

Lucas Carvalho Simões

**Quebra Espontânea da Simetria Quiral  
em Modelos de Yukawa-Higgs**

Vitória - ES, Brasil

5 de Abril de 2019

Lucas Carvalho Simões

# Quebra Espontânea da Simetria Quiral em Modelos de Yukawa-Higgs

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Galen M. Sotkov

Vitória - ES, Brasil

5 de Abril de 2019

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador, Galen Sotkov, por todo o empenho em me transformar em um verdadeiro físico teórico. Agradeço ao André por sempre estender a mão para ajudar no que fosse, principalmente na revisão de texto, corrigindo meus erros ortográficos. Em falar em correções, tenho que agradecer a Flaviana Siller Thebaldi, que não só no trabalho, mas na vida me ajuda com constantes correções. Ao professor Ulysses Camara, meu primeiro orientador (na monografia e na IC), por participar da minha pré-defesa. Aceitar fazer parte da banca e por toda a ajuda no passado não tão distante. A toda banca que irá disponibilizar seu tempo para avaliar meu trabalho. A Capes que possibilita estudantes assim como eu, com o financiamento de nossas pesquisas. Por penúltimo agradeço a amigos, que estão sempre ao meu lado dando suporte emocional e ajudando manter o foco, em especial Yago e Carlos. E por fim a minha família, obrigado minha mãe Euridice Carvalho Simões, obrigado minha madrinha Marilsa Sousa Eleoterio, obrigado minha namorada Flavis.

## Resumo

Consideramos alguns problemas envolvendo a renormalização e as propriedades das amplitudes de espalhamento em modelos de Yukawa-Higgs tanto com um campo escalar real quanto com um campo escalar complexo, com simetrias quirais discretas ou contínuas. Nosso principal objetivo é a investigação dos efeitos da quebra de simetria quiral contínua, e das condições específicas para a renormalização dos campos e das constantes de acoplamento, tanto na fase simétrica em altas energias quanto na fase de Higgs realizada em baixas energias. Entre os resultados obtidos, podemos destacar que a constante de acoplamento de Yukawa,  $g$ , permanece não-renormalizada na fase simétrica. Na fase de Higgs, entretanto,  $g$  se renormaliza a 1-loop. Isso se deve aos campos relevantes para a descrição da fase de Higgs terem propriedades bem diferentes das da fase simétrica, e também porque a realização de quebra espontânea de simetria nesse caso inclui novos termos de interação. Um outro resultado interessante é a diferença significativa observada entre as duas fases para as amplitudes de espalhamento e as taxas de decaimento, não somente dos férmions mas também dos campos escalares reais.

## Abstract

We study some problems concerning the renormalization and properties of scattering amplitudes in Yukawa-Higgs models with either one real scalar field or a complex scalar field, and with either discrete or continuous quiral symmetries. Our main goal is to investigate the effects of breaking the continuous quiral symmetry, and the specific conditions for the renormalization of the fields and the coupling constants, both in the high-energy symmetric phase and in the low-energy Higgs phase. Among the results found, we may call attention to the non-renormalization of the Yukawa coupling  $g$  in the symmetric phase. In the Higgs phase, however,  $g$  gets renormalized at one-loop. This is due to the fact that the set of fields relevant for the description of the Higgs phase has very different properties in comparison with the fields relevant for the description of the symmetric phase. Also, the realization of the spontaneous symmetry breaking includes new interaction terms. Another interesting result is the significant difference found for the behavior of scattering amplitudes and decay rates in each phase, not only for fermions but also for the scalar fields.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	Sobre a origem das massas e a quebra espontânea de simetria quirál. . . . .	9
1.2	Fluxos do Grupo de Renormalização e Transições de Fase . . . . .	10
1.3	Objetivos e Resultados . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Modelo de Yukawa-Higgs</b>	<b>14</b>
2.1	Quantização Canônica . . . . .	15
2.2	Propagadores livres . . . . .	16
2.3	Teoria de Pertubação: Operador de Evolução Temporal e Matriz S . . . . .	19
2.4	Seção de choque e Taxa de decaimento . . . . .	22
2.4.1	Diagramas tipo árvore . . . . .	22
2.4.2	Taxa de decaimento . . . . .	24
2.4.3	Seção de Choque . . . . .	25
2.4.4	Exemplo de Taxa de Decaimento e de Seção de choque . . . . .	26
2.5	Regularização e Renormalização . . . . .	28
2.6	Quebra de simetria . . . . .	36
2.6.1	Paridade . . . . .	36
2.6.2	Simetria quirál . . . . .	38
2.7	Grupo de Renormalização . . . . .	41
<b>3</b>	<b>QES contínua no modelo de Yukawa-Higgs complexo</b>	<b>45</b>
3.1	Modelo de Yukawa Complexo . . . . .	45
3.2	Cálculo dos diagramas 1-loop . . . . .	47
3.2.1	Taxa de Decaimento . . . . .	51
<b>4</b>	<b>QES quirál contínua e fase de Higgs</b>	<b>53</b>
4.1	Campos livres no novo modelo . . . . .	54
4.2	Regularização e Renormalização . . . . .	54
4.2.1	Propagadores . . . . .	55
4.2.2	Vértices . . . . .	60
4.3	Taxa de decaimento . . . . .	63
4.4	QES em Yukawa-Higgs renormalizada . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>

<i>CONTEÚDO</i>	7
<b>A Regras de Feynman</b>	<b>67</b>
<b>B Campo fermionico</b>	<b>70</b>
B.1 Propagador . . . . .	70
B.2 Matriz S e LSZ . . . . .	71
<b>C Outros exemplos de quebra de simetria</b>	<b>73</b>
C.1 QES das Simetrias do Campo Escalar real com Potencial de Higgs . . . . .	73
C.2 Quebra em escalar complexo . . . . .	75
<b>D Outros Diagramas do modelo de Yukawa Complexo</b>	<b>76</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As Teorias Quânticas de Campos (TQCs) são o fundamento teórico de todos os modelos de unificação das interações das partículas elementares. Uma das principais características das TQCs é que elas oferecem uma descrição consistente das transformações das partículas quânticas: decaimentos e criação de novas partículas durante processos de espalhamento. Além da presença obrigatória dos campos fermiônicos, dos campos de calibre e do escalar de Higgs, os princípios de simetria do espaço-tempo (a Relatividade Restrita) e da simetria “interna” das interações — simetrias de calibre locais e simetrias globais — são ferramentas indispensáveis na construção das TQCs que descrevem a micro-estrutura da matéria.

O primeiro sucesso das TQCs se dá no desenvolvimento da teoria quântica do eletromagnetismo de Maxwell, a Eletrodinâmica Quântica, que descreve com alta precisão os processos de interação entre elétrons, pósitrons e fótons. Mas o grande triunfo das TQCs foi a confirmação experimental das previsões teóricas do Modelo Padrão da unificação das interações forte e eletro-fracas. A TQC do Modelo Padrão é definida por um conjunto de campos (representando as partículas elementares) cujo conteúdo é inferido a partir da simetria interna  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  [6] [11].

Uma das principais características dos processos quânticos descritos em termos de uma teoria de campos é a aparição inevitável de grandezas infinitas em cálculos de propriedades físicas perfeitamente finitas. A tecnologia matemática que se desenvolveu para eliminar esses infinitos espúrios é chamada de ‘renormalização’ da teoria. Para uma TQC ser física, ela deve ser, portanto, ‘renormalizável’, o que nem sempre acontece e, além disso, saber se uma TQC é renormalizável ou não é uma tarefa nem sempre trivial. Um outro grande sucesso na história do Modelo Padrão foi a demonstração de que se trata realmente de um modelo renormalizável[11]. No processo de renormalização, as constantes de acoplamento, i.e. os parâmetros que fixam as propriedades da teoria (como por exemplo a carga do elétron na Eletrodinâmica Quântica) assumem valores que não são fixos: eles dependem da escala de energia em que ocorre o processo que estamos analisando[1],[6],[17]. Essa mudança nos parâmetros pode fazer com que as propriedades de uma teoria renormalizável mudem de forma significativa, e a teoria passe por diferentes “fases”. Esse tipo de mudança em uma classe de TQCs específica, chamadas de ‘Modelos de Yukawa’, será o assunto principal dessa dissertação.

No restante desta Introdução, faremos uma descrição mais detalhada do problema que vamos abordar e do modelo que usaremos. Mas, em termos gerais, essa é uma dissertação dedicada a aspectos fundamentais da Teoria Quântica de Campos envolvendo a transição entre fases de uma mesma teoria. E, antes de continuar, gostaríamos de observar que a descrição das partículas elementares e das interações fundamentais não é a única aplicação relevante das TQCs. Existe uma enorme variedade de importantes propriedades da matéria condensada — o magnetismo, anti-ferromagnetismo, a supercondutividade, o efeito Hall, a física de semi-condutores, e outras tantas — ligadas a interações “fortes” entre os elétrons, e as transições entre as diferentes fases desses materiais são descritas em termos das TQCs apropriadas[7].

## 1.1 Sobre a origem das massas e a quebra espontânea de simetria quiral.

Além das regras de quantização dos campos a partir das teorias clássicas de campos, temos três ingredientes essenciais na construção de uma TQC:

1. Escolher os graus de liberdade na forma de um conjunto específico de campos — escalares, férmions e vetores. Esses campos são caracterizados por valores específicos de suas características internas (seus “números quânticos”) — isospin, carga leptônica e bariônica, etc;
2. Escolher as interações entre estes campos, i.e. os potenciais de interação;
3. Escolher os parâmetros do modelo em consideração — as constantes de acoplamentos e as massas dos campos.

Um dos maiores desafios da física quântica das partículas elementares é a explicação da origem e a dedução dos valores relativos das massas das partículas observadas. O ‘Mecanismo de Higgs’ e o conceito de ‘quebra espontânea de simetria (QES)’[15], [16] providenciam uma abordagem simples e bem sucedida para essa origem das massas. A ideia principal é a hipótese de que, em um regime de altas energias, todas as partículas (quarks, léptons, bósons de calibre) têm massa zero. Ou seja, nesse regime, não existem termos massivos do tipo  $\bar{\psi}\psi$  na lagrangeana do Modelo Padrão [14],[10],[6].

Consideremos um modelo simplificado, sem bósons de calibre e sem simetrias locais de calibre, conhecido como modelo do Yukawa-Higgs. Temos apenas uma interação do tipo Yukawa entre os férmions e o campo complexo do Higgs  $\phi$ , que é a única partícula massiva, com massa  $M_{Higgs-UV}$  e com potencial

$$V_{sym}(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi\bar{\phi})^2.$$

A propriedade importante da fase “simétrica” (SYM) deste modelo, que ocorre em altas energias  $E \gg M > 0$ , é ter um único vácuo (o mínimo do potencial  $V_{sym}$ ) onde

$$|\phi|_{vac} = 0.$$

Temos também a simetria quiral definida pelas transformações dos campos:

$$\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\gamma_5\alpha}, \quad \phi \rightarrow e^{2i\alpha}\phi, \quad \bar{\phi} \rightarrow e^{-2i\alpha}\bar{\phi}, \quad (1.1)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro contínuo. Essa transformação mantém invariante o vácuo e a lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^\alpha\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\alpha - \partial^\mu\phi\partial_\mu\bar{\phi} - M^2\phi\bar{\phi} - \frac{\sqrt{2}}{2}g\bar{\psi}^\alpha\left[(1+\gamma_5)\phi + (1-\gamma_5)\bar{\phi}\right]_{\alpha\beta}\psi^\beta - \frac{1}{4}\lambda(\phi\bar{\phi})^2. \quad (1.2)$$

Nesta fase, conhecida como “SYM-UV”, os férmions permanecem sem massa (veja capítulo 3).

A principal característica da segunda fase do modelo (chamada ‘fase de Higgs’) é a existência de uma família de vácuos degenerados, devido à troca de sinal do termo massivo  $M^2 < 0$  e, como consequência, à mudança na forma do potencial efetivo:

$$V_{Higgs}(\Phi) = -|M^2|\phi\bar{\phi} + \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - v_0^2)^2, \quad (1.3)$$

que assume o formato de um “chapéu mexicano” (veja capítulo 3) com  $\phi = \rho e^{i\pi/v_0}$ . Neste caso, temos um número infinito de “mínimos do potencial de Higgs” com  $\rho = v_0 = \frac{2M}{\sqrt{4\lambda}}$ , e com valores arbitrários do campo  $\pi$ , que não possui massa, e é chamado de ‘partícula de Goldstone’. O efeito principal é que o campo escalar  $\rho$ , com massa  $M > 0$ , ganha um novo valor esperado (“VEV”) diferente de zero  $\langle\rho\rangle = v_0$  [6],[16]. Assim, temos uma quebra espontânea da simetria quiral, e os férmions ganham a massa  $m_\psi = gv_0$ . Devemos mencionar que nessa fase em que a simetria quiral, [15],[16],[10],[6] é quebrada mudam também a forma das interações e os resultados dos processos de espalhamento e decaimento dos férmions massivos e dos campos  $\rho$  e  $\phi$ . O conjunto desses efeitos, que são específicos para baixas energias  $E < M$ , é conhecido como o “mecanismo de Higgs”.

## 1.2 Fluxos do Grupo de Renormalização e Transições de Fase

As regras da quantização canônica não levam automaticamente a TQCs livres de problemas de consistência matemática, nem a uma interpretação direta dos resultados obtidos via TQC em termos de grandezas observadas em experimentos. Porém a “consistência quântica” de uma grande família das TQCs pode ser garantida impondo dois princípios fundamentais: Unitariedade e Renormalizabilidade[6][1].

Na maioria das TQCs, cálculos perturbativos das amplitudes dos diferentes processos providenciam resultados “infinitos”, quando certos limites de altas e/ou baixas energias (e momentos) são considerados. Este problema é conhecido como divergências UV e/ou IR [5],[1]. Ele exige um tratamento especial de regularização, i.e. de separação das partes finita e infinita, e também de uma específica “renormalização”. A implementação do requerimento de que “*todas as grandezas físicas, que podem ser medidas em experimentos — massas, constantes de acoplamento, seções de choque, taxas de decaimento, etc. —*

*devem ter valores finitos*”, resulta em um conjunto de princípios que as TQCs devem respeitar. A principal consequência dessa condição, conhecida como Renormalizabilidade, é a seleção de uma pequena variedade de TQCs consistentes. Restringe-se o conteúdo de spin (e isospin etc.) dos campos, e também restringe-se as possíveis formas das interações. Entre férmions e escalares as interações devem ser do tipo ‘Yukawa’, com potenciais tri-lineares ou cúbicos; para escalares auto-interagentes, as interações podem ser no máximo quárticas [6].

Na maioria dos casos, as regras de renormalização são realizadas em ordens de uma expansão perturbativa, ou seja, para pequenos valores das constantes de acoplamento. Mas existem muitos exemplos de TQCs em que um ‘Grupo de Renormalização (RG)’, descrito pela ‘equações de Callan-Symanzik’[1],[6], fornece um método exato, não-perturbativo, de renormalização válida para todos os valores dos acoplamentos das interações consideradas, não apenas os pequenos[17],[8].

Perturbativamente, o procedimento de renormalização requer primeiro que se encontre os contra-termos específicos que devem ser adicionados à lagrangeana da teoria. Depois, que se efetue uma redefinição dos parâmetros “nus” da lagrangeana (clássica) e dos próprios campos, considerados como certas funções das escalas de energia  $\mu$ , ou de seu logaritmo que define a escala

$$l = -\log \mu$$

(ou de um “cut-off”  $\Lambda$ ). Assim, no modelo que descrevemos acima obtemos as funções

$$g(l), \quad \lambda(l), \quad v_0(l)$$

que variam de acordo com a escala de energia  $l$ .

Já os conceitos e os resultados obtidos no contexto do RG vão além do procedimento que acabamos de descrever. Uma das principais características do grupo de Renormalização é descrever, através de um sistema de equações diferenciais, as mudanças nos acoplamentos, i.e.  $dg/dl$ ,  $d\lambda/dl$ , e as mudanças de certas características dos campos quânticos como, por exemplo, as dimensões anômalas. Este *fluxo* dos parâmetros obtido das soluções das ‘equações do RG’ dá origem a um dos principais resultados da teoria de renormalização: a descrição das transições de fase em TQCs renormalizadas. Ou seja, dependendo dos valores dos acoplamentos e dos termos de interação, acontecem mudanças na própria natureza dos graus de liberdade, na forma de lagrangeana e no comportamento das funções de correlação. Digamos que os campos apresentam propriedades e interações diferentes em altas e baixas energias, e também os acoplamentos demonstram um comportamento específico, a depender da escala de energia “corrente”. Nesta descrição, transições de fase de segunda ordem podem ser identificadas pelos zeros das assim chamadas funções beta de Gell-Mann-Low,

$$\beta_g(g, \lambda) = dg/dl, \quad \beta_\lambda(g, \lambda) = d\lambda/dl.$$

Os zeros existem para certos valores “críticos” dos acoplamentos  $g$  e  $\lambda$ . Por exemplo, uma grande família de modelos possui pontos críticos ultravioletas (UV), i.e.  $\beta(g_{cr}, \lambda_{cr}) = 0$ , que descrevem TQCs de campos livres e sem massa  $g_{cr} = 0 = \lambda_{cr}$  no limite de altas energias [6].

Devido ao fato que nos modelos de Yukawa-Higgs (e também no modelo Padrão) todas as constantes de acoplamento ( $g$  e  $\lambda$ ) são parâmetros adimensionais, tomando o limite  $v_0 \rightarrow 0$ , essas TQCs ganham uma nova simetria: a extensão conforme  $SO(4, 2)$  do grupo de Poincaré, envolvendo dilatações e transformações especiais conformes [18]. Ou seja, as TQCs com interações do tipo Yukawa-Higgs possuem uma fase de altas energias e um ponto crítico UV que poderia ser descrito como certa teoria conforme quântica (CFT). A simetria conforme nos permite calcular não-perturbativamente as funções de correlação dos campos  $\psi$  e  $\Phi$ , aplicando técnicas específicas válidas para CFTs [18],[20].

Estudos não-perturbativos das propriedades do fluxo do RG dos modelos de Yukawa Higgs [8], [12], indicam que o efeito da renormalização da massa  $M(l)$  com a mudança da escala de energia, junto com as mudanças dos correspondentes acoplamentos, determinam que a fase SYM-UV deve terminar em um ponto (ou linha) crítico do tipo IR com  $M = 0$ , onde acontece a mudança de sinal de  $M^2$  de positivo para negativo. Este ponto define a transição entre a fase SYM-UV e a fase IR massiva de Higgs com simetria quirial quebrada. Nesta fase, todos os campos (a exceção do campo de Goldstone) são massivos. Desta forma, a TQC original de Yukawa-Higgs, com Lagrangeana  $\mathcal{L}(g, \lambda, v_0) = \mathcal{L}_{CFT} + \mathcal{L}_{pert}$ , envolvendo o termo do potencial  $V_{Higgs}$  e o termo de massa, poderia ser considerada como uma perturbação, com um pequeno parâmetro  $v_0$  (ou, equivalentemente, com  $M$  pequeno), de uma teoria conforme  $\mathcal{L}_{CFT}$  de Yukawa-Higgs em que  $v_0 = 0 = M$ . O termo de perturbação é definido pela lagrangeana  $\mathcal{L}_{pert}(v_0) = \frac{1}{8}\lambda v_0 \Phi^2$ . Esta representação do Modelo de Yukawa-Higgs com uma separação entre a parte conforme e uma perturbação massiva é conhecida como ‘quebra dinâmica da simetria conforme’ [18],[13].

### 1.3 Objetivos e Resultados

O objetivo principal desta dissertação é um estudo completo da quantização perturbativa, da renormalização e das propriedades específicas da fase SYM-UV e dos efeitos da quebra espontânea das simetrias quirais na fase de Higgs IR de duas TQCs com interação de Yukawa-Higgs, considerando férmions (massivos e sem massa) interagindo com um campo escalar (real ou complexo) com potencial do tipo Higgs e com simetrias internas diferentes: para o campo real, temos a simetria discreta  $Z_2$  (capítulo 2); para o campo escalar complexo, temos a simetria contínua  $U(1)$  (capítulos 3 e 4). As simetrias diferentes levam a diferenças essenciais nas propriedades físicas das partículas em cada fase desses modelos. Nossa escolha de estudar primeiro um modelo bem conhecido, o modelo YH com campo escalar real, é proposital. A ideia é usá-lo, por ser mais simples, para apresentar uma introdução às técnicas, aos métodos que desejamos desenvolver, a saber:

1. Os conceitos básicos de quantização perturbativa;
2. O cálculo das amplitudes de espalhamento em 1-loop;
3. Os procedimentos de regularização dimensional e de renormalização; e
4. Os conceitos e os resultados do grupo de renormalização e a quebra espontânea da simetria quirial.

Os capítulos 3 e 4 são dedicados à investigação dos problemas de renormalização e ao cálculo de certas amplitudes de espalhamento nas fases sem e com quebra de simetria quirial contínua. A introdução feita no capítulo 2 serve como base para a extensão destes métodos (e o desenvolvimento de novos métodos) no caso bem mais complicado do modelo Yukawa-Higgs com campo escalar complexo.

Devemos também mencionar, entre os objetivos desta dissertação, a investigação de alguns problemas de pesquisa específicos para TQCs com simetria quebrada (no caso de férmions com e sem massa  $m_\psi = 0$ ):

1. As condições de renormalizabilidade para teorias com simetrias quirais contínuas quebradas;
2. As condições específicas sobre as partes finitas dos diagramas UV-divergentes, tais que o novo campo escalar  $\rho = \Phi - v_0$  permaneça com valor esperado zero, considerando perturbações até ordem cúbica e quártica (em constantes de acoplamento  $g$  e  $\lambda$ ). Isto é, incluindo todos os diagramas divergentes (e finitos também) até 1-loop destas teorias que contribuem para  $\langle \rho S \rangle$ ;
3. A comparação entre a quebra de simetria quirial discreta do campo escalar real e o caso da simetria contínua  $U(1)$  do campo complexo.

Entre os resultados obtidos, podemos mencionar que a constante de acoplamento de Yukawa,  $g$ , na fase SYM-UV (no caso de simetria quirial contínua) não se renormaliza, o que se deve à forma específica da interação, envolvendo vértices com matriz  $\gamma_5$ . Já na fase IR de Higgs,  $g$  se renormaliza em 1-loop, o que se deve às propriedades bem diferentes dessa fase em comparação à fase simétrica — por exemplo, no IR os graus de liberdade incluem o campo de Goldstone, e a QES inclui certos novos termos de interação. Um outro resultado interessante é a diferença significativa entre as amplitudes de espalhamento e taxas de decaimento, não somente dos férmions, mas também dos campos escalares  $\rho$  e  $\pi$  na fase de Higgs, quando comparados com a fase simétrica em altas energias.

# Capítulo 2

## Modelo de Yukawa-Higgs

A matéria é constituída por férmions (partículas com spin 1/2), e no Modelo Padrão há uma partícula escalar  $\phi$ , o ‘bóson de Higgs’, que possui um potencial quártico,  $V \sim \phi^4$ , e que é responsável por gerar a massa das partículas. Nesse capítulo, desejamos estudar uma TQC que fornece um modelo simplificado para esse fenômeno. Portanto, queremos construir uma lagrangeana com um férmion  $\psi^\alpha$  e um campo escalar real  $\phi$ .

A forma de uma lagrangeana  $\mathcal{L}$  pode ser inferida a partir de alguns princípios básicos. Primeiro,  $\mathcal{L}$  deve ser um escalar, portanto só pode conter termos invariantes de Lorentz. Isso fixa a forma dos termos cinéticos (quadráticos nas derivadas),

$$\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \bar{\psi}^\alpha(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^\alpha.$$

Os campos fermionicos  $\psi$ , devem obedecer as a equação de Dirac. Além disso, todos os termos na ação  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  devem ter a mesma dimensão. Em unidades em que  $S$  é adimensional, as dimensões dos termos cinéticos devem cancelar a dimensão de (comprimento)<sup>4</sup> ou (massa)<sup>-4</sup> vinda do elemento  $d^4x$ . Sendo assim, na notação em que  $[d^4x] = -4$ , como cada derivada tem  $[\partial_\mu] = 1$ , o campo  $\phi$  deve ter dimensão  $[\phi] = 1$ . Para os campos fermiônicos o termo cinético (que só possui uma derivada) revela que os campos devem ter  $[\psi] = 3/2$ . Com isso, deduzimos que a interação entre os campos deve ser dada pelo único termo cuja combinação possui a dimensão correta (i.e. 4):  $\bar{\psi}\psi\phi$ .

Podemos então considerar o Modelo de Yukawa com lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^\alpha - \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - g\bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha\phi - \frac{\lambda}{24}\phi^4, \quad (2.1)$$

onde  $\psi^\alpha = (\psi^\alpha)^t\gamma^0$  é um spinor de 4 componentes, e  $m$  é sua massa associada. Os parâmetros de interação são  $g$  e  $\lambda$ . O campo escalar real  $\phi$  possui um termo quadrático de massa  $M$ . A métrica possui assinatura  $\eta = \text{diag}(-, +, +, +)$ , e as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$  são definidas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2x2} \\ \mathbb{1}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Essa lagrangeana apresenta simetria U(1)

$$\bar{\psi}' = e^{-i\theta}\bar{\psi}, \quad \psi' = e^{i\theta}\psi. \quad (2.3)$$

Outras simetrias desse modelo são descritas no capítulo 3. A partir da equação de Euler-Lagrange para campos livres, obtém-se três equações de movimento

$$(\not{\partial} - m)\psi^\alpha = 0, \quad \bar{\psi}^\alpha(\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0, \quad (\square - M^2)\phi = 0. \quad (2.4)$$

A expansão de Fourier para os campos resulta nas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} (a(k)e^{ikx} + a^\dagger(k)e^{-ikx}) \\ \psi^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r(k)u^\alpha e^{ikx} + d_r^\dagger(k)v^\alpha e^{-ikx}) \\ \bar{\psi}^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r^\dagger(k)\bar{u}^\alpha e^{-ikx} + d_r(k)\bar{v}^\alpha e^{ikx}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\Omega^2 = k^2 + M^2$  e  $\omega^2 = k^2 + m^2$ . Os spinores  $u^\alpha$  e  $v^\alpha$  são definidos no cap. 38 do livro de Srednicki [1].

A teoria quântica de campos consiste em quantizar esses campos clássicos [5][1]. No processo de quantização, surgem algumas inconsistências por causa da aparição de grandezas infinitas não-físicas. Ao fim desse capítulo, isso nos levará à necessidade de uma renormalização do modelo.

## 2.1 Quantização Canônica

Não vamos abordar em detalhes o processo de quantização dos campos clássicos, vamos apenas fazer uma revisão dos fatos mais relevantes para o restante do trabalho.

Após a quantização, as amplitudes de Fourier se tornam os operadores de criação e aniquilação. Assim, os operadores  $a(k)$  e  $a^\dagger(k)$  do campo escalar estão sujeitos à álgebra dos comutadores

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 \delta(k - k'). \quad (2.6)$$

O estado de vácuo é definido como o estado de energia, momento e carga zero  $|0\rangle$ . O operador  $a^\dagger(k)$  atua no vácuo criando partículas quânticas relativísticas

$$(2\Omega_k)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^3 a^\dagger(k)|0\rangle = |k\rangle. \quad (2.7)$$

Os operadores  $b_r(k)$ ,  $b_r^\dagger(k)$ ,  $d_s(k)$  e  $d_s^\dagger(k)$  estão associados à criação e aniquilação de partículas e anti-partículas fermiônicas. Esses operadores estão sujeitos à seguinte álgebra

$$\begin{aligned} \{b_r(p), b_{r'}^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 \delta_r^{r'} \delta(p - p'), \\ \{d_s(p), d_{s'}^\dagger(p')\} &= (2\pi)^3 \delta_s^{s'} \delta(p - p'). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Quando  $b^\dagger(k)$  e  $d^\dagger(k)$  atuam no vácuo, há criação de partículas

$$\begin{aligned} (2w_{p_1})^{\frac{1}{2}}(2\pi)^3 b_r^\dagger(p_1)|0\rangle &= |p_1, r\rangle \\ (2w_{p_2})^{\frac{1}{2}}(2\pi)^3 d_s^\dagger(p_2)|0\rangle &= |p_2, s\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Os operadores  $a(k)$ ,  $b_s(k)$  e  $d_s(k)$ , ao atuarem no estado de vácuo, o aniquilam

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad b_s(k)|0\rangle = 0, \quad d_s(k)|0\rangle = 0. \quad (2.10)$$

As quantidades conservadas deste modelo são

$$\begin{aligned} H &= \int d^3k \left[ \Omega_k a^\dagger(k)a(k) + \omega_k (b_r^\dagger(k)b_r(k) + d_r^\dagger(k)d_r(k)) \right] \\ \vec{P} &= \int d^3k \vec{K} \left[ a^\dagger(k)a(k) + b_r^\dagger(k)b_r(k) + d_r^\dagger(k)d_r(k) \right] \\ Q &= \int d^3k \left[ b_r^\dagger(k)b_r(k) - d_r^\dagger(k)d_r(k) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

O estado de uma partícula quântica relativística é descrito por energia, momento e carga

$$H|k, \pm\rangle = \omega_k|k, \pm\rangle, \quad P|k, \pm\rangle = k|k, \pm\rangle, \quad Q|k, \pm\rangle = \pm|k, \pm\rangle. \quad (2.12)$$

Com o uso das definições (2.5) junto das relações de comutação (2.6), anti-comutação (2.8) e a equação (2.11), são obtidas as seguintes expressões

$$[H, a^\dagger] = \omega_k a^\dagger, \quad [P, a^\dagger] = k a^\dagger, \quad [Q, b^\dagger] = +b^\dagger \quad [Q, d^\dagger] = -d^\dagger. \quad (2.13)$$

## 2.2 Propagadores livres

Existe um objeto que deve descrever o processo de deslocamento de um campo  $\phi$  entre a posição  $x$  no tempo  $t_x$  e a posição  $y$  no tempo  $t_y$ . Esse objeto é chamado de propagador, definido para o campo escalar como

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle. \quad (2.14)$$

Desta forma utilizando as equações (2.5) e (2.6), obtém-se o propagador

$$D(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)} \frac{e^{ip(x-y)}}{2\Omega_p}, \quad (2.15)$$

que por sua vez está sujeito a transformações de Lorentz, implicando em dois casos, o tipo-tempo e o tipo-espaço. Daí encontram-se os limites de causalidade e não causalidade da teoria, descritos pela relação de comutação

$$\Delta(x - y) \equiv [\phi_1(x), \phi_2(y)] = D(x - y) - D(y - x). \quad (2.16)$$

Um intervalo do tipo-tempo tem  $\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu < 0$ , ou seja sendo  $|\Delta t^2| > |\Delta \vec{x}^2|$ , o deslocamento pode ser tomado quando  $(x_1 - x_2)^2 = 0$ . Esse tipo de intervalo carrega a informação de causalidade, que está expressa dentro do cone de luz, confirmando que a teoria é de partículas quânticas e relativísticas. O detalhe é compreender que por fora do cone também é possível afirmar que não há causalidade. Para que isto ocorra um campo

$\phi_1$  dentro do cone não pode enxergar um campo  $\phi_2$  fora do cone. Logo estes campos devem comutar

$$[\phi_1(x), \phi_2(y)] = 0, \quad (2.17)$$

para  $(x - y)^2 > 0$ . Neste caso de intervalo tipo-espaço, toma-se a situação em que  $(x_0 - y_0) = 0$ . Logo

$$\Delta(x - y) \Big|_{x_0=y_0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\Omega_p} \left( e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \right). \quad (2.18)$$

É interessante notar que a troca do integrando no segundo termo de  $\vec{p}$  por  $-\vec{p}$  resulta na comutação.

A representação do propagador expressa na equação (2.15) não é genérica. Nela está implícito que o tempo flui de  $x_0$  para  $y_0$ . De maneira a permitir que o propagador seja uma combinação entre as duas direções temporais, define-se do propagador de Feynman

$$D_F(x - y) = \Theta(x_0 - y_0)D(x - y) + \Theta(y_0 - x_0)D(y - x). \quad (2.19)$$

Esta equação também pode ser obtida a partir do uso do operador de ordenamento temporal, que indica a ordem de atuação dos operadores sendo da direita para a esquerda, ou seja, primeiramente atua-se nos estados associados a tempos maiores, e depois nos estados em tempos menores

$$T\phi(x)\phi(y) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & \text{se } x_0 < y_0 \\ \phi(y)\phi(x), & \text{se } x_0 > y_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

A definição do propagador se torna

$$D_F(x - y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle. \quad (2.21)$$

Há uma possibilidade de escrever o propagador em termos de uma única integral do tipo  $\int d^4p$ . Destrinchando a equação (2.19) e separando a parte temporal da espacial, chega-se na seguinte equação

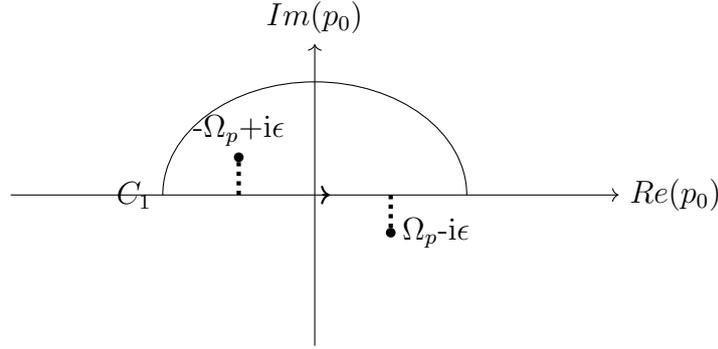
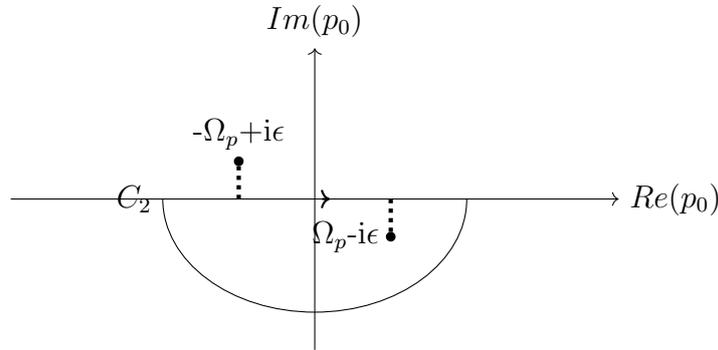
$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \left[ \Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{i\Omega_p(x_0-y_0)}}{2\Omega_p} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-i\Omega_p(x_0-y_0)}}{2\Omega_p} \right]. \quad (2.22)$$

Os dois termos dentro dos colchetes são soluções de uma integral de Cauchy definida em um contorno no plano complexo

$$f(z_i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_i}, \quad (2.23)$$

onde, para o caso de interesse,  $z_i$ 's são os pólos  $p_0 = \pm\Omega_p$ . Portanto reescreve-se a equação (2.22) como

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} i e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \oint_c dp_0 \left[ \Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - \Omega_p)(p_0 + \Omega_p)} - \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - \Omega_p)(p_0 + \Omega_p)} \right].$$

Figura 2.1: Gráfico do contorno  $C_1$  no plano complexoFigura 2.2: Gráfico do contorno  $C_2$  no plano complexo

Apesar de os pólos estarem definidos no eixo real, pode-se fazer uma translação de maneira a ter  $p_0 = -\Omega_p + \frac{i\epsilon}{\Omega_p}$  e  $p_0 = \Omega_p - \frac{i\epsilon}{\Omega_p}$ , com  $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ . E assim obter a representação gráfica da figura 2.1. Para o primeiro termo dos colchetes é escolhido o contorno  $C_1$  por cima, devido a função degrau indicar que  $x_0 > y_0$  e conseqüentemente a contribuição do contorno  $C_2$  será zero. Caso análogo ao anterior está representado na figura 2.2. Porém o contorno escolhido agora será  $C_2$ , por causa da função degrau indicar que  $x_0 < y_0$ , fazendo com que o contorno  $C_1$  não contribua. Ao fim, chega-se na forma desejada do propagador de Feynman como uma única integral

$$D_F(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}.$$

Para o propagador fermiônico é necessário um pouco mais de cuidado ao demonstrar uma forma do propagador similar a essa do caso escalar. Tal construção é feita no apêndice B e o propagador é escrito da seguinte maneira

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\not{p}_{\alpha\beta} + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}. \quad (2.24)$$

## 2.3 Teoria de Perturbação: Operador de Evolução Temporal e Matriz S

Após a construção dos propagadores livres, o próximo passo é entender como os campos interagem. Processos de interações entre os campos podem ser representados por etapas. Imagine um campo em um tempo  $t$  muito antes de ocorrer qualquer tipo de interação [3]

$$\phi_{in}(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x). \quad (2.25)$$

Esses campos livres estão associados ao estado de vácuo  $in$ . De maneira análoga, um longo tempo após a colisão, passa a existir um campo também livre associado a cada partícula. Estes campos existem num espaço de estados de vácuo chamado  $out$

$$\phi_{out}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x). \quad (2.26)$$

Os campos definidos nos estados  $in$  e  $out$  são livres e escalares, logo devem satisfazer a equação de Klein-Gordon. Para férmions, os campos devem satisfazer a equação de Dirac (2.4). Assim os operadores de aniquilação e criação devem atuar no espaço de Fock

$$\begin{aligned} \sqrt{4E_{k_1} E_{k_2}} a_{in}^\dagger(k_1) a_{in}^\dagger(k_2) |0\rangle &= |K_1, K_2; in\rangle \\ \sqrt{4\# E_{p_1} \dots E_{p_n}} a_{out}^\dagger(\vec{p}_1) \dots a_{out}^\dagger(\vec{p}_d) \dots a_{out}^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle &= |p_1, \dots, p_d, \dots, p_n; out\rangle. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sendo  $\#$  o número de  $a^\dagger$ , e estes são tantos quantos a conservação permitir. O vácuo deve se manter invariante, o que indica que a interação não modifica  $|0\rangle$ ,

$$|0, in\rangle = |0, out\rangle = |0\rangle. \quad (2.28)$$

Para que a física em ambos os espaços seja a mesma, o valor esperado não deve mudar

$$\langle in | \phi_{in} | in \rangle = \langle out | \phi_{out} | out \rangle. \quad (2.29)$$

Logo deve existir um operador que ao atuar no estado  $|in\rangle$ , ele o transforma em  $|out\rangle$

$$|in\rangle = S |out\rangle. \quad (2.30)$$

Consequência da equação (2.29) e (2.30) é a unitariedade da matriz S

$$SS^\dagger = 1. \quad (2.31)$$

Daí está estabelecido um jeito de passar do valor esperado de campos  $in$  no estado  $in$ , para campos  $out$  no estado  $out$ ,

$$\langle in | \phi_{in} | in \rangle = \langle out | S^\dagger \phi_{in} S | out \rangle = \langle out | \phi_{out} | out \rangle. \quad (2.32)$$

Isso é verdade se, e somente se,  $\phi_{out} = S^\dagger \phi_{in} S$ . É definido então a amplitude de espalhamento

$$S_{fi} = \langle f, out | i, in \rangle = \langle f, in | S | i, in \rangle. \quad (2.33)$$

A seguir será encontrada qual é a forma do operador  $S$ . Para isso é essencial utilizar os quadros de Schrödinger, Heisenberg e de Dirac para mostrar uma relação do operador de evolução temporal com a matriz  $S$ .

Seja então a densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}^{(S)} = \mathcal{L}_0^{(S)} + \mathcal{L}_{int}^{(S)}. \quad (2.34)$$

definida no Quadro de Schrödinger, ou seja: o que evolui com o tempo são os campos. A passagem do quadro de Schrödinger para o quadro de Heisenberg se dá pela transformação

$$\phi_H = e^{i(H_0+H_{int})t} \phi_S e^{-i(H_0+H_{int})t}, \quad (2.35)$$

onde  $H_{int}$  está relacionada ao termo de interação da lagrangeana  $H_{int} = -L_{int}$ . Do quadro de Schrödinger para o quadro de interação, proposto por Dirac, a transformação é

$$\phi_I = e^{iH_0t} \phi_S e^{-iH_0t}. \quad (2.36)$$

Note que quando não há  $H_{int}$ ,  $\phi_H = \phi_I$ . Para passar do quadro de interação para o quadro de Heisenberg temos

$$\phi_H = U^\dagger(t) \phi_I U(t), \quad (2.37)$$

com  $U(t) = e^{iH_0t} e^{-iH_{int}t}$ . É imediato demonstrar que  $U^\dagger U = 1$ , e  $U(-\infty) = 1$  devido a não haver interação em  $t \rightarrow -\infty$ . Derivando  $U$  em relação a  $t$ , chega-se em uma equação diferencial

$$\frac{dU}{dt} = -iH_{int}^I U(t), \quad H_{int}^I = e^{iH_0t} H_{int}^{in} e^{-iH_0t} \quad (2.38)$$

A solução para esta equação é uma série definida de  $-\infty$  até  $t$ , dada pela exponencial

$$U(t) = T e^{-i \int_{-\infty}^t H_{int}(t') dt'}, \quad (2.39)$$

onde  $T$  representa o ordenamento temporal. Só é possível fazermos isso, pois nossos parâmetros  $g$  e  $\lambda$  são  $\ll 1$ , assim, sendo viável aplicar a teoria de perturbação. Os operadores  $S$  e  $U$  se relacionam da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_{int}(t) dt} \\ &= T e^{-i \int \mathcal{H}_{int}(\phi_{in}) d^4x}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Após descobrir a forma da matriz  $S$ , o cálculo da amplitude de espalhamento pode ser feito. Mas antes de começar os cálculos existem outras quantidades a serem estudadas.

Considere um processo de espalhamento de duas partículas resultando em outras duas partículas, sua amplitude de espalhamento é

$$S_{fi} = \langle k'_1, k'_2; out | k_1, k_2; in \rangle \quad (2.41)$$

onde  $k_s$  são os momentos das partículas que entram e  $k'_s$  os momentos das que saem. Como já visto na equação (2.28), esse processo pode ser escrito da seguinte forma

$$S_{fi} = \langle k'_1, k'_2; out | a_{in}^\dagger(k_1) | k_2; in \rangle \quad (2.42)$$

### 2.3. TEORIA DE PERTUBAÇÃO: OPERADOR DE EVOLUÇÃO TEMPORAL E MATRIZ S21

e por sua vez, com o uso da equação (2.5), os operadores de criação e aniquilação em termos dos campos ficam

$$\begin{aligned} a^\dagger(k) &= i \int [(\partial_0 e^{-ikx}) \phi(x) - e^{-ikx} (\partial_0 \phi(x))] d^3x \\ a(k) &= -i \int [(\partial_0 e^{ikx}) \phi(x) - e^{ikx} (\partial_0 \phi(x))] d^3x. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.42), e usando que o campo  $\phi(x)$  no limite de  $t \rightarrow -\infty$  é  $\phi_{in}(x)$ ,

$$S_{fi} = i \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x_1 \langle k'_1, k'_2; out | [(\partial_0 e^{-ikx}) \phi(x) - e^{-ikx} (\partial_0 \phi(x))] | k_2; in \rangle. \quad (2.44)$$

Para qualquer função  $f(t)$  diferenciável no limite  $t \pm \infty$ , a seguinte relação é válida

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt, \quad (2.45)$$

Note que trocar o limite na amplitude de espalhamento resultará em dois termos, sendo que o primeiro é apenas a troca do limite de  $-\infty$  por  $+\infty$ . Esse termo representa o campo *out*  $\phi_{out}(x)$ , e com ele está a informação do operador de criação *out*  $a^\dagger_{out}(p_1)$ , associado ao momento  $p_1$ . Então chega-se à conclusão que os momentos  $k_s$  devem ser iguais a  $p_1$ , para que esse termo não seja zero. Assim, não há espalhamento e o único termo a contribuir é

$$S_{fi} = -i \int d^3x_1 \langle k'_1, k'_2; out | \partial^0 [(\partial_0 e^{-ikx}) \phi(x) - e^{-ikx} (\partial_0 \phi(x))] | k_2; in \rangle. \quad (2.46)$$

Note também que os campos não são mais *in*, são campos que estão no quadro de Heisenberg. Resolvendo as derivadas, reagrupando e usando que  $\nabla^2 e^{-ikx} = -p^2 e^{-ikx}$ , chega-se em

$$S_{fi} = i \int d^3x_1 e^{-ikx} (\square_{x_1} + M^2) \langle k'_1, k'_2; out | \phi(x_1) | k_2; in \rangle. \quad (2.47)$$

Generalizando para um processo de espalhamento que resulta em  $n$ -partículas, e repetindo o cálculo feito para cada uma das partículas, chega-se na fórmula de Lehmann-SymanziK-Zimmermann (LSZ)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (i)^{n+2} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \int d^3y_1 \cdots \int d^3y_n e^{-ikx_1} e^{-ikx_2} e^{iky_1} \cdots e^{iky_n} \\ &\times (\square_{x_1} + M^2) (\square_{x_2} + M^2) (\square_{y_1} + M^2) \cdots (\square_{y_n} + M^2) \\ &\times \langle 0; out | T [\phi(y_1) \cdots \phi(x_1) \phi(y_n) \phi(x_2)] | 0; in \rangle. \end{aligned} \quad (2.48)$$

O caso análogo com campos fermiônico encontra-se no apêndice B. A formula LSZ mostra a relação dos campos com a amplitude de espalhamento, onde os campos aparecem como uma Função de Green

$$G^{(n)} = \langle 0; out | T [\phi(y_1) \cdots \phi(x_1) \phi(y_n) \phi(x_2)] | 0; in \rangle \quad (2.49)$$

A fim de representar a Função de Green dependente somente do estado *in*, aplica-se o operador de evolução temporal correspondente a cada tempo. Isto resulta numa relação entre o operador  $S$  e  $\phi_{in}$  (o que pode ser encontrado no capítulo 4 do livro do Dasgupta [2] e capítulo 3 do Tong [3])

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\langle 0|S|0\rangle} \langle 0|T(\phi_{in}(x_1)\phi_{in}(x_2)\dots\phi_{in}(x_n)S)|0\rangle. \quad (2.50)$$

A teoria de campos pode ser estruturada tanto pelos os operadores de criação e aniquilação que estão ligados diretamente ao momento das partículas, como pelos campos ligados por suas posições. E a formula LSZ demonstrada nessa seção faz a ponte entre estas duas formas.

## 2.4 Seção de choque e Taxa de decaimento

Todos os processos de interações passam pelo cálculo da matriz  $S$ . Uma forma de interpretar esse cálculo foi inventada por Feynman: trata-se de um método que relaciona cada integral a ser calculada a processos físicos representados por diagramas, usando as ‘regras de Feynman’ (ver o apêndice 2.4 o capítulo 5 de [2]). Como visto anteriormente, os processos podem ser descritos em função dos 4-momentos ou das posições, basta que a Formula LSZ seja respeitada, e os diagramas de Feynman se relacionam com os resultados descritos pela eq. (2.33) (para o momento  $p$ ) e pela eq. (2.50) (para a posição  $x$ ).

Desejamos agora descrever processos no nosso modelo, em que a Hamiltoniana de interação é

$$:H_{int} := g : \bar{\psi}\psi\phi : + \frac{\lambda}{24} : \phi^4 : .$$

### 2.4.1 Diagramas tipo árvore

Dado um processo caracterizado pelos estados iniciais e finais

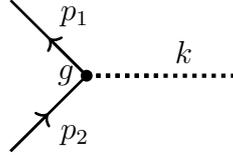
$$\begin{aligned} |i\rangle &= (2\omega_{p_1})^{\frac{1}{2}}(2\omega_{p_2})^{\frac{1}{2}}b_r^\dagger(p_1)d_s^\dagger(p_2)|0\rangle \\ |f\rangle &= (2\omega_k)^{\frac{1}{2}}a^\dagger(k)|0\rangle \end{aligned} \quad (2.51)$$

Até a primeira ordem da matriz  $S$

$$\langle f|S|i\rangle = -ig \int d^4x (2\omega_{p_1})^{\frac{1}{2}}(2\omega_{p_2})^{\frac{1}{2}}(2\omega_k)^{\frac{1}{2}} \langle 0|a(k) : \bar{\psi}\psi\phi : b_r^\dagger(p_1)d_s^\dagger(p_2)|0\rangle \quad (2.52)$$

após a expansão de Fourier dos campos, a única combinação diferente de zero vem do termos

$$\begin{aligned} \phi(x) &\sim a^\dagger(k')e^{ik'x} \\ \bar{\psi}(x) &\sim d(p'_1)\bar{v}_r^\alpha e^{-ip'_1x} \\ \psi(x) &\sim b(p'_2)u_s^\alpha e^{-ip'_2x} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Figura 2.3: Diagrama de decaimento  $\phi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ .

utilizando todos os fatores envolvidos e as relações de comutação,

$$\langle f|S|i\rangle = -ig(2\pi)^4\delta^4(k-p_1-p_2)\bar{v}_s^\alpha u_r^\alpha \quad (2.54)$$

Considere agora um processo de espalhamento entre duas partículas fermiônicas, cujo produto são as mesmas duas partículas. A expressão que representa essa interação é

$$\mathcal{T}_{fi} = \langle k'_1 k'_2 |(S-1)|k_1 k_2\rangle \quad (2.55)$$

onde  $\mathcal{T}$  indica somente as partes que interagem. Interações do tipo escalar de ordem  $\lambda$  e fermiônicas de ordem  $g$  não contribuem para o espalhamento. O primeiro, por motivo de não apresentar modos de Fourier  $b$  e  $d$ . Já o segundo, porque existe uma quantidade ímpar de campos escalares, e por sua vez um número ímpar de operadores de criação e aniquilação, e

$$\langle 0|a^\dagger|0\rangle = 0 = \langle 0|a|0\rangle.$$

Vamos escrever  $S_{fi}^{(n)}$  para a ordem  $n$  da matriz  $S$ . Será calculado somente a ordem quadrática,  $S_{fi}^{(2)}$ ,

$$S_{fi}^{(2)} = \langle k'_1 k'_2 |g^2 : \bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) :: \bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(y) : |k_1 k_2\rangle \quad (2.56)$$

mais uma vez, foram descartadas as interações escalares pelo mesmo motivo. Com o uso da formula de Dyson, o produto de ordenamentos normais resulta em todas as combinações possíveis de contrações e de ordenamentos mais curtos:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_1}(x_1)\phi(x_1) :: \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_2}(x_2)\phi(x_2) : &= \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \\ &+ \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)} : \phi(x_1)\phi(x_2) : \\ &+ \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)} : \psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \\ &+ : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2) : \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)\phi(x_1)\phi(x_2)} \\ &+ \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)} : \psi_{\alpha_1}(x_1)\bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \end{aligned}$$

Aqui, indicamos as contrações por

$$\overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|0\rangle,$$

etc. São muitos termos, mas uma checagem rápida mostra que, para o caso em estudo no momento,

- O 1º termo todas as contrações saem do bracket. O que fica no bracket representa a propagação livre. O restante está associado a interações do vácuo. Logo não há espalhamento;
- O 2º, 3º e 4º termos dão zero por terem ordenamento normal nos campos escalares;
- O 6º e 7º termos se anulam.

Assim, o único termo contribuinte para o espalhamento é

$$S_{fi}^{(2)} = g^2 \langle k'_1 k'_2 | : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) : | k_1 k_2 \rangle \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} \quad (2.57)$$

$$\mathcal{A}_{fi}^{(2)} = -g^2 \left[ \frac{(\bar{v}_s^\alpha(p_2) u_r^\alpha(p_1)) (\bar{u}_{r'}^\beta(p'_1) v_{s'}^\beta(p'_2))}{(p_1 + p_2)^2 + M^2} - \frac{(\bar{u}_{r'}^\alpha(p'_1) u_r^\alpha(p_1)) (\bar{v}_{s'}^\beta(p'_2) v_s^\beta(p_2))}{(p_1 - p'_1)^2 + M^2} \right] \quad (2.58)$$

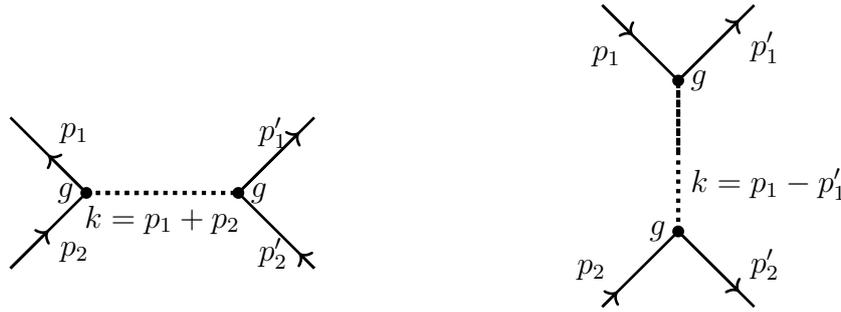


Figura 2.4: Diagrama de espalhamento  $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ .

Diagramas desse tipo, que não tem linhas duplas formando laços, chamamos de ‘diagramas tipo árvore’.

### 2.4.2 Taxa de decaimento

O foco agora será em como extrair informações físicas partindo dessas amplitudes, como seção de choque e Taxa de decaimento. Essas quantidades físicas são valores mensuráveis e por isso devem ser números reais escalares (de Lorentz). Elas também têm que ter relação com a transição do estado inicial das partículas para o final. Com essa condições a probabilidade de transição, encontrada nas referências [1] e [5] é definida

$$\mathcal{P}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}} \equiv \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} \quad (2.59)$$

Para tornar a dedução mais geral, é considerado conhecido o estado inicial de uma partículas, mas no estado final ficará em aberto a quantidade de partículas que saem.

Os denominadores são a normalização da probabilidade

$$\begin{aligned}\langle i|i\rangle &= (2\pi)^3 2E_I \delta^3(0) = 2E_I V \\ \langle f|f\rangle &= \prod [(2\pi)^3 2E_f \delta^3(0)]_i = \prod [2E_f V]_i\end{aligned}\quad (2.60)$$

onde  $V$  é todo o espaço. Fazendo uma separação na matriz  $S$ , onde

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{A}_{fi}. \quad (2.61)$$

A matriz  $\mathcal{A}$  é chamada de amplitude de espalhamento. Substituindo as equações (2.61) e (2.60) em (2.59)

$$\mathcal{P}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}} = \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{2E_I V} [(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)]^2 \prod \left[ \frac{1}{2E_f V} \right]_i \quad (2.62)$$

Com o uso da regra de ouro de Feynman (descrita em [3] seção 3.6.1) o quadrado das funções deltas é a própria função delta multiplicada pelo volume do espaço-tempo

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) (2\pi)^4 \delta^4(0).$$

Analizando o sistema no referencial de repouso da partícula  $E_I = m$ , logo

$$\mathcal{P}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}} = \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{2mV} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) VT \prod \left[ \frac{1}{2E_f V} \right]_i. \quad (2.63)$$

Por fim, deve ser inserido um termo que representa todos os possíveis momentos gerado em todo o volume  $V$ .

$$\mathcal{P}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}} = \int \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_f}{2E_f} \right]_i T. \quad (2.64)$$

A taxa de decaimento, ou probabilidade de decaimento por unidade de tempo, é definida como

$$\Gamma = \dot{\mathcal{P}}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}} = \sum_{\text{estados finais}} \int \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_f}{2E_f} \right]_i \quad (2.65)$$

### 2.4.3 Seção de Choque

Para o cálculo da seção de choque o estado inicial é composto por duas partículas, porque é improvável que mais de duas partículas colidam ao mesmo tempo. O estado final será tratado como generico, podendo abranger quantas partículas a conservação permitir.

Na equação (2.60), a contribuição do estado inicial na normalização deve englobar a energia de uma outra partícula e o volume do espaço,  $V$ . O estado final permanece como

foi feito acima, assim como a amplitude de espalhamento e a regra de ouro de Feynman. A seção de choque diferencial é definida como

$$d\sigma = \frac{\mathcal{P}_{|i\rangle \rightarrow \{|f\rangle\}}}{F} \quad (2.66)$$

sendo  $F$  o fluxo de partículas, que por sua vez pode ser escrito no referencial do centro de massa como

$$F = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{V}. \quad (2.67)$$

O volume  $V$  gerado pela outra partícula cancela com o volume presente no fluxo, assim não há problemas de infinitos. A seção de choque é a integral da seção de choque diferencial sobre todo o espaço,

$$\sigma = \int \frac{1}{4E_{1I}E_{2I}} \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \prod \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_f}{2E_f} \right]_i \quad (2.68)$$

#### 2.4.4 Exemplo de Taxa de Decaimento e de Seção de choque

Considere o processo de decaimento de uma partícula escalar em duas fermiônicas, estudado no início desse capítulo. O cálculo da matriz  $S$  está escrito na equação (2.54), e sua matriz  $\mathcal{A}$  fica

$$\mathcal{A}_{sr} = -ig\bar{v}_s^\alpha(p_1)u_r^\alpha(p_2). \quad (2.69)$$

A matriz  $\mathcal{A}$  não é escalar e nem  $|\mathcal{A}|^2$ ,

$$|\mathcal{A}_{sr}|^2 = g^2\bar{v}_s^\alpha(p_1)u_r^\alpha(p_2)\bar{u}_r^\beta(p_2)v_s^\beta(p_1) \quad (2.70)$$

Portanto deve ser feito uma soma sobre todos os spins. Definimos então

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{A}_{sr}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\mathcal{T}_{sr}|^2. \\ &= \frac{g}{2} \sum_{r,s} u_r^\alpha(p_2)\bar{u}_r^\beta(p_2)v_s^\beta(p_1)\bar{v}_s^\alpha(p_1) \\ &= \frac{g}{2} (-\not{p}_2 + m)_{\alpha\beta} (-\not{p}_1 - m)^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para auxiliar o desenvolvimento dessa conta e de futuras, usaremos as variáveis de Mandelston, definidas em [1], definida por

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2 = -(p'_1 + p'_2)^2 \\ t &= -(p_1 - p'_1)^2 = -(p_2 - p'_2)^2 \\ u &= -(p_1 - p'_2)^2 = -(p_2 - p'_1)^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

para o caso de interesse,  $p_1'^2 = p_2'^2 = -m^2$ ,  $k^2 = -M^2$  e vale só  $s = -k^2 = -(p_1 + p_2)^2$ . Como o uso das variáveis de Mandelston, a equação (2.71) fica

$$\langle |\mathcal{A}_{sr}|^2 \rangle = \frac{g^2}{2} \left[ \frac{s}{2} + m(p_1' - p_2') \right] \quad (2.73)$$

substituindo esse resultado na eq. (2.65), a taxa de decaimento fica

$$\Gamma = \frac{g^2}{4M} \left[ \frac{s}{2} + m(p_1' - p_2') \right] \int \delta^4(k - p_1' - p_2') \left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_1'}{2E_1'} \frac{d^3 p_2'}{2E_2'} \right] \quad (2.74)$$

Separando as deltas em parte dos 3-momentos e em energia, no referencial de repouso  $\vec{k} = 0$ , uma das integrais em  $d^3 p$  é resolvida para  $p_1' = p_2'$

$$\Gamma = \frac{g^2}{4M} \frac{s}{2} \int \delta(E_1' + E_2' - \sqrt{s}) \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|p_1'|^2 dp_1' d\Omega(\theta, \phi)}{4E_1' E_2'} \quad (2.75)$$

onde  $\Omega(\theta, \phi)$  é o ângulo sólido, restando a integração em  $dp_1'$ . Usando  $\int \delta(f(x)) = \sum_i |f'(x_i)|^{-1}$

$$\int \delta(E_1' + E_2' - \sqrt{s}) dp_1' = \frac{E_1' E_2'}{|p_1'| \sqrt{s}} \quad (2.76)$$

temos

$$\Gamma = \frac{g^2}{64\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}. \quad (2.77)$$

Foi usado que no referencial de repouso  $|p_1'| = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m^2}$ .

Tratando agora de seção de choque na sua forma diferencial, executando o mesmo cálculo para a taxa de decaimento,

$$d\sigma \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|p_1'|}{|p_1|} |\mathcal{A}|^2 d\Omega(\theta, \phi) \quad (2.78)$$

Dada a amplitude de espalhamento calculada na equação (2.58) com as trocas de variáveis de Mandelston com todos os spins somados

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{A}_{rr'ss'}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{rr'ss'} |\mathcal{A}_{rr'ss'}|^2 \\ &= \frac{g^4}{4} \sum_{rr'ss'} \left[ \frac{(\bar{v}_s^\alpha(p_2) u_r^\alpha(p_1)) (\bar{u}_{r'}^\beta(p_1') v_{s'}^\beta(p_2'))}{(M^2 - s)} - \frac{(\bar{u}_{r'}^\alpha(p_1') u_r^\alpha(p_1)) (\bar{v}_s^\beta(p_2) v_{s'}^\beta(p_2'))}{(M^2 - t)} \right] \\ &\times \left[ \frac{(\bar{v}_{s'}^\gamma(p_2') u_{r'}^\gamma(p_1')) \bar{u}_r^\sigma(p_1) v_s^\sigma(p_2)}{(M^2 - s)} - \frac{(\bar{v}_{s'}^\gamma(p_2') v_s^\gamma(p_2)) (\bar{u}_r^\sigma(p_1) u_{r'}^\sigma(p_1'))}{(M^2 - t)} \right] \quad (2.79) \end{aligned}$$

Em todos os termos haverá uma soma nos índices dos campos  $\alpha\beta\gamma\sigma$ , configurando assim um traço completo ou produtos de traços:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{rr'ss'}|^2 \frac{4}{g^4} &= \frac{Tr[u_{r'}(p'_1)\bar{u}_{r'}(p'_1)v_{s'}(p'_2)\bar{v}_{s'}(p'_2)]Tr[u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)]}{(M^2 - s)^2} \\
&+ \frac{Tr[u_{r'}(p'_1)\bar{u}_{r'}(p'_1)u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)]Tr[v_{s'}(p'_2)\bar{v}_{s'}(p'_2)v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)]}{(M^2 - t)^2} \\
&- \frac{Tr[u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)v_{s'}(p'_2)\bar{v}_{s'}(p'_2)u_{r'}(p'_1)\bar{u}_{r'}(p'_1)]}{(M^2 - t)(M^2 - s)} \\
&- \frac{Tr[\bar{u}_r(p_1)u_{r'}(p'_1)u_r(p_1)\bar{u}_{r'}(p'_1)v_{s'}(p'_2)\bar{v}_{s'}(p'_2)v_s(p_2)\bar{v}_s(p_2)]}{(M^2 - s)(M^2 - t)} \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Substituindo em  $\langle |\mathcal{A}_{rr'ss'}|^2 \rangle$ , o somatório é no índice de spin e o traço no índice do campo. Trocando a ordem de atuação dos dois, atuando primeiro o traço, e usando em cada termo as propriedades dos traços encontrada em [?],

$$\begin{aligned}
Tr[\not{p}_1\not{p}_2] &= -4p_1p_2 \\
Tr[\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4] &= -4[(p_1p_4)(p_2p_3) - (p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_2)(p_3p_4)] \\
Tr\left[\prod_i \not{p}_i\right] &= 0, \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (2.81)
\end{aligned}$$

a equação (2.58) fica

$$\langle |\mathcal{A}_{rr'ss'}|^2 \rangle = g^4 \left[ \frac{(s - 4m^2)^2}{(M^2 - s)^2} + \frac{(t - 4m^2)^2}{(M^2 - t)^2} + \frac{st - 4m^2u}{(M^2 - s)(M^2 - t)} \right] \quad (2.82)$$

Por fim foi usada também a equação (2.72). Esse resultado expressa uma simetria na troca de  $s \rightarrow t$ . Então a seção de choque diferencial fica

$$d\sigma = \frac{g^4}{64\pi^2s} \frac{|p'_1|}{|p_1|} \left[ \frac{(s - 4m^2)^2}{(M^2 - s)^2} + \frac{(t - 4m^2)^2}{(M^2 - t)^2} + \frac{st - 4m^2u}{(M^2 - s)(M^2 - t)} \right] d\Omega(\theta, \phi) \quad (2.83)$$

## 2.5 Regularização e Renormalização

Alguns dos processos devem ser estudados com mais detalhes, e esse é o caso dos diagramas do tipo 1-loop. Alguns desses diagramas dão contribuições infinitas quando calculadas as suas amplitudes de espalhamento. Isso claramente é um problema, mas há técnicas que nos permitem remover esses infinitos respeitando a física.

Calcularemos algumas amplitudes, usaremos o processo de regularização para identificar os infinitos e apresentaremos uma forma de os extrair, por meio da renormalização. Deste último tiramos a lição mais importante da TQC: não é suficiente começarmos com teoria clássica de campos e usar a quantização canônica.

Com o uso da eq. 2.33, vamos exemplificar o cálculo de alguns diagramas em que uma partícula escalar de momento  $k$  propaga, sujeita a interação de Yukawa

$$: H_{int} :=: g\bar{\psi}^\alpha\psi_\alpha\phi : + \frac{\lambda}{24} : \phi^4 : .$$

A matriz S fica

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle k'|S|k\rangle \\
&= \sum_r \frac{(-i)^r}{r!} \langle k'| \left[ \int d^4x_r \left( g : \bar{\psi}^{\alpha_r}(x_r) \psi_{\alpha_r}(x_r) \phi(x_r) : + \frac{\lambda}{24} : \phi^4(x_r) : \right) \right]^r |k\rangle \\
&= \langle k'|k\rangle - \frac{i\lambda}{24} \int d^4x \langle k'| : \phi^4(x) : |k\rangle \\
&\quad - g^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k'| : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_1}(x_1) \phi(x_1) :: \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_2}(x_2) \phi(x_2) : |k\rangle + O(\lambda^2, g^4)
\end{aligned}$$

Sobre essa equação há considerações a serem feitas:

- i O termo  $\langle k'|k\rangle$  não contribui para a interação, ele resulta em uma função delta proveniente da troca de  $aa^\dagger = [a, a^\dagger] + a^\dagger a$  que representa a conservação do 4-momento do propagador livre;
- ii Note que os termos de ordem  $g$  e  $g\lambda$  não são mencionados, isso porque cada campo escalar é proporcional à soma de operadores de criação e aniquilação. Para que houvesse contribuição nessa ordem deveria ter uma forma combinatória de permanecer o mesmo número de  $a(k)$  e  $a^\dagger(k)$ . Isso não é possível pois o número de campos escalares é de ordem ímpar  $\phi$  e  $\phi^5$ , sempre irá sobrar um operador sem seu par. Esse pensamento se estende para toda ordem que resulta em  $\phi^i$ , com  $i$  sendo ímpar;
- iii De forma geral será usado o ordenamento normal afim de não nos depararmos com diagramas do tipo vácuo. Esses diagramas representam a interação do vácuo com ele mesmo. Isso não significa que eles não existam no modelo, apenas vão ser deixados de lado por não serem importantes para a renormalização da teoria. Em particular deve-se deixar de usar esse artifício matemático em interações do tipo II, pois com os processos de vácuo outro processo também resultará em zero;
- iv A soma é interrompida para ordens maiores que  $g^2$ , pois o objetivo, a renormalização, necessita apenas de diagramas de 1-loop.

Analizando a primeira ordem de interação

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{i\lambda}{24} \int d^4x \langle k'| \phi^4(x) |k\rangle \\
&= -\frac{i\lambda}{24} \int d^4x (2\pi)^3 (2\pi)^3 \sqrt{2\Omega_{k'} 2\Omega_k} \langle 0|a(k') : \phi^4(x) : a^\dagger(k)|0\rangle
\end{aligned}$$

como  $\phi \sim a^\dagger(k) + a(k)$ , a contribuição virá das quantidades em que houver números iguais de  $a(k)$  e  $a^\dagger(k)$

$$\begin{aligned}
II &= -\frac{i\lambda}{24} \int \frac{d^4x d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^3 (2\pi)^3 (2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3 (2\pi)^3 \sqrt{2\Omega_{k'} 2\Omega_k}}{\sqrt{2\Omega_{k_1} 2\Omega_{k_2} 2\Omega_{k_3} 2\Omega_{k_4}}} \\
&\quad \times (4!) \langle 0|a(k') [a^\dagger(k_1) a(k_2) a^\dagger(k_3) a(k_4)] a^\dagger(k)|0\rangle \\
&\quad \times e^{-i(k_1 - k_2 + k_3 - k_4)x}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Para chegar nessa expressão foi aberto todos os campos com 4-momentos distintos. Nesse passo aparecem varias combinações dos operadores de criação e aniquilação que não dão zeros. Mas são apenas permutações nos índices de  $k$ , contribuindo com iguais valores, por isso o fator 4!. Utilizando a relação de comutadores, integrando em relação a  $x$  e posteriormente em relação  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_4$  obtem-se

$$\begin{aligned} II &= -i\delta^4(k - k')\lambda \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Omega_{k_3}} \\ &= -i\delta^4(k - k')\lambda \int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_3^2 + M^2} \end{aligned} \quad (2.85)$$

A parte da integral corresponde a um propagador que propaga de  $x$  e retorna a  $x$ . É um caso particular do que foi visto na seção (2.2). Ainda é necessario o cálculo explícito da integral, para ter em mãos a expressão completa até ordem  $O(g^2)$  do propagador perturbado. Será preciso o conhecimento de novas tecnicas de cálculo. Para o caso III

$$III = -\frac{g^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k' | : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_1}(x_1) \phi(x_1) :: \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_2}(x_2) \phi(x_2) : | k \rangle$$

Como não há férmions externos, os internos devem contrair entre si. Usando a formula de Dyson,

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_1}(x_1) \phi(x_1) :: \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_2}(x_2) \phi(x_2) : &= \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\phi(x_1) \phi(x_2)} \\ &+ \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)} : \phi(x_1) \phi(x_2) : \\ &+ \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2)} : \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) \phi(x_1) \phi(x_2) : \\ &+ : \bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2) \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2) \phi(x_1) \phi(x_2) : \end{aligned}$$

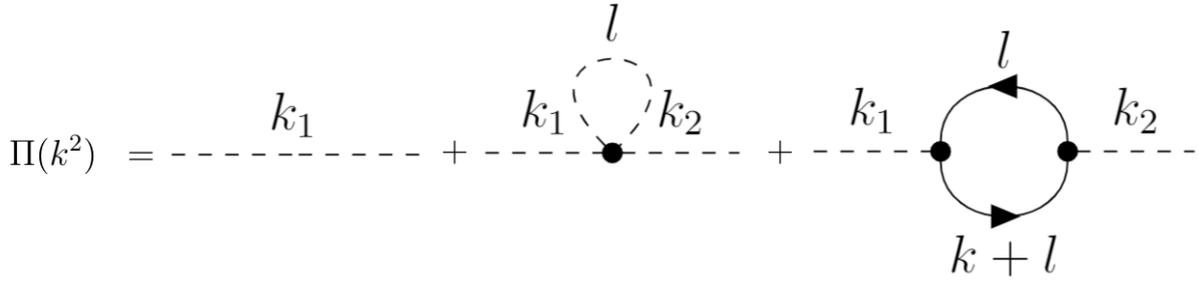
Por causa das duas ultimas linhas terem o ordenamento normal nos férmions, suas contribuições são zero. (Note que  $\langle 0 | a(k') : b(k_1) b^\dagger(k_2) : = 0$ .) A respeito do primeiro termo, tem-se números multiplicando o propagador livre. Mais à frente será mostrado que isso está associado a processos desconectados. Desconsiderando esse processo, o único termo de interesse diferente de zero é

$$\begin{aligned} III &= -\frac{g^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k' | : \phi(x_1) \phi(x_2) : | k \rangle \overbrace{\bar{\psi}^{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_2}(x_2)} \overbrace{\psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}^{\alpha_2}(x_2)} \\ &= g^2 \delta^4(k - k') \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{[-l + m]_{\alpha_1 \alpha_2} [-(l + k) + m]^{\alpha_2 \alpha_1}}{l^2 + m^2 (l + k)^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Utilizando o apêndice A para I, II e III, chega-se nos diagramas da figura 2.5.

As integrais (2.85) e (2.86) apresentam singularidades quando o 3-momento é igual a zero,  $|\vec{p}|^2 = 0$ . É necessário trocar o espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano por meio de uma rotação de Wick. A rotação de Wick consiste em fazer a troca da coordenada temporal  $t$  para  $it$ . Logo

$$\begin{aligned} S^2 &= -t^2 + |\vec{x}|^2 \rightarrow t^2 + |\vec{x}|^2 \\ p^2 = -m^2 &= -E^2 + |\vec{p}|^2 \rightarrow E^2 + |\vec{p}|^2. \end{aligned} \quad (2.87)$$


 Figura 2.5: Diagrama perturbado até  $O(\lambda, g^2)$  do propagador escalar conectado

A consistência dessa troca está descrita no apêndice (). Os problemas estão localizados nas integrais

$$\Pi_\phi(k) = i\lambda \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M^2} \quad (2.88)$$

$$\Pi_\psi(k) = ig^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{[-l + m]}{l^2 + m^2} \frac{[-(l + k) + m]}{(l + k)^2 + m^2} \quad (2.89)$$

Uma forma de resolver essas integrais é tratando o problema em  $d$ -dimensões e depois voltarmos para  $d = 4$ . Esse método de regularização dimensional, que localiza o termo divergente da integração, será descrito com detalhes.

No intuito de deixar nossos parâmetros  $g$  e  $\lambda$  adimensionais em  $d$ -dimensões, fazemos

$$g \rightarrow g\tilde{\mu}^{\frac{\epsilon}{2}} \quad (2.90)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda\tilde{\mu}^\epsilon \quad (2.91)$$

com  $\epsilon = d - 4$  e  $\mu^2 = 4\pi e^{-\gamma} \tilde{\mu}^2$ . Usaremos as fórmulas retiradas do livro [1]

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2)^a}{(q^2 + d)^b} &= \frac{\Gamma(b - a - \frac{d}{2})\Gamma(a + \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(b)\Gamma(\frac{d}{2})} D^{-(b-a-\frac{d}{2})} \\ \Gamma(-n + x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x} + \dots \\ A^{\frac{\epsilon}{2}} &= 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln A + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Note que para a primeira integral é suficiente coloca-la em  $d$ -dimensões e aplicar diretamente as eq.(2.92)

$$\begin{aligned} \Pi_\phi(k^2) &= i\lambda\tilde{\mu}^\epsilon \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + M^2} \\ &= \lambda\tilde{\mu}^\epsilon \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma(1)\Gamma(\frac{d}{2})} D^{-(1-\frac{d}{2})} \\ &= \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right] M^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

O termo divergente  $\frac{1}{\epsilon}$  está separado, e o próximo passo é calcular os demais, e introduzir na lagrangeana contratermos correspondentes. A segunda integral ainda precisa ser modificada para se parecer com a fórmula (2.92). Seja a relação

$$\frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(p+l)^2 + m^2} = \int_0^{\infty} dx_1 dx_2 e^{-x_1(l^2+m^2) - x_2((k+l)^2+m^2)} \quad (2.94)$$

fazendo a troca de variáveis  $x_1 = xt$  e  $x_2 = t$ , o jacobiano é  $J=-t$ , com  $0 < x < 1$  e  $0 < t < \infty$ . Integrando em termos de  $t$  chega-se em

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{1}{(k+l)^2 + m^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)(l^2 + m^2) + x((k+l)^2 + m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(l+xk)^2 + x(1-x)k^2 + m^2]} \end{aligned}$$

chamando

$$\begin{aligned} q &= l + xp \\ D &= x(1-x)k^2 + m^2. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Colocando o numerador em termo de  $q$ , obtem-se:

$$\begin{aligned} N &= Tr\{(-l+m)[-(l+k)+m]\} \\ &= Tr\{l(l+k)+m^2\} \\ &= -4[l(l+k)+m^2] \\ &= -4[q^2 + q(-2xp+k) + m^2] \end{aligned} \quad (2.96)$$

O termo linear não contribui com os cálculos futuros (termos de ordem  $O(q^i)$ , com  $i=1,3,5\dots$ ), por conta da fórmula (2.92). Já em  $d$  dimensões

$$\begin{aligned} \Pi_{\psi}(k) &= -4ig^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2 + m^2}{(q^2 + D)^2} \\ i\Pi_{\psi}(k) &= \frac{g^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon}(k^2 + 2m) + \frac{k^2}{6} + m^2 - \int dx (3x(1-x)k^2 + m^2) \ln \frac{x(1-x)k^2 + m^2}{\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

é notório a contribuição infinita do momento  $k$  e da massa  $m$ , no primeiro termo dentro dos colchetes. Agora resta introduzir esses infinitos na lagrangeana como contratermos com a função de cancela-los. Definimos então

$$\Pi_{1loop}^{ct}(k^2) = -(Z_{\phi} - 1)k^2 - (Z_M - 1)M^2. \quad (2.98)$$

com

$$\begin{aligned} Z_{\phi} &= 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \\ Z_M &= 1 - \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Uma observação válida, em  $Z_M$  contribui a primeira ordem de interação escalar e a segunda ordem de interação fermiônica. No caso em que  $g \rightarrow 0$  os parâmetros de correção  $Z_\phi$  e  $Z_M$  passam a ser como a teoria escalar, assim com deve ser.

Voltado o olhar agora para o propagador fermiônico, especificamente de 1-loop, conectado e 1PI, figura 2.5, repetimos o processo de regularização dimensional. O diagrama da

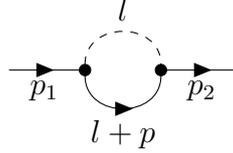


figura 2.5 é a integral

$$\delta^4(p_1 - p_2) \bar{u}_{r1}^\alpha g^2 \int d^4l \frac{1}{l^2 + M^2} \frac{-(l + \not{p}) + m}{(l + p)^2 + m^2} u_{r2}^\beta. \quad (2.100)$$

O denominador pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{1}{l^2 + M^2} \frac{1}{(p + l)^2 + m^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(l + xp)^2 + x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)M^2]^2}$$

sendo que

$$\begin{aligned} q &= l + xp \\ D &= x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)M^2 \\ N &= -\not{q} + (1-x)\not{p} + m. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Com N sendo o numerador, contribuindo apenas para ordem  $q^0$ . Passando para d-dimensão, usando as fórmulas (2.92), fazendo  $d = 4 - \epsilon$  com  $\epsilon \rightarrow 0$  e integrando em relação a x,

$$\Sigma_{1loop}(\not{p}) = \frac{-g^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} (\not{p} + 2m) - \int_0^1 dx [(1-x)\not{p} + m] \ln \left( \frac{D}{\mu^2} \right) \right\} \quad (2.102)$$

Uma observação a respeito da parte finita. Para cada método de regularização usado no cálculo (dimensional,  $\overline{MS}$ , Pauli-Villars, etc) o resultado é diferente. Uma explicação para isso é o fato de que qualquer constante somada a um número infinito permanece infinito. Portanto podemos impor uma constante arbitrária a ser definida a partir de algumas condições. Mais à frente usaremos isso. A renormalização essencialmente se constitui em redefinirmos nossas massas, campos e parâmetros ( $g$ ,  $\lambda$ ). Para isso, fazemos uma subtração desses termos infinitos diretamente da lagrangeana inicial. Os chamaremos de contra termos, e para esse diagrama podem ser escritos como

$$\Sigma_{1loop}^{ct}(\not{p}) = -(Z_\psi - 1)\not{p} - (Z_m - 1)m. \quad (2.103)$$

Os fatores de renormalização do campo e massa do férmion fica

$$\begin{aligned} Z_\psi &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \\ Z_m &= 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

Foi feito aqui o cálculo de um dos diagramas de de propagador até 1-loop. No apêndice A estão descritas as regras de Feynman, as quais fazem uma passagem direta do diagrama para o resultado de  $S_{fi}$ . Assim precisaremos apenas nos preocupar em resolver as integrais (se a esse diagrama estiver associado integrais), e pelo mesmo método exposto anteriormente, fazendo o mesmo processo para todos os outros. Seguimos com o diagrama de 3 vértices da figura 2.6. A representação matemática do loop da figura 2.6 em d-dimensão

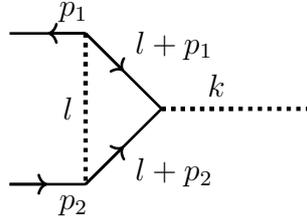


Figura 2.6: Diagrama de decaimento de  $\phi \rightarrow \bar{\psi}\psi$  em ordem  $g^3$ .

é

$$V_{\phi,\psi}^{(3)}(p, p') = g^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{l^2 + M^2} \frac{[-(l + \not{p}_1) + m]}{(l + p_1)^2 + m^2} \frac{[-(l + \not{p}_2) + m]}{(l + p_2)^2 + m^2} \quad (2.105)$$

Para fazer o argumento da integral ficar da forma apresentada na equação (2.92), será usado uma formula geral

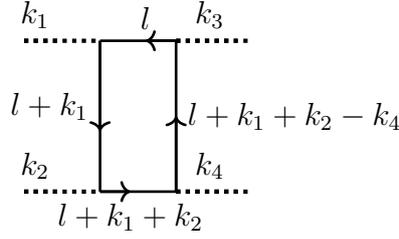
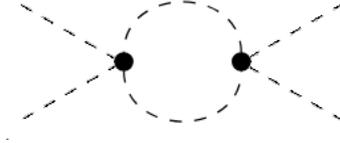
$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1)! \int_0^1 \frac{dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots + x_n - 1)}{[x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n]^2} \\ \int dF_3 &= (n-1)! \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta(x_1 + \cdots + x_n - 1) = 1 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Assim usando a equação (2.106) em (2.105)

$$V_{\phi,\psi}^{(3)}(p, p') = g^3 \int dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{N}{(q^2 + D)^3} \quad (2.107)$$

Considerando as seguintes trocas de variáveis

$$\begin{aligned} q &= l + p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ D &= x_1(1-x_1)p_1 + x_2(1-x_2)p_2 + 2x_1 x_2 p_1 \cdot p_2 (x_1 + x_2) m^2 + x_3 M^2. \end{aligned} \quad (2.108)$$


 Figura 2.7: Diagrama de espalhamento de partículas escalares em ordem  $g^4$ 

 Figura 2.8: Diagrama de espalhamento de partícula escalar em ordem  $\lambda^2$ 

$N$  é definido como numerador, fazendo a substituição de  $q$  nele, chega-se em  $N = -q^2 + O(q)$ . Ordens ímpares em  $q$  não contribuem. Logo

$$V_{\phi,\psi}^{(3)}(p, p') = \frac{g^3}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \text{finita} \right] \quad (2.109)$$

Diferente dos contra-termos feitos para os propagadores, o vértice é modificado inserindo ordens maiores de  $g$ . A correção das contribuições de 1-loop no novo vértice deve ser

$$iV_{\phi,\psi}(p, p') = iZ_g g + iV_{\phi,\psi}^{(3)}(p, p') \quad (2.110)$$

e então o fator de renormalização fica

$$Z_g = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \quad (2.111)$$

O 4-vertice é resultado do espalhamento  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ . Para esse modelo existem dois tipos de 1-loop produzidos, um para ordem  $g^4$  (figura 2.7) e outro em  $\lambda^2$  (figura 2.8). Para a ordem  $g^4$

$$g^4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \frac{[-l + m]}{l^2 + m^2} \frac{[-(l + k_1) + m]}{(l + k_1)^2 + m^2} \frac{[-(l + k_1 + k_2) + m]}{(l + k_1 + k_2)^2 + m^2} \frac{[-(l + k_1 + k_2 - k_3) + m]}{(l + k_1 + k_2 - k_3)^2 + m^2} \right\}. \quad (2.112)$$

Vale mencionar que tomando o traço do numerador, e aplicando as trocas de variáveis para resolver as integrais de Feynman, os únicos termos contribuintes serão de ordem  $O(q^0, q^2, q^4)$ , onde

$$q = l + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (2.113)$$

mas os de ordem  $O(q^0, q^2)$  resultam finitos, assim não há interesse neles para a renormalização. A partir dessa análise pode-se tomar os momentos externos iguais a zeros,

$$V_{\psi 1-loop}^{(4)} = g^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^4}{(q^2 + m^2)^4}. \quad (2.114)$$

Para ordem  $\lambda^2$

$$V_{\phi 1-loop}^{(4)} = -\lambda^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + M^2)} \frac{1}{(l + k_1 + k_2)}. \quad (2.115)$$

Usando para os dois vértices o método de regularização dimensional, chega-se nos seguintes resultados para o fator de renormalização

$$Z_\lambda = 1 - \left( \frac{3\lambda}{16\pi^2} - \frac{3g^4}{\pi^2\lambda} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right). \quad (2.116)$$

Foi usado que há seis maneiras de organizar as linhas externas no diagrama da figura 2.7 e três maneira em 2.8.

Identificando todos esses diagramas de 1-loop, devemos fazer as correções na lagrangeana inserindo alguns contra termos, a fim de conseguir cancelar esses termos problemáticos. Então

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{cont}, \quad (2.117)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct} &= i(Z_\psi - 1)\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + m(Z_m - 1)\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}(Z_\phi - 1)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(Z_M - 1)M^2\phi^2 - gZ_g\bar{\psi}\psi\phi - \frac{\lambda}{24}Z_\lambda\phi^4. \\ \mathcal{L}_r &= iZ_\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + mZ_m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}Z_MM^2\phi^2 - gZ_g\bar{\psi}\psi\phi - \frac{\lambda}{24}Z_\lambda\phi^4. \end{aligned}$$

À medida que fazemos os cálculos dos diagramas com essa nova lagrangeana, devemos utilizar a nova interação. Logo nossa matriz S também não é a mesma. Dessa forma aparecerão termos que, com nossos contra termos, irão se cancelar.

Nós buscamos teorias renormalizáveis, para que possamos resolver os problemas de infinito. Mas nem todas teorias podem ser renormalizadas.

A medida que vamos avançando na expansão da matriz S, irão surgir diagramas chamados de 1PR (one-particle Reducible). São chamados assim porque podemos separar 1 diagrama em 2 ou mais, ao fazer um “corte” no propagador interno. Os diagramas de nosso interesse são os diagramas 1PI (one-particle irreducible) e conectados.

## 2.6 Quebra de simetria

### 2.6.1 Paridade

Uma propriedade fundamental de uma TQC são as suas simetrias [1]. Para o modelo de Yukawa real existe uma classe de transformações que não modificam a lagrangeana. Por exemplo a transformação  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi e^{(iq)}. \quad (2.118)$$

Essa simetria leva à conservação de cargas. Agora imagine uma transformação que faz a troca de  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ . Um operador  $P$  que faz essa transformação tem um operador unitário  $U(P)$

$$U_P^{-1}\psi(x)U_P = D(P)\psi(Px), \quad P = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.119)$$

Uma condição para esse operador é de fazer voltar a ser o que era o campo ao atuar novamente,

$$U_P^{-2}\psi(x)U_P^2 = D^2(P)\psi(Px), \quad P = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.120)$$

resultando em dois casos, onde  $D(P) = 1$  é o caso trivial, o operador não efetua nenhuma mudança. No outro caso  $D(P) = -1$ . Claramente para o escalar  $\phi(x)$  a transformação é bem direta  $U_P^{-1}\phi(x)U_P = -\phi(-x)$ . Para  $\psi$  a análise deve ser pela expansão do campo livre, já que atuar com o operador de paridade nos momentos resulta em  $U_P^{-1}\vec{P}U_P = -\vec{P}$ . Mas nos operadores cri/ani há uma dependência na direção do spin  $\pm$ . Ao efetuar novamente a paridade retornar, dessa vez não é limitante aos números reais, o fator que acompanha a transformação é um número complexo  $\eta$ , já que os operadores também o são. Dessa maneira atuando a paridade no campo fermiônico livre

$$\begin{aligned} U_P^{-1}\psi^\alpha(x)U_P &\sim \eta b_r(-p)u^\alpha(p)e^{ipx} + \eta^* d_r^\dagger(-p)v^\alpha(p)e^{-ipx} \\ &= \eta b_r(p)u^\alpha(-p)e^{-ipx} + \eta^* d_r^\dagger(p)v^\alpha(-p)e^{ipx} \end{aligned} \quad (2.121)$$

na passagem para a última linha foi feita a troca de  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ . As exponenciais podem ser reescritas com  $-px \rightarrow p(Px)$ . E com o uso das relações

$$\begin{aligned} u_r(-p) &= \gamma_0 u_r(p) \\ v_r(-p) &= -\gamma_0 v_r(p) \end{aligned} \quad (2.122)$$

chega-se em

$$\begin{aligned} U_P^{-1}\psi^\alpha(x)U_P &= i\gamma_0\psi^\alpha(Px) \\ U_P^{-1}\bar{\psi}^\alpha(x)U_P &= -i\bar{\psi}^\alpha(Px)\gamma_0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

com  $\eta = i$ .

Sabendo como todos os campos se transformam, pode-se aplicar a transformação de paridade na lagrangeana (2.1)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^\alpha - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - g \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha \phi - \frac{\lambda}{24} \phi^4. \quad (2.124)$$

É fácil ver que somente o termo de interação  $g\bar{\psi}\psi\phi$  ao aplicar o operador paridade não se mantém invariante: ele muda de sinal para  $-g\bar{\psi}\psi\phi$ . Para contornar isso, pode-se definir o termo de interação como sendo  $g\bar{\psi}(i\gamma_5)\psi\phi$ , assegurando assim a paridade da lagrangeana.

No livro ([1]), para a teoria de Spin  $\frac{1}{2}$ , o autor insiste em seguir com os cálculos de diagramas 1-loop com uma lagrangeana de simetria de paridade. Para efeito de contas,

a mudança não acarreta resultados distintos apresentados aqui, em se tratar de contra-termos e renormalização. Para uma breve visão das mudanças, basta olhar o exemplo do propagador escalar em ordem  $(ig)^2$

$$(ig)^2 \delta^4(k - k') \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{[-l + m]_{\alpha\beta}}{l^2 + m^2} (\gamma_5)^{\beta\gamma} \frac{[-(l + k) + m]_{\gamma\sigma}}{(l + k)^2 + m^2} (\gamma_5)^{\sigma\alpha}. \quad (2.125)$$

Apesar da contribuição de um fator negativo, diferente do calculado anteriormente, as  $\gamma_5$  atuando nos momentos contribuem com o mesmo fator nos termos que levam ao infinito. Portanto os parâmetros  $Z$ s mantem suas estruturas.

Dito isso, o leitor deve atentar para o fato de que, na física, há uma regra de que as teorias, de maneira geral, obedecem as transformações CPT (Simetria de carga, temporal e de paridade). Esse exemplo da exigencia para essa determinada simetria, vem do intuito do autor estudar a TQC por um outro prisma. Diferente do que será seguido nesse trabalho, mas vale a citação para compriender a importancia que as simetria tem em uma teoria.

## 2.6.2 Simetria quiral

Seja a lagrangeana (2.1), agora com a massa dos férmions  $m \rightarrow 0$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - g \bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha \phi - \frac{\lambda}{24} \phi^4, \quad (2.126)$$

Aparece um tipo de simetria, chamada de simetria quiral, ao efetuar a troca de  $\phi(x) \rightarrow -\phi(-x)$  e  $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$  ( $\bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi} \gamma_5$ ) [1][6]. Para os termos puramente escalares é visível a invariância sob essas transformações. Para os outros, seguem as demonstrações:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' \partial_\mu \gamma^\mu \psi' &= -\bar{\psi} \gamma_5 \partial_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \psi = \bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi \\ \bar{\psi}' \psi' \phi' &= -\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_5 \psi (-\phi) = \bar{\psi} \psi \phi \end{aligned} \quad (2.127)$$

Para esse modelo de Yukawa-Higgs, o potencial é

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{M^2}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{24} \phi^4(x) \quad (2.128)$$

com  $M^2 < 0$  e  $\lambda > 0$ . Temos dois vácuos interagentes independentes e diferentes de zero, localizados em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}(\phi)}{\partial \phi} &= M^2 \phi(x) + \frac{\lambda}{6} \phi^3(x) = 0 \\ \phi(x) &= \left( \frac{6|M|^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} = \pm v \end{aligned} \quad (2.129)$$

Os vácuos são ligados por uma simetria de paridade, veja a figura 2.9. Se antes o vácuo tinha como valor esperado zero devido aos campos serem livres, em uma teoria interagente

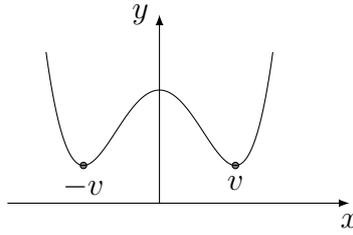


Figura 2.9: Gráfico do potencial, onde os mínimos representam dois vácuos independentes.

com potencial  $\phi^4$  isso não é mais verdade. Então

$$\begin{aligned}\langle 0; +|\phi(x)|0; + \rangle &= +v \\ \langle 0; -|\phi(x)|0; - \rangle &= -v \\ \langle 0; -|0; + \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{2.130}$$

Quando escolhemos um dos vácuos, a simetria deixa de existir, ela é quebrada.

Esse modelo é renormalizado e sua renormalização é dada tomando o limite de  $m \rightarrow 0$  nos fatores  $Z$ 's da renormalização da teoria com massa. Logo a lagrangeana renormalizada fica

$$\mathcal{L}_r = iZ_\psi \bar{\psi} \not{\partial} \psi - Z_g g \bar{\psi} \psi \phi - Z_\phi \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - Z_M \frac{M^2}{2} \phi^2(x) - Z_\lambda \frac{\lambda}{24} \phi^4(x).\tag{2.131}$$

Na equação (2.126), pode-se definir uma translação nos campos a fim de estabelecer um novo valor para o campo em que seu valor esperado deva valer zero. Definindo então  $\rho(x) = \phi(x) + v$ ,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - g\bar{\psi} \psi \rho(x) - \tilde{m} \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{M_\rho^2}{2} \rho^2 - \frac{1}{2} M_\rho \lambda^{\frac{1}{2}} \rho^3 - \frac{1}{24} \lambda \rho^4$$

A quebra de simetria traz um termo de interação escalar  $\rho^3$  e introduz a massa  $\tilde{m} = gv$  aos férmions. Dá para ver que nessa lagrangeana em termos do campo  $\rho$  não há as simetrias com que iniciamos. A pergunta que se faz agora é: será que essa nova lagrangeana é renormalizável? Se sim, é necessário calcular todos os diagramas de 1-loop para encontrar os contra-termos? Existe um método que impõe condições sobre a parte finita dos fatores  $Z$ s que asseguram a renormalização já calculada da antiga lagrangeana com simetria exata. Seja a equação (2.99) escrita como

$$\begin{aligned}Z_M &= 1 - \frac{\lambda}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + K_B \right) \\ Z_\lambda &= 1 - \left( \frac{3\lambda}{16\pi^2} - \frac{3g^4}{\pi^2 \lambda} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + K_C \right) \\ Z_g &= 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + K_D \right)\end{aligned}\tag{2.132}$$

$K_B$ ,  $K_C$  e  $K_D$  são as partes finitas. Para a regularização (dimensional) feita, o valor delas é bem definido. Com outras regularizações os valores também são bem definidos, mas

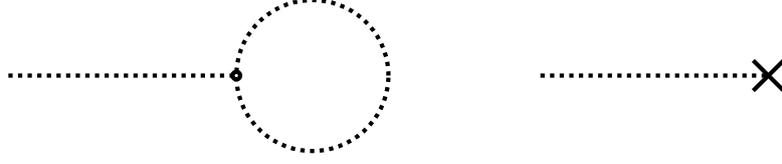


Figura 2.10: Diagrama do campo escalar em  $s^{(1)} = \rho^3$  fechando em 1-loop e  $s^{(1)} = \rho$ .

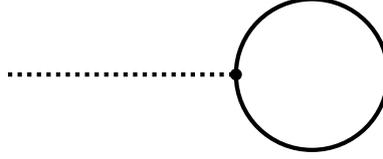


Figura 2.11: Diagrama do campo escalar em  $s^{(1)} = \bar{\sigma}\sigma\rho$  fechando em 1-loop fermiônico.

diferentes. Para fins de renormalização, não há diferenças na escolha da regularização, já que o que se encontra são infinitos, e um valor infinito mais um finito será sempre infinito. O que se espera encontrar nesse processo de permanência da renormalização após uma quebra de simetria, é justamente uma relação entre os termos finitos.

Da equação (2.131), fazendo a troca para o campo  $\rho$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= iZ_\psi \bar{\psi} \not{\partial} \psi - Z_g g \bar{\psi} \psi [\rho(x) + v] - Z_\phi \frac{1}{2} \partial_\mu [\rho(x) + v] \partial^\mu [\rho(x) + v] \\
&+ Z_M \frac{|M|^2}{2} [\rho(x) + v]^2(x) - Z_\lambda \frac{\lambda}{24} \tilde{\mu}^\epsilon [\rho(x) + v]^4(x) \\
&= iZ_\psi \bar{\psi} \not{\partial} \psi - Z_g g \bar{\psi} \psi \rho(x) - \tilde{m} \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} Z_\phi \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{4} (Z_M - 3Z_\lambda) M_\rho^2 \rho^2 \\
&+ \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \rho - \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \rho^3 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \rho^4 \quad (2.133)
\end{aligned}$$

Apareceram interações de ordem  $\rho$  e  $\rho^3$ . Temos também a massa do campo  $\psi$ ,  $\tilde{m} = Z_g g v$ . Uma interação desse tipo faz com que o valor esperado do campo seja diferente de zero. Mostraremos que de alguma maneira essas interações geram diagramas do tipo 1-loop e se cancelam.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \rho(x) S_1 | 0 \rangle &= \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle \\
&+ \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) \rho(y) \rho(y) | 0 \rangle \\
&+ Z_g g \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \rho(y) | 0 \rangle \quad (2.134)
\end{aligned}$$

Cada integral representa diagramas expressos nas imagens abaixo

Todas essas interações estão ligadas a propagação dos campos  $\rho$  finalizando no vácuo. Fazendo na segunda linha a contração dos campos  $\rho$  em  $y$ , para o terceiro a contração

dos campos  $\psi$  em  $y$ . Assim podemos por em evidência  $\int d^4y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle$ .

$$\begin{aligned}
& \int d^4y \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(y) | 0 \rangle \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle = \\
& = \int d^4y \int d^4p \frac{\not{p} + m_f}{p^2 + m_f^2} \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle \\
& = \frac{m_f^3}{4\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\mu^2}{m_f^2} \right] \int d^4y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{2.135}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) \rho(y) \rho(y) | 0 \rangle = \\
& = \int d^4y \int d^4k \frac{1}{k^2 + M_\rho^2} \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle \\
& = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \frac{\mu^2}{M_\rho^2} \right] M_\rho^2 \int d^4y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Pondo em evidência o termo comum a todos, para que o valor esperado seja zero basta que

$$0 = \left[ \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 - \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{M_\rho^3}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \frac{\mu^2}{M_\rho^2} \right] + g Z_g \frac{\tilde{m}^3}{4\pi^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \frac{\mu^2}{\tilde{m}^2} \right) \right]$$

A renormalização contempla até o primeiro loop. Com isso as ordens a serem consideradas devem ser  $O(\lambda, \frac{g^4}{\lambda})$ . Colocando em evidência o termo  $\frac{1}{2} \left( \frac{3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3$  e substituindo  $m_f = gv$ . Deve-se considerar os fatores  $Z_\lambda$  e  $Z_g$  nos dois últimos 1, pois para o resto cai em caso de ordem maiores. Assim temos a condição necessária para  $\langle 0 | \rho S | 0 \rangle = 0$

$$K_B - 3k_C + 1 = \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) - \ln \left( \frac{\mu^2}{\tilde{m}^2} \right) \frac{g^4}{\lambda^2}. \tag{2.137}$$

Esse resultado mostra que a constante  $K_D$  para ordem 1-loop não se encaixa nas condições. Uma observação válida é que quando  $g \rightarrow 0$  a condição sobre os termos finitos bate com o modelo escalar sem férmions apresentado no apêndice C e [1].

## 2.7 Grupo de Renormalização

Ao invés de trabalharmos com a lagrangeana renormalizada, podemos definir a lagrangeana “nua”,  $L_r$

$$L = i\bar{\psi}_0 \gamma_\mu \partial^\mu \psi_0 + m_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} M_0^2 \phi_0^2 - g_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 \phi_0 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4.$$

e escrever seus termos em relação a lagrangeana renormalizada. Dessa maneira, fazemos com que os “campos nus” devam ser independentes de  $\mu$ , pois  $\mu$  foi um termo introduzido

para que conseguíssemos resolver os problemas dos infinitos (usamos eles para que os parâmetros  $g$  e  $\lambda$  permanecessem adimensionais). Logo  $\mu$  surge como consequência de um método de solução, devendo então não fazer parte dessa nossa  $\mathcal{L}_0$ . Vamos comparar  $\mathcal{L}_0$  com  $\mathcal{L}_r$

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= Z_\psi^{\frac{1}{2}} \psi \\
\phi_0 &= Z_\phi^{\frac{1}{2}} \phi \\
g_0 &= Z_\phi^{-\frac{1}{2}} Z_\psi^{-1} Z_g g \tilde{\mu}^{\frac{\epsilon}{2}} \\
\lambda_0 &= Z_\phi^{-2} Z_\lambda \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \\
m_0 &= Z_\phi^{-1} Z_m m \\
M_0 &= Z_\phi^{-\frac{1}{2}} Z_M^{\frac{1}{2}} M.
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Pode-se definir

$$\ln(Z_\phi^{-\frac{1}{2}} Z_\psi^{-1} Z_g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(g, \lambda)}{\epsilon^n} \tag{2.139}$$

sendo que a aproximação será feita até a primeira ordem de  $\epsilon^1$ , já que a renormalização foi feita até o 1-loop

$$-\frac{1}{2} \ln Z_\phi - \ln Z_\psi + \ln Z_g = -\frac{1}{2} \ln \left[ 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] - \left[ 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] + \ln \left[ 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] \tag{2.140}$$

usando a expansão em série de Taylor

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1} \tag{2.141}$$

Assim

$$G_1(g, \lambda) = \frac{5g^2}{16\pi^2} + O(g^3) \tag{2.142}$$

Para a equação em  $g_0$ ,

$$\ln(g_0) = \ln(Z_\phi^{-\frac{1}{2}} Z_\psi^{-1} Z_g g \tilde{\mu}^{\frac{\epsilon}{2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n(g, \lambda)}{\epsilon^n} + \ln g + \frac{\epsilon}{2} \ln \tilde{\mu} \tag{2.143}$$

como não há a dependência de  $\mu$ , derivando em termo de  $\mu$  o lado esquerdo da equação deve ser zero

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ g \frac{\partial G_n}{\partial \mu} \frac{dg}{d\mu} + g \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} \right] \frac{1}{\epsilon} + \frac{dg}{d \ln \mu} + \frac{1}{2} \epsilon g \tag{2.144}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{dg}{d \ln \mu} &= -\frac{1}{2}\epsilon g + \beta_g(g, \lambda) \\ \beta_g(g, \lambda) &= g \left[ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial g} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] G_1 \\ &= \frac{5g^3}{16\pi^2} + O(g^4)\end{aligned}\tag{2.145}$$

O mesmo raciocínio é feito para  $\lambda$ . Seja então a função logaritmica definida por uma soma infinita

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(g, \lambda)}{\epsilon^n} &= \ln(Z_\phi^{-2} Z_\lambda) \\ \frac{L_1(g, \lambda)}{\epsilon} &= -2 \ln \left[ 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] + \ln \left[ 1 + \frac{3g^2}{\lambda\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{3\lambda}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &= \frac{3\lambda}{16\pi^2} + \frac{g^2}{2\pi^2} - \frac{3g^4}{\pi^2\lambda}\end{aligned}\tag{2.146}$$

a primeira ordem  $\epsilon$  que contribui devido ao lado direito da equação. Então a função beta para  $\lambda$  fica

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{d \ln \mu} &= -\epsilon\lambda + \beta_\lambda(g, \lambda) \\ \beta_\lambda(g, \lambda) &= \lambda \left[ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial g} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] L_1 \\ &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \frac{\lambda g}{2\pi^2} - \frac{3g^4}{\pi^2}\end{aligned}\tag{2.147}$$

O próximo a ser analisado será o termo massivo  $m_0$ . Considere

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_n(g, \lambda)}{\epsilon^n} &= \ln(Z_\phi^{-1} Z_m) \\ \mathcal{N}_1 &= \frac{3g^2}{8\pi^2}\end{aligned}\tag{2.148}$$

derivando  $\ln(m_0)$  em relação a  $\mu$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_n(g, \lambda)}{\epsilon^n} \frac{dg}{\partial g} \frac{d\lambda}{d \ln \mu} + \frac{\mathcal{N}_n(g, \lambda)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d \ln \mu} + \frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu}\tag{2.149}$$

utilizando a função beta, para  $n=1$

$$\gamma_m(g) \equiv \frac{1}{m} \frac{dm}{d \ln \mu} = -\frac{3g^2}{8\pi^2}\tag{2.150}$$

onde é definida a dimensão anômala da massa  $m$ . Para a massa do campo escalar

$$\mathcal{M}_1 = \left[ \frac{g^2}{8\pi^2} + \frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{g^2 m^2}{8\pi^2 M^2} \right] \quad (2.151)$$

$$0 = \sum \left[ \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial g} \frac{dg}{d \ln \mu} + \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d \ln \mu} + \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial m} \frac{dm}{d \ln \mu} + \frac{\partial \mathcal{M}_n}{\partial M} \frac{dM}{d \ln \mu} \right] + \frac{1}{M} \frac{dM}{d \ln \mu} \quad (2.152)$$

$$\gamma_M(g, \lambda, m, M) \equiv \frac{1}{M} \frac{dM}{d \ln \mu} = \left( 1 - \frac{g^2 m^2}{4\pi^2 M^2} \right)^{-1} \left[ -\frac{g^2}{8\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} + \frac{g^2 m^2}{4\pi^2 M^2} \gamma_m \right] \quad (2.153)$$

O próximo passo é reescrever os propagadores e os vértices “nus” em termos dos renormalizados. A exemplo disso seja o vértice  $V_0$

$$V_0(p^2) = Z_\phi^{\frac{1}{2}} Z_\psi V(p^2), \quad (2.154)$$

aplicando o  $\ln$  e derivando em relação a  $\ln \mu$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \mu} \ln(V_0(p^2)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \mu} \ln(Z_\phi) + \frac{d}{d \ln \mu} \ln(Z_\psi) + \frac{d}{d \ln \mu} \ln(V(p^2)) \\ 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \mu} \ln(Z_\phi) + \frac{d}{d \ln \mu} \ln(Z_\psi) \\ &+ \frac{1}{V(p^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \frac{d(g)}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{d(\lambda)}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{d(m)}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{d(M)}{d \ln \mu} \frac{\partial}{\partial M} \right]. \end{aligned}$$

Definindo as dimensões anômalas dos campos

$$\begin{aligned} \gamma_\phi &\equiv \frac{1}{2} \frac{d \ln Z_\phi}{d \ln \mu} = \frac{g^2}{4\pi^2}, \\ \gamma_\psi &\equiv \frac{d \ln Z_\psi}{d \ln \mu} = \frac{g^2}{8\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Chega-se na eq. de Callan-Symanzik

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} + \gamma_M M \frac{\partial}{\partial M} + 2\gamma_\phi + \gamma_\psi \right] V(p^2) = 0. \quad (2.156)$$

Aqui cabe uma observação, para  $g = 0$  a equação passa a ser como o caso escalar. Note também que a equação de Callan-Symanzik é encontrada para todos os propagadores e vértices. Para uma teoria de campos sem massas ( $m=0$ ,  $M=0$ ) e considerando as  $\beta's = 0$ , chegamos em uma teoria de campo conforme que apresenta simetria de dilatação:

$$V(p^2) = \frac{1}{(p^2)^{2\gamma_\phi + \gamma_\psi}}. \quad (2.157)$$

Feito isso, a equação Callan-Symanzik é uma ponte entre as teorias quânticas de campos e a teoria de campo conforme.

## Capítulo 3

# QES contínua no modelo de Yukawa-Higgs complexo

A teoria quântica de campos é construída sobre o espaço-tempo de Minkowski, com simetrias do grupo de Poincaré  $SO(3,1) \otimes T(4)$ . Nesse grupo estão presentes simetrias associadas a translação, rotação e boosts (“rotação no espaço-tempo”). Por serem propriedades do espaço-tempo, essas simetrias ligadas ao espaço-tempo devem existir independentemente do modelo. Além das simetrias de Poincaré, cada TQC possui um conjunto de simetrias *internas* — transformações específicas dos campos que deixam a ação invariante, e levam a diferentes tipos de cargas conservadas. Pode ocorrer que alguns vácuos não sejam invariantes sob as transformações das simetrias internas que preservam a ação. Quando os campos estão nesses vácuos, diz-se que houve uma ‘*quebra espontânea de simetria (QES)*’.

### 3.1 Modelo de Yukawa Complexo

Nesse capítulo, desejamos estudar a QES em um modelo de Yukawa que é uma generalização do modelo estudado no capítulo anterior. Agora, temos um campo escalar complexo  $\phi$ . Acrescentamos a condição de o campo  $\psi$  não possuir massa, por ser de nosso interesse. Temos a lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha - \partial^\mu \phi \partial_\mu \bar{\phi} - M^2 \phi \bar{\phi} - g \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta - \frac{\lambda}{4} (\phi \bar{\phi})^2, \quad (3.1)$$

apresenta novas simetrias internas, algo como uma “carga” quiral. Esse modelo é estudado no artigo [4] publicado em 2017, com um foco diferente do que vamos tratar na nossa dissertação, mas dando um indício de que o assunto é atual.

A nova lagrangeana possui uma simetria dada pela combinação de cargas escalares e

cargas fermiônicas. É possível ver essa simetria fazendo as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
 \psi &\rightarrow e^{-i\gamma_5\alpha}\psi \\
 \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\gamma_5\alpha} \\
 \phi &\rightarrow e^{2i\alpha}\phi \\
 \bar{\phi} &\rightarrow e^{-2i\alpha}\bar{\phi},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

e substituindo na lagrangeana acima. É direta a compreensão de que os termos cinético, massivo e de interação do campo escalar complexo se mantêm invariantes. Vamos nos ater a mostrar os demais. Primeiro

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'^\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi'^\alpha &= \bar{\psi}^\alpha e^{-i\gamma_5\alpha} \gamma^\mu \partial_\mu e^{-i\gamma_5\alpha} \psi^\alpha \\
 &= \bar{\psi}^\alpha e^{-i\gamma_5\alpha} \gamma^\mu \left( 1 - \gamma_5\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_5\alpha)^2 - \dots \right) \partial_\mu \psi^\alpha \\
 &= \bar{\psi}^\alpha e^{-i\gamma_5\alpha} \left( 1 + \gamma_5\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_5\alpha)^2 + \dots \right) \gamma^\mu \psi^\alpha \\
 &= \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Usamos nesse cálculo a propriedade  $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$ , e vimos que esse termo se mantém invariante. Agora,

$$\begin{aligned}
 g\bar{\psi}'(1 + \gamma_5)\phi'\psi' &= g\bar{\psi}e^{-i\gamma_5\alpha}(1 + \gamma_5)e^{-i\gamma_5\alpha}\psi e^{2i\alpha}\phi \\
 &= g\bar{\psi}(1 + \gamma_5)e^{2i\alpha(1-\gamma_5)}\psi\phi \\
 &= g\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\left(1 + (1 - \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)^2 + \dots\right)\psi\phi \\
 &= g\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\phi\psi
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para chegar neste resultado basta usar que  $(1 \pm \gamma_5)^n = 2^{(n-1)}(1 \pm \gamma_5)$  e  $(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0$ . Temos então a demonstração que  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ . Os campos desse modelo expandido em série de Fourier assumem as formas

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} (a(k)e^{ikx} + c^\dagger(k)e^{-ikx}) \\
 \bar{\phi}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} (a^\dagger(k)e^{-ikx} + c(k)e^{-ikx}) \\
 \psi^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r(k)u^\alpha e^{ikx} + d_r^\dagger(k)v^\alpha e^{-ikx}) \\
 \bar{\psi}^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r^\dagger(k)\bar{u}^\alpha e^{-ikx} + d_r(k)\bar{v}^\alpha e^{ikx}).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A introdução do campo complexo vem acompanhada de uma nova relação de comutação associada ao operador  $c(k)$ . Diferente do modelo Yukawa real, no setor escalar agora

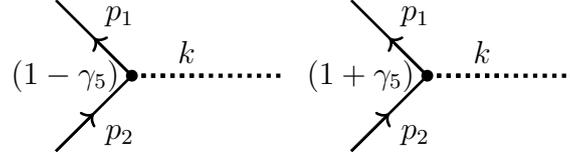


Figura 3.1: Diagrama decaimento  $\phi \rightarrow \bar{\psi}\psi$  e  $\bar{\phi} \rightarrow \bar{\psi}\psi$ .

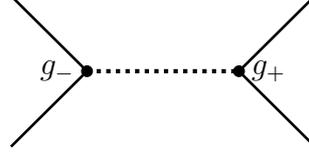


Figura 3.2: Diagrama espalhamento  $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ .

há uma simetria  $U(1)$ , ligada à carga de partículas e anti-partículas. Os férmions não tem massa, e isso causa uma série de consequência na estruturação da expansão de Fourier, abordadas no apêndice C. O propagador livre para férmions se mantem idêntico ao calculado no apêndice B. E para os escalares

$$D_F(x - y) = \langle 0|T(\bar{\phi}(x)\phi(y))|0\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}.$$

## 3.2 Cálculo dos diagramas 1-loop

Para ser possível o uso das regras de Feynman é necessario o cálculo do vértice de Yukawa complexo. Seja o processo de decaimento de uma partícula escalar

$$S_{fi} \sim \langle 0|a(k) : \bar{\psi}^{\alpha_1} [(1 + \gamma_5)\phi + (1 - \gamma_5)\bar{\phi}]_{\alpha_1\beta_1} \psi^{\beta_1} : b_r^\dagger(p_1)d_s^\dagger(p_2)|0\rangle$$

por causa de  $a(k)$ , a contribuição vem de  $\bar{\phi}$ . Fazendo a expansão dos campos e usando as regras de comutação

$$S_{fi} = ig \frac{\sqrt{2}}{2} \delta^4(k - p_1 - p_2) \bar{u}_r^\alpha (1 - \gamma_5)_{\alpha\beta} u_s^\beta \quad (3.6)$$

já com os fatores omitidos anteriormente. Perceba que existem duas maneiras de ocorrer o decaimento escalar, seja pela partícula ou anti-partícula. Para isso são definidos dois tipos de diagramas de Feynman. Veja a figura 3.1. É relevante observar que no caso com 2 para 2 férmions (conectado), o propagador interno tem que ser ligado aos vértices com  $\gamma_5$  com sinais diferentes caso contrário o diagrama tem valor zero. Veja figura 3.2.

Nossa intenção é reproduzir o que foi feito anteriormente no modelo de Yukawa real. Para começar, será feito o cálculo do propagador escalar até ordem  $r=2$ . Seja a interação dada por

$$: H_{int} :=: g \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5)\phi + (1 - \gamma_5)\bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta : + : \frac{\lambda}{4} (\phi\bar{\phi})^2 :$$

A matriz S fica

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \sum_{r=0}^2 \frac{(-i)^r}{r!} \langle k' | \left[ \int d^4x_r \left( : g \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta : + : \frac{\lambda}{4} (\phi \bar{\phi})^2 : \right) \right]^r | k \rangle \\
 &= \langle k' | k \rangle - \frac{i\lambda}{4} \int d^4x \langle k' | : (\phi \bar{\phi})^2 : | k \rangle \\
 &\quad - \frac{g^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k' | : \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta : \\
 &\quad \times : \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta : | k \rangle.
 \end{aligned}$$

Como visto no capítulo 2, o primeiro termo da expansão corresponde ao propagador livre. A diferença aqui é que não foi definida a partícula ( $a(k)$ ), podendo ser também a anti-partícula  $c(k)$ . Para fins de cálculos, é indiferente qual operador está criando ou aniquilando. Note que para o propagador livre o resultado será uma função delta para ambos

$$\langle k' | k \rangle = \sqrt{4\Omega_k \Omega_{k'}} \langle 0 | a(k') a^\dagger(k) | 0 \rangle = 2\Omega_k \delta^3(k - k') \quad (3.7)$$

$$\langle k' | k \rangle = \sqrt{4\Omega_k \Omega_{k'}} \langle 0 | c(k') c^\dagger(k) | 0 \rangle = 2\Omega_k \delta^3(k - k'). \quad (3.8)$$

Para a interação de ordem  $\lambda$ , com a propagação de partículas, temos um par de operadores cri/ani que deve se arranjar com um par de campos. Existem duas formas de isso ser feito, sobrando assim dois campos internos que devem se agrupar a fim de se ter números iguais de aniquilação e criação

$$\begin{aligned}
 \bar{II} &= -\frac{i\lambda}{4} \int \frac{d^4x d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^3 (2\pi)^3 (2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3 (2\pi)^3 \sqrt{2\Omega_{k'} 2\Omega_k}}{\sqrt{2\Omega_{k_1} 2\Omega_{k_2} 2\Omega_{k_3} 2\Omega_{k_4}}} \\
 &\quad \times (2) \langle 0 | a(k') [a^\dagger(k_1) a(k_2) a^\dagger(k_3) a(k_4) + a^\dagger(k_1) c(k_2) c^\dagger(k_3) a(k_4)] a^\dagger(k) | 0 \rangle \\
 &\quad \times e^{-i(k_1 - k_2 + k_3 - k_4)x} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Ambos os termos no colchetes contribuem com mesmo valor, ocasionando um fator de 4 que cancela com o denominador. O resultado é idêntico ao calculado no cap 2

$$II = -i\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + M^2}. \quad (3.10)$$

Para a ordem de interação  $g^2$ , será necessário calcular a seguinte expressão

$$\langle 0 | a(k') : \bar{\psi}^{\alpha_1} [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha_1\beta_1} \psi^{\beta_1} :: \bar{\psi}^{\alpha_2} [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha_2\beta_2} \psi^{\beta_2} : a^\dagger(k) | 0 \rangle$$

como toda contribuição não nula vem das combinações em que há o mesmo número de  $a(k)$  e de  $a^\dagger(k)$ , apenas os termos cruzados importam. Os dois termos cruzados resultam nos mesmos valores

$$\langle 0 | a(k') : \bar{\psi}^{\alpha_1} (1 + \gamma_5)_{\alpha_1\beta_1} \phi \psi^{\beta_1} :: \bar{\psi}^{\alpha_2} (1 - \gamma_5)_{\alpha_2\beta_2} \bar{\phi} \psi^{\beta_2} : a^\dagger(k) | 0 \rangle$$

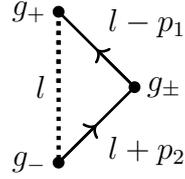


Figura 3.3: Diagrama 3-vértice complexo sem as pernas externas.

Ainda restam várias combinações a se considerar, mas pelo critério de se considerar somente diagramas de 1-loop conectados deve ser feito a contração dos campos fermiônicos. Assim sobram os campos escalares dentro do ordenamento normal:

$$\langle 0|a(k') : \phi(x)\bar{\phi}(y) : a^\dagger(k)|0\rangle (1 + \gamma_5)_{\alpha_1\beta_1} (1 - \gamma_5)_{\alpha_2\beta_2} \overline{\psi^{\alpha_1}\psi^{\beta_2}} \overline{\psi^{\alpha_2}\psi^{\beta_1}}$$

Logo, substituindo esse resultado na ordem  $g^2$ , já aplicando a expansão dos campos escalares e introduzindo as energias provenientes da atuação dos operadores cri/ani no vácuo,

$$\begin{aligned} \bar{I}\bar{I}\bar{I} &= \frac{g^2}{2} \delta^4(k - k') \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (1 + \gamma_5)_{\alpha_1\beta_1} \frac{-l^{\alpha_1\beta_2}}{l^2} (1 - \gamma_5)_{\alpha_2\beta_2} \frac{-(l+k)^{\alpha_2\beta_1}}{(l+k)^2} \\ &= \frac{g^2}{2} \delta^4(k - k') \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} Tr \left[ (1 + \gamma_5) \frac{-l}{l^2} (1 - \gamma_5) \frac{-(l+k)}{(l+k)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Foi usado que a matriz  $\gamma_5$  é simétrica, assim configurando o traço. Agora será usado que  $(1 + \gamma_5)l(1 - \gamma_5) = 2(1 + \gamma_5)l$  e  $tr(\gamma_5 l) = 0$ . Então

$$\bar{I}\bar{I}\bar{I} = g^2 \delta^4(k - k') \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} Tr \left[ \frac{l}{l^2} \frac{(l+k)}{(l+k)^2} \right] \quad (3.12)$$

Existe uma diferença explícita dessa integral para a massa do processo no cap.2, que permanece até o fim do cálculo. Basta olhar o limite  $m \rightarrow 0$  em (2.97)

$$i\Pi_\psi(k) = \frac{g^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} k^2 + \frac{k^2}{6} - \int 3x(1-x)k^2 \ln \frac{x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx. \quad (3.13)$$

Para o decaimento em ordem  $g^3$ , será feito o cálculo de maneira diferente. Utilizando a discussão sobre o vértice, sabe-se que a contribuição não nula vem da ligação do propagador escalar interno por  $g_- \rightarrow g_+$ , na figura 3.3, onde omitimos as pernas por não serem relevantes para o cálculo. O fator  $g_\pm$  representa que nesse ponto cabe ambos os  $g$ 's. Iniciando a estruturação do resultado do diagrama em  $g_+$  até retornar a ele,

$$\bar{V}(p_1, p_2) \sim g^3 \int d^4l (1 + \gamma_5)_{\alpha\beta} \frac{1}{l^2 + M^2} (1 - \gamma_5)_{\beta\gamma} \frac{(l + p_2)_{\gamma\sigma}}{(l + p_2)^2} (1 \pm \gamma_5)_{\sigma\theta} \frac{(l - p_1)_{\theta\rho}}{(l - p_1)^2} \quad (3.14)$$

observe que as pontas aparentam estar com índices livres, mas há uma soma nos termos das pernas. Essa conta é finalizada analisando os três primeiros termos. O propagador

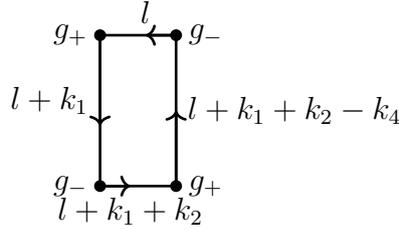


Figura 3.4: Diagrama 4-vértice complexo sem as pernas externas.

escalar não tem índice então podemos fazer a troca de posição com as matrizes sem modifica-las. Sobrando assim a expressão

$$(1 + \gamma_5)_{\alpha\beta}(1 - \gamma_5)_{\beta\gamma} = 0_{\alpha\gamma}. \quad (3.15)$$

Esse resultado representa a não-renormalização do parâmetro  $g$ . Ele não contribui com termos infinitos, assim não há a necessidade de introduzir na lagrangeana o contratermo.

Novamente o cálculo será feito considerando o 1-loop de ordem ( $g^4$ ) sem as pernas. Ver figura 3.4. Necessariamente, os propagadores fermiônicos também deve ser ligados por  $g_+ \rightarrow g_-$ . Esse argumento foi usado para calcular  $III$ ,

$$\bar{V}_\psi(g) = \frac{1}{4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} tr \left\{ \frac{l}{l^2} g_+ \frac{(l + k_1)}{(l + k_1)^2} g_- \frac{(l + k_1 + k_2)}{(l + k_1 + k_2)^2} g_+ \frac{(l + k_1 + k_2 - k_3)}{(l + k_1 + k_2 - k_3)^2} g_- \right\}$$

Usando a técnica apresentada no Cap.2 para a regularização dimensional. Calculando por partes, começando com o numerador

$$\begin{aligned} N &= Tr \{ l g_+ (l + k_1) g_- (l + k_1 + k_2) g_+ (l + k_1 + k_2 - k_3) g_- \} \\ &= 4g Tr \{ (1 + \gamma_5) l (l + k_1) (l + k_1 + k_2) (l + k_1 + k_2 - k_3) \} \\ &= 4g Tr \{ l (l + k_1) (l + k_1 + k_2) (l + k_1 + k_2 - k_3) \} \end{aligned} \quad (3.16)$$

substituindo esse resultado em  $\bar{V}_\psi(g)$ , obtem-se a mesma integral já calculada no Cap.2 com  $m \rightarrow 0$ .

Todos esses cálculos levam a resultados similares com o modelo de Yukawa real. Até o limite calculado em 1-loop, o modelo complexo é renormalizado, com os seguintes con-

tratermos

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}_\phi(k^2) &= \frac{\lambda}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) M^2 \\
\bar{\Pi}_\psi(k^2) &= -\frac{g^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} k^2 + \text{finito} \right) \\
\bar{\Sigma}_{1loop}(\not{p}) &= -\frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} \not{p} + \text{finito} \right) \\
\bar{V}_4^\phi &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \\
\bar{V}_4^\psi &= \frac{3g^4}{\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

O resultado mais expressivo desse modelo é o de  $V_3(p_1, p_2) = 0$ . A lagrangeana renormalizada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= iZ_\psi \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha - Z_\phi \partial^\mu \phi \partial_\mu \bar{\phi} - Z_M M^2 \phi \bar{\phi} \\
&\quad - g \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\psi}^\alpha [(1 + \gamma_5) \phi + (1 - \gamma_5) \bar{\phi}]_{\alpha\beta} \psi^\beta - Z_\lambda \frac{\lambda}{4} (\phi \bar{\phi})^2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

O modelo passou pelo método da regularização para definir seus contra-termos e em seguida os fatores  $Z$ 's da sua renormalização.

### 3.2.1 Taxa de Decaimento

A amplitude de decaimento de uma partícula escalar em duas fermiônicas para esse modelo é

$$\mathcal{A}_{rs} = ig \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{v}_r^\alpha(p_1) (1 - \gamma_5)_{\alpha\beta} u_s^\beta(p_2) \tag{3.19}$$

Para o cálculo do decaimento precisamos do modulo ao quadrado da soma sobre todos os spins dessa quantidade

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{A}_{rs}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{g^2}{2} (1 - \gamma_5)_{\alpha\beta} u_s^\beta(p_2) \bar{u}_r^\gamma(p_2) (1 + \gamma_5)_{\gamma\sigma} v_s^\sigma(p_1) \bar{v}_r^\alpha(p_1) \\
&= \frac{g^2}{4} \text{Tr}[(1 - \gamma_5)(-\not{p}_2)(1 + \gamma_5)(-\not{p}_1)] \\
&= \frac{g^2}{2} \text{Tr}[(1 - \gamma_5)\not{p}_2\not{p}_1].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

No cálculo do modulo é usada a relação  $\mathcal{A}^* = \bar{\mathcal{A}}$ , seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \bar{v} T u \\
\bar{\mathcal{A}} &= \bar{u} \bar{T} v
\end{aligned} \tag{3.21}$$

T uma matriz, vale a relação  $\bar{T} = \gamma_0 T \gamma_0$ . Por isso a troca de sinal na matriz  $\gamma_5$ . Nesse ponto note que o traço de  $\gamma_5 = 0$ , por causa da ausência da massa  $\not{p}_2 \not{p}_1 = -4p_2 p_1 = s$ , assim a taxa de decaimento fica

$$\Gamma = \frac{g^2 \sqrt{s}}{64\pi} \quad (3.22)$$

assim como o encontrado para o modelo de Yukawa-Higgs real, para obter a taxa de decaimento para esse modelo bastava fazer o limite de  $m \rightarrow 0$  na equação (2.77).

# Capítulo 4

## QES quiral contínua e fase de Higgs

A quebra de simetria espontânea no modelo complexo gera um novo modelo com novos campos e outras interações. Esse capítulo terá como foco investigar a renormalização de suas componentes. Dada a quebra de simetria quiral contínua do modelo de Yukawa-Higgs complexo com a massa  $M^2 < 0$  e o parâmetro  $\lambda > 0$  no modelo de Yukawa-Higgs complexo, tem-se dois valores mínimos para o potencial diferente de zero,

$$v = \pm \sqrt{\frac{4|M|^2}{\lambda}} e^{i\alpha}. \quad (4.1)$$

Novamente ao escolher o vácuo desejado a simetria quiral passa a não existir. O fator exponencial representa uma fase, vinda dos campos complexos, sinalizando que nesse modelo não trata-se de apenas dois estados de vácuo mais sim de infinitos. Parametrizamos os campos com

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}(v + \rho(x))e^{2i\frac{\pi(x)}{v}} \\ \psi(x) &= e^{-i\frac{\pi(x)}{v}\gamma_5}\sigma(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo  $\rho$ ,  $\pi$  e  $\sigma$  novos campos. A lagrangeana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\sigma}^\alpha(\not{\partial} + m_f)\sigma_\alpha - g\rho\bar{\sigma}^\alpha\sigma_\alpha + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{M_\rho^2}}(\partial_\mu\pi)\bar{\sigma}^\alpha(\gamma^\mu\gamma_5)_{\alpha\beta}\sigma_\beta \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{M_\rho}\rho\right)^2\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi - \frac{1}{2}M_\rho^2\rho^2 - \frac{M_\rho}{2}\sqrt{\lambda}\rho^3 - \frac{\lambda}{16}\rho^4, \end{aligned} \quad (4.3)$$

a massa do campo  $\rho(x)$  é  $M_\rho^2 = 4M^2$  e o campo de Goldstone é  $\pi(x)$ . Esse novo modelo tem componente de interações do tipo escalar massivo, onde as interações são de ordem quártica e cúbica. Essa última é a novidade encontrada nesse trabalho. O novo campo spinorial  $\sigma$  é massivo e sua massa é dependente dos parâmetros de interações. O campo  $\pi$  é não massivo e escalar, e os termos de interações são seus momentos conjugados mesclados com os escalares  $\rho$ , dando forma a interações de 3-vértices e 4-vértices, e mescladas com  $\sigma$ .

Apesar da quebra de simetria quiral, esse novo modelo tem uma simetria remanescente. Fazendo a transformação

$$\pi'(x) = \pi(x) + const \quad (4.4)$$

a lagrangeana se mantém invariante.

## 4.1 Campos livres no novo modelo

A cada campo estão associados operadores de criação e aniquilação

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\Omega)^{\frac{1}{2}}} (a(k)e^{ikx} + a^\dagger(k)e^{-ikx}) \\ \Pi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2E)^{\frac{1}{2}}} (c(k)e^{ikx} + c^\dagger(k)e^{-ikx}) \\ \sigma^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r(k)u^\alpha e^{ikx} + d_r^\dagger(k)v^\alpha e^{-ikx}) \\ \bar{\sigma}^\alpha(x) &= \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega)^{\frac{1}{2}}} (b_r^\dagger(k)\bar{u}^\alpha e^{-ikx} + d_r(k)\bar{v}^\alpha e^{ikx}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Os propagadores dos campos  $\rho$  e  $\sigma$  não precisam ser refeitos, já que assumem a forma dos propagadores de  $\phi$  e  $\psi$ . Para  $\pi$  vale um adendo, apesar de ser escalar e se assemelhar a  $\phi$

$$D_F(x-y) = \langle 0|T(\pi(x)\pi(y))|0\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}.$$

para efeitos de interações, o que importará serão os momentos conjugados

$$\partial_x \partial_y D_F(x-y) = \partial_x \partial_y \langle 0|T(\pi(x)\pi(y))|0\rangle = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{p^2 - i\epsilon} e^{ip(x-y)}.$$

Agora serão feitos os cálculos de todos os novos vértices que dará a relação das regras de Feynman.

## 4.2 Regularização e Renormalização

Essa seção tem o intuito de calcular as amplitudes de espalhamento dos propagadores e dos vértices em 1-loop, para assim ser possível a renormalização do modelo. O método escolhido é o mesmo estudado nos capítulos anteriores. Primeiro identifica-se dos termos infinitos, separa-se dos finitos para assim definir os contra-termos necessários na lagrangeana.

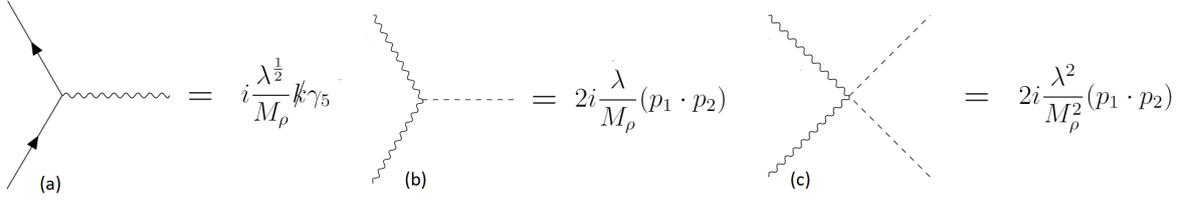


Figura 4.1: (a)Decaimento  $\pi \rightarrow \bar{\sigma}\sigma$ ; (b)Decaimento  $\rho \rightarrow \pi\pi$ ; (c)Espalhamento  $\pi\pi \rightarrow \rho\rho$ .

### 4.2.1 Propagadores

Considere o decaimento da partícula  $\pi$  em partículas  $\sigma$

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{M_\rho^2}} \langle 0 | c(k) : (\partial_\mu \pi) \bar{\sigma}^\alpha (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \sigma_\beta : b_r^\dagger(p_1) d_s^\dagger(p_2) | 0 \rangle \\
 &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{M_\rho^2}} u_s^\alpha(k^\mu \gamma_\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} u_r^\beta \delta^4(k - p_1 - p_2)
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Esse vértice se encontra desenhado na figura 4.1(a) Para a renormalização do campo  $\pi$ , deve-se calcular seu propagador perturbado. Então a matriz S

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &\sim \langle k' | k \rangle - \int d^4x \langle k' | (\partial\pi(x)\phi(x))^2 | k \rangle \\
 &- \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k' | : (\partial_\mu \pi) \bar{\sigma}^\alpha (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \sigma_\beta :: (\partial_\mu \pi) \bar{\sigma}^\alpha (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \sigma_\beta : | k \rangle \\
 &- \int d^4x_1 d^4x_2 \langle k' | : \rho(x) \partial^\mu \pi(x) \partial_\mu \pi(x) :: \rho(y) \partial^\mu \pi(y) \partial_\mu \pi(y) : | k \rangle.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

A matriz S está aproximada, pois os resultados que serão obtidos de todas as interações até 1-loop são zeros. Começando com o que seria o diagrama de primeira ordem:

$$I = \int d^4x \langle 0 | c(k') (\partial\pi(x)\phi(x))^2 c^\dagger(k) | 0 \rangle \quad (4.8)$$

A única opção que não é visivelmente zero é a contração dos campos  $\phi$ . Para cada campo  $\pi$  deve cair um termo de momento, por causa da derivada. Esses termos estão somados, e resulta em

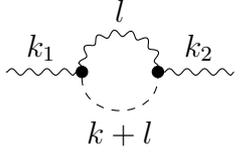
$$I = \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | c(k_1) : \rho(x) \partial^\mu \pi(x) \partial_\mu \pi(x) :: \rho(y) \partial^\mu \pi(y) \partial_\mu \pi(y) : c^\dagger(k_2) | 0 \rangle \quad (4.9)$$

sabe-se que  $k^2 = 0$ , logo  $I = 0$ .

Para a próxima interação, temos

$$\begin{aligned}
 II &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | c(k_1) : \rho(x) \partial^\mu \pi(x) \partial_\mu \pi(x) :: \rho(y) \partial^\mu \pi(y) \partial_\mu \pi(y) : c^\dagger(k_2) | 0 \rangle \\
 &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | c(k_1) : \partial^\mu \pi(x) \partial^\mu \pi(y) : c^\dagger(k_2) | 0 \rangle \overbrace{\partial^\mu \pi(x) \partial^\mu \pi(y)} \overbrace{\rho(x) \rho(y)}
 \end{aligned}$$

no calculo acima foi usado a regra de Dyson para chegar na única expressão de diagrama conectado. Para cada momento de  $\pi$  no ordenamento normal, está somado a um momento do propagador

$$II = \text{Diagrama} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} \frac{l^\mu k_{\mu 1} l^\nu k_{\nu 1}}{l^2} \frac{1}{(l+k_1)^2 + M^2} \quad (4.10)$$


O diagrama mostra um loop circular com duas linhas externas e uma linha interna fechada. A linha externa esquerda tem momento \$k\_1\$, a linha externa direita tem momento \$k\_2\$, e a linha interna fechada tem momento \$l\$. O momento total do loop é \$k+l\$.

o denominador dessa integral de Feynman já foi resolvido no Cap.2 para  $m \neq 0$ . Tomando  $m = 0$

$$\begin{aligned} q &= l + xk_1 \\ D &= M^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Então

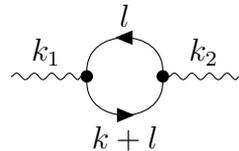
$$II = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} \frac{(q - xk_1)^\mu k_{\mu 1} (q - xk_1)^\nu k_{\nu 1}}{(q^2 + D)^2} \quad (4.12)$$

com  $(k_1)^2 = 0$ , chega-se em um numerador  $N = q^\mu q^\nu$ . Para efetuar a relação da eq. (2.92), deve-se por esse numerador como polinomio de exponte par. Considere a derivada total

$$\partial_q^\nu \frac{q^\mu}{(q^2 + D)} = \eta^{\mu\nu} \frac{1}{q^2 + D} - \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 + D)^2} \quad (4.13)$$

Substituindo em  $II$ , o termo de derivada total é uma integral de Gauss, e por sua vez é zero. O termo que leva o  $\eta^{\mu\nu}$  também é zero pelo fato de que  $\eta^{\mu\nu} k_{\mu 1} k_{\nu 1} = 0$ .

O último diagrama contribuinte para o propagador interagente será calculado com o uso direto das regras de Feynman. Como o loop é fechado em propagador fermionico, deve haver um traço nos momentos: para cada linha externa um momento somado aos momentos internos, acompanhado de  $(\gamma_5 \gamma^0)$ . Por conservação dos momentos, deve-se inserir a função delta,

$$III = \text{Diagrama} \sim \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} Tr \left[ \frac{-\not{l} + m}{l^2 + m^2} (\gamma_5 \not{k}_1) \frac{[-(\not{l} + \not{k}_1) + m]}{(l+k_1)^2 + m^2} (\gamma_5 \not{k}_1) \right]. \quad (4.14)$$


O diagrama mostra um loop circular com duas linhas externas e uma linha interna fechada com setas indicando o sentido do loop. A linha externa esquerda tem momento \$k\_1\$, a linha externa direita tem momento \$k\_2\$, e a linha interna fechada tem momento \$l\$. O momento total do loop é \$k+l\$.

Com o uso das propriedades de traços, já descartando os que contem a contribuição de momento impar, o numerador fica

$$\begin{aligned} N &= Tr[\not{l} \not{k}_1 (\not{l} + \not{k}_1) \not{k}_1] \\ &= 8l^\mu k_{\mu 1} l^\nu k_{\nu 1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

As propriedades de traço estão explicitadas no livro [1]. A integral de Feynman fica

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu k_{\mu 1} q^\nu k_{\nu 1}}{(q^2 + m^2)^2}, \quad q = l + xk_1, \quad D = m^2 \quad (4.16)$$

resultando também em zero. Dessa maneira chega-se a conclusão que o campo de Goldstone  $\pi$  não necessita de renormalização.

O propagador escalar  $\rho$  agora vem com a contribuição de dois novos diagramas de 1-loop, dois diagramas idênticos aos já estudados. Para ordem  $\lambda$ , temos um diagrama composto por linhas externas ligadas a um ponto e a um único loop,

$$\begin{array}{c} l \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \circlearrowright \\ k_1 \quad k_2 \end{array} = -i\delta^4(k - k') \frac{3\lambda}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + M_\rho^2} \quad (4.17)$$

Usando como base o cálculo feito no Cap.2, chega-se na relação

$$\begin{aligned} \Pi_\rho &= \frac{3}{2} \Pi_\phi \\ &= \frac{3}{2} \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right] M^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para ordem  $g^2$ , o cálculo do diagrama é igual aos vistos na equação (2.89)

$$\begin{array}{c} l \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \circlearrowright \\ k_1 \quad k_2 \\ k+l \end{array} = g^2 \delta^4(k - k') \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} Tr \frac{[-l + m] [-(l + k) + m]}{l^2 + m^2 (l + k)^2 + m^2}. \quad (4.19)$$

resultando em (2.98)

$$i\Pi_\rho(k) = \frac{g^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} (k^2 + 2m_f^2) + \text{finita} \right]. \quad (4.20)$$

O próximo caso a analisar é o decaimento da partícula escalar para outras duas partículas de Goldstone, que logo em seguida voltam a se juntar, fechando assim o loop. Cada linha interna tem associado um momento, somado ao momento da outra linha interna, com dois pontos de integrações e um fator 4 de simetrias:

$$\begin{array}{c} l \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ \circlearrowright \\ k_1 \quad k_2 \\ k+l \end{array} = \delta^4(k - k') \frac{\lambda}{M^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu (l + k)_\mu l^\nu (l + k)_\nu}{l^2 (l + k)^2}. \quad (4.21)$$

Cortando as pernas externas (tirando as deltas), a análise do cálculo é feita apenas em relação a integral. Usando o processo de regularização já conhecido

$$\Pi_\pi = \frac{\lambda}{M^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{[(q - xk)^\mu (q + (1 - x)k)^\mu]^2}{(q^2 + D)^2}, \quad (4.22)$$

com  $q = l + xk$  e  $D = x(1-x)k^2$ . Definimos o numerador como N. Substituímos  $q$  em N

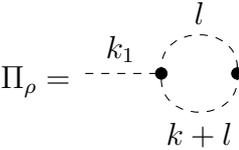
$$N = (q^2 - D)^2 + (q \cdot k)^2(1 - 2x)^2 + 0(q, q^3) \quad (4.23)$$

Os termos ímpares de N não contribuem para a integral, somente contribuem os termos de ordem par. Para os provenientes do primeiro parênteses de N, basta usar a fórmula (2.92) diretamente. No entanto o último termo necessita da equação (4.13), para aí sim usar a fórmula (2.92). Então

$$\begin{aligned} \Pi_\pi &= \frac{\lambda}{M^2} \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} \left( -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{D}{\mu^2} \right) Dk^2(1-2x)^2 \\ &= -\frac{\lambda}{M^2} k^4 \left( -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{D}{\mu^2} \right) \frac{1}{30} \\ &= \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \frac{1}{30} \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{D}{\mu^2} \right) \frac{M_\rho^2}{4} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Esse resultado indica que na renormalização da massa de  $\rho$ , esse diagrama também contribui.

Segue agora o diagrama referente à interação de  $\rho^3$ ,

$$\Pi_\rho = \text{diagrama} = -9\lambda^2 M_\rho^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + M_\rho^2} \frac{1}{(l+k)^2 + M_\rho^2} \quad (4.25)$$


com a mesma tecnica de regularização, chega-se em

$$\Pi_\rho = \frac{3\lambda}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \ln \frac{D}{\mu^2} \right] M_\rho^2. \quad (4.26)$$

O contra termo deve ser definido a partir da soma de todas as contribuições dos propagadores de 1-loop. Seja então o contratermo definido

$$\Pi_{1loop}^{ct}(k^2) = -(Z_\rho - 1)k^2 - (Z_{M_\rho} - 1)M^2 \quad (4.27)$$

os fatores de renormalização Z's serão

$$\begin{aligned} Z_\rho &= 1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \\ Z_{M_\rho} &= 1 - \left( \frac{901}{30} \frac{\lambda}{16\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \frac{m_f^2}{M_\rho^2} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

O último propagador a ser calculado é o fermionico. Dada uma partícula fermionica propagando-se sob a influência das interações

$$: H :=: g\rho\bar{\sigma}\sigma : - : \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{4M^2}} (\partial_\mu \pi) \bar{\sigma}^\alpha (\gamma^\mu \gamma_5)_{\alpha\beta} \sigma_\beta : .$$



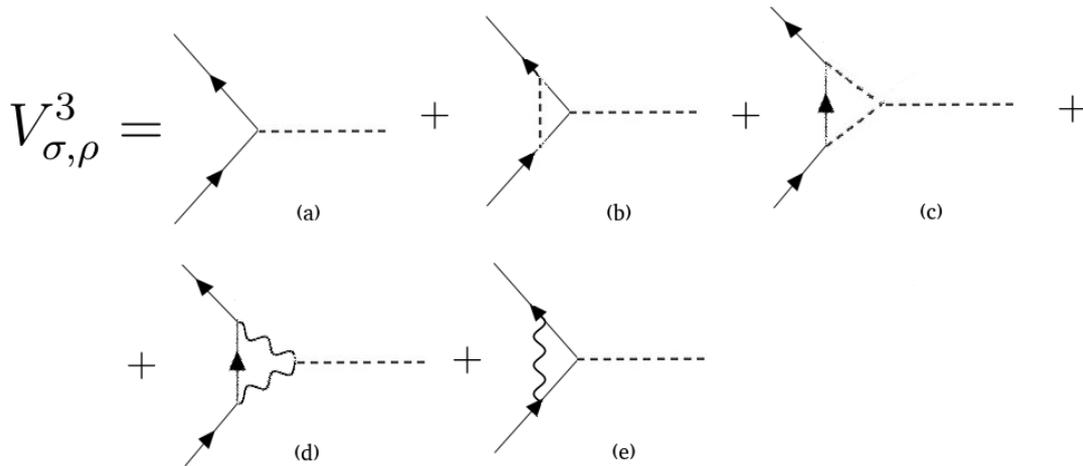


Figura 4.2: Diagrama de decaimento  $\rho\bar{\sigma}\sigma$  até ordem  $S^{(3)}$ .

Sendo os  $Z$ 's

$$\begin{aligned} Z_\psi &= 1 - \frac{25g^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \textit{finito} \right) \\ Z_m &= 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{\epsilon} + \textit{finito} \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

Assim todos os propagadores estão calculadas suas renormalização. Com destaque para o campo de Goldstone que não necessita de renormalização.

## 4.2.2 Vértices

A figura 4.2 representa todos os processos de decaimento  $\rho \rightarrow \bar{\sigma}\sigma$ . A soma das contribuições infinitas devem ser consideradas na renormalização do parâmetro  $g$ . Antes de seguir com os calculos dos diagramas, é interessante a análise de cada ordem de perturbação.

- Diagrama 1 e 2 contribuem respectivamente com  $g$  e  $g^3$ ;
- Diagrama 3 contribui com  $gM_\rho\lambda^{\frac{1}{2}}$ ;
- Diagrama 4 com  $\frac{\lambda^2}{M_\rho^2}$ ;
- Diagrama 5 com  $\frac{g\lambda}{M_\rho^2}$ .

Assim é de se pensar como que se pode somar coisas distintas. Na verdade, quando feitos os calculos dos loops, devem aparecer outros termos que com o uso da relação  $m_f = gv$  fiquem sendo iguais.

Para o diagrama (b) da figura 4.2, o resultado já é conhecido, todos os fatores e constantes são idênticos ao 3-vértice estudado no cap.2 representado na figura 2.6. O diagrama (c) merece uma análise rápida:

$$V_c \sim \int d^4l \frac{1}{l^2 + M_\rho^2} \frac{1}{(l+k)^2 + M_\rho^2} \frac{-(l+p_1) + m_f}{(l+p_1)^2 + m_f^2} \quad (4.38)$$

Com as devidas trocas de variáveis e o uso da fórmula (2.106)

$$V_c \sim \int dF_3 \int d^4q \frac{O(q^0)}{(q^2 + D)^3} = \textit{finito}. \quad (4.39)$$

Então esse diagrama não contribui para a renormalização. O diagrama (e) da figura (4.2) e escrito como

$$V_{2\sigma,\pi} = -g \frac{\lambda}{2M_\rho^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^4} \frac{[-(l+p_1) + m]}{(l+p_1)^2 + m_f^2} (\gamma^\mu \gamma_5) \frac{[-(l+p_2) + m]}{(l+p_2)^2 + m_f^2} (\gamma^\nu \gamma_5) \frac{(l_\mu l_\nu)}{l^2}. \quad (4.40)$$

Que pode se reescrito como

$$V_{2\sigma,\pi} = -g \frac{\lambda}{2M_\rho^2} \int dF_3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{N}{(q^2 + D)^3} \quad (4.41)$$

onde as novas variáveis são

$$\begin{aligned} q &= l + x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ D &= x_1(1-x_1)p_1 + x_2(1-x_2)p_2 + 2x_1 x_2 p_1 \cdot p_2 (x_1 + x_2) m_f^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

portanto ao definir o numerador N, chega-se em

$$\begin{aligned} N &= [(l+p_1) - m](\gamma^\mu \gamma_5)[(l+p_2) - m](\gamma^\nu \gamma_5)(l_\mu l_\nu) \\ &= [(l+p_1) - m](l)[(l+p_2) + m](l) \\ &= [q + (1-x_1)p_1 - x_2 p_2 - m](q - x_1 p_1 + x_2 p_2)[q + (1-x_2)p_2 - x_1 p_1 + m](q - x_1 p_1 + x_2 p_2) \\ &= [q + d_1](q + d_0)[q + d_2](q + d_0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Foram feitas algumas trocas de variáveis para auxiliar nas contas

$$\begin{aligned} d_0 &= x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ d_1 &= (1-x_1)p_1 - x_2 p_2 - m \\ d_2 &= (1-x_2)p_2 - x_1 p_1 + m. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Com essas trocas é possível descartar logo os termos de ordem  $O(q^0, q, q^3)$ . Foi incluído no descarte  $O(q^0)$  pois sua contribuição é finita, logo não serve para a renormalização. Com o uso de propriedades de matriz  $\gamma$ 's, N fica

$$N = q^4 - q^2(2d_2 \cdot d_0 + 2d_1 \cdot d_0 + d_1 \cdot d_2) + (q \cdot d_0)^2 - 2d_1 q(q \cdot d_2) \quad (4.45)$$

A integração em  $q$  para os dois primeiros termos está assegurada diretamente pela formula 2.92. Mas as outras duas necessitam ser escritas como uma derivada total

$$\partial_\mu \frac{q_\nu}{(q^2 + D)^2} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{(q^2 + D)^2} - \frac{4q_\mu q_\nu}{(q^2 + D)^3} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} V_{2\sigma,\pi} &= -g \frac{\lambda}{2M_\rho^2} \int dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^4 - q^2(2d_2 \cdot d_0 + 2d_1 \cdot d_0 + d_1 \cdot d_2)}{(q^2 + D)^3} \\ &- g \frac{\lambda}{2M_\rho^2} \frac{1}{4} \int dF_3 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d_0^2 - 2d_1 d_2}{(q^2 + D)^2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por fim, o resultado final fica

$$V_{2\sigma,\pi} = g \frac{\lambda}{2M_\rho^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + \text{finito} \right] m_f^2 \sim \lambda^{\frac{3}{2}} \quad (4.48)$$

Repare que isso implica em um diagrama proporcional a  $g^3$  também, como deveria ser. Logo o ultimo passo para obter todos os contribuintes na renormalização de  $\lambda$  é o diagrama (d). Partindo do calculo da matriz S

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(3)} &\sim \int d^4 x \langle 0 | b(p)_r d(p')_{r'} : \partial_{\mu 1} \pi(x) \bar{\sigma}^{\alpha 1}(x) (\gamma^{\mu 1} \gamma_5)_{\alpha 1 \beta 1} \sigma(x)^{\beta 1} : \\ &\times : \partial_{\mu 2} \pi(y) \bar{\sigma}^{\alpha 2}(y) (\gamma^{\mu 2} \gamma_5)_{\alpha 2 \beta 2} \sigma(y)^{\beta 2} : : \bar{\sigma}^{\alpha 3}(z) \sigma_{\alpha 3}(z) \rho(z) : a^\dagger(k) | 0 \rangle \end{aligned}$$

É importante lembrar que a matriz S nessa ordem também gera outros tipos de diagramas, que não são os da figura (d). O operador  $a^\dagger(k)$  deve se relacionar com o campo  $\rho(z)$ ,  $\langle 0 | \rho a^\dagger | 0 \rangle$ . Existe uma forma de agrupar os campos  $\pi$  com contrações, caso contrario a matriz S dá zero. Para chegar em diagramas conectados e 1PI, um campo de variavel (z) deve contrair com um (x) e o outro com (y). Assim sobram duas opções

$$\langle 0 | b(p)_r d(p')_{r'} : \overbrace{\bar{\sigma}^{\alpha 1}(x) (\gamma^{\mu 1} \gamma_5)_{\alpha 1 \beta 1} \sigma(x)^{\beta 1} \bar{\sigma}^{\alpha 2}(y) (\gamma^{\mu 2} \gamma_5)_{\alpha 2 \beta 2} \sigma(y)^{\beta 2} \bar{\sigma}^{\alpha 3}(z) \sigma_{\alpha 3}(z)} : 0 \rangle \quad (4.49)$$

Cada troca de posição dos campos gera um fator (-1), assim essa expressão fica

$$-\langle 0 | b(p)_r d(p')_{r'} : (\gamma^{\mu 1} \gamma_5)_{\alpha 1 \beta 1} \sigma(x)^{\beta 1} \bar{\sigma}^{\alpha 2}(y) (\gamma^{\mu 2} \gamma_5)_{\alpha 2 \beta 2} : 0 \rangle \underbrace{\sigma^{\beta 2}(y) \bar{\sigma}^{\alpha 3}(z)} \overbrace{\sigma_{\alpha 3}(z) \bar{\sigma}^{\alpha 1}(x)} \quad (4.50)$$

De maneira analoga, o outro termo fica com sinal positivo após fazer as contrações. Note que o ordenamento normal está aplicado no restante dos campos, assim não há troca dos operadores de criação e aniquilação. Dito isso os dois termos são iguais e com sinais contrarios. Portanto sua integral é zero. Ele não contribui para a renormalização do parâmetro  $\lambda$ .

Por fim, a renormalização do vértice tem como fator

$$Z_g = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right) \quad (4.51)$$

O modelo de simetria exata descrito no capítulo 3 tem um resultado novo para a renormalização do parâmetro  $g$ : como foi visto  $g$  não necessita de uma renormalização. Após a quebra, foi possível impor condições sobre as partes finitas dos contra-termos. Logo conclui-se que depois da quebra de simetria o novo modelo permanece renormalizado. O fato é que a quebra de simetria, e consequentemente a criação de massa fermiônica, resulta na relação

$$\frac{m_f^2}{M_\rho^2} = \frac{g^2}{\lambda}. \quad (4.52)$$

Desta relação não se tira valores exatos das massas envolvidas, nem mesmo dos parâmetros perturbativos. O que se tem é que, dadas três variáveis renormalizadas, a quarta obedece essa relação. Então mesmo que o cálculo mostre a renormalização do vértice com parâmetro  $g$ , o vértice a princípio poderia ser reescrito em termos dos outros fatores. Mas isso levaria à imposição de condições que relacionassem os parâmetros perturbativos independentes. Isso é inverter a lógica construída: é a massa do férmion que é escrita em termos dos outros três parâmetros.

### 4.3 Taxa de decaimento

O modelo de Yukawa-Higgs complexo com quebra de simetria permite que a partícula escalar  $\rho$  decaia em três tipos de processo, para  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\pi$ . Como estudado na seção de taxa de decaimento do cap.2 a probabilidade de transição considera todos os produtos finais derivados de uma configuração inicial. Logo, a taxa de decaimento total terá contribuição vinda desses três processos. Começando pelo decaimento  $\rho \rightarrow \rho\rho$

$$|\mathcal{A}_1|^2 = M_\rho^2 \lambda \quad (4.53)$$

Para  $\rho \rightarrow \pi\pi$

$$|\mathcal{A}_2|^2 = \frac{\lambda^2}{4M_\rho^2} (p_1 \cdot p_2) \quad (4.54)$$

Para  $\rho \rightarrow \bar{\sigma}\sigma$

$$|\mathcal{A}_3|^2 = \frac{g^2}{4} s \quad (4.55)$$

Foi usado que  $m_f = gv$ ,  $M_\rho^2 = 4M^2$ , e o referencial do centro de massa nessa última amplitude. A taxa de decaimento fica

$$\Gamma = \left[ \frac{g^2}{64\pi} M_\rho \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_\rho^2}} + \frac{\lambda}{64\pi} M_\rho \sqrt{1 - \frac{4M_\rho^2}{s^2}} + \frac{\lambda^2}{32\pi} M_\rho \right] \quad (4.56)$$

## 4.4 QES em Yukawa-Higgs renormalizada

Assim como no modelo real, deve existir uma condição imposta sobre as constantes arbitrárias que possibilite a preservação da renormalização após a quebra de simetria.

O modelo deixa de ser complexo e passa a ser real, e a lagrangeana renormalizada fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_r &= iZ_\psi \bar{\sigma} \not{\partial} \sigma - g \bar{\sigma} \sigma \rho(x) - m_f \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} Z_\phi \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} (Z_M - 3Z_\lambda) M_\rho^2 \rho^2 \\
&+ \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \rho - \frac{1}{4} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \rho^3 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \rho^4 \\
&+ Z_\psi \frac{i}{v} \bar{\sigma} \gamma_5 \not{\partial} \sigma - Z_\phi \left( 1 + \frac{\rho}{v} \right)^2 \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Assegura-se que é possível ter  $\langle |\rho S^{(1)}| \rangle = 0$ , justamente os mesmo diagramas expresso nas figuras 2.10 e 2.11. Novamente as ordens a serem consideradas são  $O(\lambda, \frac{g^4}{\lambda})$ , devido os diagramas de 1-loop não irem alem disso. O argumento de que só a parte de ordem  $\lambda^0$  de  $Z_\lambda$  deve contribuir se mantem, e  $Z_g = 1$ . E a relação das constantes fica

$$K_B - 2k_C + 1 = \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) - \ln \left( \frac{\mu^2}{\tilde{m}^2} \right) \frac{g^4}{\lambda^2}. \tag{4.58}$$

# Capítulo 5

## Conclusão

A explicação para a origem das massas é um dos maiores desafios da física quântica moderna. Uma abordagem bem simples e eficiente deste problema é dada pelo mecanismo de Higgs e, relacionado a ele, pelo conceito de quebra espontânea de simetrias [6],[1]. O resultado principal da aplicação deste mecanismo consiste na realização de todas as massas dos férmions e bósons de calibre do Modelo Padrão em termos de propriedades do “campo escalar de Higgs”: sua massa, as constantes de acoplamento fundamentais e da interação de Yukawa, e os parâmetros do potencial. A hipótese principal é de que, quando as energias são altas, as TQCs consideradas possuem uma fase simétrica sem vácuos degenerados, sem férmions massivos e com um termo de massa do bóson de Higgs com  $M^2 > 0$ . Os resultados não-perturbativos, principalmente de simulações numéricas em modelos realizados na “rede” (‘lattice gauge theories’) [8],[12], oferecem fortes indicações de que existe um ponto crítico (ou uma linha crítica) no espaço dos parâmetros  $g$ - $\lambda$  em que  $M^2$  primeiro se anula depois troca de sinal. Como resultado, o potencial efetivo do campo de Higgs assume a forma de um “chapéu mexicano”, e o módulo do campo de Higgs passa a ter um valor esperado diferente de zero, fazendo com que os férmions se tornem massivos. Essa fase de baixas energias possui todas as características de uma fase de simetria quirial quebrada, conhecida como ‘fase de Higgs’.

Esta dissertação investigou certos problemas ligados à renormalização e às propriedades das amplitudes de espalhamento nos modelos de Yukawa-Higgs com um campo escalar complexo nas fases de alta e baixa energias. Nosso principal objetivo era investigar os efeitos da quebra de simetria quirial contínua, e das condições específicas para a renormalização dos campos e das constantes de acoplamento na fase simétrica e na fase de Higgs. Podemos destacar dois resultados que foram obtidos:

- i A não-renormalização da constante de acoplamento de Yukawa  $g$  na fase simétrica;
- ii Essa mesma constante  $g$ , na fase de Higgs (em que a simetria é quebrada), ganha uma renormalização a nível de 1-loop.

Uma explicação para esses resultados está na observação de que os campos relevantes para a descrição da fase de Higgs têm propriedades bem diferentes dos campos relevantes na fase simétrica. Por exemplo, temos que considerar os efeitos dos campos de Goldstone, e de sua interação com os outros campos. Um outro argumento é que a realização da

quebra espontânea de simetria nesse caso inclui novos termos de interação e um novo parâmetro  $v_0 = 2M/\sqrt{\lambda}$ , que é não-analítico em  $\lambda$ . Devemos mencionar que a presença de mudanças significativas que encontramos ao comparar as amplitudes de espalhamento e taxas de decaimento das partículas em altas e em baixas energias nos levou a confirmar a diferença entre ambas as fases.

Os problemas abordados nesta dissertação fazem parte de um projeto de longo prazo sobre a investigação perturbativa e não-perturbativa de propriedades do regime infravermelho (IR) dos modelos de Yukawa-Higgs. A título de conclusão, passamos agora a descrever brevemente alguns dos assuntos que podem servir como continuação e aprofundamento do que fizemos aqui.

Há problemas de divergência IR nas amplitudes de espalhamento envolvendo partículas de Goldstone nas linhas externas e internas, contribuindo para diagramas de um ou mais loops [9]. Esses problemas talvez possam ser resolvidos ao se considerar uma classe de estados assintóticos coerentes, similares às “nuvens de fótons” de Fadeev-Kulish da eletrodinâmica quântica. Evidências de que isso pode realmente ser feito estão intrinsecamente ligadas a uma certa simetria residual de translação presente na fase de Higgs:  $\pi \mapsto \tilde{\pi} + \text{constante}$ . Espera-se que as identidades de Ward dessa simetria levem a consequências como a fatorização e o cancelamento das singularidades infravermelhas nas funções de correlação e nas amplitudes de espalhamento[9],[4].

A quebra espontânea da simetria quirial não é a única possibilidade para a introdução de massas para os férmions via mecanismo de Higgs. Uma segunda opção é partir de uma versão conforme do modelo de Yukawa-Higgs, envolvendo agora um campo escalar conhecido como ‘dilaton’, que permite a realização de uma quebra espontânea da simetria de dilatação [13],[19]. O valor esperado do dilaton, junto com as constantes de acoplamento de Yukawa, fornecem o valor esperado da massa dos férmions.

Uma terceira etapa desse projeto de longo prazo mira os estudos das propriedades conformes dos modelos de Yukawa-Higgs. Os problemas de pesquisa envolvem a quebra dinâmica das simetrias conformes, incluindo um termo de massa para os campos escalares e os cálculos das perturbações ao redor das soluções conformes (não-livres e não-perturbativas) [18],[20], considerando esse termo de massa como uma perturbação da teoria conforme. Essa seria uma extensão da pesquisa realizada nesta dissertação. Substituir a quebra espontânea de simetria quirial pela quebra dinâmica da simetria conforme providenciaria uma descrição não-perturbativa (nos acoplamentos  $g$  e  $\lambda$ ) dos efeitos de transição entre as fases de baixas e altas energias ao redor de um ponto conforme com  $M^2 = 0$ . Nesse caso, a meta principal para a continuação do projeto que acabamos de realizar aqui seria uma comparação dos resultados da teoria perturbativa padrão — i.e. ao redor das soluções quânticas correspondentes aos campos livres — com os resultados para as mesmas TQCs de Yukawa-Higgs realizadas na forma equivalente de uma teoria conforme perturbada.

# Apêndice A

## Regras de Feynman

As regras de Feynman apresentadas neste apêndice podem ser encontradas na referências [1] e [3].

1. Para cada partícula fermiônica entrando, desenhamos uma linha contínua com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $p_i$  e o spinor  $u_s^\alpha(p_i)$ .

$$\xrightarrow{p_i} \bullet \quad (A.1)$$

2. Para cada partícula fermiônica saindo, desenhamos uma linha contínua com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $p'_i$  e o spinor  $\bar{u}_s^{\alpha'}(p'_i)$ .

$$\bullet \xrightarrow{p'_i} \quad (A.2)$$

3. Para cada anti-partícula fermiônica entrando, desenhamos uma linha contínua com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $-p_i$  e o spinor  $\bar{v}_s^\alpha(p_i)$ .

$$\xrightarrow{-p_i} \bullet \quad (A.3)$$

4. Para cada anti-partícula fermiônica saindo, desenhamos uma linha contínua com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $-p'_i$  e o spinor  $v_s^{\alpha'}(p'_i)$ .

$$\bullet \xrightarrow{-p'_i} \quad (A.4)$$

5. Para cada partícula escalar entrando, desenhamos uma linha pontilhada com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $k_i$

$$\cdots \xrightarrow{k_i} \bullet \quad (A.5)$$

6. Para cada partícula escalar saindo, desenhamos uma linha pontilhada com uma seta orientada. A essa linha associa-se o 4-momento  $k'_i$

$$\bullet \cdots \xrightarrow{k'_i} \quad (A.6)$$

7. Para cada ordem de interação de Yukawa  $g\bar{\psi}\psi\phi$ , desenhamos um ponto (vértice). Onde dele deve sair três linha de campos. Dois fermiônicos e um escalar.



8. Para cada ordem de interação  $\lambda\phi^4$ , desenhamos um ponto (vértice). Onde dele deve sair quatro linhas de campo. As 4 escalares.



9. Para cada vértice, deve existir conservação dos momentos (o momento que entra deve também sair).

10. Para cada linha interna escalar, temos que inserir no cálculo do diagrama o termo:  $-i/(k^2 + M^2 - i\epsilon)$ .

11. Para cada linha interna fermiônica, temos que inserir no cálculo do diagrama o termo:  $-i(-\not{p}_{\alpha\beta} + m)/(p^2 + m^2 - i\epsilon)$ .

12. Para cada vértice de interação escalar acrescentar  $i\lambda$ .

13. Para cada vértice de interação Yukawa acrescentar  $ig$ .

14. Existe uma classe de diagramas do tipo loop. Para esses diagramas, acrescentamos uma integral associada ao momento interno  $\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$ .

Alguns diagramas representam descontinuidade. A esses chamamos de diagramas desconexos, como é o caso a baixo



Note que temos um propagador livre (a direita com momento  $k_1$ ) e um diagrama de loop em torno do próprio ponto de interação sem linhas externas. Esse loop é classificado como

um diagrama de vácuo. Outro exemplo de diagrama de vácuo de ordem  $S^{(2)}$  é



(A.10)

obtido no cálculo de  $\langle 0|S^{(2)}|0 \rangle = \int d^4x d^4y \langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(y)|0 \rangle$ .

# Apêndice B

## Campo fermionico

Este apêndice tem com objetivo demonstrar algumas das quantidades estudadas para campo escalar no Cap.2, agora para os campos fermiônicos. Como os operadores dos campos escalares e fermiônicos comutam, a construção da teoria anda de maneira independente. Os propagadores, a regra de Dyson e a matriz de interações precisam ser revistos, uma vez que foram desenvolvidos para os escalares [1].

### B.1 Propagador

Considere a densidade de lagrangiana livre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^\alpha. \quad (\text{B.1})$$

Tendo como base a seção 2.2, o propagador livre de Feynman é

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \langle 0|T(\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta)(y)|0\rangle \\ T(\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta)(y) &= \begin{cases} \psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y), & \text{se } x_0 < y_0 \\ -\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x), & \text{se } x_0 > y_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde o operador de ordenamento temporal  $T$  atuando no primeiro caso representa a propagação de uma partícula no tempo  $x_0 \rightarrow y_0$ , e no segundo caso representa a propagação de sua anti-partícula indo de  $y_0 \rightarrow x_0$ . Portanto o propagador completo pode ser escrito com o auxílio da função degrau:

$$\langle 0|T(\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta)(y)|0\rangle = \Theta(x_0 - y_0)\langle 0|\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)|0\rangle - \Theta(y_0 - x_0)\langle 0|\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x)|0\rangle.$$

Com o uso das equações (2.5), (2.8), tem-se:

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta)(y)|0\rangle &= \Theta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3p}{2\omega_p} u_s^\alpha(p) \bar{u}_s^\beta(p) e^{ip(x-y)} \\ &- \Theta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3p}{2\omega_p} v_s^\alpha(p) \bar{v}_s^\beta(p) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

Por fim, conhecendo as propriedades de  $u_s^\alpha(p)$  e  $v_s^\alpha(p)$ , a forma final do propagador se dá por

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y))|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [\Theta(x_0 - y_0)(-\not{p} + m)^{\alpha\beta} e^{ip(x-y)} - \Theta(y_0 - x_0)(-\not{p} - m)^{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)}] \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-\not{p} + m)^{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Este resultado é obtido usando os mesmo argumentos de contorno da seção (2.2).

## B.2 Matriz S e LSZ

Um dos ingredientes importantes na teoria de perturbação são os campos (e os estados) assintoticamente livres, junto com o operador de evolução (e a matriz S ligada a ele). A sua forma explícita em termos da hamiltoniana de interação foi estabelecida no capítulo 2. O método LSZ e a forma do LSZ, providenciam uma reconstrução das funções de correlação dos campos em termos das amplitudes de transição  $\langle i|S|f\rangle$  e vice-versa. Seja a amplitude de espalhamento

$$\langle f|i\rangle = \langle p'_1, r'; p'_2, s'; out|b_r^\dagger(p_1)_{in}|p_2, s; in\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Da equação (2.5), o operador  $b_r^\dagger$  pode ser escrito da seguinte forma

$$b_r^\dagger(p) = \int d^3x \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^0 u_r^\alpha(p) e^{ipx}. \quad (\text{B.5})$$

Entende-se  $b_r^\dagger(p)_{in} = \lim_{p \rightarrow -\infty} b_r^\dagger(p)$ . Usando a equação (2.45), já na notação *in/out*

$$b_r^\dagger(p_1)_{in} = b_r^\dagger(p_1)_{out} - \int d^4x \partial_0 (\bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^0 u_r^\alpha(p_1) e^{ipx}), \quad (\text{B.6})$$

a contribuição do operador de criação *out* é nula, pois ao atuar em  $\langle 0|b_r^\dagger(p_1)_{out} = 0$ . Logo

$$\begin{aligned} b_r^\dagger(p_1)_{in} &= - \int d^4x [\partial_0 (\bar{\psi}_\alpha(x)) \gamma^0 u_r^\alpha(p_1) e^{ipx} + \bar{\psi}_\alpha(x) \gamma^0 u_r^\alpha(p_1) \partial_0 (e^{ipx})] \\ &= - \int d^4x [\partial_0 (\bar{\psi}_\alpha(x)) \gamma^0 u_r^\alpha(p_1) e^{ipx} + \bar{\psi}_\alpha(x) u_r^\alpha(p_1) (-\gamma^i \partial_i - im) e^{ipx}], \end{aligned}$$

onde foi usado que  $\gamma^0 \partial_0 e^{ipx} = (-i\gamma^i p_i - im) e^{ipx} = (-\gamma^i \partial_i - im) e^{ipx}$ . Sabendo que

$$\int d^4x \gamma^i \partial_i (\bar{\psi}_\alpha(x) u_r^\alpha(p_1) e^{ipx}) = 0 \quad (\text{B.7})$$

é um termo de superfície, chega-se em

$$\begin{aligned} b_r^\dagger(p_1)_{in} &= - \int d^4x [\partial_0 (\bar{\psi}_\alpha(x)) \gamma^0 + \partial_i \bar{\psi}_\alpha(x) i\gamma^i - im \bar{\psi}_\alpha(x)] u_r^\alpha(p_1) e^{ipx} \\ &= - \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x) [\gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + \gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - im] u_r^\alpha(p_1) e^{ipx} \\ &= i \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x) (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) u_r^\alpha(p_1) e^{ipx}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Este mesmo cálculo foi feito para os outros operadores, os quais apresentam a forma final

$$\begin{aligned}
b_r(p_1)_{out} &= i \int d^4x \bar{u}_r^\alpha(p_1) e^{-ipx} (-i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) \psi_\alpha(x) \\
d_r^\dagger(p_1)_{in} &= -i \int d^4x \bar{v}_r^\alpha(p_1) e^{ipx} (-i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) \psi_\alpha(x) \\
d_r(p_1)_{out} &= -i \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x) \left( i\overleftarrow{\not{\partial}} + m \right) v_r^\alpha(p_1) e^{-ipx}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ao abrir todos os termos da equação (B.4) é possível obter a fórmula LSZ

$$\begin{aligned}
\langle f|i \rangle &= \langle 0; out | b_{s'}(p'_2)_{out} b_{r'}(p'_1)_{out} b_s^\dagger(p_2)_{in} b_r^\dagger(p_1)_{in} | 0; in \rangle \\
&= i^4 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 \bar{u}_r^{\alpha'}(p_1) \bar{u}_r^{\beta'}(p_1) e^{ipx} e^{ipx} \\
&\times (-i\overleftarrow{\not{\partial}}_{(1')} + m) (-i\overleftarrow{\not{\partial}}_{(2')} + m) \langle 0 | T(\psi_{\alpha'}(x'_1) \psi_{\beta'}(x'_2) \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle \\
&\times \left( i\overleftarrow{\not{\partial}}_{(1)} + m \right) \left( i\overleftarrow{\not{\partial}}_{(2)} + m \right) u_r^\alpha(p_1) u_s^\beta(p_2) e^{ip_1 x_1} e^{ip_2 x_2}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Não é prático generalizar essa fórmula, pois para cada caso a quantidade de operadores criação e aniquilação de partículas e anti-partículas mudam. Basta ver que no caso estudado foi imposto quais seriam as partículas *in* e *out*. Um formato mais geral da equação (B.4), pode ser

$$\begin{aligned}
\langle f|i \rangle &= \langle 0; out | d_{s'}(p'_2)_{out} b_{r'}(p'_1)_{out} d_s^\dagger(p_2)_{in} b_r^\dagger(p_1)_{in} | 0; in \rangle \\
\langle f|i \rangle &= \langle 0; out | d_{s'}(p'_2)_{out} d_{r'}(p'_1)_{out} d_s^\dagger(p_2)_{in} d_r^\dagger(p_1)_{in} | 0; in \rangle.
\end{aligned}$$

Isso depende apenas da quantidade de combinações que se pode fazer, desde que as conservações sejam preservadas. Esta generalização para mais partículas se torna cada vez mais desnecessária. Para essa teoria a função de Green é similar a da teoria escalar

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, x'_1, x'_2) &= \langle 0 | T(\psi_{\alpha'}(x'_1) \psi_{\beta'}(x'_2) \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \langle 0 | T(\psi_{\alpha'}(x'_1)_{in} \psi_{\beta'}(x'_2)_{in} \bar{\psi}_\alpha(x_1)_{in} \bar{\psi}_\beta(x_2)_{in} S) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

# Apêndice C

## Outros exemplos de quebra de simetria

No cap. 2 e cap.4, foram investigada para o modelo de Yukawa-higgs e Yukawa-higgs complexo, a quebra espontânea de simetria. Neste apêndice será investigado um pouco dos modelos escalares, real e complexo. Modelos esses que devem ser, respectivamente, recuperados ao fazer a constante de acoplamento  $g$  tender a zero.

### C.1 QES das Simetrias do Campo Escalar real com Potencial de Higgs

Dada a lagrangeana escalar [1]

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{M^2}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{24}\phi^4(x), \quad (\text{C.1})$$

existe a simetria em  $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ . Essa simetria está ligada aos dois estados de vácuos interagentes. Para campos livres  $\langle 0|\phi_{in}|0\rangle = 0$ . Mas para campos interagentes  $\langle |\phi| \rangle = \text{constante}$ . Escolhe-se uma translação do campo

$$\phi(x) = \rho(x) + v \quad (\text{C.2})$$

onde  $v$  é uma constante que representa a energia mínima positiva. Desta forma, determina-se um vácuo para trabalhar e quebrar a simetria. Ao fazer esta troca na lagrangeana, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\partial_\mu[\rho(x) + v]\partial^\mu[\rho(x) + v] - \frac{M^2}{2}[\rho(x) + v]^2(x) - \frac{\lambda}{24}[\rho(x) + v]^4(x) \\ &= -\partial_\mu\rho(x)\partial^\mu\rho(x) - \frac{M^2}{2}[\rho^2(x) + 2v\rho(x) + v^2] - \frac{\lambda}{24}[\rho^2(x) + 2v\rho(x) + v^2]^2(x) \\ &= -\partial_\mu\rho(x)\partial^\mu\rho(x) - \frac{\lambda}{6}v^2\rho^2(x) - \frac{\lambda}{6}v^2\rho^3 - \frac{\lambda}{24}\rho^4(x). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Esta nova lagrangeana não se mantém invariante sob transformação de paridade do novo campo  $\rho(x) \rightarrow -\rho(x)$ . Os termos  $\rho^3$  e  $\rho$  são os responsáveis de não se manter esta

invariância. Essas novas interações resultarão em novos diagramas, que por sua vez, contribuem para o cálculo da renormalização. Mas, uma vez feita a renormalização da lagrangeana, será mostrado que não é preciso renormalizá-la novamente após a quebra espontânea de simetria.

Dada a lagrangeana escalar renormalizada

$$\mathcal{L} = -Z_\phi \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - Z_M \frac{M^2}{2} \phi^2(x) - Z_\lambda \frac{\lambda}{24} \phi^4(x), \quad (\text{C.4})$$

com  $M^2 < 0$ . Vale lembrar que neste modelo basta fazer  $m \rightarrow 0$  e  $g \rightarrow 0$  nos  $Z$ 's. Fazendo a translação  $\phi(x) = \rho(x) + v$ , resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -Z_\phi \frac{1}{2} \partial_\mu [\rho(x) + v] \partial^\mu [\rho(x) + v] + Z_M \frac{|M|^2}{2} [\rho(x) + v]^2(x) - Z_\lambda \frac{\lambda}{24} \tilde{\mu}^\epsilon [\rho(x) + v]^4(x) \\ &= -\frac{1}{2} Z_\phi \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{4} (Z_M - 3Z_\lambda) M_\rho^2 \rho^2 + \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \rho \\ &\quad - \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \rho^3 - \frac{1}{24} Z_\lambda \lambda \tilde{\mu}^\epsilon \rho^4. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para esse novo campo  $\rho$  deseja-se que  $\langle 0 | \rho(x) S | 0 \rangle = 0$ , de forma que o valor mínimo da energia seja zero. Na quebra de simetria aparecem interações do tipo  $\rho$  e  $\rho^3$ . O cálculo será feito para  $S_1$  e será mostrado que os termos constantes arbitrários se arranjam de forma a surgir uma condição para sejam zeros. Para que a seguinte expressão seja zero

$$\begin{aligned} \langle 0 | \rho(x) S | 0 \rangle &\approx \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) \rho(y) \rho(y) | 0 \rangle + \dots \\ &\approx \left[ \frac{1}{2} (Z_M - Z_\lambda) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 + \frac{1}{6} Z_\lambda (3\lambda \tilde{\mu}^\epsilon)^{\frac{1}{2}} M_\rho \tilde{\Delta}(0) \right] \\ &\quad \cdot \int d^4 y \langle 0 | \rho(x) \rho(y) | 0 \rangle + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

basta o que estiver entre os colchetes ser zero. Então

$$\begin{aligned} [\dots] &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{16\pi^2} \left( K_B - 3k_C + \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} M_\rho^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} Z_\lambda \left( \frac{3\lambda}{\tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] M_\rho^3 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\lambda \tilde{\mu}^\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{16\pi^2} \left[ K_B - 3k_C + 1 + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] M_\rho^3 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde os termos  $k_B$  e  $k_C$  são respectivamente os termos arbitrários no lugar das constantes definidas de  $Z_\lambda$  e  $Z_M$ . Assim temos a condição necessária para  $\langle 0 | \rho S | 0 \rangle = 0$

$$K_B - 3k_C + 1 = \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right). \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Quebra em escalar complexo

Agora considere o caso de simetrias contínuas no modelo escalar

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - M^2 \phi^*(x) \phi(x) - \frac{\lambda}{4} [\phi^*(x) \phi(x)]^2. \quad (\text{C.9})$$

Fazendo a transformação dos campos como segue

$$\phi(x) \rightarrow e^{iq} \phi(x), \quad (\text{C.10})$$

torna-se a lagrangeana invariante. O potencial efetivo descrito como

$$\mathcal{V}(\phi) = -M^2 \phi^*(x) \phi(x) + \frac{\lambda}{4} [\phi^*(x) \phi(x)]^2, \quad (\text{C.11})$$

para  $M^2 < 0$ . A energia mínima é definida em  $\mathcal{V}(\phi) = 0$ , assim

$$\phi(x) = \frac{1}{2} v e^{-i\theta}, \quad (\text{C.12})$$

sendo  $\theta$  uma fase e  $v = \left(\frac{4M^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Desta forma há uma possibilidade infinita de vácuos. Anteriormente no caso discreto (capítulo 2) está detalhado o cálculo para simetria discreta. O gráfico representa dois vácuos. Para o caso contínuo, que está sendo tratado no momento, basta girar ao redor do eixo  $y$ , na figura 2.9, será obtido um “chapéu mexicano”. O valor esperado do campo no estado de vácuo  $|\theta\rangle$  é

$$\langle \theta | \phi(x) | \theta \rangle = \frac{1}{2} v e^{-i\theta} \quad (\text{C.13})$$

$$\langle \theta | \theta' \rangle = 0. \quad (\text{C.14})$$

Parametrizando o campo dessa forma

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (v + \rho(x)) e^{-i\frac{\pi(x)}{v}}, \quad (\text{C.15})$$

onde  $\rho$  e  $\pi$  são novos campos reais, a lagrangeana fica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{v}\right)^2 \partial^\mu \pi \partial_\mu \pi - \frac{1}{2} m \rho^2 - \frac{m}{4} \lambda^{\frac{1}{2}} \rho^3 - \frac{\lambda}{16} \rho^4. \quad (\text{C.16})$$

Nesse caso aparece um campo  $\pi$  sem massa que é conhecido como campo de Goldstone. Apesar de  $\rho$  e  $\rho^3$  não apresentar simetrias de paridade, ainda resta uma simetria residual em  $\pi \rightarrow \pi + \text{constante}$ .

# Apêndice D

## Outros Diagramas do modelo de Yukawa Complexo

O conjunto de todos os diagramas de 1-loop no modelo Yukawa-Higgs é extenso. Porém os diagramas considerados no capítulo 4 são suficientes para demonstração de renormalizabilidade do modelo de Yukawa-Higgs com simetria quiral contínua quebrada. Os parâmetros de renormalização  $Z$ 's para as massas dos campos escalares e fermiônicos foram calculados no capítulo 4, como também para os próprios campos. O novo campo que aparece com a quebra, chamado de campo de Goldstone, não leva à divergências ultravioletas e não necessita de renormalização devido a simetria de  $\pi = \tilde{\pi} + \text{constante}$ .

A regularização dimensional, o qual é o método usado para separar a parte infinita da finita dos diagramas, constituía em resolver as integrais que surgiam associadas aos diagramas de loops. Assim as pernas externas não participam do cálculo. Usando agora um artifício de comparação nos diagrams da figura D.1 é possível ter os resultados de (b) e (c). Para (b), utilizando a parte da equação (4.24) que demonstra o resultado de (a) sem os parâmetros perturbativos. Fazendo a troca de  $\delta^4(k_1 - k_2) \rightarrow \delta^4(k_1 + k_2 - k_3)$  e  $3!3! \frac{M_\rho^2 \lambda}{4} \rightarrow 3!4! \frac{M_\rho \lambda^{\frac{3}{2}}}{32}$ , obtém-se

$$V_{(b)}^{(3)} = \frac{9}{4} \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \ln \frac{D}{\mu^2} \right] M_\rho. \quad (\text{D.1})$$

Para (c), é feita a troca  $\delta^4(k_1 - k_2) \rightarrow \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$  e  $3!3! \frac{M_\rho^2 \lambda}{4} \rightarrow 4!4! \frac{\lambda^2}{16^2}$ , consequentemente

$$V_{(c)}^{(4)} = \frac{3}{16} \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \ln \frac{D}{\mu^2} \right]. \quad (\text{D.2})$$

A mesma análise é válida para a figura D.2.

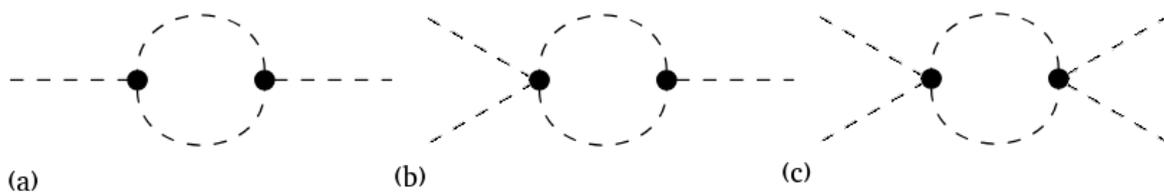


Figura D.1: Diagramas de 1-loop escalar: (a) duas pernas; (b) três pernas; (c) quatro pernas.

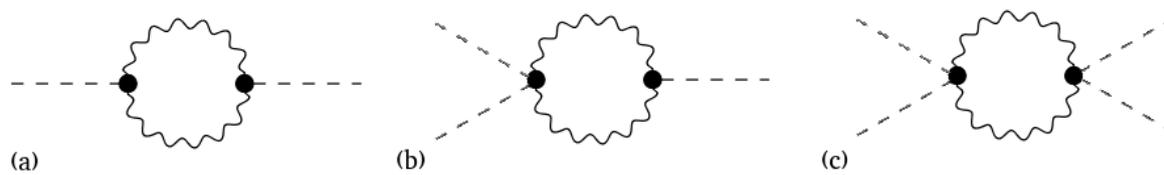


Figura D.2: Diagramas com 1-loop  $\pi$  interno.

# Bibliografia

- [1] M. Srednicki, Quantum Field Theory. University of California, Santa Barbara (2006). 8, 10, 11, 15, 24, 26, 31, 36, 37, 38, 41, 57, 65, 67, 70, 73
- [2] M. Dasgupta.,An introduction to quantum field theory, Manchester Oxford Road (2008). 22
- [3] D. Tong, Lectures on Quantum Field Theory, University of Cambridge. Disponível em <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>. 19, 22, 25, 67
- [4] Y. Hamada and S. Sugishita,Soft pion theorem, asymptotic symmetry and new memory effect, JHEP **1711**, 203 (2017),[arXiv:1709.05018 [hep-th]]. 45, 66
- [5] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol.1: Foundations, Cambridge University Press (2005). 10, 15, 24
- [6] S. Weinberg, Quantum Theory of Fields, Vol. 2: Modern Applications, Cambridge University Press (2005). 8, 9, 10, 11, 38, 65
- [7] Igor Herbut, A Modern Approach to Critical Phenomena, Cambridge Univ.Press,Cambridge,2007. 9
- [8] P. Gerhold and J.Jansen, On the phase structure of a chiral invariant Higgs-Yukawa model, PoSLAT2006:043,2006, XXIVth International Symposium on Lattice Field Theory, Tucson, USA; arXiv:hep-lat/0610012. 11, 12, 65
- [9] Ian Low and Zhewei Yin, The Infrared Structure of Nambu-Goldstone Bosons, JHEP 1810 (2018) 078; arXiv:1804.08629 [hep-th] . 66
- [10] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Global Conservation Laws and Massless Particles, Phys. Rev. Lett. 13 (1964), pp. 585?587. 9, 10
- [11] Gerard t'Hooft and M. J. G. Veltman, Regularization and Renormalization of Gauge Fields, Nucl. Phys. B44 (1972), pp. 189?213. 8
- [12] P. Gerhold and K. Jansen,The Phase structure of a chirally invariant lattice Higgs-Yukawa model for small and for large values of the Yukawa coupling constant?, JHEP 09 (2007), p. 041, arXiv: 0705.2539 [hep-lat].; P. Gerhold and K. Jansen,The Phase structure of a chirally invariant lattice Higgs-Yukawa model - numerical simulations, JHEP 10 (2007)001; arXiv: 0707.3849 [hep-lat]. 12, 65

- [13] Curtis G. Callan, Jr, Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory, PRDv2,8(1970),1541-1547. 12, 66
- [14] Sidney Coleman, Secret symmetry: an introduction to spontaneous symmetry breakdown and gauge fields, in "Aspects of symmetry, Selected Erice Lectures of Sidney Coleman, Cambridge Univ.Press, Cambridge,1989; Sidney R. Coleman and Erick J. Weinberg, Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking, Phys. Rev. D7 (1973), pp. 1888-1910. 9
- [15] J.Goldstone, Field Theories with Superconductor Solutions, Nuovo Cimento, 9, 154 (1961). 9, 10
- [16] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam and Steven Weinberg, Broken Symmetries, Phys. Rev. 127 (1962), pp. 965-970. 9, 10
- [17] J.L.Cardy, Scaling and Renormalization in Statistical Physics,Cambridge Lecture notes in Physics 5, Cambridge University Press 1996.. 8, 11
- [18] I. T. Todorov, M. C. Mintchev and V. B. Petkova, Conformal Invariance In Quantum Field Theory, Pisa, Italy: Sc. Norm. Sup. 1978, 273p; Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu, David Senechal, Conformal Field Theory, Springer,1997. 12, 66
- [19] Z.Komargodski and A.Schwimmer, On Renormalization Group Flows in Four Dimensions, arXiv:1107.3987[hep-th]. 66
- [20] H.Osborn and A.C.Petkou, Implications of Conformal Invariance in Field Theories for General Dimensions, Annals Phys. 231, 311 (1994), [arXiv:hep-th/9307010]. 12, 66