

Matheus dos Santos Lima

Métodos da teoria de calibre na gravitação newtoniana

Vitória

30 de Março de 2023

Matheus dos Santos Lima

Métodos da teoria de calibre na gravitação newtoniana

Dissertação de mestrado apresentada ao PPG-MAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara

Vitória
30 de Março de 2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

L732m Lima, Matheus dos Santos, 1996-
Métodos da teoria de calibre na gravitação newtoniana /
Matheus dos Santos Lima. - 2023.
124 f. : il.

Orientador: Leonardo Meireles Câmara.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Mecânica. I. Câmara, Leonardo Meireles. II. Universidade
Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Métodos da Teoria de Calibre na Gravitação Newtoniana

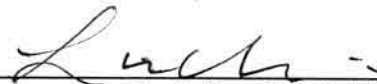
Matheus dos Santos Lima

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 30 de março de 2023 por:



Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador



Prof. Dr. Gabriel Luchini Martins
Universidade Federal do Espírito Santo



Prof. Dr. Henrique Nogueira de Sá Earp
Universidade Estadual de Campinas

A Jesus, pois d'Ele, por Ele e para Ele são todas as coisas.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao Deus vivo e criador de toda a matéria, por me guiar, inspirar e me conceder a força e a sabedoria necessárias para enfrentar os desafios ao longo desta pesquisa.

A minha mãe Edvalda e meu pai Eduardo, expresso minha gratidão profunda. Os cuidados de minha mãe, sua preocupação com minha educação e seu exemplo foram minhas maiores inspirações para prosseguir. Agradeço por terem me proporcionado uma base sólida e valores que me impulsionaram a buscar conhecimento e a seguir meus sonhos. Sem a confiança, incentivo, amor e carinho de vocês, esta conquista não seria possível.

Minha querida namorada Deluany, meu amor e gratidão são dedicados a você. Sua compreensão, paciência e incentivo inabaláveis foram fundamentais durante todo o processo. Sua presença e apoio emocional me fortaleceram nos momentos mais desafiadores. Agradeço por compartilhar essa jornada comigo e por sempre acreditar em meu potencial.

Agradecimentos a meu orientador Leonardo Câmara pela paciência, incentivo, instruções e grandes conselhos que levarei não só para minha formação como matemático, mas para a minha vida. Suas orientações, sugestões e discussões enriquecedoras foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço aos professores Henrique Sá Earp, Gabriel Luchini e Matheus Vieira por aceitarem participar da banca examinadora. Através da contribuição de cada um, pude aperfeiçoar este trabalho e suas sugestões, correções e acompanhamento foram fundamentais para aprimorar a minha visão do tema.

Agradeço também aos meus colegas da UFES que compartilharam essa jornada comigo e foram essenciais nos estudos direcionados ao mestrado.

Agradeço aos meus familiares, amigos e irmãos de igreja por todo apoio, orações e súplicas.

Expresso também minha gratidão ao PPGMAT pela formação e a FAPES por todo apoio financeiro.

*"Há ouro e abundância de rubis, mas os lábios do conhecimento são joias preciosas."
(Provérbios 20:15)*

Resumo

Élie Cartan desenvolveu o conceito de conexão afim como uma maneira de estabelecer uma relação de equivalência local entre as seções do espaço tangente ao espaço-tempo quadridimensional. Esse conceito permitiu descrever de forma intrínseca as propriedades geométricas locais, independentemente de um sistema de coordenadas externo. Ao adotar o método do referencial móvel, Cartan proporcionou uma descrição geométrica precisa do espaço-tempo, enriquecendo nossa compreensão da teoria da relatividade geral. Esta dissertação se propõe a estudar os trabalhos de Cartan e destacar suas contribuições, através da conexão afim, para a geometrização do sistema físico newtoniano, bem como identificar possíveis conexões com a Teoria de Calibre contemporânea, a qual oferece um arcabouço poderoso para descrever as interações fundamentais dessa natureza. Nesse contexto, o objetivo principal deste estudo é propor equações que permitam encontrar uma conexão afim que seja uma conexão de Yang-Mills que modele o sistema físico em estudo. Ao buscar essa conexão entre a teoria de Cartan e a teoria de Calibre, almejamos avançar nossa compreensão das interações fundamentais e, possivelmente, abrir caminhos para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Conexão afim, Sistema físico newtoniano, Teoria de Calibre, Conexão de Yang-Mills.

Abstract

Élie Cartan developed the concept of affine connection as a way to establish a local equivalence relation between sections of the tangent space to four-dimensional spacetime. This concept allowed for an intrinsic description of local geometric properties, independent of an external coordinate system. By adopting the method of moving frames, Cartan provided a precise geometric description of spacetime, enriching our understanding of the theory of general relativity. This dissertation aims to study Cartan's works and highlight his contributions, through the affine connection, to the geometrization of the Newtonian physical system, as well as to identify possible connections with contemporary Gauge Theory, which offers a powerful framework for describing fundamental interactions of this nature. In this context, the main objective of this study is to propose equations that allow for finding an affine connection that is a Yang-Mills connection modeling the physical phenomena under study. By seeking this connection between Cartan's theory and Gauge Theory, we aim to advance our understanding of fundamental interactions and possibly pave the way for future work.

Keywords: Affine connection, Newtonian physical system, Gauge Theory, Yang-Mills connection.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	MECÂNICA CLÁSSICA E OS INVARIANTES DE POINCARÉ-CARTAN	14
2.1	Mecânica newtoniana	14
2.1.1	Princípio da relatividade de Galileu Galilei	14
2.1.2	O espaço-tempo quadridimensional	15
2.1.3	O grupo de Galileu	15
2.1.4	Princípio da relatividade e segunda lei de Newton	18
2.2	Invariantes integrais de Poincaré-Cartan	19
2.2.1	Motivação variacional	19
2.2.2	O invariante integral momento-energia	22
2.2.3	Invariantes relativos e invariantes absolutos	25
2.2.4	O princípio da conservação da massa e o elemento de matéria do meio	30
3	A GEOMETRIA DE CARTAN E A DINÂMICA DO CONTÍNUO	31
3.1	Conexão afim e a dinâmica dos meios contínuos	31
3.1.1	O espaço-tempo e a dinâmica de uma partícula	31
3.1.2	Dinâmica clássica dos meios contínuos	31
3.1.3	Conexões afins em sistemas de referenciais galileanos	38
3.2	Geometrizando a dinâmica newtoniana	42
3.2.1	Geometria versus dinâmica	42
3.2.2	Conexões newtonianas	46
3.2.3	Conexão afim e mudança de coordenadas	47
3.2.4	Derivadas de ordem maior e a curvatura de uma conexão afim	48
3.2.5	Torção de uma conexão afim	51
3.2.6	Conexões galileanas com torção nula	52
4	CONEXÕES LINEARES E A TEORIA DE YANG-MILLS	56
4.1	Fibrados Vetoriais	56
4.2	Formas diferenciais e derivação exterior covariante	57
4.3	Curvatura	58
4.4	O fibrado $\text{End}(E)$ e a conexão induzida ∇^{End}	60
4.5	A curvatura como uma $\text{End}(E)$-forma de grau 2	60
4.6	As duas álgebras exteriores de $\mathcal{A}(TM^*, \text{End}(E))$	64
4.7	O tensor diferença e as derivadas exteriores covariantes	66

4.8	Métrica no espaço de k -formas	70
4.9	Fibrados munidos de uma métrica	78
4.10	G -Conexões em G -Fibrados Vetoriais	81
4.11	O funcional de Yang-Mills	84
4.12	Instantons	86
5	A CONEXÃO AFIM DE CARTAN E O FIBRADO ESTENDIDO . .	88
5.1	Conexões afins e conexões lineares no fibrado estendido	88
5.2	O transporte paralelo em um fibrado vetorial	90
5.3	O deslocamento de Cartan de uma conexão afim	91
5.4	Deslocamento de Cartan em uma conexão que geometriza o sistema newtoniano	93
5.5	Conexões de Yang-Mills no fibrado tangente estendido	95
6	CONEXÕES ASD E MECÂNICA NEWTONIANA	102
6.1	Conexões ASD com torção nula	102
6.2	Conexões ASD livre de torção e e mecânica newtoniana	104
6.3	Conexões ASD de Galileu-Cartan	105
6.4	Conexões ASD newtonianas de Galileu-Cartan	113
7	CONCLUSÃO	118
	Índice	120
	REFERÊNCIAS	121

1 Introdução

Este trabalho versa sobre os artigos fundadores da teoria de Einstein-Cartan (cf. [9], [10], [11]). Neles Élie Cartan introduz o conceito de conexão afim e o método do referencial móvel com o intuito de fornecer uma nova abordagem para a teoria da relatividade geral de Einstein, com vistas a uma possível integração com a teoria eletromagnética até então conhecida.

Tendo como pano de fundo a abordagem original de Einstein, Cartan introduz o conceito de conexão afim como forma de estabelecer uma relação de equivalência infinitesimal (local) entre as seções do espaço tangente ao espaço-tempo quadridimensional. Em outras palavras, sendo $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^3$ seções do fibrado tangente, ele introduz um novo conceito de derivação através das relações

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega^3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_0 = \omega_0^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_0^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_1^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_2^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_3^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

onde \mathbf{m} descreve a posição de um observável no espaço tempo quadridimensional e ω_i^j são 1-formas diferenciais. Munido dessa nova forma de derivação e usando a teoria dos invariantes integrais de Poincaré-Cartan (cf. [8]), ele introduz o (3, 1)-tensor momento massa $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$, onde

$$P^i = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^i v^j \widehat{\omega}^j + \sum_{j=1}^3 (-1)^j p_{ij} \widehat{\omega}^j,$$

com $(-1)^i \omega^i \wedge \widehat{\omega}^i = \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$, $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^3 v^i \mathbf{e}_i$, $v^0 = 1$. Na sequência, ele define, respectivamente, o tensor massa-momento generalizado e força generalizada por

$$\mathbf{P} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P} \text{ e } \mathbf{F} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F},$$

e mostra que

$$d\mathbf{P} = dt \wedge \mathbf{F},$$

onde a derivada aqui descrita é a derivação de (3, 1)-tensores induzida pela derivação covariante acima definida. A partir daí, ele obtém uma conexão afim que anula a equação acima (diremos neste trabalho que tais conexões geometrizam o sistema mecânico newtoniano) e estuda a existência de outras conexões com a mesma propriedade, concluindo

a existência de uma única conexão satisfatória para a mecânica newtoniana. A ideia fundamental aqui é trocar o papel de um sistema dinâmico induzido por um campo de forças por “geodésicas” de uma geometria bem escolhida.

A seguir, Cartan recharacteriza a mecânica newtoniana através da abordagem da mecânica do contínuo para, com um raciocínio muito astuto, reobter as equações de Einstein. De fato, ele repete os argumentos idealizados por Henri Poincaré para a obtenção de uma correção da gravitação newtoniana em face de sua abordagem da relatividade restrita (cf. [25], [26]), considerando as equações fundamentais da mecânica do contínuo para a mecânica newtoniana como meras aproximações da equação geral (e.g., as equações de Poisson).

A ideia original deste trabalho era reobter as equações de Einstein substituindo-se o funcional que depende da métrica no trabalho seminal de A. Einstein por uma ação do tipo Yang-Mills ([29], [31]) sobre o espaço das conexões que geometrizariam o modelo gravitacional de Einstein. Mas acontece que um dos pontos-chaves da abordagem de É Cartan é a alegada unicidade da conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano ([9, pp. 349–350]). No entanto, neste trabalho, observamos que houve um descuido nos cálculos de Cartan (ver Seção 3.2) e mostramos que, ao menos localmente, existem infinitas conexões que fazem o papel de geometrizar o sistema mecânico newtoniano. Nesse momento, percebemos que era necessário adaptar nossa abordagem primeiramente ao sistema mecânico newtoniano, a fim de compreender o papel da conexão de Cartan neste contexto. Assim, tendo como ponto de partida o grupo de Galileu, introduzimos o conceito de fibrado tangente estendido e formalizamos o conceito de deslocamento de Cartan como sendo o transporte paralelo ao longo desse fibrado. A seguir, mostramos que o deslocamento de Cartan associado a uma conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano coincide com o que determina a segunda lei de Newton, concluindo assim que esta abordagem é coerente com o conceito de geometrização do sistema físico idealizado por Cartan.

Tendo em vista que o deslocamento de Cartan, como definimos acima, coincide com a resposta conhecida pela física, e que a natureza não desperdiça energia (Teorema 5.5), é natural imaginarmos que uma conexão que minimize o funcional de Yang-Mills para a curvatura da conexão induzida no fibrado estendido acabe por geometrizar o sistema mecânico newtoniano. Apesar de não conseguirmos dar uma resposta afirmativa para essa questão, avançamos no sentido de obter uma equação que descreve quais são as conexões ASD nesse caso (Teoremas 6.3 e 6.6).

Este trabalho é dividido em cinco capítulos, faremos agora uma breve apresentação da organização de seu conteúdo a fim de destacar os principais pontos e facilitar sua leitura pela “diagonal”.

No Capítulo 1, faremos uma revisão da mecânica newtoniana através da ótica do

espaço tempo quadridimensional, enfatizando o papel do grupo de Galileu. A seguir, iremos introduzir os invariantes integrais de Poincaré-Cartan com ênfase na obtenção do elemento de matéria do meio quadridimensional ([8]).

Já no Capítulo 2, faremos uma revisão da mecânica newtoniana em face da teoria da relatividade geral através do método do referencial móvel e do elemento de matéria do meio. Introduziremos o conceito de conexão que geometriza um sistema físico, devido a Élie Cartan, a partir do tensor momento-energia (ou momento-massa). Ao final, faremos um estudo das propriedades fundamentais de uma conexão afim segundo Élie Cartan.

No Capítulo 3, faremos uma breve introdução aos conceitos de teoria de Calibre dos quais faremos uso, com foco na noção de conexão de Yang-Mills, em especial no conceito de instanton.

No Capítulo 4, realizaremos a materialização do deslocamento de Cartan como o transporte paralelo no fibrado tangente estendido (cf. Cap. 3), mostrando assim que essa é a abordagem adequada para o assunto, tendo em vista que as conexões que geometrizam o sistema mecânico newtoniano levam a deslocamentos de Cartan que concidem com a segunda lei Newton. Aqui talvez este trabalho tenha uma contribuição original ao tema, ao menos em linguagem contemporânea.

Por fim, no Capítulo 5, avançamos no uso do método da Teoria de Yang-Mills com a finalidade de buscar uma conexão ASD que geometrize os sistema mecânico newtoniano.

2 Mecânica clássica e os invariantes de Poincaré-Cartan

Faremos nesse capítulo uma revisão dos fundamentos da mecânica newtoniana clássica para em seguida reposicioná-la no contexto do espaço-tempo quadridimensional. As principais referências para este capítulo são [1], [4], [3], [5], [8], [20] e [19].

2.1 Mecânica newtoniana

Faremos nesta seção uma revisão da mecânica newtoniana sob a ótica dos princípios da relatividade e determinação.

2.1.1 Princípio da relatividade de Galileu Galilei

Na mecânica newtoniana o universo é tratado como um espaço euclidiano tridimensional enquanto que o tempo é unidimensional e completamente independente do espaço. Nesse espaço podemos discernir uma origem dos tempos, uma unidade de tempo, além de um sistema de referenciais espacial canônico previamente fixado. Nesse espaço tridimensional é válida a **lei da inércia**, também conhecida como **princípio da relatividade de Galileu**:

“Na mecânica, um corpo suficientemente afastado de outros corpos permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme.”

A partir dessa lei, podemos identificar os sistemas de referenciais que se deslocam com relação ao referencial original através de um movimento retilíneo e uniforme. Em outras palavras, a lei da inércia afirma que existe um sistema de referenciais satisfazendo as seguintes condições:

1. Todas as leis de movimento dos corpos em qualquer momento do tempo são as mesmas em qualquer referencial galileano;
2. Um referencial é galileano se, e somente se, estar em movimento retilíneo com relação ao referencial espacial canônico previamente estabelecido.

Com o avanço do nosso conhecimento do universo próximo, tornou-se cada vez mais evidente que o conceito de um referencial absoluto com relação ao qual todos os eventos seriam comparados não passava de uma quimera, sendo, portanto, necessário

refrasear a teoria newtoniana. Assim, diremos que $\{\mathbf{e}_{\lambda,0}, \mathbf{e}_{\lambda,1}, \dots, \mathbf{e}_{\lambda,4}\}_{\lambda \in \Lambda}$ é um **sistema de referenciais inerciais (ou galileano)** se cada um dos referenciais desse sistema se move com relação ao outro em um movimento retilíneo e uniforme.

2.1.2 O espaço-tempo quadridimensional

Levando-se em consideração todas as grandezas em jogo, podemos identificar os eventos no universo como um espaço-tempo quadridimensional em que cada ponto é descrito na forma

$$\mathbf{m} = t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

através do referencial galileano $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, onde \mathbf{e}_0 é o referencial dedicado à descrição do tempo e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é o referencial dedicado à descrição do espaço. Note que escolhido um referencial, é possível identificar os pontos materiais do universo com \mathbb{R}^4 através da relação

$$[\mathbf{m}]_{\mathbf{e}} = (t, x) = (t, x_1, x_2, x_3).$$

A questão natural que surge é exatamente qual relação existe entre as diferentes representações de um ponto material com relação a referenciais inerciais. Sendo $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ um outro referencial galileano, então a lei de inércia nos diz que o ponto material \mathbf{m} se escreve a na forma $[\mathbf{m}]_{\mathbf{e}'} = (t', x')$, onde

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau, \\ x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + v_1t + a_1, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + v_2t + a_2, \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + v_3t + a_3, \end{aligned}$$

$\tau \in \mathbb{R}$ é o lapso de tempo entre uma medição e outra do tempo e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é a velocidade com que $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ se afasta de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

De forma um pouco mais elaborada, a escolha de um sistema de referenciais galileano é na verdade a escolha de um atlas específico que fornece ao espaço Euclidiano E^4 e a seu espaço tangente uma estrutura de variedade tal que as leis da mecânica coincidem em qualquer das cartas desse atlas.

2.1.3 O grupo de Galileu

Passaremos agora à verificação de que as coordenadas de um mesmo ponto material no espaço quadridimensional newtoniano mudam pela ação de um grupo.

Lema 2.1. *O subconjunto $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$ cujos elementos são da forma*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [\mathbf{v}]_{\mathbf{e}} & A \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e ε é a base canônica de \mathbb{R}^n forma um subgrupo de $GL(\mathbb{R}^{n+1})$.

Demonstração. Pelas propriedades de determinante, temos $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$. Sejam $g, g' \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} g \cdot g' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [v]_\varepsilon & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [v']_\varepsilon & A' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [v]_\varepsilon + A[v']_\varepsilon & AA' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i.e., $g \cdot g' \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}[v]_\varepsilon & A^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

□

O subgrupo $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) \subset GL(\mathbb{R}^{n+1})$ será chamado de **grupo afim** de \mathbb{R}^n . Já o subgrupo de $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\text{Euc}(\mathbb{R}^n) = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n) : A \in SO(n)\}$$

será chamado de **grupo euclidiano** de \mathbb{R}^n .

Lema 2.2. O subconjunto $G_{gal} \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^5)$ cujos elementos são da forma

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ [\mathbf{s}]_\varepsilon & [\mathbf{v}]_\varepsilon & A \end{pmatrix}$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $A \in GL(3, \mathbb{R})$ e ε é a base canônica de \mathbb{R}^3 é um subgrupo de $\text{Aff}(\mathbb{R}^5)$.

Demonstração. A fim de verificar que $I \in \text{Aff}(\mathbb{R}^5)$ é um elemento de G , basta tomar $s = 0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = \mathbf{v} = 0 \in \mathbb{R}^3$ e $A = I \in GL(3, \mathbb{R})$. Por outro lado, se $g, g' \in G_{gal}$, então

$$\begin{aligned} g \cdot g' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ [\mathbf{s}]_\varepsilon & [\mathbf{v}]_\varepsilon & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s' & 1 & 0 \\ [\mathbf{s}']_\varepsilon & [\mathbf{v}']_\varepsilon & A' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s + s' & 1 & 0 \\ A[\mathbf{s}']_\varepsilon + s'[\mathbf{v}]_\varepsilon + [\mathbf{s}]_\varepsilon & A[\mathbf{v}']_\varepsilon + [\mathbf{v}]_\varepsilon & AA' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ R^{-1}[s\mathbf{v} - \mathbf{s}]_\varepsilon & -R^{-1}[\mathbf{v}]_\varepsilon & R^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

□

O subconjunto G_{gal} acima definido será chamado de **grupo de Galileu**. Em particular, sua álgebra de Lie é dada por

$$\mathfrak{g}_{gal} \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3).$$

Já o subgrupo $O_{gal} = G_{gal} \cap \text{Euc}(\mathbb{R}^5)$ será chamado de **grupo de Galileu ortogonal**. Sem dificuldade podemos verificar que

$$O_{gal} = G_{gal} \cap \text{Euc}(\mathbb{R}^5) = \{g \in G_{gal} : A \in SO(3)\}$$

Em particular, sua álgebra de Lie é dada por

$$\mathfrak{o}_{gal} \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3).$$

Observação 2.3. Caso $g \in O_{gal}$, então sua inversa se escreve na forma

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ R^{-1}[s\mathbf{v} - \mathbf{s}]_\varepsilon & -R^{-1}[\mathbf{v}]_\varepsilon & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ R^t[s\mathbf{v} - \mathbf{s}]_\varepsilon & -R^t[\mathbf{v}]_\varepsilon & R^t \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

uma vez que $R \in SO(3)$.

Mergulhando-se \mathbb{R}^4 em \mathbb{R}^5 através da aplicação $(t, \mathbf{x}) \mapsto (1, t, \mathbf{x})$, podemos considerar a ação do grupo de Galileu em \mathbb{R}^4 dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ [\mathbf{x}]_\varepsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ [s]_\varepsilon & [\mathbf{v}]_\varepsilon & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ [\mathbf{x}]_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t + s \\ A[\mathbf{x}]_\varepsilon + t[\mathbf{v}]_\varepsilon + [s]_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Assim percebemos que o grupo de Galileu (respect. ortogonal) se decompõe na forma $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ onde:

1. $g_1(t, \mathbf{x}) = (t, x + t\mathbf{v})$ é um movimento uniforme com velocidade \mathbf{v} ;
2. $g_2(t, \mathbf{x}) = (t + s, \mathbf{x} + \mathbf{s})$ é uma translação da origem;
3. $g_3(t, \mathbf{x}) = (t, A\mathbf{x})$ é uma transformação linear de \mathbb{R}^3 (respect. uma rotação dos eixos coordenados em \mathbb{R}^3).

2.1.4 Princípio da relatividade e segunda lei de Newton

Tendo em vista a discussão realizada nos parágrafos acima, podemos reler o princípio da relatividade de Galileu da forma a seguir, o que nos permite obter importante informação a respeito da segunda lei de Newton:

Proposição 2.4. *As leis de movimento de um sistema mecânico não se alteram em um sistema de referenciais inerciais. Logo, uma aplicação $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaz a segunda lei de Newton*

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t),$$

se, e somente se, $F \circ G = A \circ F$ para todo $G(x, y, t) = (Ax + vt + c, Ay + v, t + s) \in G_{Gal}$. Em particular, tomando-se $A = \text{id}$, $v = 0$ e $c = 0$, concluímos que F não depende do tempo.

Demonstração. Recordemos que na mecânica todos os movimentos são regidos pela equação

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t),$$

onde t é o tempo, a posição é dada por $x \in \mathbb{R}^3$, a velocidade dada por \dot{x} e a força é uma aplicação do tipo $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Assim, basta mostrar que a equação acima é invariante (a menos de uma rotação) pela ação do grupo de Galileu, ou seja, $F \circ G(x, \dot{x}, t) = A \circ F(x, \dot{x}, t)$. De fato, $G(x, \dot{x}, t) = (Ax + vt + c, A\dot{x} + v, t + s)$, pois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ [c]_\varepsilon & [\mathbf{v}]_\varepsilon & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ [x]_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t + s \\ [c]_\varepsilon + t[\mathbf{v}]_\varepsilon + A[x]_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Assim, a ação de G no espaço tangente a \mathbb{R}^4 é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ [c]_\varepsilon & [\mathbf{v}]_\varepsilon & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ [\dot{x}]_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ [\mathbf{v}]_\varepsilon + A[\dot{x}]_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Seja $(\bar{x}, \bar{\dot{x}}, \bar{t}) = (Ax + vt + c, A\dot{x} + v, t + s)$, então temos

$$\begin{aligned} F \circ G(x, \dot{x}, t) &= F(\bar{x}, \bar{\dot{x}}, \bar{t}) \\ &= \frac{d\bar{x}^2}{d\bar{t}^2} \\ &= \frac{d\bar{\dot{x}}}{d\bar{t}} \\ &= \frac{d(A\dot{x} + v)}{dt} \\ &= A\ddot{x} \\ &= F(x, \dot{x}, t). \end{aligned}$$

Segue o resultado desejado. □

2.2 Invariantes integrais de Poincaré-Cartan

Daremos aqui uma breve ideia do conceito de invariantes relativos e invariantes absolutos associados a um campo de vetores. Tais conceitos nascem a partir dos invariantes integrais de Poincaré e Cartan.

2.2.1 Motivação variacional

Após os trabalhos do matemático, físico e astrônomo irlandês William Howan Hamilton (1805 – 1865), sabemos que é possível reduzir todo o estudo da mecânica ao chamado **princípio da menor ação de Hamilton**. Recordemos esse princípio no caso de um ponto material submetido a uma força oriunda de uma função pontencial U que depende das coordenadas retangulares $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \in \mathbb{R}$.

“Em meio a todos os movimentos possíveis que levam um ponto material com uma dada posição (x_0, y_0, z_0) no instante t_0 para outra posição (x_1, y_1, z_1) no instante t_1 , o movimento verdadeiro é aquele que minimiza a integral definida:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right] dt. ”$$

Na expressão acima, m denota a massa do ponto e x', y', z' denotam as componentes da velocidade. A quantidade sob o sinal integral é chamada de **ação elementar** e a integral W é a **ação** no intervalo de tempo (t_0, t_1) . A fim de verificarmos que esse princípio efetivamente retorna as equações da mecânica, devemos considerar x, y, z como funções de t e de um parâmetro arbitrário α , e assim calcular a variação de W quando dermos a α um incremento de $\delta\alpha$, enquanto supomos ao mesmo tempo que x, y, z se reduzem a x_0, y_0, z_0 para $t = t_0$ e a x_1, y_1, z_1 para $t = t_1$ qualquer que seja α . Assim temos

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left[m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z \right] dt,$$

onde

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta \alpha, & \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha, & \delta z &= \frac{\partial z}{\partial \alpha} \delta \alpha, \\ \delta x' &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) = \frac{\partial (\delta x)}{\partial t}, \\ \delta y' &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) = \frac{\partial (\delta y)}{\partial t}, \\ \delta z' &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \delta \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \delta \alpha \right) = \frac{\partial (\delta z)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Aplicando-se integração por partes e recordando-se que $\delta x, \delta y, \delta z$ se anulam em t_0 e t_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \left[m(x' \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} + y' \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} + z' \frac{\partial(\delta z)}{\partial t}) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right] dt \\ &= m(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z)] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - mx'' \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - my'' \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - mz'' \right) \delta z \right] dt, \end{aligned}$$

Assim, o anulamento da variação δW implica no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} mx'' = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ my'' = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ mz'' = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Disso resulta então que os movimentos que o ponto material descreve sob a ação de uma dada força realiza o extremo para a integral W com respeito a todos os possíveis movimentos infinitamente próximos que correspondam às mesmas posições inicial e final do ponto. Além disso, esses são os únicos movimentos que gozam dessa propriedade. Para ser rigoroso, pode-se falar apenas do extremo da ação e não do mínimo, porque a condição de que a primeira variação δW se anule é necessária, mas não uma condição suficiente para garantir um mínimo. Note que a ação elementar

$$\left[\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right] dt,$$

parece ter sido introduzida aqui de uma forma puramente artificial, a fim de estabelecer as leis do movimento em uma forma condensada. Veremos que é possível substituir o princípio de Hamilton por outro princípio que é equivalente a ele, no qual uma expressão linear em dx, dy, dz, dt também aparece, mas onde todos os coeficientes têm um significado mecânico simples. Para vermos esse fato, continuemos a usar a mesma ação W , mas agora suponhamos que t_0 e t_1 são eles próprios funções do parâmetro α , enquanto os valores correspondentes $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ também são funções de α . Assim, aplicando-se a

derivação anterior à integral definida, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta W &= \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right]_{t=t_1} \delta t_1 - \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right]_{t=t_1} \delta t_0 \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left[m(x' \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} + y' \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} + z' \frac{\partial(\delta z)}{\partial t}) \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right] dt \\
&= \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right]_{t=t_1} \delta t_1 - \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right]_{t=t_1} \delta t_0 \\
&+ m(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z)|_{t_0}^{t_1} \\
&- \int_{t_0}^{t_1} [m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z)] dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right] dt \\
&= \left[m(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) + \left(\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right) \delta t \right]_{t=t_1} \\
&- \left[m(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) + \left(\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right) \delta t \right]_{t=t_0} \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - mx'' \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - my'' \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - mz'' \right) \delta z \right] dt.
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$[\delta x]_{t=t_1} = \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right] \delta \alpha, \quad \delta x_1 = \left[\frac{\partial x}{\partial t} \right]_{t=t_1} \delta t_1 + \left[\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right]_{t=t_1} \delta \alpha,$$

então temos

$$[\delta x]_{t=t_1} = \delta x_1 - x'_1 \delta t_1.$$

Com isso a expressão para δW assume a forma

$$\begin{aligned}
\delta W &= \left[mx'_1(\delta x_1 - x'_1 \delta t_1) + my'_1(\delta y_1 - y'_1 \delta t_1) + mz'_1(\delta z_1 - z'_1 \delta t_1) + \left(\frac{1}{2}m(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + U_1 \right) \delta t_1 \right] \\
&- \left[mx'_0(\delta x_0 - x'_0 \delta t_0) + my'_0(\delta y_0 - y'_0 \delta t_0) + mz'_0(\delta z_0 - z'_0 \delta t_0) + \left(\frac{1}{2}m(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) + U_0 \right) \delta t_0 \right] \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - mx'' \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - my'' \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - mz'' \right) \delta z \right] dt.
\end{aligned}$$

Assim, ao tomarmos

$$\begin{aligned}
\omega_\delta &= mx'(\delta x - x' \delta t) + my'(\delta y - y' \delta t) + mz'(\delta z - z' \delta t) + \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \delta t \\
&= mx' \delta x + my' \delta y + mz' \delta z - \left[\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U \right] \delta t,
\end{aligned}$$

obtemos uma expressão diferencial em cujas coordenadas espaciais encontra-se a expressão do momento linear $P = (mx', my', mz')$ e na coordenada temporal a expressão da energia $E = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U$. Com essa notação, podemos escrever a variação de W na forma

$$\delta W = [\omega_\delta]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - mx'' \right) \delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - my'' \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - mz'' \right) \delta z \right] dt.$$

Considere agora uma coleção de trajetórias reais que dependam de um parâmetro α , estando cada uma delas limitada a um intervalo de tempo (t_0, t_1) que varia com α . A fórmula que dá a variação da ação ao longo dessas trajetórias variáveis se reduz então a

$$\delta W = (\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0.$$

Finalmente, consideremos um tubo de trajetórias, i.e., um cilindro contínuo formado por uma coleção de trajetórias, cada uma das quais limitada a um intervalo de tempo (t_0, t_1) . Quando retornamos à trajetória inicial, a variação total da ação nitidamente se anula, de tal forma que, se integramos $(\omega_\delta)_i$ ao longo do bordo γ_i desse cilindro (i.e., curvas que variam com o parâmetro α), obtemos a igualdade

$$\int_{\gamma_1} (\omega_\delta)_1 = \int_{\gamma_0} (\omega_\delta)_0.$$

A fim de melhor interpretarmos o resultado obtido, denominamos as quantidades:

$$x, y, z, x', y', z', t$$

de estado do ponto material, onde as três primeiras quantidades definem a posição do ponto, os próximos três definem sua velocidade, e o último define o instante em que o ponto é considerado. Pode-se considerar um estado como um ponto em um espaço de sete dimensões: o espaço de estados. Uma trajetória pode ser definida como a coleção de todos os estados que correspondem a exatamente um movimento real do ponto, i.e., uma solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x', & m \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = y', & m \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} = z', & m \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dessa forma, a integral

$$\int_{\gamma} \omega_\delta = \int_{\gamma} m x' \delta x + m y' \delta y + m z' \delta z - E' \delta t$$

quando tomada ao longo de uma curva fechada γ no espaço de estados não irá variar ao fazermos os pontos de γ variarem continuamente ao longo das trajetórias do sistema mecânico (2.4). Passaremos agora à formalização dessas ideias em linguagem contemporânea.

2.2.2 O invariante integral momento-energia

Por uma questão de simplicidade, passaremos a considerar o espaço de estado com as coordenadas $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, dadas por $\mathbf{p} = (m x', m y', m z')$ e $\mathbf{q} = (x, y, z)$. Sendo essa uma mudança de sistema de coordenadas, as propriedades de invariância integral verificadas neste novo sistema de coordenadas irão necessariamente implicar nas propriedades de

invariância integral no sistema de coordenadas original e vice-versa. Assim, a forma diferencial momento-energia assume

$$\omega_H = \sum_{i=1}^3 p_i dq_i - H dt, \quad H = \left[\frac{1}{2m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - U(\mathbf{q}) \right].$$

O sistema dinâmico gerado por (2.4) assume então a forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.5)$$

Em outras palavras, o sistema dinâmico gerado em \mathbb{R}^{2n} por (2.4) é descrito pelo campo de vetores

$$\mathbf{X}_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right).$$

Dessa forma, no espaço de estados \mathbb{R}^{2n+1} a dinâmica induzida por (2.4) é aquela dada pelo campo de vetores $\widetilde{\mathbf{X}}_H = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X}_H$. Assim, diremos que ω_H é a 1-forma de **momento-energia** associada ao campo de vetores \mathbf{X}_H .

Proposição 2.5. *Se ω_H a 1-forma de momento-energia associada ao campo de vetores \mathbf{X}_H , então*

$$\mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} d\omega_H = 0$$

onde $\widetilde{\mathbf{X}}_H = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X}_H$.

Demonstração. Derivando-se ω_H , obtemos

$$d\omega_H = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \wedge dt. \quad (2.6)$$

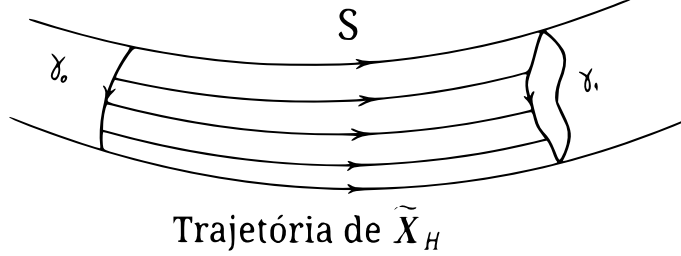
Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} d\omega_H &= \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} dp_i \wedge dq_i - dp_i \wedge \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} dq_i \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} dq_i \right) \wedge dt - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \wedge \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}_H} dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \wedge dt - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Diremos que duas curvas fechadas diferenciáveis $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ formam um **tubo de trajetórias** de $\widetilde{\mathbf{X}}_H$ se existir uma superfície diferenciável $S \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ composta

exclusivamente por trajetórias de $\widetilde{\mathbf{X}}_H$ de tal forma que seu bordo é composto pela união $\gamma_0 \cup \gamma_1$. Em outras palavras, existe uma função diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma_1(s) = \phi_{\alpha(s)}(\gamma_0(s))$, onde $\phi_t = \exp[t\widetilde{\mathbf{X}}_H]$ é o fluxo do campo de vetores $\widetilde{\mathbf{X}}_H$.



Proposição 2.6. *Sejam $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ duas curvas que formam um tubo de trajetórias de $\widetilde{\mathbf{X}}_H$, então temos*

$$\int_{\gamma_1} \omega_H = \int_{\gamma_0} \omega_H.$$

Demonstração. Sendo S o tubo de trajetórias tal que $\partial S = \gamma_1 - \gamma_0$, então segue do Teorema de Stokes e da Proposição 2.5 que

$$\int_{\gamma_1} \omega_H - \int_{\gamma_0} \omega_H = \int_{\partial S} \omega_H = \int_S d\omega_H = 0,$$

uma vez que a restrição de $d\omega_H$ a TS se anula identicamente. \square

O resultado anterior mostra que a forma momento-energia ω_H é aquilo que Cartan ([?]) denominou um invariante integral, generalizando a abordagem introduzida por Poincaré ([?]). De fato, o truncamento de ω_H aos mesmos instantes do tempo, i.e., a remoção da componente $-Hdt$ de ω_H , leva à forma de momento $\omega_P = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^3 p_i dq_i$, que é fundamental na formulação de Hamilton da mecânica clássica (cf. [?]).

Note que para sistemas dinâmicos com as mesmas trajetórias, mas velocidades e percursos distintas, a forma de energia continuará sendo um invariante integral. Portanto, a invariância da forma momento-energia não nos permite reobter o mesmo sistema dinâmico em retorno, mas, na melhor das hipóteses, a folheação gerada por ele. Vamos mostrar que esse é exatamente o caso.

Sendo $\omega \in \mathcal{A}^2(TM^*, \mathbb{R})$, diremos que $v \in T_pM$ anula $\omega(p)$ se $\omega(p)(v, w) = 0$ para todo $w \in T_pM$. O conjunto dos **anuladores** de $\omega(p)$ será denotado por $\text{Nuc}(\omega(p))$. Analogamente, diremos que um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ de vetores anula a forma ω se $X(p)$ é um anulado de $\omega(p)$ para todo $p \in M$. O conjunto dos anuladores de ω será então representado por

$$\text{Nuc}(\omega) = \{X \in \mathcal{X}(M) : \mathbf{i}_X \omega = 0\}.$$

Considere \mathbb{R}^{2n+1} com as coordenadas dadas por $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$. Se $H: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então diremos que $\omega_H = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt$ é a **forma de Cartan** sobre \mathbb{R}^{2n+1} com energia H .

Proposição 2.7. Sendo ω_H a forma de Cartan sobre \mathbb{R}^{2n+1} com energia H , então

$$\text{Nuc}(d\omega_H) = \left\langle \widetilde{\mathbf{X}}_H = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, 1 \right) \right\rangle \subset \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Demonstração. Sendo $\widetilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \in \text{Nuc}(d\omega_H)$, então segue de (2.6) que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} d\omega_H &= \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} dp_i \wedge dq_i - dp_i \wedge \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} dq_i \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} dq_i \right) \wedge dt - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \wedge \mathbf{i}_{\widetilde{\mathbf{X}}} dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 (a_i dq_i - b_i dp_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} a_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} b_i \right) \wedge dt - c \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\left(a_i + c \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dq_i - \left(b_i - c \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dp_i \right) - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} a_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} b_i \right) \wedge dt. \end{aligned}$$

Segue o resultado desejado. \square

O resultado anterior mostra que qualquer sistema dinâmico que tenha ω_H como invariante integral necessariamente define a mesma folheação no espaço de estados $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times M$ que o campo de vetores $\widetilde{\mathbf{X}}_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, 1 \right)$. Dessa forma, a partir de ω_H fica unicamente determinado o sistema dinâmico dado pelo campo de vetores $\mathbf{X}_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)$ em M .

2.2.3 Invariantes relativos e invariantes absolutos

Diremos que uma p -forma ω é um **invariante relativo** do campo de vetores \mathbf{X} se $\mathbf{i}_X d\omega = 0$. Um exemplo de invariante relativo é a 1-forma momento-energia da dinâmica newtoniana. Por outro lado, diremos que uma p -forma ω é um **invariante absoluto** do campo de vetores \mathbf{X} se $\mathbf{i}_X d\omega = \mathbf{i}_X \omega = 0$.

Proposição 2.8. Todo invariante absoluto por um campo de vetores $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$ é invariante ao longo das órbitas. Mais precisamente,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega(x) = \frac{d}{dt} (\phi_t^* \omega(x)) \Big|_{t=0} = \frac{d\phi_t^* \omega(x)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

para todo invariante absoluto $\omega \in \mathcal{A}^p(TM^*; \mathbb{R})$ e todo $x \in M$.

Demonstração. Segue imediatamente da fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega = \mathbf{i}_X d\omega + d\mathbf{i}_X \omega.$$

□

Dado um campo de vetores $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^n) = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{X}(M)$, diremos que $f \in \mathcal{C}^1(M; \mathbb{R})$ é uma **integral primeira** de X se f for constante ao longo das órbitas de X , i.e, ao longo das órbitas do sistema dinâmico

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n. \quad (2.7)$$

Podemos caracterizar tal propriedade através da equação funcional

$$df(x) \cdot X(x) = 0, \quad \forall x \in M. \quad (2.8)$$

Note ainda que a cada campo de vetores $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{X}(M)$ definido sobre M podemos definir um único campo de vetores $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ sobre $\tilde{M} = \mathbb{R} \times M$, dado por

$$\tilde{\mathbf{X}} = (1, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Por abuso de linguagem, diremos que $f \in \mathcal{C}^1(\tilde{M}; \mathbb{R})$ é uma **integral primeira** para o sistema dinâmico (2.7) se for uma integral primeira para o campo de vetores $\tilde{\mathbf{X}}$. Nesse caso, segue imediatamente de (2.8) que

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_1} X^1(x) + \dots + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_n} X^n(x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \tilde{M}. \quad (2.9)$$

Proposição 2.9. *Dado um campo de vetores $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{X}(M)$, então para cada função $f \in \mathcal{C}^1(\tilde{M}; \mathbb{R})$, existem (únicos), $g, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^0(\tilde{M}; \mathbb{R})$ tais que*

$$df = g_1(dx^1 - X^1 dt) + \dots + g_n(dx^n - X^n dt) + g dt.$$

Em particular, f é uma integral primeira de $\tilde{\mathbf{X}}$ se, e somente se, $g = 0$.

Demonstração. Segue imediatamente da definição que $df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$. Como $\{dt, dx^1, \dots, dx^n\}$ é um referencial local para o espaço cotangente, então podemos tomar $g_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ e $g := \frac{\partial f}{\partial t} + g_1 X^1 + \dots + g_n X^n$. Por fim, a segunda afirmação do enunciado segue imediatamente de (2.9). □

O resultado anterior sugere que as formas $dx^i - X^i dt$, $i = 1, \dots, n$, têm um papel fundamental na descrição do espaço de invariantes absolutos de um campo de vetores.

Proposição 2.10. *Seja $\omega_t(x) = \omega(t, x) = \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} a_I(t, x) dx^I$ uma família de p -formas sobre M e $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores sobre M , então $\tilde{\omega} = \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} a_I (dx^{i_1} - X^{i_1} dt) \wedge \dots \wedge (dx^{i_p} - X^{i_p} dt) \in \mathcal{A}^p(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$ se escreve na forma*

$$\tilde{\omega} = \omega - dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}} \omega.$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} &= \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} a_I (dx^{i_1} - X^{i_1} dt) \wedge \cdots \wedge (dx^{i_p} - X^{i_p} dt) \\
&= \omega - \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \sum_{k=1}^n a_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge X^{i_k} dt \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \omega - dt \wedge \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{i}_X dx^{i_k} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \omega - dt \wedge \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \sum_{k=1}^n a_I \mathbf{i}_X (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \\
&= \omega - dt \wedge \mathbf{i}_X \omega.
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado estabelece um dicionário entre os invariantes integrais de Poincaré e Cartan. A fim de simplificar nossos cálculos, vamos introduzir alguma notação: iremos denotar a derivação exterior exterior em M por $d: \mathcal{A}^*(TM^*; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{*+1}(TM^*; \mathbb{R})$ enquanto que a derivada exterior em \tilde{M} será denotada por $\tilde{d}: \mathcal{A}^*(T\tilde{M}^*; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{*+1}(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$. Em particular, $\tilde{d} = \partial_t + d$.

Teorema 2.11. *Seja ω_t uma família de p -formas sobre M , $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores sobre M e $\tilde{\omega} \in \mathcal{A}^p(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$ dada por $\tilde{\omega} = \omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_X \omega_t$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\{\omega_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{A}^p(TM^*; \mathbb{R})$ é uma família de p -formas satisfazendo a relação $\frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \mathcal{L}_X \omega_t = 0$;
2. $\tilde{\omega} = \omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_X \omega_t \in \mathcal{A}^p(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$ é um invariante relativo de $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$;
3. $\tilde{\omega} = \omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_X \omega_t \in \mathcal{A}^p(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$ é um invariante absoluto de $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$.

Demonstração. Sendo $\omega(t, x) = \omega_t(x)$, segue da Proposição 2.10 que

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}} \tilde{\omega} &= \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}} \omega - \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}} (dt \wedge \mathbf{i}_X \omega) \\
&= \mathbf{i}_X \omega - \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}} dt \wedge \mathbf{i}_X \omega + dt \wedge \mathbf{i}_X \mathbf{i}_X \omega \\
&= \mathbf{i}_X \omega - \mathbf{i}_X \omega + dt \wedge 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, (2) e (3) são equivalentes. Além disso, se $\omega_t(x) = \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} a_I(t, x) dx^I$ e $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, então

$$\begin{aligned} \tilde{d}\tilde{\omega} &= \tilde{d}\omega - \tilde{d}(dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega) \\ &= (\partial_t + d)\omega_t - d^2t \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t + dt \wedge \tilde{d}\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t \\ &= d\omega_t + \partial_t\omega_t + dt \wedge (\partial_t + d)\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega \\ &= d\omega_t + \partial_t\omega_t + dt \wedge (\partial_t\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega + d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega) \\ &= d\omega_t + \partial_t\omega_t + dt \wedge d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t \\ &= d\omega_t + \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} dt \wedge dx^I + dt \wedge d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t. \end{aligned}$$

uma vez que $dt \wedge (\partial_t\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega) = dt \wedge \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}dx^I = 0$. Segue da fórmula de Cartan que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}\tilde{d}\tilde{\omega} &= \mathbf{i}_{\mathbf{X}}d\omega_t + \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}(dt \wedge dx^I) + \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}(dt \wedge d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t) \\ &= \mathbf{i}_{\mathbf{X}}d\omega_t + \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} dx^I - \sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}dx^I + d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t \\ &= \frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}} \left(\sum_{I \in \mathcal{C}^{p,n}} \frac{\partial a_I}{\partial t} dx^I + d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_t \right) \\ &= \frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}} \left(\frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega_t \right). \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega_t = 0$. Segue o resultado desejado. \square

No caso de famílias estacionárias, temos a seguinte caracterização.

Corolário 2.12. *Seja ω uma p -forma sobre M e $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$ um campo de vetores sobre M . Então $\tilde{\omega} = \omega - dt \wedge \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega \in \mathcal{A}^p(T\tilde{M}^*; \mathbb{R})$ é um invariante absoluto de $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X} \in \mathcal{X}(\tilde{M})$ se, e somente se, $\omega \in \mathcal{A}^p(TM^*, \mathbb{R})$ satisfaz a relação*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = 0.$$

Vejam agora alguns exemplos:

Exemplo 2.13. *Observe que a 1-forma $\omega(x, y) = ydx + xdy$ é um invariante relativo do campo de vetores $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$. De fato, temos*

$$d\omega(x, y) = dy \wedge dx + dx \wedge dy = 0,$$

de onde segue que $\mathbf{i}_{\mathbf{X}}d\omega = 0$. Por outro lado,

$$d\mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega = d \left((ydx + xdy) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) = dy \neq 0.$$

Concluimos do corolário anterior que $\tilde{\omega}(x, y) = y(dx - dt) + xdy$ não é um invariante absoluto de $\tilde{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$. De fato, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(x, y) &= dy \wedge (dx - dt) + dx \wedge dy \\ &= -dy \wedge dt \\ &= dt \otimes dy - dy \otimes dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}d\tilde{\omega} &= \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}dt \otimes dy - \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}}dy \otimes dt \\ &= dy - 0 \cdot dt \\ &= dy \neq 0. \end{aligned}$$

Isso se deve ao fato de termos $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega \neq 0$.

Exemplo 2.14. Sendo $\omega_H = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt$ a forma de Cartan de \mathbb{R}^{2n+1} com energia H e $\mathbf{X}_H \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n})$ o campo de vetores dado por $\mathbf{X}_H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right)$, então segue da Proposição 2.7 que ω_H é um invariante relativo de $\tilde{\mathbf{X}}_H = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X}_H$. No entanto, a forma de Cartan não é um invariante absoluto do sistema dinâmico gerado pelo campo de vetores $\tilde{\mathbf{X}}_H$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}_H}\omega_H &= \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}_H}\left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt\right) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{i}_{\mathbf{X}_H}dq_i - H \mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}_H}dt \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\mathbf{i}_{\tilde{\mathbf{X}}_H}\omega_H &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \right) - dH \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2} dp_i + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} dq_i \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2} dp_i + \left(p_i \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dq_i, \end{aligned}$$

que não se anula em geral.

Observação 2.15. O exemplo acima mostra que, ao contrário do que se possa imaginar, a forma de Cartan ω_H não pode ser obtida pela relação $\omega_H = \omega_P - \mathbf{i}_{\mathbf{X}}\omega_P$ a partir do invariante integral de Poincaré ω_P (a forma de momento $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$). De acordo com o Teorema 2.11, isso se deve ao fato de que $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H}\omega_P \neq 0$.

2.2.4 O princípio da conservação da massa e o elemento de matéria do meio

Vejamos agora algumas consequências do Teorema 2.11 com relação ao comportamento da densidade de massa em um meio contínuo. Sendo $\omega_t(x) = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, a densidade de massa por unidade de volume e $X = \sum_{i=1}^3 v^i e_i$ o campo que determina as velocidades dessa densidade, então

$$\mathbf{i}_X \omega_t = \rho v^1 dx^2 \wedge dx^3 - \rho v^2 dx^1 \wedge dx^3 + \rho v^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Dessa forma, segue do princípio da conservação de massa que

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_t}{dt} + \mathcal{L}_X \omega_t &= \frac{d\omega_t}{dt} + \mathcal{L}_X \omega_t \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \mathbf{i}_X d\omega_t + d\mathbf{i}_X \omega_t \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + d\mathbf{i}_X \omega_t \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x_3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x_3} \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a 3-forma

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega_t - dt \wedge \mathbf{i}_X \omega_t \\ &= \omega_t - dt \wedge \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \rho v^i \widehat{dx^i} \\ &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \rho v^i \widehat{dx^i}. \end{aligned}$$

é um invariante absoluto de X . Note que se $\vec{P} = \sum_{i=0}^3 \rho v^i e_i$, então

$$\tilde{\omega} = \mathbf{i}_{\vec{P}} dV, \tag{2.10}$$

onde $dV = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ é a 3-forma cujo núcleo gera a folheação induzida pelo campo de vetores \vec{P} .

3 A Geometria de Cartan e a dinâmica do contínuo

Neste capítulo iremos abordar as ideias fundamentais introduzidas pelos irmãos Cosserat e desenvolvidas por Élie Cartan a partir da ótica do método dos referenciais móveis e dos invariantes integrais de Poincaré-Cartan. Nossas principais referências para este capítulo são [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15] e [16].

3.1 Conexão afim e a dinâmica dos meios contínuos

Iremos aqui construir um modelo geométrico que descreve um sistema mecânico baseado na dinâmica clássica dos meios contínuos dos irmãos Cosserat ([14], [27]) para em seguida construir o modelo geométrico de É. Cartan. Com essa abordagem, o arcabouço geométrico básico é uma conexão afim no fibrado de referenciais cujo grupo estrutural é dado pelo grupo de Galileu.

3.1.1 O espaço-tempo e a dinâmica de uma partícula

Sendo m igual a massa de uma partícula e $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um sistema de referenciais galileanos, então os vetores

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{P}} = m\mathbf{e}_0 + m\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + m\frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + m\frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3$$

independem da escolha do referencial inercial. Note ainda que a primeira componente deste vetor, a massa, é invariante por mudança de coordenadas. No entanto, as últimas três coordenadas, que definem o momento linear, não são invariantes por um referencial galileano. Este último vetor será chamado de **vetor momento-massa**. Sem dificuldade, se verifica que a derivada temporal do vetor momento-massa é igual ao vetor espacial força, i.e., valem o princípio da conservação de massa e a lei que relaciona a força à aceleração.

3.1.2 Dinâmica clássica dos meios contínuos

Passaremos agora a considerar o modelo físico introduzido por Eugène Cosserat e François Cosserat em 1909. Considere uma região tridimensional \mathcal{V} no espaço-tempo. Sabemos¹ de (2.10) que a massa total contida nessa região \mathcal{V} é dada pela integral

$$m(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} P^0 := \int_{\mathcal{V}} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^j \widehat{dx}^j,$$

¹ Cf. [8, pp. 35–37].

onde ρ é a densidade de massa, $v^0 = 1$, v^1 , v^2 e v^3 denotam as componentes da velocidade de cada elemento de matéria nas direções \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , respectivamente, e $\widehat{dx}^i = (-1)^i \mathbf{i}_{\mathbf{e}_i} dx^{0,1,2,3} = (-1)^i \mathbf{i}_{\mathbf{e}_i} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Segundo a teoria dos irmãos Cosserat, assumindo que a matéria é livre de pressão e tensão, as componentes nas direções \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 do momento deste mesmo elemento de volume serão dadas, respectivamente, por

$$\int_{\mathcal{V}} P^i = \int_{\mathcal{V}} v^i P^0 = \int_{\mathcal{V}} \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^i v^j \widehat{dx}^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

O $(3,1)$ -tensor $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$ será chamado de **tensor momento-massa** de um elemento de matéria do meio.

Teorema 3.1. *A taxa de variação do tensor momento-massa por unidade de tempo coincide com o campo de forças por unidade de volume. Mais precisamente,*

$$d\mathbf{P} = dt \wedge \mathbf{F},$$

onde $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \widehat{dx}^0 \otimes \mathbf{e}_i$ é o campo de forças.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} dP^0 &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j d(\rho v^j) \widehat{dx}^j \\ &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j \frac{\partial(\rho v^j)}{\partial x_j} dx^j \wedge \widehat{dx}^j \\ &= \left(\sum_{j=0}^3 \frac{\partial(\rho v^j)}{\partial x_j} \right) dx^{0,1,2,3} \end{aligned}$$

Segue do princípio da conservação da massa (na mecânica dos fluidos ou mecânica do contínuo) que $dP^0 = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} dP^i &= d(v^i P^0) = dv^i \wedge P^0 + v^i \wedge dP^0 \\ &= dv^i \wedge \left(\sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^j \widehat{dx}^j \right) = \sum_{j=0}^3 \rho v^j (-1)^j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx^j \wedge \widehat{dx}^j \\ &= \left(\sum_{j=0}^3 \rho \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \frac{dx^j}{dt} \right) dx^{0,1,2,3} = \left(\sum_{j=0}^3 \rho \frac{dv^i}{dt} \right) dx^{0,1,2,3} \\ &= \left(\sum_{j=0}^3 \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) dx^{0,1,2,3}. \end{aligned}$$

Segue da segunda lei de Newton que

$$dP^i = dx^0 \wedge (\rho A^i dx^{1,2,3}) = dx^0 \wedge (F^i dx^{1,2,3}).$$

Concluimos então o resultado desejado. □

No caso particular acima, nós desconsideramos por completo a presença de pressão, no entanto, o caso geral pode ser reduzido ao anterior, apenas corrigindo-se o tensor momento-massa através da introdução das componentes espaciais da pressão sobre um elemento de matéria (cf. [9, p. 342]). De fato, iremos definir o tensor momento-massa (generalizado) através da expressão $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$, onde P^0 é o mesmo e

$$P^i = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^i v^j \widehat{dx^j} + \sum_{j=1}^3 (-1)^j p_{ij} \widehat{dx^j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Na teoria cinética dos gases, a pressão pode ser considerada como o fluxo do momento resultante de irregularidades nas velocidades moleculares. Nesse caso, as componentes da velocidade são consideradas como velocidades médias. Como a força por elemento de volume será dada pela variação do momento (generalizado) por unidade de tempo, i.e., $d\mathbf{P} = dt \wedge \mathbf{F}$, ao expandirmos essa equação em coordenadas, teremos as equações usuais de mecânica dos meios contínuos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x_3} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x_1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x_2} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} &= F_1, \\ \rho \left(\frac{\partial v^2}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^2}{\partial x_1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial x_2} + v^3 \frac{\partial v^2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} &= F_2, \\ \rho \left(\frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^3}{\partial x_1} + v^2 \frac{\partial v^3}{\partial x_2} + v^3 \frac{\partial v^3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} &= F_3. \end{aligned}$$

Essas três últimas equações são as conhecidas **equações de Euler** e são algumas das equações fundamentais da dinâmica de fluidos.

Mas essas não são as únicas equações. De fato, outro aspecto importante da dinâmica de um corpo é determinado pelo vetor momento angular. Sabemos que o vetor momento angular de um elemento de matéria de um meio contínuo é dado por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{P}}$, onde $\vec{\mathbf{v}}$ é o vetor velocidade e $\vec{\mathbf{r}}$ é o vetor posição de cada elemento de matéria, respectivamente. Sendo $\vec{\mathbf{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$ o torque, então o teorema do momento angular no diz que $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{\tau}}$. Como o produto alternado estende de maneira natural o conceito de produto vetorial, diremos que o (3, 2)-tensor $\mathbf{L} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{P}$ é o tensor **momento angular**, enquanto que o (3, 2)-tensor $\mathbf{T} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{F}$ será chamado de tensor **torque**. Assim, o segundo teorema fundamental da dinâmica pode ser reformulado como segue:

Teorema 3.2. *A taxa de variação do tensor momento angular por unidade de tempo coincide com o torque por unidade de volume. Mais precisamente,*

$$d\mathbf{L} = dt \wedge \mathbf{T},$$

onde $\mathbf{T} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{F}$ é o tensor de torção.

Demonstração. Sendo $\mathbf{L} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{P}$, então temos $d\mathbf{L} = d\mathbf{m} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{m} \wedge d\mathbf{P}$. Agora observe que o primeiro termo desta equação se anula. De fato,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{m} \wedge \mathbf{P} &= \sum_{i=0}^3 dx^i \otimes \mathbf{e}_i \wedge \sum_{j=0}^3 P^j \otimes \mathbf{e}_j \\
&= \sum_{i,j=0}^3 (dx^i \wedge P^j) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\
&= \sum_{i,j=0}^3 (dx^i \wedge \sum_{k=0}^3 (-1)^k \rho v^j v^k \widehat{dx^k}) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\
&= \sum_{i,j=0}^3 \rho v^i v^j dx^{0,1,2,3} \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\
&= \sum_{j>i=0}^3 \rho (v^i v^j - v^j v^i) dx^{0,1,2,3} \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Por outro lado, o Teorema 3.1 nos assegura que o segundo termo assume a forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \wedge d\mathbf{P} &= \mathbf{m} \wedge dt \wedge \mathbf{F} \\
&= dt \wedge \mathbf{m} \wedge \mathbf{F} \\
&= dt \wedge \mathbf{T}.
\end{aligned}$$

Segue o resultado desejado. □

Vejamos como ficam essas equações em coordenadas locais. O tensor momento angular assume a forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{m} \wedge \mathbf{P} \\
&= \left(\sum_{i=0}^3 x_i \otimes \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^3 P^j \otimes \mathbf{e}_j \right) \\
&= \sum_{i,j=0}^3 x_i P^j \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\
&= \sum_{j>i=0}^3 (x_i P^j - x_j P^i) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j,
\end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{m} \wedge \mathbf{F} \\
 &= \sum_{i=0}^3 x_i \otimes \mathbf{e}_i \wedge \sum_{j=0}^3 F^j \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \sum_{i,j=0}^3 x_i \otimes \mathbf{e}_i \wedge F^j \otimes \mathbf{e}_j \\
 &= \sum_{j>i=0}^3 (x_i F^j - x_j F^i) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, em coordenadas locais a segunda equação da dinâmica assume a forma

$$\begin{aligned}
 d(x_2 P^3 - x_3 P^2) &= (x_2 F^3 - x_3 F^2) dx^{0,1,2,3}, \\
 d(x_3 P^1 - x_1 P^3) &= (x_3 F^1 - x_1 F^3) dx^{0,1,2,3}, \\
 d(x_1 P^2 - x_2 P^1) &= (x_1 F^2 - x_2 F^1) dx^{0,1,2,3}.
 \end{aligned}$$

Mas recorde da prova do Teorema 3.2 que

$$0 = d\mathbf{m} \wedge \mathbf{P} = \sum_{i,j=0}^3 (dx^i \wedge P^j) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \sum_{j>i=0}^3 (dx^i \wedge P^j - dx^j \wedge P^i) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j,$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
 dx^2 \wedge P^3 - dx^3 \wedge P^2 &= 0, \\
 dx^3 \wedge P^1 - dx^1 \wedge P^3 &= 0, \\
 dx^1 \wedge P^2 - dx^2 \wedge P^1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observe que no caso particular em que há ausência de pressão, essas equações são automaticamente satisfeitas, já no caso geral (sem torque) as seguintes relação precisam ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}
 p_{32} - p_{23} &= 0, \\
 p_{13} - p_{31} &= 0, \\
 p_{21} - p_{12} &= 0.
 \end{aligned}$$

Passaremos agora a reinterpretar todas estas informações em uma única equação tensorial. Por uma questão de simplicidade, começaremos analisando o caso de uma partícula. Recorde que o momento-massa de uma partícula de massa m é dado por $m \left(\mathbf{e}_0 + \frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{e}_3 \right)$. Sendo $\mathbf{m} = (t, x_1, x_2, x_3)$ um ponto do espaço-tempo, então a derivada deste ponto em relação ao tempo é dada pelo vetor $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{e}_0 + \frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{e}_3$. Logo, o momento-massa de uma partícula é dado por $m \frac{d\mathbf{m}}{dt}$. Mergulhando-se o espaço-tempo em \mathbb{R}^5 através da identificação de \mathbb{R}^4 com $\mathbb{R}^4 \times \{1\}$, dada por $(\mathbf{m}, 1) =$

$t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, e tomando-se um segundo ponto $(\mathbf{m}', 1) = t'\mathbf{e}_0 + x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + x'_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, obtemos a seguinte expressão para o produto alternado entre esses dois vetores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}, 1) \wedge (\mathbf{m}', 1) &= (t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \wedge (t'\mathbf{e}_0 + x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + x'_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ &= (tx'_1 - t'x_1)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + (tx'_2 - t'x_2)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2 + (tx'_3 - t'x_3)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (x_1x'_2 - x'_1x_2)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (x_1x'_3 - x'_1x_3)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (x_2x'_3 - x'_2x_3)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (t - t')\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_4 + (x_1 - x'_1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + (x_2 - x'_2)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + (x_3 - x'_3)\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Chamado por Cartan de *vecteur glissé*, este $(0, 2)$ -tensor sobre \mathbb{R}^5 tem a capacidade de registrar não somente a diferença entre \mathbf{m} e \mathbf{m}' , assim como o rotacional entre suas projeções tridimensionais.

Teorema 3.3. *A taxa de variação do tensor $m(\mathbf{m}, 1) \wedge \frac{d(\mathbf{m}, 1)}{dt}$ com relação ao tempo é dada por $(\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \mathbf{e}_i$.*

Demonstração. Começemos observando que,

$$\begin{aligned} m \left((\mathbf{m}, 1) \wedge \frac{d(\mathbf{m}, 1)}{dt} \right) &= m(t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \wedge \left(\mathbf{e}_0 + \frac{dx_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\mathbf{e}_3 \right) \\ &= m \left(t \frac{dx_1}{dt} - x_1 \right) \mathbf{e}_{0,1} + m \left(t \frac{dx_2}{dt} - x_2 \right) \mathbf{e}_{0,2} + m \left(t \frac{dx_3}{dt} - x_3 \right) \mathbf{e}_{0,3} - m \mathbf{e}_{0,4} \\ &\quad + m \left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} x_2 \right) \mathbf{e}_{1,2} + m \left(x_1 \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_1}{dt} x_3 \right) \mathbf{e}_{1,3} - m \frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_{1,4} \\ &\quad + m \left(x_2 \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt} x_3 \right) \mathbf{e}_{2,3} - m \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_{2,4} - m \frac{dx_3}{dt} \mathbf{e}_{3,4}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F} &= (t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \wedge (F^1\mathbf{e}_1 + F^2\mathbf{e}_2 + F^3\mathbf{e}_3) \\ &= tA^1\mathbf{e}_{0,1} + tA^2\mathbf{e}_{0,2} + tA^3\mathbf{e}_{0,3} + (x_1F^2 - x_2F^1)\mathbf{e}_{1,2} \\ &\quad + (x_1F^3 - x_3F^1)\mathbf{e}_{1,3} + (x_2F^3 - x_3F^2)\mathbf{e}_{2,3} \\ &\quad - F^1\mathbf{e}_{1,4} - F^2\mathbf{e}_{2,4} - F^3\mathbf{e}_{3,4}. \end{aligned}$$

Dessa forma, os teoremas de conservação de massa e momento angular e o princípio fundamental da dinâmica, expressos nas equações abaixo, nos dão o resultado desejado:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= 0, & \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_1}{dt} \right) &= F_1, \\ \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_2}{dt} \right) &= F_2, & \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_3}{dt} \right) &= F_3, \\ \frac{d}{dt} \left(mt \frac{dx_1}{dt} - mx_1 \right) &= tA_1, & \frac{d}{dt} \left(mt \frac{dx_2}{dt} - mx_2 \right) &= tA_2, \\ \frac{d}{dt} \left(mt \frac{dx_3}{dt} - mx_3 \right) &= tA_3, & \frac{d}{dt} \left(mx_2 \frac{dx_3}{dt} - mx_3 \frac{dx_2}{dt} \right) &= x_2F_3 - x_3F_2, \\ \frac{d}{dt} \left(mx_3 \frac{dx_1}{dt} - mx_1 \frac{dx_3}{dt} \right) &= x_3F_1 - x_1F_3, & \frac{d}{dt} \left(mx_1 \frac{dx_2}{dt} - mx_2 \frac{dx_1}{dt} \right) &= x_1F_2 - x_2F_1. \end{aligned}$$

□

O teorema acima nos mostra que a equação

$$\frac{d}{dt}m \left((\mathbf{m}, 1) \wedge \frac{d(\mathbf{m}, 1)}{dt} \right) = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F}$$

contém, de uma só vez, o princípio fundamental da dinâmica e o teorema do momento angular.

Retornemos agora à mecânica dos meios contínuos com a notação precedente. Sendo $(\mathbf{m}, 1) = t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in \mathbb{R}^5$ o $(0, 1)$ -tensor de posição, $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$ o $(3, 1)$ -tensor massa-momento dado por (3.1) e $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \widehat{dx^0} \otimes \mathbf{e}_i$ o $(3, 1)$ -tensor de força, então os $(3, 2)$ -tensores

$$\mathbf{P} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P} \text{ e } \mathbf{F} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F},$$

serão chamados, respectivamente, de tensor **massa-momento generalizado** e **força generalizada**. Note que estes tensores encerram ao mesmo tempo o momento linear e angular assim como a força e o torque. De fato temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{P}, \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{F} + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Assim as equações da dinâmica dos meios contínuos podem ser encapsuladas no seguinte resultado.

Teorema 3.4. *A taxa de variação do tensor de massa-momento generalizado por unidade de tempo coincide com o tensor de força generalizada por unidade de volume. Mais precisamente,*

$$d\mathbf{P} = dt \wedge \mathbf{F}.$$

Demonstração. Sendo $\mathbf{P} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P}$, temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= d(\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P} + (\mathbf{m}, 1) \wedge d\mathbf{P} \\ &= \left(\sum_{i=0}^3 dx^i \otimes \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^3 P^j \otimes \mathbf{e}_j \right) + (\mathbf{m}, 1) \wedge (dt \wedge \mathbf{F}) \\ &= \sum_{i < j} (dx^i P^j - P^j dx^j) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j + dt \wedge \mathbf{F} \\ &= dt \wedge \mathbf{F}, \end{aligned}$$

Uma vez que $(dx^i P^j - P^j dx^j) = 0$ por (3.2).

□

Note ainda que se além da força tivermos um torque gerado pela pressão e tensão, então a expressão da força generalizada deverá ser modificada para $F = \mathbf{m} \wedge \mathbf{F} + \mathbf{G}$, onde

$$\mathbf{G} = G^{2,3} \widehat{dx^0} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + G^{1,3} \widehat{dx^0} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + G^{1,2} \widehat{dx^0} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$

Em outras palavras, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \widehat{dx^0} [tA^1 \mathbf{e}_{0,1} + tA^2 \mathbf{e}_{0,2} + tA^3 \mathbf{e}_{0,3}] \\ & + \widehat{dx^0} [(x_1 F^2 - x_2 F^1 + G^{1,2}) \mathbf{e}_{1,2} + (x_1 F^3 - x_3 F^1 + G^{1,3}) \mathbf{e}_{1,3} + (x_2 F^3 - x_3 F^2 + G^{2,3}) \mathbf{e}_{2,3}] \\ & - \widehat{dx^0} [F^1 \mathbf{e}_{1,4} - F^2 \mathbf{e}_{2,4} - F^3 \mathbf{e}_{3,4}]. \end{aligned}$$

Nesse caso, segue do teorema fundamental da dinâmica e do teorema do momento angular que

$$\begin{aligned} p_{32} - p_{23} &= dx^2 \wedge P^3 - dx^3 \wedge P^2 = G^{2,3}, \\ p_{31} - p_{13} &= dx^1 \wedge P^3 - dx^3 \wedge P^1 = G^{1,3}, \\ p_{21} - p_{12} &= dx^1 \wedge P^2 - dx^2 \wedge P^1 = G^{1,2}. \end{aligned}$$

O resultado anterior nos mostra que numa só equação está encapsulada toda a dinâmica newtoniana de meios contínuos com um referencial fixo. Passemos agora à análise do mesmo resultado com referenciais móveis.

3.1.3 Conexões afins em sistemas de referenciais galileanos

Tendo sempre em mente o princípio da relatividade de Galileu, iremos nos utilizar de argumentos de natureza geométrico-diferenciais a fim de estudar o comportamento de referenciais na vizinhança de um ponto.

A mecânica newtoniana se desenvolve no espaço euclideo quadridimensional E^4 , sendo o tempo uma variável absolutamente independente do espaço tridimensional. Como queremos estudar a relação entre referenciais em pontos vizinhos, a derivada usual é um instrumento natural para desenvolver este conceito. Iremos então considerar um ponto \mathbf{m} num aberto U do espaço-tempo newtoniano e considerar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ campos diferenciáveis de vetores em U , com origem em \mathbf{m} . A partir do referencial $\{\mathbf{e}_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares pela condição $\omega^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker); em outras palavras, no ponto $\mathbf{m} \in U$, a base $\{\omega^i\}$ é a base dual da base $\{\mathbf{e}_i\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega^i\}$ é chamado o **correferencial** associado ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}$. Definindo-se $d\mathbf{m} = \omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3$, vemos que $d\mathbf{m}: TM \rightarrow TM$ é a identidade da álgebra de Lie associado ao espaço tridimensional euclideo. De fato, basta calcularmos $d\mathbf{m}$ na direção $\{\mathbf{e}_i\}$ para verificar esta afirmação.

Agora, cada campo de vetores local \mathbf{e}_i , pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $\mathbf{e}_i: U \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Dessa forma, a diferencial $d\mathbf{e}_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ calculada no ponto \mathbf{m} é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$d\mathbf{e}_i \cdot (v) = \sum_{j=0}^3 \omega_i^j(v) \mathbf{e}_j$. Mais precisamente,

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_0 = \omega_0^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_0^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_1^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_2^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_3^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Como \mathbf{e}_i é um campo diferenciável (classe C^∞ em geral), então obtemos a matriz de 1-formas diferenciais $\omega = (\omega_j^i)$, i.e., ω_j^i representa a entrada na linha i e coluna j de ω , chamada de **matriz de conexão** que vive na álgebra de Lie associada ao grupo de Lie induzido pelo referencial $\{\mathbf{e}_i\}$. Mais precisamente, se $\{\mathbf{e}_i\}$ for um referencial qualquer, então a matriz que tem como colunas as entradas \mathbf{e}_j vai habitar o grupo $\text{GL}(\mathbb{R}^4)$ em geral, dessa forma, a matriz de conexão (ω_j^i) irá habitar na álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$. Ao considerarmos a métrica euclideana \mathbb{R}^4 podemos requerer, através do método de ortonormalização de Gram-Schmidt, que estes referenciais sejam ortonormais, o que nos levaria a matriz de conexão (ω_j^i) a habitar a álgebra associada ao grupo ortogonal, i.e., $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^n)$. Raciocínio análogo pode ser realizado no caso da relatividade especial com a métrica de Lorentz.

Dessa forma, levando-se em consideração o caso particular do referencial fixo estudado até aqui, as observações de Einstein sobre a queda livre em um campo gravitacional e tendo como motivação a dinâmica do meios contínuos dos irmãos Cosserat, Cartan define como uma **conexão afim** um sistema de referenciais locais (móvel) interligados pelo sistema diferencial

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_0 = \omega_0^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_0^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_1^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_2^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega_3^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

que mensura tanto o deslocamento infinitesimal de um elemento de matéria no espaço, assim como sua rotação infinitesimal com respeito a referenciais próximos. Note que $d\mathbf{m}$ define um $(1, 1)$ -tensor sobre TM , enquanto que a matriz $(\omega_j^i) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ define uma conexão linear sobre TM . Em linguagem contemporânea, uma conexão afim é essencialmente a introdução de um $(1, 1)$ -tensor $d\mathbf{m}$ sobre o espaço-tempo afim M que, a princípio, faculta uma nova forma de medir distâncias infinitesimais em M . Em tese, tal tensor poderia refletir, por exemplo, uma ausência de homogeneidade no meio. Além disso, uma conexão afim introduz também um operador diferencial $d: \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; TM)$ do espaço das seções do espaço tangente a M no espaço das 1-formas sobre M assumindo valores em TM .

Vejam agora como se comportam as equações da dinâmica dos meios contínuos com respeito a um sistema de referenciais móveis dotados de uma conexão afim. Começemos observando as consequências da invariância das leis da mecânica sobre sistemas de referenciais dotados de uma conexão afim. Como observamos, na mecânica clássica o tempo é absoluto e independente do espaço; logo, a componente temporal de \mathbf{e}_0 será sempre igual a 1, enquanto que a componente temporal de \mathbf{e}_i se anula para todo $i = 1, 2, 3$. Portanto, a conexão afim assume necessariamente a forma:

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \omega^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_0 = \omega_0^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \otimes \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Note ainda que ω^0 pode ser interpretado como o intervalo de tempo infinitesimal entre dois eventos \mathbf{m} e \mathbf{m}' numa mesma vizinhança. Assim temos

$$\omega^0 = dx^0, \quad \omega_j^0 = 0.$$

Uma conexão satisfazendo tais condições será chamada de **conexão galileana**.

Vejam agora como se escreve a equação fundamental da dinâmica neste cenário. Nesse referencial temos $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$, onde

$$P^i = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^i v^j \widehat{\omega^j} + \sum_{j=1}^3 (-1)^j p_{ij} \widehat{\omega^j},$$

com $(-1)^i \omega^i \wedge \widehat{\omega^i} = \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$, $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^3 v^i \mathbf{e}_i$, $v^0 = 1$. Além disso, o tensor de força assume a forma $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \widehat{\omega^i} \otimes \mathbf{e}_i$. Analogamente, o tensor momento-massa generalizado se escreve na forma $\mathbf{P} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P}$, enquanto que o tensor de força assume a forma $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F^i \widehat{\omega^i} \otimes \mathbf{e}_i$. Assim, a força generalizada assume a forma $\mathbf{F} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{F} + \mathbf{G}$.

Definição 3.5. Diremos que $\{(U_\alpha, \mathbf{e}_{\alpha,i})\}_{\alpha \in A}$ é um **sistema de referenciais móveis** para uma variedade M , se esta admitir uma atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tal que $\mathbf{e}_{\alpha,i} = \varphi_\alpha^* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$. Por abuso de linguagem, um ponto $\mathbf{m} \in M$ será denotado por

$$\mathbf{m}_\alpha = \varphi_{\alpha*} \mathbf{m} = x_{\alpha,0} \mathbf{e}_{\alpha,0} + x_{\alpha,1} \mathbf{e}_{\alpha,1} + x_{\alpha,2} \mathbf{e}_{\alpha,2} + x_{\alpha,3} \mathbf{e}_{\alpha,3}.$$

Definição 3.6. Diremos que um sistema de referenciais móveis $\{(U_\alpha, \mathbf{e}_{\alpha,i})\}_{\alpha \in A}$ dotado de uma conexão afim obedece o **princípio da relatividade de Galileu** se satisfizer a equação

$$d\mathbf{P} = dt \wedge \mathbf{F}.$$

Uma vez que o referencial $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ não é mais constante, então temos:

Teorema 3.7. *Um sistema de referenciais móveis $\{\mathbf{e}_i\}$ é dotado de uma conexão afim que obedece o princípio da relatividade de Galileu se, e somente,*

$$\sum_{j=1}^3 P^j \wedge \omega_j^i = 0$$

para todo $j = 0, \dots, 3$.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= \sum_{i=0}^3 \left(dP^i \otimes \mathbf{e}_i + P^i \wedge d\mathbf{e}_i \right) \\ &= \sum_{j=0}^3 dP^j \otimes \mathbf{e}_j + \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 P^i \wedge \omega_i^j \otimes \mathbf{e}_j \\ &= dP^0 \otimes \mathbf{e}_0 + \sum_{j=1}^3 \left(dP^j + \sum_{i=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=0}^3 \left(dP^j + \sum_{i=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

uma vez que $\omega_i^0 = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, 3$. Segue que

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= d\mathbf{m} \wedge \mathbf{P} + (\mathbf{m}, 1) \wedge d\mathbf{P} \\ &= \left(\sum_{i=0}^3 \omega^i \otimes \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^3 P^j \otimes \mathbf{e}_j \right) + (\mathbf{m}, 1) \wedge \sum_{j=0}^3 \left(dP^j + \sum_{i=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i < j} (\omega^i \wedge P^j - \omega^j \wedge P^i) \otimes \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j + (\mathbf{m}, 1) \wedge \sum_{j=0}^3 \left(dP^j + \sum_{i=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} \omega^i \wedge P^j &= \omega^i \wedge \left(\sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^j v^\ell \widehat{\omega}^\ell + \sum_{\ell=1}^3 (-1)^\ell p_{j\ell} \widehat{\omega}^\ell \right) \\ &= \omega^i \wedge \left((-1)^i \rho v^j v^i \widehat{\omega}^i + (-1)^i p_{ji} \widehat{\omega}^i \right) \\ &= (\rho v^j v^i + p_{ji}) \omega^{0,1,2,3}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\omega^i \wedge P^j - \omega^j \wedge P^i = (\rho v^j v^i - \rho v^i v^j + p_{ji} - p_{ij}) \omega^{0,1,2,3} = G^{ij} \omega^{0,1,2,3}. \quad (3.3)$$

Logo, segue do Teorema 3.2 que

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= \sum_{i < j} G^{ij} \omega^{0,1,2,3} \otimes (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) + (\mathbf{m}, 1) \wedge \sum_{j=0}^3 \left(dP^j + \sum_{i=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \omega^0 \wedge \mathbf{G} + (\mathbf{m}, 1) \wedge dt \wedge \mathbf{F} + (\mathbf{m}, 1) \wedge \left(\sum_{i,j=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j. \\ &= dt \wedge \mathbf{F} + (\mathbf{m}, 1) \wedge \left(\sum_{i,j=0}^3 P^i \wedge \omega_i^j \right) \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Segue o resultado desejado. \square

3.2 Geometrizando a dinâmica newtoniana

Nosso objetivo agora é determinar o formato dos sistemas de referenciais móveis em cujo ambiente não há dinâmica. Em outras palavras, vamos buscar um modelo geométrico no qual as órbitas da dinâmica newtoniana sejam dadas pelo deslocamento de Cartan de uma certa conexão afim.

3.2.1 Geometria versus dinâmica

Iniciemos pelos conceitos mais elementares.

Definição 3.8. *Diremos que um sistema de referenciais móveis $\{e_j\}$ dotado de uma conexão afim d **geometriza um sistema mecânico** dado pelo tensor momento-massa generalizado \mathbf{P} se*

$$d\mathbf{P} = 0.$$

Como consequência da demonstração do Teorema 3.7, sabemos que $d\mathbf{P} = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \omega^i \wedge P^j - \omega^j \wedge P^i = 0 \\ dP^i + \sum_{j=0}^3 P^j \wedge \omega_j^i = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Dessa forma, na presença de pressão, segue de (3.3) que

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Por outro lado, na ausência de pressão, como é o caso da mecânica Newtoniana, a última dessas duas equações equivale ao anulamento da força. Vejamos um exemplo onde isso acontece.

Exemplo 3.9. *Considere um sistema de referenciais $\{e_i\}$ dado por um referencial ortogonal fixo em \mathbb{R}^4 (base canônica) e nele tome a conexão afim galileana $d = (\omega^i, \omega_j^i)$ dada por*

$$\begin{cases} \omega^i = dx^i, \\ \omega_0^i = -A^i dx^0, \\ \omega_j^i = 0 \end{cases}$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$, onde $\mathbf{F} = \sum_i \rho A^i \widehat{dx}_0 \otimes \mathbf{e}_i$ é o campo de forças que determina o movimento de uma partícula (i.e., $F^i = \rho A^i$). Segue da equação (3.4) que $dP^0 = 0$ e

$$\begin{aligned} dP^i &= -P^0 \wedge \omega_0^i = A^i dx^0 \wedge P^0 \\ &= A^i dx^0 \wedge \left(\sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^\ell \widehat{\omega}^\ell \right) \\ &= \rho A^i dx^{0,1,2,3} \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Note que essas são as equações da dinâmica clássica de um meio contínuo que está sujeito à força por unidade de volume proporcional à massa. Em resumo, esta conexão afim geometriza o sistema físico newtoniano.

Proposição 3.10. *Seja $\{\mathbf{e}_i\}$ um sistema de referenciais móveis para \mathbb{R}^4 dotado de uma conexão $d = (\omega^i, \omega_j^i)$ que geometriza o sistema mecânico $\mathbf{P} = (\mathbf{m}, 1) \wedge \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes \mathbf{e}_i$, então as conexões afins que geometrizam este sistema mecânico são da forma*

$$d' = (\omega^i + \eta^i, \omega_j^i + \eta_j^i), \quad \eta^i \wedge P^j - \eta^j \wedge P^i = 0, \quad \sum_{j=0}^3 P^j \wedge \eta_j^i = 0.$$

Demonstração. Se d e d' geometrizam o sistema mecânico, então segue de (3.4) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^i \wedge P^j - \omega^j \wedge P^i = 0, \\ (\omega^i + \eta^i) \wedge P^j - (\omega^j + \eta^j) \wedge P^i = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} dP^i + \sum_{j=0}^3 P^j \wedge \omega_j^i = 0, \\ dP^i + \sum_{j=0}^3 P^j \wedge (\omega_j^i + \eta_j^i) = 0. \end{array} \right.$$

Em ambos os casos, subtraindo-se a segunda equação da primeira, obtemos o resultado desejado. \square

Em termos da conexão dada no exemplo acima, podemos caracterizar as conexões que geometrizam a mecânica newtoniana da seguinte forma:

Proposição 3.11. *Seja $\{\mathbf{e}_i\}$ o sistema de referenciais galileano com conexão afim dada pelo Exemplo 3.9, então $d' = (dx^i + \vartheta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ é uma conexão afim que geometriza o sistema mecânico newtoniano se, e somente se,*

$$\sum_{j,\ell=0}^3 v^j v^\ell \varphi_{j,\ell}^i = 0, \tag{3.5}$$

onde

$$\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad P^0 = \sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^\ell \widehat{dx}^\ell, \quad P^i = v^i P^0 + \sum_{\ell=1}^3 (-1)^\ell p_{i\ell} \widehat{dx}^\ell,$$

Demonstração. De fato, segue da Proposição 3.10 que a conexão d' geometriza o sistema mecânico se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^3 P^j \wedge \eta_j^i \\ &= \sum_{j=0}^3 v^j P^0 \wedge \eta_j^i \\ &= \sum_{j,\ell,k=0}^3 (-1)^\ell v^j \rho v^\ell \widehat{dx}^\ell \wedge \varphi_{j,k}^i dx^k \\ &= - \left(\rho \sum_{j,\ell=0}^3 v^j v^\ell \varphi_{j,\ell}^i \right) dx^{0,1,2,3}. \end{aligned}$$

Mas isso equivale a dizer que $\sum_{j,\ell=0}^3 v^j v^\ell \varphi_{j,\ell}^i = 0$. \square

Note que uma família de exemplos é aquela que satisfaz as relações

$$\varphi_{0,0}^i = 0, \quad \varphi_{j,0}^i + \varphi_{0,j}^i = 0, \quad \varphi_{j,\ell}^i + \varphi_{\ell,j}^i = 0, \quad i, j, \ell = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

não possuindo esta nenhuma relação mais estreita com as velocidades. A observação acima nos permite a seguinte reformulação: Sendo E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , então diremos que $q: E^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma quadrática** sobre E^4 se existir um 2-tensor $\tau: E^4 \times E^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $q(v) = \tau(v, v)$. Em outros termos, sendo $\text{diag}(E^4 \times E^4) = \{(u, v) \in E^4 \times E^4 : u = v\}$, então a restrição de $\tau \in \Gamma^2(E^4)$ a $\text{diag}(E^4 \times E^4)$ é uma forma quadrática.

Proposição 3.12. *Seja $\{e_i\}$ o sistema de referenciais galileano com conexão afim $d = (dx^i, \omega_j^i)$ dada pelo Exemplo 3.9, e $d' = (dx^i + \vartheta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ uma conexão galileana tal que as formas quadráticas $q_\eta^i(v) = \sum_{j=0}^3 \eta_j^i \otimes dx^j(v, v)$ se anulam identicamente para todo $j = 1, 2, 3$. Então d' é uma conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano.*

Demonstração. Começemos observando que se $\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k$, então

$$\begin{aligned} q^i(v) &= \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k \otimes dx^j(v, v) \\ &= \sum_{k \geq j=0}^3 (\varphi_{j,k}^i + \varphi_{k,j}^i) dx^k \otimes dx^j(v, v) \end{aligned}$$

Logo, q^j se anula identicamente se, e somente se, as equações (3.6) são satisfeitas. \square

No entanto, no caso geral, para cada ponto $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ a expressão em (3.5) define uma equação linear cujo espaço de soluções é um espaço vetorial de dimensão

maior ou igual a 15. Assim, temos uma infinidade de possíveis conexões geometrizando tal sistema mecânico.

Em [9, pp. 349–350] (cf. e.g. [12, §§16–17]), Cartan afirma que a recíproca da Proposição acima se verifica em geral. Na verdade há uma imprecisão na prova que ele apresenta, que se deve a uma interpretação equivocada do papel do tensor momento-massa na formulação geométrica. *In verbis*:

«*Plaçons-nous d’abord au point de vue le plus général possible, la connexion affine permettant l’équipollence de deux systèmes de référence de Galilée dont l’un aurait un trièdre (T) trirectangle, l’autre un trièdre (T’) non trirectangle. Supposons encore, ce qui est permis, que les vecteurs e_0, e_1, e_2, e_3 utilisés dans les formules (7) soient toujours équipollents entre eux au sens habituel, c’est-à-dire que tout soit rapporté à un système de Galilée fixe. Posons*

$$\begin{aligned}\varpi_0^i &= \gamma_{00}^i dt + \gamma_{01}^i dx + \gamma_{02}^i dy + \gamma_{03}^i dz, \\ \varpi_i^j &= \gamma_{i0}^j dt + \gamma_{i1}^j dx + \gamma_{i2}^j dy + \gamma_{i3}^j dz.\end{aligned}$$

Les coefficients des formes Π, Π_x, Π_y, Π_z sont

$$\begin{aligned}\rho, \quad \rho u, \quad \rho v, \quad \rho w, \\ \rho u^2 + p_{xx}, \quad \rho uv + p_{xy}, \quad \rho vw + p_{xz}, \quad \dots, \quad \rho w^2 + p_{zz},\end{aligned}$$

on peut, pour annuler les trois expressions entre crochets des formules (7), les regarder comme indépendants. En portant successivement son attention sur chacun d’entre eux, les autres étant regardés comme nuls, on arrive aux formules

$$\gamma_{00}^i = 0, \quad \gamma_{0j}^i = \gamma_{02}^i, \quad \gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k; \quad (10)$$

elles expriment tout simplement que les trois formes différentielles quadratiques

$$\varpi_0^i dt + \varpi_1^i dx + \varpi_2^i dy + \varpi_3^i dz \quad (i = 1, 2, 3)$$

sont identiquement nulles.»

De fato, como vimos em (3.6), temos a relação antissimétrica $\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ji}^k$ em vez da relação simétrica em (10). Devido ao equívoco na abordagem de É. Cartan, torna-se natural o seguinte:

Problema 3.13. *Sendo $d = (dx^i, \omega_j^i)$ a conexão afim dada pelo Exemplo 3.9, existe uma conexão galileana $d' = (dx^i + \theta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ que geometrize o sistema mecânico newtoniano tal que a forma quadrática $q_\eta^i(v) = \sum_{j=0}^3 \eta_j^i \otimes dx^j(v, v)$ não se anule identicamente? Em caso afirmativo, que relação guardam os espaço de moduli de tais conexões com as formas quadráticas $q_\eta^i(v)$?*

Recordemos, por outro lado, que fatos empíricos levaram Galileu a postular o princípio da relatividade que carrega seu nome; portanto, as leis físicas não dependem das velocidades de descolamento das densidade de matéria do meio. Sendo assim, do ponto de vista físico, arguir uma conexão a satisfazer as equações (3.6) é algo natural. Dessa forma, iremos chamar as conexões afins que anulam identicamente as formas quadráticas $q_\eta^i(v)$ de **conexões estáveis** que geometrizam o sistema mecânico newtoniano, ou somente de **conexões de Galileu-Cartan** para o sistema mecânico newtoniano.

3.2.2 Conexões newtonianas

Iremos agora caracterizar as matrizes de conexões galileanas em referenciais ortonormais.

Definição 3.14. *Diremos que um sistema de referenciais móveis $\{\mathbf{e}_i\}$ dotado de uma conexão afim é **newtoniano** se satisfizer as seguintes condições:*

1. $\{\mathbf{e}_i\}$ é um referencial galileano;
2. $\{\mathbf{e}_0(\mathbf{m}), \mathbf{e}_1(\mathbf{m}), \mathbf{e}_2(\mathbf{m}), \mathbf{e}_3(\mathbf{m})\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^4 para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^4$;
3. a conexão afim é galileana e preserva os produtos internos de \mathbb{R}^4 , i.e.,

$$d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = d\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{v}.$$

Neste caso diremos que a conexão d é **newtoniana**.

Em outras palavras, uma conexão newtoniana é uma **conexão métrica** (i.e., satisfaz (3)) e galileana.

Proposição 3.15. *Seja $\{\mathbf{e}_i\}$ um sistema de referenciais móveis dotado de uma conexão afim newtoniana $d = (\omega^i, \omega_j^i)$, então a matriz de conexão $(\omega_j^i) \in \mathfrak{so}(n)$, i.e.,*

$$\omega_j^i + \omega_i^j = 0$$

para todo $i, j = 0, \dots, 3$.

Demonstração. Começemos observando que $(\mathbf{e}_i)^2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ e que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ para todo $i, j = 1, 2, 3$ tal que $i \neq j$. Desta forma, segue da definição de conexão que

$$0 = d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j = \omega_j^i + \omega_i^j.$$

Segue o resultado desejado. □

3.2.3 Conexão afim e mudança de coordenadas

Antes de continuarmos o estudo de conexões que geometrizam o sistema mecânico newtoniano, é preciso introduzir alguns conceitos. Iremos agora considerar o comportamento da conexão afim por mudança de coordenadas. Seja $d = (\theta^i, \omega_j^i)$ uma conexão afim e $\{e_{\alpha,i}\}, \{e_{\beta,i}\}$ dois sistemas distintos de referenciais galileanos. Sendo $\theta_\alpha = d\mathbf{m}_\alpha = \sum_{i=1}^n \theta_\alpha^i \otimes e_{\alpha,i}$ a forma que mensura a translação de um conexão afim, recorde da álgebra linear que os referenciais no espaço tangente se relacionam na forma

$$e_{\beta,j} = \sum_{i=1}^n (g_{\alpha\beta})_{ij} e_{\alpha,i},$$

assim podemos relacionar as componentes dos vetores θ_α e θ_β através da relação

$$\theta_\beta^i = \sum_{j=1}^n (g_{\beta\alpha})_{ij} \theta_\alpha^j,$$

onde $g_{\beta\alpha}$ são os isomorfismos lineares nas fibras induzidos pelas aplicações de transição $\phi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, g_{\beta\alpha}(x) \cdot y)$.

Proposição 3.16. *O $(1, 1)$ -tensor local θ_α representando $d\mathbf{m}$ no referencial $e_{\alpha,i}$ define um tensor global.*

Demonstração. Basta notarmos que

$$\begin{aligned} \theta_\beta &= \sum_{j=1}^n \theta_\beta^j \otimes e_{\beta,j} \\ &= \sum_{j=1}^n \theta_\beta^j \otimes \sum_{i=1}^n (g_{\alpha\beta})_{ij} e_{\alpha,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (g_{\alpha\beta})_{ij} \theta_\beta^j \otimes e_{\alpha,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_\alpha^i \otimes e_{\alpha,i} \\ &= \theta_\alpha. \end{aligned}$$

□

Passemos agora à parte linear da conexão.

Proposição 3.17. *Se ω_α a matriz de formas que representa a parte linear de uma conexão afim com relação ao referencial $\{e_{\alpha,i}\}$, então*

$$\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta},$$

onde ω_β é a matriz de conexão associada ao referencial $\{e_{\beta,i}\}$.

Demonstração. Basta notarmos que

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{e}_{\beta,j} &= d \sum_{k=1}^n (g_{\alpha\beta})_{kj} \mathbf{e}_{\alpha,k} \\
 &= \sum_{k=1}^n (d(g_{\alpha\beta})_{kj} \otimes \mathbf{e}_{\alpha,k} + (g_{\alpha\beta})_{kj} d\mathbf{e}_{\alpha,k}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (d(g_{\alpha\beta})_{kj} \otimes \mathbf{e}_{\alpha,k} + \sum_{\ell,k=1}^n (g_{\alpha\beta})_{kj} (\omega_{\alpha})_{\ell}^k \otimes \mathbf{e}_{\alpha,\ell}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (d(g_{\alpha\beta})_{kj} \otimes \mathbf{e}_{\alpha,k} + \sum_{\ell,k=1}^n (g_{\alpha\beta})_{\ell j} (\omega_{\alpha})_{\ell}^k \otimes \mathbf{e}_{\alpha,k}) \\
 &= \sum_{\ell,k=1}^n (d(g_{\alpha\beta})_{kj} + (g_{\alpha\beta})_{\ell j} (\omega_{\alpha})_{\ell}^k) \otimes \mathbf{e}_{\alpha,k} \\
 &= \sum_{k,\ell,i=1}^n (d(g_{\alpha\beta})_{kj} + (g_{\alpha\beta})_{\ell j} (\omega_{\alpha})_{\ell}^k) (g_{\beta\alpha})_{ik} \otimes \mathbf{e}_{\beta,i} \\
 &= \sum_{k,\ell,i=1}^n ((g_{\beta\alpha})_{ik} (dg_{\alpha\beta})_{kj} + (g_{\beta\alpha})_{ik} (\omega_{\alpha})_{\ell}^k (g_{\alpha\beta})_{\ell j}) \otimes \mathbf{e}_{\beta,i}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como $d\mathbf{e}_{\beta,j} = \sum_{i=1}^n (\omega_{\beta})_j^i \mathbf{e}_{\beta,i}$, segue que $\omega_{\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_{\alpha} g_{\alpha\beta}$. \square

3.2.4 Derivadas de ordem maior e a curvatura de uma conexão afim

Passemos agora a tratar o conceito de curvatura. Começemos observando que o operador diferencial $d: \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; TM)$ nos permite definir, por recorrência, um operador diferencial do espaço das k -formas sobre M assumindo valores em TM no espaço das $(k+1)$ -formas sobre M assumindo valores em TM . De fato, basta-nos tomar $d = d_k: \mathcal{A}^k(TM^*; TM) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M; TM)$ dado por

$$d(\omega \otimes \mathbf{e}) = d\omega \otimes \mathbf{e} + (-1)^k \omega \wedge d\mathbf{e},$$

onde $\omega \in \mathcal{A}^k(TM^*; \mathbb{R})$ e $\mathbf{e} \in \Gamma(TM)$. Sendo assim, é natural que a segunda derivada das seções de um referencial dêem testemunho de como a variedade se curva em função da presença da conexão. Sendo $d^2 = d_1 \circ d_0: \mathcal{A}^0(TM^*; TM) \rightarrow \mathcal{A}^2(M; TM)$, então a matriz $\Omega = (\Omega_j^i)$ dada por

$$d^2 \mathbf{e}_j = \sum_{i=0}^3 \Omega_j^i \otimes \mathbf{e}_i, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

será chamada de **matriz de curvatura** da conexão afim $d = (\omega^i, \omega_j^i)$ com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}$.

Proposição 3.18. *Seja ω a parte linear da matriz de conexão de uma conexão afim $d: \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; TM)$ e Ω a sua matriz de curvatura com respeito a um referencial $\{\mathbf{e}_i\}$, então*

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (3.8)$$

Demonstração. Segue da definição de conexão que

$$\begin{aligned}
d^2 e_j &= d \left(\sum_{i=0}^3 \omega_j^i \otimes e_i \right) \\
&= \sum_{i=0}^3 d \left(\omega_j^i \otimes e_i \right) \\
&= \sum_{i=0}^3 d\omega_j^i \otimes e_i - \omega_j^i \wedge de_i \\
&= \sum_{i=0}^3 d\omega_j^i \otimes e_i - \sum_{i,k=0}^3 \left(\omega_j^i \wedge \omega_i^k \right) \otimes e_k \\
&= \sum_{i=0}^3 d\omega_j^i \otimes e_i - \sum_{i,k=0}^3 \left(\omega_j^k \wedge \omega_k^i \right) \otimes e_i \\
&= \sum_{i=0}^3 \left(d\omega_j^i + \sum_{k=0}^3 \left(\omega_k^i \wedge \omega_j^k \right) \right) \otimes e_i.
\end{aligned}$$

De onde se conclui o resultado desejado. \square

A equação do enunciado anterior é conhecida como segunda **equação estrutural**.

Corolário 3.19. *Se $d = (\theta^i, \omega_j^i)$ é uma conexão métrica com respeito ao referencial ortonormal $\{e_i\}$, então*

$$\Omega_j^i + \Omega_i^j = 0.$$

Demonstração. Uma vez que $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$, então temos

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j &= d\omega_j^i + \sum_{k=0}^3 \omega_k^j \wedge \omega_i^k \\
&= -d\omega_j^i + \sum_{k=0}^3 \omega_j^k \wedge \omega_k^i \\
&= -d\omega_j^i - \sum_{k=0}^3 \omega_k^i \wedge \omega_j^k \\
&= -\Omega_j^i.
\end{aligned}$$

\square

Vejamos como se comporta a matriz de curvatura em termos de mudança de sistemas de referenciais.

Teorema 3.20. *Se Ω_α é a matriz de formas de curvatura associada à conexão afim d com respeito ao referencial $\{e_{\alpha,i}\}$, então*

$$\Omega_\beta = g_{\beta\alpha} \Omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1},$$

onde Ω_β é a matriz de curvatura associada à conexão afim d com relação ao referencial $\{e_{\beta,i}\}$.

Demonstração. Por definição, temos $\Omega_\beta = d\omega_\beta - \omega_\beta \wedge \omega_\beta$, mas recorde que $\omega_\beta g_{\beta\alpha} = dg_{\beta\alpha} + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha$ (Proposição 3.17). Tomando-se a derivada exterior em ambos os lados desta última equação, obtemos $d\omega_\beta g_{\beta\alpha} - \omega_\beta \wedge dg_{\beta\alpha} = dg_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + g_{\beta\alpha}d\omega_\alpha$. Concluimos então que

$$\begin{aligned} d\omega_\beta g_{\beta\alpha} &= \omega_\beta \wedge dg_{\beta\alpha} + dg_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + g_{\beta\alpha}d\omega_\alpha \\ &= (dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1} + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge dg_{\beta\alpha} + dg_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + g_{\beta\alpha}d\omega_\alpha, \end{aligned}$$

uma vez que $\omega_\beta = dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1} + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}$. Logo,

$$d\omega_\beta = \underbrace{dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1} \wedge dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1}}_1 + \underbrace{g_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1}}_2 + \underbrace{dg_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}}_3 + g_{\beta\alpha}d\omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega_\beta \wedge \omega_\beta &= (dg_{\beta\alpha} + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha)g_{\beta\alpha}^{-1} \wedge (dg_{\beta\alpha} + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha)g_{\beta\alpha}^{-1} \\ &= \underbrace{dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1} \wedge dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1}}_1 + \underbrace{dg_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}}_3 + \underbrace{g_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1}}_2 + g_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} \end{aligned}$$

Segue da definição de Ω_β que

$$\Omega_\beta = g_{\beta\alpha}d\omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} - g_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} = g_{\beta\alpha}(d\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)g_{\beta\alpha}^{-1} = g_{\beta\alpha}\Omega_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1}$$

□

A partir das entradas da matriz de curvatura de uma conexão newtoniana, podemos definir um $(2, 2)$ -tensor global como segue:

Proposição 3.21. *Sendo $\{e_{\beta,i}\}$ um referencial móvel ortonormal, então*

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^n (\Omega_\beta)_j^i \otimes (e_{\beta,i} \wedge e_{\beta,j})$$

é um $(2, 2)$ -tensor global.

Demonstração. Sejam $\{e_{\alpha,i}\}$ e $\{e_{\beta,i}\}$ dois referenciais ortonormais, então temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (\Omega_\beta)_j^i (e_{\beta,i} \wedge e_{\beta,j}) &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n (\Omega_\beta)_j^i (g_{\alpha\beta})_{ki} e_{\alpha,k} \wedge (g_{\alpha\beta})_{\ell j} e_{\alpha,\ell} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n (g_{\alpha\beta})_{ki} (\Omega_\beta)_j^i (g_{\alpha\beta})_{\ell j} e_{\alpha,k} \wedge e_{\alpha,\ell} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n (g_{\alpha\beta})_{ki} (\Omega_\beta)_j^i (g_{\beta\alpha})_{j\ell} e_{\alpha,k} \wedge e_{\alpha,\ell} \\ &= \sum_{k,\ell=1}^n (\Omega_\alpha)_\ell^k e_{\alpha,k} \wedge e_{\alpha,\ell}, \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue do fato de $g_{\alpha\beta} \in \text{SO}(n)$, uma vez que $g_{\alpha\beta}^T = g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$. □

O tensor Ω definido pelo teorema anterior será chamado de **tensor de curvatura** de um referencial ortonormal.

3.2.5 Torção de uma conexão afim

Ja vimos que $\theta = d\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n \theta^i \otimes \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}^1(TM^*, TM)$ define um $(1, 1)$ -tensor global oriundo da derivação do $(0, 1)$ -tensor de posição \mathbf{m} . Vamos agora verificar o que acontece ao derivarmos uma segunda vez o tensor de posição.

Proposição 3.22. *Sejam $\theta = [\theta]_{\{\mathbf{e}_i\}}$ e $\Theta = [\Theta]_{\{\mathbf{e}_i\}}$ as matrizes-coluna que representam os tensores $\theta \in \mathcal{A}^1(TM^*; TM)$ e $\Theta = d\theta \in \mathcal{A}^2(TM^*; TM)$ no referencial $\{\mathbf{e}_i\}$, respectivamente. Então*

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta. \quad (3.9)$$

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned} d\theta &= \sum_{j=1}^n d(\theta^j \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n d\theta^j \otimes \mathbf{e}_j - \theta^j \wedge d\mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^n d\theta^i \otimes \mathbf{e}_i - \sum_{i,j=1}^n (\theta^j \wedge \omega_j^i) \otimes \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n d\theta^i \otimes \mathbf{e}_i + \sum_{i,j=1}^n (\omega_j^i \wedge \theta^j) \otimes \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[d\theta^i + \sum_{j=1}^n (\omega_j^i \wedge \theta^j) \right] \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

□

A matriz $\Theta = (\Theta^i)$ do enunciado anterior será chamada de **matriz de torção** da conexão com respeito ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}$. Além disso, a expressão (3.9) será chamada de primeira **equação estrutural**.

Proposição 3.23. *Se Θ_α a matriz de torção com relação ao referencial $\{\mathbf{e}_{\alpha,i}\}$, então temos*

$$\Theta_\beta = g_{\beta\alpha} \Theta_\alpha.$$

Demonstração. Segue das Proposições (3.17) e de (3.18) que

$$\begin{aligned} \Theta_\beta &= d\theta_\beta + \omega_\beta \wedge \theta_\beta \\ &= d(g_{\beta\alpha} \theta_\alpha) + (g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}) \wedge g_{\beta\alpha} \theta_\alpha \\ &= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha} d\theta_\alpha + (g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge g_{\beta\alpha} \theta_\alpha \\ &= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha} d\theta_\alpha + (g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^{-1} g_{\beta\alpha}^{-1} dg_{\beta\alpha} g_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge g_{\beta\alpha} \theta_\alpha \\ &= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha} d\theta_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha - dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha \\ &= g_{\beta\alpha} (d\theta_\alpha + \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha) \\ &= g_{\beta\alpha} \Theta_\alpha. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.24. $\Theta = \sum_{i=1}^n \Theta_\alpha^i \otimes \mathbf{e}_{\alpha,i}$ é um $(1,1)$ -tensor global.

Demonstração. De fato temos,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Theta_\beta^j \otimes \mathbf{e}_{\beta,j} &= \sum_{i,j=1}^n \Theta_\beta^j \otimes [g_{\alpha\beta}]_{ij} \mathbf{e}_{\alpha,i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n [g_{\alpha\beta}]_{ij} \Theta_\beta^j \otimes \mathbf{e}_{\alpha,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \Theta_\alpha^i \otimes \mathbf{e}_{\alpha,i}. \end{aligned}$$

□

O tensor Θ definido pelo teorema anterior será chamado de **tensor de torção**.

Exemplo 3.25. Considere um sistema de referenciais $\{\mathbf{e}_i\}$ dado por um referencial ortonormal fixo em \mathbb{R}^4 (base canônica) e nele tome a conexão afim galileana dada por

$$\begin{cases} \theta^i = dx^i, \\ \omega_0^i = -A^i dx^0, \\ \omega_j^i = 0. \end{cases}$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$, onde $\mathbf{A} = \sum_i A^i \widehat{dx}_0 \otimes \mathbf{e}_i$ é o campo de aceleração que determina o movimento de uma partícula. Vimos no Exemplo (3.9) que esta conexão afim geometriza o sistema mecânico newtoniano. Vamos agora calcular a torção dessa conexão. De fato, temos

$$\begin{aligned} \Theta^i &= d\theta^i + \sum_{j=0}^3 (\omega_j^i \wedge \theta^j) \\ &= 0 + \omega_0^i \wedge \theta^0 \\ &= -A^i dx^0 \wedge dx^0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Problema 3.26. Existem conexões que geometrizam o sistema mecânico newtoniano com torção não nula?

3.2.6 Conexões galileanas com torção nula

Introduzidas as devidas formalidades, voltemos agora a questão das conexões que geometrizam um sistema mecânico newtoniano.

Proposição 3.27. *Seja $\{e_i\}$ o sistema de referenciais galileano com conexão afim $d' = (dx^i, \omega_j^i)$ dada pelo Exemplo 3.9, então $d' = (dx^i + \vartheta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ é uma conexão galileana livre de torção que geometriza o sistema mecânico newtoniano se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \vartheta^0 &= 0, \\ \sum_{i,\ell=0}^3 v^i v^\ell \varphi_{j,\ell}^i &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_0} - \frac{\partial \vartheta_0^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,0}^i - \varphi_{0,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,0}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_0^\ell) - A^i \vartheta_k^i &= 0, \quad i, k = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \vartheta_j^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,j}^i - \varphi_{j,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,j}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_j^\ell) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad 1 \leq j < k = 2, 3, \end{aligned}$$

onde

$$\vartheta^i = \sum_{k=0}^3 \vartheta_j^i dx^k, \quad \eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad P^0 = \sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^\ell \widehat{dx}^\ell, \quad P^i = v^i P^0.$$

Demonstração. Vimos no Exemplo 3.25 que existe uma conexão newtoniana satisfazendo as condições do teorema. Portanto, basta-nos verificar a unicidade. Consideremos o sistemas de referenciais e a conexão $d = (dx^i, \omega_j^i)$ do Exemplo 3.9. Seja $d' = (dx^i + \vartheta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ uma outra conexão que geometriza o mesmo sistema mecânico e também tenha torção nula. Iniciemos recordado que o tensor momento-massa generalizado da mecânica newtoniana é da forma $\mathbf{P} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{P}$, onde $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^3 P^i \otimes e_i$ é o $(3, 1)$ -tensor massa-momento cujas entradas são dadas por $P^i = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \rho v^i v^j \widehat{dx}^j$. Dessa forma, segue de (3.4) que a geometrização do sistema mecânico equivale ao anulamento da equações

$$\begin{aligned} dP^0 &= 0, \\ \sum_{j=0}^3 P^j \wedge \eta_j^i &= 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Em particular, ao escrevermos $\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k$, então esta última equação assume a forma (cf. Proposição 3.11)

$$\sum_{j,\ell=0}^3 v^i v^\ell \varphi_{j,\ell}^i = 0.$$

Por outro lado, ao tomarmos $\vartheta^i = \sum_{k=0}^3 \vartheta_k^i dx^k$, o anulamento da torção equivale a

$$\begin{aligned}
 0 &= d(dx^i + \vartheta^i) + \sum_{j=0}^3 (\omega_j^i + \eta_j^i) \wedge (dx^i + \vartheta^i) \\
 &= d\vartheta^i + \sum_{j=0}^3 \omega_j^i \wedge dx^j + \sum_{j=0}^3 \omega_j^i \wedge \vartheta^j + \sum_{j=0}^3 \eta_j^i \wedge (dx^j + \vartheta^j) \\
 &= d\vartheta^i - A^i dx^0 \wedge dx^0 - A^i dx^0 \wedge \vartheta^0 + \sum_{j=0}^3 \eta_j^i \wedge (dx^j + \vartheta^j) \\
 &= d\vartheta^i - A^i dx^0 \wedge \vartheta^0 + \sum_{j=0}^3 \eta_j^i \wedge (dx^j + \vartheta^j) \\
 &= \sum_{k,j=0}^3 \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^k - \sum_{k=0}^3 A^i \vartheta_k^i dx^0 \wedge dx^k + \sum_{k,j=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k \wedge (dx^j + \vartheta^j) \\
 &= \sum_{k,j=0}^3 \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^k - \sum_{k=0}^3 A^i \vartheta_k^i dx^0 \wedge dx^k + \sum_{k,j=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k \wedge dx^j \\
 &\quad + \sum_{k,\ell=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 \varphi_{j,k}^i \vartheta_\ell^j \right) dx^k \wedge dx^\ell
 \end{aligned}$$

para todo $i = 0, 1, \dots, 3$. Temos então a equação

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k,j=0}^3 \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^k - \sum_{k=0}^3 A^i \vartheta_k^i dx^0 \wedge dx^k + \sum_{k,j=0}^3 \varphi_{k,j}^i dx^j \wedge dx^k \\
 &\quad + \sum_{k,j=0}^3 \left(\sum_{\ell=0}^3 \varphi_{\ell,j}^i \vartheta_k^\ell \right) dx^j \wedge dx^k \\
 &= \sum_{j < k=1}^3 \left(\frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \vartheta_j^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,j}^i - \varphi_{j,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,j}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_j^\ell) \right) dx^j \wedge dx^k \\
 &\quad - \sum_{k=1}^3 A^i \vartheta_k^i dx^0 \wedge dx^k,
 \end{aligned}$$

onde $A^0 = 0$. Agora observe que que a conexão d' é galileana; logo, $\vartheta^0 = 0$, i.e., $\vartheta_k^0 = 0$ para todo $k = 0, 1, 2, 3$. Além disso, $0 = \eta_i^0 = \sum_{k=0}^3 \varphi_{i,k}^0 dx^k$, de onde concluímos que todas as equações acima se anulam para $i = 0$. Sendo assim, a equação anterior equivale ao sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_0} - \frac{\partial \vartheta_0^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,0}^i - \varphi_{0,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,0}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_0^\ell) - A^i \vartheta_k^i &= 0, \quad i, k = 1, 2, 3; \\
 \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \vartheta_j^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,j}^i - \varphi_{j,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,j}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_j^\ell) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad 1 \leq j < k = 2, 3.
 \end{aligned}$$

□

Observação 3.28. Em [12, §71] Cartan afirma que existe uma única conexão galileana com torção nula geometrizando um sistema mecânico newtoniano. Acreditamos que há uma imprecisão na prova que se deve a uma interpretação equivocada do papel do tensor momento-massa na formulação que se dá em §§16–17.

Devido à falha na abordagem de É. Cartan, tornam-se naturais as seguintes questões:

Problema 3.29. *Existem outras conexões galileanas com torção nula que geometrizam o sistema mecânico newtoniano? Em existindo, são todas equivalentes por calibre à nossa conexão original? Em caso contrário, como descrever tal espaço de moduli?*

Observação 3.30. *A ausência de unicidade na abordagem acima nos sugere procurar um princípio de menor ação como no caso do funcional de Yang-Mills para a teoria de calibre clássica, ou um invariante integral, como na visão de Cartan da Mecânica.*

Por outro lado, sob a ótica do princípio da relatividade de Galileu, o mais natural é seguirmos com o seguinte resultado.

Corolário 3.31. *Seja $\{e_i\}$ o sistema de referenciais galileano com conexão afim $d' = (dx^i, \omega_j^i)$ dada pelo Exemplo 3.9, então $d' = (dx^i + \vartheta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ é uma conexão de Cartan livre de torção para o sistema mecânico newtoniano com tensor momento-massa $\mathbf{P} = P^i \otimes e_i$, se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \vartheta^0 &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_0} - \frac{\partial \vartheta_0^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,0}^i - \varphi_{0,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,0}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_0^\ell) - A^i \vartheta_k^i &= 0, \quad i, k = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial \vartheta_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \vartheta_j^i}{\partial x_k} + \varphi_{k,j}^i - \varphi_{j,k}^i + \sum_{\ell=0}^3 (\varphi_{\ell,j}^i \vartheta_k^\ell - \varphi_{\ell,k}^i \vartheta_j^\ell) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad 1 \leq j < k = 2, 3, \end{aligned}$$

onde

$$\vartheta^i = \sum_{k=0}^3 \vartheta_j^i dx^k, \quad \eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad P^0 = \sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^\ell \widehat{dx}^\ell, \quad P^i = v^i P^0$$

e $\varphi_{j,\ell}^i$ satisfaz as equações (3.6)

4 Conexões lineares e a teoria de Yang-Mills

Faremos aqui uma breve sinopse de alguns elementos da teoria de Yang-Mills que nos serão de fundamental importância a fim de indentificarmos as conexões naturais que geometrizam um sistema mecânico. Nossas principais referências para este capítulo são [6], [18], [22] e [30].

4.1 Fibrados Vetoriais

Antes de discutir os assuntos desse capítulo é necessário apresentarmos a definição de fibrado vetorial. Sejam E e M variedades topológicas e $\pi: E \rightarrow M$ uma aplicação contínua sobrejetiva. Dizemos que E é um **fibrado vetorial** de posto m sobre M quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para cada $p \in M$,

$$E_p = \pi^{-1}(p)$$

é um espaço vetorial real de dimensão m , chamado de **fibra** sobre o ponto p de M .

(ii) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um homeomorfismo

$$\psi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m,$$

chamado uma **carta do fibrado**, tal que se $\pi_1: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada, então

$$\pi = \pi_1 \circ \psi.$$

(iii) Para cada $q \in U$,

$$\psi|_{E_q}: E_q \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais, onde $\mathbb{R}^m \simeq \{q\} \times \mathbb{R}^m$.

Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado, diremos que uma **seção** de E é uma aplicação $\mathbf{s}: M \rightarrow E$ tal que

$$\pi \circ \mathbf{s} = \text{id}_M.$$

Assim, uma **seção local** é uma aplicação $\mathbf{s}: U \rightarrow E$, na qual U é um aberto de M tal que $\pi \circ \mathbf{s} = \text{id}_U$. Sendo M uma variedade diferenciável e E um fibrado vetorial sobre M , então diremos que uma aplicação $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M^*; E)$ é uma **conexão linear** em E se satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad \nabla(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \nabla(\mathbf{s}_1) + \nabla(\mathbf{s}_2),$$

$$(ii) \quad \nabla(f \cdot \mathbf{s}) = df \otimes \mathbf{s} + f \cdot \nabla(\mathbf{s}),$$

quaisquer que sejam $\mathbf{s}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$.

4.2 Formas diferenciais e derivação exterior covariante

Um tensor alternado é um tensor multilinear cujo o valor muda de sinal quando se troca a ordem de qualquer par de vetores:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

Seja M uma variedade diferenciável. Uma **forma diferencial** é um campo tensorial alternado ω , no qual para cada $p \in M$, ω_p é um tensor alternado variando diferenciamen-
te com p . Uma **k -forma com valores em um fibrado vetorial E** (ou uma **E -forma de grau k**) é um elemento do espaço vetorial $\mathcal{A}^k(TM^*, E) := \mathcal{A}^k(TM^*, \mathbb{R}) \otimes \Gamma(E)$. Utilizando o operador diferencial operador diferencial $d: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; E)$ podemos definir, por recorrência, um operador diferencial do espaço das k -formas sobre M assumindo valores em E no espaço das $(k+1)$ -formas sobre M assumindo valores em E , o qual chamamos de **derivada exterior covariante**. De fato, basta-nos tomar $d = d_k: \mathcal{A}^k(TM^*; E) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(TM^*; E)$ dado por

$$d_\nabla(\omega \otimes \mathbf{s}) = d\omega \otimes \mathbf{s} + (-1)^k \omega \wedge \nabla(\mathbf{s}),$$

onde $\omega \in \mathcal{A}^k(TM^*; E)$ e $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$. Sendo assim, é natural que a segunda derivada das seções de um referencial dêem testemunho de como a variedade se curva em função da presença da conexão. Sendo $d_\nabla^2 = d_{\nabla,1} \circ d_{\nabla,0}: \mathcal{A}^0(TM^*; E) \rightarrow \mathcal{A}^2(TM^*; E)$, então a matriz $\Omega = (\Omega_j^i)$ dada por

$$d_\nabla^2 \mathbf{s}_j = \sum_{i=0}^3 \Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

será chamada de **matriz de curvatura** da conexão afim $d = (\omega^i, \omega_j^i)$ com respeito ao referencial $\{\mathbf{s}_i\}$.

Vejamos agora algumas das propriedades da derivação exterior covariante.

Proposição 4.1. *Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma conexão linear ∇ , então*

$$d_\nabla(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_\nabla \beta$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}^p(TM^*, \mathbb{R})$ e $\beta \in \mathcal{A}^q(TM^*, E)$.

Demonstração. Por uma questão de linearidade, basta verificar o enunciado para $\beta = \beta^i \otimes \mathbf{s}_i$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
d_{\nabla}(\alpha \wedge \beta) &= d_{\nabla}((\alpha \wedge \beta^i) \otimes \mathbf{s}_i) \\
&= d(\alpha \wedge \beta^i) \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^{p+q} (\alpha \wedge \beta_i) \wedge \nabla \mathbf{s}_i \\
&= (d\alpha \wedge \beta^i) \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^p (\alpha \wedge d\beta^i) \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^{p+q} (\alpha \wedge \beta^i) \wedge \nabla \mathbf{s}_i \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^q \beta^i \wedge \nabla \mathbf{s}_i) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_{\nabla}(\beta^i \otimes \mathbf{s}_i) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_{\nabla}\beta.
\end{aligned}$$

□

4.3 Curvatura

Veremos aqui a primeira e mais natural das versões do conceito de curvatura de uma conexão linear e estudaremos seu comportamento diante da derivação exterior covariante.

Sendo $E \rightarrow M$ um fibrado vetorial munido de uma conexão linear ∇ , então a **curvatura** de ∇ é definida como sendo o operador $R^{\nabla} = d_{\nabla}^2 \circ d_{\nabla}^1: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^2(TM^*, E)$.

Proposição 4.2. *O operador curvatura é $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ -linear, i.e.,*

$$R^{\nabla} \in \text{End}(\mathcal{A}^0(TM^*, E), \mathcal{A}^2(TM^*, E)).$$

Demonstração. Segue da definição de curvatura que

$$\begin{aligned}
R^{\nabla}(f\mathbf{s}) &= d_{\nabla}^2 \circ d_{\nabla}^1(f\mathbf{s}) \\
&= d_{\nabla}^2(d_{\nabla}^1(f\mathbf{s})) \\
&= d_{\nabla}^2(df \otimes \mathbf{s} + f \cdot \nabla \mathbf{s}) \\
&= d_{\nabla}^2(df \otimes \mathbf{s}) + d_{\nabla}^2(f \wedge \nabla \mathbf{s}) \\
&= d^2 f \wedge \mathbf{s} - df \wedge \nabla \mathbf{s} + df \wedge \nabla \mathbf{s} + f \cdot d_{\nabla}^2(\nabla \mathbf{s}) \\
&= f \cdot d_{\nabla}^2(\nabla \mathbf{s}) \\
&= f R^{\nabla}(\mathbf{s}).
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

Proposição 4.3 (2ª equação estrutural). *Seja E um fibrado com conexão. Se $\omega = (\omega_j^i)$ é a matriz da conexão de ∇ e $\Omega = (\Omega_j^i)$ é a matriz de curvatura associadas a uma carta do fibrado, i.e.,*

$$R^{\nabla}(\mathbf{s}_j) = \sum_{i=1}^m \Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i,$$

então

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Demonstração. Já fizemos acima, cf. [6, p. 356]. \square

Corolário 4.4. *Se Ω a forma de curvatura de uma conexão ∇ com forma de conexão ω , então temos*

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

Demonstração. Utilizando o resultado anterior

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d^2\omega + (d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega) \\ &= d^2\omega + (d\omega + \omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega) \\ &= (d\omega + \omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega) \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

\square

Proposição 4.5 (2ª identidade de Bianchi). *Seja ∇ uma conexão sobre o fibrado vetorial E com curvatura R^∇ e $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}$ um referencial local para E , então*

$$d_\nabla R^\nabla(\mathbf{s}_j) = \sum_{i,k=1}^m (\Omega_k^i \wedge \omega_j^k) \otimes \mathbf{s}_i.$$

Demonstração. Sendo $R^\nabla(\mathbf{s}_j) = \sum_{i=1}^m \Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i$, então segue do Corolário 4.4 que

$$\begin{aligned} d_\nabla R^\nabla(\mathbf{s}_j) &= d_\nabla (R^\nabla(\mathbf{s}_j)) \\ &= \sum_{i=1}^m d_\nabla (\Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m (d\Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i + \Omega_j^i \wedge \nabla(\mathbf{s}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m d\Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i + \sum_{i,k=1}^m (\Omega_j^i \wedge \omega_i^k) \otimes \mathbf{s}_k \\ &= \sum_{i,k=1}^m (\Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k) \otimes \mathbf{s}_i + \sum_{i,k=1}^m (\Omega_j^k \wedge \omega_k^i) \otimes \mathbf{s}_i \\ &= \sum_{i,k=1}^m (\Omega_k^i \wedge \omega_j^k) \otimes \mathbf{s}_i, \end{aligned}$$

uma vez que $\omega_k^i \wedge \Omega_j^k = \Omega_j^k \wedge \omega_k^i$. \square

4.4 O fibrado $\text{End}(E)$ e a conexão induzida ∇^{End}

Veremos agora como a ação adjunta faz de $\text{End}(E)$ um fibrado vetorial sobre M para todo fibrado vetorial $E \rightarrow M$.

Sejam $E, E' \rightarrow M$ dois fibrados vetoriais sobre M , então $\text{End}(E, E')$ denota o conjunto dos **homomorfismo fibrados** de E em E' , i.e., aplicações fibrados diferenciáveis cujas restrições às fibras são transformações lineares. No caso em que E e E' coincidem, usamos a notação $\text{End}(E) := \text{End}(E, E)$. Seja E um fibrado vetorial com atlas $\mathfrak{A}_E = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in L\}$, então podemos definir um atlas para $\text{End}(E)$ a partir de um atlas de E da seguinte forma: $\mathfrak{A}_{\text{End}(E)} = \{(U_\alpha, T_\alpha) : \alpha \in L\}$, onde as cartas locais são dadas por

$$\begin{aligned} T_\alpha: \text{End}(E) &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{R}^k), \\ T &\longmapsto \psi_\alpha \circ T \circ \psi_\alpha^{-1} \end{aligned}$$

Proposição 4.6. *Seja $\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ uma conexão no fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow M$, então a aplicação $\nabla^{\text{End}}: \Gamma(TM) \times \Gamma(\text{End}(E)) \rightarrow \Gamma(\text{End}(E))$, dada por*

$$\nabla_X^{\text{End}}(\mathbf{T})(\mathbf{s}) = \nabla_X(\mathbf{T}(\mathbf{s})) - \mathbf{T}(\nabla_X(\mathbf{s}))$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$, $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$, $\mathbf{T} \in \Gamma(\text{End}(E))$, é uma conexão no fibrado vetorial $\text{End}(E)$.

Demonstração. Pelo que vimos anteriormente ∇^{End} é \mathbb{R} -linear em ambas as variáveis uma vez que ∇ e \mathbf{T} são \mathbb{R} -lineares.

Além disso, ∇ também é uma derivação na segunda variável, pois

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\text{End}}(f\mathbf{T})(\mathbf{s}) &= \nabla_X(f\mathbf{T}(\mathbf{s})) - f\mathbf{T}(\nabla_X(\mathbf{s})) \\ &= (Xf)\mathbf{T}(\mathbf{s}) + f\nabla_X(\mathbf{T}(\mathbf{s})) - f\mathbf{T}(\nabla_X(\mathbf{s})) \\ &= (Xf)\mathbf{T}(\mathbf{s}) + f(\nabla_X^{\text{End}}\mathbf{T})(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

□

Essa derivação se estende a $\mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E))$ através do mapa

$$\begin{aligned} d_{\nabla^{\text{End}}}: \mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^{k+1}(TM^*, \text{End}(E)) \\ \alpha^i \otimes \mathbf{T}_i &\longmapsto d\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla^{\text{End}}(\mathbf{T}_i) \end{aligned}$$

4.5 A curvatura como uma $\text{End}(E)$ -forma de grau 2

Veremos aqui uma segunda versão do conceito de curvatura que será extremamente útil para a obtenção das equações de Yang-Mills.

Proposição 4.7. A aplicação $\Phi: \Gamma(\text{End}(E, E')) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$, dada por

$$\Phi(T)(\mathbf{s}) = T(\mathbf{s}),$$

para todo $T \in \Gamma(\text{End}(E, E'))$ e $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$, define um isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulos.

Demonstração. Primeiro devemos mostrar que Φ está bem definida, ou seja, $\Phi(T)(\mathbf{s}) \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$. Sejam $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \Gamma(E)$, $f \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}$ e $p \in M$, então

$$\begin{aligned} \Phi(T)(f\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)_p &= T_p(fs + s')_p \\ &= T_p(f_p s_p + s'_p) \\ &= T_p(f_p s_p) + T_p(s'_p) \\ &= f_p T_p(s_p) + T_p(s'_p) \\ &= f_p \Phi(T)(s)_p + \Phi(T)(s')_p \end{aligned}$$

Assim, $\Phi(T)(\mathbf{s}) \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$, uma vez que $T_p: E_p \rightarrow E'_p$ é uma transformação linear entre as fibras E_p e E'_p . Vamos agora mostrar a injetividade de Φ . Sejam $T, T' \in \Gamma(\text{End}(E, E'))$ tal que $\Phi(T)(\mathbf{s}) = \Phi(T')(\mathbf{s})$, então

$$\Phi(T)(\mathbf{s})_p = \Phi(T')(\mathbf{s})_p.$$

Ou seja, $T_p s_p = T'_p s_p$ para todo $s \in \Gamma(E)$ e $\forall p \in M$. Portanto, $T = T'$. Para verificar a sobrejetividade Φ , tomamos $H \in \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$ e desejamos obter $T \in \Gamma(\text{End}(E, E'))$ tal que $H = \Phi(T)$. Assim, podemos definir

$$T_p(v) = (H(s))_p$$

com $p \in M$, $v \in E_p$ e $s \in \Gamma(E)$ uma seção tal que $(s)_p = v$. Note que T é linear. De fato, se $s_p = v$, $s'_p = v'$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é tal que $f(p) = \lambda$, então

$$T_p(\lambda v + v') = [H(f.s + s')].$$

No entanto, ainda precisamos mostrar que T está bem definida. De fato, seja $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ um referencial local, então

$$\mathbf{s}(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \mathbf{s}_i(p)$$

Portanto,

$$H(\mathbf{s})_p = H\left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \mathbf{s}_i(p)\right) = \sum_{i=1}^n a_i(p) (H(\mathbf{s}_i))_p.$$

□

Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma conexão linear ∇ com curvatura R^∇ , então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \text{End}(\Gamma(E), \mathcal{A}^2(TM^*, E)) & \longrightarrow & \mathcal{A}^2(TM^*, \text{End}(E)) \\ R^\nabla & \longmapsto & \mathbf{R}^\nabla \end{array}$$

onde $\text{End}(E) := \text{End}(E, E)$ e $\mathbf{R}^\nabla \in \mathcal{A}^2(TM^*, \text{End}(E))$ é a seção dada pelas matrizes de conexão de R^∇ , i.e.,

$$R^\nabla(\mathbf{s}_j) = \sum_{i=1}^m [\mathbf{R}^\nabla]_j^i \otimes \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^m \Omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i,$$

define um isomorfismo de módulos. Dessa forma, se $\mathbf{s} = \sum_{j=1}^m a^j \mathbf{s}_j$, então temos

$$R^\nabla(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^m a^j R^\nabla(\mathbf{s}_j) = \sum_{i,j=1}^m a^j [\mathbf{R}^\nabla]_j^i \otimes \mathbf{s}_i = \mathbf{R}^\nabla(\mathbf{s}). \quad (4.1)$$

Definimos o **produto exterior** entre $\text{End}(E)$ -formas e E -formas por linearidade através da seguinte relação entre geradores

$$\begin{aligned} \wedge: \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E)) \times \mathcal{A}^q(TM^*, E) &\longrightarrow \mathcal{A}^{p+q}(TM^*, E) \\ (\mathbf{T}, \boldsymbol{\beta}) = (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i, \beta^j \otimes \mathbf{s}_j) &\mapsto \mathbf{T} \wedge \boldsymbol{\beta} := (\alpha^i \wedge \beta^j) \otimes T_i(\mathbf{s}_j). \end{aligned}$$

Em termos de trivializações locais, essa definição representa a multiplicação da matriz de ordem m de p -formas representando \mathbf{T} pela matriz coluna m linhas de q -formas representando $\boldsymbol{\beta}$.

Proposição 4.8. *Seja E um fibrado vetorial munido de uma conexão linear ∇ com curvatura R^∇ , então a derivação*

$$d_\nabla^2 = d_{\nabla, k+1} \circ d_{\nabla, k}: \mathcal{A}^k(TM^*, E) \longrightarrow \mathcal{A}^{k+2}(TM^*, E)$$

satisfaz a relação

$$d_\nabla^2 \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^\nabla \wedge \boldsymbol{\alpha}.$$

Demonstração. Por uma questão de linearidade, basta provar o resultado para $\boldsymbol{\alpha} = \alpha^i \otimes \mathbf{s}_i$. Dessa forma, segue de (4.1) e da Proposição 4.1 que

$$\begin{aligned} d_\nabla^2 \boldsymbol{\alpha} &= d_\nabla \left(d_\nabla \left(\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i \right) \right) \\ &= d_\nabla \left(d\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla \mathbf{s}_i \right) \\ &= d_\nabla \left(d\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i \right) + (-1)^k d_\nabla \left(\alpha^i \wedge \nabla \mathbf{s}_i \right) \\ &= d^2 \alpha^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^{k+1} d\alpha^i \otimes \nabla \mathbf{s}_i + (-1)^k d\alpha^i \wedge \nabla \mathbf{s}_i + (-1)^k (-1)^k \alpha^i \wedge d_\nabla(\nabla \mathbf{s}_i) \\ &= \alpha^i \wedge d_\nabla(\nabla \mathbf{s}_i) \\ &= \alpha^i \wedge R^\nabla(\mathbf{s}_i) \\ &= \alpha^i \wedge \mathbf{R}^\nabla(\mathbf{s}_i) \\ &= \mathbf{R}^\nabla \wedge (\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i) \\ &= \mathbf{R}^\nabla \wedge \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.9. *Seja E um fibrado com conexão ∇ e d_∇ a derivada exterior covariante induzida por ∇ . Seja ∇^{End} a conexão induzida por ∇ em $\text{End}(E)$ e $d_{\nabla^{\text{End}}}$ a derivada exterior covariante induzida por ∇^{End} . Então*

$$d_\nabla(\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha}) = d_{\nabla^{\text{End}}}\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha} + (-1)^k \mathbf{F} \wedge d_\nabla \boldsymbol{\alpha}$$

para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E))$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^\ell(TM^*, E)$.

Demonstração. Por uma questão de simplicidade, iremos mostrar o resultado para $\mathbf{F} = \eta \otimes F$ e $\boldsymbol{\alpha} = \omega \otimes \mathbf{s}$. Assim,

$$\begin{aligned} d_{\nabla^{\text{End}}}\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha} &= d_{\nabla^{\text{End}}}(\eta \otimes F) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &= [d\eta \otimes F + (-1)^k \eta \wedge \nabla^{\text{End}}(F)] \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &= (d\eta \otimes F) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \wedge \nabla^{\text{End}}(F)) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &= (d\eta \wedge \omega) \wedge F(\mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \wedge \omega) \wedge \nabla^{\text{End}}(F)(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \wedge d_\nabla \boldsymbol{\alpha} &= (\eta \otimes F) \wedge d_\nabla(\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &= (\eta \otimes F) \wedge (d\omega \otimes \mathbf{s} + (-1)^l \omega \wedge \nabla(\mathbf{s})) \\ &= (\eta \wedge d\omega) \wedge F(\mathbf{s}) + (-1)^l (\eta \wedge \omega) \wedge F(\nabla(\mathbf{s})), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$(-1)^k \mathbf{F} \wedge d_\nabla \boldsymbol{\alpha} = (-1)^k (\eta \wedge d\omega) \wedge F(\mathbf{s}) + (-1)^{k+l} (\eta \wedge \omega) \wedge F(\nabla(\mathbf{s})).$$

Utilizando a Proposição 4.1, obtemos

$$\begin{aligned} d_\nabla(\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha}) &= d_\nabla[(\eta \otimes F) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s})] \\ &= d(\eta \otimes F) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \otimes F) \wedge d_\nabla(\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &= d(\eta \otimes F) \wedge (\omega \otimes \mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \otimes F) \wedge (d\omega \otimes \mathbf{s} + (-1)^l \omega \wedge \nabla(\mathbf{s})) \\ &= (d\eta \otimes F + (-1)^k \eta \wedge \nabla^{\text{End}}(F))(\omega \otimes \mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \otimes F) \wedge (d\omega \otimes \mathbf{s} + (-1)^l \omega \wedge \nabla(\mathbf{s})) \\ &= (d\eta \wedge \omega) \wedge F(\mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \wedge \omega) \wedge \nabla^{\text{End}}(F)(\mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \otimes F) \wedge (d\omega \otimes \mathbf{s}) \\ &\quad + (-1)^{k+l} (\eta \otimes F) \wedge (\omega \wedge \nabla(\mathbf{s})) \\ &= (d\eta \wedge \omega) \wedge F(\mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \wedge \omega) \wedge \nabla^{\text{End}}(F)(\mathbf{s}) + (-1)^k (\eta \wedge d\omega) \wedge F(\mathbf{s}) \\ &\quad + (-1)^{k+l} (\eta \wedge \omega) \wedge F(\nabla(\mathbf{s})) \\ &= d_{\nabla^{\text{End}}}\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{\alpha} + (-1)^k \mathbf{F} \wedge d_\nabla \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

□

Proposição 4.10 (2ª identidade de Bianchi). *Seja E um fibrado vetorial sobre M munido de uma conexão ∇ e curvatura associada $\mathbf{R}^\nabla \in \mathcal{A}^2(TM^*, \text{End}(E))$, então*

$$d_{\nabla^{\text{End}}}\mathbf{R}^\nabla = 0.$$

Demonstração. Sendo $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$, então temos

$$d_{\nabla}^3 \mathbf{s} = d_{\nabla}(d_{\nabla}^2 \mathbf{s}) = d_{\nabla}(\mathbf{R} \wedge \mathbf{s}).$$

Segue da Proposição 4.9 que

$$d_{\nabla}(\mathbf{R} \wedge \mathbf{s}) = d_{\nabla \text{End}} \mathbf{R} \wedge \mathbf{s} + \mathbf{R} \wedge d_{\nabla} \mathbf{s}.$$

Por outro lado, a Proposição 4.8 nos diz que

$$d_{\nabla}^3 \mathbf{s} = d_{\nabla}^2(d_{\nabla} \mathbf{s}) = \mathbf{R} \wedge d_{\nabla} \mathbf{s}.$$

Assim, obtemos

$$\mathbf{R} \wedge d_{\nabla} \mathbf{s} = d_{\nabla \text{End}} \mathbf{R} \wedge \mathbf{s} + \mathbf{R} \wedge d_{\nabla} \mathbf{s},$$

ou seja,

$$d_{\nabla \text{End}} \mathbf{R} \wedge \mathbf{s} = 0.$$

Uma vez que $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$ foi tomado arbitrário, obtemos então que

$$d_{\nabla \text{End}} \mathbf{R} = 0.$$

□

4.6 As duas álgebras exteriores de $\mathcal{A}(TM^*, \text{End}(E))$

Definimos o **produto exterior** entre $\text{End}(E)$ -formas por linearidade através da seguinte relação entre geradores

$$\begin{aligned} \wedge: \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E)) \times \mathcal{A}^q(TM^*, \text{End}(E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^{p+q}(TM^*, \text{End}(E)) \\ (\mathbf{T}, \mathbf{S}) = (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i, \beta^j \otimes \mathbf{S}_j) &\mapsto \mathbf{T} \wedge \mathbf{S} := (\alpha^i \wedge \beta^j) \otimes \mathbf{T}_i \circ \mathbf{S}_j. \end{aligned}$$

Em termos de trivializações locais, essa definição representa a multiplicação da matriz de ordem m de p -formas representando \mathbf{T} pela matriz de ordem m de q -formas representando \mathbf{S} . Note que esse produto fornece a

$$\mathcal{A}(TM^*, \text{End}(E)) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E))$$

uma estrutura de álgebra graduada associativa. Já o **colchete de Lie** entre duas $\text{End}(E)$ -formas é definido por linearidade através da seguinte relação entre geradores

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E)) \times \mathcal{A}^q(TM^*, \text{End}(E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^{p+q}(TM^*, \text{End}(E)) \\ (\mathbf{T}, \mathbf{S}) = (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i, \beta^j \otimes \mathbf{S}_j) &\mapsto [\mathbf{T}, \mathbf{S}] := (\alpha^i \wedge \beta^j) \otimes [\mathbf{T}_i, \mathbf{S}_j]. \end{aligned}$$

Observe que este produto fornece a $\mathcal{A}(TM^*, \text{End}(E))$ a estrutura de uma álgebra de Lie graduada. A relação entre esses produtos exteriores se dá através do seguinte resultado.

Proposição 4.11. Se $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E))$ e $\mathbf{S} \in \mathcal{A}^q(TM^*, \text{End}(E))$, então

$$[\mathbf{T}, \mathbf{S}] = \mathbf{T} \wedge \mathbf{S} + (-1)^{pq+1} \mathbf{S} \wedge \mathbf{T}.$$

Demonstração. Por uma questão de simplicidade, iremos mostrar o resultado para $\mathbf{T} = \omega \otimes T$ e $\mathbf{S} = \eta \otimes S$. Assim,

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}, \mathbf{S}] &= (\omega \wedge \eta) \otimes [T, S] \\ &= (\omega \wedge \eta) \otimes (TS - ST) \\ &= (\omega \wedge \eta) \otimes TS - (\omega \wedge \eta) \otimes ST \\ &= (\omega \wedge \eta) \otimes TS + (-1)^{pq+1} (\eta \wedge \omega) \otimes ST \\ &= \mathbf{T} \wedge \mathbf{S} + (-1)^{pq+1} \mathbf{S} \wedge \mathbf{T}. \end{aligned}$$

□

Como era de se esperar, este colchete de Lie satisfaz as propriedades naturais.

Proposição 4.12 (Anticomutatividade do colchete de Lie). Se $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E))$ e $\mathbf{S} \in \mathcal{A}^q(TM^*, \text{End}(E))$, então

$$[\mathbf{T}, \mathbf{S}] = (-1)^{pq+1} [\mathbf{S}, \mathbf{T}].$$

Em particular,

$$[\mathbf{T}, \mathbf{T}] = 0.$$

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 4.11. □

Proposição 4.13 (Identidade de Jacobi). Se $\mathbf{S} \in \mathcal{A}^p(TM^*, \text{End}(E))$, $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^q(TM^*, \text{End}(E))$ e $\mathbf{U} \in \mathcal{A}^r(TM^*, \text{End}(E))$, então

$$(-1)^{pr} [\mathbf{S}, [\mathbf{T}, \mathbf{U}]] + (-1)^{qp} [\mathbf{T}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}]] + (-1)^{rq} [\mathbf{U}, [\mathbf{S}, \mathbf{T}]] = \mathbf{0}.$$

Demonstração. Por uma questão de simplicidade, multiplicamos cada membro da igualdade por $(-1)^{pr}$, obtendo assim

$$[\mathbf{S}, [\mathbf{T}, \mathbf{U}]] + (-1)^{p(q+r)} [\mathbf{T}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}]] + (-1)^{r(p+q)} [\mathbf{U}, [\mathbf{S}, \mathbf{T}]] = \mathbf{0}.$$

A linearidade da equação nos permite concluir então que basta mostrar o resultado para $\mathbf{T} = \omega \otimes T$, $\mathbf{S} = \eta \otimes S$ e $\mathbf{U} = \sigma \otimes U$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}, [\mathbf{T}, \mathbf{U}]] &= [\mathbf{S}, (\omega \wedge \sigma) \otimes [T, U]] \\ &= [\eta \otimes S, (\omega \wedge \sigma) \otimes [T, U]] \\ &= (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes [S, [T, U]]. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}]] &= (\omega \wedge \sigma \wedge \eta) \otimes [T, [U, S]] \\ [\mathbf{U}, [\mathbf{S}, \mathbf{T}]] &= (\sigma \wedge \eta \wedge \omega) \otimes [U, [S, T]]. \end{aligned}$$

Reorganizando, obtemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}]] &= (-1)^{pr} (\omega \wedge \eta \wedge \sigma) \otimes [T, [U, S]] \\ &= (-1)^{pr+pq} (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes [T, [U, S]] \\ &= (-1)^{p(q+r)} (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes [T, [U, S]] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}, [\mathbf{S}, \mathbf{T}]] &= (-1)^{pr} (\eta \wedge \sigma \wedge \omega) \otimes [U, [S, T]] \\ &= (-1)^{pr+qr} (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes [U, [S, T]] \\ &= (-1)^{r(p+q)} (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes [U, [S, T]]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}, [\mathbf{T}, \mathbf{U}]] + (-1)^{p(q+r)} [\mathbf{T}, [\mathbf{U}, \mathbf{S}]] + (-1)^{r(p+q)} [\mathbf{U}, [\mathbf{S}, \mathbf{T}]] &= \\ = (\eta \wedge \omega \wedge \sigma) \otimes ([S, [T, U]] + [T, [U, S]] + [U, [S, T]]) &= \\ = 0. \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta seção observando que, em geral, temos

$$\mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \neq \mathbf{0}.$$

4.7 O tensor diferença e as derivadas exteriores covariantes

Na seção anterior definimos o produto exterior e o colchete de Lie entre duas $\text{End}(E)$ -formas. Agora nosso objetivo é expandir tais conceitos através da introdução do tensor diferença e, conseqüentemente, estabelecer a relação natural com a derivada exterior covariante induzida por ∇^{End} .

Vamos começar descrevendo o espaço das conexões em um fibrado vetorial $E \rightarrow M$ em termos de um tensor assumindo valores em $\text{End}(E)$.

Proposição 4.14. *Seja E um fibrado vetorial sobre M e $\nabla_1, \nabla_2: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, E)$ conexões em E , então a diferença*

$$A_{21} = \nabla_2 - \nabla_1$$

determina um tensor $A_{21} \in \text{End}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \mathcal{A}^1(TM^*, E))$.

Demonstração. Seja $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}$ um referencial local induzido por uma carta trivializadora de E , então temos

$$\begin{aligned}\nabla_\ell(\mathbf{s}) &= \sum_{j=1}^m da^j \otimes \mathbf{s}_j + a^j \nabla_\ell(\mathbf{s}_j) \\ &= \sum_{i=1}^m da^i \otimes \mathbf{s}_i + \sum_{i,j=1}^m [\omega_\ell]_j^i a^j \otimes \mathbf{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(da^i + \sum_{j=1}^m [\omega_\ell]_j^i a^j \right) \otimes \mathbf{s}_i\end{aligned}$$

para toda seção local $\mathbf{s} = \sum a^j \mathbf{s}_j$, $\ell = 1, 2$. Dessa forma,

$$A_{21}(\mathbf{s}) = \sum_{i,j=1}^m \left([\omega_2]_j^i - [\omega_1]_j^i \right) a^j \otimes \mathbf{s}_i = (\omega_2 - \omega_1)(\mathbf{s}).$$

Segue o resultado desejado. \square

O tensor acima é chamado de **tensor diferença** entre ∇_2 e ∇_1 . No caso particular em que E é o fibrado trivial e $\nabla_1 := \nabla_0$ é a derivação covariante (flat) canônica, então $A := A_{21}$ será chamado de **campo de calibre** de ∇_2 . A demonstração do resultado acima mostra que o mapa

$$\begin{aligned}\Phi: \text{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Gamma(E), \mathcal{A}^1(TM^*, E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \text{End}(E)) \\ A_{21} &\longmapsto \mathbf{A}_{21} := \omega_2 - \omega_1.\end{aligned}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$ -módulos.

Lema 4.15. *Seja E um fibrado vetorial ∇_1, ∇_2 conexões em E e $\nabla_1^{\text{End}}, \nabla_2^{\text{End}}$ as conexões induzidas em $\text{End}(E)$, respectivamente. Se $A_{21} = \nabla_2 - \nabla_1$, então*

$$\nabla_2^{\text{End}} - \nabla_1^{\text{End}} = [\mathbf{A}_{21}, \cdot].$$

Demonstração. Sendo $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^0(TM^*, \text{End}(E))$, precisamos mostrar que

$$\nabla_2^{\text{End}}(\mathbf{T}) - \nabla_1^{\text{End}}(\mathbf{T}) = [\mathbf{A}_{21}, \mathbf{T}] = \mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{T} - \mathbf{T} \wedge \mathbf{A}_{21}.$$

Segue da definição de ∇_ℓ^{End} que

$$\nabla_{\ell, X}^{\text{End}}(\mathbf{T})(\mathbf{s}) = \nabla_{\ell, X}(\mathbf{T}(\mathbf{s})) - \mathbf{T}(\nabla_{\ell, X}(\mathbf{s})), \quad \ell = 1, 2,$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$. Assim,

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{2, X}^{\text{End}}(\mathbf{T}) - \nabla_{1, X}^{\text{End}}(\mathbf{T}) \right)(\mathbf{s}) &= (\nabla_{2, X} - \nabla_{1, X})(\mathbf{T}(\mathbf{s})) - \mathbf{T}(\nabla_{2, X}(\mathbf{s}) - \nabla_{1, X}(\mathbf{s})) \\ &= (\mathbf{A}_{21, X} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_{21, X})(\mathbf{s}).\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, $\mathbf{s} \in \Gamma(E)$ e $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^0(TM^*, \text{End}(E))$. Segue o resultado desejado. \square

Proposição 4.16. *Seja E um fibrado vetorial munido das conexões lineares ∇_1, ∇_2 , então*

$$d_{\nabla_2} \alpha = d_{\nabla_1} \alpha + \mathbf{A}_{21} \wedge \alpha$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}^k(TM^*, E)$. Mais ainda,

$$d_{\nabla_2^{\text{End}}} \mathbf{T} = d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{T} + [\mathbf{A}_{21}, \mathbf{T}]$$

para todo $\mathbf{T} \in \mathcal{A}^0(TM^*, \text{End}(E))$.

Demonstração. Em ambos os casos, por uma questão de linearidade, basta considerar o caso de geradores. Vejamos a primeira afirmação. Sendo $\alpha = \alpha^i \otimes \mathbf{s}_i$ uma E -forma de grau k , então

$$\begin{aligned} d_{\nabla_2} \alpha &= d_{\nabla_2} (\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i) \\ &= d\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla_2 (\mathbf{s}_i) \\ &= d\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge (\nabla_1 + \mathbf{A}_{21}) (\mathbf{s}_i) \\ &= d\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla_1 (\mathbf{s}_i) + \mathbf{A}_{21} (\mathbf{s}_i) \wedge \alpha^i \\ &= d_{\nabla_1} (\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i) + \mathbf{A}_{21} \wedge (\alpha^i \otimes \mathbf{s}_i) \\ &= d_{\nabla_1} \alpha + \mathbf{A}_{21} \wedge \alpha, \end{aligned}$$

de onde segue a primeira afirmação do enunciado. Vejamos agora a segunda afirmação. Sendo $\mathbf{T} = \alpha^i \otimes \mathbf{T}_i$ uma $\text{End}(E)$ -forma de grau k , então segue do Lema 4.15 que

$$\begin{aligned} d_{\nabla_2^{\text{End}}} \mathbf{T} &= d_{\nabla_2^{\text{End}}} (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i) \\ &= d\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla_2^{\text{End}} (\mathbf{T}_i) \\ &= d\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i + (-1)^k \alpha^i \wedge \nabla_1^{\text{End}} (\mathbf{T}_i) + (-1)^k \alpha^i \wedge [\mathbf{A}_{21}, \mathbf{T}_i] \\ &= d_{\nabla_1^{\text{End}}} (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i) + (-1)^k \alpha^i \wedge (\mathbf{A}_{21} \mathbf{T}_i - \mathbf{T}_i \mathbf{A}_{21}) \\ &= d_{\nabla_1^{\text{End}}} (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i) + \mathbf{A}_{21} \wedge (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i) + (-1)^{k+1} (\alpha^i \otimes \mathbf{T}_i) \wedge \mathbf{A}_{21} \\ &= d_{\nabla_1^{\text{End}}} (\mathbf{T}) + \mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{T} + (-1)^{k+1} \mathbf{T} \wedge \mathbf{A}_{21} \\ &= d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{T} + [\mathbf{A}_{21}, \mathbf{T}]. \end{aligned}$$

□

Lema 4.17. *Seendo α uma E -forma e \mathbf{T}, \mathbf{S} duas $\text{End}(E)$ -formas, então temos*

$$\mathbf{T} \wedge (\mathbf{S} \wedge \alpha) = \mathbf{T} \wedge \mathbf{S} \wedge \alpha.$$

Demonstração. Mais uma vez, devido à linearidade da relação, basta-nos verificar o resultado para $\mathbf{T} = T \otimes \omega$, $\mathbf{S} = S \otimes \eta$ e $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{s} \otimes \alpha$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \wedge (\mathbf{S} \wedge \boldsymbol{\alpha}) &= (T \otimes \omega) \wedge [(S \otimes \eta) \wedge (\mathbf{s} \otimes \alpha)] \\ &= (T \otimes \omega) \wedge [(S(\mathbf{s}) \otimes (\eta \wedge \alpha))] \\ &= (TS)(\mathbf{s}) \otimes [\omega \wedge (\eta \wedge \alpha)] \\ &= (TS) \otimes (\omega \wedge \eta) \wedge (\mathbf{s} \otimes \alpha) \\ &= \mathbf{T} \wedge \mathbf{S} \wedge \boldsymbol{\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.18. *Seja E um fibrado vetorial munido das conexões lineares ∇_1, ∇_2 com curvaturas dadas, respectivamente, por $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathcal{A}^2(TM^*, \text{End}(E))$, então*

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{A}_{21} + \mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{A}_{21}.$$

Em particular, se E é um fibrado munido de uma conexão linear flat ∇_0 , então

$$\mathbf{R} = d_{\nabla_0^{\text{End}}} \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}.$$

Demonstração. Segue da Proposição 4.8 que $d_{\nabla_\ell}^2 \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_\ell \wedge \boldsymbol{\alpha}$, $\ell = 1, 2$. Por outro lado, segue das Proposições 4.8, 4.9 e 4.16 e do Lema 4.17 que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 \wedge \boldsymbol{\alpha} &= d_{\nabla_2}^2 \boldsymbol{\alpha} \\ &= d_{\nabla_2} (d_{\nabla_2} \boldsymbol{\alpha}) \\ &= d_{\nabla_2} (d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \\ &= d_{\nabla_2} (d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha}) + d_{\nabla_2} (\mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \\ &= d_{\nabla_1} (d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{A}_{21} \wedge d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha} + d_{\nabla_1} (\mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{A}_{21} \wedge (\mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \\ &= d_{\nabla_1}^2 \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}_{21} \wedge d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha} + d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{A}_{21} \wedge d_{\nabla_1} \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{A}_{21}) \wedge \boldsymbol{\alpha} \\ &= d_{\nabla_1}^2 \boldsymbol{\alpha} + d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{A}_{21}) \wedge \boldsymbol{\alpha} \\ &= (\mathbf{R}_1 + d_{\nabla_1^{\text{End}}} \mathbf{A}_{21} \wedge \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{A}_{21} \wedge \mathbf{A}_{21})) \wedge \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}(TM^*, E)$; concluimos então o resultado desejado. □

Lema 4.19. *Seja $\boldsymbol{\alpha}$ uma $\text{End}(E)$ -forma, então temos*

$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}] = 0.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{\alpha}$ uma k -forma, então segue da Proposição 4.11

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}] &= \boldsymbol{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}) + (-1)^{k(2k)+1} (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\alpha} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\alpha} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4.8 Métrica no espaço de k -formas

Utilizando o fato que o espaço de k -formas é um espaço vetorial, é possível definir uma métrica nesse espaço a partir da métrica usual de \mathbb{R}^4 ([2]). Torna-se necessário para o nosso trabalho abordar tal assunto, que será de fundamental importância para a definição do produto interno L^2 entre forma diferenciais e matrizes de G -conexões sobre fibrados munidos de métrica. Tal abordagem culmina na definição de conexão de Yang-Mills, que será um dos mais importantes assuntos a serem abordados neste trabalho. Portanto, discutiremos métricas em um espaço vetorial que por sua vez induzem produtos internos no espaço de k -formas.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita dotado de uma métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, então a função $q: E \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $q(e) = \langle e, e \rangle$, será chamada de **forma quadrática** induzida por g . Neste caso, diremos que e é um **vetor de tipo luz** com respeito à q se $q(e) = 0$. Por outro lado, v será dito um **vetor unitário** se $q(v) = \pm 1$. Assim, uma base $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E será dita ortonormal se os seus vetores são dois a dois ortogonais e todos unitários.

Proposição 4.20. *Seja E um espaço vetorial n -dimensional e $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in T^{0,2}(E)$ um tensor simétrico de posto r , i.e., um mapa $e \in E \mapsto g(e, \cdot) \in E^*$ com posto r . Então, existe uma base ordenada $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E com base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$ de modo que*

$$g = \sum_{i=1}^r c_i e^i \otimes e^i,$$

onde $c_i = \pm 1$ e $r \leq n$.

Demonstração. Supondo $g \neq 0$, então existe $e_1 \in E$ tal que $g(e_1, e_1) \neq 0$. Seja $c_1 = g(e_1, e_1)$, sem perda de generalidade, podemos redimensionar para que $c_1 = \pm 1$. Daí, definimos E_1 como o espaço vetorial gerado por e_1 e $E_2 = \{e \in E, g(e_1, e) = 0\}$. É evidente que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, ou seja, caso $z \in E$ então $z - c_1 g(z, e_1) e_1 \in E_2$. Sendo assim, $E = E_1 \oplus E_2$. Da mesma forma, caso $g \neq 0$ em E_2 , existe $e_2 \in E_2$ tal que $c_2 = g(e_2, e_2) = \pm 1$. Como feito anteriormente, seja $E_3 = \{e \in E_2, g(e_2, e) = 0\}$, obtemos que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Repetindo esse processo recursivamente encontramos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E como queríamos. □

O resultado anterior nos diz que na base $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ a matriz de g se escreve

na forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A base $\{e_1, \dots, e_n\}$ será chamada de ***g-ortonormal***. Além disso, o número de vetores de base para os quais $g(e_i, e_i) = 1$ (resp., $g(e_i, e_i) = -1$) é único e coincide com a dimensão máxima de qualquer subespaço no qual a restrição de g é positiva (resp., negativa) definida. O número $s =$ o número de $+1$'s menos o número de -1 's é chamado de **assinatura** de g . O número de -1 é chamado de **índice** de g e será denotado por $\text{Ind}(g)$. Note que no caso em tela, o vetores do tipo luz serão gerados por $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$.

Corolário 4.21 ([6]). (**Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**) *Seja E um espaço vetorial real dotado de um produto interno de assinatura s . Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base para E , então E possui uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que e_i é uma combinação linear dos vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares $\langle v_i, v_j \rangle$ e nenhum e_i é do tipo luz.*

Demonstração. A existência de vetores do tipo luz impede a aplicação do processo usual de Gram-Schmidt. Portanto, iremos tratar o caso onde existem vetores do tipo luz. Caso um vetor $v_i \in \{v_1, \dots, v_n\}$ seja de tipo luz, a não-degenerescência do produto interno garante a existência de um vetor $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\langle v_i, v_j \rangle \neq 0$. Com isso podemos definir vetores ortogonais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_i &= \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i + v_j, \\ u_j &= \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i - v_j. \end{aligned}$$

Pois,

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= \left\langle \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i + v_j, \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i - v_j \right\rangle \\ &= - \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) \langle v_i, v_j \rangle + \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) \langle v_j, v_i \rangle - \langle v_j, v_j \rangle \\ &= - \langle v_i, v_j \rangle + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2} + \langle v_j, v_i \rangle + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2} - \langle v_j, v_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, u_i e u_j não são do tipo luz uma vez que

$$\begin{aligned}
 \langle u_i, u_i \rangle &= \left\langle \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i + v_j, \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i + v_j \right\rangle \\
 &= 2 \left(1 - \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) \langle v_j, v_i \rangle + \langle v_j, v_j \rangle \\
 &= 2 \langle v_j, v_i \rangle - \langle v_j, v_j \rangle + \langle v_j, v_j \rangle \\
 &= 2 \langle v_j, v_i \rangle \\
 &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \langle u_j, u_j \rangle &= \left\langle \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i + v_j, \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) v_i - v_j \right\rangle \\
 &= -2 \left(1 + \frac{\langle v_j, v_j \rangle}{2 \langle v_i, v_j \rangle}\right) \langle v_j, v_i \rangle - \langle v_j, v_j \rangle \\
 &= -2 \langle v_j, v_i \rangle + \langle v_j, v_j \rangle - \langle v_j, v_j \rangle \\
 &= -2 \langle v_j, v_i \rangle \\
 &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Assim, substituímos v_i e v_j por u_i e u_j na base e caso ainda reste algum vetor do tipo luz, basta repetir o processo. Assim, obtemos uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ que não possui vetores do tipo luz e que todos os vetores são combinações lineares dos vetores v_1, \dots, v_n com coeficientes que são funções racionais dos produtos escalares $\langle v_i, v_j \rangle$. Portanto, sem a presença de vetores do tipo luz, seja $w_1 = u_1$ podemos definir uma base ortogonal com:

$$w_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i.$$

Dessa forma, obtemos uma base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ que cumpre os requisitos propostos pelo corolário; em particular, podemos normalizar cada vetor, a fim de construir uma base ortonormal. \square

Seja E um espaço vetorial munido de um tensor simétrico e não degenerado $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in T^{0,2}(E)$, vamos estabelecer um isomorfismo entre E e E^* induzido por essa métrica. De fato, chamamos de operador **bemol** induzido por g à aplicação linear

$$\begin{aligned}
 \flat: E &\longrightarrow E^* \\
 e &\longmapsto e^\flat
 \end{aligned}$$

onde $e^\flat(e') = g(e, e')$ para todo $e' \in E$. Segue do fato de g ser não degenerada que este operador define um isomorfismo linear, cuja inversa será chamado de operador **sustenido**.¹

¹ A motivação para esta nomenclatura está relacionada aos símbolos que descrevem a elevação ou abaixamento de uma nota musical.

Um cálculo imediato mostra que tal operador assume a forma

$$\begin{aligned} \sharp: E^* &\longrightarrow E \\ \alpha &\longmapsto \alpha^\sharp \end{aligned}$$

onde $g(\alpha^\sharp, e) = \alpha(e)$ para todo $e \in E$. Dessa forma, o produto interno em $\Lambda^1(E^*)$ é definido de maneira natural por

$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \rangle$$

Isso induz um **produto interno** em $\Lambda^k(E^*)$ definido por

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle = \det \left[\langle \omega^i, \eta^j \rangle \right], \quad (4.2)$$

onde $\omega^1, \dots, \omega^k, \eta^1, \dots, \eta^k$ são 1-formas, que pode ser estendido a todas a k -formas por linearidade.

Proposição 4.22. *A expressão em 4.2 define, por linearidade, um produto interno em $\Lambda^k(E^*)$.*

Demonstração. Sendo ω, η k -formas, devemos verificar as seguintes propriedades para $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por simplicidade, iremos mostrar para $\omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$ e $\eta = \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k$.

(i) $\langle \omega, \eta \rangle = \langle \eta, \omega \rangle$. De fato, temos

$$\begin{aligned} \langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle &= \det \left[\langle \omega^i, \eta^j \rangle \right] \\ &= \det \left[\langle \eta^j, \omega^i \rangle \right] \\ &= \langle \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k, \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \rangle. \end{aligned}$$

(ii) $\langle \omega + \vartheta, \eta \rangle = \langle \omega, \eta \rangle + \langle \vartheta, \eta \rangle$. Segue da definição que

$$\begin{aligned} \langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k + \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \vartheta^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle &= \det \left[\langle \omega^i, \eta^j \rangle \right] + \det \left[\langle \vartheta^i, \eta^j \rangle \right] \\ &= \det \left[\langle \vartheta^i, \eta^j \rangle \right] + \det \left[\langle \omega^i, \eta^j \rangle \right] \\ &= \langle \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \vartheta^k + \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle. \end{aligned}$$

(iii) $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ e $\langle \omega, \omega \rangle \iff \omega = 0$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local de E , com base dual $\{e^1, \dots, e^n\}$, podemos escrever $\omega \in \Lambda^k(E^*)$ na forma

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}} a_I e^I, \quad e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

Assim, a expressão para o produto interno $\langle \omega, \omega \rangle$ assume a forma

$$\begin{aligned}
 \langle \omega, \omega \rangle &= \left\langle \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I e^I, \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I e^I \right\rangle \\
 &= \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I a_I \det \left[\langle e^{i_k}, e^{j_k} \rangle \right] \\
 &= \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I a_I \det \left[\langle e^{i_k}, e^{j_k} \rangle \right] \\
 &= \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I a_I \det [\delta_{i_k, j_k}]. \\
 &= (a_I)^2.
 \end{aligned}$$

Concluimos então que $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ e $\langle \omega, \omega \rangle \iff \omega = 0$.

(iv) $\langle \lambda \omega, \eta \rangle = \lambda \langle \omega, \eta \rangle$. Basta observar que

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda \omega, \eta \rangle &= \left\langle \lambda \cdot \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I e^I, \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 b_I e^I \right\rangle \\
 &= \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 \lambda a_I a_I \det \left[\langle e^{i_k}, e^{j_k} \rangle \right] \\
 &= \lambda \cdot \sum_{I \in \mathcal{C}^{k,n}}^3 a_I a_I \det \left[\langle e^{i_k}, e^{j_k} \rangle \right] \\
 &= \lambda \langle \omega, \eta \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Proposição 4.23. *Seja E um espaço vetorial orientado n -dimensional, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in T^{0,2}(E)$ um tensor simétrico não degenerado (i.e., uma métrica em E) e dV_g a forma de volume de E associada a g , então existe um único isomorfismo $*$: $\Lambda^k(E^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(E^*)$ satisfazendo*

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV_g \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Lambda^k(E^*). \quad (4.3)$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base g -ortonormal positivamente orientada de E e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é sua base dual, então

$$*(e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}) = c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n}), \quad (4.4)$$

onde $\sigma \in S_n$, $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ e $\sigma_{k+1} < \dots < \sigma_n$.

Demonstração. Começemos observando que o mapa $*$: $\Lambda^k(E^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(E^*)$ dado por (4.4) define uma transformação linear. Para mostrar que $*$ é um isomorfismo, basta observar que a transformação linear dada por $*^{-1}(e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n}) = \frac{1}{c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma} (e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k})$ é sua inversa. Vamos agora mostrar a unicidade. Suponha que \star : $\Lambda^k(E^*) \rightarrow \Lambda^{n-k}(E^*)$ é um isomorfismo

(linear) satisfazendo (4.3). Tome $\beta = e^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_k}$ e $\alpha = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ tal que $i_1 < \cdots < i_k$. Por uma questão combinatorial, $\alpha \star \beta = 0$, a menos que $(i_1, \dots, i_k) = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. Mas observe que $\star \beta = c e^{\sigma_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_n}$, onde $c \in \mathbb{R}$. Em particular, $\beta \wedge \star \beta = c(-1)^\sigma dV_g$. Por outro lado, segue de (4.2) que $\langle \beta, \beta \rangle = c_{\sigma_1} \cdots c_{\sigma_k}$. Dessa forma, a equação (4.3) assegura que $c = c_{\sigma_1} \cdots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma$, i.e., $\star(e^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_k}) = c_{\sigma_1} \cdots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_n})$; de onde segue a unicidade do isomorfismo linear satisfazendo (4.3). \square

Podemos estender esses conceitos de maneira imediata para variedades diferenciáveis munidas de uma métrica. Seja M uma variedade diferenciável munida de um tensor bilinear não degenerado $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in \Gamma^{0,2}(TM)$, podemos estabelecer um isomorfismo entre $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{A}^1(TM^*, \mathbb{R})$ induzido por essa métrica. De fato, chamamos de operador **bemol** induzido por g à aplicação linear

$$\begin{aligned} \flat: \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto X^\flat \end{aligned}$$

onde $X^\flat(Y) = g(X, Y)$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$. Segue do fato de g ser não degenerada que este operador define um isomorfismo linear, cuja inversa será chamado de operador **sustenido**. Novamente, um cálculo imediato mostra que tal operador assume a forma

$$\begin{aligned} \sharp: \mathcal{A}^1(TM^*, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ \alpha &\longmapsto \alpha^\sharp \end{aligned}$$

onde $g(\alpha^\sharp, X) = \alpha(X)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Assim sendo, a métrica em $\mathcal{A}^1(TM^*, \mathbb{R})$ é definida por

$$\langle \omega, \eta \rangle(p) = \langle \omega(p), \eta(p) \rangle_p = \langle \omega^\sharp(p), \eta^\sharp(p) \rangle_p,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é o produto interno induzido na fibra $\Lambda^1(T_p M^*)$ por (4.2). Naturalmente, isso induz uma **métrica** em $\mathcal{A}^k(TM^*, \mathbb{R})$ definida por

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle = \det \left[\langle \omega^i, \eta^j \rangle \right], \quad (4.5)$$

onde $\omega^1, \dots, \omega^k, \eta^1, \dots, \eta^k \in \mathcal{A}^1(TM^*, \mathbb{R})$, que pode ser estendida a todas as k -formas por linearidade. A demonstração é análoga a dada em (4.2).

Proposição 4.24 (Operador estrela de Hodge). *Seja M uma variedade diferenciável de dimensional n , $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in \Gamma^{0,2}(TM)$ uma métrica em M e dV_g a forma de volume de M associada a g , então existe um único isomorfismo $*$: $\mathcal{A}^k(TM^*, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^{n-k}(TM^*, \mathbb{R})$ satisfazendo a relação*

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV_g \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{A}^k(TM^*, \mathbb{R}).$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial g -ortonormal local positivamente orientado de TM e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é o referencial dual de TM^* , então

$$*(e^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_k}) = c_{\sigma_1} \cdots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma_n}),$$

onde $\sigma \in S_n$, $\sigma_1 < \cdots < \sigma_k$ e $\sigma_{k+1} < \cdots < \sigma_n$.

Demonstração. Basta usar a continuidade e o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt como no caso de espaços vetoriais, a fim de obter um referencial ortonormal numa vizinhança de um ponto qualquer da variedade. A partir daí, a prova torna-se um corolário imediato da Proposição 4.23. \square

Proposição 4.25. *Seja E um espaço vetorial n -dimensional orientado, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle \in T^{0,2}(E)$ um tensor simétrico e não degenerado e dV_g a forma de E volume induzida por g , então o operador estrela de Hodge possui as seguintes propriedades:*

$$\alpha \wedge *\beta = *\alpha \wedge \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV_g, \quad (4.6)$$

$$*1 = dV_g, \quad *dV_g = (-1)^{\text{Ind}(g)}, \quad (4.7)$$

$$**\alpha = (-1)^{\text{Ind}(g)}(-1)^{k(n-k)}\alpha, \quad (4.8)$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^{\text{Ind}(g)} \langle *\alpha, *\beta \rangle. \quad (4.9)$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \Lambda^k(E^*)$.

Demonstração. A equação (4.6) segue diretamente da Proposição 4.24 e da simetria $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. Para verificar (4.6), basta ver que $*1 = (-1)^\sigma(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = dV_g$ e $*dV_g = c_1 \dots c_n (-1)^\sigma = (-1)^{\text{Ind}(g)}$, onde σ é a identidade. Para a 2.6, seja $\alpha = e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}$. Segue da Proposição 4.24 que

$$*(e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}) = c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n}),$$

$$\begin{aligned} * [c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n})] &= c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma * (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n}) \\ &= c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} c_{\sigma_{k+1}} \dots c_{\sigma_n} (-1)^\sigma (-1)^{\sigma'} (e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}). \end{aligned}$$

Sendo $\sigma' = (\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$, então temos

$$\begin{aligned} * [c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} (-1)^\sigma (e^{\sigma_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_n})] &= c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} c_{\sigma_{k+1}} \dots c_{\sigma_n} (-1)^\sigma (-1)^\sigma (-1)^{k(n-k)} (e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}) \\ &= c_{\sigma_1} \dots c_{\sigma_k} c_{\sigma_{k+1}} \dots c_{\sigma_n} (-1)^{k(n-k)} (e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}) \\ &= (-1)^{\text{Ind}(g)} (-1)^{k(n-k)} (e^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma_k}) \end{aligned}$$

Por fim, vamos usar as equações (4.6) e (4.8) para mostrar (4.9). De fato,

$$\begin{aligned} \langle *\alpha, *\beta \rangle dV_g &= *\alpha \wedge **\beta = (-1)^{\text{Ind}(g)} (-1)^{k(n-k)} *\alpha \wedge \beta \\ &= (-1)^{\text{Ind}(g)} \beta \wedge *\alpha \\ &= (-1)^{\text{Ind}(g)} \langle *\alpha, *\beta \rangle dV_g \end{aligned}$$

\square

Seja $(M; g)$ uma variedade Riemanniana orientada de dimensão 4. Diremos que uma 2-forma ω em M é **autodual** se

$$*\omega = \omega$$

e que ω é **antiautodual** se

$$*\omega = -\omega$$

Seja M uma variedade de dimensão n munida de uma métrica g com índice $\text{Ind}(g) = p$, então fica bem definido o operador **codiferencial** $d^*: \mathcal{A}^{k+1}(TM^*, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}^k(TM^*, \mathbb{R})$, dado por

$$d^*\omega = (-1)^{p+nk+1} * d * \omega.$$

Proposição 4.26. *Seja M uma variedade de dimensão n munida de uma métrica g com índice $\text{Ind}(g) = p$, então*

$$d^{*2} = d^* \circ d^* = 0.$$

Demonstração. Em vista de (4.8), basta usar a propriedade análoga para a derivada exterior. \square

O **produto interno** L^2 de formas diferenciais com suporte compacto é definido globalmente por

$$\langle \omega, \eta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \omega, \eta \rangle dV_g,$$

quaisquer que sejam $\omega, \eta \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, \mathbb{R})$.

Proposição 4.27 (propriedade adjunta). *Seja M uma variedade métrica (sem bordo), então o codiferencial é o operador adjunto da derivada exterior com respeito à métrica L^2 . Mais precisamente,*

$$\langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega, d^*\eta \rangle_{L^2}$$

quaisquer que sejam $\omega, \eta \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, \mathbb{R})$.

Demonstração. Segue da definição do operador codiferencial e das equações (4.6) e (4.8), que

$$\begin{aligned} -\omega \wedge *d^*\eta &= -\omega \wedge [(-1)^{p+nk+1} * *d * \eta] \\ &= -(-1)^{p+nk+1} (-1)^{k(n-k)+p} \omega \wedge d * \eta \\ &= (-1)^k \omega \wedge d * \eta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} - \langle \omega, d^*\eta \rangle_{L^2} &= \int_M \langle d\omega, \eta \rangle dV_g - \int_M \langle \omega, d^*\eta \rangle dV_g \\
 &= \int_M [\langle d\omega, \eta \rangle - \langle \omega, d^*\eta \rangle] dV_g \\
 &= \int_M d\omega \wedge *\eta - \omega \wedge *d^*\eta \\
 &= \int_M d\omega \wedge *\eta + (-1)^k \omega \wedge d*\eta \\
 &= \int_M d(\omega \wedge *\eta) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

4.9 Fibrados munidos de uma métrica

Seja E um fibrado vetorial sobre M e considere o fibrado tensorial $E^* \otimes E^* \simeq T^{0,2}(E)$. Uma métrica em E é uma seção global $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*) \simeq \Gamma^{0,2}(E)$ simétrica, não degenerada em cada ponto de M . Um fibrado vetorial dotado de uma métrica será chamado um **fibrado vetorial métrico**. Mais precisamente, para cada $p \in M$ fica bem definida uma forma bilinear simétrica e não degenerada $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$ variando diferenciavelmente com p .

Proposição 4.28. *Todo fibrado vetorial métrico admite um referencial ortonormal de seções locais.*

Demonstração. Basta usar a continuidade e o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt como no caso de espaços vetoriais, a fim de obter um referencial ortonormal numa vizinhança de um ponto qualquer da variedade. □

Dado um fibrado vetorial métrico E , diremos que uma conexão linear $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, E)$ é uma **conexão linear métrica** sobre E se

$$d \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \langle \nabla \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle + \langle \mathbf{s}_1, \nabla \mathbf{s}_2 \rangle$$

quaisquer que sejam $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \Gamma(E)$.

Proposição 4.29. *As matrizes de conexão e de curvatura de uma conexão linear métrica em relação a um referencial ortonormal de seções locais são antissimétricas.*

Demonstração. Por definição, temos

$$\nabla(\mathbf{s}_j) = \sum_{i=0}^n \omega_j^i \otimes \mathbf{s}_i.$$

Dessa forma, como $\langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \rangle = \delta_{ij}$, então temos

$$\begin{aligned}
 0 &= d \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \rangle \\
 &= \langle \nabla \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \rangle + \langle \mathbf{s}_i, \nabla \mathbf{s}_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=0}^n \omega_i^k \otimes \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j \right\rangle + \left\langle \mathbf{s}_i, \sum_{k=0}^n \omega_j^k \otimes \mathbf{s}_k \right\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^n \omega_i^k \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_j \rangle + \sum_{k=0}^n \omega_j^k \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_k \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^n \omega_i^k \delta_{kj} + \sum_{k=0}^n \omega_j^k \delta_{ik} \\
 &= \omega_i^j + \omega_j^i.
 \end{aligned}$$

Utilizando o resultado anterior e a segunda equação estrutural, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Omega_j^i &= d\omega_j^i + \sum_{k=0}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k \\
 &= -d\omega_i^j - \sum_{k=0}^n \omega_j^k \wedge \omega_k^i \\
 &= -d\omega_i^j - \sum_{k=0}^n \omega_k^j \wedge \omega_i^k \\
 &= -\Omega_i^j
 \end{aligned}$$

□

Seja E um fibrado vetorial métrico sobre uma variedade métrica M , definimos o **produto interno** entre duas k -formas assumindo valores em E , $\omega \otimes \mathbf{s}, \omega' \otimes \mathbf{s}' \in \mathcal{A}^k(TM^*, E)$ através da seguinte expressão (suave)

$$\langle \omega \otimes \mathbf{s}, \omega' \otimes \mathbf{s}' \rangle := \langle \omega, \omega' \rangle \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}' \rangle.$$

Naturalmente, essa definição pode ser estendida por linearidade a uma combinação linear qualquer de k -formas assumindo valores em E . De maneira análoga ao caso de k -formas ordinárias, podemos definir o produto interno L^2 de formas assumindo valores em E através da relação

$$\langle \omega, \omega' \rangle_{L^2} = \int_M \langle \omega, \omega' \rangle dV_g$$

quisquer que sejam $\omega, \omega' \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, E)$. Em posse de uma métrica, podemos então definir o operador estrela de Hodge para forma assumindo valores em E de maneira análoga ao caso de formas ordinárias. De fato, o operador

$$\begin{aligned}
 * : \mathcal{A}^k(TM, E) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(TM, E) \\
 \omega = \omega^i \otimes \mathbf{s}_i &\mapsto * \omega = * \omega^i \otimes \mathbf{s}_i
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

será chamado de **operador estrela de Hodge** para formas assumindo valores no fibrado métrico E .² Seja $d_{\nabla}: \mathcal{A}^k(TM^*, E) \rightarrow \mathcal{A}^k(TM^*, E)$ a derivada exterior covariante de E -formas induzida pela conexão linear ∇ definida no fibrado E munido de uma métrica g com índice $p = \text{Ind}(g)$, então definimos o operador **codiferencial covariante** induzido por g através da relação

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^*: \mathcal{A}^{k+1}(TM, E) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(TM, E) \\ \omega &\longmapsto (-1)^{p+nk+1} * d_{\nabla} * \omega, \end{aligned}$$

onde $n = \dim M$.

Proposição 4.30. *Seja E um fibrado métrico sobre uma variedade métrica orientada (sem bordo), então o codiferencial covariante é o operador adjunto da derivada exterior covariante com respeito à métrica L^2 . Mais precisamente,*

$$\langle d_{\nabla} \omega, \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega, d_{\nabla}^* \eta \rangle_{L^2}$$

quaisquer que sejam $\omega, \eta \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, E)$.

Demonstração. Pela linearidade de d_{∇} e d_{∇}^* , basta-nos mostrar o enunciado para $\omega, \eta \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, E)$ da forma $\omega = \omega^i \otimes s_i$ e $\eta = \eta^i \otimes e_i$, onde $s_i, e_i \in \Gamma(E)$. Por definição, temos

$$d_{\nabla} \omega = d_{\nabla}(\omega^i \otimes s_i) = d\omega^i \otimes s_i + (-1)^k \omega^i \wedge \nabla(s_i),$$

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^* \eta &= (-1)^{p+nk+1} * d_{\nabla} * (\eta^i \otimes e_i) \\ &= (-1)^{p+nk+1} * [(d * \eta^i) \otimes e_i + (-1)^{n-k} (*\eta^i) \wedge \nabla(e_i)] \\ &= (-1)^{p+nk+1} * [(d * \eta^i) \otimes e_i + (-1)^{n-k} (*\eta^i) \wedge \nabla(e_i)] \\ &= (-1)^{p+nk+1} * (d * \eta^i) \otimes e_i + (-1)^{p+nk+1+n-k} (*\eta^i) \wedge \nabla(e_i). \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \langle d_{\nabla} \omega, \eta \rangle_{L^2} - \langle \omega, d_{\nabla}^* \eta \rangle_{L^2} &= \\ &= \left\langle d\omega^i \otimes s_i + (-1)^k \omega^i \wedge \nabla(s_i), \eta^i \otimes e_i \right\rangle_{L^2} \\ &\quad - \left\langle \omega^i \otimes s_i, (-1)^{p+nk+1} * (d * \eta^i) \otimes e_i + (-1)^{p+nk+1+n-k} (*\eta^i) \wedge \nabla(e_i) \right\rangle_{L^2} \\ &= d\omega^i \wedge *\eta^i \langle s_i, e_i \rangle_{L^2} + (-1)^k \omega^i \wedge d * \eta^i \langle s_i, e_i \rangle_{L^2} \\ &\quad + (-1)^k \langle \omega^i, \eta^i \rangle \langle \nabla(s_i), e_i \rangle_{L^2} + (-1)^{p+nk} \langle \omega^i, (-1)^{n-k} * *\eta^i \rangle \langle s_i, \nabla(e_i) \rangle_{L^2} \\ &= d(\omega^i \wedge *\eta^i) \langle s_i, e_i \rangle_{L^2} + (-1)^k \langle \omega^i, \eta^i \rangle (\langle \nabla(s_i), e_i \rangle_{L^2} + \langle s_i, \nabla(e_i) \rangle_{L^2}) \\ &= d(\omega^i \wedge *\eta^i) \langle s_i, e_i \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

□

² Note que a linearidade do operador estrela de Hodge definido para k -formas diferenciais garante que a definição anterior não depende do referencial local escolhido para o fibrado E .

Encerraremos esta seção definindo o **laplaciano covariante** de E -formas como sendo o operador linear

$$\Delta := d_{\nabla} \circ d_{\nabla}^* + d_{\nabla}^* \circ d_{\nabla}$$

4.10 G -Conexões em G -Fibrados Vetoriais

Diremos que um fibrado vetorial E é um G -fibrado vetorial, se as aplicações de transição de um atlas fibrado de E se reduzirem ao subgrupo $G \subset GL(n, \mathbb{R})$. Seja E um G -fibrado vetorial, então uma conexão ∇ em E é uma G -**conexão** se sua matriz de conexão para qualquer carta do fibrado está em \mathfrak{g} . O conjunto das G -conexões sobre o fibrado métrico E será denotado por $\text{Conx}_G(E)$. Em meio a tais conexões, iremos destacar aquelas com suporte compacto, que serão denotadas por $\text{Conx}_{G,c}(E)$. Seja E um G -fibrado métrico, então o grupo de **transformações de calibre** de E é o conjunto das seções do fibrado $\text{End}(E)$ que associa a cada $p \in M$ um isomorfismo de E_p que preserva a métrica, i.e.,

$$G_E = \left\{ T \in \text{End}(E) : T_p \in \text{End}(E_p) \simeq G \subset GL(E_p) \forall p \in M, \langle T_p(\mathbf{s}_p), T_p(\mathbf{s}_p) \rangle_{E_p} = \langle \mathbf{s}_p, \mathbf{s}_p \rangle_{E_p} \right\},$$

onde $GL(V)$ denota o grupo de isomorfismos do espaço vetorial V . Sendo $T \in G_E$ e ∇ um conexão em E , então podemos obter uma outra conexão em E induzida por T através da relação

$$\nabla^T(\mathbf{s}) = T \circ \nabla \circ T^{-1}(\mathbf{s}),$$

i.e., tal que o diagrama abaixo comute

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla_x} & \Gamma(E) \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \Gamma(E) & \xrightarrow{\nabla_x^T} & \Gamma(E) \end{array}$$

Proposição 4.31. *Se ∇ é uma G -conexão, então ∇^T também é uma G -conexão.*

Demonstração. Por hipótese ∇ é uma G -conexão, então seja ω a sua matriz de conexão, temos que $\omega \in \mathfrak{g}$. Como $T, T^{-1} \in G$ e sabemos que $Ad_g(h) = ghg^{-1} \in \mathfrak{g}$ para todo $h \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$ ([21, p. 63]). Então, seja ϖ a matriz de conexão de ∇^T , temos

$$\varpi = Ad_T(\omega) = T \circ \omega \circ T^{-1}.$$

Logo, $\varpi \in \mathfrak{g}$. □

Proposição 4.32. *Sejam E, F espaços vetoriais dotados de métricas $g_E = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e $g_F = \langle \cdot, \cdot \rangle_F$ de índices $p = \text{Ind}(g_E)$ e $p = \text{Ind}(g_F)$, respectivamente, e $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal para E . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{End}(E,F)} : \text{End}(E, F) \times \text{End}(E, F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (T, T') &\longmapsto \langle T, T' \rangle_{\text{End}(E,F)} = \sum_{i=1}^m \langle T(e_i), T'(e_i) \rangle_F \end{aligned}$$

induz uma métrica de índice p no espaço vetorial (de dimensão finita) $\text{End}(E, F)$. Além disso, tal aplicação independe da base ortonormal escolhida.

Demonstração. Por hipótese $g_E = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e $g_F = \langle \cdot, \cdot \rangle_F$ são métricas nos espaços E e F , respectivamente. Vamos mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{End}(E, F)}$ é um 2-tensor. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $Q, R, T \in \text{End}(E, F)$, então temos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(Q + R), T \rangle_{\text{End}(E, F)} &= \sum_{i=1}^m \langle \alpha(Q + R)(e_i), T(e_i) \rangle_F \\
&= \alpha \sum_{i=1}^m \langle (Q + R)(e_i), T(e_i) \rangle_F \\
&= \alpha \sum_{i=1}^m \langle Q(e_i) + R(e_i), T(e_i) \rangle_F \\
&= \alpha \sum_{i=1}^m [\langle Q(e_i), T(e_i) \rangle_F + \langle R(e_i), T(e_i) \rangle_F] \\
&= \alpha \sum_{i=1}^m [\langle Q(e_i), T(e_i) \rangle_F + \langle R(e_i), T(e_i) \rangle_F] \\
&= \alpha \left[\sum_{i=1}^m \langle Q(e_i), T(e_i) \rangle_F + \sum_{i=1}^m \langle R(e_i), T(e_i) \rangle_F \right] \\
&= \alpha [\langle Q, T \rangle_{\text{End}(E, F)} + \langle R, T \rangle_{\text{End}(E, F)}]
\end{aligned}$$

Supondo $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $\varepsilon' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ duas bases ortonormais para E , podemos escrever

$$e'_i = \sum_{j=1}^m g_i^j e_j,$$

onde $g = (g_j^i)$ é a matriz ortogonal, tal que

$$\delta_j^i = \langle e'_i, e'_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m g_i^k e_k, \sum_{l=1}^m g_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l=1}^m g_i^k g_j^l \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k,l=1}^m g_i^k g_j^l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^m g_i^k g_j^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle T, T' \rangle_{\text{End}(E, F)} &= \sum_{i=1}^m \langle T(e'_i), T'(e'_i) \rangle_F \\
&= \sum_{i=1}^m \left\langle T\left(\sum_{k=1}^m g_i^k e_k\right), T'\left(\sum_{l=1}^m g_i^l e_l\right) \right\rangle_F \\
&= \sum_{k,l=1}^m \sum_{i=1}^m g_i^k g_i^l \delta_{kl} \langle T(e_k), T'(e_l) \rangle_F \\
&= \sum_{k,l=1}^m \delta_l^k \langle T(e_k), T'(e_l) \rangle_F \\
&= \sum_{k=1}^m \langle T(e_k), T'(e_k) \rangle_F
\end{aligned}$$

□

Portanto, se E é um fibrado métrico, então a métrica de E induz uma métrica em $\text{End}(E)$ da seguinte forma: sendo $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ uma referencial ortonormal local numa vizinhança de p , então

$$\langle T, T' \rangle_{\text{End}(E)} = \sum_{i=1}^m \langle T(\mathbf{e}_i), T'(\mathbf{e}_i) \rangle_E.$$

para todo $T, T' \in \text{End}(E)$. Um cálculo imediato mostra que essa métrica não depende da escolha do referencial ortonormal local escolhido.

Seja $\text{End}(E)$ um fibrado vetorial sobre M , então o **operador estrela de Hodge**³ para k -formas assumindo valores em $\text{End}(E)$ fica bem determinado através da relação nos geradores dada por

$$\begin{aligned} * : \mathcal{A}^k(TM, \text{End}(E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(TM, \text{End}(E)) \\ \mathbf{T} = \omega^i \otimes \mathbf{T}_i &\longmapsto * \mathbf{T} = * \omega^i \otimes \mathbf{T}_i. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Seja $d_{\nabla \text{End}} : \mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E)) \rightarrow \mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E))$ a derivada exterior covariante de $\text{End}(E)$ -formas induzida pela conexão linear ∇ definida no fibrado E munido de uma métrica g com índice $p = \text{Ind}(g)$, então definimos o operador **codiferencial covariante** induzido através da relação

$$\begin{aligned} d_{\nabla \text{End}}^* : \mathcal{A}^{k+1}(TM^*, \text{End}(E)) &\longrightarrow \mathcal{A}^k(TM^*, \text{End}(E)) \\ \mathbf{T} &\longmapsto (-1)^{p+nk+1} * d_{\nabla} * \mathbf{T}, \end{aligned}$$

onde $n = \dim M$. Analogamente, o laplaciano covariante de $\text{End}(E)$ -formas é definido por

$$\Delta^{\text{End}} := d_{\nabla \text{End}} \circ d_{\nabla \text{End}}^* + d_{\nabla \text{End}}^* \circ d_{\nabla \text{End}}.$$

Proposição 4.33. *Seja E um fibrado métrico sobre uma variedade métrica orientada (sem bordo), então o codiferencial covariante é o operador adjunto da derivada exterior covariante com respeito à métrica L^2 . Mais precisamente,*

$$\langle d_{\nabla} \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle_{L^2} = \langle \mathbf{T}, d_{\nabla}^* \mathbf{S} \rangle_{L^2}$$

quaisquer que sejam $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathcal{A}_c^k(TM^*, \text{End}(E))$.

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições 4.30 e 4.32. □

Proposição 4.34. *A norma da curvatura é um invariante por transformações de calibre. Mais precisamente, se E é um fibrado métrico sobre uma variedade métrica M , $T \in G_E$ uma transformação de calibre e $\mathbf{R}^{\nabla} \in \mathcal{A}^2(TM^*, \text{End}(E))$ o tensor de curvatura de uma G -conexão linear métrica ∇ . Então*

$$\|\mathbf{R}^{\nabla^T}\| = \|\mathbf{R}^{\nabla}\|.$$

³ Note que a linearidade do operador estrela de Hodge definido para k -formas diferenciais garante que a definição anterior não depende do referencial local escolhido para o fibrado $\text{End}(E)$.

Demonstração. Seja $T \in G_E$, sabemos que T preserva a métrica. Portanto, se $\{\mathbf{s}_i\}$ é um referencial ortonormal de seções, então $\{T^{-1}(\mathbf{s}_i)\}$ também é um referencial ortonormal. Assim,

$$\begin{aligned}
 \|R^{d_\nabla T}\|^2 &= \langle R^{d_\nabla T}, R^{d_\nabla T} \rangle_{\text{End}} \\
 &= \sum_{i=1}^m \langle R^{d_\nabla T}(\mathbf{s}_i), R^{d_\nabla T}(\mathbf{s}_i) \rangle_E \\
 &= \sum_{i=1}^m \langle T [R^{d_\nabla}(T^{-1}(\mathbf{s}_i))], T [R^{d_\nabla}(T^{-1}(\mathbf{s}_i))] \rangle_E \\
 &= \sum_{i=1}^m \langle R^{d_\nabla}(T^{-1}(\mathbf{s}_i)), R^{d_\nabla}(T^{-1}(\mathbf{s}_i)) \rangle_E \\
 &= \sum_{i=1}^m \langle R^{d_\nabla}, R^{d_\nabla} \rangle_{\text{End}} \\
 &= \|R^{d_\nabla}\|^2.
 \end{aligned}$$

□

4.11 O funcional de Yang-Mills

Seja E um fibrado métrico sobre uma variedade métrica orientada M , então o **funcional de Yang-Mills** (ação, ou lagrangiano de Yang-Mills) é o funcional $\mathcal{YM}: \text{Conx}_{G,c}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{YM}(\nabla) = \frac{1}{2} \int_M \|R^\nabla\|^2 dV_g, \quad (4.12)$$

onde $\text{Conx}_{G,c}(E)$ denota o conjunto das G -conexões sobre o fibrado métrico E com suporte compacto. Dizemos que uma conexão em E é uma **conexão de Yang-Mills** se ela é um ponto crítico do funcional de Yang-Mills.

Lema 4.35. *Seja R^∇ a curvatura da conexão ∇ no fibrado vetorial métrico E , então temos*

$$\langle \Delta^{\text{End}} R^\nabla, R^\nabla \rangle_{L^2} = \|d_{\nabla^{\text{End}}}^* R^\nabla\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Segue imediatamente da propriedade adjunta (Proposição 4.27) e da segunda identidade de Bianchi (Proposição 4.10) que

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta^{\text{End}} R^\nabla, R^\nabla \rangle_{L^2} &= \langle d_{\nabla^{\text{End}}} (d_{\nabla^{\text{End}}}^* R^\nabla), R^\nabla \rangle_{L^2} + \langle d_{\nabla^{\text{End}}}^* (d_{\nabla^{\text{End}}} R^\nabla), R^\nabla \rangle_{L^2} \\
 &= \langle d_{\nabla^{\text{End}}}^* R^\nabla, d_{\nabla^{\text{End}}}^* R^\nabla \rangle_{L^2} + \langle d_{\nabla^{\text{End}}} R^\nabla, d_{\nabla^{\text{End}}} R^\nabla \rangle_{L^2} \\
 &= \|d_{\nabla^{\text{End}}}^* R^\nabla\|_{L^2}^2.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.36. *Seja ∇ é uma conexão sobre o fibrado vetorial E , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1). ∇ é uma conexão de Yang-Mills;
- (2). $d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla = 0$;
- (3). $\Delta^{\text{End}} \mathbf{R}^\nabla = 0$.

Demonstração. Dada uma conexão ∇ , obtemos uma variação da conexão na direção de uma 1-forma arbitrária fixada $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^1(TM^*, \text{End}(E))$ (isto é, uma curva passando por ∇ na direção de \mathbf{A}) definindo para cada $t \in \mathbb{R}$ a conexão

$$\nabla_t = \nabla + t\mathbf{A}.$$

Segue da Proposição 4.16 que

$$d_{\nabla_t} \boldsymbol{\alpha} = d_{\nabla} \boldsymbol{\alpha} + t\mathbf{A} \wedge \boldsymbol{\alpha}$$

para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}(TM^*, E)$. Por outro lado, a Proposição 4.18 nos diz que

$$\mathbf{R}^{\nabla_t} = \mathbf{R}^\nabla + td_{\nabla} \mathbf{A} + t^2 \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}.$$

Dessa forma,

$$\|\mathbf{R}^{\nabla_t}\|^2 = \|\mathbf{R}^\nabla\|^2 + 2 \langle \mathbf{R}^\nabla, d_{\nabla} \mathbf{A} \rangle_{\text{End}(E)} + O(t^2).$$

Segue da da propriedade adjunta (Proposição 4.27) que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{YM}(\nabla_t) \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{YM}(\nabla_t) - \mathcal{YM}(\nabla)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{\|\mathbf{R}^{\nabla_t}\|^2 - \|\mathbf{R}^\nabla\|^2}{t} dV_g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \langle \mathbf{R}^\nabla, d_{\nabla} \mathbf{A} \rangle_{\text{End}(E)} dV_g \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \langle d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla, \mathbf{A} \rangle_{\text{End}(E)} dV_g. \end{aligned}$$

Concluimos então que ∇ é uma conexão de Yang-Mills se, e somente se,

$$d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla = 0.$$

Isso mostra que (1) e (2) são equivalentes. Vamos agora mostrar a equivalência entre (2) e (3). Segue da segunda identidade de Bianchi (Proposição 4.10) que $d_{\nabla} \mathbf{R}^\nabla = 0$. Dessa forma, se $d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla = 0$, então

$$\Delta^{\text{End}} \mathbf{R}^\nabla = d_{\nabla} \left(d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla \right) + d_{\nabla}^* \left(d_{\nabla} \mathbf{R}^\nabla \right) = 0.$$

Reciprocamente, se $\Delta^{\text{End}} \mathbf{R}^\nabla = 0$, então segue imediatamente do Lema anterior que

$$\|d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla\|_{L^2}^2 = \langle \Delta^{\text{End}} \mathbf{R}^\nabla, \mathbf{R}^\nabla \rangle_{L^2} = 0,$$

de onde segue que $d_{\nabla}^* \mathbf{R}^\nabla = 0$. □

A primeira equação do teorema anterior é chamada de **equação de Yang-Mills**; a segunda equação diz que a curvatura de uma conexão de Yang-Mills é uma $\text{End}(E)$ -forma harmônica.

4.12 Instantons

Passemos agora a um estudo mais preciso das conexões de Yang-Mills que se candidatam a mínimos locais para o funcional de Yang-Mills em variedades de dimensão 4.

Sendo M é uma variedade compacta (sem bordo) suave de dimensão 4 munida de uma métrica riemanniana g , então segue de (cf. 4.8) que o operador estrela de Hodge $*$: $\mathcal{A}^k(TM^*, E) \rightarrow \mathcal{A}^{4-k}(TM^*, E)$ associado a essa métrica (4.10) satisfaz a relação $*^2 = (-1)^k$. Em particular, esse operador decompõe $\mathcal{A}^2(TM^*, E)$ em dois subfibrados associados aos autovalores ± 1 , respectivamente:

$$\mathcal{A}^2(TM^*, E) = \mathcal{A}_+^2(TM^*, E) \oplus \mathcal{A}_-^2(TM^*, E).$$

Note que essa decomposição é ortogonal com respeito ao produto interno L_2 ([18, p. 41]). Uma E -forma ω de grau 2 é dita **autodual** se $*\omega = \omega$ e **antiautodual** se $*\omega = -\omega$. Qualquer 2-forma ω assumindo valores em um fibrado vetorial E se decompõe na forma

$$\omega = \omega^+ + \omega^-, \quad (4.13)$$

onde $\omega^+ \in \mathcal{A}^{2,+}(TM^*, E)$ é chamada de componente autodual de ω e $\omega^- \in \mathcal{A}^{2,-}(TM^*, E)$ é chamada de componente antiautodual de ω , respectivamente. Observe que se \mathbf{R}^∇ for autodual ou antiautodual como uma forma 2 assumindo valores em $\text{End}(E)$, então segue da identidade de Bianchi que a equação de Yang-Mills é automaticamente satisfeita. De fato,

$$*\mathbf{R}^\nabla = \pm \mathbf{R}^\nabla \implies d_\nabla^* \mathbf{R}^\nabla = \pm * d_\nabla * \mathbf{R}^\nabla = \pm * d_\nabla \mathbf{R}^\nabla = 0.$$

Dessa forma, diremos que uma conexão linear suave ∇ é um **instanton** se sua curvatura \mathbf{R}^∇ é antiautodual, i.e., se

$$\mathbf{R}_+^\nabla = 0.$$

Sem dificuldade se verifica que a decomposição (4.13) é um invariante de calibre (e mesmo conforme com respeito à métrica L^2). Em particular, o conceito de instanton é invariante por transformações de calibre. Decompondo a curvatura em suas componentes autodual e antiautodual, temos

$$\mathcal{YM}(\nabla) = \|\mathbf{R}_+^\nabla\|_{L^2} + \|\mathbf{R}_-^\nabla\|_{L^2}$$

Então, por intermédio da Proposição 4.20, é possível verificar que cada conexão antiautodual ∇ é um mínimo absoluto para o funcional Yang-Mills.

Observação 4.37. Note que a carga topológica do instanton ∇ é definida por

$$k = \frac{1}{16\pi^2} \int_M \|\mathbf{R}^\nabla\|^2 dV_g,$$

de onde segue que $\mathcal{YM}(\nabla) = 8\pi^2 k$ ([22, p. 9], [18, p. 43]). Em outras palavras, $\mathcal{YM}(\nabla)$ coincide com a carga topológica do instanton ∇ vezes $8\pi^2$.

É importante observar que é possível construir conexões de Yang-Mills que não são nem autoduais nem antiautoduais para várias variedades de dimensão 4, sendo S^4 a mais interessante delas; no entanto, essas soluções não minimizam (4.12). De fato, pelo menos para o grupo de calibres $SU(2)$, $SU(3)$ e $SO(4)$, pode-se mostrar que não há mínimos locais: qualquer ponto crítico que não seja autodual nem antiautodual é instável e deve ser um “ponto de sela” ([7], [22]).⁴

⁴ Veremos mais adiante que precisaremos verificar a afirmação acima para um subgrupo de $SO(5)$.

5 A conexão afim de Cartan e o fibrado estendido

Iremos formalizar um conceito introduzido por É. Cartan em [9] de maneira informal. Salvo engano, este conceito ainda não foi formalizado na literatura especializada, i.e., o conceito de conexão afim.

5.1 Conexões afins e conexões lineares no fibrado estendido

Começemos recordando o conceito de conexão linear¹. Sendo M uma variedade diferenciável e $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto m , então diremos que uma aplicação $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M; E)$ é uma **conexão linear** em E se satisfazer as seguintes condições:

$$(i) \quad \nabla(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \nabla(\mathbf{s}_1) + \nabla(\mathbf{s}_2),$$

$$(ii) \quad \nabla(f \cdot \mathbf{s}) = df \otimes \mathbf{s} + f \cdot \nabla(\mathbf{s}),$$

quaisquer que sejam $\mathbf{s}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \Gamma(E)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Assim, dada uma conexão linear $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; E)$ e $\theta \in \mathcal{A}^1(TM^*; E)$ uma 1-forma assumindo valores no fibrado E , então o par $d := (\nabla, \theta)$ será chamado de uma **conexão afim** sobre E . No caso particular em que $E = TM$ e $\theta(x)$ é a identidade de TM , esta conexão será chamada de **conexão de Levi-Civita** ([9, §§ 16-28]) em TM .

Sendo M uma variedade diferenciável e $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com grupo estrutural $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ e atlas fibrado $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$, i.e., uma família de difeomorfismos fibrados $\phi_\alpha: E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ tais que $\phi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot y)$ para todo $x \in U_{\beta\alpha}$ e $y \in \mathbb{R}^m$, onde $g_{\alpha\beta}(x) \in G$ e $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_M$ o fibrado em retas trivial sobre M , então a soma direta $\tilde{E} = \mathbb{R} \oplus E$, munida da aplicação de projeção

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: \tilde{E} = \mathbb{R} \oplus E &\longrightarrow M \\ (s, e) &\longmapsto \pi(e) \end{aligned}$$

e do atlas fibrado $\tilde{\mathfrak{A}} = \{(U_\alpha, \text{id} \oplus \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$, será chamada de **fibrado estendido** de E . Em particular, os cociclos associados a esse atlas são da forma

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = 1 \oplus g_{\alpha\beta}(x) \in 1 \oplus G \subset \mathbb{R}_+ \oplus GL(n, \mathbb{R}).$$

¹ Na literatura corrente, tal conceito é conhecido como conexão afim. No entanto, esta não é a definição original introduzida por Élie Cartan em [9, §§ 16 – 28].

Dessa forma, sendo $d = (\nabla, \theta)$ uma conexão afim em E , iremos construir uma conexão linear $\widetilde{\nabla}: \Gamma(\widetilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \widetilde{E})$ no fibrado estendido \widetilde{E} da forma como segue. Sendo $\boldsymbol{\varsigma} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_n)$ um referencial local de E e $\boldsymbol{s}_0 = \frac{\partial}{\partial s}$ o referencial canônico de $T\mathbb{R}$, então denotaremos por $\widetilde{\boldsymbol{\varsigma}}$ o referencial local de \widetilde{E} dado por $\widetilde{\boldsymbol{\varsigma}} := (\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{\varsigma}) = (\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \dots, \boldsymbol{s}_n)$. Assim, se $\omega = (\omega_{ij})$ é a forma de conexão de ∇ com respeito ao referencial $\boldsymbol{\varsigma}$, i.e., $\nabla \boldsymbol{s}_j = \sum_{i=1}^n \omega_j^i \otimes \boldsymbol{s}_i$, $j = 1, \dots, n$, então definimos

$$\widetilde{\nabla}(\boldsymbol{s}_j) = \sum_{i=0}^n \widetilde{\omega}_j^i \otimes \boldsymbol{s}_i, \quad j = 0, \dots, n, \quad (5.1)$$

onde

$$\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta^1 & \omega_1^1 & \cdots & \omega_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^n & \omega_1^n & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix}, \quad \theta = \sum_{i=1}^m \theta^i \otimes \boldsymbol{s}_i.$$

Em particular, $\widetilde{\nabla}(\boldsymbol{s}_0) = 0$. Vamos agora verificar que $\widetilde{\omega}$ satisfaz as condições de compatibilidade de uma conexão linear.

Proposição 5.1. *A aplicação $\widetilde{\nabla}: \Gamma(\widetilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \widetilde{E})$ dada por (5.1) define uma conexão linear em \widetilde{E} .*

Demonstração. Primeiramente observe que se $\boldsymbol{s}_{\beta,i} = \sum_{j=1}^n (g_{\alpha,\beta})_i^j \boldsymbol{s}_{\alpha,j}$, então $\theta \in \mathcal{A}^1(TM^*; E)$ se escreve localmente na forma $\theta_\alpha = \sum_{j=1}^m \theta_\alpha^j \otimes \boldsymbol{s}_{\alpha,j}$. Sendo assim, temos

$$\theta_\alpha = \sum_{\ell=1}^m \theta_\alpha^\ell \otimes \boldsymbol{s}_{\alpha,\ell} = \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \theta_\alpha^\ell (g_{\beta,\alpha})_j^\ell \right) \otimes \boldsymbol{s}_{\beta,j} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^m (g_{\beta,\alpha})_j^\ell \theta_\alpha^\ell \right) \otimes \boldsymbol{s}_{\beta,j}.$$

Como $\theta_\beta = \theta_\alpha$ em $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, então $\theta_\beta^j = \sum_{\ell=1}^m (g_{\beta,\alpha})_j^\ell \theta_\alpha^\ell$. Em outras palavras, $\theta_\beta = g_{\beta,\alpha} \theta_\alpha$. Além disso, sendo ∇ uma conexão linear, então $\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$.

Logo, se $\widetilde{g}_{\beta\alpha} := 1 \oplus g_{\beta\alpha}$ em $U_{\alpha\beta}$, então temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta_\beta & \omega_\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_{\alpha\beta}^{-1} \theta_\alpha & g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta_\alpha & \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + dg_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta_\alpha & \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dg_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta_\alpha & \omega_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & dg_{\alpha,\beta} \end{pmatrix} \\ &= \widetilde{g}_{\alpha\beta}^{-1} \widetilde{\omega}_\alpha \widetilde{g}_{\alpha\beta} + \widetilde{g}_{\alpha\beta}^{-1} d\widetilde{g}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

□

A conexão linear $\tilde{\nabla}: \Gamma(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, \tilde{E})$ será chamada de **conexão linear** em \tilde{E} **induzida** pela conexão afim $d = (\nabla, \theta)$.

5.2 O transporte paralelo em um fibrado vetorial

Iremos agora recordar o conceito de transporte paralelo numa conexão linear. Sendo E um fibrado vetorial sobre M , $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*; E)$ uma conexão linear e $\mathfrak{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$ um referencial local, então a derivada de uma seção local $\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{s}_i$ assume a forma

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{s}) &= \sum_{j=1}^n da_j \otimes \mathbf{s}_j + a_j \nabla(\mathbf{s}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n da_i \otimes \mathbf{s}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j \omega_{ij} \otimes \mathbf{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(da_i + \sum_{j=1}^n a_j \omega_{ij} \right) \mathbf{s}_i \end{aligned}$$

Sendo $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e $\gamma: I \rightarrow M$ uma curva diferenciável, diremos que uma aplicação diferenciável $\mathbf{s}: I \rightarrow E|_{\gamma(I)}$ é uma **seção ao longo de** γ se $\mathbf{s}(t) \in E_{\gamma(t)} = \pi^{-1}(\gamma(t))$ para todo $t \in I$. Por analogia, definiremos a derivada covariante de uma seção ao longo de uma curva da seguinte forma:

Definição 5.2. *Sendo ∇ uma conexão linear sobre o fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow M$, $\gamma: I \rightarrow M$ uma curva diferenciável e $\mathbf{s}: I \rightarrow E$ uma seção ao longo de γ , então a aplicação*

$$\frac{D\mathbf{s}(t)}{dt} = \nabla(\mathbf{s}(t)) \cdot \gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \left(a'_i(t) + \sum_{j=1}^n a_j(t) \omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \quad (5.2)$$

será chamada de **derivada covariante** de $\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \mathbf{s}_i$ com respeito a ∇ .² Além disso, diremos que $\mathbf{s}(t)$ é uma **seção paralela** ao longo de γ se

$$\frac{D\mathbf{s}(t)}{dt} = 0, \quad \forall t \in I.$$

Dessa forma, sabemos do estudo das EDOs homogêneas que para todo $v \in E_{\gamma(t_0)}$ existe uma única seção paralela $\mathbf{s}(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ de tal forma que $\mathbf{s}(t_0) = v$. Sendo assim, $\mathbf{s}(t_1)$ será o **transporte paralelo** de v ao longo de $\gamma(t)$, $I = [t_0, t_1]$. Em particular, se ∇ é uma conexão linear no espaço tangente TM , diremos que γ é uma curva **geodésica** com respeito a ∇ se $\gamma'(t)$ for uma seção paralela ao longo de $\gamma(t)$.

² Aqui estamos usando o abuso de notação $\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \mathbf{s}_i$, onde $a_i(t) := \bar{a}_i \circ \gamma(t)$, $\bar{a}_i: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$.

5.3 O deslocamento de Cartan de uma conexão afim

A definição original de Cartan pressupunha escolher um referencial e a partir dele integrar as soluções locais dadas em termos dos coeficientes de um seção do fibrado tangente ao longo de uma curva diferenciável por partes ([9, § 28]). Acontece que não é possível definir uma integração de forma assumindo valores num fibrado vetorial de maneira a independe do referencial local escolhido, o que levou alguns especialistas a crer que essa definição só faria sentido localmente e dependeria do referencial local escolhido. Acontece que Cartan se referenciava explicitamente a uma construção global independente de referencial ([9, §§ 28-29]). Mostraremos aqui que o uso do transporte paralelo da conexão linear no fibrado estendido nos fornecerá a independência de referencial desejada na construção do deslocamento de Cartan.

Sendo $d = (\nabla, \theta)$ uma conexão afim sobre o fibrado vetorial E , considere o fibrado estendido $\tilde{E} = \mathbb{R} \times E$ e nele a conexão linear $\tilde{\nabla}: \Gamma(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \tilde{E})$ induzida por $d = (\nabla, \theta)$. Logo, a derivada covariante assume a forma local dada por

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\mathbf{s}}(t)}{dt} &= \tilde{\nabla}(\tilde{\mathbf{s}}(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= a'_0(t)\mathbf{s}_0 + \sum_{i=1}^n \left(a'_i(t) + a_0(t)\theta_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=1}^n a_j(t)\omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

Concluimos então que a derivada covariante de $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ se anula se, e somente se,

$$\begin{cases} a_0 \equiv \text{const}, \\ a'_i(t) + a_0(t)\theta_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=1}^n a_j(t)\omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0. \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Em particular, o transporte paralelo de $(1, v) \in \tilde{E}_{\tilde{\gamma}(t_0)}$ ao longo de $\tilde{\gamma}(t)$ é da forma $\tilde{\mathbf{s}}(t_1) = (1, w) \in \tilde{E}_{\tilde{\gamma}(t_1)}$. Assim sendo, $w = \pi_2(\tilde{\mathbf{s}}(t_1))$ é o **deslocamento de Cartan** de $v = \pi_2(\tilde{\mathbf{s}}(t_0))$, onde $\pi_1: \tilde{E} = \mathbb{R} \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2: \tilde{E} = \mathbb{R} \oplus E \rightarrow E$ são as projeções no primeiro e segundo fatores de $\mathbb{R} \oplus E$, respectivamente.

A argumentação acima, em termos do transporte paralelo no fibrado estendido, mostra que a definição do deslocamento de Cartan não depende do referencial escolhido. Concluimos então que o deslocamento de Cartan se dá por sucessivas composições de aplicações que assumem localmente a forma da solução da EDO linear

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

onde $x'_i(t) = a'_i(t)$, $a_{ij}(t) = -\omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ e $b_i(t) = -a_0\theta_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Sendo M uma variedade e ∇ uma conexão em TM , então podemos dizer, por abuso de linguagem, que $\tilde{\nabla}$ define uma conexão linear em \tilde{TM} . Dessa forma, sendo $\tilde{M} = \mathbb{R} \times M$

e $\gamma: I \rightarrow M$ uma curva em M , então a curva $\tilde{\gamma}_a: I \rightarrow \widetilde{M}$, dada por $\tilde{\gamma}_a(t) = (a, \gamma(t))$, será chamada de **curva estendida** de γ em \widetilde{M} por $a \in \mathbb{R}$. Sendo assim, diremos que γ é uma curva **geodésica** com respeito à conexão afim $d = (\nabla, \theta)$ em TM se $\tilde{\gamma}_1(t)$ for uma geodésica com respeito à conexão linear induzida $\widetilde{\nabla}$ no espaço tangente estendido \widetilde{TM} , i.e., se

$$\frac{D\tilde{\gamma}'_1(t)}{dt} = \widetilde{\nabla}(\tilde{\gamma}'_1(t)) \cdot \tilde{\gamma}'_1(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Vejamos agora como se comportam as geodésicas no caso particular da conexão mecânica de Cartan.

Exemplo 5.3. *Seja $d = (\nabla, \theta)$ a conexão afim galileana dada no Exemplo 3.9, i.e., a conexão cuja matriz de conexão na base canônica de \mathbb{R}^4 assume a forma*

$$\theta^i = dx^i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

$$(\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Então a matriz da conexão linear $\widetilde{\nabla}: \Gamma(\widetilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^1(TM^*, \widetilde{E})$ induzida por $d = (\nabla, \theta)$ assume a forma

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^1 & -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^2 & -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^3 & -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passemos então ao cálculo das geodésica com respeito a conexão $\widetilde{\nabla}$. Para isso vamos calcular $\frac{D\tilde{\gamma}'(t)}{dt}$, onde $\gamma_{-1} = 1$. Segue de (5.3) que

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\gamma}'(t)}{dt} &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_{-1}(t)dx^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=0}^3 \gamma'_j(t)\omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\ &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_{-1}(t)dx^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=0}^3 \gamma'_j(t)\omega_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\gamma}'(t)}{dt} &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_{-1}(t)dx^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \gamma'_0(t)\omega_{i0}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\ &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_0(t)\omega_{i0}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{D\tilde{\gamma}'(t)}{dt} = 0$, basta resolver

$$\sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_0(t)\omega_{i0}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i = 0. \quad (5.4)$$

Mas esta equação equivale a

$$\sum_{i=1}^3 (\gamma_i''(t) - A^i(\gamma_0'(t))^2) \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^3 (\gamma_i''(t) - \gamma_0'(t) A^i dx^0(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \mathbf{s}_i = 0$$

Note que quando $i = 0$ em (5.4), $\gamma_0''(t) \mathbf{s}_0 = 0$. Portanto, $\gamma_0'(t) = c_0$, onde c_0 é uma constante. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^3 (\gamma_i''(t) - A^i(c_0)^2) = 0$$

Portanto, temos

$$\gamma_i''(t) - A^i(c_0)^2 = 0$$

Em particular, caso A^i seja constante, chegamos em $\gamma_i(t) = \frac{A^i(c_0 t)^2}{2} + c$, para $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$\gamma(t) = 1 \cdot \mathbf{s}_{-1} + c_0 t \cdot \mathbf{s}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{A^i(c_0 t)^2}{2} + c \right) \mathbf{s}_i.$$

Observação 5.4. Note que a última equação acima se assemelha à equação de Torricelli.

5.4 Deslocamento de Cartan em uma conexão que geometriza o sistema newtoniano

Segue do estudo realizado na Seção 2.2 que uma matriz de conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano se escreve na forma

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \omega_0^1 + \eta_0^1 & \eta_1^1 & \eta_2^1 & \eta_3^1 \\ \theta^2 & \omega_0^2 + \eta_0^2 & \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 \\ \theta^3 & \omega_0^3 + \eta_0^3 & \eta_1^3 & \eta_2^3 & \eta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \varpi_0^1 & \varpi_1^1 & \varpi_2^1 & \varpi_3^1 \\ \theta^2 & \varpi_0^2 & \varpi_1^2 & \varpi_2^2 & \varpi_3^2 \\ \theta^3 & \varpi_0^3 & \varpi_1^3 & \varpi_2^3 & \varpi_3^3 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

onde as condições de Cartan e Galileu nos dizem que

$$\begin{aligned} \omega_0^i &= -A_i dx^0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \omega_j^i &= 0, \quad \text{se } i = 0 \text{ e } j = 0, 1, 2, 3 \\ \eta_j^i &= \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad \varphi_{j,k}^i = -\varphi_{k,j}^i. \end{aligned}$$

Passemos então ao cálculo do deslocamento de Cartan (“geodésica”) com respeito à conexão $\widetilde{\nabla}$. Iniciemos calculando $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$, onde $\gamma_{-1} = 1$. Segue de (5.3) que

$$\begin{aligned}
 \frac{D\gamma'(t)}{dt} &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_{-1}(t)\theta^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=0}^3 \gamma'_j(t)\varpi_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\
 &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \sum_{j=0}^3 \gamma'_j(t)\varpi_{ij}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\
 &= \gamma''_{-1}(t)\mathbf{s}_{-1} + \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_0(t)\varpi_0^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma'_j(t)\varpi_j^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\
 &= \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_0(t) (\omega_0^i + \eta_0^i) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma'_j(t)\eta_j^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i.
 \end{aligned}$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned}
 \gamma'_0(t) (\omega_0^i + \eta_0^i) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \left((\varphi_{0,0}^i - A^i) + \sum_{k=1}^3 \varphi_{0,k}^i dx^k \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
 &= \left((\varphi_{0,0}^i - A^i) + \sum_{k=1}^3 \varphi_{0,k}^i dx^k \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
 &= -A^i(\gamma(t))\gamma'_0(t) + \left(\sum_{k=1}^3 \varphi_{0,k}^i dx^k \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \eta_j^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i(\gamma(t))\gamma'_k(t).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) + \gamma'_0(t) (\omega_0^i + \eta_0^i) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \sum_{j=1}^3 \gamma'_j(t)\eta_j^i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right) \mathbf{s}_i \\
 &= \sum_{i=0}^3 \left(\gamma''_i(t) - A^i(\gamma(t))\gamma'_0(t) + \sum_{j,k=0}^3 \varphi_{j,k}^i(\gamma(t))\gamma'_j(t)\gamma'_k(t) \right) \mathbf{s}_i.
 \end{aligned}$$

Utilizando a condição de geometrização de Cartan (3.5), obtemos $\gamma''_i(t) - A^i(\gamma(t)) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Em resumo, acabamos de mostrar o seguinte resultado.

Teorema 5.5. *Se $\tilde{\omega}$ é uma conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano, então o descolamento de Cartan coincide com a trajetória dada pela segunda lei de Newton. Mais precisamente,*

$$\gamma_i''(t) - A^i(\gamma(t)) = 0.$$

O resultado acima mostra que a estratégia de estudar os deslocamentos de Cartan para conexões que geometrizam o sistema mecânico newtoniano possuem sentido físico. Observe ainda que as condições de Cartan nos levam à equação do movimento e são necessárias para que a conexão possa geometrizar o sistema mecânico newtoniano. Dessa forma, torna-se natural o seguinte:

Problema 5.6. *Existe uma conexão ASD (ou de Yang-Mills) que satisfaça a condição de geometrização de Cartan?*

5.5 Conexões de Yang-Mills no fibrado tangente estendido

Seja $M = \mathbb{R}^4$, então $E = TM$ se torna automaticamente um fibrado métrico com métrica euclideanada induzida nas fibras $g_E := \langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, definimos a métrica natural em $\tilde{E} = \mathbb{R} \oplus E$, dada por

$$g_{\tilde{E}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}} : \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E} \times \tilde{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((s, v), (s', v')) & \longmapsto & (s + s') + \langle v, v' \rangle_E. \end{array}$$

Note que tanto g_E quanto $g_{\tilde{E}}$ são métricas não degeneradas de índice nulo. Em particular, $(-1)^{\text{Ind}(g_E)} = (-1)^{\text{Ind}(g_{\tilde{E}})} = 0$.

Exemplo 5.7. *Seja $d = (\nabla, \theta)$ a conexão afim galileana dada no Exemplo 3.9, i.e., a conexão cuja matriz de conexão na base canônica de \mathbb{R}^4 assume a forma*

$$\theta^i = dx^i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

$$(\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{\nabla}$ a conexão linear induzida no fibrado estendido e $*$: $\mathcal{A}^k(TM^*, \tilde{E}) \rightarrow \mathcal{A}^{4-k}(TM^*, \tilde{E})$ o operador de Hodge induzido pela métrica $g_{\tilde{E}}$. Faremos então o cálculos seguintes:

1. O resultado do operador de Hodge em $\mathcal{A}^1(TM^*, \tilde{E})$, i.e.,

$$*dx^i, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

2. O resultado do operador de Hodge em $\mathcal{A}^2(TM^*, \tilde{E})$, i.e., calcule

$$*(dx^i \wedge dx^j), \quad i, j = 0, 1, \dots, 2, 3;$$

3. $*d_{\nabla^{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}}$;

4. Iremos verificar que $d_{\nabla^{\text{End}}}^* \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}} \neq 0$;

5. Iremos calcular $\left\| \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}} \right\|_{\tilde{E}}$.

Começamos considerando \mathbb{R}^4 dotado do produto interno canônico com o sistema de coordenadas

$$(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Logo,

$$dV = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

é a forma de volume induzida por essa métrica. Assim, segue da Proposição (4.24) que

$$\begin{aligned} *dx^0 &= (-1)^{(0,1,2,3)} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ *dx^1 &= (-1)^{(1,0,2,3)} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ *dx^2 &= (-1)^{(2,0,1,3)} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3, \\ *dx^3 &= (-1)^{(3,0,1,2)} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *(dx^0 \wedge dx^1) &= (-1)^{(0,1,2,3)} dx^2 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3, \\ *(dx^0 \wedge dx^2) &= (-1)^{(0,2,1,3)} dx^1 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^3, \\ *(dx^0 \wedge dx^3) &= (-1)^{(0,3,1,2)} dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= (-1)^{(1,2,0,3)} dx^0 \wedge dx^3 = dx^0 \wedge dx^3, \\ *(dx^1 \wedge dx^3) &= (-1)^{(1,3,0,2)} dx^0 \wedge dx^2 = -dx^0 \wedge dx^2, \\ *(dx^2 \wedge dx^3) &= (-1)^{(2,3,0,1)} dx^0 \wedge dx^1 = dx^0 \wedge dx^1, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} (-1)^{(0,1,2,3)} &= (-1)^0 = 1, \\ (-1)^{(1,0,2,3)} &= (-1)^1 (-1)^{(0,1,2,3)} = -1, \\ (-1)^{(2,0,1,3)} &= (-1)^2 (-1)^{(0,1,2,3)} = 1, \\ (-1)^{(3,0,1,2)} &= (-1)^3 (-1)^{(0,1,2,3)} = -1, \\ (-1)^{(0,2,1,3)} &= (-1)^1 (-1)^{(0,1,2,3)} = -1, \\ (-1)^{(0,3,1,2)} &= (-1)^2 (-1)^{(0,1,2,3)} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^{(1,2,0,3)} &= (-1)^2(-1)^{(0,1,2,3)} = 1, \\
 (-1)^{(1,3,0,2)} &= (-1)^2(-1)^{(1,0,2,3)} = (-1)(-1)^2(-1)^{(0,1,2,3)} = -1, \\
 (-1)^{(2,3,0,1)} &= (-1)^2(-1)^{(2,0,1,3)} = (-1)^2(-1)^2(-1)^{(0,1,2,3)} = 1.
 \end{aligned}$$

Isso responde os itens 1) e 2).

Seja $\iota: \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ a aplicação de inclusão dada por $\iota(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, x_0, x_1, x_2, x_3)$, então tomamos $E = \iota^*(T\mathbb{R}^5)$. Nesse caso, a base canônica $\{\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ forma um referencial ortonormal global de E . Passemos agora ao cálculo de $\mathbf{R}^{\tilde{\nabla}}$. Para isso, devemos recordar que a expressão da matriz de conexão de $\tilde{\nabla}$ é dada por (ver 7.1)

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^1 & -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^2 & -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^3 & -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Segue da equação estrutural de Cartan que a matriz de curvatura de $\tilde{\nabla}$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Omega} &= d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^1 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^2 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^3 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^1 & -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^2 & -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^3 & -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^1 & -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^2 & -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^3 & -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^1 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^2 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dA^3 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^1 dx^0 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^2 dx^0 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^3 dx^0 \wedge dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, segue de (4.1) que essa matriz representa $\mathbf{R}^{\tilde{\nabla}}$ no referencial $\{\mathbf{T}_{i,j} : j = -1, 0, \dots, 3\}$, onde $\mathbf{T}_{i,j}$ é representado na base $\varepsilon = \{\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_3\}$ pela matriz com todas as entradas nulas, exceto aquela de linha i e coluna j , que assume valor 1. Em

outras palavras,

$$\left[\mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} \right]_{\varepsilon} = \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx^0 \wedge dA^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

ou ainda

$$\mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} = (dx^0 \wedge dA^1) \otimes \mathbf{T}_{1,0} + (dx^0 \wedge dA^2) \otimes \mathbf{T}_{2,0} + (dx^0 \wedge dA^3) \otimes \mathbf{T}_{3,0}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} * \mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} &= *(dx^0 \wedge dA^1) \otimes \mathbf{T}_{1,0} + *(dx^0 \wedge dA^2) \otimes \mathbf{T}_{2,0} + *(dx^0 \wedge dA^3) \otimes \mathbf{T}_{3,0} \\ &= \sum_{i=1}^3 *(dx^0 \wedge dA^i) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 *(dx^0 \wedge \frac{\partial A^i}{\partial x_j} dx^j) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial x_j} *(dx^0 \wedge dx^j) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial A^i}{\partial x_1} dx^2 \wedge dx^3 - \frac{\partial A^i}{\partial x_2} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial A^i}{\partial x_3} dx^1 \wedge dx^2 \right) \otimes \mathbf{T}_{i,0}. \end{aligned}$$

uma vez que

$$*(dx^0 \wedge dx^j) = (-1)^{j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Passaremos agora a usar a Proposição 4.6 e os comentários que a seguem a fim de calcular $d_{\widetilde{\nabla}^{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{\nabla}^{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} &= \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_j^2} dx^j \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &\quad + (-1)^2 \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \wedge \widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0}) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_j^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \wedge \widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0}). \end{aligned}$$

Passemos agora ao cálculo de $\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0})$. De fato, admitindo um certo abuso de linguagem, obtemos

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0})(\mathbf{e}_j) &= \widetilde{\nabla}(\mathbf{T}_{i,0}(\mathbf{e}_j)) - \mathbf{T}_{i,0}(\widetilde{\nabla}(\mathbf{e}_j)) \\
 &= \widetilde{\nabla}(\delta_{i,j}\mathbf{e}_i) - \mathbf{T}_{i,0}\left(\sum_{m=-1}^3 \widetilde{\omega}_j^m \otimes \mathbf{e}_m\right) \\
 &= \delta_{i,j}\widetilde{\nabla}(\mathbf{e}_i) - \sum_{m=-1}^3 \widetilde{\omega}_j^m \otimes \mathbf{T}_{i,0}(\mathbf{e}_m) \\
 &= \delta_{i,j} \sum_{\ell=-1}^3 \widetilde{\omega}_i^\ell \otimes \mathbf{e}_\ell - \sum_{m=-1}^3 \widetilde{\omega}_j^m \otimes \delta_{i,m}\mathbf{e}_i \\
 &= -\widetilde{\omega}_j^i \otimes \mathbf{e}_i + \delta_{i,j} \sum_{\ell=-1}^3 \widetilde{\omega}_i^\ell \otimes \mathbf{e}_\ell.
 \end{aligned}$$

Sendo $i = 1, 2, 3$, então segue de (5.6) que $\widetilde{\omega}_i^\ell = 0$. Dessa forma,

$$\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0})(\mathbf{e}_j) = -\widetilde{\omega}_j^i \otimes \mathbf{e}_i + \delta_{i,j} \sum_{\ell=0}^3 \widetilde{\omega}_i^\ell \otimes \mathbf{e}_\ell = -\widetilde{\omega}_j^i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned}
 \left[\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{1,0})\right]_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\omega}_{-1}^1 & -\widetilde{\omega}_0^1 & -\widetilde{\omega}_1^1 & -\widetilde{\omega}_2^1 & -\widetilde{\omega}_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -dx^1 & A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \left[\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{2,0})\right]_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\omega}_{-1}^2 & -\widetilde{\omega}_0^2 & -\widetilde{\omega}_1^2 & -\widetilde{\omega}_2^2 & -\widetilde{\omega}_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -dx^2 & A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \left[\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{3,0})\right]_\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\omega}_{-1}^3 & -\widetilde{\omega}_0^3 & -\widetilde{\omega}_1^3 & -\widetilde{\omega}_2^3 & -\widetilde{\omega}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -dx^3 & A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\widetilde{\nabla}^{\text{End}}(\mathbf{T}_{i,0}) = -dx^i \otimes \mathbf{T}_{i,-1} + A^i dx^0 \otimes \mathbf{T}_{i,0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned}
 d_{\widetilde{\nabla}_{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} &= \sum_{i=1}^3 \Delta A^i (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \wedge (-dx^i \otimes \mathbf{T}_{i,-1} + A^i dx^0 \otimes \mathbf{T}_{i,0}) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \Delta A^i (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} A^i dx^0 \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^3) \wedge (-dx^i \otimes \mathbf{T}_{i,-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \Delta A^i (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} A^i dx^0 \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &- \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_i} dx^i \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,-1}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 d_{\widetilde{\nabla}_{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\widetilde{\nabla}} &= \sum_{i=1}^3 \Delta A^i (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} A^i dx^0 \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &- \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot A (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,-1}.
 \end{aligned}$$

Segue da Proposição 4.6 que

$$\begin{aligned}
 * (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= (-1)^{(1,2,3,0)} dx^0 = (-1)^3 (-1)^{(0,1,2,3)} dx^0 = -dx^0 \\
 * (dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= (-1)^{(0,2,3,1)} dx^1 = (-1)^2 (-1)^{(0,1,2,3)} dx^1 = dx^1 \\
 * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3) &= (-1)^{(0,1,3,2)} dx^2 = (-1)^1 (-1)^{(0,1,2,3)} dx^2 = -dx^2 \\
 * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) &= (-1)^{(0,1,2,3)} dx^3 = dx^3.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$* (-1)^{j-1} (dx^0 \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3)) = dx^j.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 *d_{\tilde{\nabla}^{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}} &= \sum_{i=1}^3 \Delta A^i * (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &+ \sum_{i,j=1}^3 (-1)^{j-1} \frac{\partial A^i}{\partial x_j} A^i * (dx^0 \wedge (dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^3)) \otimes \mathbf{T}_{i,0} \\
 &- \sum_{i=1}^3 \nabla \cdot A * (dx^{-1} \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \otimes \mathbf{T}_{i,-1}. \\
 &= \left(\sum_{i=1}^3 \Delta A^i dx^0 + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial x_j} A^i dx^j \right) \otimes \mathbf{T}_{i,0} - \sum_{i=1}^3 \text{div}(A) dx^0 \otimes \mathbf{T}_{i,-1}.
 \end{aligned}$$

Sendo U a função potencial do campo $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A^i \mathbf{e}_i$, então temos $A_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
 d_{\nabla^{\text{End}}}^* \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}} &= (-1)^{0+4 \cdot 1+1} * d_{\tilde{\nabla}^{\text{End}}} * \mathbf{R}^{\tilde{\nabla}} \\
 &= \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_j \partial_j \partial_i U dx^0 + \sum_{i,j=1}^3 (\partial_j \partial_i U \cdot \partial_i U) dx^j \right) \otimes \mathbf{T}_{i,0} - \sum_{i=1}^3 \Delta U dx^0 \otimes \mathbf{T}_{i,-1}.
 \end{aligned}$$

Logo, a conexão de Cartan introduzida no Exemplo 3.9 não é uma conexão de Yang-Mills.

Encerramos esta seção com alguns comentários a respeito da noção de Calibre de Coulomb ([18, p. 39], [28]). No contexto geral de teoria de calibre, é por vezes importante encontrar um calibre local, i.e., um sistema local de referenciais para o fibrado E , de tal forma que a matriz de conexão $\omega = (\omega_j^i)$ de uma conexão (linear) com respeito a esse referencial satisfaça a equação

$$d * \omega = 0.$$

Agora recorde da Proposição 2.4 que, de acordo com o princípio de Galileu, a força em um sistema mecânico não varia com o tempo (cf. [4, p. 9]). Assim, se ω é a matriz de conexão de Cartan no fibrado estendido (5.6), vista no exemplo anterior, então

$$\begin{aligned}
 d * \omega_0^i &= -d * A^i dx^0 \\
 &= d \left(A^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right) \\
 &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial x_j} dx^j \wedge (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Logo as coordenadas canônicas do \mathbb{R}^4 geram um sistema de referenciais nas quais a conexão de Cartan está no *Calibre de Coulomb* (cf. [17, p. 55]).

6 Conexões ASD e mecânica newtoniana

Neste capítulo iremos tratar das conexões ASD com torção nula geometrizando o sistema mecânico newtoniano.

Recorde que o Teorema 5.5 nos garante que a estratégia de estudar o deslocamento de Cartan em uma conexão no fibrado estendido é uma abordagem adequada ao estudo da mecânica newtoniana. Embora Élie Cartan tenha encontrado uma conexão que geometrize o sistema físico da mecânica newtoniana, ela não minimiza o funcional de Yang-Mills. Como no caso de um sistema físico mais complexo não se sabe exatamente quais são as leis do movimento e não se espera que uma solução explícita seja tão fácil de alcançar, é razoável que busquemos uma solução que minimize o funcional de Yang-Mills no caso mais simples. Tal abordagem oferece um roteiro seguro para casos mais gerais que o sistema mecânico newtoniano.

Neste capítulo vamos obter as equações que caracterizam uma conexão ASD que geometriza o sistema mecânico newtoniano, que se caracterizam por pontos críticos do funcional de Yang-Mills.

6.1 Conexões ASD com torção nula

De início iremos verificar quando uma forma $\omega \in \mathcal{A}^2(TM^*, \mathbb{R}^4)$ é antiautodual. Recorde que $\mathcal{C}^{2,4} = \{I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}_+ : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$.

Proposição 6.1. *Seja $\omega = \sum_{(i+1, j+1) \in \mathcal{C}^{2,4}} a_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \mathcal{A}^2(TM^*, \mathbb{R}^4)$, então ω é antiautodual se, e somente se,*

$$\begin{cases} a_{0,1} = -a_{2,3} \\ a_{0,2} = a_{1,3} \\ a_{0,3} = -a_{1,2} \end{cases}$$

Demonstração. Sendo

$$\omega = a_{0,1} dx^0 \wedge dx^1 + a_{0,2} dx^0 \wedge dx^2 + a_{0,3} dx^0 \wedge dx^3 + a_{1,2} dx^1 \wedge dx^2 + a_{1,3} dx^1 \wedge dx^3 + a_{2,3} dx^2 \wedge dx^3,$$

então temos,

$$*\omega = a_{0,1} dx^2 \wedge dx^3 - a_{0,2} dx^1 \wedge dx^3 + a_{0,3} dx^1 \wedge dx^2 + a_{1,2} dx^0 \wedge dx^3 - a_{1,3} dx^0 \wedge dx^2 + a_{2,3} dx^0 \wedge dx^1$$

Uma vez que $*\omega = -\omega$, para que ω seja antiautodual, concluímos então que

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= -a_{2,3} \\ a_{0,2} &= a_{1,3} \\ a_{0,3} &= -a_{1,2} \end{aligned}$$

□

Com base na proposição anterior, podemos verificar quando uma conexão afim é ASD.

Proposição 6.2. *Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão estendida com torção nula e forma de conexão no fibrado estendido dada por*

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & \omega \end{pmatrix},$$

onde $\theta = (\theta^i)$, $\theta^i = dx^i + \vartheta^i$ e $\omega = (\omega_j^i)$, $\omega_j^i = \sum_{k=0}^3 \alpha_{j,k}^i dx^k$. Então a sua forma de curvatura $\widetilde{\Omega}$ é ASD se, e somente se,

$$\begin{aligned} (\partial_0 \alpha_{j,1}^i - \partial_1 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \alpha_{j,1}^s - \alpha_{s,1}^i \alpha_{j,0}^s) &= -(\partial_2 \alpha_{j,3}^i - \partial_3 \alpha_{j,2}^i) - \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,2}^i \alpha_{j,3}^s - \alpha_{s,3}^i \alpha_{j,2}^s) \\ (\partial_0 \alpha_{j,2}^i - \partial_2 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \alpha_{j,2}^s - \alpha_{s,2}^i \alpha_{j,0}^s) &= (\partial_1 \alpha_{j,3}^i - \partial_3 \alpha_{j,1}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,1}^i \alpha_{j,3}^s - \alpha_{s,3}^i \alpha_{j,1}^s) \\ (\partial_0 \alpha_{j,3}^i - \partial_3 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \alpha_{j,3}^s - \alpha_{s,3}^i \alpha_{j,0}^s) &= -(\partial_1 \alpha_{j,2}^i - \partial_2 \alpha_{j,1}^i) - \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,1}^i \alpha_{j,2}^s - \alpha_{s,2}^i \alpha_{j,1}^s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Demonstração. Observe que a matriz de conexão de $\widetilde{\nabla}$ é dada por

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^0 & \omega_0^0 & \omega_1^0 & \omega_2^0 & \omega_3^0 \\ \theta^1 & \omega_0^1 & \omega_1^1 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ \theta^2 & \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ \theta^3 & \omega_0^3 & \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 \end{pmatrix},$$

de onde segue que sua curvatura satisfaz a relação $\widetilde{\Omega} = d\widetilde{\omega} + \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}$, i.e.,

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\theta & d\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d\theta + \omega \wedge \theta & d\omega + \omega \wedge \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Theta & \Omega \end{pmatrix}.$$

Agora recorde que $\widetilde{\Omega}$ é ASD se, e somente se, $*\Theta = -\Theta$ e $*\Omega = -\Omega$. Como a primeira das duas condições segue imediatamente do fato da conexão ser livre de torção, basta verificarmos sob que condições esta última condição é satisfeita. De fato, sendo $\omega_j^i = \sum_{k=0}^3 \alpha_{j,k}^i \cdot dx^k$, onde $\alpha_{j,k}^i$ são funções suaves, então temos

$$d\omega_j^i = \sum_{l,k=0}^3 \partial_l \alpha_{j,k}^i dx^l \wedge dx^k = \sum_{l < k} (\partial_l \alpha_{j,k}^i - \partial_k \alpha_{j,l}^i) dx^l \wedge dx^k$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^3 \omega_s^i \wedge \omega_j^s &= \sum_{s=0}^3 \left[\left(\sum_{l=0}^3 \alpha_{s,l}^i \wedge dx^l \right) \wedge \left(\sum_{k=0}^3 \alpha_{j,k}^s \wedge dx^k \right) \right] \\ &= \sum_{l,k=0}^3 \left(\sum_{s=0}^3 \alpha_{s,l}^i \alpha_{j,k}^s \right) dx^l \wedge dx^k \\ &= \sum_{l < k} \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,l}^i \alpha_{j,k}^s - \alpha_{s,k}^i \alpha_{j,l}^s) dx^l \wedge dx^k \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever Ω_{ij} como

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= d\omega_j^i + \sum_{s=0}^3 \omega_s^i \wedge \omega_j^s \\ &= \sum_{l < k} \left[(\partial_l \alpha_{j,k}^i - \partial_k \alpha_{j,l}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,l}^i \alpha_{j,k}^s - \alpha_{s,k}^i \alpha_{j,l}^s) \right] dx^l \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a Proposição 6.1, obtemos as equações (6.1). \square

6.2 Conexões ASD livre de torção e e mecânica newtoniana

Nesta seção iremos estudar as conexões ASD com torção nula que geometrizam o sistema mecânico newtoniano.

Naturalmente, a ideia agora é escolher as funções $\alpha_{j,k}^i$ de tal forma a geometrizarmos o sistema mecânico newtoniano. Recorde do Exemplo 3.9 que ao considerarmos um sistema de referenciais $\{e_i\}$ dado por um referencial ortonormal fixo em \mathbb{R}^4 (base canônica) e nele tomarmos a conexão afim galileana $d = (dx^i, \omega_j^i)$, onde

$$\omega = (\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^1 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^2 dx^0 & 0 & 0 & 0 \\ -A^3 dx^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então segue da Proposição 3.11 que $d' = (dx^i + \eta^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ é uma conexão afim que geometriza o sistema mecânico newtoniano se, e somente se,

$$\sum_{i,\ell=0}^3 v^i v^\ell \varphi_{i,\ell}^j = 0,$$

onde

$$\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad P^0 = \sum_{\ell=0}^3 (-1)^\ell \rho v^\ell \widehat{dx}^\ell, \quad P^i = v^i P^0 + \sum_{\ell=1}^3 (-1)^\ell p_{i\ell} \widehat{dx}^\ell.$$

Consideremos como primeira abordagem o caso da conexão afim da forma $d' = (dx^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$. Assim, a matriz de conexão no fibrado tangente estendido assume a forma

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & \eta_0^0 & \eta_1^0 & \eta_2^0 & \eta_3^0 \\ dx^1 & -A^1 dx^0 + \eta_0^1 & \eta_1^1 & \eta_2^1 & \eta_3^1 \\ dx^2 & -A^2 dx^0 + \eta_0^2 & \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 \\ dx^3 & -A^3 dx^0 + \eta_0^3 & \eta_1^3 & \eta_2^3 & \eta_3^3 \end{pmatrix},$$

onde

$$\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k.$$

Utilizando as equações (6.1), obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{j,1}^i - \partial_1 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \varphi_{j,1}^s - \varphi_{s,1}^i \alpha_{j,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \varphi_{j,2}^i) + \sum_{s=0}^3 (\varphi_{s,2}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{j,2}^s) \right], \\ (\partial_0 \varphi_{j,2}^i - \partial_2 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \varphi_{j,2}^s - \varphi_{s,2}^i \alpha_{j,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \varphi_{j,1}^i) + \sum_{s=0}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{j,1}^s) \right], \\ (\partial_0 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \alpha_{j,0}^i) + \sum_{s=0}^3 (\alpha_{s,0}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \alpha_{j,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{j,2}^i - \partial_2 \varphi_{j,1}^i) + \sum_{s=0}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{j,2}^s - \varphi_{s,2}^i \varphi_{j,1}^s) \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde $\alpha_{0,0}^i = \varphi_{0,0}^i - A^i$ para todo $i = 1, 2, 3$ e $\alpha_{j,k}^i = \varphi_{j,k}^i$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Mais precisamente, como $\varphi_{j,k}^0 = 0$, então temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{j,1}^i - \partial_1 \varphi_{j,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{j,1}^s - \varphi_{s,1}^i \varphi_{j,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \varphi_{j,2}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{j,2}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{j,2}^i - \partial_2 \varphi_{j,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{j,2}^s - \varphi_{s,2}^i \varphi_{j,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \varphi_{j,1}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{j,1}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{j,3}^i - \partial_3 \varphi_{j,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{j,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{j,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{j,2}^i - \partial_2 \varphi_{j,1}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{j,2}^s - \varphi_{s,2}^i \varphi_{j,1}^s) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

para todo $j \neq 0$. Por outro lado, se $j = 0$, temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{0,1}^i - \partial_1 \varphi_{0,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{0,1}^s - \varphi_{s,1}^i \varphi_{0,0}^s) &= - (\partial_2 \varphi_{0,3}^i - \partial_3 \varphi_{0,2}^i) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^i \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{0,2}^s) - \partial_1 A^i - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,1}^i A^s \\ (\partial_0 \varphi_{0,2}^i - \partial_2 \varphi_{0,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^i \varphi_{0,0}^s) &= (\partial_1 \varphi_{0,3}^i - \partial_3 \varphi_{0,1}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{0,1}^s) - \partial_2 A^i - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,2}^i A^s \\ (\partial_0 \varphi_{0,3}^i - \partial_3 \varphi_{0,0}^i) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^i \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^i \varphi_{0,0}^s) &= - (\partial_1 \varphi_{0,2}^i - \partial_2 \varphi_{0,1}^i) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^i \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^i \varphi_{0,1}^s) - \partial_3 A^i - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,3}^i A^s \end{aligned}$$

6.3 Conexões ASD de Galileu-Cartan

Tendo por base a abordagem original de Élie Cartan, nesta seção iremos estudar as conexões ASD que satisfazem as condições de antissimetria de Galileu-Cartan (3.6). Essencialmente, iremos estudar a influência das antissimetrias sobre as equações encontradas na seção anterior. Inicialmente apresentaremos o resultado para o caso geral; ao final, estudaremos o caso particular de uma dimensão espacial.

Recorde que uma conexão afim que satisfaz as equações (3.6) é da forma

$$d' = (dx^i, \omega_j^i + \eta_j^i),$$

onde

$$\omega_0^i = -A_i dx^0 \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

$$\omega_j^0 = 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, 3,$$

$$\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad \varphi_{j,k}^i = -\varphi_{k,j}^i \quad \forall j = 0, 1, 2, 3, .$$

Em particular, ela geometriza o sistema mecânico newtoniano. Dessa forma, sua matriz de conexão é da forma

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \omega_0^1 + \eta_0^1 & \eta_1^1 & \eta_2^1 & \eta_3^1 \\ \theta^2 & \omega_0^2 + \eta_0^2 & \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 \\ \theta^3 & \omega_0^3 + \eta_0^3 & \eta_1^3 & \eta_2^3 & \eta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \varpi_0^1 & & & \\ \theta^2 & \varpi_0^2 & & \eta' & \\ \theta^3 & \varpi_0^3 & & & \end{pmatrix}.$$

Vamos agora estudar as equações (6.2) para esta matriz de conexão. Para $j = 0$ e $i = 1$ temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{0,1}^1 - \partial_1 \varphi_{0,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_2 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,2}^1) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,2}^s) - \partial_1 A^1 - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,1}^1 A^s, \\ (\partial_0 \varphi_{0,2}^1 - \partial_2 \varphi_{0,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,0}^s) &= (\partial_1 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,1}^s) - \partial_2 A^1 - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,2}^1 A^s, \\ (\partial_0 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_1 \varphi_{0,2}^1 - \partial_2 \varphi_{0,1}^1) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,1}^s) - \partial_3 A^1 - \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,3}^1 A^s. \end{aligned}$$

Aplicando as antissimetrias, obtemos

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_{0,1}^1 + \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,1}^s &= -(\partial_2 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,2}^1) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,2}^s) - \partial_1 A^1 - \varphi_{2,1}^1 A^2 - \varphi_{3,1}^1 A^3, \\ \partial_0 \varphi_{0,2}^1 + \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,2}^s &= \partial_1 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,1}^1 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,1}^s) - \partial_2 A^1 - \varphi_{1,2}^1 A^1 - \varphi_{3,2}^1 A^3, \\ \partial_0 \varphi_{0,3}^1 + \sum_{s=1}^3 \varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,3}^s &= -(\partial_1 \varphi_{0,2}^1 - \partial_2 \varphi_{0,1}^1) - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,1}^s) - \partial_3 A^1 - \varphi_{1,3}^1 A^1 - \varphi_{2,3}^1 A^2, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_{0,1}^1 - \partial_1 A^1 + \partial_2 \varphi_{0,3}^1 - \partial_3 \varphi_{0,2}^1 &= -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,1}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,2}^s) - \varphi_{2,1}^1 A^2 - \varphi_{3,1}^1 A^3, \\ \partial_0 \varphi_{0,2}^1 - \partial_1 \varphi_{0,3}^1 + \partial_2 A^1 + \partial_3 \varphi_{0,1}^1 &= \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,2}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,2}^1 A^1 - \varphi_{3,2}^1 A^3, \\ \partial_0 \varphi_{0,3}^1 + \partial_1 \varphi_{0,2}^1 - \partial_2 \varphi_{0,1}^1 + \partial_3 A^1 &= -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{0,3}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,3}^1 A^1 - \varphi_{2,3}^1 A^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Para o caso $j = 0$ e $i = 2$, temos

$$\begin{aligned}(\partial_0\varphi_{0,1}^2 - \partial_1\varphi_{0,0}^2) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,1}^s - \varphi_{s,1}^2\varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_2\varphi_{0,3}^2 - \partial_3\varphi_{0,2}^2) - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,2}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,2}^s) - \partial_1A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,1}^2A^s, \\(\partial_0\varphi_{0,2}^2 - \partial_2\varphi_{0,0}^2) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^2\varphi_{0,0}^s) &= (\partial_1\varphi_{0,3}^2 - \partial_3\varphi_{0,1}^2) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,1}^s) - \partial_2A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,2}^2A^s, \\(\partial_0\varphi_{0,3}^2 - \partial_3\varphi_{0,0}^2) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_1\varphi_{0,2}^2 - \partial_2\varphi_{0,1}^2) - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^2\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^2\varphi_{0,1}^s) - \partial_3A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,3}^2A^s.\end{aligned}$$

Aplicando as antissimetrias, obtemos

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1}^2 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,1}^s) &= -\partial_2\varphi_{0,3}^2 + \partial_3\varphi_{0,2}^2 - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,2}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,2}^s) - \partial_1A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,1}^2A^s, \\ \partial_0\varphi_{0,2}^2 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,2}^s) &= \partial_1\varphi_{0,3}^2 - \partial_3\varphi_{0,1}^2 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,1}^s) - \partial_2A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,2}^2A^s, \\ \partial_0\varphi_{0,3}^2 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,3}^s) &= -\partial_1\varphi_{0,2}^2 + \partial_2\varphi_{0,1}^2 - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^2\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^2\varphi_{0,1}^s) - \partial_3A^2 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,3}^2A^s.\end{aligned}$$

Reorganizando as equações, chegamos às equações

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1}^2 + \partial_1A^2 + \partial_2\varphi_{0,3}^2 - \partial_3\varphi_{0,2}^2 &= -\sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,1}^s + \varphi_{s,2}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,2}^s) - \varphi_{2,1}^2A^2 - \varphi_{3,1}^2A^3, \\ \partial_0\varphi_{0,2}^2 - \partial_1\varphi_{0,3}^2 + \partial_2A^2 + \partial_3\varphi_{0,1}^2 &= \sum_{s=1}^3(-\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,2}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,2}^2A^1 - \varphi_{3,2}^2A^3, \\ \partial_0\varphi_{0,3}^2 + \partial_1\varphi_{0,2}^2 - \partial_2\varphi_{0,1}^2 - \partial_3A^2 &= -\sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,3}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^2\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,3}^2A^1 - \varphi_{2,3}^2A^2.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Para o caso $j = 0$ e $i = 3$, temos

$$\begin{aligned}(\partial_0\varphi_{0,1}^3 - \partial_1\varphi_{0,0}^3) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,1}^s - \varphi_{s,1}^3\varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_2\varphi_{0,3}^3 - \partial_3\varphi_{0,2}^3) - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,2}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,2}^s) - \partial_1A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,1}^3A^s \\ (\partial_0\varphi_{0,2}^3 - \partial_2\varphi_{0,0}^3) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,0}^s) &= (\partial_1\varphi_{0,3}^3 - \partial_3\varphi_{0,1}^3) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,1}^s) - \partial_2A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,2}^3A^s \\ (\partial_0\varphi_{0,3}^3 - \partial_3\varphi_{0,0}^3) + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,0}^s) &= -(\partial_1\varphi_{0,2}^3 - \partial_2\varphi_{0,1}^3) - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^3\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,1}^s) - \partial_3A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,3}^3A^s\end{aligned}$$

Aplicando as antissimetrias, temos

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1}^3 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,1}^s) &= -\partial_2\varphi_{0,3}^3 + \partial_3\varphi_{0,2}^3 - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,2}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,2}^s) - \partial_1A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,1}^3A^s \\ \partial_0\varphi_{0,2}^3 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,2}^s) &= \partial_1\varphi_{0,3}^3 - \partial_3\varphi_{0,1}^3 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,1}^s) - \partial_2A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,2}^3A^s \\ \partial_0\varphi_{0,3}^3 + \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,3}^s) &= -\partial_1\varphi_{0,2}^3 + \partial_2\varphi_{0,1}^3 - \sum_{s=1}^3(\varphi_{s,1}^3\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,1}^s) - \partial_3A^3 - \sum_{s=1}^3\varphi_{s,3}^3A^s\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1}^3 + \partial_1A^3 + \partial_2\varphi_{0,3}^3 - \partial_3\varphi_{0,2}^3 &= -\sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,1}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,2}^s) - \varphi_{2,1}^3A^2 - \varphi_{3,1}^3A^3 \\ \partial_0\varphi_{0,2}^3 - \partial_1\varphi_{0,3}^3 + \partial_2A^3 + \partial_3\varphi_{0,1}^3 &= \sum_{s=1}^3(-\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,2}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,2}^3A^1 - \varphi_{3,2}^3A^3 \\ \partial_0\varphi_{0,3}^3 + \partial_1\varphi_{0,2}^3 - \partial_2\varphi_{0,1}^3 + \partial_3A^3 &= -\sum_{s=1}^3(\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,3}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,3}^3A^1 - \varphi_{2,3}^3A^2\end{aligned}\tag{6.6}$$

Vamos agora aos casos em que $j \neq 0$. Analisando $i = j$, para $i = 1$ temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{1,1}^1 - \partial_1 \varphi_{1,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,2}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,2}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{1,2}^1 - \partial_2 \varphi_{1,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,1}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{1,2}^1 - \partial_2 \varphi_{1,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,1}^s) \right] \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} -\partial_1 \varphi_{1,0}^1 + \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,2}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,2}^s) \right] \\ \partial_0 \varphi_{1,2}^1 - \partial_2 \varphi_{1,0}^1 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,0}^s) &= \partial_1 \varphi_{1,3}^1 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,3}^s) \\ \partial_0 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,0}^1 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{1,2}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,2}^s) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, chegamos em

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_1 \varphi_{1,0}^1 + \partial_2 \varphi_{1,3}^1 - \partial_3 \varphi_{1,2}^1 = - \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,2}^s) \\ \partial_0 \varphi_{1,2}^1 - \partial_1 \varphi_{1,3}^1 - \partial_2 \varphi_{1,0}^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,2}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,3}^s) \\ \partial_0 \varphi_{1,3}^1 - \partial_1 \varphi_{1,2}^1 - \partial_3 \varphi_{1,0}^1 = - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{1,2}^s). \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Para $i = j = 2$, temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{2,1}^2 - \partial_1 \varphi_{2,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{2,3}^2 - \partial_3 \varphi_{2,2}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,2}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{2,2}^2 - \partial_2 \varphi_{2,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{2,3}^2 - \partial_3 \varphi_{2,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,1}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{2,3}^2 - \partial_3 \varphi_{2,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{2,2}^2 - \partial_2 \varphi_{2,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,1}^s) \right] \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \partial_0 \varphi_{2,1}^2 - \partial_1 \varphi_{2,0}^2 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,0}^s) &= - \left[\partial_2 \varphi_{2,3}^2 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,3}^s) \right] \\ -\partial_2 \varphi_{2,0}^2 + \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,0}^s) &= \partial_1 \varphi_{2,3}^2 - \partial_3 \varphi_{2,1}^2 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,1}^s) \\ \partial_0 \varphi_{2,3}^2 - \partial_3 \varphi_{2,0}^2 + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,0}^s) &= \partial_2 \varphi_{2,1}^2 - \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,1}^s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 \varphi_{2,1}^2 - \partial_1 \varphi_{2,0}^2 + \partial_2 \varphi_{2,3}^2 = \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,3}^s) \\ -\partial_1 \varphi_{2,3}^2 - \partial_2 \varphi_{2,0}^2 + \partial_3 \varphi_{2,1}^2 = \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,1}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,1}^s) \\ \partial_0 \varphi_{2,3}^2 - \partial_2 \varphi_{2,1}^2 - \partial_3 \varphi_{2,0}^2 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{2,1}^s) \end{array} \right. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Caso $i = j = 3$, temos

$$\begin{aligned} & (\partial_0 \varphi_{3,1}^3 - \partial_1 \varphi_{3,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^3 \varphi_{3,0}^s) = - \left[(\partial_2 \varphi_{3,3}^3 - \partial_3 \varphi_{3,2}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^3 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,2}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{3,2}^3 - \partial_2 \varphi_{3,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^3 \varphi_{3,0}^s) = \left[(\partial_1 \varphi_{3,3}^3 - \partial_3 \varphi_{3,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,1}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{3,3}^3 - \partial_3 \varphi_{3,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,0}^s) = - \left[(\partial_1 \varphi_{3,2}^3 - \partial_2 \varphi_{3,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^3 \varphi_{3,1}^s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 \varphi_{3,1}^3 - \partial_1 \varphi_{3,0}^3 + \partial_3 \varphi_{3,2}^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^3 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,2}^s) \\ \partial_0 \varphi_{3,2}^3 - \partial_2 \varphi_{3,0}^3 + \partial_3 \varphi_{3,1}^3 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^3 \varphi_{3,2}^s + \varphi_{s,2}^3 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,1}^s) \\ \partial_1 \varphi_{3,2}^3 - \partial_2 \varphi_{3,1}^3 - \partial_3 \varphi_{3,0}^3 = -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,3}^3 \varphi_{3,0}^s + \varphi_{s,1}^3 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^3 \varphi_{3,1}^s) \end{array} \right. \quad (6.9) \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (1, 2)$, temos

$$\begin{aligned} & (\partial_0 \varphi_{2,1}^1 - \partial_1 \varphi_{2,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{2,0}^s) = - \left[(\partial_2 \varphi_{2,3}^1 - \partial_3 \varphi_{2,2}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,2}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{2,2}^1 - \partial_2 \varphi_{2,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,0}^s) = \left[(\partial_1 \varphi_{2,3}^1 - \partial_3 \varphi_{2,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,1}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{2,3}^1 - \partial_3 \varphi_{2,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,0}^s) = - \left[(\partial_1 \varphi_{2,2}^1 - \partial_2 \varphi_{2,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,1}^s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 \varphi_{2,1}^1 - \partial_1 \varphi_{2,0}^1 + \partial_2 \varphi_{2,3}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,3}^s) \\ -\partial_1 \varphi_{2,3}^1 - \partial_2 \varphi_{2,0}^1 + \partial_3 \varphi_{2,1}^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,1}^s) \\ \partial_0 \varphi_{2,3}^1 - \partial_2 \varphi_{2,1}^1 - \partial_3 \varphi_{2,0}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,1}^s) \end{array} \right. \quad (6.10) \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (1, 3)$, temos

$$\begin{aligned} & (\partial_0 \varphi_{3,1}^1 - \partial_1 \varphi_{3,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{3,0}^s) = - \left[(\partial_2 \varphi_{3,3}^1 - \partial_3 \varphi_{3,2}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^1 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,2}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{3,2}^1 - \partial_2 \varphi_{3,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{3,0}^s) = \left[(\partial_1 \varphi_{3,3}^1 - \partial_3 \varphi_{3,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,1}^s) \right] \\ & (\partial_0 \varphi_{3,3}^1 - \partial_3 \varphi_{3,0}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,0}^s) = - \left[(\partial_1 \varphi_{3,2}^1 - \partial_2 \varphi_{3,1}^1) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^1 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{3,1}^s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 \varphi_{3,1}^1 - \partial_1 \varphi_{3,0}^1 - \partial_3 \varphi_{3,2}^1 = - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^1 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,2}^s) \\ \partial_0 \varphi_{3,2}^1 - \partial_2 \varphi_{3,0}^1 + \partial_3 \varphi_{3,1}^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^1 \varphi_{3,2}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,1}^s) \\ \partial_1 \varphi_{3,2}^1 - \partial_2 \varphi_{3,1}^1 - \partial_3 \varphi_{3,0}^1 = - \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,3}^1 \varphi_{3,0}^s + \varphi_{s,1}^1 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{3,1}^s) \end{array} \right. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (2, 3)$, temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{3,1}^2 - \partial_1 \varphi_{3,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{3,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{3,3}^2 - \partial_3 \varphi_{3,2}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^2 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,2}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{3,2}^2 - \partial_2 \varphi_{3,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{3,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{3,3}^2 - \partial_3 \varphi_{3,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,1}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{3,3}^2 - \partial_3 \varphi_{3,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{3,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{3,2}^2 - \partial_2 \varphi_{3,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{3,1}^s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \partial_0 \varphi_{3,1}^2 - \partial_1 \varphi_{3,0}^2 - \partial_3 \varphi_{3,2}^2 = - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,2}^s) \\ \partial_0 \varphi_{3,2}^2 - \partial_2 \varphi_{3,0}^2 + \partial_3 \varphi_{3,1}^2 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^2 \varphi_{3,2}^s + \varphi_{s,2}^2 \varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,1}^s) \\ -\partial_3 \varphi_{3,0}^2 + \partial_1 \varphi_{3,2}^2 - \partial_2 \varphi_{3,1}^2 = - \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,3}^2 \varphi_{3,0}^s + \varphi_{s,1}^2 \varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{3,1}^s) \end{array} \right. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (2, 1)$, temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{1,1}^2 - \partial_1 \varphi_{1,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{1,1}^s - \varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{1,3}^2 - \partial_3 \varphi_{1,2}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^2 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{1,2}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{1,2}^2 - \partial_2 \varphi_{1,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{1,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{1,3}^2 - \partial_3 \varphi_{1,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{1,1}^s) \right] \\ (\partial_0 \varphi_{1,3}^2 - \partial_3 \varphi_{1,0}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{1,2}^2 - \partial_2 \varphi_{1,1}^2) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^2 \varphi_{1,1}^s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} -\partial_1 \varphi_{1,0}^2 + \partial_2 \varphi_{1,3}^2 - \partial_3 \varphi_{1,2}^2 = - \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,2}^2 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{1,2}^s), \\ \partial_0 \varphi_{1,2}^2 - \partial_1 \varphi_{1,3}^2 - \partial_2 \varphi_{1,0}^2 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^2 \varphi_{1,2}^s + \varphi_{s,2}^2 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,3}^s), \\ \partial_0 \varphi_{1,3}^2 + \partial_1 \varphi_{1,2}^2 - \partial_3 \varphi_{1,0}^2 = - \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2 \varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^2 \varphi_{1,2}^s). \end{array} \right. \quad (6.13) \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (3, 1)$, temos

$$\begin{aligned} (\partial_0 \varphi_{1,1}^3 - \partial_1 \varphi_{1,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{1,1}^s - \varphi_{s,1}^3 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_2 \varphi_{1,3}^3 - \partial_3 \varphi_{1,2}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^3 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{1,2}^s) \right], \\ (\partial_0 \varphi_{1,2}^3 - \partial_2 \varphi_{1,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^3 \varphi_{1,0}^s) &= \left[(\partial_1 \varphi_{1,3}^3 - \partial_3 \varphi_{1,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{1,1}^s) \right], \\ (\partial_0 \varphi_{1,3}^3 - \partial_3 \varphi_{1,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3 \varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^3 \varphi_{1,0}^s) &= - \left[(\partial_1 \varphi_{1,2}^3 - \partial_2 \varphi_{1,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3 \varphi_{1,2}^s - \varphi_{s,2}^3 \varphi_{1,1}^s) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 -\partial_1\varphi_{1,0}^3 + \partial_2\varphi_{1,3}^3 - \partial_3\varphi_{1,2}^3 &= -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^3\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{1,2}^s), \\
 \partial_0\varphi_{1,2}^3 - \partial_1\varphi_{1,3}^3 - \partial_2\varphi_{1,0}^3 &= \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^3\varphi_{1,2}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{1,3}^s), \\
 \partial_0\varphi_{1,3}^3 + \partial_1\varphi_{1,2}^3 - \partial_3\varphi_{1,0}^3 &= -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{1,2}^s).
 \end{aligned} \right. \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

Caso $(i, j) = (3, 2)$, temos

$$\begin{aligned}
 (\partial_0\varphi_{2,1}^3 - \partial_1\varphi_{2,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^3\varphi_{2,0}^s) &= -\left[(\partial_2\varphi_{2,3}^3 - \partial_3\varphi_{2,2}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{2,2}^s) \right] \\
 (\partial_0\varphi_{2,2}^3 - \partial_2\varphi_{2,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,0}^s) &= \left[(\partial_1\varphi_{2,3}^3 - \partial_3\varphi_{2,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{2,1}^s) \right] \\
 (\partial_0\varphi_{2,3}^3 - \partial_3\varphi_{2,0}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{2,0}^s) &= -\left[(\partial_1\varphi_{2,2}^3 - \partial_2\varphi_{2,1}^3) + \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,1}^3\varphi_{2,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,1}^s) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 \partial_0\varphi_{2,1}^3 - \partial_1\varphi_{2,0}^3 + \partial_2\varphi_{2,3}^3 &= -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^3\varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,3}^s) \\
 -\partial_1\varphi_{2,3}^3 - \partial_2\varphi_{2,0}^3 + \partial_3\varphi_{2,1}^3 &= \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^3\varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{2,1}^s) \\
 \partial_0\varphi_{2,3}^3 - \partial_2\varphi_{2,1}^3 - \partial_3\varphi_{2,0}^3 &= -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^3\varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,1}^s)
 \end{aligned} \right. \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.3. *Seja $d' = (dx^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ uma conexão afim tal que $\omega_0^i = -A^i dx^0$ para todo $i = 1, 2, 3$, $\omega_j^0 = 0$ para todo $j = 0, 1, 2, 3$ e $\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k$. Então para que d' seja uma conexão ASD e de Galileu-Cartan é necessário que equações (6.4)–(6.15) sejam satisfeitas.*

Exemplo 6.4. *Vejam agora o que acontece com essas equações em um modelo com uma única dimensão espacial. É razoável propor a conexão da seguinte forma:*

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta^0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & -A^1 dx^0 + \eta_0^1 & \eta_1^1 \end{pmatrix}$$

onde,

$$\begin{cases} \eta_0^1 = \varphi_{0,0}^1 dx^0 + \varphi_{0,1}^1 dx^1 + \varphi_{0,2}^1 dx^2 + \varphi_{0,3}^1 dx^3 \\ \eta_1^1 = \varphi_{1,0}^1 dx^0 + \varphi_{1,1}^1 dx^1 + \varphi_{1,2}^1 dx^2 + \varphi_{1,3}^1 dx^3 \end{cases}$$

Primeiro iremos analisar o caso $j = 0$. Utilizando as equações (6.2):

$$\begin{aligned}
 (\partial_0\varphi_{0,1} - \partial_1(\varphi_{0,0} - A^1)) + \sum_{s=0}^1 (\alpha_{s,0}\varphi_{0,1} - \varphi_{s,1}(\varphi_{0,0} - A^1)) &= -(\partial_2\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,2}) - \sum_{s=0}^1 (\varphi_{s,2}\varphi_{0,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{0,2}) \\
 (\partial_0\varphi_{0,2} - \partial_2(\varphi_{0,0} - A^1)) + \sum_{s=0}^1 (\alpha_{s,0}\varphi_{0,2} - \varphi_{s,2}(\varphi_{0,0} - A^1)) &= (\partial_1\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,1}) + \sum_{s=0}^1 (\varphi_{s,1}\varphi_{0,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{0,1}) \\
 (\partial_0\varphi_{0,3} - \partial_3(\varphi_{0,0} - A^1)) + \sum_{s=0}^1 (\alpha_{s,0}\varphi_{0,3} - \varphi_{s,3}(\varphi_{0,0} - A^1)) &= -(\partial_1\varphi_{0,2} - \partial_2\varphi_{0,1}) - \sum_{s=0}^1 (\varphi_{s,1}\varphi_{0,2} - \varphi_{s,2}\varphi_{0,1})
 \end{aligned}$$

Recorde que as condições de geometrização são dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}^1 &= 0, & \text{se } j = k, \\ \varphi_{j,k}^1 + \varphi_{k,j}^1 &= 0, & \text{se } j \neq k.\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1} + \partial_1A^1 + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{0,1} + \varphi_{s,1}A^1) &= -(\partial_2\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,2}) - \sum_{s=0}^1(\varphi_{s,2}\varphi_{0,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{0,2}) \\ \partial_0\varphi_{0,2} + \partial_2A^1 + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{0,2} + \varphi_{s,2}A^1) &= (\partial_1\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,1}) + \sum_{s=0}^1(\varphi_{s,1}\varphi_{0,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{0,1}) \\ \partial_0\varphi_{0,3} + \partial_3A^1 + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{0,3} + \varphi_{s,3}A^1) &= -(\partial_1\varphi_{0,2} - \partial_2\varphi_{0,1}) - \sum_{s=0}^1(\varphi_{s,1}\varphi_{0,2} - \varphi_{s,2}\varphi_{0,1})\end{aligned}$$

$$\partial_0\varphi_{0,1} + \partial_1A^1 + (-A^1\varphi_{0,1} + \varphi_{0,1}A^1) + (\varphi_{1,0}\varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}A^1) = -(\partial_2\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,2}) - (\varphi_{0,2}\varphi_{0,3} - \varphi_{0,3}\varphi_{0,2}) - (\varphi_{1,2}\varphi_{0,3} - \varphi_{1,3}\varphi_{0,2})$$

$$\partial_0\varphi_{0,2} + \partial_2A^1 + (-A^1\varphi_{0,2} + \varphi_{0,2}A^1) + (\varphi_{1,0}\varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}A^1) = (\partial_1\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,1}) + (\varphi_{0,1}\varphi_{0,3} - \varphi_{0,3}\varphi_{0,1}) + (\varphi_{1,1}\varphi_{0,3} - \varphi_{1,3}\varphi_{0,1})$$

$$\partial_0\varphi_{0,3} + \partial_3A^1 + (-A^1\varphi_{0,3} + \varphi_{0,3}A^1) + (\varphi_{1,0}\varphi_{0,3} + \varphi_{1,3}A^1) = -(\partial_1\varphi_{0,2} - \partial_2\varphi_{0,1}) - (\varphi_{0,1}\varphi_{0,2} - \varphi_{0,2}\varphi_{0,1}) - (\varphi_{1,1}\varphi_{0,2} - \varphi_{1,2}\varphi_{0,1})$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\partial_0\varphi_{0,1} + \partial_1A^1 - (\varphi_{0,1})^2 &= -\partial_2\varphi_{0,3} + \partial_3\varphi_{0,2} - \varphi_{1,2}\varphi_{0,3} + \varphi_{1,3}\varphi_{0,2}, \\ \partial_0\varphi_{0,2} + \partial_2A^1 + \varphi_{1,0}\varphi_{0,2} + \varphi_{1,2}A^1 &= \partial_1\varphi_{0,3} - \partial_3\varphi_{0,1} - \varphi_{1,3}\varphi_{0,1}, \\ \partial_0\varphi_{0,3} + \partial_3A^1 + \varphi_{1,0}\varphi_{0,3} + \varphi_{1,3}A^1 &= -\partial_1\varphi_{0,2} + \partial_2\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}\varphi_{0,1}.\end{aligned}$$

Vamos supor que $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,3} = \varphi_{0,2} = \varphi_{0,3} = 0$

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{0,1} + \partial_1A^1 - (\varphi_{0,1})^2 = 0, \\ \partial_2A^1 = \partial_3\varphi_{0,1}, \\ \partial_3A^1 = \partial_2\varphi_{0,1}. \end{cases}$$

Natural supor que $\varphi_{0,1}$ e A^1 , não depende de x^3 . Portanto, só nos interessa a primeira equação

$$\partial_0\varphi_{0,1} = (\varphi_{0,1})^2 - \partial_1A^1.$$

Para $j = 1$ temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}(\partial_0\varphi_{1,1} - \partial_1\varphi_{1,0}) + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{1,1} - \varphi_{s,1}\varphi_{1,0}) &= -(\partial_2\varphi_{1,3} - \partial_3\varphi_{1,2}) - \sum_{s=0}^3(\varphi_{s,2}\varphi_{1,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{1,2}), \\ (\partial_0\varphi_{1,2} - \partial_2\varphi_{1,0}) + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{1,2} - \varphi_{s,2}\varphi_{1,0}) &= (\partial_1\varphi_{1,3} - \partial_3\varphi_{1,1}) + \sum_{s=0}^1(\varphi_{s,1}\varphi_{1,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{1,1}), \\ (\partial_0\varphi_{1,3} - \partial_3\varphi_{1,0}) + \sum_{s=0}^1(\alpha_{s,0}\varphi_{1,3} - \varphi_{s,3}\varphi_{1,0}) &= -(\partial_1\varphi_{1,2} - \partial_2\varphi_{1,1}) - \sum_{s=0}^1(\varphi_{s,1}\varphi_{1,2} - \varphi_{s,2}\varphi_{1,1}).\end{aligned}$$

Utilizando as mesmas suposições do caso anterior e as equações de simetria, obtemos as equações

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{1,0} + \sum_{s=0}^1(-\varphi_{s,1}\varphi_{1,0}) = 0 \\ -\partial_2\varphi_{1,0} = 0 \\ \partial_3\varphi_{1,0} = 0 \end{cases}.$$

Nos interessa a primeira delas que é

$$\partial_1 \varphi_{0,1} = -(\varphi_{0,1})^2 .$$

Com análise do caso $j = 0$ e $j = 1$, resta apenas duas equações, que são:

$$\begin{cases} \partial_0 \varphi_{0,1} = (\varphi_{0,1})^2 - \partial_1 A^1 \\ \partial_1 \varphi_{0,1} = -(\varphi_{0,1})^2 \end{cases} .$$

Trocando por uma notação mais apropriada, temos

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_t \varphi = \varphi^2 - \partial_x A \\ \partial_x \varphi = -\varphi^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \partial_t \varphi = \varphi^2 - \partial_x A \\ \varphi = \frac{1}{x-g(t)} \end{cases} \\ &\Downarrow \\ g'(t)(x-g(t))^{-2} &= \left(\frac{1}{x-g(t)} \right)^2 - \partial_x A \\ g'(t) &= 1 - \partial_x A \cdot (x-g(t))^2. \end{aligned}$$

Observe que $\partial_x A = 0$, pois $\partial_x A = \partial_x \partial_t \partial_t x = \partial_t \partial_t \partial_x x$, pelo teorema de Cauchy-Schwarz. Portanto, $g'(t) = 1$ e então chegamos à seguinte conclusão:

$$\varphi = \frac{1}{x - (t + c)} .$$

Note que temos uma solução local para a nossa conexão, visto que $x \neq (t + c)$.

6.4 Conexões ASD newtonianas de Galileu-Cartan

Nesta seção iremos estudar as conexões ASD que satisfazem as condições (físicas) de invariância de Galileu-Cartan e as condições de simetria devido à estrutura euclidiana do espaço, i.e., as conexões newtonianas (cf. §3.2.2). Começemos recordando que se d' é uma conexão newtoniana e de Galileu-Cartan, então é da forma

$$d' = (dx^i, \omega_j^i + \eta_j^i),$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_0^i &= -A^i dx^0 \quad \forall i = 1, 2, 3, \\ \omega_j^0 &= 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, 3, \\ \eta_j^i &= \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k, \quad \varphi_{j,k}^i = -\varphi_{k,j}^i \quad \forall j = 0, 1, 2, 3, \\ \eta_j^i &= -\eta_i^j \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Assim, sua matriz é da forma

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \omega_0^1 + \eta_0^1 & \eta_1^1 & \eta_2^1 & \eta_3^1 \\ \theta^2 & \omega_0^2 + \eta_0^2 & \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 \\ \theta^3 & \omega_0^3 + \eta_0^3 & \eta_1^3 & \eta_2^3 & \eta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^1 & \varpi_0^1 & & & \\ \theta^2 & \varpi_0^2 & & \eta' & \\ \theta^3 & \varpi_0^3 & & & \end{pmatrix},$$

onde:

- i) $\theta^0 = dx^0, \eta_j^0 = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$ (conexão galileana);
- ii) $\eta' = (\eta_j^i), \eta_j^i = -\eta_i^j$, para $i, j = 1, 2, 3$ (álgebra de Lie do grupo de Galileu ortogonal \mathfrak{o}_{gal});
- iii) $\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k$ com $\varphi_{j,k}^i = -\varphi_{k,j}^i$ (condição de geometrização de Galileu-Cartan).

A combinação de i), ii) e iii) nos diz que

$$\varphi_{j,k}^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0, \\ -\varphi_{i,k}^j & \text{se } i, j = 1, 2, 3, \\ -\varphi_{k,j}^i & \text{se } i, j = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.16)$$

Agora podemos analisar as equações da seção anterior com foco nesse tipo de conexão. Contudo, antes estabeleceremos o seguinte resultado técnico.

Afirmção 6.5. $\varphi_{j,k}^i = 0$ sempre que o terço (i, j, k) possui ao menos dois elementos iguais, para todo $i, j, k = 0, 1, 2, 3$.

Demonstração. Vamos supor inicialmente $i = j$, então $\varphi_{i,k}^i = -\varphi_{i,k}^i$, por 6.16. Daí,

$$\begin{aligned} \varphi_{i,k}^i + \varphi_{i,k}^i &= 0 \\ 2\varphi_{i,k}^i &= 0 \\ \varphi_{i,k}^i &= 0. \end{aligned}$$

É análogo para o caso $j = k$. Já para o caso $i = k$, basta utilizar 6.16, ou seja, $\varphi_{j,k}^i = -\varphi_{k,j}^i$ e retornamos ao primeiro caso. \square

Retornando à análise, as equações (6.7) – (6.9) se anulam identicamente, uma vez que $\varphi_{j,k}^i = -\varphi_{i,k}^j$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. E segue do lema anterior que a equação (6.10) assume a forma

$$\begin{cases} -\partial_1 \varphi_{2,0}^1 + \partial_2 \varphi_{2,3}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,1}^s + \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,3}^s) \\ -\partial_1 \varphi_{2,3}^1 - \partial_2 \varphi_{2,0}^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,1}^s) \\ \partial_0 \varphi_{2,3}^1 - \partial_3 \varphi_{2,0}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1 \varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,3}^1 \varphi_{2,0}^s - \varphi_{s,2}^1 \varphi_{2,1}^s) \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{2,0}^1 + \partial_2\varphi_{2,3}^1 = -\varphi_{3,0}^1\varphi_{2,1}^3 \\ -\partial_1\varphi_{2,3}^1 - \partial_2\varphi_{2,0}^1 = -\varphi_{3,2}^1\varphi_{2,0}^3 \\ \partial_0\varphi_{2,3}^1 - \partial_3\varphi_{2,0}^1 = \varphi_{3,2}^1\varphi_{2,1}^3 \end{cases} \quad (6.17)$$

A equação (6.11) assume a forma

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{3,0}^1 - \partial_3\varphi_{3,2}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1\varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,3}^1\varphi_{3,2}^s) \\ \partial_0\varphi_{3,2}^1 - \partial_2\varphi_{3,0}^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^1\varphi_{3,2}^s + \varphi_{s,2}^1\varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^1\varphi_{3,1}^s) \\ \partial_1\varphi_{3,2}^1 - \partial_3\varphi_{3,0}^1 = -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,3}^1\varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,2}^1\varphi_{3,1}^s) \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} -\partial_1\varphi_{3,0}^1 - \partial_3\varphi_{3,2}^1 = -\varphi_{2,0}^1\varphi_{3,1}^2 \\ \partial_0\varphi_{3,2}^1 - \partial_2\varphi_{3,0}^1 = -\varphi_{2,3}^1\varphi_{3,1}^2 \\ \partial_1\varphi_{3,2}^1 - \partial_3\varphi_{3,0}^1 = \varphi_{2,3}^1\varphi_{3,0}^2 \end{cases} \quad (6.18)$$

A equação (6.12) assume a forma

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{3,1}^2 - \partial_1\varphi_{3,0}^2 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2\varphi_{3,1}^s - \varphi_{s,1}^2\varphi_{3,0}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{3,2}^s) \\ -\partial_2\varphi_{3,0}^2 + \partial_3\varphi_{3,1}^2 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^2\varphi_{3,2}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{3,1}^s) \\ -\partial_3\varphi_{3,0}^2 - \partial_2\varphi_{3,1}^2 = -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,3}^2\varphi_{3,0}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{3,2}^s) \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} \partial_0\varphi_{3,1}^2 - \partial_1\varphi_{3,0}^2 = \varphi_{1,3}^2\varphi_{3,2}^1 \\ -\partial_2\varphi_{3,0}^2 + \partial_3\varphi_{3,1}^2 = -\varphi_{1,0}^2\varphi_{3,2}^1 \\ -\partial_3\varphi_{3,0}^2 - \partial_2\varphi_{3,1}^2 = \varphi_{1,3}^2\varphi_{3,0}^1 \end{cases} \quad (6.19)$$

A equação (6.13) assume a forma

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{1,0}^2 + \partial_2\varphi_{1,3}^2 = -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^2\varphi_{1,0}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{1,2}^s) \\ -\partial_1\varphi_{1,3}^2 - \partial_2\varphi_{1,0}^2 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^2\varphi_{1,2}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{1,3}^s) \\ \partial_0\varphi_{1,3}^2 - \partial_3\varphi_{1,0}^2 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2\varphi_{1,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{1,2}^s) \end{cases} \\ \Downarrow \\ \begin{cases} -\partial_1\varphi_{1,0}^2 + \partial_2\varphi_{1,3}^2 = \varphi_{3,1}^2\varphi_{1,0}^3 \\ -\partial_1\varphi_{1,3}^2 - \partial_2\varphi_{1,0}^2 = -\varphi_{3,0}^2\varphi_{1,2}^3 \\ \partial_0\varphi_{1,3}^2 - \partial_3\varphi_{1,0}^2 = -\varphi_{3,1}^2\varphi_{1,2}^3 \end{cases} \quad (6.20)$$

A equação (6.14) assume a forma

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{1,0}^3 - \partial_3\varphi_{1,2}^3 = -\sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,1}^3\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{1,3}^s) \\ \partial_0\varphi_{1,2}^3 - \partial_2\varphi_{1,0}^3 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^3\varphi_{1,2}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{1,0}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{1,3}^s) \\ \partial_1\varphi_{1,2}^3 - \partial_3\varphi_{1,0}^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{1,3}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{1,2}^s) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\partial_1\varphi_{1,0}^3 - \partial_3\varphi_{1,2}^3 = +\varphi_{2,1}^3\varphi_{1,0}^2 \\ \partial_0\varphi_{1,2}^3 - \partial_2\varphi_{1,0}^3 = \varphi_{2,1}^3\varphi_{1,3}^2 \\ \partial_1\varphi_{1,2}^3 - \partial_3\varphi_{1,0}^3 = -\varphi_{2,0}^3\varphi_{1,3}^2 \end{cases} \quad (6.21)$$

A equação (6.15) assume a forma

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{2,1}^3 - \partial_1\varphi_{2,0}^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,1}^s - \varphi_{s,1}^3\varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,3}^s) \\ -\partial_2\varphi_{2,0}^3 + \partial_3\varphi_{2,1}^3 = \sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,2}^3\varphi_{2,0}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{2,3}^s) \\ -\partial_2\varphi_{2,1}^3 - \partial_3\varphi_{2,0}^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{2,3}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{2,1}^s) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{2,1}^3 - \partial_1\varphi_{2,0}^3 = -\varphi_{1,2}^3\varphi_{2,3}^1 \\ -\partial_2\varphi_{2,0}^3 + \partial_3\varphi_{2,1}^3 = \varphi_{1,2}^3\varphi_{2,0}^1 \\ -\partial_2\varphi_{2,1}^3 - \partial_3\varphi_{2,0}^3 = -\varphi_{1,0}^3\varphi_{2,3}^1 \end{cases} \quad (6.22)$$

Observando o caso quando $j = 0$, temos a seguinte equação para

$$\begin{cases} -\partial_1 A^1 + \partial_2\varphi_{0,3}^1 - \partial_3\varphi_{0,2}^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1\varphi_{0,1}^s + \varphi_{s,2}^1\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^1\varphi_{0,2}^s), \\ \partial_0\varphi_{0,2}^1 - \partial_1\varphi_{0,3}^1 + \partial_2 A^1 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^1\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,3}^1\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{3,2}^1 A^3, \\ \partial_0\varphi_{0,3}^1 + \partial_1\varphi_{0,2}^1 + \partial_3 A^1 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^1\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,2}^1\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{2,3}^1 A^2. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\partial_1 A^1 + \partial_2\varphi_{0,3}^1 - \partial_3\varphi_{0,2}^1 = -\varphi_{2,0}^1\varphi_{0,1}^2 - \varphi_{3,0}^1\varphi_{0,1}^3, \\ \partial_0\varphi_{0,2}^1 - \partial_1\varphi_{0,3}^1 + \partial_2 A^1 = -\varphi_{3,0}^1\varphi_{0,2}^2 - \varphi_{2,3}^1\varphi_{0,1}^2 - \varphi_{3,2}^1 A^3, \\ \partial_0\varphi_{0,3}^1 + \partial_1\varphi_{0,2}^1 + \partial_3 A^1 = -\varphi_{2,0}^1\varphi_{0,3}^2 + \varphi_{3,2}^1\varphi_{0,1}^3 - \varphi_{2,3}^1 A^2. \end{cases} \quad (6.23)$$

Para a (6.5)

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{0,1}^2 + \partial_1 A^2 + \partial_2\varphi_{0,3}^2 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,1}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,2}^s) - \varphi_{3,1}^2 A^3, \\ -\partial_1\varphi_{0,3}^2 + \partial_2 A^2 + \partial_3\varphi_{0,1}^2 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,2}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{0,3}^s - \varphi_{s,3}^2\varphi_{0,1}^s), \\ \partial_0\varphi_{0,3}^2 - \partial_2\varphi_{0,1}^2 - \partial_3 A^2 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^2\varphi_{0,3}^s + \varphi_{s,1}^2\varphi_{0,2}^s) - \varphi_{1,3}^2 A^1. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{0,1}^2 + \partial_1A^2 + \partial_2\varphi_{0,3}^2 = -\varphi_{3,0}^2\varphi_{0,1}^3 + \varphi_{1,3}^2\varphi_{0,2}^1 - \varphi_{3,1}^2A^3, \\ -\partial_1\varphi_{0,3}^2 + \partial_2A^2 + \partial_3\varphi_{0,1}^2 = -\varphi_{3,0}^2\varphi_{0,2}^3, \\ \partial_0\varphi_{0,3}^2 - \partial_2\varphi_{0,1}^2 - \partial_3A^2 = -\varphi_{1,0}^2\varphi_{0,3}^1 - \varphi_{3,1}^2\varphi_{0,2}^3 - \varphi_{1,3}^2A^1. \end{cases} \quad (6.24)$$

Para a (6.6)

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{0,1}^3 + \partial_1A^3 - \partial_3\varphi_{0,2}^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,1}^s + \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,3}^s) - \varphi_{2,1}^3A^2 \\ \partial_0\varphi_{0,2}^3 + \partial_2A^3 + \partial_3\varphi_{0,1}^3 = \sum_{s=1}^3 (-\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,2}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{0,3}^s) - \varphi_{1,2}^3A^1 \\ \partial_1\varphi_{0,2}^3 - \partial_2\varphi_{0,1}^3 + \partial_3A^3 = -\sum_{s=1}^3 (\varphi_{s,0}^3\varphi_{0,3}^s + \varphi_{s,1}^3\varphi_{0,2}^s - \varphi_{s,2}^3\varphi_{0,1}^s) - \varphi_{1,3}^3A^1 \end{cases} \quad (6.25)$$

↓

$$\begin{cases} \partial_0\varphi_{0,1}^3 + \partial_1A^3 - \partial_3\varphi_{0,2}^3 = -\varphi_{2,0}^3\varphi_{0,1}^2 - \varphi_{1,2}^3\varphi_{0,3}^1 - \varphi_{2,1}^3A^2 \\ \partial_0\varphi_{0,2}^3 + \partial_2A^3 + \partial_3\varphi_{0,1}^3 = -\varphi_{1,0}^3\varphi_{0,2}^1 + \varphi_{2,1}^3\varphi_{0,3}^2 - \varphi_{1,2}^3A^1 \\ \partial_1\varphi_{0,2}^3 - \partial_2\varphi_{0,1}^3 + \partial_3A^3 = -\varphi_{1,0}^3\varphi_{0,3}^1 - \varphi_{2,0}^3\varphi_{0,3}^2 - \varphi_{1,3}^3A^1 \end{cases} \quad (6.25)$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 6.6. *Seja $d' = (dx^i, \omega_j^i + \eta_j^i)$ uma conexão afim tal que $\omega_0^i = -A^i dx^0$ para todo $i = 1, 2, 3$, $\omega_j^0 = 0$ para todo $j = 0, 1, 2, 3$ e $\eta_j^i = \sum_{k=0}^3 \varphi_{j,k}^i dx^k$. Então para que d' seja uma conexão ASD, newtoniana e de Galileu-Cartan é necessário que equações (6.17)–(6.25) sejam satisfeitas.*

7 Conclusão

Uma vez que as trajetórias do movimento dos corpos já ficam estabelecidas pelo deslocamento de Cartan para qualquer que seja a conexão que geometriza o sistema mecânico newtoniano (§5.4), é natural que o leitor se pergunte por qual motivo ainda nos preocupamos em obter uma conexão de Yang-Mills para a ação determinada pela curvatura no fibrado tangente estendido. A explicação é simples e se encontra aludida na introdução deste trabalho. Logo no início de [10, Cap. V, §§70–74.], Élie Cartan caracteriza a dinâmica dos meios contínuos em \mathbb{R}^4 através de três equações fundamentais:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \Omega_0^1 = -dF^1 \wedge dt, \quad \Omega_0^2 = -dF^2 \wedge dt, \quad \Omega_0^3 = -dF^3 \wedge dt, \quad \Omega_3^2 = \Omega_1^3 = \Omega_2^1 = 0, \\ \text{II)} \quad & \omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0, \\ \text{III)} \quad & \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 = 4\pi G\rho \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0. \end{aligned}$$

Cartan mostra que a primeira dessas equações é equivalente a dizer que em cada instante do tempo o espaço ambiente da mecânica newtoniana é dado pelo espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , a segunda é equivalente à existência de um potencial gravitacional e a última delas é exatamente a equação de Poisson. Fazemos uma rápida discussão sobre a importância desta última equação no contexto em que estamos inseridos. No caso de uma campo gravitacional \mathbf{g} devido a uma densidade de massa ρ , a lei de Gauss para a gravidade em sua forma diferencial pode ser usada para obter a correspondente equação de Poisson para a gravidade ([23, §§5.1–5.2]). De fato, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho,$$

mas como o campo gravitacional é conservativo, ele pode ser escrito em termos de um potencial escalar ϕ na forma

$$\mathbf{g} = \nabla\phi.$$

Substituindo-se essa informação na lei de Gauss acima, obtemos a equação

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = -4\pi G\rho,$$

que gera a **equação de Poisson**

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho.$$

Pois bem, levando-se em consideração que é exatamente a modificação desta última equação que leva à equação de Einstein (ver Introdução e [10]), fica claro que, no contexto das conexões afins, as duas derivações acima devem ser modificadas pela derivação covariante induzida pela conexão afim, se pretendemos preservar esta mesma abordagem

de minimização do funcional de Yang-Mills para a forma de curvatura no fibrado tangente estendido a fim de extrairmos as equações de Einstein. Nesse caso, a versão newtoniana da conexão seria uma aproximação da conexão correta no caso geral quando tomamos a velocidade da luz indo para o infinito. Portanto, obter tal conexão corretamente é um passo importante para se chegar a uma formulação de tipo Yang-Mills para a teoria da relatividade geral.

Índice

- Base
 - g -ortonormal, 71
- Campo de calibre , 67
- Campo de vetores
 - ao longo de γ , 90
- Codiferencial, 77
- Colchete de Lie
 - entre $\text{End}(E)$ -formas, 64
- Conexão
 - afim, 39
 - galileana, 40
 - matriz de, 39
 - métrica, 46
 - newtoniana, 46
- Conexão linear
 - induzida, 90
- Curvatura
 - matriz de, 48, 57
 - tensor de, 50
- Equação estrutural, 49, 51
- Fibrado
 - estendido, 88
 - vetorial métrico, 78
- Forma quadrática, 70
- Funcional de Yang-Mills, 84
- Integral primeira, 26
- Laplaciano covariante, 81
- Momento-energia
 - 1-forma de, 23
- Métrica
 - Assinatura de uma,, 71
 - Índice de uma, 71
- Operador estrela de Hodge
 - para E -formas, 80, 83
- Princípio
 - da inércia, 14
- Produto exterior
 - entre $\text{End}(E)$ -formas, 64
 - entre $\text{Hom}(E)$ -formas e E -formas, 62
 - produto interno L^2 , 77
- Referenciais
 - galileanos, 15
 - inerciais, 15
- Seção
 - paralela, 90
- Tensor diferença, 67
- Torção
 - matriz de, 51
 - tensor de, 52

Referências

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. 2nd ed., Addison-Wesley, 1987. Citado na página [14](#).
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Foundations of Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 2002. Citado na página [70](#).
- [3] V. I. Arnold. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke. Pioneers in Mathematical Analysis and Catastrophe Theory from Evolvents to Quasicrystals*. Birkhäuser Basel, 1990. Citado na página [14](#).
- [4] V. I. Arnold, A. I. Neishtadt, and V. V. Kozlov. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Text in Mathematics, 2nd ed. Springer-Verlag, 1989. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [24](#) e [101](#).
- [5] V. I. Arnold, A. I. Neishtadt, and V. V. Kozlov. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Dynamical Systems III, Enciclopedia of Mathematical Sciences Vol. 3. Springer Verlag, Heidelberg, 2006. Citado na página [14](#).
- [6] R. J. Biezuner. *Conexões em Fibrados*. Notas de aula. Departamento de Matemática - ICEX-UFMG, 2020. Citado 3 vezes nas páginas [56](#), [59](#) e [71](#).
- [7] J. P. Bourguignon and H. B. Lawson Jr. Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. *Commun. Math. Phys.*, 79:189–230, 1981. Citado na página [87](#).
- [8] É. Cartan. *Leçons Sur les Invariants Intégraux*. Hermann, Paris, 1922. Citado 5 vezes nas páginas [11](#), [13](#), [14](#), [24](#) e [31](#).
- [9] É. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part I. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3*, 40:325–412, 1923. Citado 7 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [31](#), [33](#), [45](#), [88](#) e [91](#).
- [10] É. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part I (suite). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3*, 41:1–25, 1924. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [31](#) e [118](#).
- [11] É. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Part II. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3*, 42:17–88, 1925. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [31](#).
- [12] É. Cartan. *On Manifolds with an Affine Connection and the General Theory of Relativity*. Translated from the French by Anne Magnon and Abhay Ashtekar. With a

- foreword by Andrzej Trautman Monogr. Textbooks Phys. Sci., 1. Bibliopolis, Naples, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 31, 45 e 54.
- [13] S. S. Chern (ed.). *Vector Bundles with a Connection*. Studies in Mathematics, Vol 27. Global Differential Geometry. The Mathematical Association of America, 1989. Citado na página 31.
- [14] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. A. Hermann et Fils, Paris, 1909. Citado na página 31.
- [15] L. M. Câmara. *Geometria Diferencial. O Cálculo de Darboux e o Método do Referencial Móvel Aplicados a Curvas e Superfícies*. Notas de aula. Departamento de Matemática - CCE/UFES, 2014. Citado na página 31.
- [16] L. M. Câmara. *Uma Breve Introdução à Topologia das Variedades*. Notas de aula. Departamento de Matemática - CCE/UFES, 2020. Citado na página 31.
- [17] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The Geometry of Four-Manifolds*. Oxford University press, New York, 1990. Citado na página 101.
- [18] D. G. Fadel and H. N. Sá Earp. *Gauge Theory in Higher Dimensions*. IMPA, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 56, 86, 87 e 101.
- [19] I. M. Gelfand and V. S. Fomin. *Calculus of Variations*. Dover, New York, 2000. Citado na página 14.
- [20] C. Godbillon. *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann, Paris, 1969. Citado na página 14.
- [21] B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, New York, 2nd edition, 2015. Citado na página 81.
- [22] M. Jardim. *An Introduction to Gauge Theory and its Applications*. 25^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 87.
- [23] J. B. Marion and S. T. Thornton. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Cengage Learning; 5th edition, 2003. Citado na página 118.
- [24] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Tome III*. (French) [New methods of celestial mechanics. Vol. III] Invariant intégraux. asymptotiques. [Integral invariants. Doubly asymptotic solutions] Reprint of the 1899 original. Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics] Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard. [Albert Blanchard Scientific Library] Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Citado na página 24.

-
- [25] H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 140:1504–1508, 5 Juin 1905. Citado na página [12](#).
- [26] H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 21:129–175, reçu le 23 Juillet 1905, publié en Janvier 1906. Citado na página [12](#).
- [27] E. Scholz. É. Cartan's attempt at bridge-building between Einstein and the Cosserats – or how translational curvature became to be known as torsion. *EPJ H*, 44:47–75, 2019. Citado na página [31](#).
- [28] K. K. Uhlenbeck. Removable singularities in Yang–Mills fields. *Communications in Mathematical Physics*, 83:11–20, 1982. Citado na página [101](#).
- [29] T. T. Wu and C. N. Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, 12 (12):3845–3857, 1975. Citado na página [12](#).
- [30] C. N. Yang. Magnetic monopoles, fiber bundles, and gauge fields. In: Newman, H.B., Ypsilantis, T. (eds) *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics. NATO ASI Series. Springer, Boston, MA.*, 352:55–65, 1996. Citado na página [56](#).
- [31] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev. D*, 96:191–195, 1954. Citado na página [12](#).