

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS JURÍDICAS E ECONÔMICAS
MESTRADO EM ECONOMIA

MARTINHO DE FREITAS SALOMÃO

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS: UM
ESTUDO SOBRE OS MODELOS DE BLACK
SCHOLES E GARCH**

VITÓRIA
2011

MARTINHO DE FREITAS SALOMÃO

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS: UM
ESTUDO SOBRE OS MODELOS DE BLACK
SCHOLES E GARCH**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Economia, do Centro de Ciência Jurídicas e Econômicas, da Universidade Federal do Espírito Santo, para a obtenção do Grau de Mestre em Teoria Econômica.

Orientador: Prof.º Dr. Valderio Anselmo Reisen.

VITÓRIA
2011

MARTINHO DE FREITAS SALOMÃO

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS: UM
ESTUDO SOBRE OS MODELOS DE BLACK
SCHOLES E GARCH**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Economia, do Centro de Ciência Jurídicas e Econômicas, da Universidade Federal do Espírito Santo, para a obtenção do Grau de Mestre em Teoria Econômica.

Aprovada em 20 de maio de 2011

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdério Anselmo Reisen – UFES

Profa. Dra. Glaura da Conceição Franco – UFMG

Prof. Dr. Rogério Arthmar – UFES

VITÓRIA
2011

À MLL.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Sou grato à minha família, especialmente aos meus pais, minhas irmãs e minha avó, pelo amor, apoio e compreensão.

Agradeço à minha querida esposa por estar sempre do meu lado, pelo amor e incentivo constante.

Aos professores Rogério Arthmar e Glaura da Conceição Franco, por aceitarem o convite de fazer parte da banca.

Ao professor Valdério Anselmo Reisen, pela paciência, pelo rigor e pelo fato de ter concordado em me orientar mais de uma vez.

Agradeço também aos colegas e amigos mais próximos.

RESUMO

Neste trabalho são analisadas as propriedades teóricas e empíricas de três modelos de precificação de opções financeiras sobre ações: Black Scholes (1973), ad-hoc Black Scholes (Dumas, Fleming e Whaley, 1998), e o modelo GARCH assimétrico proposto por Heston e Nandi (2000), ou HN-GARCH. Os modelos são testados em opções de compra sobre ações preferenciais da Petrobras. É mostrado que o modelo Black Scholes (1973), por supor que a variância do ativo subjacente seja constante, apresentou o pior desempenho de predição comparativamente aos outros dois modelos, que consideram a volatilidade uma variável. Enquanto o modelo ad-hoc Black Scholes precificou melhor as opções muito dentro do dinheiro, dentro do dinheiro e muito fora do dinheiro, o modelo HN-GARCH obteve desempenho superior em opções no dinheiro e fora do dinheiro.

Palavras-chave: Black Scholes, Opções, GARCH, Precificação, Volatilidade.

ABSTRACT

This study analyzes the theoretical and empirical properties of three models for pricing options on financial stocks: Black Scholes (1973), ad-hoc Black Scholes (Dumas, Fleming and Whaley, 1998), and the asymmetric GARCH model proposed by Heston and Nandi (2000), or HN-GARCH. The models are tested in call's options on shares of Petrobras. It is shown that the Black Scholes model (1973), by assuming that the variance of the underlying asset is constant, showed the worst performance prediction compared to the other two models that consider volatility a variable. While the model ad-hoc Black Scholes priced much better options deep in the money, in the money and deep out of the money, the HN-GARCH model had superior performance for at the money and out of the money options.

Keywords: Black Scholes, Options, GARCH, Pricing, Volatility.

Lista de Figuras

1.1	Índice VIX da CBOE	14
2.1	<i>Payoff</i> teórico de uma <i>call</i>	21
2.2	<i>Payoff</i> teórico de uma <i>put</i>	21
2.3	Operação <i>butterfly</i>	25
2.4	Delta de uma Call	28
2.5	Delta de uma Put	28
2.6	Gama de uma Opção	29
2.7	Vega de uma Opção	31
2.8	Theta de uma Call ($r = 35\%$ a.a.)	32
2.9	Theta de uma Put ($r = 35\%$ a.a.)	32
2.10	Rho de uma Call	33
3.1	Simulação de um Processo Wiener Generalizado	39
4.1	Formatos das Curvas de Impacto de Notícias	58
5.1	<i>Payoffs</i> observados	70
5.2	Preços de mercado das opções de compra	70
5.3	Preços de Petr4	71
5.4	Correlação preços de Petr4 x preços das opções	72
5.5	Premios por Black Scholes vs Preços de mercado	73
5.6	Deltas do modelo Black Scholes	74
5.7	Gamas do modelo Black Scholes	75
5.8	Preços das opções da Tabela 5.3	77
5.9	Smile de volatilidade do vetor σ_n	77
5.10	FAC e FACP dos resíduos padronizados	80
5.11	Volatilidades do modelo ad-hoc Black Scholes	80
5.12	Premios por ad-hoc Black Scholes vs Preços de mercado	81
5.13	Deltas do modelo ad-hoc Black Scholes	82

5.14	Gamas do modelo ad-hoc Black Scholes	82
5.15	Preços e log-retornos reais das ações preferenciais da Petrobras	84
5.16	FAC e FACP de X_t	85
5.17	FAC e FACP de X_t^2	86
5.18	FAC e FACP dos resíduos e dos resíduos quadráticos	88
5.19	Histograma e gráfico quantil a quantil dos resíduos	89
5.20	Volatilidade condicional anualizada do modelo	91
5.21	Prêmios por HN-GARCH vs Preços de mercado	92
5.22	Deltas do modelo HN-GARCH	92
5.23	Gamas do modelo HN-GARCH	93

Lista de Tabelas

2.1	Notações básicas	19
2.2	Medidas de Sensibilidade	26
2.3	Moneyness segundo os deltas	27
4.1	Parâmetros da CIN para os modelos da família GARCH	57
5.1	Conjunto de opções	69
5.2	Prêmios e letras gregas médios do modelo Black Scholes	75
5.3	Opções e períodos de apuração da variável endógena σ_n	76
5.4	Escolha do melhor modelo de volatilidade	78
5.5	Estimativas do modelo de volatilidade	78
5.6	Reestimativas do modelo de volatilidade	79
5.7	Prêmios e letras gregas médios do modelo ad-hoc Black Scholes	83
5.8	Propriedades da série de log-retornos reais	85
5.9	Resultados dos testes aplicados em X_t e X_t^2	87
5.10	Estimativas do modelo HN-GARCH	87
5.11	Testes aplicados aos resíduos e resíduos quadráticos	89
5.12	Testes de normalidade aplicados aos resíduos	90
5.13	Persistência e volatilidade anualizada de longo prazo	91
5.14	Prêmios e letras gregas médios do modelo HN-GARCH	93
5.15	Opções muito dentro do dinheiro (dOTM) - 67 obs.	96
5.16	Opções dentro do dinheiro (ITM) - 81 obs.	96
5.17	Opções no dinheiro (ATM) - 55 obs.	97
5.18	Opções fora do dinheiro (OTM) - 64 obs.	97
5.19	Opções muito fora do dinheiro (dOTM) - 59 obs.	98
5.20	Todas as opções - 326 obs.	98
5.21	Comparativo das médias de preços e prêmios	99

Sumário

1	Introdução	13
2	A teoria de opções	17
2.1	Opções	18
2.1.1	Fundamentos	18
2.1.2	Relações de Não Arbitragem	22
2.2	Medidas de Sensibilidade	26
2.2.1	Delta	26
2.2.2	Gama	28
2.2.3	Vega	30
2.2.4	Theta	30
2.2.5	Rhô	33
3	Modelos baseados em Black Scholes	34
3.1	Modelo Black Scholes	35
3.1.1	Hipóteses adotadas	35
3.1.2	Processos estocásticos	35
3.1.3	Taxa de desconto	41
3.1.4	Fórmulas de precificação	42
3.1.5	Considerações sobre as demais hipóteses	43
3.1.6	Cálculo da volatilidade implícita	43
3.1.7	Medidas de sensibilidade	44
3.2	Modelo ad-hoc Black Scholes	45
4	Modelo HN-GARCH	48
4.1	ARCH e GARCH	49
4.1.1	Propriedades dos Ativos Financeiros	49
4.1.2	Heterocedasticidade Condicional	51
4.2	O Modelo HN-GARCH	58
4.2.1	Modelagem do Ativo Subjacente	59

4.2.2	Fórmulas de Precificação	64
5	Aplicação	68
5.1	Dados	69
5.2	Black Scholes	73
5.3	ad hoc Black Scholes	76
5.4	HN-GARCH	84
5.4.1	Ajuste do modelo HN-GARCH	84
5.4.2	Cálculo dos prêmios da opções	92
5.5	Análise comparativa	95
6	Considerações Finais	100

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho consiste em analisar três modelos de precificação de opções *vanilla* europeias baseadas em ações: o modelo clássico de Black Scholes (1973); a versão modificada, ou ad-hoc, desse mesmo modelo (Dumas, Fleming e Whaley, 1998); o modelo heterocedástico condicional proposto por Heston e Nandi (2000).

Nos três modelos de precificação mencionados é necessário introduzir as informações sobre o preço do ativo (da ação) subjacente à opção, a taxa de juros livre de risco da economia, o prazo da opção até a maturidade, o preço de exercício da opção e a volatilidade do ativo. O grande diferencial dos três modelos reside no tratamento dado à questão da volatilidade. O que é a volatilidade? Na teoria de finanças corporativas a volatilidade de um ativo representa uma medida de risco e é geralmente igualada a seu desvio-padrão em um dado intervalo de tempo (Assaf Neto, 2009).

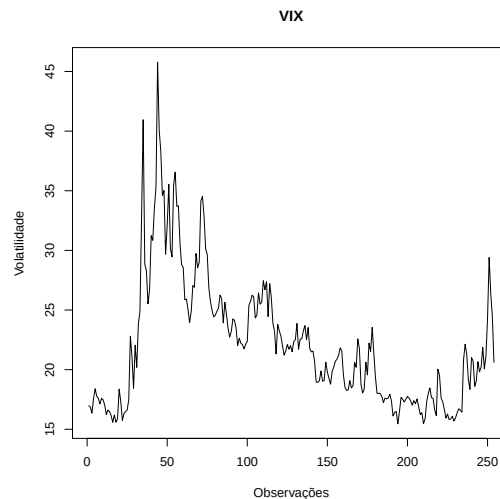
No modelo de Black Scholes a volatilidade do ativo é suposta como constante. Essa hipótese não condiz com a realidade dos mercados financeiros (Engle, 1982). Como as opções são instrumentos derivativos, seus prêmios e suas volatilidades são funções dos ativos aos quais se baseiam. Logo, tampouco a volatilidade de uma opção (conhecida como volatilidade implícita) poderia ser considerada uma constante.

Segue abaixo o gráfico do Índice VIX, da *Chicago Board Options Exchange* (CBOE)¹, que mede a volatilidade das opções representadas pelo índice S&P 500. Os dados são diários e abrangem o período de 19/03/2010 a 21/03/2011;

¹Fonte de dados: <http://www.cboe.com>

a volatilidade está anualizada em percentuais. Percebe-se claramente que há uma grande variação no gráfico que, sob a hipótese de volatilidade constante, deveria ser uma linha horizontal reta.

Figura 1.1: Índice VIX da CBOE



Entre os vários modelos propostos na literatura para tratar a questão da volatilidade, o modelo ad-hoc Black Scholes apresenta uma alternativa: em um dado conjunto de opções a serem precificadas, o parâmetro de volatilidade é uma previsão de um modelo ajustado com base em inúmeras volatilidades implícitas de opções semelhantes negociadas no mercado (Berkowitz, 2010). Por semelhantes, entenda-se *strikes* e prazos diferentes, porém com a mesma data de vencimento e baseadas no mesmo ativo. Esse vetor de volatilidades implícitas pode ser atualizado diariamente a partir do surgimento de novas informações no mercado.

O terceiro modelo analisado neste trabalho tem como prerrogativa o estudo da variância do ativo subjacente às opções. Ao contrário do modelo ad-hoc Black Scholes, o parâmetro de volatilidade das fórmulas de precificação não é atualizado com informações de opções semelhantes, mas é uma consequência do comportamento da variância condicional do ativo. O modelo sugerido por Heston e Nandi (2000), doravante denominado HN-GARCH, é uma combinação de vários modelos da família GARCH. É também uma adaptação, em tempo discreto, de alguns modelos de volatilidade estocástica (Heston, 1993).

Neste trabalho serão analisadas opções de compra sobre ações da Petrobras negociadas no Brasil. O objetivo da aplicação consiste em testar empiricamente os três modelos citados no âmbito da precificação de um conjunto de opções. O teste é baseado no seguinte critério: o melhor modelo de precificação é aquele que resulta em prêmios (preços) de opções os mais próximos possíveis do preço justo de uma opção, que é seu preço de mercado. É, portanto, possível obter bons resultados se forem realizadas hipóteses realistas sobre o parâmetro de volatilidade? Será provado que sim.

A escolha de opções sobre ações no mercado brasileiro se justifica porque é um mercado que possui ampla liquidez. Em 28/05/2010, o volume em dinheiro de negócios envolvendo esse tipo de opções ultrapassou a marca R\$ 1,1 bilhão. No mesmo ano se registrou um total de mais de 19 milhões de negociações². No Brasil, as opções são negociadas na BM&FBOVESPA e na CETIP (Azevedo, 2010).

Algumas características desse mercado³ são dignas de nota: as opções de compra são muito mais líquidas do que as opções de venda; as opções de compra negociadas na BM&FBOVESPA são do tipo americanas, ao passo que as opções de venda são do tipo europeias. As opções *vanilla* sobre ações registradas na BM&FBOVESPA são protegidas contra a distribuição de proventos, como dividendos e juros sobre o capital próprio. Essas considerações serão detalhadas e explicadas nos capítulos seguintes.

O presente trabalho se divide em seis capítulos, incluindo esta introdução (no início de cada capítulo há um resumo das seções). No segundo capítulo é feita uma síntese das teorias de opções, na qual são abordados os principais conceitos relativos a opções de compra e de venda. O terceiro capítulo trata do funcionamento e da dinâmica do modelo Black Scholes, tanto em sua versão tradicional, quanto na versão ad-hoc. No quarto capítulo são analisados os modelos heterocedásticos e as principais propriedades do modelo HNGARCH. O quinto capítulo consiste na aplicação das teorias estudadas nos capítulos anteriores. Essa aplicação, conforme mencionado anteriormente, tem como alvo um conjunto de opções de compra sobre ações da Petrobras.

²Fonte: www.bmfbovespa.comunique-se.com.br

³Ferreira (2009).

Os três modelos de precificação são comparados em função dos preços de mercado das opções. Por fim, a última parte desta dissertação trata das considerações finais.

Todos os gráficos e as aplicações dos modelos foram gerados pelos softwares R⁴ e Matlab. No modelo HN-GARCH foi utilizado o pacote *fOptions*, da Rmetrics⁵. As curvas de impacto de notícias do Capítulo 4 foram construídas com o pacote *rgarch*, do R. Nos modelos Black Scholes e ad-hoc Black Scholes se utilizou as funções do pacote *Financial Toolbox* do Matlab.

⁴R (2011).

⁵Disponível em: <https://www.rmetrics.org>

Capítulo 2

A teoria de opções

Neste capítulo são analisados vários aspectos referentes às teorias de opções: as funções de *payoff* de *calls* e *puts*, a diferença entre o valor intrínseco de uma opção e o valor tempo, a volatilidade implícita de uma opção, a paridade entre opções de compra e de venda, o conceito de *moneyness* de uma opção, as medidas de sensibilidade representadas pelas letras gregas etc. O capítulo é dividido da seguinte forma: a primeira seção trata dos fundamentos das opções. Na segunda seção são mostradas várias propriedades que as opções apresentam sob a suposição de não arbitragem entre os agentes econômicos. As medidas de sensibilidade delta, gama, vega, theta e rho são estudadas na terceira seção, que aborda também a dinâmica dessas medidas de sensibilidade em relação ao tempo.

2.1 Opções

2.1.1 Fundamentos

As opções são derivativos, isto é, são instrumentos financeiros negociáveis no mercado (em bolsas de valores ou mercados de balcão), cujos valores dependem, ou derivam, dos valores de outros ativos.

Definição 2.1.1 (Opção de Compra) *Uma opção de compra, ou call, é um derivativo que proporciona a seu proprietário o direito, mas não a obrigação, de comprar determinado ativo a um preço fixo em uma certa data ou antes dela.*

Definição 2.1.2 (Opção de Venda) *Uma opção de venda, ou put, é um derivativo que proporciona a seu proprietário o direito, mas não a obrigação, de vender determinado ativo a um preço fixo em uma certa data ou antes dela.*

O comprador de uma opção, de compra ou de venda, é denominado **titular**. O vendedor de uma opção, de compra ou de venda, é denominado **lançador**. O preço pelo qual a opção é negociada entre as partes é o **prêmio** da opção. O ativo sobre o qual a opção está sendo negociada é chamado de ativo-objeto ou de **ativo subjacente**. Esse ativo pode representar várias mercadorias: taxas de juros, taxas de câmbio, índices de bolsas de valores, *commodities* ou ações. O preço fixado no contrato da opção, sobre o qual o ativo será comprado ou vendido é conhecido como **preço de exercício** ou *strike price*. A data em que a opção expira se chama **data de vencimento** ou maturidade.

Definição 2.1.3 (Opções Europeias) *Quando o titular de uma opção só pode exercê-la na data de vencimento, a opção é do tipo europeia.*

Definição 2.1.4 (Opções Americanas) *Quando o titular de uma opção pode exercê-la a qualquer momento até a data de vencimento, a opção é do tipo americana.*

Como as opções são instrumentos que envolvem o tempo, as variáveis financeiras devem ser trazidas a valor presente ou levadas a valor futuro por uma taxa de desconto apropriada¹. Como as opções são instrumentos que apresentam volatilidade (a volatilidade da opção é chamada de **volatilidade implícita**), possuem risco.

¹Supõe-se que essa taxa seja capitalizada continuamente.

Definição 2.1.5 (Volatilidade Implícita) *A volatilidade de uma opção dados os demais parâmetros do modelo de precificação e seu preço de mercado é denominada volatilidade implícita.*

Para calcular o prêmio de uma opção é necessário introduzir a volatilidade do ativo subjacente (parâmetro σ) nas fórmulas de precificação de um modelo (Black Scholes ou similar). A volatilidade implícita de uma opção é o parâmetro σ das fórmulas de precificação obtido em função de seu preço de mercado. Por essa razão, a volatilidade do ativo subjacente deve convergir à volatilidade da opção, que é apenas um derivativo.

Se for construído um gráfico relacionando as volatilidades implícitas das opções sobre ações e seus respectivos *strikes*, tem-se o que é denominado **smile de volatilidade**. O gráfico possui esse nome devido ao formato da curva de volatilidades implícitas, que lembra um sorriso. As causas para esse padrão são variadas; dependem do modelo utilizado para calcular as volatilidades implícitas e das hipóteses sobre a distribuição de probabilidades dos retornos do ativo (Azevedo 2010).

Os parâmetros da taxa de desconto e da volatilidade, juntamente com os parâmetros mencionados anteriormente serão denotados da seguinte forma:

Tabela 2.1: Notações básicas

Nomenclatura	Notação
Prêmio de uma <i>call</i>	c_t
Prêmio de uma <i>put</i>	p_t
Taxa de juros livre de risco	r
Volatilidade	σ
Preço de exercício	K
Prazo da opção	t
Prazo da opção no vencimento	T
Preço do ativo subjacente	S_t

Definição 2.1.6 *O prêmio de uma opção consiste na soma de duas parcelas: o valor intrínseco e o valor tempo. Formalmente:*

$$c_t = c_t^I + c_t^R$$

$$p_t = p_t^I + p_t^R$$

Os sobrescritos I e R denotam valor intrínseco e valor tempo, respectivamente.

Definição 2.1.7 (Valor Intrínseco) *Para uma call, o valor intrínseco é a diferença entre o preço do ativo subjacente e o do strike. Para uma put, o valor intrínseco é a diferença entre o strike e o preço do ativo subjacente. Formalmente:*

$$\text{Valor intrínseco de uma call: } c_t^I = \max(S_t - e^{-r(T-t)}K, 0) \quad (2.1)$$

$$\text{Valor intrínseco de uma put: } p_t^I = \max(e^{-r(T-t)}K - S_t, 0) \quad (2.2)$$

onde $e = 2,7182 \dots$ é a base do logaritmo natural.

Na data do vencimento, o prêmio da opção terá apenas o valor intrínseco. Antes do vencimento, porém, haverá um valor tempo positivo. O valor tempo é um excesso de prêmio que a opção paga acima de seu valor intrínseco. O valor tempo pode ser interpretado como um prêmio de risco, cuja existência decorre do fato de a opção ser um instrumento que contém risco (Costa, 1998).

Definição 2.1.8 (Payoff) *O payoff de uma opção é uma função do ativo subjacente que retrata o resultado financeiro gerado por uma opção em qualquer ponto do tempo.*

Exemplo 2.1.1 *Considere uma call e uma put com os seguintes atributos: $K = 60$, vencimento em 21/03/2011, $\sigma = 30\%$ ao ano e $r = 10\%$ ao ano. Os payoffs teóricos dessas opções podem ser visualizados nas Figuras 2.1 e 2.2:*

Note pela Figura 2.1 (2.2) que, à medida que o preço do ativo subjacente aumenta, o valor do prêmio da opção aumenta (diminui). No vencimento, o prêmio da opção é o seu valor intrínseco. Antes do vencimento, o prêmio é acrescido do valor resultante da volatilidade (valor tempo ou prêmio de risco). Por essa razão, quando o prazo está mais distante do vencimento, os gráficos mostram um pequeno ganho financeiro mesmo quando $S_t = K = 60$,

Figura 2.1: *Payoff* teórico de uma *call*

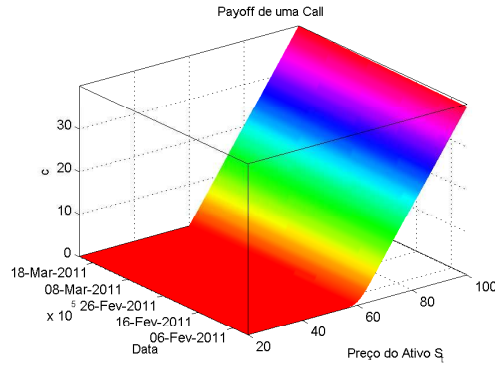
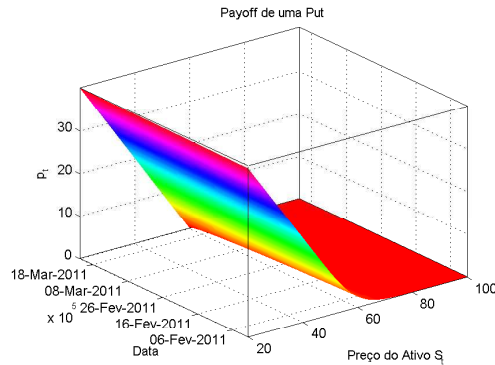


Figura 2.2: *Payoff* teórico de uma *put*



em que o valor intrínseco é zero, mas o valor tempo é um número positivo.

As opções que apresentam um *payoff* conhecido, a exemplo das Figuras 2.1 e 2.2, são denominadas opções *vanilla*. As opções *vanilla* possuem características que simplificam os cálculos de precificação, como um preço de exercício fixo, apenas um ativo subjacente etc. O oposto de *vanilla* é denominado exótico.

Definição 2.1.9 (Moneyness) *O moneyness de uma opção se refere à relação entre o preço do ativo e o preço de exercício em um dado tempo. Se o preço do ativo estiver na vizinhança do preço de exercício, a opção está no dinheiro (at-the-money, ou ATM); se o preço do ativo estiver relativamente maior (menor) do que o preço de exercício, a opção de compra (de venda)*

está dentro do dinheiro (in-the-money, ou *ITM*); se estiver muito maior (menor), a opção de compra (venda) está muito dentro do dinheiro (deep-in-the-money, ou *dITM*); se estiver relativamente menor (maior), a opção de compra (venda) está fora do dinheiro (out-of-the-money, ou *OTM*); se, por fim, o preço do ativo estiver muito menor (maior) do que o preço de exercício, a opção está muito fora do dinheiro (deep-out-of-the-money, ou *dOTM*).

O conceito de *moneyness* definido acima pode ser observado para as opções das Figuras 2.1 e 2.2. Na medida em que o preço do ativo subjacente se torna maior (menor) do que 60, o *strike*, a *call* (*put*) vai entrando no dinheiro. Por outro lado, quando S_t se torna menor (maior) do que 60, a *call* (*put*) vai saindo dinheiro. Mais adiante, o *moneyness* será conceituado de forma mais precisa.

2.1.2 Relações de Não Arbitragem

As opções apresentam várias propriedades que decorrem do pressuposto de não arbitragem. Uma operação de arbitragem é aquela na qual os agentes podem auferir lucros ou vantagens financeiras sem correr riscos (Lima *et al*, 2007). A arbitragem geralmente ocorre quando dois ou mais ativos são precificados incorretamente uns em relação aos outros (Hull, 2008).

Existe uma relação importante entre *calls* e *puts* similares, ou seja, com o mesmo preço de exercício, data de vencimento e ativo subjacente. Essa relação, conhecida como paridade *put-call*, é baseada na condição de não arbitragem.

Definição 2.1.10 (Paridade Put-Call) *Considere uma estratégia de investimento em que ocorre a compra de uma call e a venda de uma put, ambas com mesmo preço de exercício, data de vencimento e ativo subjacente. A estratégia é expressa formalmente por $c_t - p_t = a$, em que a é uma constante real. De acordo com a Definição 2.1.6, $c_t = c_t^I + c_t^R$ e $p_t = p_t^I + p_t^R$. Se o valor intrínseco da call for positivo, pela Definição 2.1.7, o valor intrínseco da put será zero, pois $e^{-r(T-t)}K - S_t < 0$. Se, pelo contrário, o valor intrínseco da put for positivo, pela Definição 2.1.7 o valor intrínseco da call será zero, pois $S_t - e^{-r(T-t)}K < 0$. Portanto:*

$$\begin{array}{ll}
\text{Pela Definição 2.1.6:} & c_t^I + c_t^R - p_t^I - p_t^R = a \\
\text{Se } S_t > e^{-r(T-t)}K: & c_t^R - p_t^R = a - c_t^I = a - (S_t - e^{-r(T-t)}K) \\
\text{Se } S_t < e^{-r(T-t)}K: & c_t^R - p_t^R = a + p_t^I = a + (e^{-r(T-t)}K - S_t) \\
\text{Logo:} & c_t^R = p_t^R \quad e \quad a = S_t - e^{-r(T-t)}K
\end{array}$$

Com base no resultado acima, a paridade put-call é definida como:

$$c_t - p_t = S_t - e^{-r(T-t)}K \quad (2.3)$$

A paridade *put-call* significa que, se o preço de uma *call*, r , t e S_t forem conhecidos, o preço de uma *put* similar é determinado pela Equação 2.3, e vice-versa. Os prêmios de risco (ou valor tempo) da *call* e da *put* serão iguais. Se o lado direito da Equação 2.3 for positivo, somente a *call* será exercida, o que implica em comprar o ativo por K ; se for negativo, somente a *put* será exercida, o que implica em comprar o ativo K para ser exercido pela *put*. Em ambos os casos a compra do ativo pelo preço de exercício estipulado é líquida e certa. Não há risco envolvido nessa estratégia.

Se a paridade for desrespeitada será sempre possível arbitrar vendendo a opção precificada a maior ou comprando a opção precificada a menor. O exemplo a seguir ² ilustra uma situação de aplicação da paridade *put-call*.

Exemplo 2.1.2 *Suponha duas opções, uma de compra e outra de venda, com preços de exercício iguais a 40 e maturidade daqui a 4 meses ($T - t = 1/3$). A taxa de juros livre de risco anualizada é de 5% a.a. e o preço do ativo subjacente às opções é de 40. A call é negociada no mercado por 3. Pela paridade put-call, a put deve valer $p_t = e^{-r(T-t)}K - S_t + c_t$:*

$$p_t = 39,34 - 40 + 3 = 2,34$$

Se a opção de venda for negociada, por exemplo, a um preço de 2,00, haverá um lucro sem risco de 0,34 por cada put comprada no mercado.

As proposições e os teoremas a seguir também resultam da condição de não arbitragem.

Proposição 2.1.1 (Limites) *O valor de uma opção respeitará os seguintes limites:*

$$\max(S_t - e^{-r(T-t)}K, 0) \leq c_t \leq S_t$$

$$\max(e^{-r(T-t)}K - S_t, 0) \leq p_t \leq K$$

Prova: Cox e Rubinstein (1985). $\square$

Proposição 2.1.2 (Preços de Exercício) *Há três restrições de arbitragem referentes ao preço de exercício de uma opção de compra ou de venda:*

²Cox e Rubinstein (1985).

i) O valor de uma call (put) não pode ser menor do que o valor de outra call (put), idêntica, mas com preço de exercício maior (menor) do que a primeira. Formalmente:

$$c_t(K_1) \geq c_t(K_2) \quad \text{se, e somente se,} \quad K_2 > K_1;$$

$$p_t(K_2) \geq p_t(K_1) \quad \text{se, e somente se,} \quad K_2 > K_1;$$

ii) A diferença de valor entre duas opções idênticas, porém com strikes diferentes, jamais será maior do que a diferença entre seus respectivos strikes. Formalmente:

$$K_2 - K_1 \geq c_t(K_1) - c_t(K_2) \quad \text{se } K_2 > K_1$$

$$K_2 - K_1 \geq p_t(K_2) - p_t(K_1) \quad \text{se } K_2 > K_1$$

iii) De três opções idênticas com strikes iguais a $K_3 > K_2 > K_1$, o valor da opção intermediária não poderá ser maior que a média ponderada das outras duas opções. Formalmente:

$$c_t(K_2) \leq \left(\frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \right) c_t(K_1) + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \right) c_t(K_3)$$

$$p_t(K_2) \leq \left(\frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} \right) p_t(K_1) + \left(\frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} \right) p_t(K_3)$$

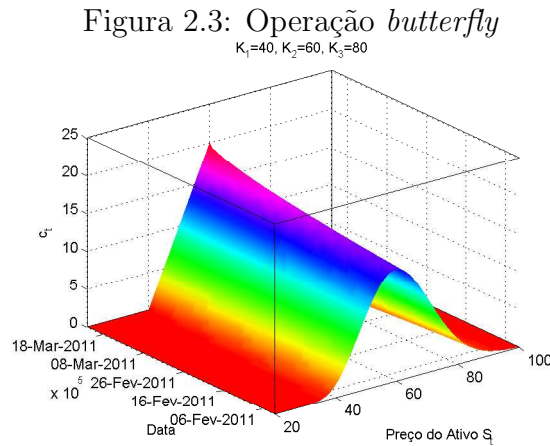
Prova: Cox e Rubinstein (1985). $\square$

A parte iii da Proposição 2.1.2 também foi provada por Merton (1973). De acordo com essa propriedade, o *payoff* de uma opção é uma função convexa de seu preço de exercício, bem como do preço do ativo subjacente. A convexidade está relacionada ao valor tempo, isto é, ao prêmio de risco das opções. Essa propriedade pode ser melhor compreendida por meio da definição e do exemplo abaixo.

Definição 2.1.11 (Operação Butterfly) *Suponha três calls com strikes K_1 , K_2 e K_3 , onde $K_1 < K_2 < K_3$ e $K_2 = \frac{K_1 + K_3}{2}$. Um investidor está comprado na primeira e na terceira calls, e vendido duas vezes na segunda. Sua carteira vale: $(S_t - e^{-r(T-t)} K_1) - 2(S_t - e^{-r(T-t)} K_2) + (S_t - e^{-r(T-t)} K_3)$. Para que o valor da carteira não seja nulo ou negativo, é necessário que o prêmio pela segunda call seja menor que a média dos prêmios da primeira e da terceira calls, ou seja, $c_t(K_2) < \frac{c_t(K_1) + c_t(K_3)}{2}$, o que explica a convexidade dos payoffs individuais³.*

³Costa (1998).

Exemplo 2.1.3 (Operação Butterfly) Considere três calls com strikes $K_1 = 40$, $K_2 = 60$ e $K_3 = 80$. Ambas expiram no dia 21/03/2011, possuem $\sigma = 30\%$ a.a e são descontadas pela taxa de juros livre de risco $r = 10\%$ ao ano. O payoff individual da call de strike igual a 60 está representado na Figura 2.1. O payoff conjunto da operação butterfly está representado no gráfico da Figura 2.3.



Proposição 2.1.3 (Maturidade) O valor de uma opção nunca pode ser menor do que o valor de uma opção idêntica com menor prazo para expirar. Formalmente:

$$c_t(t_2) \geq c_t(t_1) \quad \text{se } t_2 > t_1$$

$$p_t(t_2) \geq p_t(t_1) \quad \text{se } t_2 > t_1$$

Prova: Cox e Rubinstein (1985). $\square$

Proposição 2.1.4 (Exercício Antecipado) Uma call nunca deve ser exercida antes do prazo de vencimento.

Prova: O prêmio de uma call é $c_t = c_t^I + c_t^R$, onde c_t^R é positivo até o dia do vencimento. Se a opção for vendida antes do vencimento, o resultado obtido é c_t . Se for exercida antes do vencimento, o resultado obtido é c_t^I , que é menor do que c_t . $\square$

Corolário 2.1.1 Uma opção de compra americana não deve ser exercida antes do vencimento. Logo, nessa circunstância, o valor de uma opção americana será igual ao de uma opção europeia idêntica.

Prova: Cox e Rubinstein (1985). $\square$

2.2 Medidas de Sensibilidade

As medidas de sensibilidade mostram a influência das variáveis que afetam os prêmios das opções. As medidas são representadas por letras gregas que, por sua vez, se igualam às derivadas parciais dos prêmios das opções com respeito a outras variáveis. Essas relações são determinadas pelo modelo de precificação utilizado. A Tabela 2.2 lista as principais medidas de sensibilidade:

Tabela 2.2: Medidas de Sensibilidade			
Nomenclatura	Letra Grega	Derivada	Unidade de Medida
Delta	Δ	$\frac{\partial f_t}{\partial S_t}$	adimensional
Gama	Γ	$\frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2}$	1/R\$
Vega	κ	$\frac{\partial f_t}{\partial \sigma}$	R\$/p.p.
Theta	Θ	$\frac{\partial f_t}{\partial t}$	R\$/dia
Rhô	ρ	$\frac{\partial f_t}{\partial r}$	R\$/p.p.

onde p.p. denota ponto percentual; f_t representa o prêmio de uma opção de compra ou de venda. O vega é denotado pela letra grega kappa⁴ (κ).

2.2.1 Delta

Definição 2.2.1 (Delta) *O delta mede o quanto a opção varia quando há uma mudança no preço do ativo subjacente. É a derivada parcial do prêmio da opção com respeito ao preço do ativo. O valor do delta representa a possibilidade de uma opção ser exercida. Para as opções de compra, o delta é positivo, pois um aumento no preço do ativo, tudo o mais constante, aumenta o valor intrínseco da opção. Para as opções de venda, o delta é negativo, pois um aumento no preço do ativo diminui o valor intrínseco da put.*

Proposição 2.2.1 *Seja Δ_c o delta de uma call e Δ_p o delta de uma put. Então:*

$$0 < \Delta_c < 1$$

$$-1 < \Delta_p < 0$$

⁴Alguns autores utilizam a letra grega ν para representar o vega.

Prova: Pela paridade put-call, $p_t = c_t - S_t + e^{-r(T-t)}K$. Consequentemente: $\frac{\partial p_t}{\partial S_t} = \frac{\partial c_t}{\partial S_t} - 1$. Como $\Delta_c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t}$ é positivo e $\Delta_p = \frac{\partial p_t}{\partial S_t}$ é negativo (Definição 2.2.1), necessariamente $0 < \Delta_c < 1$ e $-1 < \Delta_p < 0$. $\square$

Moneyiness

O delta é muito utilizado como critério para definir o *moneyiness* de uma opção. Uma opção no dinheiro (ATM) possui delta na vizinhança de 0,5 (*call*) ou $-0,5$ (*put*), ou seja, há 50% de chance de que a opção seja exercida. Se o delta da opção é de 0,8 (*call*) ou $-0,8$ (*put*), a opção está dentro do dinheiro (ITM), uma vez que a chance de ser exercida é de 80%. A Tabela 2.3 apresenta as classificações do *moneyiness* das opções de acordo com os deltas. A referência para a classificação é Costa (1998).

Tabela 2.3: Moneyiness segundo os deltas

<i>Call</i>	<i>Put</i>	<i>Moneyiness</i>
$\Delta_c < 0,05$	$\Delta_p > -0,05$	dOTM
$0,05 \leq \Delta_c < 0,35$	$-0,05 \geq \Delta_p > -0,35$	OTM
$0,35 \leq \Delta_c \leq 0,75$	$-0,35 \geq \Delta_p \geq -0,75$	ATM
$0,75 < \Delta_c \leq 0,99$	$-0,75 > \Delta_p \geq -0,99$	ITM
$\Delta_c > 0,99$	$\Delta_p < -0,99$	dITM

Evolução do Delta no Tempo

As Figuras 2.4 e 2.5 mostram a evolução dos deltas teóricos de uma opção de compra e de uma opção de venda no tempo.

Exemplo 2.2.1 *Considere uma call e uma put que apresentem os mesmos parâmetros do Exemplo 2.1.1. Os comportamentos dos respectivos deltas podem ser visualizados nos gráficos abaixo⁵.*

De acordo com Costa (1998), conforme o vencimento se aproxima - ou a volatilidade diminui -, opções de compra (venda) ATM tendem a permanecer

⁵Todas as figuras deste capítulo que mostram a evolução das medidas de sensibilidade no tempo foram criadas a partir das fórmulas da Proposição 3.1.4.

Figura 2.4: Delta de uma Call

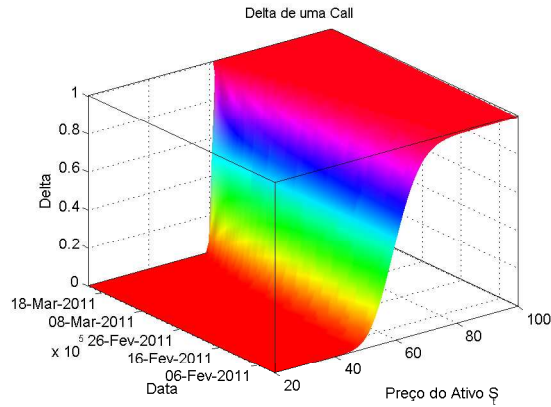
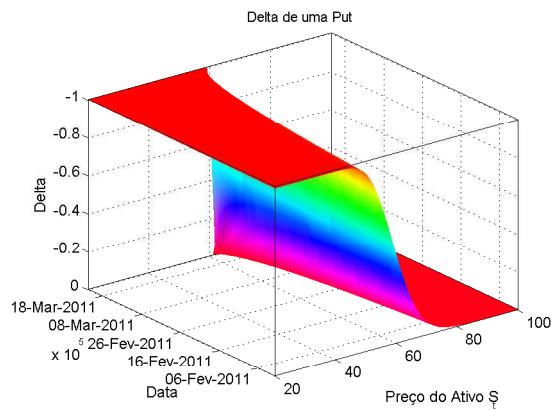


Figura 2.5: Delta de uma Put



com delta igual a $0,5$ ($-0,5$). As opções de compra (venda) OTM que começam com delta mais próximo de $0,5$ ($-0,5$) se definem rapidamente para delta igual a 0 . Opções de compra (venda) ITM que também iniciam com delta mais próximo de $0,5$ ($-0,5$) se definem rapidamente para delta igual a 1 (-1).

2.2.2 Gama

Definição 2.2.2 (Gama) *A gama é a derivada segunda parcial do prêmio da opção com respeito ao preço do ativo subjacente. Representa a variação do delta em relação à variação do preço do ativo. O gama mede a curvatura do payoff de uma opção e também pode ser utilizado no contexto de gerenci-*

amento de risco de uma posição de opções⁶. Pode ser expresso pela fórmula $\frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2}$ ou pela fórmula $\frac{\partial \Delta}{\partial S_t}$.

Proposição 2.2.2 *O gama de uma call é igual ao gama de uma put semelhante. Formalmente: $\Gamma_c = \Gamma_p$.*

Prova: Segundo a Proposição 2.2.1 a paridade put-call pode ser expressa pela fórmula:

$$\Delta_c = 1 + \Delta_p$$

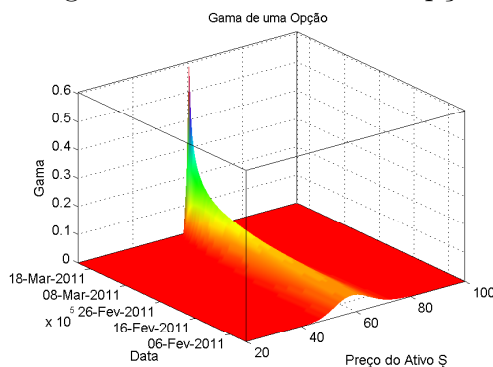
Pela Definição 2.2.2, $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t}$. Logo: $\Gamma_c = \Gamma_p$ $\square$

Evolução do Gama no Tempo

O gama das opções de compra ou de venda tende a apresentar um comportamento regular quando se está longe do vencimento. Esse comportamento regular geralmente ocorre da seguinte forma: o gama aumenta à medida que a opção entra na categoria ATM, ou seja, à medida que o delta se aproxima de 0,50 (*calls*) ou $-0,50$ (*puts*). Assim como o delta se manifesta com mais clareza com o passar do tempo, conforme o vencimento se aproxima o gama de opções ATM tende ao infinito, ao passo que o das demais opções se reduz rapidamente a zero.

Exemplo 2.2.2 *Considere a call ou a put com os parâmetros definidos no exemplo anterior. O gráfico a seguir mostra o comportamento do gama dessa call ou dessa put.*

Figura 2.6: Gama de uma Opção



⁶Ver a avaliação delta-gama em Ferreira (2009).

2.2.3 Vega

Definição 2.2.3 (Vega) *O vega é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito à volatilidade do ativo subjacente. Pode ser expresso pela fórmula $\frac{\partial f_t}{\partial \sigma_t}$. Assim como o gama, o vega é positivo tanto para calls quanto para puts.*

Segundo a Definição 2.2.3, um aumento no patamar de volatilidade do ativo irá aumentar o prêmio da opção. Portanto, o vega é uma medida favorável para o titular da opção. Por outro lado, posições vendidas na opção resultarão em vega negativo (assim como o gama). Logo, variações negativas no patamar de volatilidade favorecem o lançador da opção.

Evolução do Vega no Tempo

A volatilidade implícita de uma opção é diretamente proporcional ao prazo até o vencimento. A explicação é que quanto mais distante do vencimento, maior a incerteza sobre o exercício futuro da opção. Para expressar a incerteza, a volatilidade é geralmente medida em função do tempo (Hull, 2008). Essa forma de medir a volatilidade se denomina volatilidade efetiva e é expressa pela fórmula $\sigma\sqrt{T-t}$. Por essa razão, o vega de uma opção diminui com o passar do tempo. O vega é maior para opções ATM pelo fato de que a incerteza relativa a esse tipo de opção é muito maior; como o gama também é maior para opções ATM, essas opções apresentam maiores mudanças no delta, isto é, possuem a propriedade de saírem ou entrarem no dinheiro com mais rapidez.

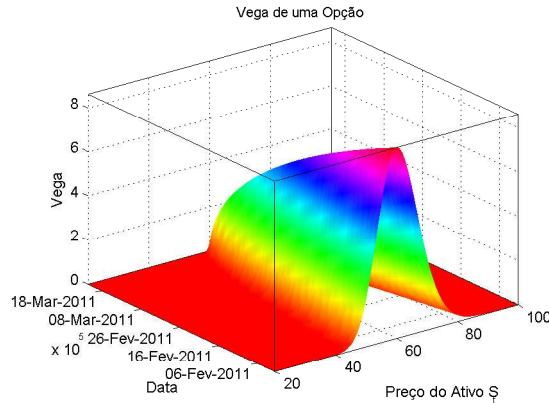
Exemplo 2.2.3 *Considere a call ou a put com os parâmetros definidos no exemplo anterior. O gráfico abaixo mostra o comportamento do vega dessa call ou dessa put.*

2.2.4 Theta

Definição 2.2.4 (Theta) *O theta é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito ao tempo, expresso pela fórmula $\frac{\partial f_t}{\partial t}$. Representa o "emagrecimento" ou "sangramento" da opção, termos que significam a perda do valor tempo, ou prêmio de risco. Pode ser decomposto em duas parcelas⁷: o theta líquido (Θ_{liq}) e o theta juros (Θ_{jur}), de modo que $\Theta = \Theta_{liq} + \Theta_{jur}$. Somente a parcela líquida do theta representa o "emagrecimento" da opção; a parcela juros representa o custo de oportunidade da opção, isto é, o quanto o preço*

⁷Costa (1998).

Figura 2.7: Vega de uma Opção



do ativo subjacente perderia se não houvesse a correção da taxa de juros livre de risco de um dia para o outro.

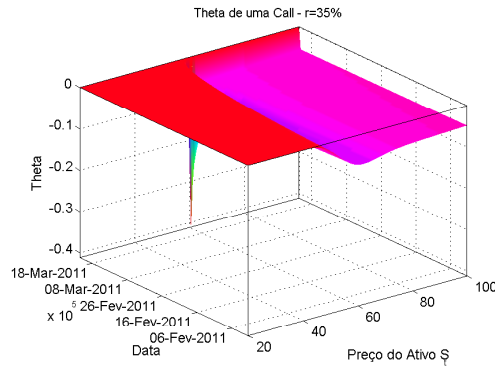
As opções de compra ou de venda ITM e dITM são mais sensíveis a θ_{jur} porque possuem maior valor intrínseco. O valor intrínseco de uma *call* varia positivamente com o aumento (incluindo a correção a juros no tempo) de S_t ; portanto, o theta juros afeta negativamente as opções de compra, especialmente as ITM e dITM. O oposto acontece com as opções de venda ITM e dITM, que são afetadas positivamente pelo theta juros. Isso ocorre porque o titular de uma *put* irá vender o ativo em data futura, portanto, a não correção integral a juros lhe é favorável. As opções de compra ou de venda ATM são mais sensíveis a θ_{liq} porque são as que possuem maior valor tempo (ou prêmio de risco). Como a parcela líquida do theta representa o "emagrecimento" da opção, é natural que as opções ATM sejam as mais afetadas.

Evolução do Theta no Tempo

A perda provocada pelo θ_{liq} é ainda maior quando se aproxima a data de vencimento para opções de compra ou de venda ATM. O efeito de θ_{jur} , todavia, é diferente para *puts* e *calls* mais dentro do dinheiro. As opções de compra perdem tanto na parcela líquida quanto na parcela juros de theta. As opções de venda, por sua vez, possuem theta juros positivo, portanto a perda do θ (somadas as duas parcelas) é menor. Dependendo do nível da taxa de juros, uma opção de venda pode até apresentar theta positivo se a parcela juros superar a parcela líquida.

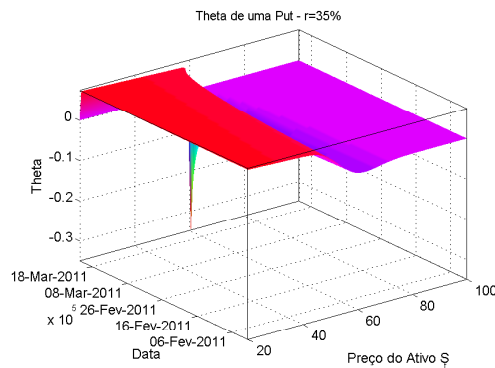
Exemplo 2.2.4 Considere a call e a put com os parâmetros definidos no exemplo anterior, exceto a taxa de juros livre de risco. Os gráficos abaixo mostram, na Figura 2.8, o comportamento do theta da call, supondo $r = 35\%$ ao ano. A Figura 2.9 exibe o mesmo gráfico, porém para uma put, supondo $r = 35\%$ ao ano.

Figura 2.8: Theta de uma Call ($r = 35\%$ a.a.)



Nota-se na Figura 2.8 que o θ_{jur} afeta negativamente as opções de compra ITM e dITM (à direita do $S_t = K = 60$). Na Figura 2.9 ocorre o contrário com as opções de venda ITM e dITM (à esquerda de $S_t = K = 60$), que apresentam θ_{jur} positivo. As opções de compra e de venda ATM, mais sensíveis à parcela θ_{liq} , decaem bruscamente quando se aproxima a data de vencimento.

Figura 2.9: Theta de uma Put ($r = 35\%$ a.a.)



2.2.5 Rhô

Definição 2.2.5 (Rhô) *O ρ é a derivada parcial do prêmio da opção com respeito à taxa de juros livre de risco. Pode ser representado por $\frac{\partial f}{\partial r}$.*

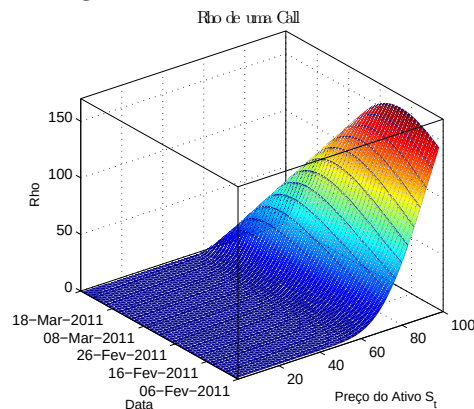
O ρ é um componente que geralmente causa pouco impacto no prêmio de uma opção, salvo se se espera uma grande mudança na taxa de juros da economia em um período muito pequeno de tempo. Conforme o raciocínio elaborado para o θ_{jur} , as opções ITM e dITM são bastante sensíveis aos juros. Logo, um aumento na taxa de juros afetará positivamente as opções de compra e negativamente as de venda.

Evolução do Rhô no Tempo

As opções ITM e dITM são as mais sensíveis ao ρ . Quando o vencimento se aproxima, o ρ vai perdendo o efeito. Isso ocorre porque a perda (na *put*) ou o ganho (na *call*) decorrentes de um aumento na taxa de juros serão maiores enquanto mais tempo o titular de uma *call* (*put*) tiver para se beneficiar (*prejudicar*) da correção dos juros mais elevados no preço do ativo subjacente.

Exemplo 2.2.5 *Considere uma call que apresente o mesmos parâmetros do Exemplo 2.1.1. O comportamento do ρ dessa opção de compra pode ser visualizado no gráfico abaixo.*

Figura 2.10: Rho de uma Call



Capítulo 3

Modelos baseados em Black Scholes

Neste capítulo são estudados os modelos de precificação de opções baseados em Black Scholes (1973), cujas fórmulas estão nas equações 3.17 a 3.20. É possível notar pelas equações que o parâmetro de volatilidade σ empregado nas fórmulas de precificação é, por hipótese, constante. Essa hipótese é flexibilizada com o intuito de incorporar um parâmetro variável de volatilidade e, por conseguinte, tornar o modelo mais realista. Nesse sentido, é apresentada outra versão do modelo, denominada na literatura de Black Scholes modificado ou ad-hoc Black Scholes (Dumas, Fleming e Whaley, 1998). Esse modelo utiliza a mesma lógica de precificação da versão tradicional, porém as volatilidades são estimadas por meio de uma análise *cross-section* das volatilidades implícitas das opções semelhantes negociadas no mercado. As volatilidades calculadas são então inseridas nas fórmulas usuais de precificação. O presente capítulo é dividido da seguinte forma: na primeira seção são desenvolvidas as fórmulas de precificação do modelo Black Scholes. O ponto de partida é um conjunto de hipóteses assumidas pelos autores; na segunda seção é apresentada a equação de regressão da volatilidade introduzida pelo modelo ad-hoc Black Scholes.

3.1 Modelo Black Scholes

3.1.1 Hipóteses adotadas

Black e Scholes (1973) assumem uma série de condições ideais de mercado como pré-requisito para o correto funcionamento do modelo. As principais hipóteses estão listadas abaixo.

- **H1:** O preço do ativo segue um passeio aleatório em tempo contínuo com taxa de variância proporcional à raiz quadrada do tempo;
- **H2:** A distribuição de probabilidades dos preços dos ativos é lognormal;
- **H3:** A taxa de variância do retorno do ativo é constante;
- **H4:** A taxa de juros é conhecida e constante durante o período considerado para a precificação;
- **H5:** A opção é do tipo Europeia;
- **H6:** O ativo não paga dividendos durante a vida da opção;
- **H7:** Não há custos de transação envolvidos nas operações de compra e venda de ativos ou opções financeiras;
- **H8:** Há liberdade em se ficar comprado ou vendido em qualquer quantidade fracionária da opção ou do ativo;
- **H9:** Ausência de arbitragem;

O objetivo desse conjunto de hipóteses consiste em fazer com que o valor da opção dependa apenas de duas variáveis: do preço do ativo subjacente e do tempo. Os demais parâmetros (volatilidade, juros e preço de exercício) são dados como constantes (Black e Scholes, 1973).

3.1.2 Processos estocásticos

O modelo de Black Scholes parte de um processo estocástico em tempo contínuo definido para a variável do preço do ativo subjacente à opção. Algumas definições formais são necessárias para se compreender a lógica imanente aos modelos de precificação analisados neste trabalho. A principal referência das definições a seguir é Brockwell e Davis (1987).

Definição 3.1.1 (Processo Estocástico) *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias X_t , com $t \in \tau$, definida em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um espaço não vazio, $\mathcal{F}$ é uma família de σ -álgebras de subconjuntos de Ω e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade. Para cada $t \in \tau$, X_t é uma função $X_t(\cdot)$ no conjunto Ω , ou variável aleatória. As funções $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ em τ são as realizações ou caminhos do processo $\{X_t, t \in \tau\}$. Uma série temporal é uma realização de um processo estocástico.*

Observação 3.1.1 *Neste trabalho o conjunto índice τ sempre será um subconjunto de $\mathbb{R}$, embora essa restrição não se aplique necessariamente a outros tipos de aplicações.*

Definição 3.1.2 (Propriedade Markoviana) *Um processo X_t , com $t \in \tau$ é markoviano de ordem k se, $\forall t, \forall k \geq K$:*

$$F_{t|t-1, \dots, t-k}(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-k}) = F_{t|t-1, \dots, t-K}(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-K}), \quad (3.1)$$

onde $F_{t|...}$ é a distribuição condicional de probabilidades do processo¹.

A propriedade markoviana significa que toda a informação passada do processo está incluída nos valores recentes K , isto é, que o conjunto informacional do passado do processo pode ser sumarizado por um número finito de variáveis de estado. A Definição 3.1.2 é coerente com a forma fraca de eficiência de mercado (Tsay, 2002). Para maiores detalhes sobre a eficiência de mercado, consultar Fama (1970).

Definição 3.1.3 (Função de Autocovariância) *Se X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é uma série, tal que $Var(X_t) < \infty$ para cada $t \in \mathbb{Z}$, então a função de autocovariância $\gamma_x(\cdot, \cdot)$ de X_t é definida por:*

$$\gamma_x(r, s) = Cov(X_t, X_s) = E[(X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))], r, s \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Definição 3.1.4 (Estacionariedade) *A série temporal X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é estacionária se:*

- i) $E(|X_t^2|) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$
- ii) $E(X_t) = m$, para todo $t \in \mathbb{Z}$
- iii) $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r+t, s+t)$, para todo $r, s, t \in \mathbb{Z}$

Observação 3.1.2 *Se X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é estacionário, então $\gamma_x(r, s) = \gamma_x(r-s, 0)$ para todo $r, s \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, a função de autocovariância é redefinida como: $\gamma_x(h) = \gamma_x(h, 0) = Cov(X_{t+h}, X_t)$, onde $h = r - s$.*

¹Ver Gouriéroux (1997).

A Definição 3.1.4 se refere ao conceito de estacionariedade fraca, também conhecido como covariância-estacionariedade ou estacionariedade de segunda ordem, em contraposição ao conceito de estacionariedade forte ou estrita (ver Brockwell e Davis, 1987). As referências à estacionariedade neste trabalho serão relativas ao conceito de estacionariedade fraca, ou simplesmente estacionariedade, salvo menção em contrário. A Definição 3.1.4 estabelece que a média do processo é constante, a variância é finita e constante, e a função de autocovariância depende apenas da defasagem h .

Definição 3.1.5 (Ruído Branco) *O processo u_t , com $t \in \tau$, é denominado ruído branco se consiste em uma sequência de variáveis aleatórias com média zero e função de autocovariância:*

$$\gamma_u(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } h = 0 \\ 0 & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$$

Definição 3.1.6 (Processo Wiener) *Seja w_t , com $t \in \tau$, um processo contínuo definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O processo w_t é um processo Wiener se satisfaz as seguintes propriedades²:*

- i) $w_0 = 0$;
- ii) $E(w_t) = 0$;
- iii) w_t possui uma distribuição normal não degenerada para cada t ;
- iv) Os incrementos de w_t são independentes, isto é, $[w_{t_2} - w_{t_1}]$ e $[w_{t_4} - w_{t_3}]$ são independentes para cada intervalo sequencial (t_1, t_2) e (t_3, t_4) .

Sem perda de generalidade, assume-se que $t \in [0, 1]$. Se $w_t \sim N(0, t)$, o processo w_t também pode ser chamado de Movimento Browniano Padrão.

Proposição 3.1.1 *Seja $\{u_i\}_{i=1}^n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média zero e variância unitária definida no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para cada $t \in [0, 1]$, seja $[nt]$ a parte inteira de nt . Seja $w_{n,t} = \sqrt{n}^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} u_i$. Então, $w_{n,t}$ converge em distribuição para um processo w_t em $[0, 1]$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Prova: (Hamilton, 1994). $\square$

Corolário 3.1.1 *A variação Δw_t é normalmente distribuída com média zero e variância Δt .*

Prova: $w_t \sim N(0, t)$. Se $\Delta w_t = w_{t_i} - w_{t_j}$, onde $i > j$, então $E(\Delta w_t) = 0$. Se $\text{Var}(w_t) = t$, então $\text{Var}(\Delta w_t) = t_i - t_j = \Delta t$ (ver propriedades da Definição 3.1.6). $\square$

²ver Wei (2006).

De acordo com o Corolário 3.1.1, é possível definir $\Delta w_t = \epsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde $\epsilon_t \sim N(0, 1)$. A propriedade (iii) da Definição 3.1.6 define a característica markoviana do processo e estabelece que a variação Δw_t é independente de w_j para qualquer $j \leq t$. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, Δw_t é denotado por dw_t e $dw_t = \epsilon_t \sqrt{dt}$.

O processo Wiener, ou movimento browniano padrão, pode ser generalizado da seguinte forma:

Definição 3.1.7 (Processo Wiener Generalizado) *Seja x_t , com $t \in \tau$, uma série temporal contínua. Se x_t é um processo Wiener generalizado, então:*

$$dx_t = \mu dt + \sigma dw_t$$

onde w_t é o processo Wiener definido em 3.1.6. A taxa de mudança na média por unidade de tempo, ou *drift*, é denotada por μ . A taxa de mudança na variância é denotada por σ^2 . O processo Wiener generalizado apresenta as propriedades:

$$E(dx_t) = \mu dt \quad (3.3)$$

$$Var(dx_t) = \sigma^2 dt \quad (3.4)$$

Exemplo 3.1.1 *A trajetória do processo Wiener generalizado pode ser visualizada no gráfico abaixo. Foi simulado um processo com 800 observações, com $t \in [0, 1]$, onde $\mu = 700$ e $\sigma = 200$. Em azul, $dx_t = \mu dt + \sigma dw_t$. A linha reta vermelha pontilhada representa o termo μdt isolado. O termo errático dw_t isolado está em preto.*

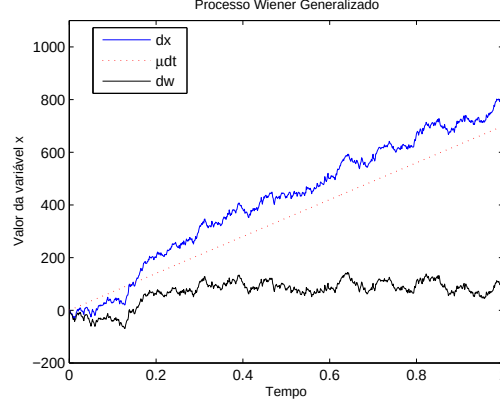
Definição 3.1.8 (Processo de Itô) *Sejam os parâmetros μ e σ funções de x e de t . Então x_t será um processo de Itô se satisfizer³:*

$$dx_t = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw_t$$

O processo Wiener, ou movimento browniano padrão, é um caso particular do processo de Itô quando $\mu(x, t) = 0$ e $\sigma(x, t) = 1$. Da mesma forma, o processo Wiener generalizado é um caso particular do processo de Itô quando $\mu(x, t) = \mu$ e $\sigma(x, t) = \sigma$.

³Hull (2008).

Figura 3.1: Simulação de um Processo Wiener Generalizado



Definição 3.1.9 (Movimento Browniano Geométrico) *Seja S_t , $t \in \tau$, uma variável contínua representando o preço do ativo subjacente à opção. Se o processo Wiener generalizado x_t for igualado a S_t , então S_t será um movimento browniano geométrico se satisfizer⁴:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (3.5)$$

O movimento browniano geométrico possui taxa de crescimento da média de μS_t e taxa de crescimento da variância igual a $\sigma^2 S_t^2$.

Lema 3.1.1 (Lema de Itô) *Seja f_t uma função do ativo S e do tempo t . Se S_t segue um processo de Itô, tal que $dS_t = \mu(x, t)S_t dt + \sigma(x, t)S_t dw_t$, a função f_t seguirá o processo de Itô:*

$$df_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \sigma S_t dw_t \quad (3.6)$$

Prova: Hull (2008). $\square$

onde df_t possui taxa de mudança na média igual a $\frac{\partial f_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2$ e taxa de mudança na variância igual a $\frac{\partial f_t}{\partial S_t} \sigma^2 S_t^2$.

Para os propósitos deste trabalho, a função f_t será interpretada como o prêmio de uma opção baseada no ativo de preço S_t .

⁴Tsay (2002).

Proposição 3.1.2 *O preço do ativo subjacente, S_t , segue uma distribuição lognormal.*

Prova: Seja $G(S, t)$ uma função tal que $G_t = \log S_t$. O log-retorno do ativo é $dG_t = \log S_t - \log S_{t-1}$. Então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_t}{\partial S_t} &= \frac{1}{S_t} \\ \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} &= -\frac{1}{S_t^2} \\ \frac{\partial G_t}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.1:

$$dG_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dw_t \quad (3.7)$$

Calculando a média e a variância da equação 3.7:

$$\log \frac{S_t}{S_{t-1}} \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right] \quad (3.8)$$

Rearranjando os termos:

$$\log S_t \sim N \left[\log S_{t-1} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right] \quad (3.9)$$

Uma variável cujo logaritmo é normalmente distribuído, segue uma distribuição lognormal. Logo, se $\log(S_t)$ é normalmente distribuída, o preço do ativo, S_t , deve seguir uma distribuição lognormal. $\square$

Pela equação 3.7 constata-se que o log-retorno cresce a uma taxa média constante de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ por unidade de tempo, com taxa de crescimento da variância constante em σ^2 (Hipótese **H3**). A volatilidade do log-retorno é $\sigma\sqrt{dt}$ (Hipótese **H1**), também conhecida como volatilidade efetiva. Segundo a Proposição 3.1.2, o preço do ativo, S_t , segue uma distribuição lognormal (Hipótese **H2**).

3.1.3 Taxa de desconto

A Hipótese **H4** estabelece que a taxa de desconto do modelo de precificação de opções é conhecida e constante. Pela hipótese de mercado eficiente, os retornos oferecidos pelos investimentos nesse mercado devem remunerar seu risco (Assaf Neto, 2009), isto é, quanto mais arriscado um ativo, maior será a taxa de retorno exigida pelos agentes econômicos. **Isso significa que o ativo possui um excesso de retorno relacionado ao risco, porém as opções baseadas nesse ativo devem ser precificadas pela taxa de juros livre de risco, r , que é conhecida e constante.**

Definição 3.1.10 *Seja Π um portfolio sem risco. Esse portfolio deve ser corrigido no tempo pela taxa de juros livre de risco, r . Formalmente:*

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (3.10)$$

onde $d\Pi$ é a variação do portfolio Π no intervalo de tempo dt .

Considere que o portfolio Π seja formado por uma opção e uma fração do ativo subjacente. Para que a Equação 3.10 tenha validade é necessário eliminar o risco desse portfolio.

Definição 3.1.11 (Delta hedging) *O delta hedging dinâmico é um portfolio que iguala uma opção financeira a uma fração do ativo subjacente, o delta, em cada instante do tempo⁵. Formalmente:*

$$\Pi = -f_t + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} S_t \quad (3.11)$$

onde f_t é o prêmio da opção, S_t é o preço do ativo e Π é o valor do portfolio. A variação de Π é expressa por:

$$d\Pi = -df_t + \frac{\partial f_t}{\partial S_t} dS_t \quad (3.12)$$

O objetivo do *delta hedging* consiste em eliminar todo o risco da opção e da fração $\frac{\partial f_t}{\partial S_t}$ do ativo no portfolio. Substituindo 3.5 e 3.1.1 em 3.12:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \quad (3.13)$$

⁵Haug (2006).

O processo Wiener foi eliminado do portfolio, portanto a carteira deve render a taxa de juros livre de risco, conforme em 3.10. Segundo Black e Scholes (1973), se o referido portfolio não render a taxa de livre de juros, os especuladores tentariam lucrar emprestando grandes somas de dinheiro para criar a posição hedgeada, o que forçaria a taxa de retorno a decrescer até a taxa de juros livre de risco. O *delta hedging* evita qualquer tipo de arbitragem, o que está de acordo com a Hipótese **H9**.

3.1.4 Fórmulas de precificação

Se as Equações 3.11 e 3.13 forem substituídas na Equação 3.10, se obtém a equação diferencial parcial (EDP) de Black e Scholes:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} = r f_t \quad (3.14)$$

Proposição 3.1.3 *A solução analítica da Equação 3.14 pode ser encontrada por meio das seguintes condições de fronteira:*

$$c_t^I = e^{-r(T-t)} \{E[\max(S_T - K, 0)]\} \quad (3.15)$$

$$p_t^I = e^{-r(T-t)} \{E[\max(K - S_T, 0)]\} \quad (3.16)$$

onde c_t^I e p_t^I são os valores intrínsecos de uma call e de uma put, respectivamente. A solução analítica da Equação 3.14, considerando as condições impostas por c_t^I e p_t^I é:

$$c_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.17)$$

$$p_t = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \quad (3.18)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \quad (3.19)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)} \quad (3.20)$$

onde: c_t é o prêmio de uma opção de compra; p_t é o prêmio de uma opção de venda; K é o preço de exercício da opção; S_t é o preço do ativo subjacente no instante t ; T é a data de vencimento da opção; σ é a volatilidade; $N(\cdot)$ é função densidade de probabilidade acumulada da distribuição normal padrão.

3.1.5 Considerações sobre as demais hipóteses

Na Hipótese **H4** afirma-se que a taxa de juros deve ser constante durante a vida da opção, porém é possível relaxar essa hipótese e utilizar taxas de juros estocásticas (Merton, 1973). A Hipótese **H5** limita o modelo de Black Scholes ao cálculo do prêmio de opções europeias; as opções de venda negociadas no mercado brasileiro são europeias, mas as opções de compra, que são as que possuem maior liquidez, são americanas. Entretanto, de acordo com a Proposição 2.1.4 e com o Corolário 2.1.1, não é vantajoso exercer as opções de compra antes do vencimento. Nesse sentido, as opções de compra americanas vanilla negociadas no mercado brasileiro podem ser tratadas como se fossem europeias. Segundo a Hipótese **H6**, o ativo não deve pagar dividendos durante a vida da opção. Isso não é um problema no mercado doméstico, uma vez que as opções são protegidas contra dividendos, ocorrendo os reajustes nos preços de exercício. As hipóteses restantes não representam obstáculos às aplicações do modelo de Black e Scholes porque algum grau de abstração da realidade será sempre necessário para se modelar eventos da economia. Para maiores esclarecimentos sobre a validade do realismo das hipóteses em modelos econômicos, ver Friedman (1953).

3.1.6 Cálculo da volatilidade implícita

Não é possível inserir o preço de mercado da opção, a taxa de juros, o prazo até a maturidade, o preço de exercício da opção e o preço *spot* do ativo subjacente para encontrar a volatilidade implícita da opção. O parâmetro σ não pode ser isolado nas fórmulas de precificação de Black e Scholes, portanto é necessário calculá-lo por meio de métodos numéricos.

Teorema 3.1.1 (Newton-Raphson) *Assuma $y \in \mathbf{C}^2\{a, b\}$. Existe um número $q \in \{a, b\}$, onde $y(q) = 0$. Se $y'(q) \neq 0$, então existe um $\delta > 0$ tal que a sequência abaixo definida por iteração*

$$q_i = q_{i-1} - \frac{y(q_{i-1})}{y'(q_{i-1})}$$

convergir para q por qualquer aproximação inicial $q_0 \in \{q - \delta, q + \delta\}$.

Prova: Mathews e Fink (1999). $\square$

onde $y'(q) = \frac{dy}{dq}$, $y \in \mathbf{C}^2\{a, b\}$ significa que a função y é duas vezes derivável no intervalo $\{a, b\}$ e que $y''(q)$ é uma função contínua no referido

intervalo (Lima, 1976). O algoritmo de Newton-Raphson consiste em uma técnica iterativa de sucessivas aproximações para a raiz de uma função. Essa técnica é útil para calcular o valor da volatilidade implícita da opção. Haug (2006) e Natenberg (1994) mostram uma adaptação do algoritmo de Newton-Raphson:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} = \frac{c_{\sigma_{i-1}} - c_m}{\kappa_{i-1}} \quad (3.21)$$

Onde σ_i é a volatilidade implícita, $c_{\sigma_{i-1}}$ é o prêmio de uma *call* obtido por Black e Scholes para σ_{i-1} , c_m é o preço de mercado da opção de compra e $\kappa_{i-1} = \frac{\partial c}{\partial \sigma_{i-1}}$ é o vega da opção com respeito à volatilidade em $i - 1$. O algoritmo também pode ser utilizado para *puts*, bastando substituir c por p na equação 3.21. Maiores detalhes podem ser estudados em Manaster e Koehler (1982). Esses autores desenvolveram uma "semente" para o cálculo de volatilidades implícitas pelo algoritmo de Newton-Raphson:

$$\sigma_1 = \sqrt{\left| \log \frac{S_t}{K} + r(T - t) \right| \frac{2}{(T - t)}}$$

3.1.7 Medidas de sensibilidade

As equações 3.17 e 3.18 mostram as fórmulas de precificação de opções de compra e venda, respectivamente, pelo modelo de Black e Scholes. Conforme foi visto no capítulo anterior, as letras gregas são medidas de sensibilidade expressas por derivadas (de primeira ou segunda ordem) do prêmio da opção com respeito a uma outra variável. A proposição abaixo mostra as gregas obtidas diretamente das fórmulas de precificação do modelo, isto é, da equação 3.17 à 3.20.

Proposição 3.1.4 *Considere as equações de precificação do modelo Black Scholes, enumeradas de 3.17 à 3.20. A aplicação direta das derivadas das gregas nas equações mencionadas resulta em:*

$$\text{Delta de uma call: } \Delta_c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t} = N(d_1)$$

$$\text{Delta de uma put: } \Delta_p = \frac{\partial p_t}{\partial S_t} = N(d_1) - 1$$

$$\text{Gama de uma opção: } \Gamma = \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{(T - t)}}$$

$$\text{Vega de uma opção: } \kappa = \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{(T-t)} N'(d_1)$$

$$\text{Theta de uma call: } \Theta_c = \frac{\partial c_t}{\partial t} = -\frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{(T-t)}} - r K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$\text{Theta de uma put: } \Theta_p = \frac{\partial p_t}{\partial t} = -\frac{S_t N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{(T-t)}} + r K e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

$$\text{Rhô de uma call: } \rho_c = \frac{\partial c_t}{\partial r} = K T e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$\text{Rhô de uma put: } \rho_p = \frac{\partial p_t}{\partial r} = -K T e^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

onde $N'(\cdot)$ é função densidade de probabilidade da distribuição normal padronizada, tal que $N'(x) = \sqrt{2\pi}^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Prova: A verificação decorre imediatamente da aplicação das derivadas parciais da Tabela 2.2 nas fórmulas de precificação do modelo Black Scholes. $\square$

3.2 Modelo ad-hoc Black Scholes

De acordo com a hipótese **H3**, a variância do ativo subjacente é constante. Essa hipótese não condiz com a realidade dos mercados financeiros, em geral, e do mercado de opções, em particular.

Como se pode observar nas fórmulas de precificação, o prêmio de uma opção no modelo Black Scholes é função dos seguintes parâmetros:

$$\text{Prêmio (Black Scholes)} = [K, (T-t), S_t, r, \sigma] \quad (3.22)$$

onde K é o strike; $(T-t)$ é o prazo até a maturidade de cada opção; S_t é o preço do ativo subjacente; r é a taxa de juros livre de risco; σ é a volatilidade do ativo subjacente à opção.

Dumas, Fleming e Whaley (1998) propõem uma adaptação do modelo Black Scholes no sentido de incorporar um parâmetro de volatilidade variante aos prazos e *strikes* das diversas opções negociadas no mercado, semelhantes à opção a ser precificada:

$$\text{Prêmio (ad-hoc Black Scholes)} = \{K, (T-t), S_t, r, \hat{\sigma}_n[K, (T-t)]\} \quad (3.23)$$

A volatilidade passa a ser variável e estimada a partir de uma amostra de tamanho n , que dependerá da disponibilidade de dados referentes às opções negociadas no mercado. Esse novo modelo é conhecido na literatura como Black Scholes modificado ou **ad-hoc Black Scholes** (Berkowitz, 2010).

Observação 3.2.1 *No modelo ad-hoc Black Scholes não são tecidas quaisquer considerações sobre a volatilidade do ativo subjacente; o parâmetro constante (pela Hipótese **H3**) de volatilidade do ativo na Equação 3.22 é substituído por um parâmetro variável de volatilidade implícita das opções (Equação 3.23).*

Para inserir $\hat{\sigma}_n [K, (T - t)]$ em (3.23) é preciso obter as volatilidades implícitas de opções com a mesma data de vencimento T , mas com prazos (anteriores aos das opções-objeto) e *strikes* diferentes. O passo inicial consiste, portanto, em obter as informações sobre os *strikes*, preços de mercado, taxas de juros, prazos e preços do ativo subjacente. Esse conjunto de dados em *cross section* servirá para calcular a série de volatilidade implícita (σ_n) dessas opções até a data referência (o instante inicial em que as opções serão precificadas)⁶. Uma vez que os dados estejam disponíveis, um modelo econométrico deve ser ajustado⁷. O parâmetro estimado $\hat{\sigma}_n$ é então inserido nas fórmulas usuais de precificação do modelo Black Scholes como uma previsão do modelo ajustado em função dos *strikes* e prazos das opções a serem precificadas.

A equação de volatilidade implícita obedecerá ao modelo econométrico:

$$\begin{matrix} \sigma_n \\ (n \times 1) \end{matrix} = \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{X} & \boldsymbol{\beta} \\ (n \times k) & (k \times 1) \end{matrix}}_{(n \times 1)} + \begin{matrix} \mathbf{u} \\ (n \times 1) \end{matrix} \quad (3.24)$$

em que o σ_n é o vetor de variáveis endógenas (as volatilidades implícitas das opções semelhantes às que serão precificadas), o vetor $\mathbf{X}$ representa o conjunto de variáveis explicativas (que são K e $(T - t)$), respectivamente os *strikes* e os prazos até a maturidade de cada opção), o vetor $\boldsymbol{\beta}$ é composto pelos parâmetros a serem estimados e $\mathbf{u}$ é o termo de erro aleatório do modelo.

⁶As volatilidades implícitas são obtidas mediante a aplicação de um algoritmo como o de Newton-Raphson.

⁷Para compreender a lógica, as hipóteses e as propriedades do modelo clássico de regressão linear, ver Hill, Griffiths e Judge (2003) ou Greene (2002).

Definição 3.2.1 A equação de volatilidade implícita em 3.24 pode ser definida pelas seguintes especificações (Dumas, Fleming e Whaley, 1998):

$$\begin{aligned}
1: \quad & \hat{\sigma}_n = \hat{\beta}_0 \\
2: \quad & \hat{\sigma}_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 K + \hat{\beta}_2 K^2 \\
3: \quad & \hat{\sigma}_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 K + \hat{\beta}_2 K^2 + \hat{\beta}_3 (T - t) + \hat{\beta}_4 K (T - t) \\
4: \quad & \hat{\sigma}_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 K + \hat{\beta}_2 K^2 + \hat{\beta}_3 (T - t) + \hat{\beta}_4 (T - t)^2 + \hat{\beta}_5 K (T - t)
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

No Modelo 1, a volatilidade implícita é constante; essa especificação é a mesma da utilizada no modelo tradicional de Black Scholes, portanto a modificação introduzida nesta seção mostra que o modelo Black Scholes tradicional é um caso particular do modelo *ad-hoc*, ou modificado. As demais especificações estabelecem uma relação funcional entre a volatilidade implícita, o preço de exercício e/ou o prazo até a maturidade da opção. Trata-se de um argumento que impede que a opção seja precificada com arbitragem⁸. Os parâmetros β_i do modelo podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados ordinários⁹.

A técnica de estimação de volatilidades descrita nesta seção apresenta vantagens porque a utilização das volatilidades implícitas é uma ferramenta útil para garantir que a opção é precificada de maneira consistente com os preços de mercado de outras opções semelhantes (Berkowitz, 2010).

⁸Dumas, Fleming e Whaley (1998).

⁹Hill, Griffiths e Judge (2003) e Greene (2002) explicam o método dos mínimos quadrados ordinários e suas principais propriedades.

Capítulo 4

Modelo HN-GARCH

Neste capítulo é apresentado o modelo heterocedástico de precificação de opções proposto por Heston e Nandi (2000), denominado HN-GARCH. O presente capítulo está dividido da seguinte forma: na primeira seção são abordados alguns conceitos importantes que serão utilizados na aplicação do capítulo seguinte. Em seguida, são analisadas as principais propriedades dos modelos ARCH e GARCH e os modelos assimétricos EGARCH, NGARCH e VGARCH. A segunda seção trata do modelo HN-GARCH e suas principais propriedades para a ordem (1,1), como a variância de longo prazo, as condições de estacionariedade, a correlação entre o preço do ativo subjacente e sua variância condicional que é, por hipótese, governada por um processo GARCH assimétrico. Também são mostradas as modificações necessárias para que o modelo possa precificar as opções no ambiente de risco neutro. Finalmente, as fórmulas de precificação de uma opção de compra são sintetizadas na Equação 4.44. Para obter o prêmio de opções de venda é empregada a paridade *put-call*.

4.1 ARCH e GARCH

4.1.1 Propriedades dos Ativos Financeiros

A Hipótese **H3** do modelo Black Scholes supõe que a variância do retorno do ativo subjacente à opção seja uma constante. Os modelos heterocedásticos que serão vistos neste capítulo partem do pressuposto que a variância incondicional do retorno do ativo é constante, porém sua variância condicionada a observações passadas muda com o tempo. Essa variância condicional deve convergir à variância das opções que são baseadas no ativo, uma vez que o prêmio da opção é uma função do preço e da variância do ativo subjacente.

Morettin (2008) lista alguns fatos estilizados sobre os retornos de ativos financeiros:

1. Os retornos são, em geral, não autocorrelacionados;
2. Séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo;

O primeiro fato supõe que os retornos não são autocorrelacionados, o que significa que as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos retornos não devem apresentar valores significantes. Caso haja algum valor significativo, o retorno deve ser modelado até que a autocorrelação seja removida.

Considere que a série temporal dos retornos (ou dos log-retornos) de um ativo financeiro seja denotada por X_t .

Definição 4.1.1 (Função de Autocorrelação) *Seja $\gamma_x(h)$ a função de autocovariância da série X_t , com $t \in \mathbb{Z}$. A função de autocorrelação (FAC) é definida analogamente como:*

$$FAC = \rho_x(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

Definição 4.1.2 *Uma função real $b : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é não negativa definida se, e somente se:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j b |t_i - t_j| \geq 0$$

para todos os inteiros positivos n e para todos os vetores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)' \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{Z}^n$.

Proposição 4.1.1 Se a série X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é um processo estacionário, então $\gamma_x(\cdot)$ e $\rho_x(\cdot)$ apresentam as seguintes propriedades:

- (i) $\gamma_x(0) = \text{Var}\{X_t\}$ e $\rho_x(0) = 1$;
- (ii) $|\gamma_x(h)| \leq \gamma_x(0)$; e $|\rho_x(h)| \leq 1$, $\forall h \in \mathbb{Z}$
- (iii) $\gamma_x(h) = \gamma_x(-h)$ e $\rho_x(h) = \rho_x(-h)$, $\forall h \in \mathbb{Z}$.
- (iv) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \gamma_x |t_i - t_j| \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho_x |t_i - t_j| \geq 0$

Prova: Brockwell e Davis (1987) demonstram as propriedades da função de autocovariância. O raciocínio é análogo para a FAC. $\square$

A contraparte amostral da FAC segue a definição abaixo.

Definição 4.1.3 (FAC Amostral) A função de autocorrelação amostral é definida como:

$$\hat{\rho}_x(h) = \frac{\hat{\gamma}_x(h)}{\hat{\gamma}_x(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (4.2)$$

onde $\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{n}$ é a média amostral de X_t e n é o tamanho da amostra.

Observação 4.1.1 O desvio-padrão da FAC amostral ($S_{\hat{\rho}_x(h)}$) para um ruído branco (ver Definição 3.1.5) é $S_{\hat{\rho}_x(h)} = \sqrt{\frac{1}{n}}$

Definição 4.1.4 (Função de Autocorrelação Parcial) A função de autocorrelação parcial (FACP), ou ϕ_{hh} , da série X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é definida como a autocorrelação entre X_t e X_{t+h} após a remoção da dependência linear mútua entre os termos intermediários $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$. Formalmente:

$$FACP = \phi_{hh} = \text{Corr}(X_t, X_{t+h} | X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}) \quad \forall t, h \in \mathbb{Z} \quad (4.3)$$

A contraparte amostral da FACP segue a definição abaixo:

Definição 4.1.5 (FACP amostral) A FACP amostral, ou $\hat{\phi}_{hh}$, pode ser calculada pelo método recursivo proposto por Durbin (1960).

Observação 4.1.2 O desvio-padrão de $\hat{\phi}_{hh}$ para um ruído branco é $\sqrt{\frac{1}{n}}$, onde n é o tamanho da amostra.

Definição 4.1.6 (Processo ARMA (p,q)) O processo X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, é um processo ARMA (p,q), se X_t é estacionário e se, para cada t ,

$$\phi(B)X_t = \theta(B)u_t \quad (4.4)$$

onde B é um operador de defasagem, tal que $B^i X_t = X_{t-i}$ com $i \in \mathbb{Z}$; $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ é o polinômio autorregressivo; $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ é o polinômio média móvel; u_t é o ruído branco definido em 3.1.5.

Assume-se que $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$ não possuem raízes comuns. As condições de estacionariedade e invertibilidade consistem, respectivamente, em que as raízes dos polinômios $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário (Wei, 2006).

As ordens p e q do processo autorregressivo média móvel, ou ARMA (p,q) , são determinadas por meio da FACP e da FAC. Pode ser demonstrado que a FAC de um processo autorregressivo estacionário decai exponencialmente até zero e a FACP é nula para $t > p$. Analogamente, a FAC de um processo média móvel invertível é nula para $t > q$ e a FACP decai exponencialmente até zero (Wei, 2006). Logo, se o ativo X_t puder ser modelado por um processo autorregressivo média móvel de ordem p e q , ou ARMA (p,q) , a estrutura de autocorrelação dos resíduos do modelo ajustado deve apresentar as características de um ruído branco, ou seja, a FAC e a FACP devem ser zero para qualquer t .

O fato estilizado número 2 assume que as séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo. Isso significa que, mesmo que os retornos não sejam autocorrelacionados, nada garante que sejam independentes. É preciso analisar o segundo momento da série, isto é, sua variância. Para isso serão estudados os modelos heterocedásticos da família GARCH.

4.1.2 Heterocedasticidade Condicional ARCH

Ao analisar a trajetória da inflação no Reino Unido, Engle (1982) introduziu o modelo de heterocedasticidade condicional autorregressivo, ou ARCH, em virtude do fato de que os agentes econômicos reagem não somente ao primeiro momento das variáveis macroeconômicas, mas também aos momentos superiores. O modelo ARCH é um processo estocástico autorregressivo com o objetivo de modelar a variância de uma série temporal.

Definição 4.1.7 (ARCH) *Seja X_t , com $t \in \mathbb{Z}$, o retorno ou o log-retorno de um ativo financeiro. Considere que X_t possa ser modelado pelo seguinte processo ARMA (p,q) :*

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\epsilon_t \quad (4.5)$$

em que ϵ_t é definido como:

$$\epsilon_t = \sigma_t u_t \quad (4.6)$$

onde u_t é idêntica e independentemente distribuído (iid) com média 0 e variância 1.

O processo ARCH(m) pode ser expresso como:

$$\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-i}) = \text{Var}(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-i}) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (4.7)$$

Alternativamente, defina $n_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$. Então, (4.7) pode ser reescrita como:

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + n_t \quad (4.8)$$

onde $\omega > 0$; $\alpha_i \geq 0$, $\forall i > 0$; $\mathcal{F}_{t-i}$ é o conjunto informacional disponível em $t - i$; m é a ordem do processo ARCH.

Observação 4.1.3 A equação 4.8 caracteriza o modelo ARCH(m) como um processo autorregressivo em ϵ_t^2 . Portanto, sua ordem m pode ser identificada pela FACP.

Proposição 4.1.2 $E(\sigma_t^2) = E(\epsilon_t^2)$

Prova: A Equação 4.7 resulta em :

$$\text{Var}(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-i}) = \sigma_t^2 = E(\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-i})$$

Tomando a esperança incondicional de σ_t^2 :

$$E(\sigma_t^2) = E[E(\epsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-i})]$$

Pela lei das expectativas iteradas:

$$E(\sigma_t^2) = E(\epsilon_t^2) \quad (4.9)$$

□

Proposição 4.1.3 A média incondicional de um processo ARCH(m) estacionário é:

$$\frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i}$$

Prova: da Equação 4.8, $E(\epsilon_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^m E(\epsilon_{t-i}^2)$. Como o processo é estacionário, pela Definição 3.1.4, $E(\epsilon_t^2) = E(\epsilon_{t-i}^2)$, $\forall i$. Logo:

$$E(\epsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i} \quad (4.10)$$

□

Para assegurar a não negatividade de 4.10 é suficiente que $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2 \dots m$. Para que a série seja estacionária é necessário que $\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$.

Proposição 4.1.4 *O processo $n_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$ tem média zero e não é autocorrelacionado.*

Prova: É possível reescrever n_t como $n_t = u_t^2 \sigma_t^2 - \sigma_t^2$. Então:

$$E(n_t) = \underbrace{E(u_t^2)}_1 E(\sigma_t^2) - E(\sigma_t^2) = 0$$

$$Cov(n_t, n_{t-h}) = \underbrace{E(u_t^2)}_1 E(\sigma_t^2) E(n_{t-h}) - E(\sigma_t^2) E(n_{t-h}) = 0$$

□

Proposição 4.1.5 (Excesso de Curtose) *Considere o modelo ARCH(1). O processo ϵ_t possui curtose igual a:*

$$3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 3$$

Prova: Tsay (2002). □

Corolário 4.1.1 *O parâmetro α_1 deve satisfazer à condição $0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{3}$ para um modelo ARCH(1).*

Prova: A verificação é imediata, pois o quarto momento do processo deve ser positivo. □

GARCH

Bollerslev (1986) propõe um modelo mais parcimonioso, no qual, além de um componente autorregressivo, é acrescentado um componente média móvel baseado em n_t ¹. O modelo sugerido por Bollerslev é denominado modelo de heterocedasticidade condicional autorregressivo generalizado, ou GARCH.

Definição 4.1.8 (GARCH) *O processo GARCH é definido como:*

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.11)$$

¹Apesar de n_t não ser autocorrelacionado, não é iid.

Alternativamente, substituindo $n_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$ na equação acima:

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^s \beta_j n_{t-j} + n_t \quad (4.12)$$

Observação 4.1.4 A FAC e a FACP podem ser utilizadas para identificar as ordens do modelo GARCH definido na equação 4.12.

Proposição 4.1.6 A média incondicional de um processo GARCH(m,s) estacionário é:

$$\frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i)}$$

Prova: da Equação 4.12:

$$E(\epsilon_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i) \underbrace{E(\epsilon_{t-i}^2)}_{E(\epsilon_t^2)} - \sum_{j=1}^s \beta_j \underbrace{E(n_{t-j})}_0 + \underbrace{E(n_t)}_0$$

Logo,

$$E(\epsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i)} \quad (4.13)$$

□

Para que o processo seja estacionário é necessário que $\sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Hamilton (1994) e Nelson e Cao (1992) notam que $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ são condições suficientes, mas não necessárias para a não negatividade de 4.13.

Se há a suposição de que os erros do modelo GARCH (m,s) são normalmente distribuídos, a estimação dos parâmetros pode ser feita pelo método da máxima verossimilhança condicional².

Proposição 4.1.7 (Previsão) Se a condição $\sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ é válida, a previsão de longo prazo de σ_t^2 converge em probabilidade para a média incondicional $E(\epsilon_t^2)$.

Prova: Tsay (2002) □

No modelo GARCH (m,s), o termo $E(\epsilon_t^2)$ é chamado de variância de longo prazo. A soma $\sum_{i=1}^{\max|m,s|} (\alpha_i + \beta_i)$ é denominada persistência.

²Maiores informações sobre o método de máxima verossimilhança condicional em processos GARCH (m,s) podem ser encontradas em Hamilton (1994), Wei (2006), Enders (2004) e Bueno (2008).

IGARCH

O GARCH Integrado, ou IGARCH, é um modelo no qual a variância de longo prazo não está definida e a persistência é igual a um. Trata-se de um modelo heterocedástico cujo componente autorregressivo apresenta raiz unitária.

Definição 4.1.9 (IGARCH) *O modelo IGARCH admite a seguinte representação:*

$$\sigma_t^2 = \omega + \left(1 - \sum_{i=1}^s \beta_i\right) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (4.14)$$

onde se utilizou o fato de que $\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1$.

Pode ser mostrado que a previsão de um modelo IGARCH l passos adiante, partindo de um horizonte h , depende inteiramente do valor da previsão $l - 1$ passos adiante. A prova está em Tsay (2002).

GARCH-M

Engle, Lilien e Robins (1987) propõem um modelo no qual a expectativa do retorno de um ativo depende da variância condicional. O retorno e o risco são relacionados por um coeficiente denominado prêmio de risco. O modelo originalmente formulado pelos autores estabelecia que a variância condicional seguia um processo ARCH. O modelo ficou conhecido na literatura como ARCH-M (*ARCH-in-Mean*) pelo fato da equação da variância afetar a equação da média do processo. De forma mais genérica, a equação da variância pode ser governada por um processo GARCH (Equação 4.11). Nesse caso, tem-se um modelo GARCH-M.

Definição 4.1.10 (GARCH-M) *O modelo GARCH-M admite a seguinte representação:*

$$\phi(B)X_t = \lambda \sigma_t^2 + \theta(B)\epsilon_t \quad (4.15)$$

onde σ_t^2 é o processo GARCH (m, s) definido na Equação 4.11; $\epsilon_t = \sigma_t u_t$; e λ é o prêmio de risco.

Modelos Assimétricos

Os modelos ARCH e GARCH assumem que os choques positivos e negativos (ϵ_t) produzem o mesmo efeito na volatilidade. São modelos simétricos. Black (1976) nota a tendência de que as mudanças nos preços de um ativo estejam negativamente correlacionadas com as mudanças na volatilidade desse

ativo (efeito alavancagem). Admite-se que choques negativos tendem a produzir um efeito maior na volatilidade do que choques positivos. Os modelos assimétricos medem o efeito dos choques positivos e negativos por meio do coeficiente de assimetria γ .³

Engle e Ng (1991) introduzem a Curva de Impacto de Notícias (CIN) para medir como a nova informação é incorporada nos parâmetros de volatilidade. A CIN é uma função que relaciona ϵ_{t-1} a σ_t^2 . Os autores analisam uma série de modelos assimétricos, entre eles, o GARCH exponencial (EGARCH) de Nelson (1991), o GARCH assimétrico não linear (NGARCH) e o modelo VGARCH.

Definição 4.1.11 (EGARCH) *Seja $\epsilon_t = \sigma_t u_t$. Considere a função $g(u_t)$:*

$$g(u_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma) u_t + \gamma E(|u_t|) & \text{se } u_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma) u_t + \gamma E(|u_t|) & \text{se } u_t < 0 \end{cases}$$

em que θ e γ são constantes reais e u_t é iid.

O modelo EGARCH (m, s) pode ser definido como:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_s B^s}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(u_{t-1}) \quad (4.16)$$

onde α_0 é uma constante, B é o operador de defasagem tal que $B^i g(u_t) = g(u_{t-i})$; os polinômios $1 + \beta_1 B + \dots + \beta_s B^s$ e $1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m$ têm as raízes fora do círculo unitário e não possuem fatores comuns.

A utilização da função $g(u_t)$ possibilita ao modelo responder assimetricamente a choques positivos e negativos em ϵ_t . Quando γ é negativo, *ceteris paribus*, os choques positivos geram menor volatilidade que os choques negativos (Engle e Ng, 1991). Propriedades adicionais do modelo EGARCH podem ser consultadas em Nelson (1991) e Tsay (2002).

Definição 4.1.12 (NGARCH) *O modelo NGARCH (Engle e Ng, 1991) é definido na ordem (1,1) como:*

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha (\epsilon_{t-1} + \gamma \sigma_{t-1})^2 \quad (4.17)$$

³Não confundir com a função de autocovariância γ_x .

Definição 4.1.13 (VGARCH) *O modelo VGARCH (Engle e Ng, 1991) é definido na ordem (1,1) como:*

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha \left(\frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma \right)^2 \quad (4.18)$$

De acordo com Engle e Ng (1991), os modelos NGARCH (1,1) e VGARCH (1,1) possuem o mínimo da CIN em $\epsilon_{t-1} = (-\gamma)\sigma_{t-1}$, embora a inclinação da curva seja diferente para cada modelo. O modelo EGARCH (1,1) possui mínimo em $\epsilon_{t-1} = 0$. Maiores detalhes sobre os modelos NGARCH (1,1) e VGARCH (1,1) podem ser encontrados em Engle e Ng (1991).

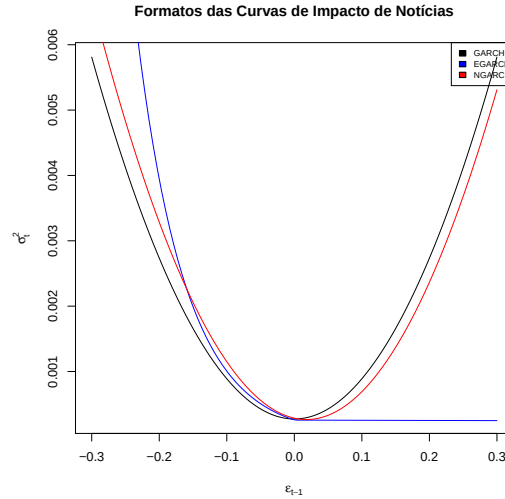
Hentschel (1995) empreende uma tentativa de unificação dos modelos heterocedásticos de ordem (1,1) em função dos parâmetros que determinam a forma da CIN. O parâmetro b determina o deslocamento da curva. Quando $b = 0$, o gráfico parte da origem, $b > 0$ significa deslocamento para a direita e $b < 0$, deslocamento para a esquerda. O parâmetro c determina a inclinação da curva, que é diferente para cada lado do ponto mínimo em $\epsilon_{t-1} = b$. Os demais parâmetros não serão abordados neste trabalho. A tabela abaixo resume os parâmetros para os modelos GARCH, EGARCH e NGARCH.

Tabela 4.1: Parâmetros da CIN para os modelos da família GARCH

b	c	Modelo
0	0	GARCH (1,1)
0	Variável	EGARCH (1,1)
Variável	0	NGARCH (1,1)

A Figura 4.1 mostra os formatos teóricos das CIN dos modelos GARCH (1,1), EGARCH (1,1) e NGARCH (1,1). Assumiu-se que $\gamma < 0$ para os modelos assimétricos. O gráfico da Figura 4.1 foi construído utilizando-se: b e c iguais a zero para o GARCH (em preto); $c > 0$ e $b = 0$ para o EGARCH (em azul); $b > 0$ e $c = 0$ para o NGARCH (em vermelho).

Figura 4.1: Formatos das Curvas de Impacto de Notícias



Pelas Curvas de Impacto de Notícias da Figura 4.1 é possível notar as seguintes características: os modelos EGARCH (1,1) e NGARCH (1,1) respondem de forma diferente a boas ($\epsilon_{t-1} > 0$) e más ($\epsilon_{t-1} < 0$) notícias, enquanto a magnitude da resposta do modelo GARCH (1,1) é indiferente a choques positivos e negativos. O impacto dos choques negativos é muito mais intenso no modelo EGARCH (1,1).

4.2 O Modelo HN-GARCH

Heston e Nandi (2000) desenvolveram um modelo heterocedástico de precificação de opções. Nesse modelo, o parâmetro de volatilidade é calculado a partir do histórico do ativo subjacente sem a necessidade de coletar volatilidades implícitas de opções semelhantes no mercado (como é o caso do modelo ad-hoc Black Scholes). O modelo HN-GARCH possui uma solução fechada, o que o diferencia de outras alternativas GARCH que exigiam métodos de simulação para obter os prêmios das opções (ver Duan, 1995). O modelo HN-GARCH (p,q) assume duas hipóteses básicas:

- **H1:** O preço do ativo subjacente, S_t , segue um processo GARCH;
- **H2:** O valor de uma opção de compra com um período para expirar obedece à fórmula de Black Scholes.

4.2.1 Modelagem do Ativo Subjacente

A Hipótese **H1** pode ser verificada na definição abaixo:

Definição 4.2.1 *O preço do ativo subjacente (incluindo juros acumulados ou dividendos) segue o processo heterocedástico abaixo:*

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t u_t \quad (4.19)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i\Delta}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (u_{t-i\Delta} - \gamma_i \sigma_{t-i\Delta})^2 \quad (4.20)$$

onde Δ é um intervalo de tempo; u_t é uma sequência iid normalmente distribuída com média zero e variância unitária, σ_t^2 é a variância condicional do log-retorno entre t e $t - \Delta$ e é conhecida do conjunto informacional em $t - \Delta$; r é a taxa de juros livre de risco no intervalo Δ ; λ é o parâmetro de prêmio de risco.

O modelo HN-GARCH (p,q) pode ser compreendido como uma justaposição dos modelos GARCH-M, NGARCH e VGARCH. O termo $\lambda\sigma_t^2$ previne a arbitragem no sentido de que o retorno do ativo rende a taxa de juros livre de risco quando a variância é zero.

Propriedades do Modelo HN-GARCH (1,1)

As propriedades a seguir serão derivadas para o processo de ordem (1,1):

Proposição 4.2.1 *A variância condicional em $t + \Delta$ possui a seguinte representação:*

$$\sigma_{t+\Delta}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \frac{(\log(S_t) - \log(S_{t-\Delta}) - r - \lambda\sigma_t^2 - \gamma_1 \sigma_t^2)^2}{\sigma_t^2} \quad (4.21)$$

Prova: A Equação 4.20 para $t + \Delta$ na ordem (1,1) do modelo é igual a:

$$\sigma_{t+\Delta}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 (u_t - \gamma_1 \sigma_t)^2 \quad (4.22)$$

Isolando u_t na Equação 4.19 resulta em:

$$u_t = \frac{\log(S_t) - \log(S_{t-\Delta}) - r - \lambda\sigma_t^2}{\sigma_t} \quad (4.23)$$

Reinserindo u_t na Equação 4.22 resulta em:

$$\sigma_{t+\Delta}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \left(\frac{\log(S_t) - \log(S_{t-\Delta}) - r - \lambda\sigma_t^2 - \gamma_1 \sigma_t^2}{\sigma_t} \right)^2$$

Logo:

$$\sigma_{t+\Delta}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \frac{(\log(S_t) - \log(S_{t-\Delta}) - r - \lambda \sigma_t^2 - \gamma_1 \sigma_t^2)^2}{\sigma_t^2}$$

o que é igual à Equação 4.21. $\square$

A Equação 4.21 mostra a variância condicional como função do preço do ativo. O parâmetro γ_1 representa a assimetria dos choques. Pode ser visualizado pela Equação 4.22 que um choque negativo ($u_t < 0$) aumenta mais a variância do que um choque positivo ($u_t > 0$).

Proposição 4.2.2 (Variância de Longo Prazo) *O processo HN-GARCH (1,1) possui variância de longo prazo igual a:*

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\omega + \alpha_1}{1 - \beta_1 - \alpha_1 \gamma_1^2} \quad (4.24)$$

Prova: Seja σ_t^2 a Equação 4.20 para o caso (1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-\Delta}^2 + \alpha_1 (u_{t-\Delta} - \gamma_1 \sigma_{t-\Delta})^2 \quad (4.25)$$

Se o processo é estacionário, $E(\sigma_t^2) = E(\sigma_{t-\Delta}^2)$. Além disso, $u_t \sim iid N(0, 1)$. Tomando a esperança de ambos os lados:

$$E(\sigma_t^2) = \omega + \beta_1 \underbrace{E(\sigma_{t-\Delta}^2)}_{E(\sigma_t^2)} + \alpha_1 \underbrace{E(u_{t-\Delta}^2)}_1 - 2\alpha_1 \underbrace{E(u_{t-\Delta})}_0 \gamma_1 E(\sigma_{t-\Delta}) + \alpha_1 \gamma_1^2 \underbrace{E(\sigma_{t-\Delta}^2)}_{E(\sigma_t^2)}$$

Logo:

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\omega + \alpha_1}{1 - \beta_1 - \alpha_1 \gamma_1^2}$$

$\square$

Corolário 4.2.1 (Persistência) *Para que o processo HN-GARCH (1,1) seja estacionário é necessário que:*

$$\beta_1 + \alpha_1 \gamma_1^2 < 1 \quad (4.26)$$

Prova: A condição $\beta_1 + \alpha_1 \gamma_1^2 < 1$ é necessária para que a variância de longo prazo na Equação 4.24 esteja definida. $\beta_1 + \alpha_1 \gamma_1^2$ é a persistência do processo. $\square$

É possível observar pela Equação 4.25 que, se $\alpha_1 = 0$, a equação da variância segue um processo determinístico. Se $\alpha_1 = 0$ e $\beta_1 = 0$, a variância é constante e o processo se aproxima do modelo Black Scholes tradicional em tempo discreto.

Proposição 4.2.3 *Se o processo possui ordem (1,1), o log-retorno do ativo e a variância estão correlacionados da seguinte forma:*

$$Cov_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right), \sigma_{t+\Delta}^2 \right] = -2\alpha_1\gamma_1\sigma_t^2 \quad (4.27)$$

Prova: A Equação 4.27 pode ser expressa como:

$$E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \times \sigma_{t+\Delta}^2 \right] - \left\{ E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \right] \times E_{t-\Delta} (\sigma_{t+\Delta}^2) \right\} \quad (4.28)$$

Pelas Equações 4.19 e 4.22:

$$\begin{aligned} E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \times \sigma_{t+\Delta}^2 \right] &= \\ &= E_{t-\Delta} \left[(\omega + \beta_1\sigma_t^2 + \alpha_1(u_t - \gamma_1\sigma_t)^2) (r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t u_t) \right] \\ &= r\omega + r\beta_1\sigma_t^2 + r\alpha_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t^2)}_1 - 2r\alpha_1\gamma_1\sigma_t \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 + r\alpha_1\gamma_1^2\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t^2\omega + \\ &+ \lambda\sigma_t^4\beta_1 + \lambda\sigma_t^2\alpha_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t^2)}_1 - 2\lambda\sigma_t^3\alpha_1\gamma_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 + \lambda\sigma_t^4\alpha_1\gamma_1^2 + \sigma_t\omega \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 + \\ &+ \sigma_t^3\beta_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 + \sigma_t\alpha_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t^3)}_0 - 2\alpha_1\gamma_1\sigma_t^2 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t^2)}_1 + \sigma_t^3\alpha_1\gamma_1^2 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 \end{aligned}$$

Pela Equação 4.19:

$$E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \right] = r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t \underbrace{E_{t+\Delta}(u_t)}_0 \quad (4.29)$$

Pela Equação 4.22:

$$E_{t-\Delta} (\sigma_{t+\Delta}^2) = \omega + \beta_1\sigma_t^2 + \alpha_1 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t^2)}_1 - 2\alpha_1\gamma_1\sigma_t^2 \underbrace{E_{t-\Delta}(u_t)}_0 + \alpha_1\gamma_1^2\sigma_t^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \right] \times E_{t-\Delta} (\sigma_{t+\Delta}^2) = \\ = r\omega + r\beta_1\sigma_t^2 + r\alpha_1 + r\alpha_1\gamma_1^2\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t^2\omega + \lambda\sigma_t^4\beta_1 + \lambda\sigma_t^2\alpha_1 + \lambda\sigma_t^4\alpha_1\gamma_1^2 \end{aligned}$$

Aplicando a Equação 4.28 e cancelando os termos em comum:

$$\begin{aligned} E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \times \sigma_{t+\Delta}^2 \right] - \left\{ E_{t-\Delta} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right) \right] \times E_{t-\Delta} (\sigma_{t+\Delta}^2) \right\} = \\ = -2\alpha_1\gamma_1\sigma_t^2 \end{aligned}$$

□

Segundo a Proposição 4.2.3, se o valor de γ_1 for positivo, então existe uma correlação negativa entre o log-retorno do ativo subjacente e a volatilidade.

Proposição 4.2.4 (Convergência em Tempo Contínuo) *Seja $v_t = \frac{\sigma_t^2}{\Delta}$ a variância por unidade de tempo. Pode ser demonstrado que, à medida que $\Delta \rightarrow 0$, os processos:*

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t u_t \quad (4.30)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1\sigma_{t-\Delta}^2 + \alpha_1(u_{t-\Delta} - \gamma_1\sigma_{t-\Delta})^2 \quad (4.31)$$

Convergem respectivamente para:

$$d \log(S_t) = (r + \lambda v_t)dt + \sqrt{v_t}du_t \quad (4.32)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + s\sqrt{v_t}du_t \quad (4.33)$$

Prova: Heston e Nandi (2000). □

A Equação 4.33 representa o modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993). Os parâmetros k , θ e s são constantes. du_t é um processo Wiener; k mede a velocidade de ajuste de v_t a seu termo de longo prazo θ (ver Cox, Ingersoll e Ross, 1985); s é a volatilidade de v_t .

Risco Neutro

Para que as opções possam ser precificadas é necessário que se faça alguma consideração sobre o parâmetro λ , o prêmio de risco. De acordo com a Proposição 4.2.4, o preço do ativo subjacente depende diretamente da magnitude de λ . Em um ambiente de risco neutro assume-se que as opções sejam descontadas pela taxa de juros livre de risco, r , e que o preço do ativo obedeça alguma distribuição de probabilidades sob risco neutro.

As Equações 4.19 e 4.20 podem ser reescritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t u_t^* \quad (4.34)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i\Delta}^2 + \sum_{i=2}^q \alpha_i (u_{t-i\Delta} - \gamma_i \sigma_{t-i\Delta})^2 + \alpha_1 (u_{t-\Delta}^* - \gamma_1^* \sigma_{t-\Delta})^2 \quad (4.35)$$

onde $\lambda = -\frac{1}{2}$, $u_t^* = u_t + (\lambda + \frac{1}{2})\sigma_t$ e $\gamma_1^* = \gamma_1 + \lambda - \frac{1}{2}$.

Note que o preço do ativo subjacente aparentemente não depende mais do prêmio de risco, λ .

Proposição 4.2.5 *Seja $v_t = \frac{\sigma_t^2}{\Delta}$ a variância por unidade de tempo. Pode ser demonstrado que, à medida que $\Delta \rightarrow 0$, os processos:*

$$\log(S_t) = \log(S_{t-\Delta}) + r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sigma_t u_t^* \quad (4.36)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-\Delta}^2 + \alpha_1 (u_{t-\Delta} - \gamma_1 \sigma_{t-\Delta})^2 \quad (4.37)$$

Convergem respectivamente para:

$$d \log(S_t) = (r - \frac{v_t}{2})dt + \sqrt{v_t} du_t^* \quad (4.38)$$

$$dv_t = \left[k(\theta - v_t) + s \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) v_t \right] dt + s \sqrt{v_t} du_t^* \quad (4.39)$$

Prova: Heston e Nandi (2000). $\square$

Corolário 4.2.2 *Se $\lambda = -0,5$, as taxas de crescimento das médias das Equações 4.32 e 4.33 são iguais, respectivamente, às das Equações 4.38 e 4.39. Os processos Wiener associados a cada ambiente de risco, entretanto, são diferentes.*

Prova: A verificação é imediata. $\square$

De acordo com a Definição 4.2.1, $u_t \sim N(0, 1)$. Para que a distribuição de u_t^* também tenha uma distribuição normal padrão é preciso adotar a Hipótese **H2**, descrita no início da seção. A Hipótese **H2** significa que o valor de uma opção de compra a um período antes da maturidade deve obedecer à fórmula de Black Scholes. Essa hipótese é adotada para que o preço do ativo possa ter uma distribuição lognormal por um único período. Assim, é possível encontrar uma variável aleatória u_t^* que possua uma distribuição normal padrão no ambiente de risco neutro. Maiores detalhes em Rubinstein (1973) e Brennan (1979).

4.2.2 Fórmulas de Precificação

Para obter as fórmulas de precificação das opções, Heston e Nandi (2000) utilizam a inversa da função característica do logaritmo do preço do ativo subjacente. Os conceitos a seguir são importantes para se compreender as etapas das fórmulas de precificação.

Conceitos Prévios

Definição 4.2.2 (Função Geratriz de Momentos) *Seja x uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade p . A função geratriz de momentos de x é:*

$$m_x(\phi) = E(e^{\phi x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\phi x} p(x) dx$$

Ou, alternativamente:

$$m_x(\phi) = E(e^{\phi x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\phi x} F\{dx\}$$

onde x e ϕ são números reais; F é a distribuição de x . Referência: Meyer (1982).

Definição 4.2.3 (Função Característica) *Seja x uma v.a. contínua não negativa com distribuição de probabilidades F . A função característica de x é a função f definida para um número real ϕ :*

$$f_x(\phi) = E(e^{i\phi x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} F\{dx\} = u(\phi) + iv(\phi) \quad (4.40)$$

em que $i = \sqrt{-1}$; $u(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\phi x) F\{dx\}$, $iv(\phi) = i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\phi x) F\{dx\}$.

A soma $u(\phi) + iv(\phi)$ resultou da aplicação da fórmula de Euler à função $f_x(\phi)$. Uma forma equivalente de expressar a Equação 4.40 consiste em considerar a densidade p da distribuição F :

$$f_x(\phi) = E(e^{i\phi x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} p(x) dx$$

A equação acima é também conhecida como transformada de Fourier. A função f apresenta algumas propriedades:

Lema 4.2.1 *Seja $f = u + iv$ a função característica da variável aleatória x com distribuição F . Então:*

- i) f é contínua;*
- ii) $f(0) = 1$ e $|f(\phi)| \leq 1, \forall \phi$;*
- iii) $aX + b$ possui a função característica $E(e^{i\phi(aX+b)}) = e^{ib\phi} f(a\phi)$;*
- iv) $\bar{f}$ é o conjugado de f e, em particular, $\bar{f} = u - iv$ é a função característica de $-x$;*
- v) u é par e v é ímpar. A função característica é real se, e somente se, F é simétrica;*
- vi) Para todo ϕ , $0 \leq 1 - u(2\phi) \leq 4[1 - u(\phi)]$.*

Prova: Feller (1970). $\square$

Teorema 4.2.1 (Inversão) *Seja F uma distribuição com função característica f . É possível demonstrar que:*

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi) \frac{1 - e^{-i\phi x}}{i\phi} e^{-i\phi x} d\phi$$

Prova: Kendall e Stuart (1977). $\square$

Isolando $F(x)$ no lado esquerdo da equação do Teorema 4.2.1 resulta em:

Teorema 4.2.2

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\phi x} f(-\phi) - e^{-i\phi x} f(\phi)}{i\phi} d\phi$$

Prova: Gil-Pelaez (1951). $\square$

Fórmulas Analíticas de Precificação

Proposição 4.2.6 *Seja S_t o preço do ativo subjacente e $x(T) = \log(S_T)$, onde $T > t$. A função geratriz de momentos de $x(T)$ corresponde a:*

$$m_{x(T)}(\phi) = E \left[e^{\phi \log(S_T)} \right] \quad (4.41)$$

Prova: Aplicação da Definição 4.2.2. $\square$

Proposição 4.2.7 *A função geradora de momentos $m_x(\phi)$ assume a forma abaixo:*

$$m_{x(T)}(\phi) = \exp \left[\begin{aligned} &\phi x(t) + A(t; T, \phi) + \sum_{i=1}^p B_i(t; T, \phi) \times \\ &\times \sigma^2(t + 2\Delta - i\Delta) + \sum_{i=1}^{q-1} C_i(t; T, \phi) \times \\ &\times \left(u(t + \Delta - i\Delta) - \gamma_i \sqrt{\sigma^2(t + \Delta - i\Delta)} \right)^2 \end{aligned} \right] \quad (4.42)$$

Como $x(T)$ é conhecido em T , as Equações 4.41 e 4.42 exigem a seguinte condição:

$$A(T; T, \phi) = B_i(T; T, \phi) = C_i(T; T, \phi) = 0$$

Os coeficientes $A(\cdot)$, $B_i(\cdot)$ e $C_i(\cdot)$ são tais que:

$$A(t; T, \phi) = A(t + \Delta; T, \phi) + \phi r + B_1(t + \Delta; T, \phi) \omega - \frac{1}{2} \log [1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta; T, \phi) - 2C_1(t + \Delta; T, \phi)]$$

$$B_1(t; T, \phi) = \phi(\lambda + \gamma_1) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \beta_1 B_1(t + \Delta; T, \phi) + B_2(t + \Delta; T, \phi) + \frac{1/2(\phi - \gamma_1)^2}{1 - 2\alpha_1 B_1(t + \Delta; T, \phi) - 2C_1(t + \Delta; T, \phi)}$$

$$B_i(t; T, \phi) = \beta_1 B_1(t + \Delta; T, \phi) + B_{i+1}(t + \Delta; T, \phi) \quad , \text{ para } 1 < i \leq p$$

$$C_i(t; T, \phi) = \alpha_{i+1} B_1(t + \Delta; T, \phi) + C_{i+1}(t + \Delta; T, \phi) \quad , \text{ para } 1 < i \leq q - 1$$

Prova: Heston e Nandi (2000). $\square$

Proposição 4.2.8 *Se a função característica de $x(T)$ é $f_{x(T)}(\phi)$, então:*

$$E \{ \max [S(T) - K, 0] \} = f(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{K^{-i\phi} f_{x(T)}(i\phi+1)}{i\phi f_{x(T)}(1)} \right] d\phi \right) - K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{K^{-i\phi} f_{x(T)}(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \right) \quad (4.43)$$

onde $i = \sqrt{-1}$; K é o preço de exercício; $\Re[\cdot]$ denota a parte real de um número complexo.

Prova: Heston e Nandi (2000)⁴. $\square$

⁴Na prova foi realizada a inversão de $f_{x(T)}(\phi)$.

O valor de uma opção de compra é simplesmente o valor presente do *payoff* $E \{\max [S(T) - K, 0]\}$ descontado pela taxa de juros livre de risco, r . Portanto, são utilizadas as probabilidades e a função característica $f_{x(T)}^*(i\phi)$ do ambiente de risco neutro. Segue abaixo o corolário da Proposição 4.2.8, que mostra como é o cálculo de uma opção de compra pelo modelo HN-GARCH:

Corolário 4.2.3 (Prêmio de uma Opção de Compra) *No prazo $t < T$ uma opção de compra europeia de strike K e maturidade em T possui o seguinte prêmio:*

$$c = e^{-r(T-t)} E \{\max [S(T) - K, 0]\} = S(T)p(1) - Ke^{-r(T-t)}p(2) \quad (4.44)$$

onde:

$$p(1) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi S(T)} \int_0^\infty \Re \left[\frac{K^{-i\phi} f_{x(T)}^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi$$

$$p(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{K^{-i\phi} f_{x(T)}^*(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

Prova: Heston e Nandi (2000). $\square$

A probabilidade $p(1)$ é o delta da opção de compra, ao passo que $p(2)$ é a probabilidade de risco neutro do preço do ativo subjacente ser maior que K , o preço de exercício, na maturidade. O valor de uma opção de venda pode ser conhecido aplicando-se a paridade *call-put*, conforme explicado no capítulo teórico sobre opções.

Capítulo 5

Aplicação

Neste capítulo é feita uma aplicação com base nas teorias desenvolvidas nos capítulos anteriores. São precificadas as opções de compra baseadas em ações preferenciais da Petrobras (Petr4), cujo período de precificação abrange de 01/02/2011 até a maturidade, 21/03/2011. O capítulo está dividido da seguinte forma: na primeira seção é apresentado o conjunto de dados; na segunda seção há uma aplicação do modelo de Black Scholes (1973), em que são calculadas as medidas de sensibilidade e os prêmios das opções; na terceira seção há uma aplicação da versão *ad-hoc* (Dumas, Fleming e Whaley, 1998) do modelo Black Scholes. Os parâmetros da equação de regressão especificada em 3.25 são estimados com o objetivo de se encontrar uma medida variável de volatilidade. Em seguida, também são calculados os prêmios e as medidas de sensibilidade das opções de compra; a quarta seção consiste na análise da série temporal do ativo subjacente às opções e no ajuste do modelo HN-GARCH (Heston e Nandi, 2000) de precificação; na última seção há uma síntese dos resultados dos três modelos e uma análise comparativa com base em medidas de erro de predição. O melhor modelo é aquele que resulta em prêmios mais próximos dos preços de mercado. Os resultados são analisados primeiramente para todo o conjunto de opções e, em seguida, para opções classificadas segundo os deltas. Conclui-se que os modelos *ad-hoc* Black Scholes e HN-GARCH superam a versão tradicional de Black Scholes no conjunto das opções em estudo. Para opções dITM, ITM e dOTM o modelo escolhido foi o *ad-hoc* Black Scholes; para as opções ATM e OTM o modelo que produziu os melhores resultados foi o HN-GARCH.

5.1 Dados

As seguintes informações são comuns a todos os modelos de precificação de opções utilizados neste trabalho:

- **Opções:** será precificado um conjunto de 326 opções de compra baseadas em ações preferenciais da Petrobras (Petr4). O período de precificação consiste em 33 dias úteis; a data de vencimento das opções é 21/03/2011 ($t = 0$), com referência em 01/02/2011 ($t = 32$).

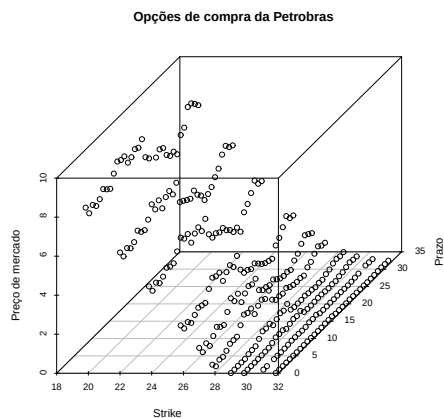
A Tabela 5.1 sintetiza as classes de opções de compra, os *strikes*, o número de opções a serem precificadas e o preço médio de mercado de cada opção durante o período considerado¹.

Tabela 5.1: Conjunto de opções			
Opção	Strike	Obs.	Preço médio
PETRC20	R\$ 19,83	32	R\$ 8,17
PETRC22	R\$ 22,00	33	R\$ 5,96
PETRC24	R\$ 23,83	33	R\$ 4,19
PETRC26	R\$ 25,83	33	R\$ 2,30
PETRC27	R\$ 27,00	33	R\$ 1,34
PETRC28	R\$ 27,83	33	R\$ 0,77
PETRC29	R\$ 29,00	33	R\$ 0,29
PETRC30	R\$ 29,83	33	R\$ 0,15
PETRC31	R\$ 30,83	30	R\$ 0,07
PETRC32	R\$ 31,83	33	R\$ 0,04
TOTAL		326	

A Figura 5.1 mostra os 326 *payoffs* empíricos em função dos preços de mercado, dos *strikes* e dos prazos. O gráfico se assemelha ao *payoff* teórico de uma *put* pelo fato de serem utilizados os *strikes*, ao invés do preço do ativo subjacente, como variável explicativa.

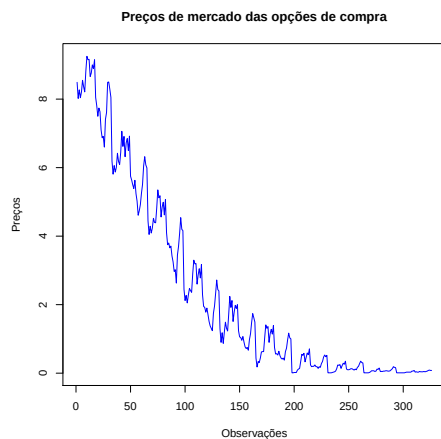
¹Fontes de dados: www.bmf.com.br e www.comdinheiro.com.br

Figura 5.1: *Payoffs* observados



O objetivo dos modelos de precificação consiste em mimetizar os *payoffs* empíricos visualizados na figura acima, isto é, os prêmios resultantes dos modelos devem ser os mais próximos possíveis dos preços observáveis de mercado, que são as variáveis mais importantes para se testar a validade de um modelo de precificação. Segue abaixo o gráfico dos 326 *payoffs*, em sua forma bidimensional, expresso pelos preços de mercado.

Figura 5.2: Preços de mercado das opções de compra



As opções se encontram ordenadas segundo os *strikes* e sofrem, implicitamente, a influência do preço do ativo subjacente (Figura 5.3) no decorrer do

prazo até o vencimento (eixo do gráfico da Figura 5.1).

- **Taxa de desconto:** a taxa de desconto é fixada em 11,1583% ao ano.

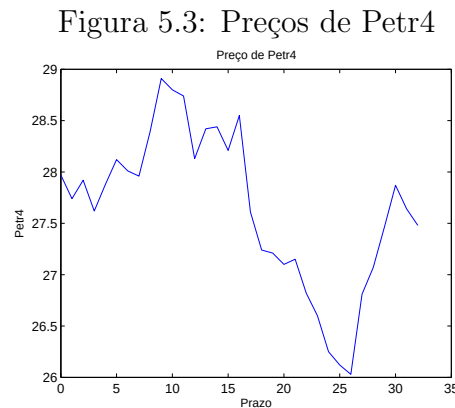
O cálculo da taxa de retorno é efetuado por uma técnica de interpolação simples². A expectativa do DI futuro³, com referência em 31 de janeiro de 2011, para 21/02/2011 era de aproximadamente 11,16% a.a. (18 dias úteis até o vencimento das opções); para 31/03/2011, de exatos 11,15% a.a. (8 dias úteis além do vencimento das opções). Então:

$$r = \left(11,1619298583127 \times \frac{18}{26} \right) + \left(11,15 \times \frac{8}{26} \right) = 11,1583$$

onde r é a taxa livre de risco esperada em 21/03/2011. Essa taxa será utilizada como taxa de desconto em todos os modelos de precificação de opções aplicados neste trabalho.

- **Ativo subjacente:** ações preferenciais da Petrobras (Petr4).

A Figura 5.3 mostra a série temporal de preços do ativo referente ao período de precificação das opções (total de 33 observações, onde $t = 0$ é a data de vencimento).

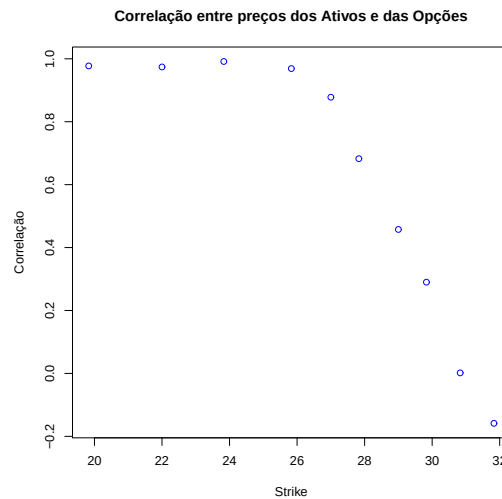


²Azevedo (2010).

³Fonte de dados: www.bmf.com.br

Existe uma correlação entre os preços do ativo e os preços de mercado das opções, isto é, entre os gráficos da Figura 5.1 e da Figura 5.3 para cada ponto do tempo. A Figura 5.4 mostra a correlação entre os preços do ativo subjacente e os preços das opções em todo o prazo até o vencimento. A correlação está calculada para cada um dos *strikes* da Tabela 5.1. Nota-se que, tendencialmente, a correlação é tanto mais forte quanto menor o *strike*. A correlação média para todo o conjunto de opções, sem considerar a divisão entre os *strikes*, é de 0,61.

Figura 5.4: Correlação preços de Petr4 x preços das opções



Não é necessária mais nenhuma informação da série de preços e log-retornos do ativo subjacente, exceto: 1) para o cálculo da volatilidade histórica utilizada no modelo Black Scholes tradicional; 2) para o ajuste do modelo HNGARCH, que utiliza uma série histórica de log-retornos do ativo.

5.2 Black Scholes

Constituem as entradas (*inputs*) do modelo Black Scholes (1973) a volatilidade histórica e todos os itens descritos na seção anterior.

- **Volatilidade:** será utilizada a volatilidade histórica dos log-retornos reais (deflacionados pelo IPCA) do ativo subjacente no período retrospectivo de 33 dias, a partir de 31/01/2011.

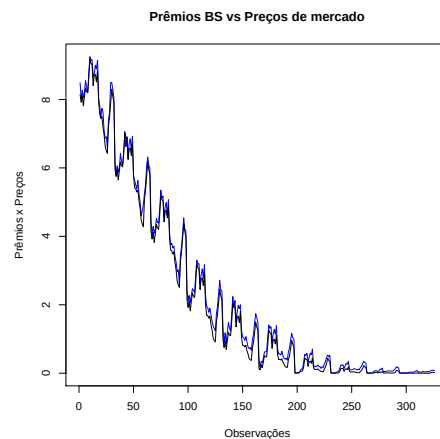
O cálculo da volatilidade histórica é efetuado pela aplicação da fórmula de volatilidade efetiva anualizada.

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{[\sum_{i=1}^{33} (y_i - \bar{y})]^2}{32}} = \sqrt{\frac{0,0047509}{32}} = 0,0121846$$

onde o y_i é a série de log-retornos reais de Petr4, $\bar{y}$ é a média amostral da série no período de 33 dias e σ_d é o desvio-padrão diário da amostra. A volatilidade efetiva anualizada é $\sigma = \sigma_d \sqrt{252}$ (252 dias úteis no ano), portanto $0,0121846 \times \sqrt{252} = 0,1934$ ao ano, ou 19,34% a.a..

Ao inserir o parâmetro constante de volatilidade histórica nas fórmulas de precificação do modelo, são obtidos (vide as Equações 3.17, 3.18, 3.19 e 3.20) os 326 prêmios das opções de compra da Tabela 5.1, visualizados no gráfico abaixo:

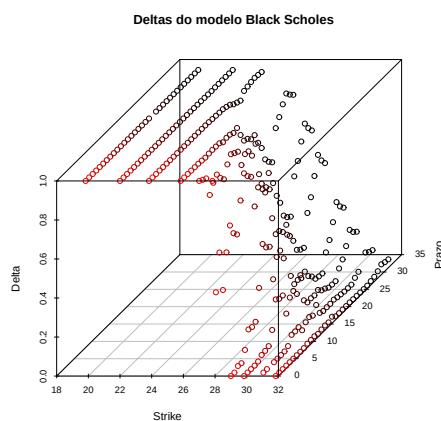
Figura 5.5: Premios por Black Scholes vs Preços de mercado



O gráfico de preços de mercado está em azul. É uma reprodução da Figura 5.2. O gráfico dos prêmios das opções de compra calculados pelo modelo Black Scholes está em preto. Nota-se que, em geral, há uma subestimação dos prêmios em relação aos preços de mercado.

As Figuras abaixo mostram o comportamento dos deltas e dos gamas calculados pelo modelo Black Scholes. Os gráficos são plotados em função do prazo (os valores próximos do vencimento, em $t = 0$, estão em vermelho) e dos *strikes*.

Figura 5.6: Deltas do modelo Black Scholes



O gráfico dos deltas calculados pelo modelo Black Scholes apresenta as características típicas dos deltas teóricos de uma opção. É possível observar a influência significativa dos preços do ativo subjacente por meio da Figura 5.3: quando os preços de Petr4 caem, os deltas acompanham o movimento na mesma direção, e vice-versa. Isso é evidente no gráfico para quando o prazo está próximo de 10 (alta do ativo) e de 26 (a ação está em baixa).

Os gamas são maiores para opções ATM e possuem a propriedade de aumentar de valor para esse tipo de opção quando se está perto do vencimento. É por essa razão que os deltas são mais sensíveis ao movimento de preços do ativo subjacente para opções ATM.

Figura 5.7: Gamas do modelo Black Scholes

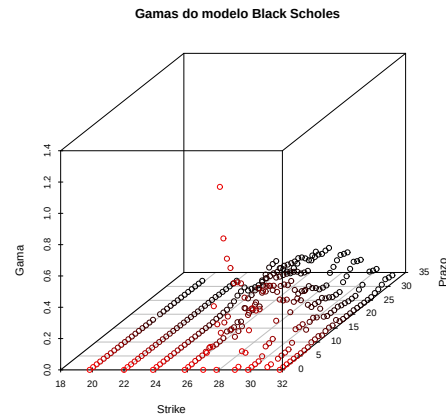


Tabela 5.2: Prêmios e letras gregas médios do modelo Black Scholes

Opção	Prêmio médio	Δ médio	Γ médio
PETRC20	R\$ 7,97	1,0000	4,7e-07
PETRC22	R\$ 5,80	0,9998	3,6e-04
PETRC24	R\$ 3,99	0,9927	0,0106
PETRC26	R\$ 2,08	0,9104	0,0805
PETRC27	R\$ 1,11	0,7617	0,1843
PETRC28	R\$ 0,57	0,5465	0,3162
PETRC29	R\$ 0,18	0,2120	0,1955
PETRC30	R\$ 0,07	0,0933	0,1085
PETRC31	R\$ 0,02	0,0287	0,0419
PETRC32	R\$ 0,00	0,0071	0,0114

5.3 ad hoc Black Scholes

Constituem as entradas (*inputs*) do modelo Black Scholes modificado, ou ad-hoc Black Scholes (Dumas, Fleming e Whaley, 1998), o vetor de 326 volatilidades calculadas e todos os itens descritos na seção 5.1.

- **Volatilidade:** a volatilidade será uma função do *strike* e do prazo até o vencimento de cada opção.

Etapas para o cálculo das volatilidades: 1) obter o vetor endógeno de volatilidades implícitas passadas σ_n ; 2) especificar a equação de regressão e estimar o modelo pelo método dos mínimos quadrados ordinários; 3) prever a volatilidade de cada opção por meio de seu *strike* e prazo.

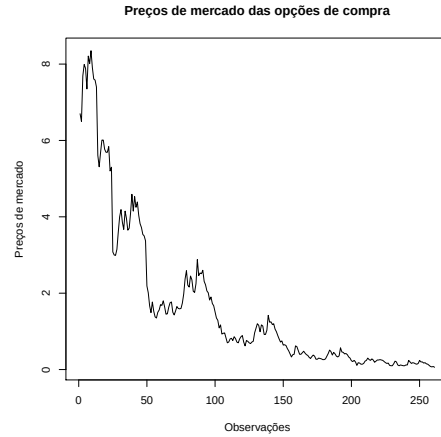
Etapa 1: a Tabela 5.3 mostra 261 opções de compra de mesmos *strikes* e data de vencimento das opções listadas na Tabela 5.1. Foram coletadas opções do período entre 18/11/2010 e 28/01/2011.

Tabela 5.3: Opções e períodos de apuração da variável endógena σ_n

Opção	Período considerado	Obs.
PETRC20	de 21/12/2010 a 27/01/2011	13
PETRC22	de 03/01/2011 a 27/01/2011	11
PETRC24	de 21/12/2010 a 28/01/2011	25
PETRC26	de 18/11/2010 a 28/01/2011	49
PETRC27	de 18/01/2011 a 28/01/2011	7
PETRC28	de 23/11/2010 a 28/01/2011	45
PETRC29	de 18/01/2011 a 28/01/2011	8
PETRC30	de 19/11/2010 a 28/01/2011	45
PETRC31	de 17/12/2010 a 28/01/2011	27
PETRC32	de 07/12/2010 a 28/01/2011	31
TOTAL		261

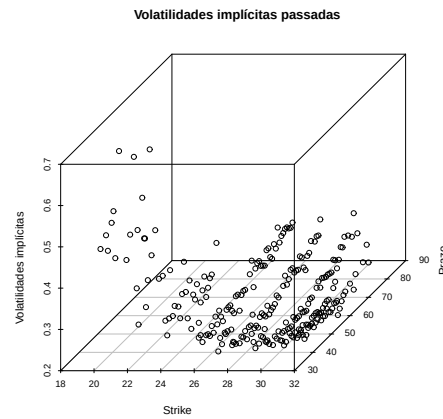
A Figura 5.8 mostra os preços de mercado das opções acima.

Figura 5.8: Preços das opções da Tabela 5.3



Para encontrar o vetor σ_n é utilizado o algoritmo de Newton-Raphson com as seguintes entradas: os preços de mercado das opções, seus respectivos *strikes* e prazos. A taxa de desconto não representa uma expectativa de DI futuro; consiste na taxa de juros observada do DI⁴ em cada t . Portanto, somente neste caso, será empregada uma taxa de desconto variável.

Figura 5.9: Smile de volatilidade do vetor σ_n



⁴Fonte de dados: www.cetip.com.br

Pode-se notar que o gráfico da Figura 5.9 reúne as características típicas do *smile* de volatilidade⁵.

Etapa 2: foram ajustados os três modelos de volatilidade variável sugeridos na Definição 3.2.1. A tabela abaixo resume os resultados. O melhor modelo é aquele que resulta no menor critério de Akaike (AIC)⁶ e no maior R^2 ajustado⁷.

Tabela 5.4: Escolha do melhor modelo de volatilidade

Modelo	AIC	R^2
Modelo 2:	−935,46	0,6543
Modelo 3:	−999,30	0,7314
Modelo 4:	−1029,00	0,7611

A Tabela 5.5 mostra as estimativas do modelo 4. Os erros-padrão estão na segunda coluna, entre parênteses.

Tabela 5.5: Estimativas do modelo de volatilidade

Parâmetro	Estimativa	Estatística t
$\hat{\beta}_0$	3,0219519 (0,1451)	20,83
$\hat{\beta}_1$	−0,1804136 (0,0095)	−18,99
$\hat{\beta}_2$	0,0030656 (0,0002)	16,79
$\hat{\beta}_3$	−2,0587115 (0,5674)	−3,63
$\hat{\beta}_4$	4,4757144 (0,7796)	5,741
$\hat{\beta}_5$	0,0166441 (0,01637)	1,017

⁵Ver o capítulo teórico sobre opções.

⁶Para maiores informações sobre o critério de Akaike, conferir Enders (2004).

⁷Detalhes sobre o R^2 ajustado em Gujarati (2004).

O parâmetro $\hat{\beta}_5$ não é significativo a 5%. Logo, o modelo pode ser reestimado sem a presença desse parâmetro. Os parâmetros reestimados estão sintetizados na Tabela 5.6.

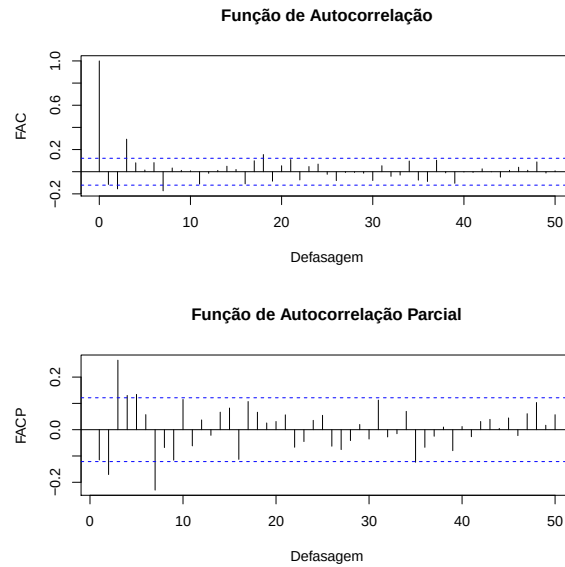
Tabela 5.6: Reestimativas do modelo de volatilidade

Parâmetro	Estimativa	Estatística t
$\hat{\beta}_0$	2,9635053 (0,1332)	22,25
$\hat{\beta}_1$	-0,1795192 (0,0095)	-18,98
$\hat{\beta}_2$	0,0031093 (0,0002)	17,52
$\hat{\beta}_3$	-1,6016595 (0,3461)	-4,63
$\hat{\beta}_4$	4,4912236 (0,7795)	5,76
AIC	-1030,00	
R^2	0,7612	

A Figura 5.10 apresenta as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) dos resíduos padronizados.

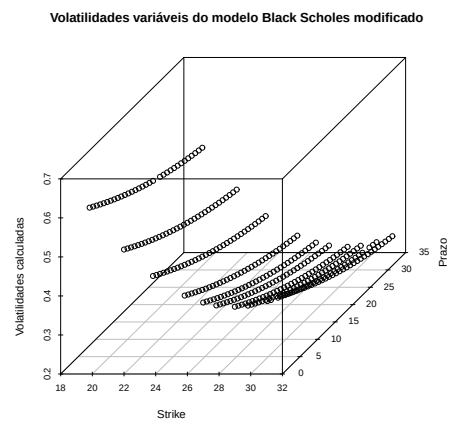
O gráfico da função de autocorrelação dos resíduos padronizados indica que a série é estacionária, embora se deva registrar a presença de um pequeno grau de autocorrelação nos resíduos padronizados do modelo. Os testes de Shapiro-Wilk (1965) e Jarque-Bera (1987) apresentam, respectivamente, as estatísticas $W = 0,8153$ e $\chi^2 = 1337,34$, ambas com p-valor menor que $2,2e-16$, o que confirma a não normalidade dos resíduos padronizados. Segundo Dumas, Fleming e Whaley (1998), o objetivo da equação de regressão da volatilidade consiste em testar uma forma funcional empírica para o parâmetro σ . Essa forma funcional deve relacionar diretamente a volatilidade, os preços de exercício e os prazos (cujos parâmetros são significantes). Por essa razão, a forma funcional do modelo será mantida.

Figura 5.10: FAC e FACP dos resíduos padronizados



Etapa 3: com base nas estimativas da Tabela 5.6 são apresentadas, na figura abaixo, as 326 volatilidades calculadas para cada opção da Tabela 5.1 em função dos respectivos *strikes* e prazos.

Figura 5.11: Volatilidades do modelo ad-hoc Black Scholes



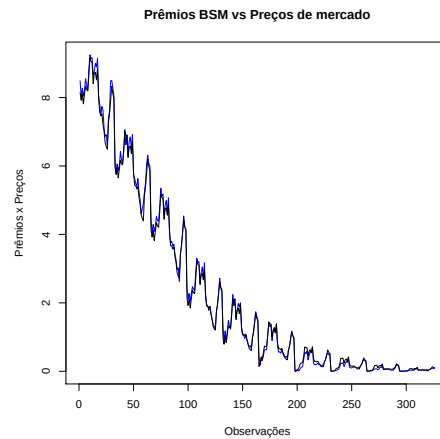
As volatilidades da Figura 5.11 foram previstas pelo modelo estimado na Tabela 5.6. O exemplo abaixo mostra o cálculo da volatilidade de uma opção por esse método.

Exemplo 5.3.1 *A opção PETRC29 possui strike de R\$ 29,00. No dia 01/02/2011, $t = 32$. O prazo anualizado é, portanto, $\frac{32}{252} = 0,127$. Ao inserir os valores do prazo e do strike na equação de regressão é encontrada a seguinte volatilidade:*

$$\hat{\sigma} = \hat{\beta}_0 + \left[\hat{\beta}_1(29) \right] \left[\hat{\beta}_2(29)^2 \right] + \left[\hat{\beta}_3(0,127) \right] + \left[\hat{\beta}_4(0,127)^2 \right] = 0,2414$$

Ao inserir os parâmetros de volatilidade calculados nas fórmulas de precificação do modelo são obtidos os 326 prêmios das *calls* da Tabela 5.1.

Figura 5.12: Prêmios por ad-hoc Black Scholes vs Preços de mercado



De modo análogo ao da seção anterior, o gráfico acima apresenta os prêmios obtidos pelo modelo ad-hoc Black Scholes em preto; os preços de mercado das opções estão em azul. Nota-se que a série de prêmios se ajusta bem aos preços de mercado, uma vez que as duas linhas estão quase sobrepostas.

As Figuras 5.13 e 5.14 contêm os gráficos dos deltas e dos gamas resultantes do modelo ad-hoc Black Scholes. Os valores mais próximos do vencimento estão em vermelho. Repare que o comportamento dos deltas e gamas é similar ao do modelo Black Scholes tradicional.

Figura 5.13: Deltas do modelo ad-hoc Black Scholes

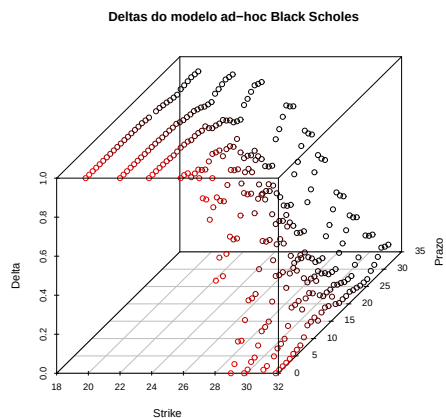
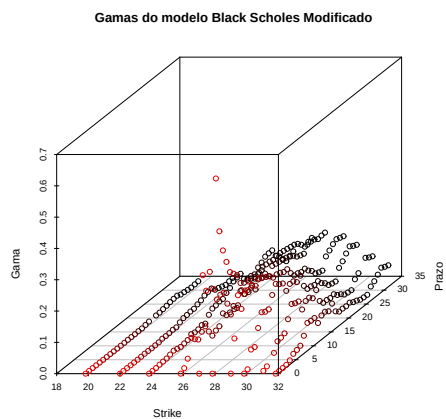


Figura 5.14: Gamas do modelo ad-hoc Black Scholes



A Tabela 5.7 sintetiza as informações das médias dos prêmios e das medidas de sensibilidade para o período em análise. Os deltas médios do modelo ad-hoc são menores que os do modelo tradicional, mas se tornam maiores à medida que as opções vão saindo do dinheiro. Embora a Figura 5.14, comparativamente à Figura 5.7, evidencie que os gamas do modelo ad-hoc são menores que os obtidos pelo Black Scholes tradicional, os gamas médios do modelo ad-hoc são menores apenas para opções ATM, conforme mostra a coluna da direita da Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Prêmios e letras gregas médios do modelo ad-hoc Black Scholes

Opção	Prêmio médio	Δ médio	Γ médio
PETRC20	R\$ 7,98	0,9903	0,0055
PETRC22	R\$ 5,83	0,9799	0,0130
PETRC24	R\$ 4,05	0,9514	0,0323
PETRC26	R\$ 2,21	0,8471	0,0943
PETRC27	R\$ 1,30	0,6987	0,1694
PETRC28	R\$ 0,79	0,5373	0,2115
PETRC29	R\$ 0,35	0,2808	0,1697
PETRC30	R\$ 0,19	0,1698	0,1198
PETRC31	R\$ 0,09	0,0936	0,0763
PETRC32	R\$ 0,05	0,0481	0,0421

5.4 HN-GARCH

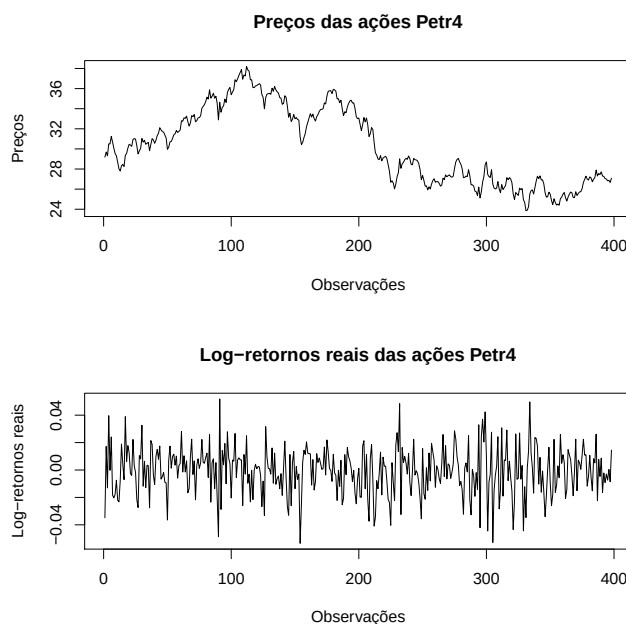
Constituem as entradas (*inputs*) do modelo HN-GARCH (Heston e Nandi, 2000) a volatilidade condicional do ativo subjacente e todos os itens descritos na primeira seção deste capítulo.

- **Volatilidade:** para o cálculo da volatilidade condicional é utilizada a série temporal de log-retornos reais do ativo subjacente no período de 22/06/2009 a 31/01/2011 (398 observações).

5.4.1 Ajuste do modelo HN-GARCH

A Figura 5.15 mostra o comportamento da série de preços (gráfico superior) e dos log-retornos reais do ativo Petr4.

Figura 5.15: Preços e log-retornos reais das ações preferenciais da Petrobras



É possível notar que a série de log-retornos reais⁸ alterna períodos de baixa e alta volatilidade.

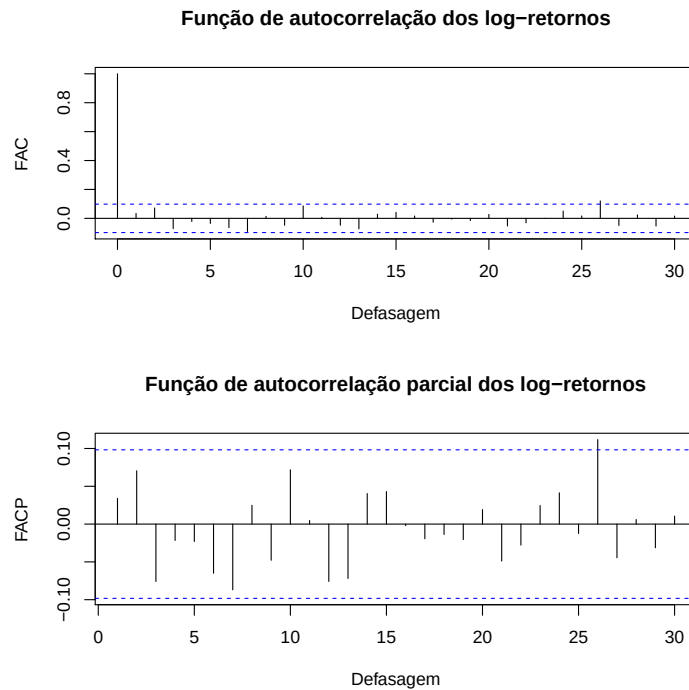
⁸A série de log-retornos reais do ativo será denotada por X_t .

A Tabela 5.8 resume algumas propriedades dessa série:

Tabela 5.8: Propriedades da série de log-retornos reais					
Média	Variância (σ^2)	Simetria	Curtose	Mínimo	Máximo
-0,0006	0,0003	-0,1729	3,3270	-0,0535	0,05182

As estruturas de autocorrelação e autocorrelação parcial de X_t podem ser visualizadas na figura abaixo:

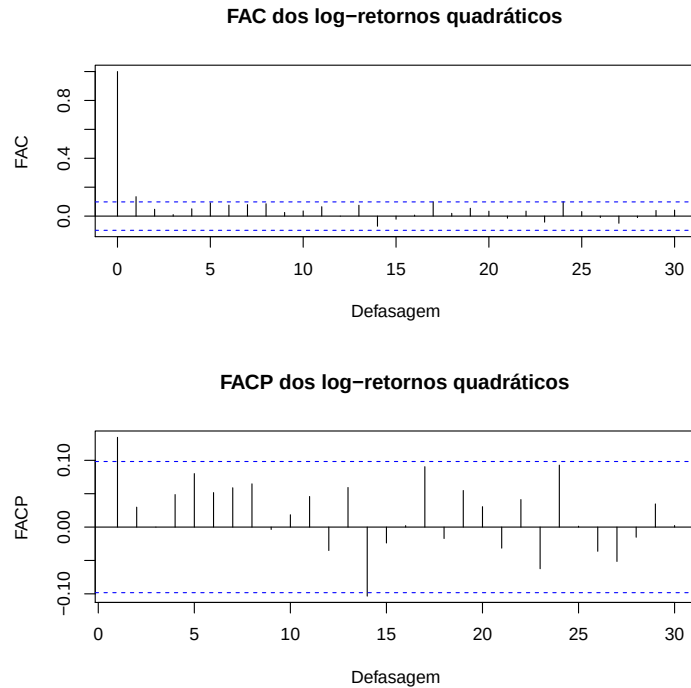
Figura 5.16: FAC e FACP de X_t



Os gráficos da FAC e da FACP indicam que a série X_t é estacionária e se comporta como um ruído branco, com exceção da defasagem 26.

A Figura 5.17 mostra a FAC e a FACP para a série dos log-retornos reais quadráticos, X_t^2 :

Figura 5.17: FAC e FACP de X_t^2



A série X_t é estacionária e não autocorrelacionada, porém não é independente. Os gráficos da FAC e da FACP acusam a presença de autocorrelação para a série quadrática X_t^2 . A primeira defasagem é estatisticamente significativa em ambos os gráficos. O teste de Ljung-Box⁹ (para 6 graus de liberdade) aplicado à série X_t^2 resulta na estatística $\chi^2 = 14,95$, com p-valor 0,02; portanto, X_t^2 não pode ser interpretada como um ruído branco. O teste de ARCH-LM (para 1 grau de liberdade)¹⁰ aplicado à série X_t possui estatística $\chi^2 = 7,25$ e p-valor igual a 0,007; logo, a hipótese nula de ausência de componentes ARCH é rejeitada na série X_t .

A Tabela 5.9 sintetiza as informações dos testes aplicados às séries X_t e X_t^2 (linhas 1 e 2, respectivamente). Os p-valores estão entre parênteses.

⁹Tsay (2002) apresenta maiores informações sobre o teste de Ljung-Box. A escolha dos graus de liberdade foi realizada pela fórmula $\log(n)$, onde n é o tamanho da amostra (398 observações).

¹⁰Conferir Tsay (2002).

Tabela 5.9: Resultados dos testes aplicados em X_t e X_t^2

	LB [6 gl]	ARCH-LM [1 gl]
X_t	6,89 (0,33)	7,25 (0,007)
X_t^2	14,95 (0,025)	-

Devido ao fato da série X_t não ser autocorrelacionada e das estruturas de autocorrelação e autocorrelação parcial de X_t^2 indicarem significância estatística na primeira defasagem será ajustado um modelo HN-GARCH (1,1) para a série dos log-retornos. As estimativas estão na Tabela 5.10.

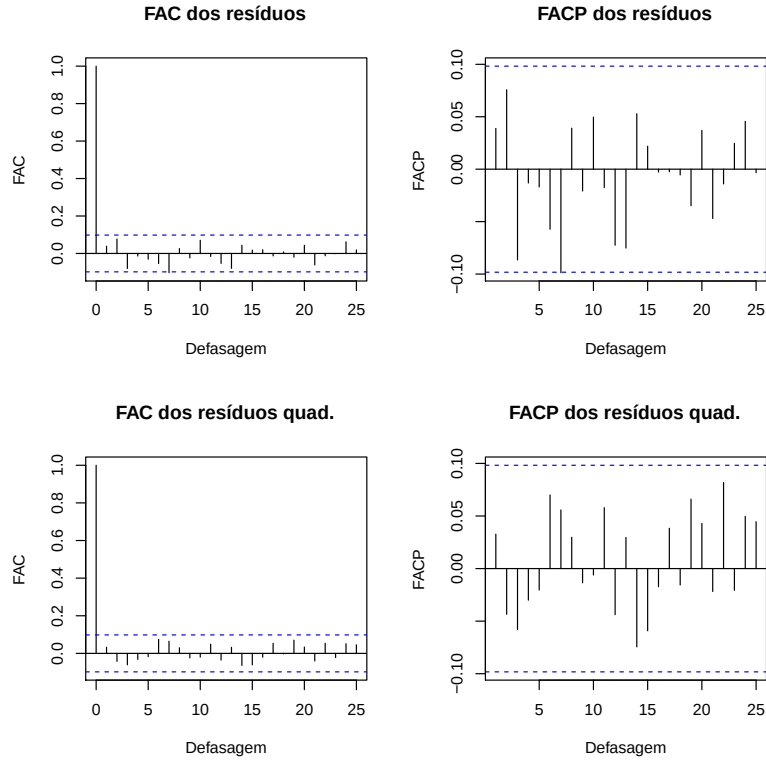
Tabela 5.10: Estimativas do modelo HN-GARCH

Parâmetro	Estimativa
$\hat{\lambda}$	-2,435098
$\hat{\omega}$	1,565666e-33
$\hat{\alpha}_1$	1,736996e-05
$\hat{\beta}_1$	0,8910535
$\hat{\gamma}_1$	55,30989
Log-Veros.	2056,79

O modelo HN-GARCH (1,1) foi estimado pelo método da máxima verossimilhança; a distribuição de probabilidades dos erros foi suposta como sendo gaussiana. Segue abaixo uma análise dos resíduos da regressão.

A Figura 5.18 mostra a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial dos resíduos e dos resíduos quadráticos do modelo HN-GARCH (1,1).

Figura 5.18: FAC e FACP dos resíduos e dos resíduos quadráticos



Os gráficos sugerem que os resíduos produzidos pelo modelo ajustado possuem as propriedades de um ruído branco.

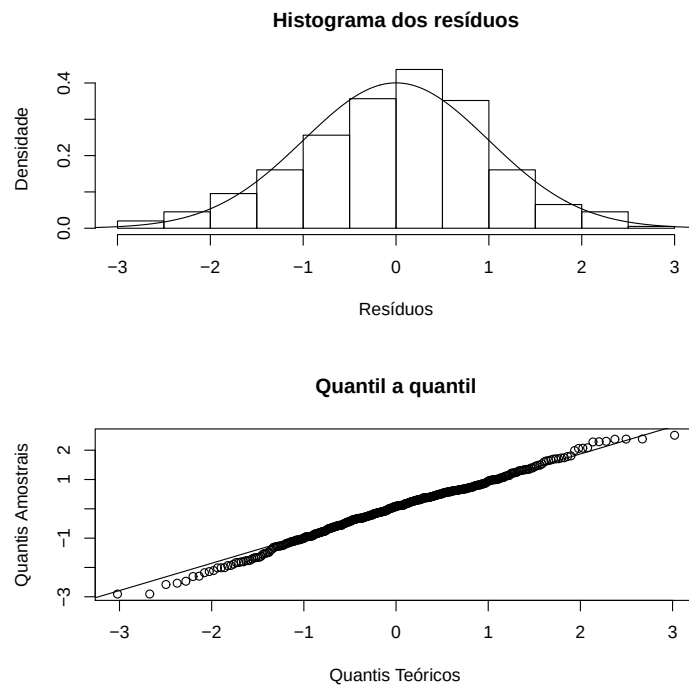
A Tabela 5.11 apresenta as estatísticas χ^2 dos testes de Ljung-Box e ARCH-LM (p-valor entre parênteses) para os resíduos e os resíduos quadráticos gerados pelo modelo HN-GARCH (1,1). Os resultados confirmam a inspeção visual da Figura 5.18. A conclusão é que não há autocorrelação nos resíduos (teste LB aplicado aos resíduos), tampouco a presença de efeitos ARCH (teste ARCH-LM aplicado aos resíduos e teste LB aplicado aos resíduos quadráticos).

Tabela 5.11: Testes aplicados aos resíduos e resíduos quadráticos

	LB [6 gl]	ARCH-LM [1 gl]
Resíduos	7,2134 (0,30)	0,429 (0,51)
Resíduos quadráticos	5,42 (0,49)	-

A Figura 5.19 apresenta, no gráfico superior, o histograma e a curva da distribuição normal. No gráfico inferior consta a comparação entre os quantis teóricos da distribuição normal e os quantis amostrais dos resíduos.

Figura 5.19: Histograma e gráfico quantil a quantil dos resíduos



Os gráficos da Figura 5.19 sugerem que a distribuição dos resíduos se aproxima muito da distribuição normal.

Segue abaixo uma tabela contendo as estatísticas dos testes de normalidade de Shapiro-Wilk (SW) e Jarque-Bera (JB) aplicados aos resíduos¹¹. Os p-valores estão entre parênteses.

Tabela 5.12: Testes de normalidade aplicados aos resíduos

Teste	Estatística
Shapiro-Wilk	0,9938 (0,11)
Jarque-Bera [2 gl]	2,688 (0,26)

Pode-se concluir que os resíduos do modelo ajustado HN-GARCH (1,1) seguem uma distribuição de probabilidades normal.

De acordo com o Corolário 4.2.1, o modelo HN-GARCH (1,1) é estacionário se $\beta_1 + \alpha_1\gamma_1^2 < 1$. Então:

$$0,8910535 + [0,00001736996 (55,30989^2)] = 0,9442$$

O modelo é estacionário.

Segundo a Proposição 4.2.2, a variância de longo prazo (σ) do modelo HN-GARCH (1,1) é calculada pela Equação 4.24. A volatilidade efetiva anualizada do modelo é:

$$\sqrt{\frac{\omega + \alpha_1}{1 - \beta_1 - \alpha_1\gamma_1^2}}$$

O valor resultante da aplicação dessa fórmula aos parâmetros estimados é 0,000311242. A volatilidade efetiva anualizada de longo prazo, supondo 252 dias úteis no ano, é obtida por $\sigma\sqrt{252}$; portanto, $\sqrt{0,000311242 \times 252} = 0,2800$ ou 28,00% ao ano.

A Tabela 5.13 resume os resultados:

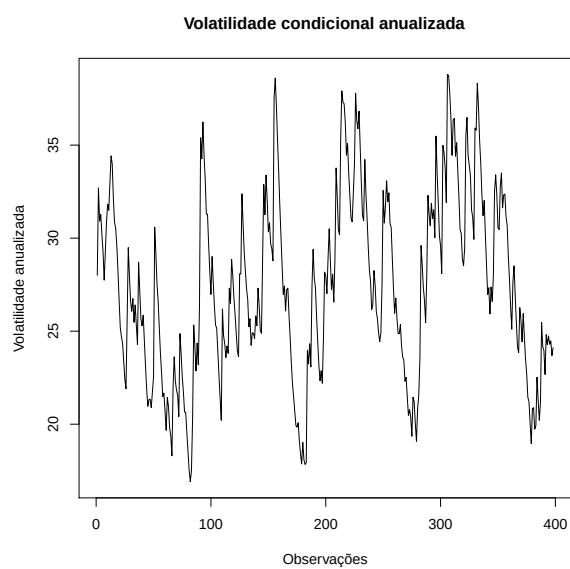
¹¹Maiores informações em Shapiro e Wilk (1965) e Jarque e Bera (1987). A hipótese nula de ambos os testes é que a de que a série dos resíduos é normalmente distribuída.

Tabela 5.13: Persistência e volatilidade anualizada de longo prazo

Persistência	Volatilidade anualizada
0,9442	28,00%

A Figura 5.20 mostra o gráfico da volatilidade condicional anualizada estimada pelo modelo HN-GARCH (1,1):

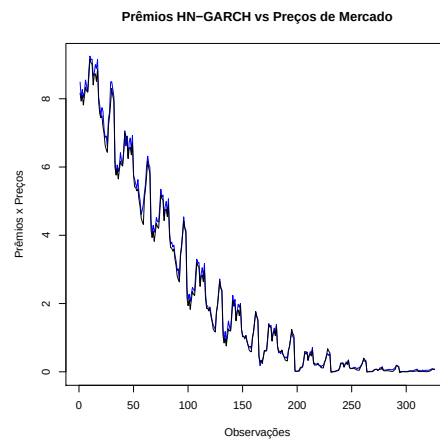
Figura 5.20: Volatilidade condicional anualizada do modelo



5.4.2 Cálculo dos prêmios da opções

O gráfico abaixo mostra, em preto, os 326 prêmios das opções da Tabela 5.1 gerados pelo modelo HN-GARCH (1,1). Os preços de mercado das opções estão em azul.

Figura 5.21: Prêmios por HN-GARCH vs Preços de mercado



As Figuras 5.22 e 5.23 mostram, respectivamente, os deltas e os gamas obtidos pelo modelo. Os valores mais próximos do vencimento estão em vermelho.

Figura 5.22: Deltas do modelo HN-GARCH

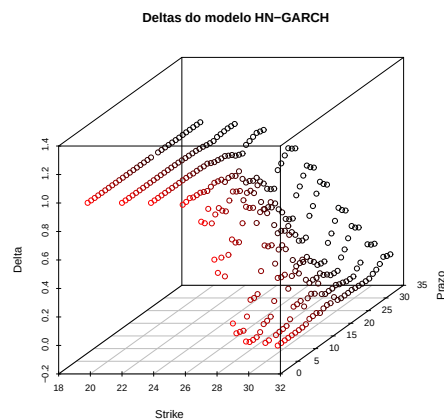
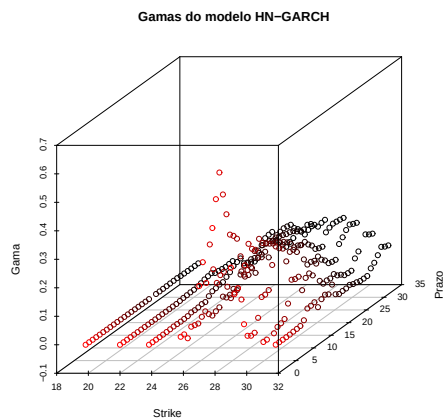


Figura 5.23: Gamas do modelo HN-GARCH



A Tabela 5.14 sintetiza as informações das médias dos prêmios e das medidas de sensibilidade para o período em análise.

Tabela 5.14: Prêmios e letras gregas médios do modelo HN-GARCH

Opção	Prêmio médio	Δ médio	Γ médio
PETRC20	R\$ 7,97	0,9994	0,0006
PETRC22	R\$ 5,81	0,9938	0,0048
PETRC24	R\$ 4,03	0,9697	0,0210
PETRC26	R\$ 2,20	0,8741	0,0782
PETRC27	R\$ 1,27	0,7315	0,1688
PETRC28	R\$ 0,76	0,5561	0,2444
PETRC29	R\$ 0,30	0,2845	0,2023
PETRC30	R\$ 0,14	0,1531	0,1333
PETRC31	R\$ 0,05	0,0644	0,0707
PETRC32	R\$ 0,01	0,0218	0,0276

Os prêmios resultantes da aplicação do modelo HN-GARCH são, em média, inferiores aos do modelo ad-hoc, mas superiores aos do modelo Black Scholes tradicional. Na próxima seção será feita uma análise pormenorizada dos resultados.

5.5 Análise comparativa

Os modelos de precificação ajustados no capítulo anterior serão comparados pelo critério de medidas de erro de predição.

Entre as medidas de erro mais comuns de predição estão o erro quadrático médio (MSE), a raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio (MAE) e o erro absoluto médio percentual (MAPE). Todas essas medidas serão iguais a zero se o valor predito for igual ao valor verdadeiro. Nesse sentido, na comparação entre dois ou mais modelos, a melhor medida de erro será a que resultar na menor diferença, isto é, no menor MSE, RMSE, MAE ou MAPE. **O valor predito de cada modelo será o prêmio de uma opção; esse prêmio será tanto mais verdadeiro quanto mais próximo do valor real, que é o preço de mercado daquela opção.**

Definição 5.5.1 (Medidas de Erro) *As medidas de erro acima mencionadas são definidas como:*

$$\begin{aligned}MSE &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_{it})^2 \\RMSE &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_{it})^2} \\MAE &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_{it}| \\MAPE &= \frac{100}{n} \frac{\sum_{t=1}^n |y_t - \hat{y}_{it}|}{|y_t|}\end{aligned}$$

onde y_t é o valor verdadeiro (o preço de mercado da opção), $\hat{y}_{it}$ é o valor predito (o prêmio calculado pelo modelo i) e n é o número de observações disponíveis (as 326 opções de compra listadas na Tabela 5.1).

A análise das medidas de erro será realizada inicialmente para as opções classificadas segundo a ordem decrescente dos deltas, de acordo com a Tabela 2.3 (foi utilizado o delta médio dos três modelos para a classificação): opções muito dentro do dinheiro (dITM); dentro do dinheiro (ITM); no dinheiro (ATM); fora do dinheiro (OTM); muito fora do dinheiro (dOTM). Em seguida, será feita a análise para as opções como um todo. As tabelas abaixo

exibem as medidas de erro para cada modelo; os menores valores estão em negrito¹².

Tabela 5.15: Opções muito dentro do dinheiro (dOTM) - 67 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,1777	0,1703	0,1746
MSE	0,0420	0,0389	0,0406
RMSE	0,2049	0,1972	0,2014
MAPE	3,0061	2,8968	2,9334

Melhor modelo: **ad-hoc Black Scholes**.

Tabela 5.16: Opções dentro do dinheiro (ITM) - 81 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,2091	0,1099	0,1311
MSE	0,0519	0,0197	0,0265
RMSE	0,2278	0,1404	0,1627
MAPE	9,2066	4,7682	4,7859

Melhor modelo: **ad-hoc Black Scholes**.

¹²Para outras informações sobre as medidas de erro, conferir Boogaart, Jachner e Petzoldt (2007).

Tabela 5.17: Opções no dinheiro (ATM) - 55 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,2126	0,0579	0,0472
MSE	0,0500	0,0050	0,0038
RMSE	0,2236	0,0710	0,0613
MAPE	26,9771	9,3125	7,1470

Melhor modelo: **HN-GARCH**.

Tabela 5.18: Opções fora do dinheiro (OTM) - 64 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,1009	0,0579	0,0252
MSE	0,0126	0,0051	0,0011
RMSE	0,1122	0,0714	0,0331
MAPE	57,7051	53,6564	17,7244

Melhor modelo: **HN-GARCH**.

Tabela 5.19: Opções muito fora do dinheiro (dOTM) - 59 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,0339	0,0184	0,0253
MSE	0,0017	0,0005	0,0009
RMSE	0,0411	0,0230	0,0298
MAPE	94,4351	64,4108	88,1108

Melhor modelo: **ad-hoc Black Scholes**.

Tabela 5.20: Todas as opções - 326 obs.

-	Black Scholes	ad-hoc Black Scholes	HN-GARCH
MAE	0,1503	0,0868	0,0860
MSE	0,0327	0,0148	0,0159
RMSE	0,1809	0,1218	0,1262
MAPE	35,8763	25,5422	22,4239

Melhores modelos: **ad-hoc Black Scholes** e **HN-GARCH**.

As tabelas acima mostram que os modelos ad-hoc Black Scholes e HN-GARCH produziram os melhores resultados em termos de ajuste dos prêmios com os preços de mercado das 326 opções de compra da Petrobras analisadas neste trabalho. O modelo Black Scholes tradicional apresentou os piores resultados, tanto no conjunto de todas as opções como para as opções classificadas segundo os deltas.

A Tabela 5.21 evidencia as médias dos preços de mercado e os prêmios resultantes da aplicação de cada um dos modelos: Black Scholes (coluna BS), ad-hoc Black Scholes (coluna ad-hoc BS) e HN-GARCH (última coluna). Os prêmios que mais se aproximam dos preços de mercado, para mais ou para menos, se encontram destacados em negrito.

Tabela 5.21: Comparativo das médias de preços e prêmios

Opção	Preço	BS	ad-hoc BS	HN-GARCH
PETRC20	R\$ 8,17	R\$ 7,97	R\$ 7,98	R\$ 7,97
PETRC22	R\$ 5,96	R\$ 5,80	R\$ 5,83	R\$ 5,81
PETRC24	R\$ 4,16	R\$ 3,99	R\$ 4,05	R\$ 4,03
PETRC26	R\$ 2,30	R\$ 2,08	R\$ 2,21	R\$ 2,20
PETRC27	R\$ 1,34	R\$ 1,11	R\$ 1,30	R\$ 1,27
PETRC28	R\$ 0,77	R\$ 0,57	R\$ 0,79	R\$ 0,76
PETRC29	R\$ 0,29	R\$ 0,18	R\$ 0,35	R\$ 0,30
PETRC30	R\$ 0,15	R\$ 0,07	R\$ 0,19	R\$ 0,14
PETRC31	R\$ 0,07	R\$ 0,02	R\$ 0,09	R\$ 0,05
PETRC32	R\$ 0,04	R\$ 0,00	R\$ 0,05	R\$ 0,01

A números da tabela acima são coerentes com os resultados das medidas de erro: o modelo ad-hoc Black Scholes precificou melhor as opções dITM, ITM e dOTM; por sua vez, o modelo HN-GARCH precificou melhor as opções ATM e OTM. O modelo Black Scholes tradicional foi o que menos obteve sucesso na precificação das 326 opções de compra analisadas neste trabalho durante o prazo de 33 dias úteis.

Capítulo 6

Considerações Finais

Os resultados empíricos dos três modelos de precificação confirmam a hipótese lançada na introdução deste trabalho: se a volatilidade for modelada de forma coerente com a realidade, isto é, se o modelo conseguir captar aspectos relevantes da dinâmica da sua variação, seguramente, os prêmios das opções calculados pelo modelo serão mais próximos de seus preços de mercado.

Foi mostrado que os modelos ad-hoc Black Scholes (Dumas, Fleming e Whaley, 1998) e HN-GARCH (Heston e Nandi, 2000), que consideram a volatilidade uma variável, apresentaram um desempenho superior na predição pontual de todas as 326 opções analisadas, comparativamente ao modelo original de Black e Scholes (1973), que considera a volatilidade do ativo subjacente uma constante.

Se as opções forem classificadas segundo os deltas, as características de cada modelo se tornam mais claras: as opções situadas nos extremos, muito dentro do dinheiro (dITM) e muito fora do dinheiro (dOTM), bem como as opções dentro do dinheiro (ITM), responderam melhor ao modelo ad-hoc Black Scholes; por outro lado, as opções no dinheiro (ATM) e fora do dinheiro (OTM) foram precificadas de maneira mais consistente pelo modelo HN-GARCH.

Os modelos ad-hoc Black Scholes e HN-GARCH apresentam outra vantagem sobre o modelo original de Black Scholes: podem ser atualizados constantemente. O primeiro, a partir das informações dos preços de opções semelhantes em negociação; o segundo pelas informações mais recentes da cotação do preço do ativo. Na aplicação realizada no Capítulo 5, os modelos foram atualizados até 31/01/2011; o período de precificação foi de 01/02/2011 a

21/03/2011, ou seja, se as novas informações fossem diariamente incorporadas nos dois modelos, é muito provável que seu desempenho fosse ainda superior ao do modelo Black Scholes.

É necessário ampliar o escopo da amostra para verificar se os resultados apresentados nesta dissertação mostram um padrão recorrente para cada modelo de precificação. Também é desejável que a taxa de juros livre de risco possa ser considerada estocástica, ao invés de fixa, para que a distância entre os prêmios dos modelos e os preços de mercado seja menor. Certas características presentes em algumas séries temporais financeiras, como longa dependência (modelos FIGARCH) e quebras estruturais ou mudanças de regime (por cadeias de Markov), poderiam ser analisadas e incorporadas no âmbito de um modelo de precificação de opções. Outra possibilidade consistiria em flexibilizar determinadas condições que compõem o cerne da hipótese de eficiência de mercado ao, por exemplo, se adotar hipóteses limitadoras da racionalidade econômica dos agentes, conjugadas com um viés quantitativo.

O mercado brasileiro de derivativos, em geral, e de opções sobre ações, em particular, tem crescido muito em volume de dinheiro e negociações. Espera-se que este e outros trabalhos correlatos chamem a atenção para o fato de que os modelos de precificação de opções podem e devem ser testados empiricamente no mercado doméstico; e que os resultados incentivem o desenvolvimento teórico de novos modelos adaptados à realidade brasileira.

Referências Bibliográficas

- [1] ASSAF NETO, A. (2009). **Finanças corporativas e valor**. 4 ed. São Paulo: Atlas.
- [2] AZEVEDO, H. (2010). **Investimentos no mercado de opções sobre ações no Brasil: teoria e prática**. Rio de Janeiro: Elsevier.
- [3] BERKOWITZ, J. (2010). On Justifications for the ad hoc Black-Scholes Method of Option Pricing, **Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics**, Vol. 14: No. 1, Article 4.
- [4] BLACK, F.; Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, 81 (3): 637-654.
- [5] BLACK, F. (1976). Studies of Stock Price Volatility Changes. **Proceedings of the Meetings of the Business and Economics Statistics Section**, American Statistical Association, pp. 177-181.
- [6] BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, vol. 31, issue 3, pages 307-327.
- [7] BOOGAART, K.G.; JACHNER, S.; PETZOLDT, T. (2007). Statistical Methods for the Qualitative Assessment of Dynamic Models with Time Delay (R Package qualV). **Journal of Statistical Software**, V. 22, Issue 8.
- [8] BRENNAN, M. (1979). The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models. **Journal of Finance**, 34, 53-68.
- [9] BROCKWELL, P.; DAVIS, R. (1987). **Time series: theory and methods**. 1 ed. Nova York: Springer-Verlag.

- [10] BUENO, R. (2008). **Econometria de séries temporais**. São Paulo: Cengage Learning.
- [11] COSTA, C. L. (1998). **Opções: operando a volatilidade**. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros.
- [12] COX, J.; RUBINSTEIN, M. (1985). **Options Markets**, Prentice-Hall, New Jersey.
- [13] DUAN, J. (1995). The Garch Option Pricing Model. **Mathematical Finance**, Vol. 5, N° 1, 13-32. Faculty of Management, McGill University, Montreal, Canada.
- [14] DUMAS, B.; FLEMING, J.; WHALEY, R. (1998): Implied Volatility Functions: Empirical Tests, **Journal of Finance**, 53, 2059-2106.
- [15] DURBIN, J. (1960). The fitting of time series models. **Review of the Institute of International Statistics**, 28, 233-244.
- [16] ENDERS. (2004). **Applied econometric time series**. 2.ed. Nova York: Wiley.
- [17] ENGLE, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation, **Econometrica**, 50:987-1008.
- [18] ENGLE, R.; LILIEN, D.; ROBINS, R. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. **Econometrica**, v.55, n.2, p. 391-407.
- [19] ENGLE, R.; NG, V.(1991). Measuring and testing the impact of news on volatility. **Nber Working paper series**, n° 3681. National Bureau of Economic Research. Cambridge.
- [20] FAMA, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. **Journal of Finance**, 25 (2): 383-417.
- [21] FELLER W. (1970). **An introduction to Probability Theory and its Applications**. Princeton University. Volume II.
- [22] FERREIRA, L. (2009). **Mercado de Opções: a estratégia vencedora**. São Paulo: Saraiva.

- [23] FRIEDMAN, M. (1953). The Methodology of Positive Economics. **Essays in Positive Economics**. Chicago: University of Chicago Press.
- [24] GIL-PELAEZ, J. (1951). Note on the inversion theorem. **Biometrika**, 38(3-4): 481-482
- [25] GOURIÉROUX, C. (1997). **ARCH models and financial applications**. Nova York: Springer-Verlag.
- [26] GREENE, W. (2002). **Econometric Analysis**. Fifth edition. New York University. July.
- [27] GUJARATI, D. (2004). **Basic Econometrics**. Fourth Edition. The McGraw-Hill Companies.
- [28] HAMILTON, J. (1994). **Time Series Analysis**. Princeton University Press; 1 edition.
- [29] HAUG, E. (2006). **The Complete Guide to Option Pricing Formulas**, 2nd edition. New York: McGraw-Hill.
- [30] HENTSCHEL, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric GARCH models. **Journal of Financial Economics**, v. 39, p.71-104.
- [31] HESTON, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. **The Review of Financial Studies**, V 6. N 2.
- [32] HESTON, S. NANDI, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Pricing Model. **Review of Financial Studies**, 13, 585-626.
- [33] HILL, R.; GRIFFITHS, W.; JUDGE, G. (2003). **Econometria**. 2 ed. São Paulo: Saraiva.
- [34] HULL, J. (2008). **Options, Futures, and Other Derivatives**. 7th Ed. Pearson Prentice-Hall.
- [35] JARQUE, C.; BERA, A. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. **International Statistical Review** 55 (2): 163-172.

- [36] KENDALL, M.; STUART, A. (1977). **The Advanced Theory of Statistics**, Vol. 1, Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
- [37] LIMA, E. (1976). **Curso de análise**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ.
- [38] LIMA, I.; LIMA, G.; PIMENTEL, R.Org. (2007). **Curso de mercado financeiro: tópicos especiais**. 1 ed. 2. reimpr. São Paulo: Atlas.
- [39] MANASTER, S.; KOEHLER, G. (1982). The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model: A Note. **Journal of Finance**, 37, No. 1, pp. 227-230.
- [40] MATTHEWS, J.; FINK, K. (1999). **Numerical Methods Using Matlab**, Third Edition, Prentice-Hall.
- [41] MERTON, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science** 4 (1): 141-183.
- [42] MEYER, P. (1982). **Probabilidade: aplicações à estatística**. Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
- [43] MORETTIN, P. (2008). **Econometria Financeira - um curso em séries temporais financeiras**. São Paulo: Editora Edgard Blucher.
- [44] NATENBERG, S. (1994). **Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques**. McGraw-Hill; Updated edition.
- [45] NELSON D. (1991). Conditional heteroscedasticity in asset returns. **Econometrica**, v. 59, n.2, p. 347-370.
- [46] NELSON, D.; CAO, Q. (1992). Inequality constraints in the univariate GARCH model. **Journal of Business & Economic Statistics**, 10, 229-235.
- [47] R DEVELOPMENT CORE TEAM. (2011). A Language and Environment. **R Foundation for Statistical Computing**. Vienna, Austria.
- [48] ROSS, S.; INGERSOLL J.; COX, J. (1985). A Theory of the Term Structure of interest rates. **Econometrica**, Vol. 53, Issue 2, pp. 385-408.

- [49] RUBINSTEIN, M. (1976). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. **The Bell Journal of Economics**, Vol. 7, N 2, pp. 407 - 425.
- [50] SHAPIRO, S.; WILK, M. (1965). An Analysis of Test for Normality (Complete Samples). **Biometrika**, Vol. 52, N^o $\frac{3}{4}$, pp.591-611.
- [51] TSAY, RUEY S. (2002). **Analysis of Financial Time Series** (Wiley Series in Probability and Statistics), Wiley-Interscience; 1st edition.
- [52] WEI, W. (2006). **Time Series Analysis: univariate and Multivariate Methods**. Second Edition. Pearson Education Inc.