [Figura 35](#).

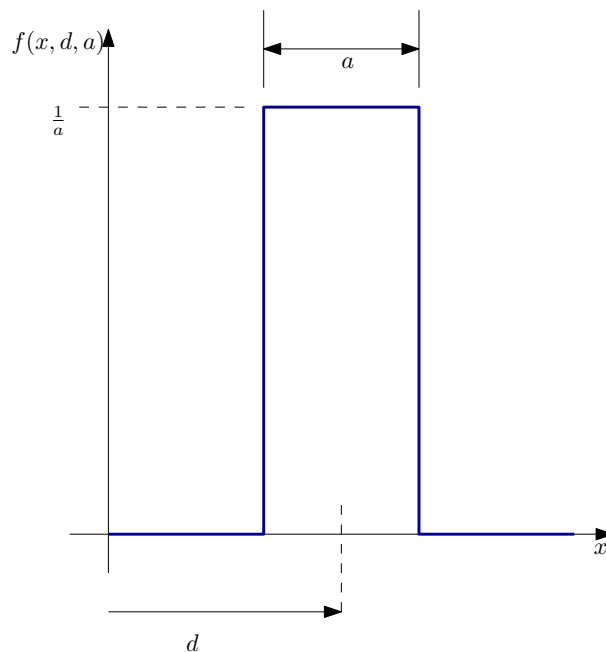


Figura 35 – função pulso retangular

$$f(x, d, a) = \begin{cases} 0 & , x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & , d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0 & , x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Se a região de aplicação de carga tender a 0, têm-se uma carga aplicada em um único ponto. Assim a função Delta de Dirac ($\delta(x - d)$) é definida como:

$$\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a) \quad (\text{A.14})$$

Assim, defini-se a função Delta de Dirac como uma função que é nula para todo o domínio, exceto para um ponto d , em que sua carga é ∞ , [Figura 36](#), assim:

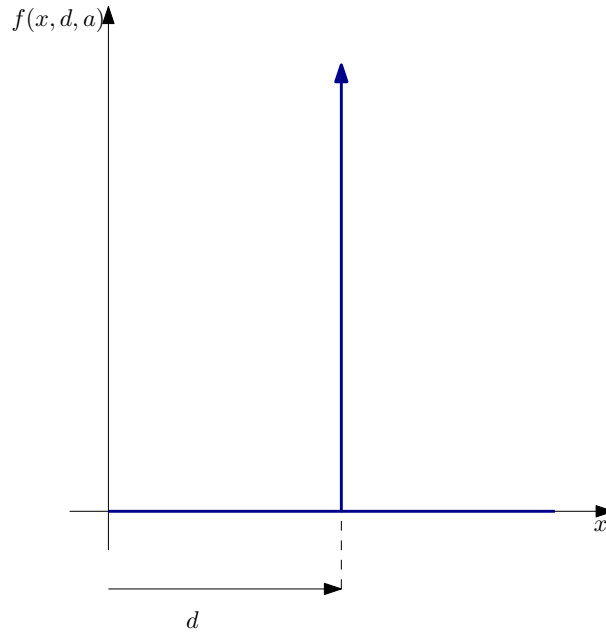


Figura 36 – Função Delta de Dirac

$$\delta(x - d) = \begin{cases} 0 & , x \neq d \\ \infty & , x = d \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Essa função tem algumas propriedades que são interessantes matematicamente, primeiramente a integral da função $\delta(x - d)$ será integrada sobre todo o domínio será igual a 1, [Equação A.17](#),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - d) dx = 1. \quad (\text{A.16})$$

A integral do produto da função delta de Dirac com uma função qualquer, $g(x)$, o valor da integral será o valor pontual da função $g(x)$, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - d) dx = g(d). \quad (\text{A.17})$$

A.3 Quadratura de Gauss

Técnicas de integração como Newton-Cotes são baseados em valores das funções igualmente espaçados, ou seja, a posição dos pontos base é predeterminada ou fixa. Isso acaba implicando em um erro associado grande.

Agora, é proposto que a restrição do posicionamento do ponto base seja eliminada, e agora o posicionamento dos pontos seja livre para ser colocado em qualquer lugar da curva. Essa consideração, permite o posicionamento da melhor forma possível, assim balanceando erros positivos e negativos, veja a [Figura 37](#) (CHAPRA; CANALE, 2016).

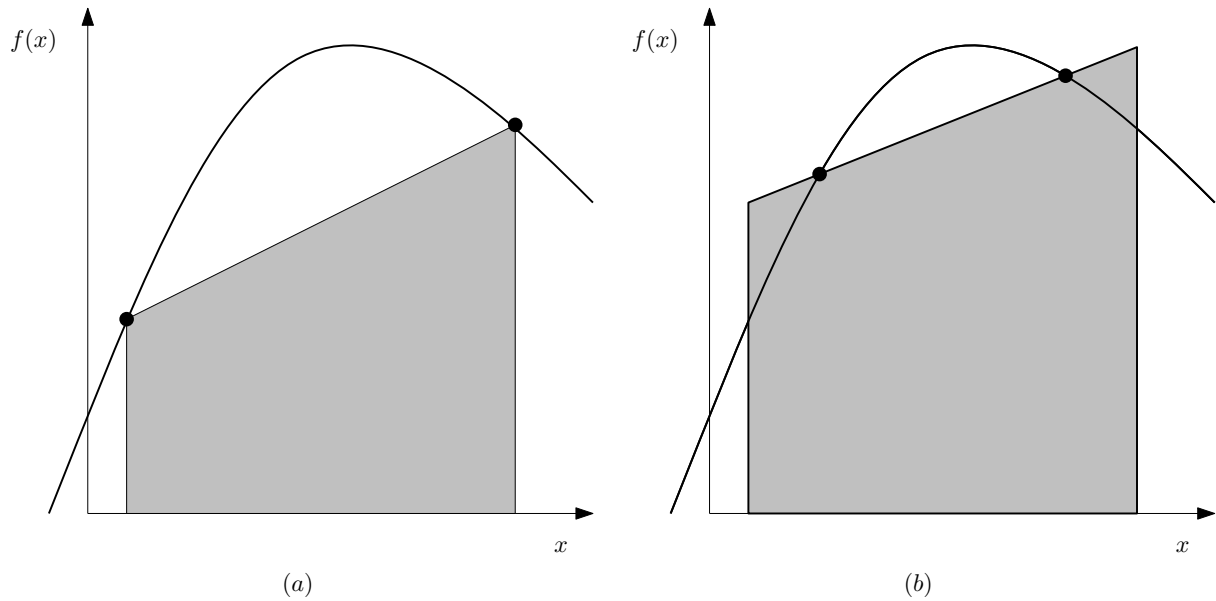


Figura 37 – (a) Descrição gráfica regra do trapézio, (b) Descrição de uma formulação com pontos colocados em posições intermediárias.

A técnica que modifica a posição dos pontos é chamada de *Quadratura de Gauss*. Neste trabalho avaliar-se-á as formulações de *Gauss-Legendre* que é a mesma que é utilizada nos códigos do Método dos elementos de Contorno deste trabalho.

De forma geral, considera-se a seguinte formulação:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n w_{j,n} f(x_{j,n}) = \int_a^b w(x) f(x) dx = I(f) \quad (\text{A.18})$$

A função de pesos $w(x)$ é assumida como uma função integrável no intervalo $[a, b]$, e sendo não negativa que satisfaz as seguintes hipóteses:

1.

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx$$

é integrável e finita para todo $n \geq 0$;

2. supondo que

$$\int_a^b |x|^n w(x) g(x) dx = 0$$

para uma função $g(x)$ contínua e não negativa, então a função $g(x) \equiv 0$ para todo o intervalo (a, b) .

A posição dos nós $x_{j,n}$, e dos pesos $w_{j,n}$, serão escolhidos de forma que $I_n(f)$ é igual a $I(f)$ para um polinômio $f(x)$ com o maior grau possível.

Na equação de *Gauss-Legendre* o intervalo de integração é fixo de $[-1, 1]$, muitas vezes o processo de regularização é necessário. A mudança do domínio espacial para o domínio computacional pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{x_1} g(x) dx &= \int_{-1}^1 g(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi \\ x(\xi = -1) &= x_1 \\ x(\xi = 1) &= x_2 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Considerando $f(\xi) = g(x(\xi) \frac{dx}{d\xi})$ a transformação das coordenadas podem ser obtidas pela seguinte relação linear:

$$\begin{aligned} x(\xi) = a\xi + b &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a + b \\ x_2 = a + b \end{cases} \\ x_1 + x_2 &= 2b \\ b &= \frac{x_2 + x_1}{2} \\ a &= \frac{x_2 - x_1}{2} \end{aligned} \tag{A.20}$$