



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DOUTORADO ACADÊMICO EM FÍSICA

Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira

Nathália Mattos Novaes da Rocha

Vitória-ES
Março de 2023

Nathália Mattos Novaes da Rocha

Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o
Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com
Gás de Chaplygin e Poeira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Física.

Linha de pesquisa:
Cosmologia Quântica

Orientador

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Coorientador

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

PPGFIS – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UFES – UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória-ES

Março de 2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

R672p Rocha, Nathália Mattos Novaes da, 1986-
Probabilidade de tunelamento quântico para o surgimento de um universo clássico preenchido com gás de Chaplygin e poeira / Nathália Mattos Novaes da Rocha. - 2023.
135 f. : il.

Orientador: Sergio Vitorino de Borba Gonçalves.
Coorientador: Germano Amaral Monerat.
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cosmologia quântica. 2. Tunelamento quântico. 3. Era de Planck. 4. Poeira. 5. Gás de Chaplygin. I. Gonçalves, Sergio Vitorino de Borba. II. Monerat, Germano Amaral. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira”

NATHÁLIA MATTOS NOVAES DA ROCHA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
gov.br GIL DE OLIVEIRA NETO
Data: 28/04/2023 17:56:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
(ICE/UFJF)

Documento assinado digitalmente
gov.br EDUARDO VASQUEZ CORREA SILVA
Data: 27/04/2023 17:17:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Vasquez Corrêa Silva
(DMFC/FT/UERJ)

Documento assinado digitalmente
gov.br ANDRE LUIS BATISTA RIBEIRO
Data: 29/04/2023 15:58:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André Luis Batista Ribeiro
(UESC - DCET)

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga
(DFIS/UFES)

Documento assinado digitalmente
gov.br SERGIO VITORINO DE BORBA GONCALVES
Data: 27/04/2023 09:44:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
(Orientador - PPGFis/UFES)

Documento assinado digitalmente
gov.br GERMANO AMARAL MONERAT
Data: 27/04/2023 14:50:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat
(Coorientador - UERJ)

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
(DFIS/UFES)

Documento assinado digitalmente
gov.br CLISTHENIS PONCE CONSTANTINIDIS
Data: 30/04/2023 16:14:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Vitória-ES, 14 de março de 2023.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
FLAVIO GIMENES ALVARENGA - SIAPE 8298256
Departamento de Física - DF/CCE
Em 02/05/2023 às 15:58

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/702280?tipoArquivo=O>

À Deus e minha família.

Agradecimentos

Meu muito obrigada primeiramente a Deus por toda força que me deu para chegar até aqui, sem ele eu definitivamente não teria conseguido;

À minha mãe por sempre acreditar em mim e me dar todo apoio para continuar seguindo o meu sonho, apesar de todas as dificuldades; Ao meu falecido pai por ter despertado em mim, ainda pequena, o interesse em entender mais sobre o Universo, muito obrigada por isso;

Ao meu namorado Rodrigo por todo apoio no dia a dia;

Aos meus colegas da UFES pelo apoio quando precisei, especialmente ao Igor e ao Breno;

Meu muito obrigada especial à minha eterna colega, e hoje uma das minhas melhores amigas na física e na vida, Zaira;

Aos meus queridos Leandro, Felipe, Christian, Amanda e Carolina. Vocês são tudo para mim;

Ao secretário José Carlos por todo suporte e total apoio;

Aos professores Sérgio e Germano por não apenas acreditarem em mim, mas por todo ensinamento, bom ânimo, paciência e disposição em encarar esse desafio comigo;

Ao CNPq pelo apoio financeiro;

À UFES pela oportunidade.

*"This is Major Tom to Ground Control
I'm stepping through the door
And I'm floating in a most peculiar way
And the stars look very different today."
(David Bowie)*

Probabilidade de Tunelamento Quântico Para o Surgimento de um Universo Clássico Preenchido Com Gás de Chaplygin e Poeira

Autora: Nathália Mattos Novaes da Rocha

Orientador: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

RESUMO

O presente trabalho visa analisar a dinâmica quântica contida na era de Planck do Universo, seu mecanismo de emersão para a fase inflacionária e a sua dinâmica clássica em um modelo homogêneo e isotrópico, composto por um fluido perfeito na forma de poeira e um gás de Chaplygin. A análise deu-se através de cálculos probabilísticos de tunelamento quântico de um modelo quantizado numericamente pelo método de Crank-Nicolson, cujos cálculos foram realizados em termos dos parâmetros do modelo. Os resultados apresentam uma maior propensão para o surgimento clássico de um Universo preenchido com poeira e gás de Chaplygin, se comparados a resultados encontrados na literatura para um modelo no qual o Universo é preenchido com gás de Chaplygin e radiação.

Palavras-chave: Cosmologia Quântica, Tunelamento Quântico, Era de Planck, Poeira, Gás de Chaplygin.

Probability of Quantum Tunneling for the Emergence of a Classical Universe Filled with Chaplygin's Gas and Dust

Author: Nathália Mattos Novaes da Rocha

Supervisor: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Co-supervisor: Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

ABSTRACT

The present work aims to analyze the quantum dynamics contained in the Planck era of the Universe, its emergence mechanism for the inflationary phase and its classical dynamics in a homogeneous and isotropic model, composed of a perfect fluid in the form of dust and a Chaplygin gas. The analysis was carried out through probabilistic calculations of quantum tunneling of a numerical model quantized by the Crank-Nicolson method, whose calculations were performed in terms of the model parameters. The results show a greater susceptibility for the classical emergence of a Universe filled with dust and Chaplygin gas, when compared to results found in the literature for a model in which the Universe is filled with Chaplygin gas and radiation.

Keywords: Quantum Cosmology, Quantum Tunneling, Planck Era, Dust, Chaplygin's Gas.

Lista de figuras

1	O Universo e suas eras. (Imagem: <i>History of the Universe</i> - Gonzales, A. 1989 Fermilab).	p. 17
2	História evolutiva do Universo. (Imagem: <i>A sense of time</i> - Pasachoff e Filippenko (2007)).	p. 18
3	Breve resumo da evolução do Universo. (Imagem: <i>The birth of the Universe</i> - http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec20.html).	p. 23
4	Ilustração para um universo homogêneo e não isotrópico (a), e um universo homogêneo e isotrópico (b). O círculo pontilhado é a parte observável do Universo. (Imagens: Pasachoff e Filippenko (2007)).	p. 24
5	Incorporação de uma variedade 3D em uma variedade 4D. (Imagem: Jha (2022)).	p. 38
6	Foliação do espaço-tempo.	p. 40
7	Interpretação geométrica das funções lapso e deslocamento. (Imagem: Jha (2022)).	p. 43
8	Estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking, na qual foi eliminada uma dimensão espacial do espaço-tempo quadridimensional. (Imagem: Kiefer (2007)).	p. 69
9	Barreira de potencial para um universo quantizado de FLRW. (Imagem: Atkatz (1994)).	p. 72
10	Barreira de potencial para exemplificar a aplicação do método WKB. (Imagem: Merzbacher (1998)).	p. 77
11	Comportamento do potencial efetivo $V_{ef}(x)$ para o caso de poeira ($\alpha = 0$). (Imagem: Rocha et al. (2022)).	p. 85

12	Retrato de fase, no qual as órbitas do plano (x, p_x) representam modelos de universos de FLRW homogêneos e isotrópicos, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$. (Imagem: Rocha et al. (2022)).	p. 87
13	Exemplo de retrato de fase com um ponto fixo do tipo sela hiperbólica.	p. 88
14	Comportamento do fator de escala $x(t)$, com respeito ao tempo cósmico, para o nosso modelo, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$. (Imagem: Rocha et al. (2022)).	p. 89
15	Grade método de diferenças finitas.	p. 93
16	Grade método de Crank-Nicolson - Intervalo $[0, T]$ dividido em N subintervalos iguais indexados por $n = 0, \dots, N$, e $[x_{min}, x_{max}]$ dividido em subintervalos J indexados por $j = 0, \dots, J$, para $U(x, t)$ a função de onda, e cujos tamanhos dos intervalos: dt na direção temporal; dx na direção espacial.	p. 96
17	Comportamento da norma em função do número de pontos N (discretização espacial) em $\tau = 0$ (asterisco) e $\tau = \tau_{max}$ (ponto), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, $\alpha = 0$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 101
18	Comportamento da densidade de probabilidade (ρ), com $x_{max} = 100$, $\tau_{max} = 15$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $dt = 0.05$, com o ponto mais à direita da barreira: $x_2 = 22.0497989282069$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 102
19	Exemplo de barreira de potencial, na qual os pontos de retorno x_1 e x_2 são, respectivamente, os pontos de retorno à esquerda e à direita da barreira.	p. 103
20	Probabilidades de tunelamento PT (em escala de \log) em função de E_M , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, e diferentes valores de A , com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 106
21	Comparativos entre PT e PT_{WKB} (em escala de \log) em função de E_M , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: Rocha et al. (2022)).	p. 107

22	Probabilidades de tunelamento PT (em escala de \log) em função do parâmetro A , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, e diferentes valores fixos de E_M , com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 107
23	Probabilidade de tunelamento PT (em escala de \log) em função do parâmetro B , para $\alpha = 0$ (poeira), $A = 0.001$, e $E_M = 19$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 108
24	Comparativos entre os potenciais efetivos V_{ef} para ambos os modelos com gás de Chaplygin e radiação ($\alpha = \frac{1}{3}$), e gás de Chaplygin e poeira ($\alpha = 0$), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, $E_{max} = 223.5282022$ para o fluido de radiação, e $E_{max} = 19.9344758644320$ para o fluido de poeira. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).	p. 109
25	Comparativo entre as probabilidades de tunelamento de modelos com gás de Chaplygin e poeira ($\alpha = 0$) e gás de Chaplygin e radiação ($\alpha = \frac{1}{3}$), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)). .	p. 110

Lista de tabelas

1	Processos de colisão de partículas.	p. 28
2	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00080$, $E_{max} = 21.0781424981805$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 125
3	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00085$, $E_{max} = 20.7610874836932$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 126
4	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00090$, $E_{max} = 20.4665292083541$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 127
5	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00095$, $E_{max} = 20.1917482467770$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 128
6	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.001$, $E_{max} = 19.9344758644320$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 129
7	Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $A = 0.001$, $E_M = 19$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 130
8	Resultados para $\alpha = \frac{1}{3}$ (radiação), com $B = 0.001$, $A = 0.001$, $E_{max} = 223.5282022$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$	p. 131

Lista de abreviaturas e siglas

TGU–Teoria da Grande Unificação

TRG–Teoria da Relatividade Geral de Einstein

CMB–Radiação Cós mica de Fundo

CDM–Matéria Escura Fria

FLRW–Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

ADM–Arnowitt, Deser e Misner

EDO–Equação diferencial ordinária

EDP–Equação diferencial parcial

Lista de símbolos

$a(t)$ –Fator de escala do Universo

z –*redshift*

M_p –Massa de Planck

H_0 –Constante de Hubble

Mpc–Megaparsec

k –Curvatura espacial constante da métrica de FLRW

MeV–Megaelétron-volt

GeV–Gigaelétron-volt

l_p –Comprimento de Planck

$R_{\mu\nu}$ –Tensor de Ricci

R –Escalar de curvatura

Λ –Constante cosmológica

G –Constante gravitacional

c –Velocidade da luz

$T_{\mu\nu}$ –Tensor energia-momento

$g_{\mu\nu}$ –Tensor métrico

g –Determinante do tensor métrico

$G_{\mu\nu}$ –O tensor de Einstein

M –Variedade quadridimensional

(M, g) –Espaço-tempo quadridimensional

Σ –Hipersuperfície

\aleph –Variedade tridimensional

γ_{ij} —Métrica induzida

n^μ —Vetor normal

$R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ —Tensor de Riemann

$K_{\mu\nu}$ —Tensor de curvatura extrínseca

K —Escalar de curvatura extrínseca

N —Função lapso

\vec{N} —Vetor deslocamento

m^μ —Vetor evolução normal

γ —Determinante da métrica induzida

T —Escalar energia-momento

Ψ —Função de onda do Universo

U_ν —Quadrivelocidade

μ —Entalpia específica

S —Entropia específica

Π —Energia interna específica

Θ —Temperatura

ρ_0 —Densidade de massa de repouso

h_{ij} —Métrica induzida

V_{ef} —Potencial efetivo

\hbar —Constante de Planck reduzida

E_M —Valor médio da energia cinética do fluido de poeira

x_{max} —Infinito numérico

E_{max} —Valor máximo do potencial efetivo

PT —Probabilidade de tunelamento quântico

PT_{WKB} —Probabilidade de tunelamento WKB

Sumário

1	Introdução	p. 16
1.1	A Evolução do Universo	p. 16
1.1.1	O Universo Atual	p. 22
1.1.2	O Universo Primitivo	p. 27
2	Cosmologia Quântica	p. 33
2.1	O Formalismo ADM	p. 34
2.1.1	Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral	p. 35
2.1.2	Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral	p. 38
2.1.2.1	Prelúdio Matemático e Definições	p. 38
2.1.2.2	Decomposição 3 + 1 do Espaço-Tempo	p. 42
2.1.2.3	Projeção das Equações de Campo de Einstein	p. 45
2.1.2.4	Desenvolvimento da Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (ADM)	p. 47
2.2	A Equação de Wheeler-DeWitt	p. 54
2.2.1	Quantização de um Modelo de FLRW	p. 55
2.2.2	Peculiaridades da Equação de Wheeler-DeWitt	p. 57
2.2.2.1	O Problema do Tempo da Cosmologia Quântica	p. 59
2.2.2.2	Campos de Matéria e o Formalismo de Schutz: Uma Solução Para o Problema do Tempo da Cosmologia Quântica.	p. 60
2.3	Condições de Contorno	p. 68
2.3.1	A Proposta de Não Contorno de Hartle-Hawking	p. 68

2.3.2	Tunelamento Quântico do Universo	p. 70
2.3.3	Aproximação Semiclássica	p. 74
2.3.3.1	Aproximação WKB	p. 74
2.4	Interpretação Quântica	p. 78
3	O Modelo	p. 82
3.1	Modelo Clássico	p. 82
3.2	Modelo Quântico	p. 89
4	Tratamento Numérico	p. 93
4.1	Método de Diferenças Finitas	p. 93
4.1.1	Método de Crank-Nicolson	p. 96
4.1.1.1	Aplicação do Método de Crank-Nicolson ao Modelo	p. 100
5	Resultados	p. 104
5.1	Tunelamento em Função de E_M	p. 104
5.2	Tunelamento em Função dos Parâmetros do Gás de Chaplygin	p. 106
5.3	Comparativos com Resultados Preexistentes	p. 108
6	Considerações finais	p. 111
	Referências	p. 114
	Apêndice A – Formalismo de Schutz	p. 119
	Apêndice B – Tabelas	p. 125

1 Introdução

Carl Sagan uma vez disse: “Se você deseja fazer uma torta de maçã do zero, primeiro você deve inventar o Universo.” Parece óbvio mas, para que pudéssemos estar aqui hoje estudando e discutindo sobre o Universo e toda a sua grandiosidade, primeiramente sobreveio a sua gênese e eventual evolução até o presente momento. Faz-se, então, relevante o processo de tentativa de elucidação de como o Universo, um adolescente em expansão com cerca de 14 bilhões de anos, adveio (ADAMS; LAUGHLIN, 1999; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; BENNETT et al., 2018).

Sob esta perspectiva, o nosso trabalho consistirá em uma tentativa probabilística de verificação da emersão do Cosmo e a análise da sua dinâmica quântica e clássica para um modelo homogêneo e isotrópico composto por um fluido perfeito na forma de poeira e gás de Chaplygin. Para tal, começaremos por tracejar a história evolutiva do Universo, ao transpassar os seus vários estágios (Figura 1).

1.1 A Evolução do Universo

Se colocarmos a evolução do Universo sob uma perspectiva temporal de um dia (com duração de 24 horas), ao iniciar sua história à meia noite, a formação da Terra teria ocorrido após às 16h, e os primeiros humanos teriam surgido nos últimos 2 segundos antes do relógio bater meia noite novamente (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007), como pode ser observado na Figura 2.

Seja, $p = \alpha\rho$ a equação de estado de um fluido perfeito, com p a pressão, ρ a densidade de energia, e α um número adimensional, temos que o fator de escala do Universo pode ser definido como $a(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)}$, no qual $a(t)$ é utilizado para caracterizar a expansão do Universo, com $a(t) = 0$ em $t = 0$ para a singularidade inicial do Universo, e $a(t) = 1$ para o Universo atual.

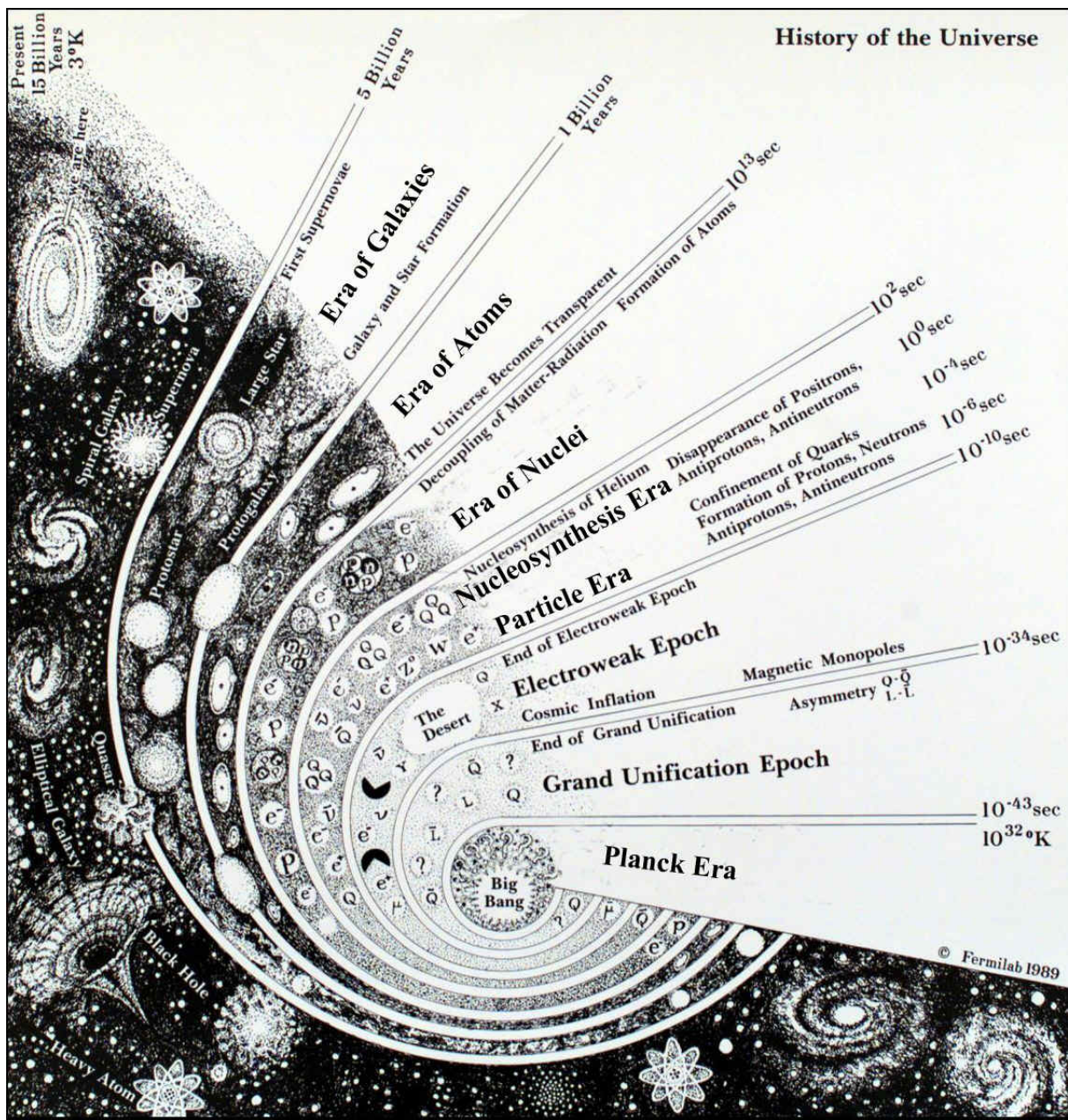


Figura 1: O Universo e suas eras. (Imagem: *History of the Universe* - Gonzales, A. 1989 Fermilab).

A história do Universo pode ser dividida em dois grandes grupos, o grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela radiação, e o grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela matéria, acrescido de uma era adicional cuja dinâmica seria dominada pela energia escura (a era atual de expansão do Universo).

O grupo de eras e/ou épocas cuja dinâmica é dominada pela radiação contempla as eras de Planck, a época da Teoria da Grande Unificação (TGU), a inflação, a época eletrofraca, a era dos quarks, a era dos hádrons, a era dos léptons, a era dos fótons, e a era da nucleossíntese.

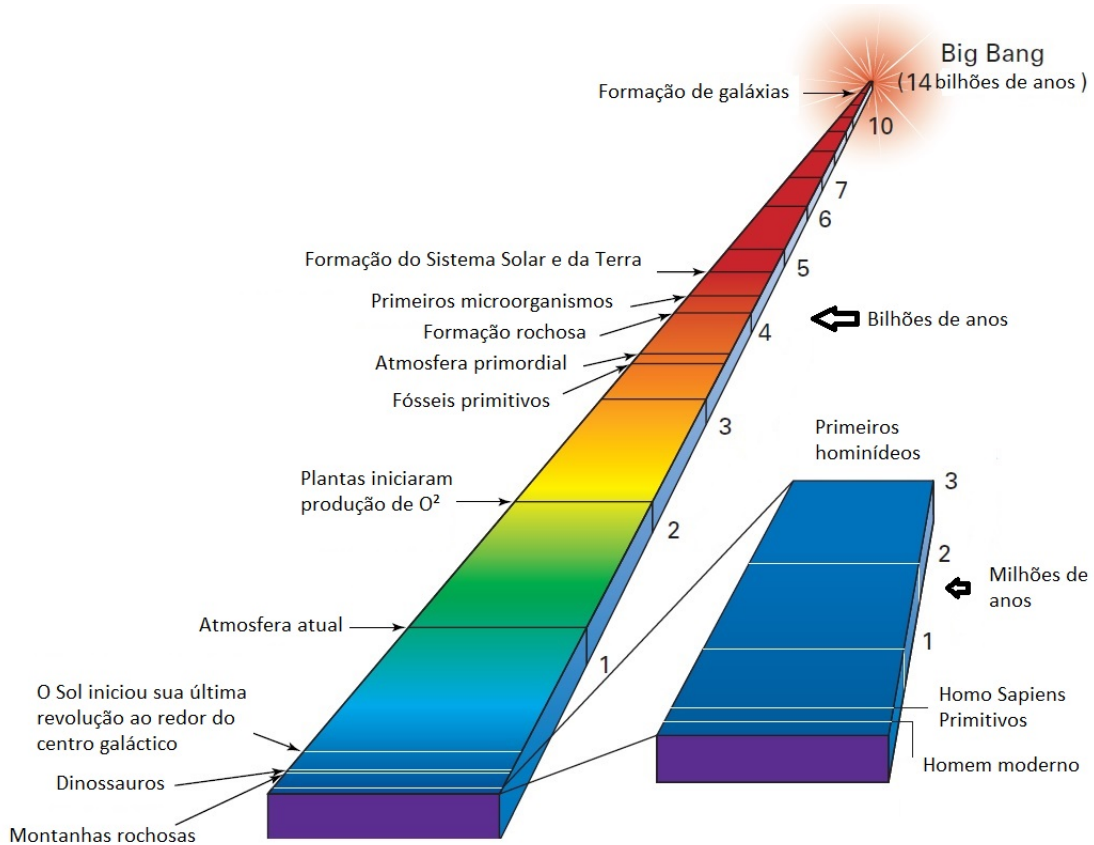


Figura 2: História evolutiva do Universo. (Imagem: *A sense of time* - Pasachoff e Filipenko (2007)).

Este primeiro grupo compreende um período que durou até aproximadamente 300.000 anos após o *Big Bang*, no qual o Universo era dominado por matéria ultra relativística, com pressão $p = \rho/3$, fator de escala $a(t) \propto t^{1/2}$, *redshift* (desvio para o vermelho) $z \geq 3000$, e $\alpha = 1/3$.

Já o grupo de eras cuja dinâmica é dominada pela matéria abrange a era dos núcleos, a era da recombinação, a era dos átomos, a era de formação das galáxias e estrelas, e a era de formação do Sol e do Sistema Solar, isto é, a sucessão de eventos que vão de cerca de 300.000 anos à $\sim 9,2 \times 10^9$ anos desde o *Big Bang*.

Este grupo de eras é caracterizado por suas componentes sem pressão ($p = 0$), as quais determinam a taxa de expansão do Universo, fator de escala $a(t) \propto t^{2/3}$ com $\alpha = 0$, e *redshift* $3000 \geq z \geq 0,5$.

A era atual, na qual o Universo encontra-se em $\sim 13,8 \times 10^9$ anos após o *Big Bang*, tem a sua dinâmica dominada pela energia escura, e é caracterizada por uma componente com pressão negativa ($\alpha < -1/3$ para $p = \alpha\rho$), a qual conduz a expansão acelerada do Universo. O fator de escala e o *redshift* são, respectivamente, $a(t) \propto t^{2/3(1+\alpha)}$, e $z \leq 0,5$,

com $a(t) \propto \exp(Ht)$ e $p = -\rho$, caso seja considerado o exemplo da energia escura como uma constante cosmológica. É importante frisar que a era atual do Universo não poderia ter iniciado antes, uma vez que um período de dominação da matéria seria necessário para a formação de estruturas (LIDDLE, 1996; GARY, 2005; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; FRIEMAN; TURNER; HUTERER, 2008; TUOWA, 2011; WMAP, 2011; LYTH, 2016).

A evolução do Universo e suas várias eras (com suas principais características) serão descritas, cronologicamente, a seguir (PEEBLES et al., 1994; LIDDLE, 1996; SARAIVA; FILHO; MÜLLER, 2001; GARY, 2005; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; FRIEMAN; TURNER; HUTERER, 2008; TUOWA, 2011; WMAP, 2011; RIEKE, 2014; LYTH, 2016).

$< 10^{-43}$ s: os primeiros momentos após o *Big Bang*, ou seja, a **era de Planck**, é caracterizada por uma energia média de cerca 10^{19} GeV e temperatura da ordem da massa de Planck ($M_p = 1/\sqrt{G} = 1,22 \times 10^{19}$ GeV) ou maior. Nesse período, as quatro interações da natureza, possivelmente, encontram-se unificadas, e o espaço e o tempo perdem os seus significados convencionais. Apenas as leis da física quântica são passíveis de explicar os acontecimentos decorridos aqui.

$\sim 10^{-43}$ s $\sim 10^{-38}$ s: com uma energia média entre 10^{19} GeV e 10^{14} GeV e temperatura entre 10^{32} K e 10^{28} K, a **época da TGU** é caracterizada por uma confusão flutuante e quente de partículas e campos interagentes. Nesse período ocorre a separação da interação gravitacional das demais interações (as quais, possivelmente, encontram-se unificadas), isto é, as interações eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca.

$\sim 10^{-38}$ s $\sim 10^{-12}$ s: com uma energia da ordem de 10^{14} GeV e temperatura da ordem de 10^{28} K, os períodos da **Inflação** e **era eletrofraca** são caracterizados pela separação da interação nuclear forte da interação eletrofraca (união das interações eletromagnética e nuclear fraca). Essa separação seria responsável pela liberação de uma grande quantidade de energia geradora de uma expansão extrema do Universo, por um fator de cerca de 10^{35} em 10^{-32} s, conhecida como Inflação.

$\sim 10^{-12}$ s $\sim 10^{-6}$ s: a **era Quark** é caracterizada por uma energia média entre 100 GeV e 200 MeV e temperatura de 10^{15} K. Nessa era, as interações eletromagnética e nuclear fraca se separam, estabelecendo-se um Universo governado pelas quatro interações da natureza de forma separada. A interação gravitacional começa a governar a expansão do Universo e é descrita através da Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG); as outras três interações são descritas através do Modelo Padrão (baseado na ideia de invariância de calibre local). Ainda nessa era, os quarks, os léptons e suas respectivas antipartículas se

formam, e os léptons se separam em elétrons, neutrinos e suas respectivas antipartículas. Essa era se encerra com a aniquilação mútua de matéria e antimatéria, e finaliza com um excesso significativo de partículas de matéria.

$\sim 10^{-6} \text{ s} \sim 10^{-4} \text{ s}$: a **era Hádron** caracteriza-se por uma energia média entre 200 MeV e 3 MeV e temperatura da ordem de 10^{14} K. Nessa era os quarks deixam de existir como partículas isoladas e combinam-se em dois e três para formar os prótons, nêutrons, e suas respectivas antipartículas. Os prótons e nêutrons se aniquilam com suas respectivas antipartículas mas finalizam essa era com um excesso de prótons e nêutrons.

$\sim 10^{-4} \text{ s} \sim 10^{-1} \text{ s}$: a **era Lépton** caracteriza-se por uma energia média da ordem de 4 MeV à 1 MeV, com uma temperatura de cerca de 10^{12} K. Nesse período, também conhecido como era das partículas leves, a temperatura não é suficiente para a colisão de fótons produzirem prótons e nêutrons, há apenas a produção de pares de elétron-pósitron. Prótons e nêutrons aniquilam-se com suas respectivas antipartículas, mas o número de nêutrons sobreviventes determina as abundâncias dos elementos primordiais. Os léptons e anti-léptons aniquilam-se, respectivamente, e produzem um excesso de léptons igual ao número de prótons. Com isso, a carga líquida do Universo torna-se nula. Por fim, neutrinos e anti-neutrinos não interagem mais com prótons e nêutrons, o que torna o Universo transparente para os neutrinos.

$\sim 1 \text{ s} \sim 10 \text{ s}$: com uma energia média da ordem da massa do elétron, de cerca de 0,5 MeV e temperatura da ordem de 10^{10} K, a **era dos Fótons** caracteriza-se pela aniquilação dos pares de elétron-pósitron quando a temperatura cai abaixo de sua massa de repouso. Apenas um pequeno excesso de elétrons (mais ou menos um a cada bilhões de fótons) sobrevive após a aniquilação. Os fótons produzidos encontram-se em equilíbrio térmico e a temperatura de radiação aumenta, se comparada à temperatura dos neutrinos (os quais desacoplaram anteriormente). Colisões entre partículas e antipartículas continuam a adicionar fótons ao Universo, mas a colisão de fótons não adiciona mais partículas à ele. Apesar da taxa de aniquilação de matéria ser superior à taxa de produção (o que gera uma diminuição do conteúdo de matéria do Universo, e um aumento do conteúdo de radiação), existe uma não-simetria entre matéria e antimatéria, a qual acarreta em um excesso de matéria no Universo em relação à quantidade de antimatéria.

$\sim 3 \text{ min} \sim 20 \text{ min}$: a **Nucleossíntese** é uma era caracterizada por uma energia média da ordem de 0,05 MeV e uma temperatura de cerca de 10^9 K, na qual o Universo esfriou ao ponto de prótons e nêutrons se fundirem para a formação de hélio e núcleo de deutério, ao utilizar todos os nêutrons sobressalentes. A nucleossíntese primordial formou hidrogênio,

deutério, hélio, e uma pequena quantidade de lítio. Ao final dessa era, o Universo continha uma espécie de mistura primordial de hidrogênio, hélio e lítio necessária para a formação das estrelas. Os demais elementos se formaram, posteriormente, no interior das estrelas e em explosões de supernovas.

~ **300.000 anos ~ 380.000 anos:** a **era dos Núcleos** caracteriza-se por uma energia média da ordem de elétron-volt e temperatura superior à 3000 K, na qual o Universo seria constituído de um plasma com núcleos de hidrogênio, núcleos de hélio e elétrons livres. Uma grande parte dos elétrons livres mantinha os fótons em colisão contínua com eles, o que acarretaria na opacidade do Universo.

~ **380.000 anos ~ 500.000 anos:** a **era da Recombinação**¹ caracteriza-se por uma energia média da ordem de 0,1 eV e temperatura de cerca de 3000 K, na qual fótons não mais interagem com partículas carregadas, o que faz o Universo parecer transparente para eles. Tais fótons são evidentes nos dias atuais na radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background Radiation*), a CMB. As flutuações de temperatura da CMB, induzidas pela distribuição de matéria heterogênea na recombinação, sobrevive até o presente momento e fornece informação direta sobre o estado do Universo na última superfície de dispersão. É importante destacar que o hélio recombinau e tornou-se neutro antes deste período, e sua relevância está ligada à sua influência na velocidade do som, se levarmos em conta o cálculo das flutuações de fundo em microondas.

~ **500.000 anos ~ 1 bilhão de anos:** a **era dos Átomos** caracteriza-se por uma energia média de cerca de 0,03 eV e temperaturas entre 3000 K e 20 K, na qual o Universo continuou a expandir e esfriar, a medida que átomos, inicialmente quentes, combinaram-se lentamente e esfriaram-se, ou seja, a matéria lentamente se condensou, e formou nuvens protogalácticas.

~ **10⁸ anos ~ 10⁹ anos:** a era de formação das **Galáxias** e **Estrelas** caracteriza-se por uma energia média entre ~ 0,013 eV e ~ 0,0013 eV e temperaturas entre ~ 20 K e ~ 3 K, na qual a formação de estruturas pode ser descrita através da gravidade newtoniana. As primeiras estrelas formaram-se entre 100 e 200 milhões de anos, onde, como dito anteriormente, elementos foram produzidos em seus núcleos e em explosões de supernovas. Em cerca de ~ 1 bilhão de anos após o *Big Bang*, ocorreu a formação das galáxias e os aglomerados de galáxias, a partir de pequenas inomogeneidades iniciais (resultantes de instabilidades gravitacionais).

¹O nome dessa era vem da recombinação dos elétrons com o núcleo atômico, apesar dos elétrons e o núcleo atômico não terem se combinado em uma era anterior.

$\sim 9,2 \times 10^9$ anos: a era de formação **Solar** e do **Sistema Solar** caracteriza-se por uma energia média de cerca de $\sim 0,0009$ eV e temperatura da ordem de ~ 3 K. A formação do Sol, e do Sistema Solar teria ocorrido através do colapso de uma onda de choque (proveniente de uma explosão de supernova), com uma nebulosa conhecida como nebulosa Solar.

$\sim 13,8 \times 10^9$ anos: a temperatura do **Universo atual**, o qual encontra-se em expansão acelerada (decorrente da energia escura), é de ~ 3 K com uma energia média de cerca de $\sim 0,0006$ eV. Em grandes escalas, o Universo pode ser considerado homogêneo, mas no Universo local (composto de galáxias e aglomerados de galáxias) a distribuição dos aglomerados de galáxias é aproximadamente uniforme, ou seja, à medida que a escala da estrutura que está sendo investigada aumenta, as flutuações na densidade média da matéria diminuem, e o número de aglomerados de galáxias contidos em uma região de um determinado volume, contendo muitos aglomerados, é essencialmente independente da localização dessa região. Em outras palavras, apesar de estar em expansão acelerada, o Universo, em grandes escalas, pode parecer o mesmo não importa em qual galáxia estejamos situados, isto é, não existe um centro definido para o Universo. A nossa galáxia (a Via Láctea) reside em um aglomerado de cerca de duas dúzias de galáxias que faz parte de um outro aglomerado chamado superaglomerado local. A Via Láctea, juntamente com a galáxia M31, são as galáxias mais massivas e luminosas do Grupo Local, e contribuem com cerca de 86% da luminosidade total compreendida em uma esfera de 3 Mpc.

Um breve resumo da história evolutiva do Universo pode ser observado na Figura 3.

1.1.1 O Universo Atual

A composição de matéria do Universo é permeada por CMB com temperatura $T \simeq 2.73$ K, e matéria bariônica (cerca de um bárion por 10^{10} fótons, sem uma quantidade substancial de antimatéria), cuja composição química da matéria bariônica é de cerca de 75% hidrogênio, 25% hélio, mais traços de elementos mais pesados.

Pode-se afirmar que os bárions contribuem com apenas uma pequena porcentagem da densidade de energia total do Universo, cerca de 4,9%, onde o resto seria formado por uma componente escura, a qual é composta de matéria escura fria (*cold dark matter*), CDM, com pressão desprezível ($\sim 26,6\%$), e energia escura com pressão negativa ($\sim 68,5\%$).

Para temperaturas abaixo de alguns MeV, os principais componentes da matéria do Universo, os quais desempenham papéis importantes, são: a radiação primordial, os bárions,

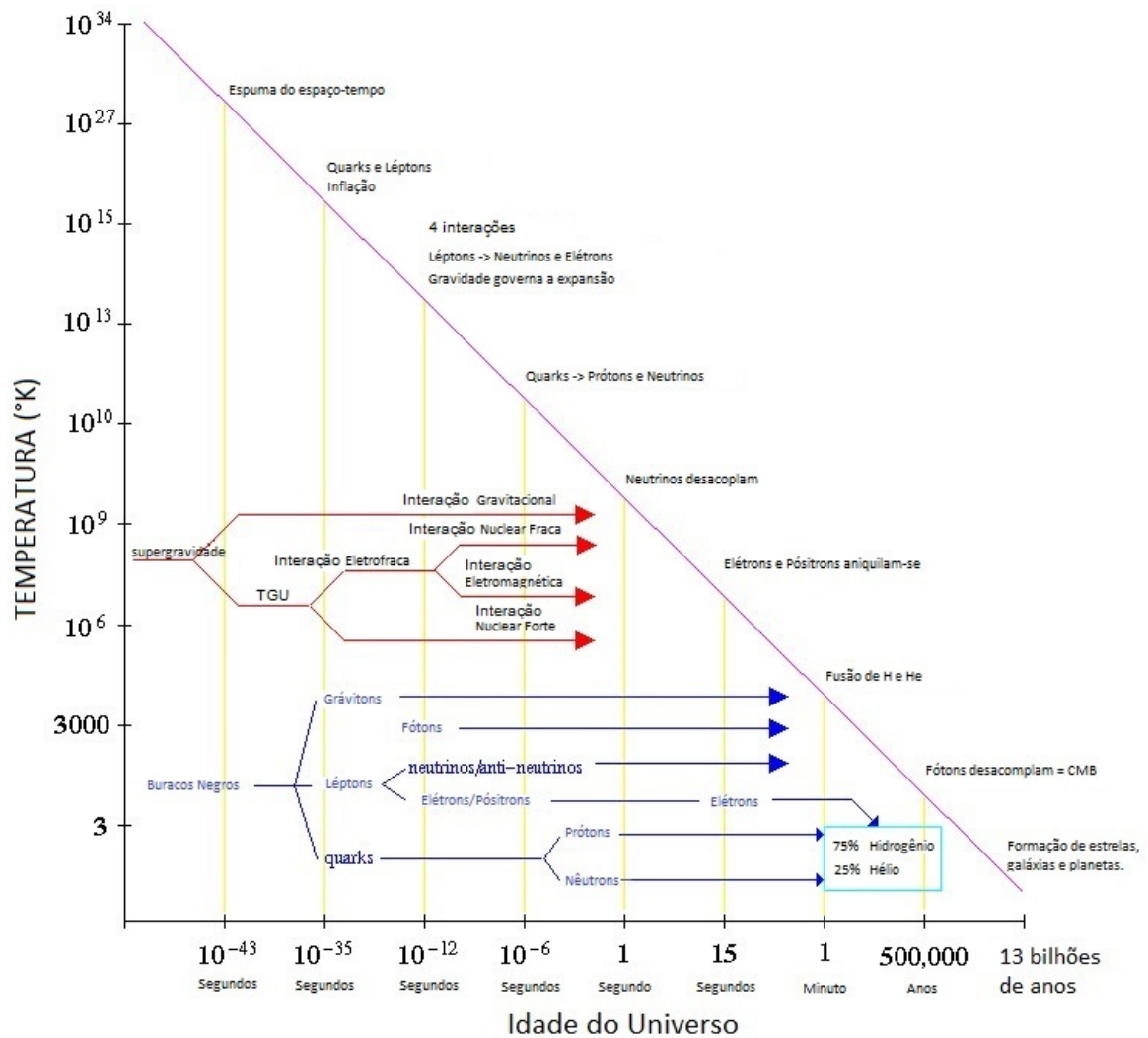


Figura 3: Breve resumo da evolução do Universo. (Imagem: *The birth of the Universe* - <http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec20.html>).

os elétrons, os neutrinos, e a energia e a matéria escura (MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

O Universo atual encontra-se em expansão acelerada segundo a Lei de Hubble ($\bar{v} = H_0 \bar{r}$), com H_0 a constante de proporcionalidade conhecida como constante de Hubble, e, apesar de poder ser homogêneo e isotrópico em escalas maiores que 100 Mpc, possui uma estrutura inhomogênea bem desenvolvida em escalas menores, isto é, em grandes escalas o Universo seria suave e pode ser definido através do princípio cosmológico (também conhecido como o princípio de Copérnico), o qual declara que o Universo em grandes escalas é uniforme e deve parecer o mesmo para todos os observadores.

A homogeneidade afirma que o Universo assemelha-se em cada ponto, isto é, possui um valor de densidade média igual em todos os lugares em um dado momento (apesar da

densidade poder variar com o tempo). Já a isotropia afirma que o Universo parece o mesmo em todas as direções.

Ou seja, não há um eixo preferencial ao longo do qual a maioria das galáxias esteja alinhada. Todavia, a homogeneidade não implica em isotropia, e a isotropia ao redor de um ponto único também não implica em homogeneidade, porém, a isotropia ao redor de qualquer ponto do Universo, combinado com o princípio cosmológico, implica em isotropia em todos os pontos do Universo, e isso implica necessariamente em homogeneidade. Uma das evidências mais fortes do princípio cosmológico é a CMB que permeia o Universo, uma vez que ela parece a mesma em todas as direções de observação (RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

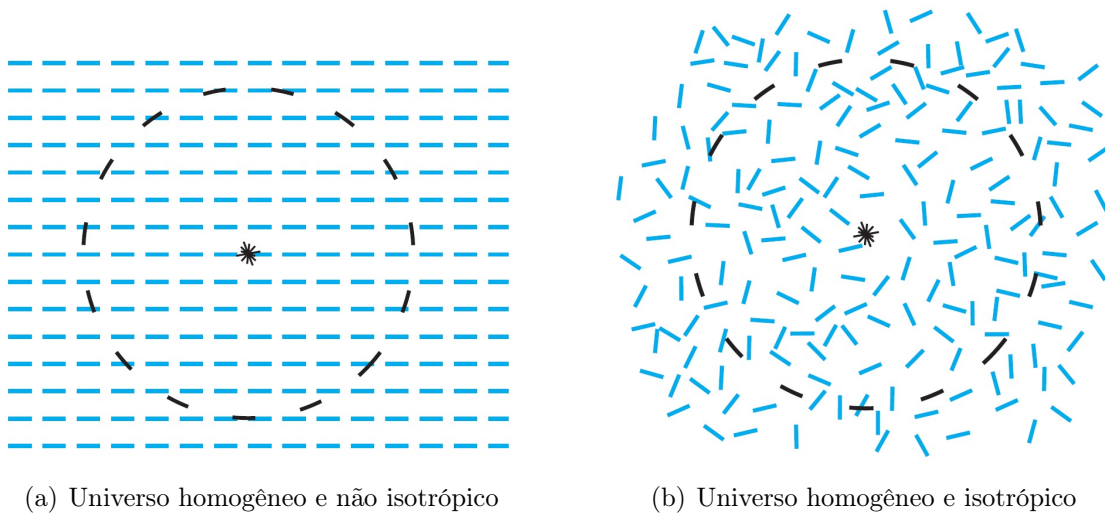


Figura 4: Ilustração para um universo homogêneo e não isotrópico (a), e um universo homogêneo e isotrópico (b). O círculo pontilhado é a parte observável do Universo. (Imagens: Pasachoff e Filippenko (2007)).

A métrica responsável por descrever o Universo homogêneo e isotrópico é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) , definida como,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (1.1)$$

com assinatura $(-, +, +, +)$, onde t é a variável temporal, conhecida como tempo próprio cosmológico, ou tempo cósmico, isto é, a medida temporal de um observador cujo universo expande uniformemente ao seu redor; r , θ , e ϕ são coordenadas esféricas comóveis², e $a(t)$, como mencionado anteriormente, é o fator de escala do Universo, o qual descreve como as

² r , θ , e ϕ são consideradas coordenadas comóveis à expansão do Universo, se, não havendo a atuação de forças externas, uma partícula em um determinado conjunto de coordenadas (r, θ, ϕ) permanecer em repouso.

distâncias em um universo homogêneo e isotrópico crescem ou decrescem com o tempo, ou seja, é uma medida da taxa de expansão e ou contração do Universo. Por fim, temos que a constante k corresponde à curvatura espacial constante, com $k = 0, 1, -1$ para um universo plano, fechado (curvatura constante positiva), e aberto (curvatura constante negativa), respectivamente (LIDDLE, 1996; RYDEN, 2006).

A forma de $a(t)$ depende do tipo de material do qual o Universo encontra-se preenchido. Este material é determinado pela densidade de energia ρ e pela pressão p , relacionados através da equação de estado definida como $p = p(\rho)$, cujas propriedades do material são responsáveis pela expansão do Universo.

Seja,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad , \quad (1.2)$$

as equações de campo de Einstein, com,

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad , \quad (1.3)$$

o tensor energia-momento, $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico, Λ a constante cosmológica, G a constante gravitacional, c a velocidade da luz, e R o escalar de curvatura; a fim de particularizar as equações de Einstein para um universo homogêneo e Isotrópico, definimos $R_{\mu\nu}$ e R a partir dos símbolos de Christoffel da métrica de FLRW (1.1), isto é,

$$\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2}g^{lm}(\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) \quad , \quad (1.4)$$

do qual inferimos,

$$R = g^{ik}R_{ik} = -\frac{6\ddot{a}}{a} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{k}{a^2} \quad . \quad (1.5)$$

A partir de (1.2), e (1.3) para o fluido perfeito, é possível definir,

$$H(t)^2 + \frac{k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) \quad , \quad (1.6)$$

a equação de Friedmann, a qual descreve a expansão do Universo, e para a qual assumimos $\Lambda = 0$, com $H = \frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de Hubble, e $(\dot{})$ a derivada com relação ao tempo t .

Ao considerar a conservação do tensor energia-momento do fluido perfeito em (1.2), defini-se também,

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad , \quad (1.7)$$

a equação de conservação da matéria, a qual descreve como a densidade do material que preenche o Universo evolui com o tempo.

Ademais, a partir de ambas as equações é possível derivar uma terceira equação,

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a \quad , \quad (1.8)$$

a equação da aceleração, a qual descreve a aceleração do fator de escala, e para a qual também assumimos $\Lambda = 0$.

Ao levar-se em consideração as equações (1.6) e (1.8), percebe-se que a taxa de expansão do universo é determinada pela densidade de energia e pela equação de estado dos seus constituintes, como dito anteriormente. Ou seja, a combinação das equações (1.6) e (1.7) ou (1.8), acrescida da equação de estado $p = p(\rho)$, forma um sistema completo de equações que determinam as funções $a(t)$ e $\rho(t)$.

Em outras palavras, o futuro do Universo não depende apenas da sua geometria mas também da sua equação de estado, definida como $p = \alpha\rho$ para fluidos perfeitos de importância cosmológica, com $p = \frac{1}{3}\rho$ para a radiação e $p = 0$ para a matéria não-relativística, isto é, poeira (LIDDLE, 1996; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

No que diz respeito ao futuro do Universo, muitas galáxias ainda produzem novas estrelas, mas muitas outras já esgotaram o seu suprimento de gás, e em cerca de 30 bilhões de anos as galáxias estarão cada vez mais escuras, e preenchidas com estrelas mortas e/ou em suas últimas fases evolutivas. Este fenômeno acarretaria em uma menor quantidade de planetas capazes de suportar a vida (como a conhecemos hoje em dia).

O Universo poderá, então, expandir para sempre, e entrar em um processo conhecido como *Big Chill* (Grande Frio, em tradução livre), também chamado de *Big Freeze*. Ou, em alternativa ao *Big Chill*, teríamos o chamado *Big Crunch*, isto é, se a massa do Universo for grande o suficiente, a gravidade começaria a agir de maneira contrária à expansão, ou seja, a gravidade reverteria a expansão, e toda a matéria do Universo e sua energia colapsariam (PEEBLES et al., 1994). Uma outra possibilidade seria o *Big Rip* (Grande Ruptura), uma

teoria cosmológica a qual exprime que à medida que o universo se expande, toda a matéria será gradualmente dilacerada, caso a taxa de expansão acelerada continue elevada.

Acerca da nossa existência aqui na Terra, em cerca de 5 bilhões de anos, a fusão esgotará o hidrogênio no centro do Sol e a pressão interna do seu núcleo diminuirá, uma vez que as temperaturas ainda não são altas o suficiente para fundir o hélio em elementos mais pesados. A gravidade agirá no núcleo, o que causará o seu reaquecimento. O hidrogênio começará, então, a queimar de forma mais intensa. Essa nova energia causará uma expansão das camadas externas do Sol, e fará com que ele se torne uma estrela do tipo gigante vermelha.

Em uma segunda fase, o núcleo do Sol, em contração, se tornará tão quente que eventualmente o hélio começará a se fundir em núcleos de carbono e oxigênio, e transformará o Sol em uma estrela mais fria e mais fraca. Sua atmosfera aumentará durante essa transição, para uma distância de cerca de 1 unidade astronômica (atual distância média da Terra ao Sol), o que implicará em Mercúrio, Vênus e, possivelmente, a Terra gradualmente engolidos pelo Sol (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

As características do Universo atual, e seu provável destino, são possíveis indicativos dos acontecimentos que ocorreram nos primórdios do Universo, o qual será o foco da nossa análise, e, portanto, explanado de forma mais aprofundada no item (1.1.2) do presente Capítulo.

1.1.2 O Universo Primitivo

Ao compreender o reino das eras iniciais da história do Cosmo, o Universo primitivo corresponde a um período anterior à 1 s após o *Big Bang* (WEINBERG, 1993; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

Nesta época, o Universo era composto por várias espécies de partículas separadas, as quais interagem entre si, como prótons, nêutrons, fótons, elétrons, pósitrons, neutrinos e anti-neutrinos, cujas propriedades são especificadas através da função de distribuição de cada espécie (LIDDLE, 2015; LYTH, 2016).

Destacam-se os seguintes processos de colisão, que ocorriam com frequência nesse período: (i) a colisão de dois fótons gerando um elétron e um pósitron; (ii) a colisão de um neutrino com um anti-neutrino, gerando um elétron e um pósitron; (iii) a colisão de um fóton e um elétron, gerando um nêutron e um neutrino. Para os quais, tornam-se válidos todos os processos reversos, o que corresponde ao chamado equilíbrio térmico, como pode ser

observado na Tabela 1 (LYTH, 2016).

Tabela 1: Processos de colisão de partículas.

fóton + fóton	\rightleftharpoons	elétron + pósitron
neutrino + anti-neutrino	\rightleftharpoons	elétron + pósitron
fóton + elétron	\rightleftharpoons	nêutron + neutrino

O estado de equilíbrio térmico, no qual o número de distribuições de todas as partículas fora determinado pelas leis da mecânica estatística, perdurou durante todo o primeiro estágio do Universo, e encerrou próximo ao primeiro segundo de existência do mesmo. Lembranças do estado de equilíbrio térmico podem ser observadas ao medirmos a abundância atual de hélio, da radiação de microondas, ou até mesmo dos neutrinos (WEINBERG, 1993).

Tocante às interações fortes entre as partículas elementares no Universo primitivo, uma característica importante é que tais interações prendem os prótons e os nêutrons juntos em um núcleo atômico, e afetam apenas uma classe de partículas conhecidas como hádrons.

Mas como lidar com altas temperaturas, quando hádrons e anti-hádrons estavam presentes em grandes quantidades? Alguns pesquisadores acreditam que não existe um hádron elementar, enquanto outros pesquisadores defendem que nem todas as partículas são iguais, isto é, algumas são elementares e outras são meras combinações das partículas elementares. Neste caso, as partículas elementares consistiriam do fóton e todos os léptons conhecidos, mas nenhuma delas de hádrons. No entanto, os hádrons seriam combinações de partículas mais fundamentais, isto é, os quarks (partículas normalmente ligadas por glúons, para a formação de prótons e nêutrons) (WEINBERG, 1993; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

Em $t \simeq 1$ s a temperatura do Universo era da ordem de 10^{10} K, e as energias típicas dos fótons não eram suficientes para produzir, espontaneamente, pares de elétron-pósitron. Com a aniquilação de pósitrons e elétrons, mais fótons foram produzidos, e nêutrons começaram a decair em prótons, elétrons e neutrinos, o que teria acarretado no desequilíbrio entre prótons e nêutrons, devido ao não reabastecimento rápido do suprimento de nêutrons (uma vez que nêutrons são levemente mais massivos do que os prótons e, portanto, mais difíceis de se produzir). O número de nêutrons seria de apenas um quarto do número de prótons (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

Para temperaturas acima de 10^{10} K, as energias típicas dos fótons poderiam ser comparadas às energias de ligação nuclear (da ordem de 1 MeV), e para um Universo ainda mais

anterior à esse momento, os fótons seriam energéticos o suficiente para destruir núcleos (ao separar prótons e nêutrons uns dos outros), o que torna incoerente pensar em nêutrons e prótons em temperaturas da ordem de 10^{12} K. Ao invés disso, os quarks (seus constituintes) encontravam-se livres para vagar em um mar denso. Essa fase é conhecida como quark-hádron, a transição na qual os quarks iniciaram a sua condensação em prótons e nêutrons (LIDDLE, 2015).

Em uma temperatura ainda mais elevada, da ordem de 10^{15} K, o Universo teria passado por uma transição de fase associada não às interações fortes mas às interações fracas (responsáveis por certos processos de decaimento radioativo, como o decaimento de um nêutron, ou de forma mais geral, por qualquer reação que envolva um neutrino), chamada temperatura crítica. Para temperaturas abaixo dessa temperatura, ocorre a quebra de simetria entre as interações eletromagnética e fraca (WEINBERG, 1993).

No intervalo temporal de $t = 10^{-35}$ s à $t = 10^{-6}$ s após o *Big Bang*, o que equivale a temperaturas acima da temperatura crítica, existia equilíbrio entre partículas, antipartículas, e fótons. Pares de partículas-antipartículas aniquilavam-se e produziam fótons, e fótons, espontaneamente, formavam pares de partículas-antipartículas. Em grande parte desse período, quarks eram abundantes e não vinculados. Cada quark (matéria) possuía um antiquark (antimatéria) correspondente, mas devido à uma pequena assimetria na formação deles (cerca de 1 em cada bilhão) deu-se início ao processo de existência da vida atual (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

A teoria das partículas, a qual descreve interações abaixo da escala de TeV, e que compreende a teoria eletrofraca unificada e a cromodinâmica quântica, é conhecida como Modelo Padrão. Duas questões cosmológicas importantes, além do Modelo Padrão, são a natureza das partículas massivas de interação fraca (uma possível componente da CDM), e a geração da assimetria bariônica no Universo (MUKHANOV, 2005).

Grande parte do que sabemos atualmente sobre o Universo, nos foi apresentado através dos fótons, isto é, observações precisas do Universo atual são capazes de elucidar os tipos de processos que ocorreram no decurso dos primeiros estágios do mesmo, e/ou talvez esclarecer a natureza das leis físicas em energias tão altas que seria inconcebível explorar por outros meios. Por exemplo, este período denso e quente do Universo é corroborado através das evidências observacionais da CMB, uma vez que este cenário seria a condição necessária para a produção de radiação (PEEBLES et al., 1994; LIDDLE, 1996; RYDEN, 2006).

Portanto, saber que existem mais bárions do que anti-bárions no Universo, e esse relativo excesso de bárions ser suficiente para explicar a abundância de elementos leves e as

observações das flutuações da CMB, torna o Modelo padrão detentor dos ingredientes necessários para a geração da assimetria bariônica, no qual o número de bárions por fóton é da ordem de 10^{-10} para o Universo atual (corroborado por dados observacionais), mas da ordem de 10^{-9} para os primeiros estágios do Universo (MUKHANOV, 2005; LYTH, 2016).

Porém, permanece o questionamento sobre o quão próximo do início de tudo o nosso conhecimento atual das leis da física é capaz de chegar, ao considerar a possibilidade lógica de um começo em $t = 0$ para $a(t) = 0$ (conhecido como o momento da singularidade inicial) (WEINBERG, 1993).

Em cerca de 10^{-24} s, apesar da interação gravitacional ser fraca em altas temperaturas, cogita-se que o campo gravitacional do Universo teria sido grande o suficiente para produzir pares de partículas-antipartículas. Contudo, o número de partículas produzidas dessa forma teria tido uma contribuição desprezível comparada à quantidade de partículas já existentes no equilíbrio térmico. Portanto, ao referir-se ao Universo primitivo, a gravidade não teria um efeito significativo em suas propriedades internas, ainda que tenha desempenhado um papel importante na história do Universo, visto que ela controla a relação entre a densidade e a taxa de expansão do mesmo. No entanto, para temperaturas da ordem de 10^{32} K, as energias de partículas em equilíbrio térmico podem ser tão grandes que a interação gravitacional entre elas torna-se tão importante quanto as outras interações (WEINBERG, 1993).

Portanto, independentemente de $t < 1$ s após o começo de tudo compreender algo praticamente desprezível (em um contexto macroscópico como é o caso do Universo atual), muito aconteceu, ou especula-se que aconteceu, uma vez que as escalas temporais e de distância das interações eram muito menores que as atuais (PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007).

Posto isto, apesar das limitações dos atuais aceleradores de partículas de altas energias à certas temperaturas, somos aptos a atingir, com confiança substancial, conclusões para $t = 10^{-12}$ s após o *Big Bang*, cujas maiores energias de partículas alcançadas pelos aceleradores atuais são da ordem de 100 GeV (o que equivale à 10^{15} K).

Se quisermos obter informações sobre momentos ainda mais próximos à $t = 0$, dependemos da análise do nosso grande acelerador de partículas, o Universo primitivo. Assim como, de observações astrofísicas e cosmológicas, de fontes astrofísicas de partículas altamente energéticas, uma vez que os fenômenos físicos de calor do Universo primitivo evidenciam a simplicidade essencial da natureza (WEINBERG, 1993; MUKHANOV, 2005; RYDEN, 2006; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

Quando o Universo excede uma certa densidade, e certas temperaturas, efeitos quânticos entram em ação e tornam-se importantes (inclusive para a física gravitacional), o que faz com que a relatividade geral (a qual parece ser inconsistente com a mecânica quântica) não possa ser aplicada no breve intervalo de tempo do nível de Planck ($t < 10^{-43}$ s), do qual sabe-se praticamente nada. Contudo, vale ressaltar que em energias um pouco abaixo dessa escala, o espaço-tempo clássico começa a fazer sentido. Por exemplo, para $t = 10^{-38}$ s (momento no qual ocorreu a inflação), as leis da física que regem os acontecimentos desta época seriam as leis da física clássica e não da física quântica (MUKHANOV, 2005; LIDDLE, 2015).

Assim sendo, a fusão da física quântica com a física gravitacional, a qual recebe o nome de teoria da gravitação quântica, estabelece-se como fundamental em escalas de energia da ordem de Planck, ou seja, cerca de $\sim 10^{19}$ GeV, onde cogita-se a concepção de uma espécie de espuma espaço-temporal na qual pacotes de tempo e espaço teriam oscilado entre existência e não existência (MUKHANOV, 2005; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LIDDLE, 2015).

Sob esta perspectiva, ocorre na década de 1960, com os trabalhos pioneiros de Bryce Dewitt (DEWITT, 1967), Charles Misner (MISNER, 1972), e John Wheeler (WHEELER, 1968), o estabelecimento da cosmologia quântica, isto é, a aplicação das leis da física quântica à cosmologia, com a qual surge a possibilidade da explicação e/ou do entendimento dos eventos que desenrolaram-se no Universo primitivo, mais precisamente na era de Planck, uma vez que ainda não há uma concordância sobre uma definição precisa e fundamentada ao que concerne a teoria da gravitação quântica (GUTH, 1981; HARTLE, 1987; WEINBERG, 1993; ATKATZ, 1994; LIDDLE, 1996; HALLIWELL, 2002; PASACHOFF; FILIPPENKO, 2007; LYTH, 2016).

Deste modo, o presente trabalho visa, através da aplicação de cálculos numéricos, elucidar os possíveis eventos dos primórdios do Universo, tais como a emersão de um modelo de universo homogêneo e isotrópico, preenchido com um fluido de poeira e gás de Chaplygin cuja métrica é a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com $k=1$, através do processo de tunelamento quântico.

Para isso, após esse momento introdutório, no qual estabelecemos a ambientação e características principais da evolução do Universo, com ênfase em seus primórdios, faremos um breve resumo dos tópicos e formalismos fundamentais da cosmologia quântica, assim como delinearemos os aspectos teóricos, base para a compreensão dos processos aqui analisados.

Em seguida, apresentaremos todos os pontos chave do modelo de universo por nós con-

siderado, tanto do modelo clássico, quanto da sua eventual quantização. Ulteriormente, será exposta a metodologia aplicada ao nosso modelo, os resultados, e, por fim, nossas considerações finais e perspectivas para futuros trabalhos.

2 Cosmologia Quântica

Com a publicação da relatividade geral em 1915, e da mecânica quântica em 1926, não demorou muito para que já na década de 1930 assimilassem a possibilidade do campo gravitacional se comportar de forma quântica. Podemos destacar o trabalho de Rosenfeld (1930), o qual buscou desenvolver métodos gerais para lidar com as dificuldades técnicas que envolviam quantizar a gravidade, ao aplicar o método de Pauli para a quantização de campos com grupos de calibre, para as equações de campo de Einstein linearizadas. Contudo, sugestões teriam sido propostas anos antes, mais precisamente em 1916, quando Einstein havia alertado sobre a possibilidade de efeitos quânticos provocarem modificações na relatividade geral, e em 1926 com a indicação de Oskar Klein sobre uma eventual modificação dos conceitos de espaço-tempo, decorrente da gravidade quântica (DEWITT, 1967; ROVELLI, 2004; ESPOSITO, 2011).

Na medida em que a natureza e as leis da física são fundamentalmente quânticas, a cosmologia quântica é a aplicação da mecânica quântica ao Universo como um todo, o que permite uma maior compreensão ao que concerne sua origem, evolução e destino, assim como o comportamento da matéria e da energia em estágios primordiais do Cosmo, e as condições iniciais as quais levaram à sua existência e à formação de estruturas como as que conhecemos atualmente (BOJOWALD, 2015).

As leis clássicas divergem em energias e temperaturas da ordem da escala de Planck ($t < 10^{-43}$ s), na qual a densidade média é demasiadamente maior em ordens de magnitude do que a densidade média encontrada em qualquer regime observacionalmente acessível, o que equivale à mais de um trilhão de massas solares em uma região do tamanho de um único próton, e a medida de distância dada pelo comprimento de Planck $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m é muito menor do que qualquer coisa que possa ser sondada por aceleradores de partículas. Assim, a cosmologia quântica, a qual foi fundamentada em uma das primeiras teorias de gravitação quântica, a Teoria da Relatividade Geral Quântica, pode ser utilizada como ferramenta para a compreensão dos eventos que ocorrem em tais condições de temperatura e energia (HARTLE, 1987; ATKATZ, 1994; ESPOSITO, 2011; BOJOWALD, 2015; KIEFER;

SANDHÖFER, 2022).

Ademais, apesar de todas as perguntas ainda sem resposta, a cosmologia quântica apresenta desafios e reflexões fascinantes, na qual uma de suas maiores expectativas é uma possível solução para a singularidade da cosmologia clássica (derivada da relatividade geral), dado que $a(t) = 0$ não pode ser evitado classicamente (BOJOWALD, 2015).

Embora a cosmologia quântica tenha, efetivamente, iniciado com o trabalho de Bryce DeWitt (1967) para a quantização do universo fechado de Friedmann preenchido com matéria, ao longo dos anos, inúmeros trabalhos foram propostos e desenvolvidos com ênfase em três linhas principais de pesquisa: (i) a linha de pesquisa covariante, a qual busca construir uma teoria quântica de campos das flutuações da métrica, sobre um espaço plano de Minkowski, ou alguma outra métrica espacial de fundo; (ii) a soma sobre histórias, uma tentativa de definição da teoria através da utilização de uma versão quântica da integral funcional de Feynman; e, por fim, (iii) a linha de pesquisa canônica (ROVELLI, 2004).

Iniciada na década de 1950 por Bergmann e Dirac, a linha de pesquisa canônica, a qual consiste no desenvolvimento da estrutura canônica da relatividade geral, foi simplificada por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) na década de 1960, e por Ashtekar na década de 1980, em que, uma das maiores dificuldades do formalismo canônico seria o fato da relatividade geral ser uma teoria com vínculos.

As abordagens canônicas¹ procuram dividir o espaço-tempo em espaço e tempo e almejam um formalismo hamiltoniano, como o formalismo ADM, no qual a métrica quadrimensional pode ser interpretada como a evolução de uma métrica tridimensional no tempo, em analogia à mecânica quântica, e o qual permite reescrever as equações de campo de Einstein em primeira ordem (KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

O formalismo ADM, o formalismo canônico da relatividade geral, base para a cosmologia quântica, será descrito em maiores detalhes na Seção (2.1) do presente Capítulo.

2.1 O Formalismo ADM

O formalismo canônico da relatividade geral, desenvolvido na década de 1960 por Arnowitt, Deser e Misner (2008) é um dos passos necessários para a estruturação da cos-

¹Trabalhos que seguem a linha de estudo canônico, podem ser conferidos em (ESPOSITO, 2011). Trabalhos e formalismos, os quais ajudaram a estabelecer a cosmologia quântica, inclusive a base teórica da análise aqui apresentada, encontram-se (cronologicamente) no apêndice B de (ROVELLI, 2004).

mologia quântica, uma vez que a equação de Wheeler-DeWitt (equação fundamental da cosmologia quântica) advém da aplicação deste formalismo.

O desenvolvimento do capítulo se dará da seguinte forma, primeiramente será introduzido o formalismo lagrangiano da relatividade geral, seguido de um breve prelúdio matemático (composto de definições necessárias para o desenvolvimento do formalismo hamiltoniano). Posteriormente, após as explanações sobre a decomposição 3 + 1 do espaço-tempo, e da projeção das equações de campo de Einstein, será apresentado o desenvolvimento da formulação hamiltoniana da relatividade geral.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta Seção são: (DANIELI; MOLINARI, 2020; JHA, 2022).

2.1.1 Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral

Conhecida como equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4}GT_{\mu\nu} \quad , \quad (2.1)$$

a relação acima (introduzida brevemente no Capítulo de introdução) pode ser definida como a distribuição da matéria para a geometria do espaço-tempo, na qual a gravidade se acompla ao tensor energia-momento da matéria, com $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura, Λ a constante cosmológica, G a constante gravitacional, c a velocidade da luz, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento, e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico. Assumiremos $\Lambda = 0$ e $G = c = 1$.

A abordagem variacional para a relatividade geral foi desenvolvida inicialmente por Einstein e Hilbert em 1915. Nesta abordagem, define-se a ação gravitacional como,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int_V d^4x \sqrt{-g} R \quad , \quad (2.2)$$

com V o volume sobre o qual a integração é realizada e g o determinante (negativo) do tensor métrico.

A ação da matéria,

$$S_M = \int_V d^4x \sqrt{-g} L_M \quad , \quad (2.3)$$

é a contribuição dos campos de matéria ϕ , com L_M a lagrangiana dependente apenas dos

coeficientes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Seja a ação total definida como,

$$S = S_H + S_M \quad , \quad (2.4)$$

as equações de campo de Einstein podem ser derivadas a partir da estacionaridade de S sob variações arbitrárias de $g_{\mu\nu}$.

Variação do termo gravitacional.

Dada a variação da lagrangiana L_H

$$\delta L_H = \frac{1}{16\pi} [\delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g})] = -\frac{1}{16\pi} \left[\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \right] \quad , \quad (2.5)$$

aplica-se a fórmula de Jacobi

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad , \quad (2.6)$$

com o intuito de obter o seguinte resultado para δL_H ,

$$\delta L_H = \frac{1}{16\pi} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \quad . \quad (2.7)$$

Se for considerada a identidade de Palatini, isto é,

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \quad , \quad (2.8)$$

ou, de forma análoga,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} \quad , \quad (2.9)$$

é possível encontrar a seguinte relação para o último termo de (2.7)

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\nabla_\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\mu\Gamma_{\rho\nu}^\rho] \\
&= \sqrt{-g}\nabla_\rho[g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\rho\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\mu] \quad ,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

o qual é ignorado pois os termos de fronteira não são considerados.

Após realizar as devidas substituições, tem-se por fim, a variação do termo de Hilbert, isto é, a variação do termo gravitacional da ação (2.4)

$$\delta S_H = \frac{1}{16\pi} \int_V \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \tag{2.11}$$

Variação do termo de matéria.

De maneira análoga à variação do termo gravitacional, a variação do termo de matéria se dará da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int_V \left[\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + L_M \delta \sqrt{-g} \right] d^4x \\
&= \int_V \left[\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}L_M g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&= -\frac{1}{2} \int_V T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad ,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

com,

$$T_{\mu\nu} \equiv -2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}} + L_M g_{\mu\nu} \quad , \tag{2.13}$$

para o tensor energia-momento.

Visto que a variação da ação total (2.4) é $\delta S = \delta S_H + \delta S_M$, temos,

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_V \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad . \tag{2.14}$$

Com a arbitrariedade de $\delta g^{\mu\nu}$, a estacionariedade de S requer que o integrando seja idêntico à zero, ou seja, $\delta S = 0$ (o princípio de mínima ação), o que resulta em,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad , \tag{2.15}$$

ou seja, implica nas equações de campo de Einstein satisfeitas, e o sistema em estado de equilíbrio, como gostaríamos de encontrar.

Logo, é possível inferir a conservação do tensor energia-momento, isto é

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.16)$$

uma vez que (2.15) pode ser reescrita como $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, e as identidades de Bianchi determinam que $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$ (com $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein).

2.1.2 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

2.1.2.1 Prelúdio Matemático e Definições

Considere $\mathfrak{N} \subset M$, uma subvariedade, através de uma incorporação $\tilde{\Phi} : \mathfrak{N} \rightarrow M$, com $\tilde{\Phi} : \mathfrak{N} \rightarrow \tilde{\Phi}(\mathfrak{N})$ um difeomorfismo, no qual $\tilde{\Phi}(\mathfrak{N}) \subset M$ é uma subvariedade de dimensão k tal que $k < n$, em que n é a dimensão total da variedade M .

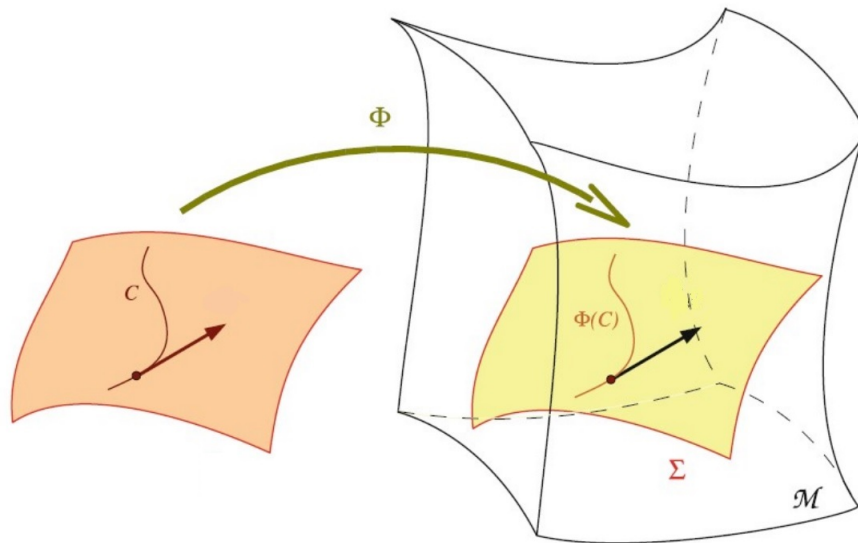


Figura 5: Incorporação de uma variedade 3D em uma variedade 4D. (Imagem: Jha (2022)).

Com M uma variedade quadrimensional real e suave, e g uma métrica lorentziana de assinatura $(-, +, +, +)$ em M , definida como $g : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ (um mapa bilinear simétrico de valor real), assume-se que o espaço-tempo quadrimensional (M, g) é globalmente hiperbólico, isto é, admite uma hipersuperfície do tipo espaço Σ , tal que toda curva do tipo tempo ou nula intercepta Σ apenas uma vez, e cuja topologia é $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Σ é uma hipersuperfície de M se $\Sigma = \Phi(\aleph)$, isto é, se Σ for a imagem de \aleph através de Φ , com \aleph uma variedade tridimensional.

O espaço-tempo pode ser foliado por hipersuperfícies Σ_t do tipo espaço, com $t = \text{constante}$ e $\Sigma_t (t \in \mathbb{R})$, tal que $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$, com $\{t\} \times \Sigma$ e $\hat{t} = t$ a direção do tempo de Σ_t à Σ_{t+dt} (com $\hat{t} : M \times \mathbb{R}$).

Algumas propriedades de Σ_t :

- Duas hipersuperfícies Σ_t não se interceptam;
- Assim como estabelecido pelas equações de movimento, a hipersuperfície inicial, $\Sigma_{t=0}$, incorpora o conhecimento fundamental que dá origem ao espaço-tempo.;
- Todas as hipersuperfícies Σ_t são do tipo espaço;
- As hipersuperfícies Σ_t surgem como superfícies de nível de uma função escalar t , a qual será interpretada como um tempo de função global.

A métrica do espaço-tempo induz uma métrica riemanniana γ_{ij} tridimensional chamada de métrica induzida em Σ_t , tal que $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \leftrightarrow \gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu$, com n^μ um vetor normal em cada Σ_t , onde $n^\mu n_\mu = -1$.

Seja, $n_\mu = \Omega \partial_\mu \hat{t}$, com $\Omega = \Omega(x^\mu)$ uma constante de normalização para a qual $n^\mu n_\mu = -1$ (o que garante que n^μ seja um vetor normal). Temos que, $-1 = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} = \Omega^2 g^{tt}$, com $g^{tt} = g^{00}$, o que significa que \hat{t} é a coordenada temporal, e $\Omega = \pm \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}$, da qual escolhemos $\Omega < 0$ para que n^μ seja um vetor do tipo tempo, e, portanto,

$$n_\mu = \frac{-\delta_\mu^0}{\sqrt{-g^{00}}} \quad , \quad (2.17)$$

$$n^\mu = \frac{-g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}} \quad . \quad (2.18)$$

Ou seja, o vetor normal é utilizado para calcular a métrica induzida, a partir da métrica do espaço-tempo original $g_{\mu\nu}$, em que, o delta de Kronecker é empregado na equação (2.17) para isolar o componente temporal do vetor, o que torna a expressão igual a -1 se $\mu = 0$, e 0 caso contrário. O sinal negativo é aplicado para garantir que o componente de tempo seja direcionado para dentro e a raiz quadrada de $-g^{00}$ seja utilizada para normalizar o vetor. Na expressão (2.18), a componente temporal já está isolada no numerador.

Logo, a hipersupeficie Σ pode ser definida como do tipo espaço, com assinatura $(+,+,+)$, com vetor normal do tipo tempo se γ for positivo-definida.

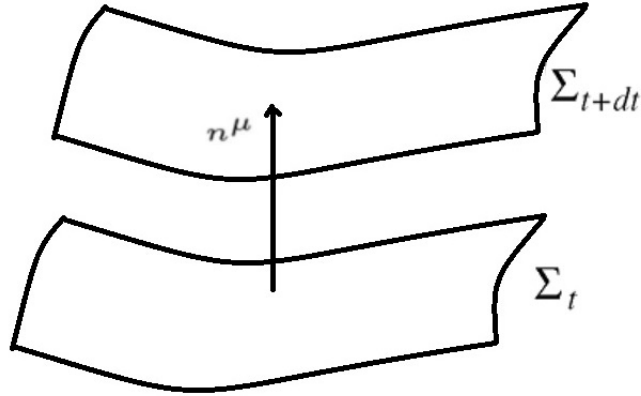


Figura 6: Foliação do espaço-tempo.

A métrica induzida (γ) pode funcionar como um projetor do tipo espaço (projeção espacial), e do tipo tempo (projeção normal), sendo $T_{\mu\nu}^S = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ a parte espacial do tensor $T_{\mu\nu}$ e $\pi_\nu^\mu \equiv -n_\nu n^\mu = \delta_\nu^\mu - \gamma_\nu^\mu$ o projetor normal.

Dado que o tensor de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ e suas formas contraídas, associadas à conexão ∇_μ de Levi-Civita em (M, g) , expressam a curvatura intrínseca do espaço-tempo, também é possível construir, de forma análoga, uma conexão única de Levi-Civita D_i em (Σ, γ) e seus tensores de curvatura correspondentes,

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta \quad , \quad (2.19)$$

a curvatura intrínseca de Riemann² de cada hipersuperfície, induzida pela 3-métrica $\gamma_{\mu\nu}$, e denotada por ${}^{(3)}R$, a qual relaciona o tensor de Riemann ao comutador das derivadas covariantes, com V um vetor qualquer que pode ser separado em partes espacial e temporal,

$$V^\mu = \delta_\nu^\mu V^\nu = (\gamma_\nu^\mu + N_\nu^\mu)V^\nu = V^S + V^T \quad . \quad (2.20)$$

Contudo, como apenas consta informação sobre a curvatura intrínseca de Σ , faz-se necessário obter informação sobre como Σ_t se encaixa em (M, g) . Define-se, então, a medida da variação da normal n ao longo do vetor tangente, o tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$,

²Quantidades marcadas com sobrescrito ⁽⁴⁾ fazem referência a (M, g) , e as quantidades marcadas com ⁽³⁾, ou sem sobrescrito, referem-se a variedade (Σ, γ) .

$$K_{\mu\nu} \equiv -\gamma_{\mu}^{\alpha}\gamma_{\nu}^{\beta}\nabla_{\alpha}n_{\beta} \quad , \quad (2.21)$$

o qual é simétrico em μ e ν , é puramente espacial, mede como a normal à hipersuperfície muda de um ponto a outro, assim como a taxa com a qual a hipersuperfície se deforma, ao ser carregada ao longo da normal, isto é, captura a noção intuitiva de como a curvatura varia de uma hipersuperfície para outra.

A rapidez com a qual a curvatura muda de uma hipersuperfície para a próxima é chamada de aceleração de uma foliação a_{μ} , definida como

$$a_{\mu} \equiv n^{\nu}\nabla_{\nu}n_{\mu} \quad . \quad (2.22)$$

Isto permite que $K_{\mu\nu}$ possa ser expressa de outras formas equivalentes,

$$K_{\mu\nu} \equiv -\nabla_{\mu}n_{\nu} - n_{\mu}a_{\nu} \quad , \quad (2.23)$$

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n\gamma_{\mu\nu} \quad , \quad (2.24)$$

onde $\mathcal{L}_n\gamma_{\mu\nu}$ é a derivada de Lie de $\gamma_{\mu\nu}$ ao longo de n .

Assim como o escalar de Ricci, temos a curvatura média, ou escalar de curvatura extrínseca K ,

$$K \equiv g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}K_{\mu\nu} \quad , \quad (2.25)$$

a qual mede a mudança fracionária de um volume tridimensional ao longo da normal n^{μ} de uma hipersuperfície do tipo espaço para a próxima.

Por fim, temos as três últimas relações necessárias para nos aprofundarmos na decomposição 3 + 1 do espaço-tempo (a base do formalismo ADM):

Dada a relação de Gauss,

$$\gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu}\gamma_{\rho}^{\gamma}\gamma_{\delta}^{\sigma}{}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = {}^{(3)}R_{\delta\alpha\beta}^{\gamma} + K_{\alpha}^{\gamma}K_{\delta\beta} - K_{\beta}^{\gamma}K_{\alpha\delta} \quad , \quad (2.26)$$

uma vez que,

$$\gamma_\lambda^\alpha \gamma_\beta^\lambda = \gamma_\beta^\alpha \quad , \quad (2.27)$$

estima-se a relação de Gauss contraída:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma {}^{(4)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu \quad . \quad (2.28)$$

Ao contrair novamente com relação à métrica $\gamma^{\mu\nu}$, temos a generalização do *Theorema Egregium* de Gauss (ou relação escalar de Gauss),

$${}^{(4)}R + 2{}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} \quad . \quad (2.29)$$

Dada a relação de Codazzi-Mainardi,

$$\gamma_\rho^\gamma n^\sigma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho = D_\beta K_\alpha^\gamma - D_\alpha K_\beta^\gamma \quad , \quad (2.30)$$

efetua-se a contração dos índices livres restantes (com o objetivo de obter novos índices), e os aplicar a γ e a α no lado esquerdo da relação, o que resulta em,

$$\begin{aligned} \gamma_\rho^\mu n^\sigma \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= (\delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho) \gamma_\beta^\nu n^\sigma {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho \\ &= \gamma_\beta^\nu n^\sigma {}^{(4)}R_{\sigma\nu} + \gamma_\beta^\nu {}^{(4)}R_{\rho\sigma\mu\nu} n^\rho n^\sigma n^\mu \quad . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por fim, devido a auto-simetria de ${}^{(4)}R_{\rho\sigma\mu\nu}$ com respeito aos primeiros dois índices, o último termo de (2.31) cai, o que permite definir a relação de Codazzi-Mainardi contraída,

$$\gamma_\alpha^\mu n^\nu {}^{(4)}R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K_\alpha^\mu \quad . \quad (2.32)$$

2.1.2.2 Decomposição 3 + 1 do Espaço-Tempo

Para este tópico, será nossa intenção separar o espaço-tempo (M, g) em duas partes, uma puramente espacial, e uma puramente temporal.

Como apontado anteriormente, diz-se que M é globalmente hiperbólica, se admite uma superfície de Cauchy, isto é, uma hipersuperfície Σ do tipo espaço, e admite uma foliação

por um conjunto de hipersuperfícies $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, onde cada Σ_t é uma superfície de nível \hat{t} (campo escalar regular) em M .

Desse modo, introduzimos quatro novas variáveis com o intuito de especificar a geometria entre as hipersuperfícies, ou seja, a função lapso N e o vetor deslocamento \vec{N} ,

$$N \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} \quad , \quad (2.33)$$

$$N^i \equiv N^2 g^{0i} \quad , \quad (2.34)$$

as quais são utilizadas para descrever a maneira como o espaço-tempo é dividido em uma série de hipersuperfícies do tipo espaço, e definir as coordenadas nas quais o tensor métrico é expresso, onde os índices gregos variam entre valores de 0 a 3, enquanto que os índices latinos variam de 1 a 3.

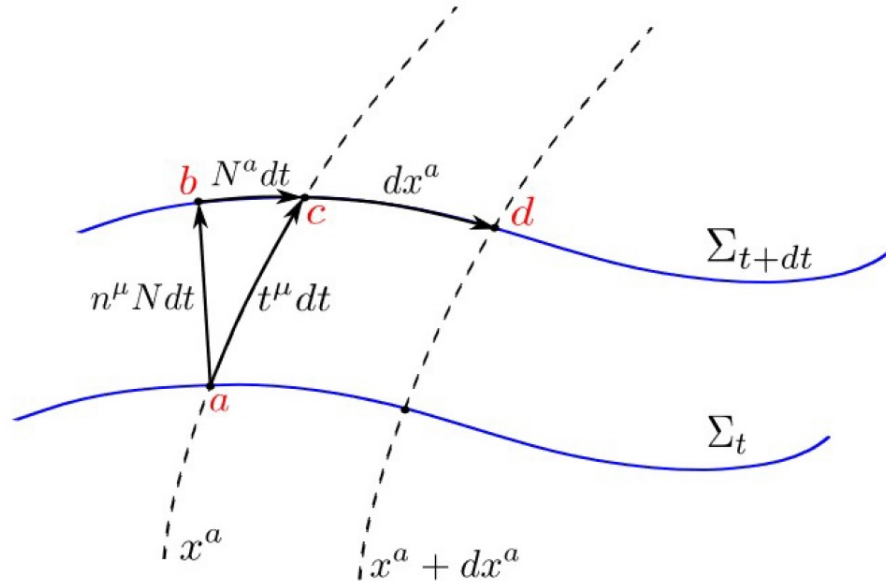


Figura 7: Interpretação geométrica das funções lapso e deslocamento. (Imagem: Jha (2022)).

Interpretação geométrica das funções lapso N e deslocamento \vec{N}

Ao definirmos o vetor de evolução normal m^μ como,

$$m^\mu \equiv N n^\mu \quad , \quad (2.35)$$

temos que $n^\mu N dt \equiv m^\mu dt$, uma vez que n^μ é o vetor normal à hipersuperfície (Figura 7).

A função lapso determina o lapso do tempo próprio $\delta\tau$ entre $\Sigma_{t+\delta t}$ e Σ_t (com $\delta\tau = N\delta t$), enquanto que o vetor deslocamento N^i mede a diferença das coordenadas na hipersuperfície Σ_{t+dt} entre os pontos b e c (o ponto de evolução temporal de a).

Portanto, a função lapso mede o tempo próprio para ir de uma hipersuperfície para a próxima, ao passo que o vetor deslocamento mede as mudanças nas coordenadas espaciais na mesma hipersuperfície.

Posto isto, o acoplamento destas quatro funções com a métrica γ_{ij} , isto é, $\{N, \vec{N}, \gamma_{ij}\}$, determina completamente a geometria espaço-temporal de M .

Seja,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_i N^i - N^2 & N_j \\ N_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad e \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & \gamma_{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} ,$$

temos que $\det(g_{\mu\nu}) = g$ (com $g < 0$ devido a assinatura da 4-métrica ser $(-, +, +, +)$) e $\det(\gamma_{ij}) = \gamma$ (com $\gamma > 0$ na hipersuperfície Σ_t devido a assinatura $(+, +, +)$).

Portanto, $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$ nos fornece a densidade do espaço-tempo $\sqrt{-g}$ em termos da densidade $\sqrt{\gamma}$ e da função lapso N , em que $g^{00} = \frac{\det\gamma}{\det g} = \frac{\gamma}{g} = -\frac{1}{N^2}$, com g o determinante da 4-métrica, e γ o determinante da 3-métrica.

Com este resultado, é possível definir explicitamente n_μ e n^μ em função de N e N^i , ao combinarmos as equações (2.17), (2.18), (2.33), e (2.34),

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0) \quad , \quad (2.36)$$

$$n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right) \quad . \quad (2.37)$$

O próximo passo consistirá em substituir o tensor de Riemann ${}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ com os tensores de curvatura intrínseca e extrínseca tridimensionais, e com as funções de lapso e deslocamento, ou seja, decompor em $3 + 1$ o tensor de curvatura de Riemann.

Seja o tensor de Riemann aplicado à normal n^μ , definido como,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]n^\rho = {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma \quad , \quad (2.38)$$

projeta-se este resultado duas vezes em Σ_t e uma vez ao longo de n^μ , o que resulta em,

$$\gamma_{\rho\alpha}\gamma_{\beta}^{\mu} {}^{(4)}R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} n^{\sigma} n^{\nu} = -K_{\alpha\lambda}K_{\beta}^{\lambda} + \gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu}\nabla_n K_{\mu\nu} + \frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N \quad . \quad (2.39)$$

Esta relação permite substituir o tensor de Riemann do espaço-tempo com as quantidades tridimensionais. Ao compará-la e combiná-la com (2.28), é possível obter a expressão simplificada,

$$\gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\beta}^{\nu}\nabla_n K_{\mu\nu} - \frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N \quad , \quad (2.40)$$

que nada mais é do que a projeção do tensor de Ricci, e do escalar de Ricci com o intuito de obtê-los em termos das variáveis $3 + 1$.

Finalmente, uma última contração com respeito a $\gamma^{\mu\nu}$ proporciona o resultado o qual buscávamos encontrar, isto é,

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2\nabla_n K - \frac{2}{N}D^i D_i N \quad , \quad (2.41)$$

no qual houve uma substituição dos índices gregos por índices latinos, ao se explorar o caráter puramente espacial de K e γ ,

$$\gamma^{\mu\nu} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = R + K^2 - \gamma^{ij}\nabla_n K_{ij} - \frac{1}{N}\gamma^{ij}D_i D_j N \quad . \quad (2.42)$$

Conclui-se assim, a decomposição $3 + 1$ da curvatura do espaço-tempo.

2.1.2.3 Projeção das Equações de Campo de Einstein

Neste tópico serão expostas as projeções das equações de campo de Einstein no formalismo $3 + 1$, visto que o tensor de curvatura foi decomposto.

A partir da contração das equações de campo de Einstein com relação a $g_{\mu\nu}$, para $\Lambda = 0$, (2.15), é possível derivar a seguinte relação,

$$g^{\mu\nu} \left[{}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^{(4)}R \right] = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \Rightarrow {}^{(4)}R = -8\pi T \quad , \quad (2.43)$$

da qual, infere-se

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T] \quad . \quad (2.44)$$

Visto que n^μ é do tipo tempo, e pode ser identificada com a quadrivelocidade de um observador movendo-se perpendicular à Σ_t , projeta-se $T_{\mu\nu}$ na densidade de energia E , medida por este observador,

$$E \equiv T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \quad ; \quad (2.45)$$

na densidade de momento p_α (na qual o projetor γ_α^ν garante que p_α é tangente à Σ_t),

$$p_\alpha \equiv -T_{\mu\nu}n^\mu \gamma_\alpha^\nu \quad ; \quad (2.46)$$

e no tensor $S_{\alpha\beta}$, isto é, na projeção total de $T_{\mu\nu}$ em Σ_t ,

$$S_{\alpha\beta} \equiv T_{\mu\nu}\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \quad , \quad (2.47)$$

com,

$$S_{\alpha\beta} \equiv T_{\mu\nu}\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu = T_{\alpha\beta} + En_\alpha n_\beta + n^\rho(T_{\alpha\rho}n_\beta + T_{\rho\beta}n_\alpha) \quad , \quad (2.48)$$

cujo traço S correspondente (ou escalar de tensão) com respeito a $\gamma_{\mu\nu}$ será definido como,

$$S = S_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta} = S_{ij}\gamma^{ij} \quad . \quad (2.49)$$

Ao combinarmos (2.48) e (2.49), obtemos o escalar energia-momento T ,

$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu) \quad , \quad (2.50)$$

e, por consequência, uma relação entre S , E , e T , isto é,

$$T = S - E \quad . \quad (2.51)$$

Estas definições descrevem todas as quantidades decorrentes da projeção de $T_{\mu\nu}$.

Como as equações envolvem tensores de grau 2, a projeção das equações de campo de Einstein em termos das variáveis 3 + 1 podem ser realizadas de três formas (com duas projeções correspondentes à cada índice):

- Puramente espacial: duas vezes ao longo de Σ_t ;
- Puramente temporal: duas vezes ao longo de n^μ ;
- Espacial e temporal: uma vez ao longo de Σ_t e uma vez ao longo de n^μ .

Ao aplicar γ_ν^μ duas vezes em (2.44), obtém-se,

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\lambda}K_\beta^\lambda + KK_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \left[\mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + D_\alpha D_\beta N \right] = 8\pi \left[S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} (S - E) \right] \quad , \quad (2.52)$$

na qual, todos os tensores envolvidos são tangentes à Σ_t .

Ao projetar as equações de campo de Einstein com relação à n^μ , estima-se,

$${}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi E \quad . \quad (2.53)$$

Finalmente, ao projetar uma vez ao longo de n^μ e uma vez ao longo de Σ_t , temos,

$$D_\beta K_\alpha^\beta - D_\alpha K = 8\pi p_\alpha \quad . \quad (2.54)$$

Estas três equações contêm, coletivamente, a mesma quantidade de informações que a forma covariante das equações de campo de Einstein.

2.1.2.4 Desenvolvimento da Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (ADM)

A abordagem canônica tem como vantagem a possibilidade de uma formulação clara do problema de Cauchy, o problema de valor inicial. Ela também esclarece os problemas decorrentes das redundâncias das variáveis $g_{\mu\nu}$ na abordagem covariante da relatividade geral. Um outro aspecto de destaque desta abordagem é a conexão entre os colchetes de Poisson e as equações de Hamilton, e a relação com a mecânica quântica através das relações de comutação. Logo, a formulação hamiltoniana é base para a quantização canônica da gravidade.

Seja,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int ({}^4R)\sqrt{-g}d^4x \quad , \quad (2.55)$$

a ação puramente gravitacional de Einstein-Hilbert; Se $d^4x = dt d^3x$ e $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$, temos,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x N\sqrt{\gamma} ({}^3R + K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2\nabla_n K - \frac{2}{N}D^i D_i N) \quad , \quad (2.56)$$

para a qual temos as seguintes relações (para os dois últimos termos),

$$\sqrt{\gamma}D^i D_i N = \sqrt{\gamma}D_i(\partial^i N) = \partial_i(\sqrt{\gamma} \partial^i N) \quad , \quad (2.57)$$

$$N\sqrt{\gamma}\nabla_n K = N\sqrt{\gamma} n^\alpha \nabla_\alpha K = \partial_\alpha(\sqrt{\gamma}NK n^\alpha) + \sqrt{\gamma}NK^2 \quad , \quad (2.58)$$

as quais ao serem substituídas em (2.56), nos fornece,

$$S_H = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x N\sqrt{\gamma} ({}^3R - K^2 + K^{ij}K_{ij} - 2(\partial_i\sqrt{\gamma} \partial^i N) + \partial_\alpha(\sqrt{\gamma}NK n^\alpha)) \quad , \quad (2.59)$$

para a qual ignoraremos os dois últimos termos, pois ambos contêm divergências e não influenciam as equações de movimento, que são obtidas devido as variações no interior da região considerada, ou seja, elas não são influenciadas por termos de fronteira.

Dessa forma, após as substituições necessárias na ação de Einstein-Hilbert, é possível obter a ação gravitacional (2.2) em termos das variáveis 3 + 1, isto é,

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x N\sqrt{\gamma} ({}^3R - K^2 + K^{ij}K_{ij}) \quad , \quad (2.60)$$

da qual infere-se a densidade lagrangiana,

$$L_H = N\sqrt{\gamma} ({}^3R - K^2 + K^{ij}K_{ij}) \quad , \quad (2.61)$$

para $L = \int d^3x L_H$, a lagrangiana L de $S_H = \int dt L$.

Em mecânica clássica, $L = \int d^3x L$ com $L = L(q, \dot{q})$, tal que $q = \{q_i\}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ é a coordenada generalizada, e possui um momento canônico π^i correspondente a \dot{q}_i , isto é, $\pi^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

É possível recuperar a densidade hamiltoniana H através da transformação de Legendre de L , isto é,

$$H(q, \pi) \equiv \sum_i \pi^i \dot{q}_i - L \quad . \quad (2.62)$$

Da mesma forma, é possível encontrar os momentos conjugados correspondentes a $\{\gamma, \gamma_{ij}, N, \vec{N}\}$, e aplicar a transformada de Legendre em L_H (2.61).

Primeiramente, definimos os momentos conjugados correspondentes a N e \vec{N} :

$$\pi_N \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{N}} = 0 \quad , \quad (2.63)$$

$$\pi_{N^i} \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{N}^i} = 0 \quad , \quad (2.64)$$

dos quais, temos que L_H e S_H dependem de $\{\gamma, \gamma_{ij}, N, \vec{N}, \partial_i N, \partial_i \vec{N}\}$ mas não dependem de $\{\dot{N}, \dot{\vec{N}}\}$, uma vez que N e \vec{N} são multiplicadores de Lagrange, isto é, não são variáveis dinâmicas.

Dessa forma, restam os seis momentos conjugados independentes π^{ij} , correspondentes às componentes de γ_{ij} ,

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial L_H}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \quad , \quad (2.65)$$

cuja expressão explícita de π^{ij} é definida como,

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) \quad . \quad (2.66)$$

Com a finalidade de escrever o resultado final em termos de $\{{}^{(3)}R, \gamma, N, \vec{N}\}$, elimina-se a referência da curvatura extrínseca de π^{ij} , ao aplicar a relação,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[D_i N_j + D_j N_i - \dot{\gamma}_{ij} \right] \quad , \quad (2.67)$$

em,

$$\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij}) = \sqrt{\gamma} [K_{ab}\gamma^{ab}\gamma^{ij} - K_{ab}\gamma^{ia}\gamma^{jb}] \quad , \quad (2.68)$$

o que resulta em,

$$\pi^{ij} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2N} \left[2\gamma^{ij}D_k N^k - D^i N^j - D^j N^i + (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})\dot{\gamma}_{kl} \right] \quad . \quad (2.69)$$

Assim também, elimina-se os termos da curvatura extrínseca de (2.61), em favor das funções lapso e deslocamento.

Para tal, reorganiza-se (2.66) para obter,

$$K = \gamma^{ij}K_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(3\pi - 2\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}} \quad , \quad (2.70)$$

ao contrair,

$$K^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\pi\gamma^{ij} - 2\pi^{ij}) \quad , \quad (2.71)$$

com respeito a 3-métrica, para $\gamma^{ij}K_{ij} = K$, na qual $\gamma^{ij}\gamma_{ij} = 3$ e $\gamma^{ij}\pi_{ij} = \pi$.

Agora, é possível definir a equação de evolução da 3-métrica, ao substituir (2.71) em (2.67),

$$\dot{\gamma}_{ij} = D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}}(\pi\gamma_{ij} - 2\pi_{ij}) \quad , \quad (2.72)$$

e ao aplicar (2.70) e (2.71) em (2.61), obter a densidade lagrangiana em termos de $\{{}^{(3)}R, \gamma, N, \vec{N}\}$,

$$L_H = N\sqrt{\gamma}{}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \quad . \quad (2.73)$$

Visto que a densidade hamiltoniana H_H (densidade hamiltoniana ADM) pode ser obtida através da transformada de Legendre de L_H , isto é, $H_H \equiv \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - L_H$, com o emprego

das equações (2.63), (2.64), (2.72) e (2.73), é possível estimar,

$$\begin{aligned}
H_H &= \pi_N \dot{N} + \pi_{N^i} \dot{N}^i + \pi^{ij} \gamma_{ij} - L_H \\
&= \pi^{ij} [D_i N_j + D_j N_i - \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi \gamma_{ij} - 2\pi_{ij})] - [N \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2)] \\
&= 2\pi^{ij} D_i N_j - N \sqrt{\gamma} {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2}) \quad , \quad (2.74)
\end{aligned}$$

da qual, é possível inferir a hamiltoniana H_{ADM} , a partir da relação,

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} d^3x H_H \quad . \quad (2.75)$$

Se estabelecermos as quantidades,

$$R^0 = -\sqrt{\gamma} {}^{(3)}R - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) \quad , \quad (2.76)$$

$$R^i = 2D_j \pi^{ij} \quad , \quad (2.77)$$

temos que H_{ADM} se torna,

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma_t} [NR^0 + N_i R^i] d^3x \quad , \quad (2.78)$$

com $N = N_0$, onde,

$$H[N] = \int_{\Sigma_t} N \left[-\sqrt{\gamma} {}^{(3)}R - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) \right] \quad , \quad (2.79)$$

a restrição hamiltoniana, e,

$$D[\vec{N}] = \int_{\Sigma_t} N_i [-2D^j \pi_{ij}] d^3x \quad , \quad (2.80)$$

a restrição de difeomorfismo (ou restrição de momento).

O próximo passo consistirá em determinar as doze equações de movimento de Hamilton correspondentes à,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \quad , \quad (2.81)$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} \quad . \quad (2.82)$$

Primeiro, definimos a ação S_{ADM} , a partir da aplicação de (2.74) em (2.60), isto é,

$$\begin{aligned} S_{ADM} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x (\pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - H_H) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left[\pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - (2\pi^{ij} D_i N_j - N \sqrt{\gamma} R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2})) \right] \quad . \quad (2.83) \end{aligned}$$

Para calcular as equações de movimento, faz-se necessário a imposição das condições de contorno,

$$\delta N |_{\partial \Sigma_t} = \delta N^i |_{\partial \Sigma_t} = \delta \gamma_{ij} |_{\partial t} = 0 \quad , \quad (2.84)$$

nas quais, $\partial \Sigma_t$ exprime o contorno da hipersuperfície Σ_t . Em que, para os momentos conjugados não impomos restrições, pois eles são tratados como variáveis independentes.

Ao variarmos S_{ADM} em relação a $\{N, \vec{N}, \pi^{ij}, \gamma_{ij}\}$, um conjunto independente de variáveis, obtemos as equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\delta H_H}{\delta \pi^{ij}} = D_i N_j + D_j N_i - 2N K_{ij} \quad , \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} &= -\frac{\delta H_H}{\delta \gamma_{ij}} = -N \sqrt{\gamma} (R^{ij} - \frac{1}{2} \gamma^{ij} R) + \frac{N}{2\sqrt{\gamma}} (\pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2}) \gamma^{ij} \\ &\quad - \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ic} \pi_c^j - \frac{1}{2} \pi \pi^{ij}) + \sqrt{\gamma} (D^i D^j N - \gamma^{ij} D_c D^c N) \\ &\quad + D_c (\pi^{ij} N^c) - \pi^{ic} D_c N^j - \pi^{jc} D_c N^i \quad , \quad (2.86) \end{aligned}$$

em que, N e \vec{N} , isto é, as funções lapso e deslocamento, são multiplicadores de Lagrange e, portanto, não contribuem para a dinâmica, pois se variarmos S_{ADM} em função de N e \vec{N} , temos 4 restrições (uma proveniente da variação com relação à função lapso, e três provenientes da variação com relação ao vetor deslocamento) as quais são satisfeitas na

hipersuperfície Σ_t , ou seja, para $\frac{\partial S_{ADM}}{\partial N} = 0$ temos que a densidade de energia $E = 0$ (2.45), enquanto que para $\frac{\partial S_{ADM}}{\partial \vec{N}} = 0$ temos que a densidade de momento $p_\alpha = 0$ (2.46), o que implica em (2.79) e (2.80) iguais a zero na hipersuperfície Σ_t .

Com as equações dinâmicas, é possível, enfim, definir os colchetes de Poisson,

$$\begin{aligned} \{\gamma_{ij}, \gamma_{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= 0 \quad , \\ \{\pi^{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= 0 \quad , \\ \{\gamma_{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} &= \delta_i^k \delta_j^l \quad . \end{aligned} \quad (2.87)$$

os quais são calculados com respeito às variáveis γ_{ij} e π^{kl} .

Com a definição dos colchetes de Poisson, é possível recuperar as relações de comutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{\gamma_{ij}, \gamma_{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = 0 &\rightarrow [\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\gamma}_{kl}] = 0 \\ \{\pi^{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = 0 &\rightarrow [\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = 0 \\ \{\gamma_{ij}, \pi^{kl}\} |_{(\gamma, \pi)} = \delta_i^k \delta_j^l &\rightarrow [\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = i\hbar \delta_i^k \delta_j^l \quad , \end{aligned} \quad (2.88)$$

visto que,

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad . \quad (2.89)$$

Ou seja, quando as variáveis canônicas do sistema (γ_{ij} e π^{ij}) são identificadas, é possível transformá-las em operadores quânticos correspondentes ($\hat{\gamma}_{ij}$ e $\hat{\pi}^{ij}$), assim como introduzir um funcional de onda $\psi[\gamma_{ab}]$, definido no espaço de configurações de campo (γ_{ab}), e caracterizar a ação de $\hat{\gamma}_{ij}$ e $\hat{\pi}^{ij}$ no estado $|\psi\rangle$ (ao adotarmos a notação de Dirac),

$$\hat{\gamma}_{ij} |\psi\rangle \equiv \gamma_{ij} \psi[\gamma_{ab}] \quad , \quad (2.90)$$

$$\hat{\pi}^{ij} |\psi\rangle \equiv -i\hbar \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \psi[\gamma_{ab}] \quad . \quad (2.91)$$

Se considerarmos,

$$R^0 = -\sqrt{\gamma} \text{}^{(3)}R - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) = 0 \quad , \quad (2.92)$$

$$R^i = 2D_j \pi^{ij} = 0 \quad , \quad (2.93)$$

as restrições secundárias (provenientes de $\frac{\partial H_H}{\partial N} = 0$ e $\frac{\partial H_H}{\partial N^i} = 0$), e aplicarmos (2.90) e (2.91) em (2.92) e (2.93), derivamos a equação que está no centro de toda abordagem canônica da cosmologia quântica, a equação de Wheeler-DeWitt,

$$\hat{H}\Psi[\gamma_{kl}] = \left[\sqrt{\gamma} \text{}^{(3)}R - \frac{\hbar^2}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma_{cd} - \gamma_{ac} \gamma_{bd} \right) \frac{\delta}{\delta \gamma_{ab}} \frac{\delta}{\delta \gamma_{cd}} \right] \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad , \quad (2.94)$$

e os vínculos dos momentos,

$$\hat{H}_k \Psi[\gamma_{kl}] = 2i \frac{\delta}{\delta \gamma_{kl}} \Psi[\gamma_{kl}] = 0 \quad , \quad (2.95)$$

com Ψ a função de onda do Universo, e a qual será exposta em maiores detalhes na Seção (2.2) do presente Capítulo.

2.2 A Equação de Wheeler-DeWitt

Ao quantizar o universo fechado de Friedmann, preenchido com matéria, Bryce DeWitt (1967) deu início à cosmologia quântica propriamente dita, com o desenvolvimento de um modelo cosmológico com um número finito de graus de liberdade, o modelo de minisuperespaço, sendo a configuração espacial infinito-dimensional da relatividade geral chamada de superespaço.

Ou seja, enquanto superespaço (o conjunto de todas as geometrias Riemannianas na variedade tridimensional \mathbb{N}) é uma construção matemática que descreve toda a complexidade do Universo, incluindo todas as suas configurações possíveis, para a qual, cada ponto na variedade M do espaço-tempo (M, g) corresponde a uma configuração particular do Universo, isto é, desempenha o papel de domínio para a função de onda que está sujeita à equação de Wheeler-DeWitt, o minisuperespaço refere-se a um modelo simplificado do universo com um número finito de graus de liberdade, geralmente considerados o fator de

escala do universo e um pequeno número de campos de matéria.

A combinação de ambos os modelos, juntamente com outras ferramentas teóricas e dados experimentais, são utilizadas para fazer previsões e testar teorias com observações, o que permite a exploração de uma ampla gama de cenários possíveis para a evolução do universo e a obtenção de uma compreensão mais profunda de sua natureza mais fundamental.

Modelos dimensionalmente reduzidos, como são o caso de modelos de minisuperespaço, têm sua importância fundamentada em aspectos como o fato de fornecerem meios de investigação de questões matemáticas, como as condições de contorno, e a estrutura da equação de onda, ou o modo como permitem a comparação de vários esquemas de quantização; assim como podem desempenhar o papel de *toy models*, isto é, modelos simplistas, com o intuito de analisar problemas teóricos os quais não dependem do número de variáveis, como é o caso do papel dos observadores, o problema do tempo (o qual será explorado ao longo deste Capítulo), e a emergência de um universo clássico (objetivo do presente trabalho).

Como exemplo de modelo de minisuperespaço, temos o modelo de um universo homogêneo e isotrópico preenchido com um fluido perfeito, o universo de FLRW com apenas um grau de liberdade, isto é, o fator de escala a , com constante cosmológica $\Lambda \neq 0$, o qual será quantizado em seguida.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta Seção são: (ATKATZ, 1994; MANSOURI; NASSERI, 1999; GOUSHEH; SEPANGI, 2000; FALCIANO, 2004; SEN; SCHERRER, 2005; WANG et al., 2005; GORINI et al., 2005; KIEFER, 2007; ANDERSON, 2012; AVELINO; AZEVEDO, 2018; FILHO, 2020; MONERAT et al., 2020; MENDOZA; SILVA, 2021; KIEFER; PETER, 2022; KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

2.2.1 Quantização de um Modelo de FLRW

Seja,

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = E \quad , \quad (2.96)$$

a hamiltoniana de um sistema em uma dimensão, isto é, a energia total expressa como uma função da coordenada x e do momento canonicamente conjugado p , de um sistema clássico.

O primeiro passo, para a quantização canônica deste sistema, ocorre a partir da aplicação das seguintes transformações:

$$x \rightarrow \hat{x} = x \quad , \quad (2.97)$$

$$p \rightarrow \hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (2.98)$$

$$E \rightarrow \hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (2.99)$$

O segundo passo, consiste na introdução de uma função de onda, que depende das variáveis do sistema físico considerado e do tempo, isto é, $\Psi(x, t)$, a qual descreve as propriedades do sistema.

Ao realizar as devidas transformações e substituições em (2.96), e aplicar a equação resultante na função de onda, obtemos,

$$\hat{H}\Psi(x, t) = \left(-\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad , \quad (2.100)$$

a equação de Schrödinger dependente do tempo, isto é, a equação de movimento quântica do sistema, na qual, \hat{H} (o operador hamiltoniano resultante das transformações (2.97), (2.98), e (2.99)) age na função de onda $\Psi(x, t)$.

De semelhante forma, seja,

$$\dot{a}^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) = 0 \quad , \quad (2.101)$$

a equação de Friedmann (1.6) para $\Lambda \equiv 8\pi G \rho_{vac}$, com ρ_{vac} a densidade de energia do vácuo com $k = 1$, equivalente à hamiltoniana para uma partícula de energia nula, cuja posição é descrita por a (fator de escala).

A ação gravitacional de Einstein-Hilbert (2.2), toma a forma,

$$S_{FLRW} \equiv \int dt L_{FLRW} = \frac{3\pi}{4G} \int dt \left[-\dot{a}^2 a + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \quad , \quad (2.102)$$

para um universo com geometria espacial positiva de FLRW, com $a_0 \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ a fase inflacionária de Guth.

A partir da ação (2.102), é possível reescrever a equação de Friedmann (2.101) para,

$$p_a \equiv \frac{\partial L_{FLRW}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G} \dot{a}a \quad , \quad (2.103)$$

isto é,

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0 \quad . \quad (2.104)$$

Seja,

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a} \quad , \quad (2.105)$$

a transformação canônica do momento conjugado de a , e $k = 1$ (para um universo com geometria espacial positiva de raio a), ao aplicar esta transformação em (2.104), temos,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) \right] \Psi(a) = 0 \quad , \quad (2.106)$$

ou seja, a equação de Wheeler-DeWitt para um universo fechado de FLRW, análoga à equação de Schrödinger independente do tempo (para uma partícula com meia unidade de massa e energia nula), cuja função de onda $\Psi(a)$ é a função de onda do universo, e cujo potencial $V(a)$ é definido como,

$$V(a) \equiv \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4}\right) \quad , \quad (2.107)$$

com $a_0^2 = G$, ou seja, o universo quantizado de FLRW é equivalente ao problema unidimensional da mecânica quântica não-relativística.

Portanto, a quantização hamiltoniana suscita em uma equação matematicamente equivalente à equação de Schrödinger da mecânica quântica. Porém, algumas características intrínsecas à equação de Wheeler-DeWitt, a diferencia da equação de Schrödinger e serão expostas no ítem (2.2.2) do presente Capítulo.

2.2.2 Peculiaridades da Equação de Wheeler-DeWitt

Iremos destacar três aspectos da equação de Wheeler-DeWitt:

- Definição no espaço de configurações;
- Ausência de um parâmetro de tempo externo;
- Determinismo dos pacotes de onda.

Um dos principais atributos da equação de Wheeler-DeWitt diz respeito a sua definição no espaço de configuração. Por ser uma equação diferencial parcial, e sua solução (a função de onda Ψ) não ser definida no espaço, no tempo, ou no espaço-tempo, a equação de Wheeler-DeWitt não depende dos pontos do espaço-tempo, e sim dos graus de liberdade gravitacional e de matéria do sistema.

Ou seja, a equação de Wheeler-DeWitt é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução da função de onda do universo³ em um espaço de configuração, isto é, um espaço matemático que descreve as possíveis configurações do sistema, representadas por um conjunto de variáveis que descrevem os graus de liberdade do mesmo.

A segunda característica citada, concerne o chamado problema do tempo da cosmologia quântica, isto é, a ausência de um parâmetro de tempo externo, e a não unicidade de variáveis temporais internas.

Por fim, temos o determinismo dos pacotes de onda, isto é, uma das principais características da equação de Wheeler-DeWitt é o fato dela ser determinística, o que significa que ela dita a evolução da função de onda do universo, e das variáveis do espaço de configuração, as quais representam os graus de liberdade geométricos do universo, dadas condições iniciais, ao especificar as restrições que a função de onda do universo deve satisfazer, isto é, a equação determina como essas variáveis mudam ao longo do tempo, à medida que o universo evolui.

Em outras palavras, um pacote de ondas, um tipo de solução para a equação de Wheeler-DeWitt, descreve a distribuição de probabilidade de um universo em um determinado conjunto de configurações, ou seja, uma superposição de diferentes configurações possíveis cuja evolução é determinada pela equação.

Ademais, apesar de não haver um parâmetro de tempo externo, a equação possui uma forma hiperbólica, o que afeta como as condições de contorno são impostas. Isso ocorre porque a equação diferencial clássica no tempo é substituída por uma equação diferencial hiperbólica, o que altera o determinismo da teoria.

³A função de onda do universo é uma função matemática que descreve a amplitude de probabilidade do universo encontrar-se em uma configuração particular.

O fato da equação de Wheeler-DeWitt ser uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólica, significa que ela permite soluções que descrevem ondas que se propagam através do universo, as quais são utilizadas para estudar o comportamento do Cosmo em um nível quântico, assim como fornecer informações sobre suas origens, e a natureza do espaço e do tempo.

Nos aprofundaremos na problemática temporal e suas possíveis soluções no item (2.2.2.1) do presente Capítulo.

2.2.2.1 O Problema do Tempo da Cosmologia Quântica

Como expresso anteriormente, a cosmologia quântica é a aplicação da teoria quântica ao Universo como um todo, e dado que a sua dinâmica é uma característica de grande importância, a noção não bem definida do tempo se torna um problema, uma vez que o papel do tempo é central para a dinâmica.

Este problema surge da divergência entre os significados de tempo, tanto para a teoria canônica clássica, isto é, a relatividade geral, quanto para a teoria quântica usual. Para a relatividade geral, o tempo está em pé de igualdade com o espaço, como manifestado pela invariância do difeomorfismo da teoria, já para a teoria quântica usual, o tempo é um parâmetro externo fixo, assim como na física newtoniana. Em outras palavras, o tempo para a relatividade geral é dinâmico, enquanto que para a teoria quântica ele é absoluto.

Quando ocorre a quantização da relatividade geral através de uma abordagem canônica, mais precisamente de uma equação com dependência de momento, isto é, com restrição hamiltoniana, este procedimento não nos fornece uma equação de onda com dependência temporal, mas sim uma equação estacionária, isto é,

$$\hat{H}\Psi = 0 \quad , \quad (2.108)$$

a equação de Wheeler-DeWitt, a qual implica em,

$$[\hat{H}, \hat{A}(t)] = 0 \quad , \quad (2.109)$$

a comutação do operador Hamiltoniano com um observável qualquer, ao invés de,

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{A}(t)] \quad , \quad (2.110)$$

para alguma noção de tempo t e algum hamiltoniano quântico \hat{H} , como ocorre na teoria quântica usual, ou seja, não fornece uma equação de onda dependente do tempo, como,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad . \quad (2.111)$$

Inúmeras estratégias para estabelecer uma possível resolução deste problema foram desenvolvidas, e podem ser verificadas, de forma mais elaborada e completa, em (ANDERSON, 2017), e em suas referências.

Uma destas estratégias é a incorporação da variável temporal através de campos de matéria ao aplicar o formalismo de Schutz (1970, 1971), uma vez que o conteúdo material desempenha o papel de variável temporal neste formalismo.

Dado que este método foi empregado no desenvolvimento do presente trabalho, será exposto no item (2.2.2.2) do presente Capítulo.

2.2.2.2 Campos de Matéria e o Formalismo de Schutz: Uma Solução Para o Problema do Tempo da Cosmologia Quântica.

Em 1970, Schutz desenvolve uma representação de potencial de velocidade para a quadri-velocidade U_ν de um fluido perfeito na relatividade geral, expressa em termos de seis potenciais, isto é,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \alpha\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (2.112)$$

na qual, os potenciais possuem equações de movimento próprias.

A partir da descrição do potencial de velocidade, deriva-se um princípio variacional, no qual a densidade lagrangiana é $L = \sqrt{-g}(R + 16\pi p)$, e da qual define-se a ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R + 16\pi p) \quad , \quad (2.113)$$

cuja variação leva às equações de campo de Einstein, caso ela seja efetuada com respeito à métrica; e às equações de movimento eulerianas, caso a ela seja efetuada com respeito aos potenciais de velocidade; assim, todas as equações conhecidas para um fluido perfeito são recuperadas.

Já em 1971, Schutz introduz a teoria hamiltoniana de um fluido relativístico, ao aplicar o método de Dirac, e transformar as equações da hidrodinâmica do fluido perfeito na forma hamiltoniana, para teorias degeneradas, cuja densidade hamiltoniana corresponde à densidade de energia do fluido.

Portanto, utiliza-se o formalismo de Schutz para descrever o fluido perfeito, com o intuito de selecionar a variável dinâmica do fluido como referência temporal, para então, aplicar a quantização canônica na hamiltoniana resultante, e obter uma equação de Wheeler-DeWitt no minisuperespaço (correspondente à equação de Schrödinger com dependência temporal), uma vez que o acoplamento da gravidade a um fluido perfeito recupera a noção de tempo para alguns casos da cosmologia quântica⁴.

Os fluidos perfeitos têm como característica a não viscosidade, a não condução de calor, e possuem uma equação de estado definida como $p = \alpha\rho$, com p a pressão, e ρ a densidade de energia. Para a análise aqui desenvolvida, foram considerados dois fluidos perfeitos, o gás de Chaplygin e poeira.

O gás de Chaplygin.

Sabemos, com base em evidências observacionais, que o Universo encontra-se em um estágio de expansão acelerada, cuja matéria responsável por essa condição ser satisfeita, em algum estágio da evolução cosmológica, seria a energia escura. Para que esta expansão acelerada seja verdadeira, é preciso que a pressão p e a densidade de energia ρ violem a condição $\rho + 3p < 0$.

Existem alguns candidatos a energia escura, dentre eles o gás de Chaplygin, cuja equação de estado é definida como,

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad , \quad (2.114)$$

com A uma constante positiva, o que implica em um fluido perfeito com pressão negativa, onde o gás de Chaplygin descreve um fluido que se comporta como um gás em altas pressões e um fluido com pressão negativa em baixas pressões.

Se considerarmos um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin, ele descreve a transição entre um estágio de expansão cosmológica desacelerada a um estágio de expansão

⁴Uma descrição mais detalhada do formalismo de Schutz encontra-se exposta no Apêndice A do presente trabalho.

acelerada, e sua inhomogeneidade é capaz de combinar os papéis de energia e matéria escura, pois ao passo que a energia escura seria responsável pela expansão acelerada do universo, a matéria escura fornece a atração gravitacional que mantém as galáxias unidas.

O que ocorre, é que o gás de Chaplygin possui uma equação de estado que pode conectar o comportamento de um fluido em altas pressões ao comportamento em baixas pressões, e isso permite que ele imite o comportamento da energia escura e da matéria escura. No entanto, deve-se atentar ao fato do modelo de gás Chaplygin ser um modelo teórico, e o fato dele ser um fluido do tipo politrópico, isto é, um caso particular dos fluidos barotrópicos (cuja equação de estado $p = \alpha\rho$).

Poeira.

Matéria não relativística a qual interage consigo mesma apenas através do campo gravitacional, e a qual é um fluido perfeito cuja equação de estado é definida como $p = \alpha\rho$, para $\alpha = 0$. Ou seja, poeira, em um modelo de FLRW, é um tipo de matéria que tem pressão nula, o que significa que sua energia interna não contribui para a expansão ou contração do universo, em vez disso, a densidade do fluido de poeira determina a dinâmica do universo através das equações de Friedmann, isto é, as equações de campo de Einstein para este fluido (no modelo de FLRW) são dadas pelas equações de Friedmann, as quais descrevem a evolução do fator de escala $a(t)$ em função do tempo.

Aplicação do Formalismo de Schutz.

Seja a métrica de um universo homogêneo e isotrópico de FLRW, caracterizada pelo fator de escala $a(t)$, definida como,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right) , \quad (2.115)$$

com N a função lapso⁵, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$ o elemento de linha de uma esfera de duas dimensões e raio unitário, e $k = 1$ para um universo com curvatura espacial positiva.

O conteúdo material do modelo analisado no presente trabalho é descrito de acordo com o formalismo de Schutz, no qual (2.112) toma a forma reduzida,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) , \quad (2.116)$$

⁵Na equação (1.1) $N = 1$. Devido a invariância de difeomorfismo, a função lapso pode ser eliminada ao considerarmos $N = 1$.

com α e β ausentes no modelo, devido a ausência de rotação⁶, μ a entalpia específica, S a entropia específica, e ϕ e θ sem um significado físico claro.

É possível expressar μ em termos dos potenciais, isto é,

$$\mu = \frac{1}{N}(\dot{\phi} + \theta\dot{S}) \quad , \quad (2.117)$$

uma vez que $U^\nu U_\nu = -1$, a condição de normalização da quadrivelocidade, e,

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu}(\phi_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma})(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) = -g^{00}(\dot{\phi} + \theta\dot{S})^2 = \frac{1}{N^2}(\dot{\phi} + \theta\dot{S})^2 \quad . \quad (2.118)$$

Seja,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K + \int d^4x \sqrt{-g} p \quad , \quad (2.119)$$

a ação de Einstein-Hilbert, acrescida de um termo de contorno ∂M da variação quadridimensional M , e na qual o último termo é a ação de Schutz (conteúdo de matéria da ação), a qual descreve a dinâmica do fluido perfeito que interage com o campo gravitacional em termos dos potenciais de velocidade, onde h é o determinante da métrica induzida $h_{ij} \equiv \gamma_{ij}$ na hipersuperfície espacial tridimensional, $K = h_{ij} K^{ij}$ o traço da curvatura extrínseca K_{ij} , R o escalar de curvatura, e G a constante gravitacional de Newton, para $8\pi G = 1$ (uma normalização arbitrária escolhida por conveniência para a ação de Einstein-Hilbert).

Da métrica (2.115), deriva-se o escalar de Ricci,

$$R = \frac{6\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{6\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{6\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{6}{a^2} \quad , \quad (2.120)$$

no qual, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}$, com,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-N^2(t), \frac{a^2(t)}{1-r^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta \right) \quad , \quad (2.121)$$

as componentes da métrica, e $g_{ij} = a^2(t)h_{ij}$, com $h^{ij}h_{ij} = 3$, para $i, j = 1, 2, 3$ os índices espaciais, e $\dot{() } = \frac{d}{dt}$.

⁶ α e β estão conectados a rotação.

Para $K = h_{ij}K^{ij}$, com $K_{ij} = -\frac{1}{2N}\dot{h}_{ij}$, temos,

$$K = -\frac{3\dot{a}}{Na} \quad (2.122)$$

a curvatura extrínseca.

Ao substituir ambos os resultados para R e K na ação gravitacional,

$$S = \frac{1}{2} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K \quad , \quad (2.123)$$

obtemos,

$$S_g = \int dt \left(-\frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3Na \right) \quad , \quad (2.124)$$

em que, $d^4x = dt d^3x$, e $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$.

De (2.124), é possível inferir a lagrangiana,

$$L_g = -\frac{3\dot{a}^2 a}{N} + 3Na \quad . \quad (2.125)$$

Como visto no ítem (2.1) do presente capítulo, através do formalismo canônico é possível encontrar a hamiltoniana H_g , isto é, a hamiltoniana gravitacional,

$$H_g = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a \quad , \quad (2.126)$$

em que, $L_g = (\dot{a}p_a - NH_g)$, com $p_a = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{a}}$, o momento canonicamente conjugado de a .

Para um fluido perfeito com equação de estado $p = \alpha\rho$, tem-se as seguintes relações termodinâmicas:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + \Pi) \quad ; \\ \mu &= (1 + \Pi) + \frac{p}{\rho_0} \quad ; \\ \Theta dS &= d\Pi + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \quad , \end{aligned} \quad (2.127)$$

com $\Pi \equiv \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0}$ a energia interna específica, $\mu = \frac{(\rho + p)}{\rho_0}$ a massa inercial específica, $\Theta = (1 + \Pi)$ a temperatura, $S = \ln \frac{(1 + \Pi)}{\rho_0^\alpha}$ a entropia, e ρ_0 a densidade de massa de repouso.

Seja a ação de Schutz,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} p \quad , \quad (2.128)$$

é possível inferir a lagrangiana,

$$L_s = Na^3 p \quad , \quad (2.129)$$

com,

$$p_\theta = 0 \quad (2.130)$$

$$p_S = \theta p_\phi \quad (2.131)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L_s}{\partial \dot{\phi}} = Na^3 \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\phi}} = Na^3 \frac{(p + \rho)}{\mu} U^0 \quad , \quad (2.132)$$

os momentos canonicamente conjugados de θ , S e ϕ , respectivamente, e para os quais utilizamos $\mu = \frac{(p + \rho)}{\rho_0}$, e equações (2.116) e (2.117), cujo único potencial tido não nulo será ϕ , com o intuito de obter as equações de movimento corretas, já que o fluido considerado é o fluido de poeira.

Por consequência, encontra-se,

$$\begin{aligned} H_s &= -Na^3 T_0^0 \\ H_s &= N^3 a^3 [(p + \rho) U^0 U^0 + p g^{00}] \quad , \end{aligned} \quad (2.133)$$

a hamiltoniana do fluido, com $T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$ o tensor energia-momento para o fluido perfeito, com u^μ as componentes da quadrivelocidade.

Seja poeira o fluido em questão, (2.133) toma a forma,

$$H_s = N p_\phi \quad , \quad (2.134)$$

com, $H_s = N^3 a^3 \rho U^0 U^0 = N^2 U^0 p_\phi = p_\phi N$, para $U^0 = \frac{1}{N}$ e $U^0 N = 1$.

Portanto, temos,

$$H_p = p_T \quad , \quad (2.135)$$

a hamiltoniana do fluido de poeira, após a aplicação de $p = 0$, $\mu = 1$, e $\phi = T$ (no qual, o tempo foi escolhido como o tempo próprio das partículas de poeira), ou seja, a variável T pode ser tomada como tempo, uma vez que a hamiltoniana H_p é linear no momento canonicamente conjugado ao tempo⁷ p_T .

Nosso modelo considera um segundo fluido, isto é, o gás de Chaplygin, portanto, dada a métrica (2.115), e a combinação da equação de estado do gás de Chaplygin (2.114) com a evolução do fator de escala,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho - \frac{k}{a^2} \quad , \quad (2.136)$$

e a conservação da energia relativística (1.7), é possível obter,

$$\rho(a) = \left(A + \frac{B}{a^6}\right)^{1/2} \quad , \quad (2.137)$$

a evolução da densidade de energia⁸, com B uma constante de integração, para a qual,

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3} \quad , \quad (2.138)$$

para valores de $B > 0$ e pequenos valores de a , o que significa que $\rho(a)$ corresponde a densidade de energia de poeira;

$$\rho \sim \sqrt{A} \quad , \quad (2.139)$$

para $a \rightarrow \infty$, o que significa que $\rho(a)$ corresponde a um universo vazio com constante cosmológica; e,

⁷Esta afirmação encontra-se vinculada à condição da derivada com relação ao tempo ser de primeira ordem na equação de Schrödinger.

⁸Com a evolução da densidade de energia do tipo matéria escura em períodos primordiais (*early times*), e do tipo energia escura em períodos tardios (*late times*), o modelo de gás de Chaplygin serve como um modelo unificado de matéria e energia escura.

$$\rho \approx \sqrt{A} + a^{-6} \sqrt{\frac{B}{4A}} \quad , \quad (2.140)$$

para uma fase intermediária, com $a^6 \gg \frac{B}{A}$, o que significa que $\rho(a)$ pode descrever uma combinação de matéria e constante cosmológica.

Conforme a literatura⁹, a ação de um fluido perfeito pode ser expressa como,

$$S_M = - \int d^{(D+1)}x \sqrt{-g} \rho \quad , \quad (2.141)$$

com D a dimensão espacial efetiva, logo, a ação de Schutz (2.128) para o gás de Chaplygin se torna,

$$S_c = - \int d^4x \sqrt{-g} \rho \quad , \quad (2.142)$$

da qual, inferimos a lagrangiana $L_c = -Na^3\rho$.

Por consequência, temos a hamiltoniana correspondente ao gás de Chaplygin, isto é,

$$H_c = a^3 \left(\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} \quad , \quad (2.143)$$

com $\bar{A} = \frac{A}{\pi^2}$ e $\bar{B} = \frac{B}{\pi^2}$, os parâmetros do gás de Chaplygin.

Por fim, ao combinar todas as equações das hamiltonianas aqui definidas para o modelo de FLRW, com $k = 1$, de um universo preenchido com gás de Chaplygin e poeira, tem-se a super hamiltoniana total,

$$H = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a + a^3 \left(\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} + p_T \quad . \quad (2.144)$$

Ao aplicar o procedimento de quantização canônica ao resultado, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt correspondente à equação de Schrödinger, genuinamente dependente do tempo, como consequência da contribuição linear ao momento associado ao fluido, ou seja, p_T .

O resultado deste procedimento será melhor explorado no Capítulo 3 do presente trabalho, juntamente com a exposição aprofundada do nosso modelo aqui analisado.

⁹(MANSOURI; NASSERI, 1999; MENDOZA; SILVA, 2021).

2.3 Condições de Contorno

Para a cosmologia o Universo é visto como distinto e suas condições de contorno não estão totalmente a nossa disposição, mas tais condições são de suma importância para a compreensão dos primeiros instantes do Universo, e, portanto, crucial para a estrutura fundamental da cosmologia quântica, pois as condições iniciais do sistema são estabelecidos a partir da imposição das condições de contorno. (KIEFER, 2007).

Quais seriam condições de contorno apropriadas para a equação de Wheeler-DeWitt? Apresentaremos duas das mais discutidas propostas para a definição das condições de contorno para a cosmologia quântica, a proposta de não contorno, também conhecida como proposta de Hartle-Hawking, e o tunelamento quântico do Universo (proposta utilizada em nossa análise), para as quais, apresentaremos os seus principais aspectos, assim como uma breve comparação entre ambas.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta Seção são: (VILENKIN, 1982; HARTLE; HAWKING, 1983; VILENKIN, 1993; ATKATZ, 1994; MERZBACHER, 1998; HALLIWELL, 2002; KIEFER, 2007; BAND; AVISHAI, 2013; VILENKIN; YAMADA, 2018; KIEFER; SANDHÖFER, 2022).

2.3.1 A Proposta de Não Contorno de Hartle-Hawking

Se a relatividade geral está correta, existiu um ponto de densidade infinita na curvatura do espaço-tempo, conhecido como ponto de singularidade, o qual prevê um início para o Universo, mas o qual não explica como ocorreu este princípio.

Neste contexto, Hartle e Hawking (1983) propõem a aplicação das ideias desenvolvidas por Hawking na década de 1970, para a singularidade de buracos negros, mas agora à singularidade do início do Cosmo. O objetivo é explicar quanticamente o surgimento do Universo, uma vez que seria inevitável a aplicação da teoria quântica, em um momento no qual a gravidade teria se tornado tão intensa que ocorreria a quebra das leis da física clássica.

Hartle e Hawking, dissertam sobre a importância da especificação dos possíveis estados quânticos, os quais o Universo pode ocupar, ao se aplicar a mecânica quântica a ele como um todo, e a possibilidade desta especificação determinar o seu comportamento dinâmico.

Seja uma superfície finita em tamanho, formada pelo espaço e pelo tempo, a qual não possui limites e/ou bordas. Se tais limites não existem, quais seriam então, as condições

físicas do Universo primitivo, necessárias para satisfazer tal condição? A proposta de Hartle-Hawking prevê que se voltarmos no tempo, para o seu princípio, o espaço e o tempo se tornam difusos, e apesar desta superfície dos primórdios do Universo ser suave e finita, não possui um ponto de origem específico.

Fundamentada na formulação de soma sobre histórias de Feynman, da teoria quântica (a qual descreve que se uma partícula se desloca de um ponto A a um ponto B , ela não percorre apenas um caminho, mas todos os caminhos possíveis entre os pontos A e B), a proposta de Hartle-Hawking impõe uma integral de caminho à qual atribui-se um peso, isto é, probabilidades relativas às diferentes histórias possíveis do Universo.

A estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking pode ser observada na Figura 8.

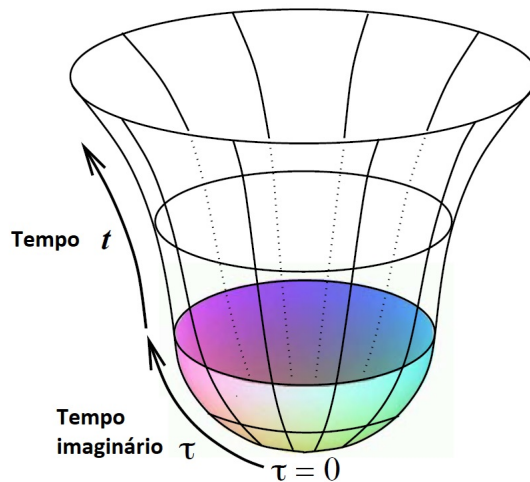


Figura 8: Estrutura geométrica da proposta de não contorno de Hartle-Hawking, na qual foi eliminada uma dimensão espacial do espaço-tempo quadrimensional. (Imagem: Kiefer (2007)).

Na parte inferior desta estrutura tem-se uma geometria euclidiana (com 4 dimensões no espaço, mas sem dimensões de tempo), e um universo de De Sitter em expansão no topo. A dimensão espacial, isto é, os círculos espaciais permanecem circulares e crescem, enquanto que a dimensão temporal se abre e se torna distinta em relação a dimensão espacial, o que acarreta na não intercalação do espaço e do tempo.

Por ser um princípio de seleção, a proposta de Hartle-Hawking seleciona subconjuntos de histórias do Universo, assim como permite a determinação de quais histórias teriam as maiores contribuições derivadas da geometria descrita na Figura 8, ou seja, esta proposta atribui diferentes probabilidades para diferentes histórias do Universo, e realiza isso através da associação de cada história a uma construção geométrica, na qual a história

arredonda-se no tempo imaginário τ , que, neste contexto, se comporta como uma direção no espaço.

Seja,

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = \int_{NC} \delta g_{\mu\nu} \delta \phi \exp \frac{-I_E[g_{\mu\nu}, \phi]}{\hbar} , \quad (2.145)$$

uma função de onda para o universo, a qual fornece um peso, para as diferentes configurações, dado pela exponencial da ação, com $NC \equiv$ não contorno, I_E a ação euclidiana, h_{ij} a métrica induzida na única fronteira, e ϕ equivalente às configurações de campo na única fronteira de não contorno. Seja (h_{ij}, ϕ) uma amplitude para diferentes configurações em um momento de tempo, h e ϕ representam, cada um, um universo cuja amplitude é dada por uma integral de caminho euclidiana na qual não aparece a noção de tempo, e a qual não possui outro contorno a não ser aquele no qual a função de onda é avaliada.

Portanto, o passado e o futuro seriam probabilísticos, isto é, simétricos e se comportariam como uma função de onda, assim como na teoria quântica usual, e descreveriam um conjunto de caminhos, através de uma integral de caminho sobre a métrica euclidiana sem contorno, em que, um dos principais objetivos da cosmologia do conjunto de histórias descrita nesta seção, ou seja, a cosmologia dos multiversos, é tornar esta cosmologia uma estrutura física passível de verificação, a qual seria acessível através das previsões probabilísticas realizadas pela proposta. Se o multiverso for uma estrutura de previsão verificável, pode vir a ser utilizado para prever observações em nosso próprio Universo.

2.3.2 Tunelamento Quântico do Universo

Análoga ao processo de decaimento α da mecânica quântica, a segunda proposta aqui descrita será o tunelamento quântico do Universo, uma perspectiva quântica para o surgimento do Cosmo, idealizada inicialmente por Alexander Vilenkin (1982), e adotada na análise do presente trabalho.

Nas palavras de Vilenkin: “A singularidade (do Universo) não é algo útil a se ter na teoria física, pois você quer que a sua matemática funcione, você não quer que ela quebre.”

Se voltarmos no tempo alguns modelos para o Universo, quase sempre existirá algo, ou

uma idealização de algo, que possa ter ocorrido antes. Qual seria uma possibilidade plausível capaz de quebrar essa ressurgência? Vilenkin sugere que a sua proposta, de origem quântica e espontânea de um universo a partir do nada, seria uma alternativa eficaz para encerrar essa percepção, assim como também evitar a singularidade inicial, onde o nada refere-se a um estado sem espaço clássico, tempo e matéria. Halliwell (2002), ademais, aponta que a proposta de tunelamento quântico do universo substituiria a singularidade inicial ao torná-la uma região classicamente proibida.

Na cosmologia quântica, o Universo pode ser descrito por uma função de onda $\Psi(h, \phi)$ definida no superespaço, com h a 3-geometria, e ϕ configurações de campo de matéria, cuja equação, que desempenha o papel de equação de Schrödinger, é a já discutida equação de Wheeler-DeWitt (2.108), da qual a função de onda Ψ é solução. Portanto, assim como na proposta de Hartle-Hawking, a proposta de tunelamento quântico lida com uma função de onda Ψ para o Universo.

No caso particular do modelo proposto por Vilenkin (1982), um modelo de interação de campos gravitacionais e de matéria (a qual pode ser considerada como sendo a da Teoria da Grande Unificação), supõe-se que um universo origina-se no estado de vácuo simétrico e é descrito pela métrica de FLRW (1.1) com $k = 1$ (universo fechado)¹⁰, o qual contrai em $t < 0$, atinge uma dimensão mínima em $t = 0$, e expande em $t > 0$.

Neste modelo, o universo emerge com tamanho finito ($a = H^{-1}$) e velocidade $\dot{a} = 0$. Este comportamento é análogo ao de uma partícula quicando em uma barreira de potencial em $a = H^{-1}$, com a (fator de escala) a coordenada da partícula, onde,

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - u(a) \right] \Psi(a) = 0 \quad , \quad (2.146)$$

com $u(a) = a^2(1 - H^2a^2)$, o potencial que possui a forma de uma barreira que separa $a = 0$ e $a = H^{-1}$, já que no modelo de Vilenkin o universo tunela de $a = 0$ para $a = H^{-1}$, com Ψ composta apenas de ondas propagatórias, isto é, nos limites do superespaço, Ψ deve incluir apenas ondas de saída, onde a singularidade inicial é descartada (mesmo com a possibilidade de haver uma singularidade final).

Se considerarmos o exemplo de modelo de universo de FLRW quantizado, descrito em (2.2.1), temos que o mesmo equivale matematicamente ao problema unidimensional da

¹⁰O modelo precisa ser para um universo fechado pois, caso o contrário, seu volume seria infinito e a probabilidade de nucleação seria nula.

mecânica quântica não-relativística, com potencial $V(a)$ definido como (2.107),

$$V(a) \equiv \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a^4}{a_0^4}\right) \quad ,$$

conforme pode ser observado na Figura 9, com a região $(0 < a < a_0)$ classicamente proibida para a partícula de energia zero, e classicamente permitida para $(a \geq a_0)$.

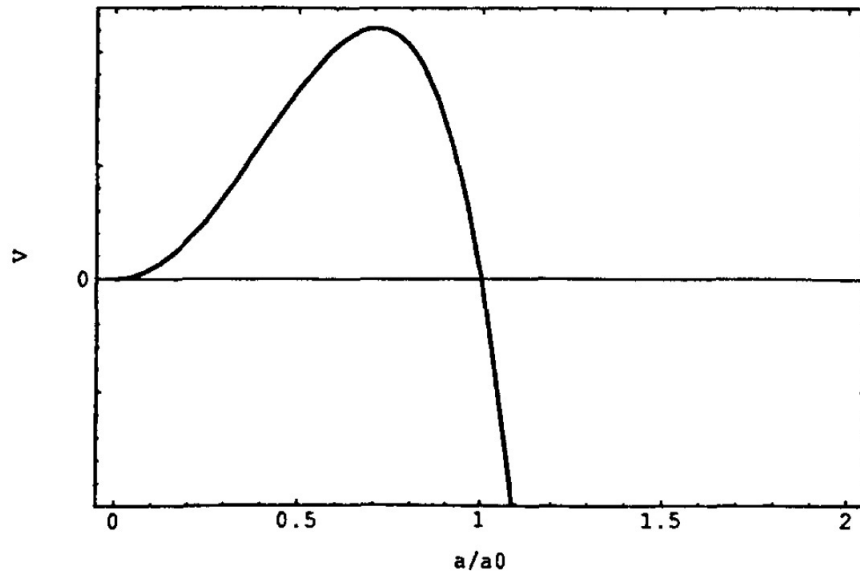


Figura 9: Barreira de potencial para um universo quantizado de FLRW. (Imagem: Atkatz (1994)).

A função de onda Ψ do Universo, solução da equação de Wheeler-DeWitt, é essencial para definir as condições iniciais de um modelo de universo, o qual pretende-se analisar, porém, como a equação de Wheeler-DeWitt possui um número infinito de soluções, torna-se necessário especificar as condições de contorno de Ψ .

Tais condições precisam ser adicionadas à equação de Wheeler-DeWitt como uma lei física independente, visto que não há uma configuração externa ao Universo para determiná-las, como ocorre na mecânica quântica usual. Logo, a fim de selecionar uma solução particular da equação de Wheeler-DeWitt, como a função de onda de minisuperespaço¹¹ (para o caso de um universo quantizado de FLRW), as condições de contorno precisam ser especificadas.

Para um modelo de universo de FLRW, ao considerar a região classicamente permitida, sua função de onda (complexa) deve conter apenas ondas de saída, e representar um

¹¹Em um contexto de minisuperespaço, considera-se apenas um número finito de graus de liberdade.

universo em expansão, cuja partícula em $a = 0$ tunela quanticamente através de uma barreira de potencial e surge em $a = a_0$, com a_0 uma dimensão finita.

Uma vez definida a função de onda Ψ para o evento de tunelamento quântico, calcula-se então a probabilidade de ocorrer este evento, em que, para o exemplo de modelo de universo quantizado de FLRW descrito em (2.2.1), temos,

$$P \equiv |\langle FLRW(a_0) | NADA \rangle|^2 \simeq \exp \left[-\frac{3\pi}{G} \int_0^{a_0} da a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{1/2} \right] , \quad (2.147)$$

com $\langle FLRW(a_0) | NADA \rangle$ a amplitude de criação quântica, para o qual verifica-se a emergência de um espaço-tempo clássico de FLRW na região de minisuperespaço, com a_0 uma dimensão finita, e no qual a função de onda oscila.

Portanto, a quantização de um modelo de universo de FLRW nos permite calcular a probabilidade do evento de surgimento quântico de um universo clássico a partir do processo de tunelamento, ao tornar a singularidade inicial do Universo uma região classicamente proibida, como é o caso do nosso modelo de universo, o qual será exposto em maiores detalhes no Capítulo 3 do presente trabalho.

Caso sejam escolhidas ondas de entrada e de saída em uma mesma quantidade, para a região classicamente permitida, tem-se a função de onda da proposta de não contorno de Hartle-Hawking, descrita previamente, e a probabilidade não nula do surgimento de um universo colapsante.

Conforme Hartle, uma comparação possível entre ambas as propostas é a de que elas são propostas para a função de onda do Universo mas, que competem quanto às previsões para temas como a estrutura em larga escala.

Já para Vilenkin, a grande diferença entre a sua proposta e a de não contorno de Hartle-Hawking seria, precisamente, as condições iniciais. Onde, em seu modelo, o universo surge preenchido com vácuo de alta energia, e possui (inicialmente) um tamanho muito pequeno, enquanto que na proposta de Hartle-Hawking, o universo deve surgir preenchido com vácuo de energia muito baixa, e possuir um tamanho inicial muito grande.

A proposta de tunelamento quântico do Universo seleciona soluções particulares da equação de Wheeler-DeWitt, complexas, enquanto que as soluções da proposta de não contorno de Hartle-Hawking são soluções reais, ou seja, a proposta de tunelamento é imposta no regime oscilatório da função de onda, e a proposta de não contorno no regime euclidiano.

Contudo, apesar das demais diferenças entre as propostas, sabe-se que para ambas a função de onda pode ser bem definida na aproximação semiclássica.

2.3.3 Aproximação Semiclássica

No que concerne a aproximação semiclássica, há a possibilidade do sistema analisado ser aproximadamente clássico, isto é, o sistema pode ser descrito classicamente, mas também permite uma descrição quântica.

Um exemplo é o da teoria da gravitação quântica, a qual (como já indicado) não possui uma concordância definitiva, contudo, se a gravidade semiclássica e o princípio da correspondência¹² forem considerados, um evento como o tunelamento quântico pode ser descrito.

Nomeada a partir da junção dos nomes dos físicos Gregor Wentzel, Hendrik Kramers, e Léon Brillouin, um exemplo de aproximação semiclássica é a aproximação WKB, a qual consiste em um método para a obtenção de soluções aproximadas para a equação de Schrödinger independente do tempo e em uma dimensão. Esta aproximação pode ser utilizada para determinar taxas de tunelamento quântico através de barreiras de potencial.

2.3.3.1 Aproximação WKB

Seja,

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0 \quad , \quad (2.148)$$

a equação de Schrödinger, para uma partícula de energia E que se move em uma região cujo potencial $V(x)$ é constante, ou varia lentamente com x .

Para $V(x)$ constante, as soluções de (2.148) são do tipo $\Psi(x) = e^{\pm ikx}$; se $V(x)$ é aproximadamente constante, as soluções são do tipo $\Psi(x) = e^{iu(x)}$.

A função $u(x)$ satisfaz a equação não linear,

$$i\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + [k(x)]^2 = 0 \quad , \quad (2.149)$$

¹²O princípio da correspondência afirma que no limite dos grandes números quânticos, o comportamento dos sistemas descritos pela teoria da mecânica quântica reproduz a física clássica, isto é, um limite adequado da teoria quântica deve conduzir à concepção de um espaço-tempo clássico.

equivalente a (2.148), com,

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]} \quad , \quad (2.150)$$

para $E > V(x)$, isto é, a região classicamente permitida, e

$$k(x) = -i\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]} = -ik(x) \quad , \quad (2.151)$$

para $E < V(x)$, isto é, a região classicamente proibida.

Seja,

$$u_0'^2 = [k(x)]^2 \quad , \quad (2.152)$$

uma primeira aproximação para u , cuja integração é definida como,

$$u_0 = \pm \int^x k(x)dx + C \quad , \quad (2.153)$$

uma solução exata se V constante.

Caso V varie com x , temos,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = k^2(x) + i\frac{d^2u}{dx^2} \quad , \quad (2.154)$$

uma outra forma para (2.149), a partir da qual uma sucessiva aproximação pode ser estabelecida.

Obtemos,

$$u_{n+1}(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) + iu''_n(x)} dx + C_{n+1} \quad , \quad (2.155)$$

a aproximação $(n + 1)$, ao substituir a n -ésima aproximação no lado direito da equação (2.154), resultando em,

$$u_1(x) = \pm \int^x \sqrt{k^2(x) \pm ik'(x)} dx + C_1 \quad , \quad (2.156)$$

para $n = 0$.

Como solução geral de (2.149) temos,

$$\begin{aligned} u(x) &= u_+ - i \ln [1 + Ae^{i(u_- - u_+)}] + B \\ &= u_- - i \ln [A + e^{i(u_+ - u_-)}] + B \quad , \end{aligned} \quad (2.157)$$

com A e B constantes arbitrárias, onde u_- e u_+ representam os sinais das equações (2.153), (2.155), e (2.156).

Seja,

$$|k'(x)| \ll |k^2(x)| \quad , \quad (2.158)$$

isto é, $u_1(x)$ próximo de $u_0(x)$, a condição necessária para que (2.155) tenda ao $u(x)$ correto. Se a condição (2.158) for válida, temos,

$$u_1(x) = \pm \int^x k(x) dx + \frac{i}{2} \ln k(x) + C_1 \quad , \quad (2.159)$$

a aproximação WKB de (2.149), cuja função de onda WKB aproximada é,

$$\Psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[\pm i \int^x k(x) dx \right] \quad . \quad (2.160)$$

Para $E > V(x)$ e $k(x)$ real, ambas as ondas de (2.160) se propagam de forma independente e em direções opostas.

Para $E < V(x)$, reescreve-se (2.160) como,

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[\pm \int^x k(x) dx \right] \quad , \quad (2.161)$$

sua forma real mais reconhecível.

Como aplicação deste método, temos o cálculo do coeficiente de transmissão para uma barreira na qual partículas incidem pela esquerda mas não possuem a energia necessária para atravessar classicamente a barreira de potencial da Figura 10, cujos pontos de retorno são a e b .

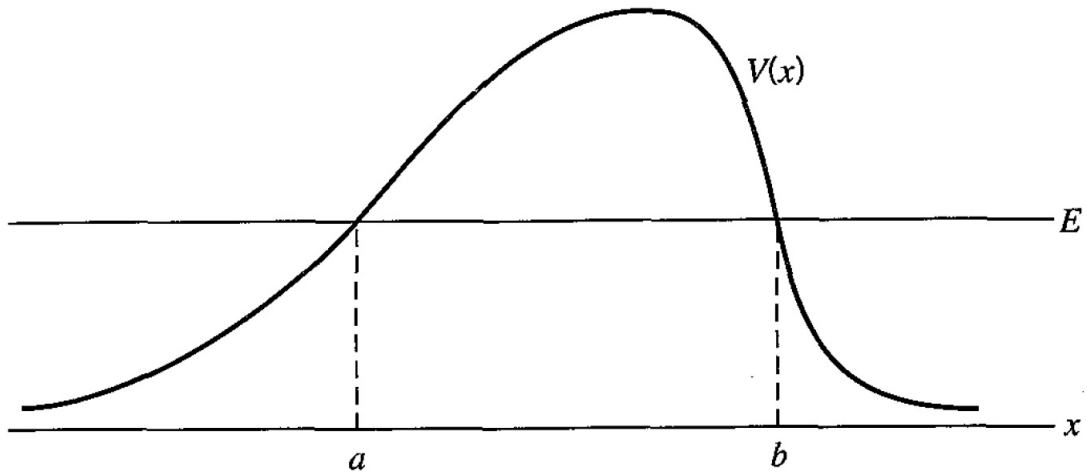


Figura 10: Barreira de potencial para exemplificar a aplicação do método WKB. (Imagem: Merzbacher (1998)).

De forma geral, as soluções da equação de Schrödinger, para as regiões $(x < a)$, $(a < x < b)$, e $(b < x)$ da Figura 10 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_a^x k dx\right) + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-i \int_a^x k dx\right) , \\ \Psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-\int_a^x k dx\right) + \frac{D}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(\int_a^x k dx\right) , \\ \Psi(x) &= \frac{F}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_b^x k dx\right) + \frac{G}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-i \int_b^x k dx\right) . \end{aligned} \quad (2.162)$$

Para estabelecer uma relação linear entre os coeficientes de (2.162), utilizam-se fórmulas de conexão as quais servem para vincular soluções WKB do tipo (2.160) e (2.161), na região classicamente acessível, e na região classicamente inacessível, respectivamente, ou ainda, conectar funções de onda entre regiões de $k(x)$ imaginário e real.

Com isso, temos,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\theta + \frac{1}{2\theta} & i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) \\ -i\left(2\theta - \frac{1}{2\theta}\right) & 2\theta + \frac{1}{2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} , \quad (2.163)$$

uma matriz M que conecta os coeficientes de (2.162) com,

$$\theta = \exp \left(\int_a^b k(x) dx \right) , \quad (2.164)$$

o qual fornece a medida da espessura e da altura da barreira em função da energia.

A partir da relação entre os coeficientes em (2.163) e do coeficiente de transmissão, isto é,

$$T = \frac{|\Psi_{trans}\sqrt{K_{trans}}|^2}{|\Psi_{inc}\sqrt{K_{inc}}|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2} , \quad (2.165)$$

é possível calcular,

$$T = \frac{1}{|M_{11}|^2} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2} , \quad (2.166)$$

o coeficiente de transmissão quando se assume que não existe onda incidente da direita, isto é, $G = 0$, com M_{11} o elemento 11 da matriz M , Ψ_{trans} a função de onda transmitida, e Ψ_{inc} a função de onda incidente.

Para $\theta \gg 1$, temos,

$$T \approx \frac{1}{\theta^2} = \exp \left(-2 \int_a^b k dx \right) , \quad (2.167)$$

o que representa uma barreira alta e larga, e, por consequência, θ uma medida da opacidade da barreira.

Um bom resultado para os cálculos de tunelamento quântico do Universo, isto é, a probabilidade de emersão quântica de um universo clássico, é aquele cujos resultados probabilísticos coincidem com os resultados da aproximação semiclássica em regiões próximas ao topo da barreira de potencial, como é o caso dos resultados que serão apresentados no Capítulo 5 do presente trabalho.

2.4 Interpretação Quântica

Após explanar sobre a dinâmica e as condições de contorno, falaremos agora sobre o terceiro elemento que rege a cosmologia quântica, a interpretação quântica.

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento desta Seção são: (PINTO-NETO, 2000; KIEFER, 2003; LAZAROU, 2007).

Historicamente, a primeira interpretação quântica é a interpretação de Copenhague, cujo desenvolvimento se deu entre os anos de 1925 e 1927, e encontra-se atrelada às discussões intensas entre Niels Bohr e Werner Heisenberg, dentre outros cientistas, na qual, fundamentalmente, tem por características principais:

- A indispensabilidade de conceitos clássicos para a descrição do processo de medição;
- A complementaridade entre partículas e ondas (propriedade intrínseca da Natureza);
- A redução do pacote de ondas como uma regra formal sem significado dinâmico.

Para a interpretação de Copenhague, o aparato de medição não pode ser separado do sistema quântico o qual encontra-se sob investigação, em que, o experimento escolhido define o conjunto apropriado de autofunções que será utilizado para construir o estado do sistema, porém, ela não resolve o problema da medição: o por que e como ocorre o colapso da função de onda durante o processo de medição; além de não fornecer informação sobre a física do sistema, apenas o seu formalismo matemático mais fundamental, para fazer previsões precisas e calcular as probabilidades dos mais diversos resultados.

Ademais, ao que concerne a gravitação quântica, ao contrário do que ocorre para situações normais de laboratório, onde é possível adotar uma interpretação como a de Copenhague como um tipo de *background* conveniente para uso pragmático, torna-se impossível a sua aplicação se efeitos quânticos do campo gravitacional encontram-se envolvidos.

Quanto à cosmologia quântica propriamente dita, como ela é a aplicação das leis da física quântica ao Universo como um todo, e como o Universo contém, naturalmente, todos os seus observadores, busca-se uma interpretação quântica que não contenha domínios clássicos no nível fundamental.

Portanto, uma vez que a interpretação de Copenhague não pode lidar com a cosmologia quântica, já que esta interpretação impõe a existência de um domínio clássico, usualmente adota-se uma interpretação alternativa a de Copenhague para lidar com a cosmologia quântica. Uma das interpretações alternativas seria a interpretação de Everett, isto é, a interpretação de Muitos Mundos.

Adotada em nosso trabalho, a interpretação de Muitos Mundos torna-se adequada às análises as quais há a tentativa de descrição do Universo como uma função de onda, e as quais assume-se que não há observadores externos.

Nesta interpretação, Everett assume que a função de onda faz parte da realidade e que não há colapso, ou seja, todos os resultados possíveis coexistem em diferentes ramos (componentes) do Universo, isto é, após uma medição, todos os componentes correspondentes aos diferentes resultados estão igualmente presentes, em que, tais componentes não podem interferir ou se comunicar entre si, com o intuito de proteger a própria teoria de produzir situações ilógicas.

Em outras palavras, para a interpretação de Muitos Mundos, na qual há a coexistência de todos os ramos (uma realidade simultânea), temos que em cada componente existe um observador com conhecimento do autovalor correspondente a ele, mas o qual não está ciente dos outros observadores e possibilidades, por conta da não interferência entre os ramos.

Enquanto que para a interpretação de Copenhagen, ao levarmos em conta uma medição impulsiva de um observável, a junção do aparato de medição macroscópico e a função de onda do sistema observado se divide em vários ramos, os quais, para gerar um bom resultado, quase nunca se sobrepõem, contudo, ao final da medida, observa-se apenas um dos autovalores, isto é, a medida é robusta de tal forma que se o procedimento de observação e medida for repetido (imediatamente após a primeira medida), obtém-se o mesmo resultado, ou seja, há o colapso da função de onda e os demais ramos desaparecem.

Apesar dos possíveis problemas da interpretação de Muitos Mundos, tal qual a ideia extrema de um Universo eternamente dividido (com uma divisão para cada resultado possível), temos que esta interpretação preserva o caráter determinista da Natureza.

Outra interpretação alternativa a de Copenhagen é a interpretação de Bohm-de Broglie, na qual a função de onda é suplementada com partículas e campos, isto é, variáveis clássicas que possuem valores definitivos de posição e momento, cuja dinâmica da partícula depende de um campo guia, enquanto que a função de onda obedece uma dinâmica autônoma.

Para esta interpretação, a partícula pontual no espaço de configuração, o qual descreve o sistema observado e o aparato de medida, deve existir, independente de qualquer observação, e a depender da sua posição inicial (antes da medida), ocupa um dos ramos quando é iniciada a divisão dos mesmos. Ou seja, após a medida, a partícula encontra-se presa em um pacote de ondas específico, cujos demais encontram-se vazios, e o observador do ramo ocupado não tem consciência dos pacotes de ondas não ocupados, pois estes não podem interagir com outras partículas, tampouco com a partícula pontual que ocupa o ramo, pois os pacotes de onda estão espacialmente separados da partícula e não a influenciam.

Temos, dessa forma, um colapso efetivo, não real, uma vez que os componentes vazios continuam a existir, só que sem a multiplicação dos observadores, com a possibilidade de interferência dos pacotes de onda vazios com o componente que contém a partícula, mas com uma probabilidade muito pequena deste fenômeno ocorrer em situações macroscópicas.

De uma perspectiva da cosmologia quântica, a interpretação de Bohm-de Broglie pode ser aplicada a modelos de minisuperespaço, bem como, afirma que a geometria tridimensional das hipersuperfícies do tipo espaço, como também a sua curvatura extrínseca, deve existir independente de qualquer medida ou observação, e sua evolução, identificada por um parâmetro temporal, seria regida por uma evolução quântica, devido a presença de um potencial quântico que surge naturalmente da equação de Wheeler-DeWitt.

Outros tipos de interpretações quânticas, assim como uma descrição mais aprofundada sobre as interpretações citadas acima, encontram-se nas referências estabelecidas como base para a construção dessa Seção.

Na próxima etapa do presente trabalho, apresentaremos os modelos clássico e quântico do nosso estudo, bem como o método estabelecido para o tratamento numérico do modelo, os decorrentes resultados, e nossas conclusões e considerações finais.

3 O Modelo

O modelo por nós analisado é definido por uma geometria do tipo FLRW com $k = 1$, isto é, um universo com geometria espacial positiva, preenchido com gás de Chaplygin e poeira¹.

Por se tratar do cálculo probabilístico do surgimento quântico de um universo clássico através do processo de tunelamento, os dois fluidos escolhidos para nossa análise, os quais representam estágios diferentes do conteúdo de matéria do universo, são: (i) poeira, cujo comportamento do potencial efetivo (V_{ef}), ao se levar em conta $\alpha = 0$ para $p = \alpha\rho$ (em conjunto com os demais parâmetros do sistema), exhibe um perfil de potencial de barreira, e (ii) gás de Chaplygin, uma vez que modelos com esse tipo de fluido descrevem uma transição suave entre uma expansão desacelerada do universo e a presente época de aceleração cósmica, ou seja, a transição entre um período dominado por poeira e um estágio de expansão acelerada (BOUHADI-LOPEZ; MONIZ, 2005; GORINI et al., 2005; BERNARDINI; BERTOLAMI, 2013).

O trabalho base utilizado para a construção e desenvolvimento deste Capítulo é: (ROCHA et al., 2022).

3.1 Modelo Clássico

Como previamente mencionado, a métrica de FLRW para um universo com geometria espacial positiva ($k = 1$) é definida através da equação (2.115),

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) ,$$

cujo sistema de unidades é o natural, isto é, $\hbar = 8\pi G = c = 1$.

Para um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin e um fluido perfeito (não

¹Ambos descritos em maiores detalhes no ítem (2.2.2.2) do presente trabalho.

necessariamente poeira), no qual ambos representam o conteúdo de matéria do sistema, considera-se a hamiltoniana,

$$H = \frac{p_a^2}{12a^{1-3\alpha}} + \frac{V_{ef}(a)}{a^{1-3\alpha}} - p_T \quad , \quad (3.1)$$

com,

$$V_{ef}(a) = 3a^2 - a^4 \sqrt{\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6}} \quad , \quad (3.2)$$

o potencial efetivo, no qual $\bar{A} = \frac{A}{\pi^2}$ e $\bar{B} = \frac{B}{\pi^2}$ são os parâmetros associados ao gás de Chaplygin, ou seja, o potencial contém os termos relacionados com a curvatura da seção espacial, e os termos do gás de Chaplygin, com p_a e p_T os momentos conjugados a a (fator de escala) e T , com p_T a variável canônica associada ao fluido, isto é, a variável que descreve o fluido perfeito, em que, para (3.1), considera-se a equação barotrópica do fluido ($p = \alpha\rho$), com $-1 \leq \alpha \leq 1$.

Se considerarmos como fluido perfeito poeira com $\alpha = 0$, e gás de Chaplygin² com $p = \frac{-A}{\rho}$, temos que (3.1) torna-se a super hamiltoniana (2.144),

$$H = -\frac{p_a^2}{12a} - 3a + a^3 \left(\bar{A} + \frac{\bar{B}}{a^6} \right)^{1/2} + p_T \quad ,$$

previamente calculada no Capítulo 2 do presente trabalho, com p_T a variável canônica agora associada ao fluido de poeira, cuja dinâmica clássica do modelo foi obtida através do formalismo ADM, e do formalismo de Schutz, ambos também descritos no Capítulo 2, onde a parte gravitacional da hamiltoniana foi derivada a partir do formalismo ADM, e a parte de matéria derivada a partir do formalismo de Schutz, cuja aplicação resultou na introdução da variável temporal.

Como o primeiro termo de (3.1) apresenta problemas de ordenamento do operador³, já que o processo de quantização será aplicado a a e p_a , adotamos as seguintes transformações canônicas (SILVA et al., 2009),

²Por ser um fluido politrópico, já que sua equação de estado é do tipo politrópica, o gás de Chaplygin pode ser considerado um caso particular dos fluidos barotrópicos

³Refere-se aos operadores cuja ordem de aplicação afeta o resultado, isto é, o problema de ordenamento de operadores surge quando múltiplas ordenações possíveis dos operadores dão origem a diferentes expressões quantizadas, levando a ambiguidade nos resultados finais. Tais problemas ocorrem na quantização de sistemas clássicos, onde variáveis clássicas são substituídas por operadores que atuam em um espaço de Hilbert (DIRAC, 1925).

$$a = \left(\frac{3(1-\alpha)x}{2} \right)^{\frac{2}{3(1-\alpha)}} , \quad (3.3)$$

e,

$$p_a = p_x a^{\frac{1-3\alpha}{2}} , \quad (3.4)$$

válidas para $\alpha \neq 1$, ou seja, introduzimos novas variáveis do espaço de fase com o intuito de resolver tais problemas de ordenamento, e simplificar o tratamento quântico do modelo, uma vez que encontrar a ordem correta das variáveis em uma equação pode levar a soluções únicas, cuja função geradora da transformação, a qual relaciona as variáveis originais com as novas, é definida como,

$$F = \frac{2}{3(1-\alpha)} p_x a^{\frac{3(1-\alpha)}{2}} , \quad (3.5)$$

com $a = 0$ para $x = 0$ em (3.3).

Ao efetuar as devidas substituições das novas variáveis em (3.1), e em (3.2), temos,

$$\bar{H} = \frac{p_x^2}{12} + V_{ef}(x, \alpha) - p_T , \quad (3.6)$$

$$V_{ef}(x, \alpha) = 3 \left(\frac{3x(1-\alpha)}{2} \right)^{\frac{2+6\alpha}{3(1-\alpha)}} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2}(1-\alpha)x \right)^{\frac{2(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \sqrt{A + B \left(\frac{3x(1-\alpha)}{2} \right)^{\frac{4}{\alpha-1}}} , \quad (3.7)$$

respectivamente, a hamiltoniana \bar{H} e o potencial efetivo V_{ef} para um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin e um fluido perfeito ao considerar as novas variáveis e $\alpha \neq 1$.

Para $\alpha = 0$ (poeira), temos,

$$a = \left(\frac{3x}{2} \right)^{\frac{2}{3}} , \quad (3.8)$$

$$p_a = p_x a^{\frac{1}{2}} , \quad (3.9)$$

$$F = \frac{2}{3} p_x a^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (3.10)$$

ou seja, para $\alpha = 0$ a torna-se maior à medida que x torna-se maior. Assim, se considerarmos (3.8), (3.9), e (3.10), temos,

$$\bar{H} = \frac{p_x^2}{12} + V_{ef}(x, \alpha) - p_T \quad , \quad (3.11)$$

$$V_{ef}(x, \alpha) = 3 \left(\frac{3x}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{3x}{2} \right)^2 \sqrt{A + B \left(\frac{3x}{2} \right)^4} \quad , \quad (3.12)$$

\bar{H} e V_{ef} para um universo de FLRW preenchido com gás de Chaplygin e poeira ($\alpha = 0$), ao considerar as novas variáveis.

O potencial efetivo (V_{ef}) para o fluido de poeira, com $\alpha = 0$, ao levar em conta todos os parâmetros do sistema, tal qual as novas variáveis, assim como os parâmetros do gás de Chaplygin (A e B), exibe um perfil de potencial de barreira, como pode ser observado na Figura 11, cuja conjuntura torna-se necessária para que sejam possíveis os cálculos probabilísticos de tunelamento quântico aqui analisados⁴.

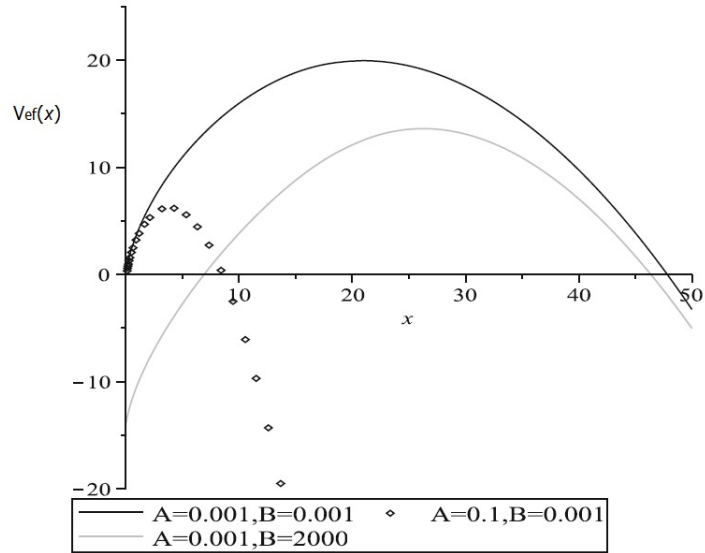


Figura 11: Comportamento do potencial efetivo $V_{ef}(x)$ para o caso de poeira ($\alpha = 0$). (Imagem: Rocha et al. (2022)).

⁴Esta característica, de perfil de barreira de potencial, também é observada quando o fluido considerado é o de radiação.

Com o propósito de analisar todas as possíveis trajetórias do sistema, podemos observar o retrato de fase do modelo, para o qual, cada conjunto de condições iniciais é representado por uma curva ou ponto diferente (MONERAT et al., 2021).

Ou seja, o retrato de fase é uma ferramenta inestimável no estudo de sistemas dinâmicos, por ser uma representação das trajetórias do sistema no plano de fase, o qual é uma exibição visual de algumas características de certos tipos de equações diferenciais.

Para o nosso modelo, com poeira ($\alpha = 0$) e gás de Chaplygin, a dinâmica clássica é governada pelo sistema de equações de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{6} p_x \quad ; \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = -\frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} \quad ; \\ \dot{T} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_T} = -1 \quad ; \\ \dot{p}_T &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial T} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{3.13}$$

com \bar{H} (3.11) e $(\dot{})$ a derivada com respeito ao tempo cósmico⁵.

Na Figura 12 temos o retrato de fase do nosso sistema, o qual apresenta um ponto fixo do tipo sela hiperbólica, que representa um universo estático de Einstein quando a repulsão cosmológica contrabalança a atração gravitacional, preenchido por poeira e gás de Chaplygin.

Ademais, o retrato de fase da Figura 12 encontra-se separado em quatro regiões (diferentes classes de soluções), por separatrizes, isto é, as órbitas em preto (cuja energia é a mesma do ponto fixo); onde as soluções para x e p_x são válidas somente na vizinhança linear do ponto. As órbitas no plano (x, p_x) representam modelos de FLRW, isto é, universos homogêneos e isotrópicos, preenchidos com poeira ($\alpha = 0$) e gás de Chaplygin, cujos parâmetros assumem os valores $A = 0.001$ e $B = 0.001$.

Descrição das regiões do retrato de fase da Figura 12:

- Região 1: as órbitas surgem na singularidade em $x = 0$, e expandem indefinidamente com $p_x > 0$;

⁵O tempo cósmico é a coordenada temporal que pode ser definida para um universo homogêneo, isotrópico, e em expansão tal que o universo possua a mesma densidade em cada momento no tempo.

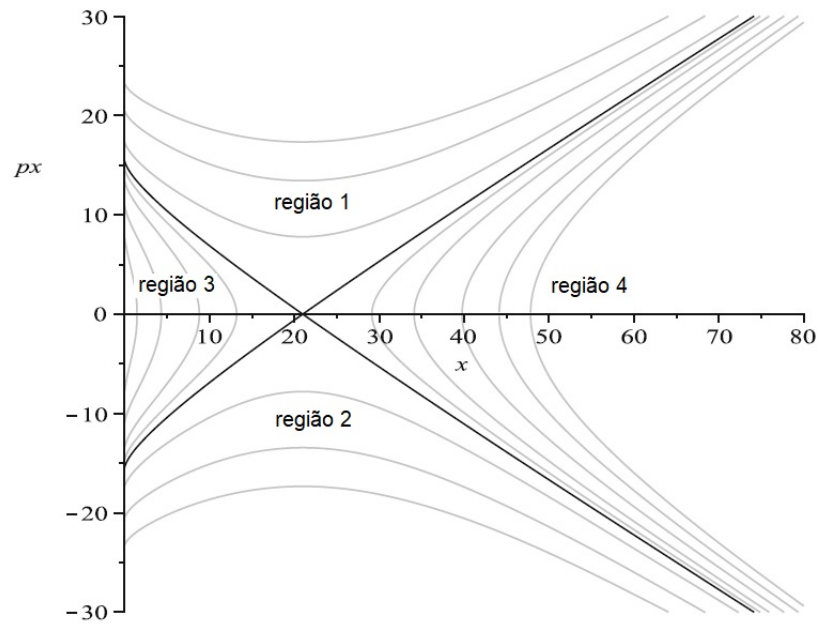


Figura 12: Retrato de fase, no qual as órbitas do plano (x, p_x) representam modelos de universos de FLRW homogêneos e isotrópicos, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$). (Imagem: Rocha et al. (2022)).

- Região 2: para $p_x < 0$, as órbitas representam universos os quais encontram-se inicialmente em seu estado de expansão máxima, e iniciam o processo de colapso até a singularidade $x = 0, p_x = 0$.
- Região 3: as órbitas que surgem na singularidade com $p_x > 0$ expandem até um certo ponto, no qual o processo de contração se inicia, devido à supressão da repulsão cosmológica;
- Região 4: no início, o universo com $p_x < 0$ e $x > 20.97834927$ encontra-se em um estado de expansão máxima, passa por um processo de contração até um certo ponto, no qual as contrações gravitacionais cessam, e a repulsão cosmológica se intensifica ao ponto do universo expandir indefinidamente.

O movimento torna-se restrito às regiões 1 e 2 em cenários cujas órbitas possuem energia maior que a energia do ponto fixo. Assim, como para quando as órbitas possuem energia menor que a energia do ponto fixo, o movimento estará restrito às regiões 3 e 4.

Na Figura 13, encontra-se um exemplo genérico de um retrato de fase com ponto fixo do tipo sela hiperbólica, no qual é possível observar o movimento das órbitas do retrato de fase da Figura 12.

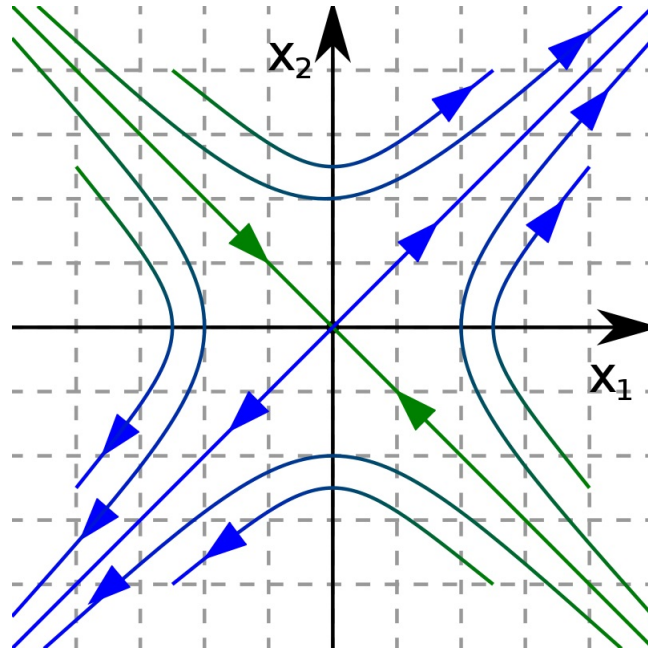


Figura 13: Exemplo de retrato de fase com um ponto fixo do tipo sela hiperbólica.

Ao combinar as primeiras duas equações de (3.13), temos,

$$\frac{1}{12} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\partial V_{ef}(x)}{\partial x} = 0 \quad , \quad (3.14)$$

o qual será utilizado para investigar numericamente o comportamento do fator de escala $x(t)$ no tempo cósmico para as quatro regiões do retrato de fase da Figura 12, cujas condições iniciais para cada uma das quatro regiões do retrato de fase serão estabelecidas com um dado valor do fator de escala $x(0) = x_0$ localizado em uma dada superfície de energia, enquanto que $\dot{x}(0)$,

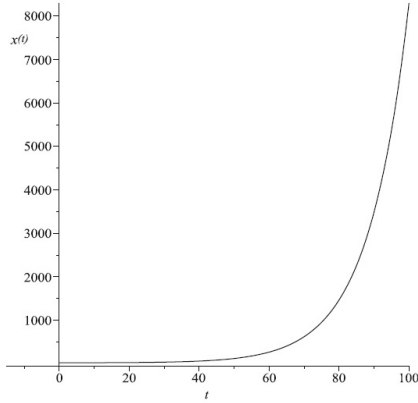
$$\dot{x}(0) = \pm \frac{1}{6} \sqrt{12(p_T - V_{ef}(x_0, \alpha))} \quad , \quad (3.15)$$

a derivada temporal do fator de escala, será determinada ao se aplicar a restrição da hamiltoniana, isto é, $\bar{H} = 0$.

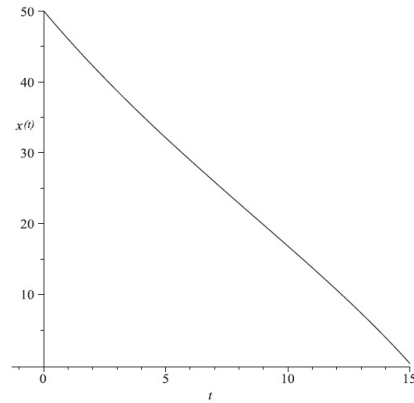
O comportamento do fator de escala $x(t)$ pode ser observado na Figura 14, do qual infere-se que soluções de expansão são plausíveis, mas limitadas às condições iniciais das regiões 1 e 4 do retrato de fase, como pode ser observado nas Figuras 14.a e 14.d.

Para as regiões 2 e 3 do retrato de fase, as Figuras 14.b e 14.c retratam o processo de colapso gravitacional de universos cuja configuração final é o chamado *Big Crunch*, isto é, o colapso na singularidade.

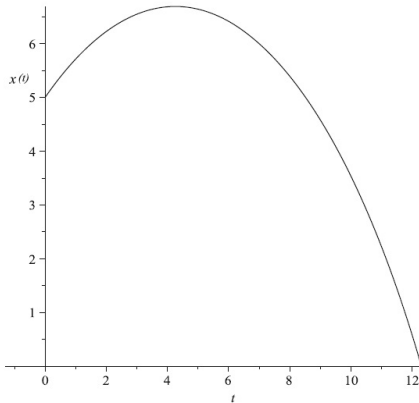
Apenas soluções cujas condições iniciais são escolhidas na região 4 do retrato de fase, são livres de singularidade (para soluções que descrevem um universo em expansão).



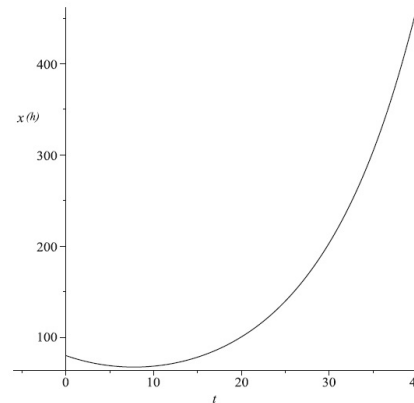
(a) Condições iniciais região 1: $x(0) = 21$, $\dot{x}(0) = 0.1478042479$, $p_x(0) = 0.8868254874$, e energia $p_T = 20$



(b) Condições iniciais região 2: $x(0) = 50$, $\dot{x}(0) = -4.093367192$, $p_x(0) = -24.56020315$, e energia $p_T = -24.56020315$



(c) Condições iniciais região 3: $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0.8202095112$, $p_x(0) = 4.921257067$, e energia $p_T = 12.94657931$



(d) Condições iniciais região 4: $x(0) = 80$, $\dot{x}(0) = -3.377915430$, $p_x(0) = -31.92020424$, e energia $p_T = 12.94657927$

Figura 14: Comportamento do fator de escala $x(t)$, com respeito ao tempo cósmico, para o nosso modelo, com $A = 0.001$ e $B = 0.001$. (Imagem: Rocha et al. (2022)).

3.2 Modelo Quântico

A quantização⁶ do modelo seguirá o formalismo de Dirac, no qual as coordenadas são elevadas ao grau de operadores, e seus momentos em operadores diferenciais, da seguinte forma,

⁶A quantização do sistema torna-se necessária devido a relevância da aplicação deste processo à dinâmica dos primeiros instantes do Universo, como explicado nos Capítulos 1 e 2 do presente trabalho.

$$\begin{aligned}\hat{p}_x &\rightarrow -\frac{i\partial}{\partial x} \quad , \\ \hat{p}_T &\rightarrow -\frac{i\partial}{\partial T} \quad ,\end{aligned}\tag{3.16}$$

Seja,

$$\hat{H}\Psi(x, T) = 0 \quad ,\tag{3.17}$$

a equação de Wheeler-DeWitt, na qual $\Psi(x, T)$ é a função de onda de um universo que descreve as propriedades físicas do Universo como um sistema quântico, e da qual x e T são variáveis.

Ao considerar as variáveis canônicas do sistema, isto é, x , p_x , T , e p_T , a equação (3.17) torna-se,

$$\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{ef}(x, \alpha)\right)\Psi(x, \tau) = -\frac{i\partial}{\partial \tau}\Psi(x, \tau) \quad ,\tag{3.18}$$

a equação de Wheeler-DeWitt, mas agora com uma variável temporal, isto é, com a forma de uma equação de Schrödinger dependente do tempo, com $T = -\tau$.

Devido à imposição do operador \hat{H} ser autoadjunto com respeito ao ponto interno (LEMOS, 1996), temos,

$$(\Psi, \phi) = \int_0^\infty dx \Psi^*(x, \tau)\Psi(x, \tau) \quad ,\tag{3.19}$$

conjuntura a qual restringe a estrutura do espaço de Hilbert às funções de onda que satisfazem as condições de contorno estabelecidas por Hartle-Hawking, isto é,

$$\Psi(0, \tau) = \Psi(\infty, \tau) = 0 \quad ,\tag{3.20}$$

visto que é imprescindível impor condições de contorno às funções de onda, em razão da existência das mesmas apenas em $[0, \infty)$, em que, $\Psi(0, \tau) = 0$ ou $\Psi'(0, \tau) = 0$, com $()'$ derivada parcial com respeito a x .

Para o nosso modelo, consideramos,

$$\Psi(x, 0) = D \cdot x \exp(-Cx^2) \quad , \quad (3.21)$$

um pacote de onda inicial (MONERAT et al., 2022), no qual D e C são constantes positivas e reais, e o qual satisfaz as condições de contorno (3.20).

As constantes D e C da equação (3.21) podem ser determinadas ao se fazer uso da condição de normalização, e do valor médio da energia cinética do fluido de poeira E_M , dados, respectivamente, por,

$$\int_0^{\infty} \Psi^+(x, 0) \Psi(x, 0) dx = 1 \quad , \quad (3.22)$$

$$\int_0^{\infty} \Psi^+(x, 0) \cdot \frac{p_a^2}{12} \Psi(x, 0) dx = E_M \quad . \quad (3.23)$$

Por imposição da norma do pacote de onda ser igual a 1, temos que (3.22) e (3.23) dão origem a um sistema algébrico de duas expressões, as quais podem ser resolvidas para D e C , o que conduz aos respectivos valores,

$$D = \left(\frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \quad , \quad (3.24)$$

$$C = 4E_M \quad , \quad (3.25)$$

cuja substituição em (3.21) nos fornece,

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) \quad , \quad (3.26)$$

o pacote de onda normalizado dependente do fator de escala x e do parâmetro E_M , ou seja, a condição inicial do nosso modelo.

Uma vez estabelecida a condição inicial do modelo, permite-se que a função de onda se propague até um infinito numérico (x_{max}), na direção de $x > 0$, o qual será estabelecido em $x_{max} = 100$ para o nosso modelo, ou seja, como nossa análise refere-se ao cálculo de probabilidades de tunelamento quântico do universo, apenas consideramos ondas propagatórias, isto é, ondas de saída, como definido na proposta de tunelamento quântico, descrita no item (2.3.2) do presente trabalho.

Como soluções analíticas para (3.18) não são conhecidas, resolvemos (3.18) numericamente ao empregar o método de diferenças finitas, mais especificamente o método de Crank-Nicolson, o qual será descrito em maiores detalhes no Capítulo 4 do presente trabalho.

4 Tratamento Numérico

4.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais ordinárias e parciais, (EDO) e (EDP), por aproximação de derivadas com diferenças finitas, isto é, este método converte EDOs e EDPs em um sistema de equações lineares, as quais podem ser resolvidas ao empregar-se técnicas de álgebra matricial.

As equações diferenciais são aproximadas ao se utilizar fórmulas de diferenças finitas em pontos de uma grade, espaçados uniformemente (Figura 15), e converter uma equação diferencial em um conjunto de equações algébricas (KONG; SIAUW; BAYEN, 2020).

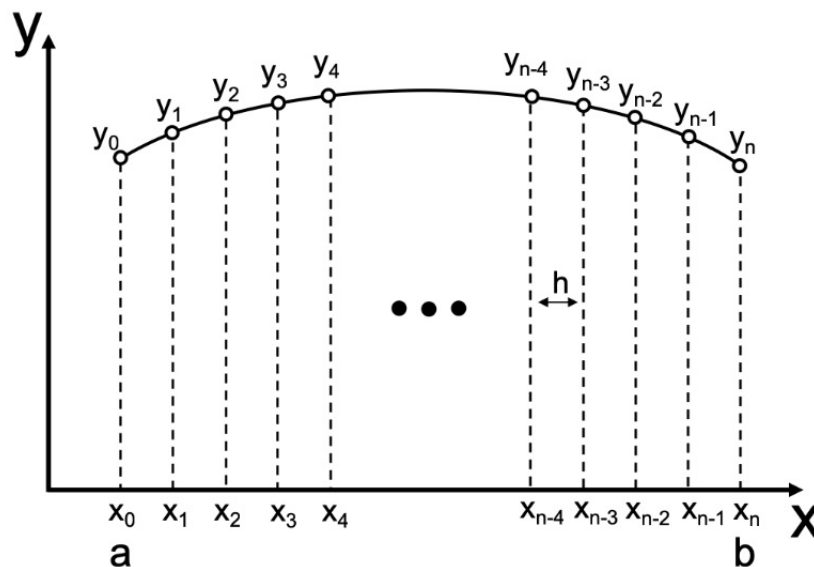


Figura 15: Grade método de diferenças finitas.

Na Figura 15 observa-se um intervalo $[a, b]$ dividido em n subintervalos iguais de comprimento h .

Seja y uma função suave, cuja derivada (KVAERNO, 2020) é definida como,

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} , \quad (4.1)$$

com,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} , \quad (4.2)$$

uma aproximação do tipo posterior,

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} , \quad (4.3)$$

uma aproximação do tipo anterior, e,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} , \quad (4.4)$$

uma aproximação do tipo central, cuja segunda derivada é definida como,

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} . \quad (4.5)$$

Costuma-se utilizar fórmulas de diferenças centrais devido ao fato delas fornecerem uma melhor precisão aos métodos de diferenças finitas.

Para uma análise de erro, executa-se uma expansão em série de Taylor do erro em torno de x , onde,

$$e(x; h) = y'(x) - \frac{y'(x+h) - y'(x-h)}{h} = -\frac{1}{12}(y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2))h^2 = -\frac{1}{6}y'''(\eta)h^2 , \quad (4.6)$$

com $\eta \in (x-h, x+h)$ para diferenças centrais, $e(x; h) = -\frac{1}{2}y''(\xi)h$ com $\xi \in (x, x+h)$ para diferenças do tipo posterior, e $e(x; h) = +\frac{1}{2}y''(\xi)h$ com $\xi \in (x-h, x)$ para diferenças do tipo anterior.

As fórmulas com os termos de erro são,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta) , \quad (4.7)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\eta) \quad , \quad (4.8)$$

para diferenças centrais, e

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) \quad , \quad (4.9)$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi) \quad , \quad (4.10)$$

para diferenças do tipo posterior e anterior, respectivamente.

Se a equação diferencial for linear, as expressões de diferenças finitas serão aplicadas para substituir as derivadas de y na equação, o que resulta em um sistema de $n + 1$ equações algébricas lineares, em que, equações algébricas também serão não lineares caso a equação diferencial seja não linear.

De forma resumida, ao implementar o método de diferenças finitas, realizamos os seguintes passos:

- Definimos a equação a resolver, e suas condições de contorno;
- Discretizamos o domínio no qual a equação é definida;
- As derivadas na equação são substituídas por aproximações de diferenças finitas;
- Formamos um sistema de equações lineares com base nas aproximações;
- Resolvemos o sistema de equações resultantes;

Para o nosso modelo, estamos interessados em soluções para EDPs, uma vez que a equação de Wheeler-DeWitt é uma EDP do tipo hiperbólica (como definido no item 2.2.2 do presente trabalho). Para este tipo de equação, procura-se uma função com mais de uma variável que satisfaça relações entre várias derivadas parciais. Para se obter uma solução única de uma EDP é necessária alguma informação sobre a solução, geralmente fornecida pelas condições de contorno (LEVEQUE, 1998).

Assim, após performar uma semi-discretização do sistema, também chamada de semi-discretização de EDP, isto é, combinar a discretização de problemas de contorno com técnicas para resolver EDOs, desempenha-se uma análise de estabilidade do sistema.

Devido a sua incondicionável estabilidade (IITAKA, 1994; TEUKOLSKY, 2000), o método escolhido para a nossa análise foi o método de Crank-Nicolson, o qual será apresentado no ítem (4.1.1) do presente Capítulo.

4.1.1 Método de Crank-Nicolson

A equação de Wheeler-DeWitt, a ser tratada aqui, é definida como,

$$\left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{ef}(x, \alpha) \right) \Psi(x, \tau) = -\frac{i\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau) \quad ,$$

ou seja, a equação (3.18), com valores discretos para as variáveis x e τ dentro de intervalos de tempo e espaço apropriados, no qual o método de Crank-Nicolson (CRANK; NICOLSON, 1947) consiste em calcular numericamente os valores da função de onda $\Psi(x, \tau)$ em pontos de uma grade (Figura 16).

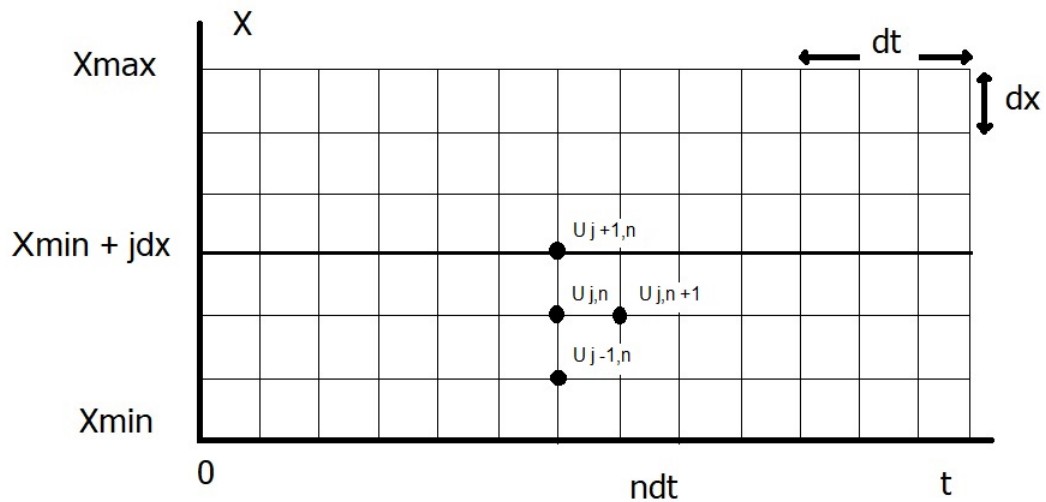


Figura 16: Grade método de Crank-Nicolson - Intervalo $[0, T]$ dividido em N subintervalos iguais indexados por $n = 0, \dots, N$, e $[x_{min}, x_{max}]$ dividido em subintervalos J indexados por $j = 0, \dots, J$, para $U(x, t)$ a função de onda, e cujos tamanhos dos intervalos: dt na direção temporal; dx na direção espacial.

Vamos aplicar o método a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad . \quad (4.11)$$

Primeiramente, discretizamos no tempo para obter,

$$i\hbar(\Psi_{j,n+1} - \Psi_{j,n}) = dt\hat{H}\Psi_{j,n} \quad , \quad (4.12)$$

com,

$$i\hbar(\Psi_{j,n+1} - \Psi_{j,n}) = dt\hat{H}\Psi_{j,n+1} \quad , \quad (4.13)$$

devido a simetria.

No limite para $dt \rightarrow 0$, (4.12) e (4.13) são equivalentes; para dt finito, podem surgir erros, portanto, consideramos a média,

$$\Psi_{j,n+1} = \left(1 + \frac{idt}{2\hbar}\hat{H}\right)^{-1} \left(1 - \frac{idt}{2\hbar}\hat{H}\right)\Psi_{j,n} \quad , \quad (4.14)$$

para uma maior precisão, com,

$$E = 1 + \frac{idt}{2\hbar}\hat{H} \quad , \quad (4.15)$$

$$E^+ = 1 - \frac{idt}{2\hbar}\hat{H}^+ \quad . \quad (4.16)$$

Com a substituição de (4.15) e (4.16), em (4.14), temos,

$$\Psi_{j,n+1} = E^{-1}E^+\Psi_{j,n} \quad , \quad (4.17)$$

em que,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V_{ef}(x)\Psi \quad , \quad (4.18)$$

é o operador hamiltoniano.

Com o intuito de calcular os valores de Ψ nos diferentes pontos da grade, executa-se uma expansão em série de Taylor,

$$\Psi_{j+1,n} = \Psi_{j,n} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}dx^2 + \dots \quad , \quad (4.19)$$

$$\Psi_{j-1,n} = \Psi_{j,n} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx^2 + \dots \quad , \quad (4.20)$$

da qual é possível encontrar a primeira e a segunda derivadas de Ψ , ou seja,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{j+1,n} - \Psi_{j-1,n}}{2dx} \quad , \quad (4.21)$$

com,

$$\Psi_{j+1,n} - \Psi_{j,n} = 2dx \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad , \quad (4.22)$$

e,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{j+1,n} - 2\Psi_{j,n} + \Psi_{j-1,n}}{dx^2} \quad . \quad (4.23)$$

Com este resultado, obtemos,

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{j+1,n} - 2\Psi_{j,n} + \Psi_{j-1,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_j) \Psi_{j,n} \quad , \quad (4.24)$$

do qual, infere-se que (4.14),

$$\Psi_{j,n+1} = \left(1 + \frac{idt}{2\hbar} \hat{H} \right)^{-1} \left(1 - \frac{idt}{2\hbar} \hat{H} \right) \Psi_{j,n} \quad ,$$

é a solução do problema em termos do operador hamiltoniano \hat{H} devido à aproximação por diferenças finitas centrais na variável tempo, com j e n índices os quais representam, respectivamente, o índice espacial e o índice temporal, isto é, os pontos de localização da grade (MONERAT et al., 2022).

Como exemplo, para $j = 0, \dots, 4$, temos (4.24) na forma de uma matriz tridiagonal ($M \times M$),

$$\hat{H}\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_1) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_2) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

com,

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{2,n} - 2\Psi_{1,n} + \Psi_{0,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_1)\Psi_{1,n} \quad , \quad (4.25)$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{3,n} - 2\Psi_{2,n} + \Psi_{1,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_2)\Psi_{2,n} \quad , \quad (4.26)$$

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\Psi_{4,n} - 2\Psi_{3,n} + \Psi_{2,n}}{dx^2} \right) + V_{ef}(x_3)\Psi_{3,n} \quad , \quad (4.27)$$

para $j = 1, 2, 3$, respectivamente, onde $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$, devido as condições de contorno,

$$U(0, t) = U(\infty, t) = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Para $j = 0, \dots, n$, temos,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_1) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_2) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_3) & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\hbar^2}{2mdx^2} \quad \frac{\hbar^2}{mdx^2} + V_{ef}(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

onde,

$$E = 1 + \frac{idt}{2} \hat{H} = \begin{pmatrix} b_1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & b_2 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & b_3 & -a & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

com,

$$a = \frac{i\hbar^2 dt}{4mdx^2} \quad , \quad (4.29)$$

$$b_j = 1 + 2a + \frac{idt}{2} V_{ef}(x_j) \quad , \quad (4.30)$$

para (4.17),

$$\Psi_{j,n+1} = E^{-1} E^+ \Psi_{j,n} \quad .$$

Como mencionado no início, o método de Crank-Nicolson permite calcular numericamente os valores de $\Psi(x, \tau)$, ou seja, permite obter soluções para (3.18) na forma de pacotes de onda de norma finita, bem definidos em todo espaço de solução, inclusive quando o fator de escala (x) vai à zero.

No ítem (4.1.1.1) do presente Capítulo apresentaremos a aplicação do método ao nosso modelo.

4.1.1.1 Aplicação do Método de Crank-Nicolson ao Modelo

Seja,

$$\left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{ef}(x, \alpha) \right) \Psi(x, \tau) = -\frac{i\partial}{\partial \tau} \Psi(x, \tau) \quad ,$$

a equação de Wheeler-DeWitt (3.18) do modelo, e,

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) \quad ,$$

a condição inicial, isto é, o pacote de onda (3.26), ambos definidos em nosso modelo quântico (Capítulo 3).

Tomemos como exemplo, uma energia cinética média do fluido de poeira, com $\alpha = 0$, $E_M = 19.9$ menor que o valor máximo da energia $E_{max} = 19.9344758644320$ da barreira de potencial V_{ef} da Figura 11, para o nosso modelo com fluido de poeira e gás de Chaplygin, com parâmetros $A = 0.001$ e $B = 0.001$.

Um dos critérios para avaliar a confiabilidade dos cálculos numéricos da evolução temporal das funções de onda, e a eventual estabilidade do método, é a conservação da norma. Com esta finalidade, realizamos cálculos para estabelecer o comportamento da norma em termos do número de pontos N (discretização espacial), para $\tau = 0$ e $\tau = \tau_{max}$, como pode ser observado na Figura 17.

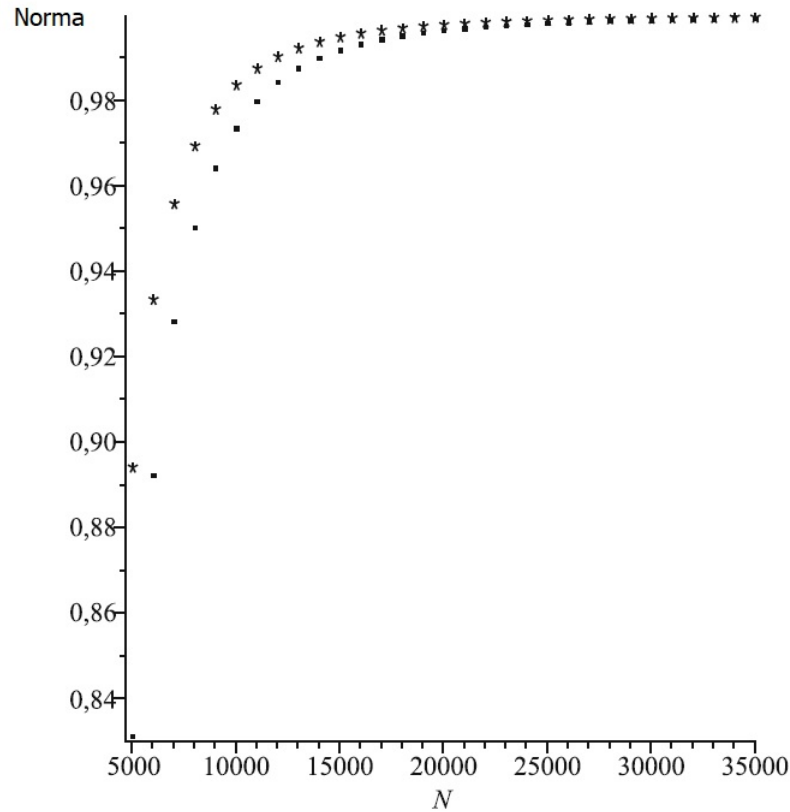


Figura 17: Comportamento da norma em função do número de pontos N (discretização espacial) em $\tau = 0$ (asterisco) e $\tau = \tau_{max}$ (ponto), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, $\alpha = 0$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Ao analisar o comportamento da norma, verifica-se que a norma tende à 1 em todos os instantes de tempo τ , ao aumentarmos o número de pontos N , o qual foi estabelecido entre $N = 5000$ e $N = 35000$, em concordância com a determinação da condição de normalização (3.22), a partir da qual é possível inferir a excelente estabilidade do método aplicado ao nosso modelo.

Ademais, com a aplicação do método de Crank-Nicolson também é possível obter o comportamento da densidade de probabilidade,

$$\rho = |\Psi(x_{max}, \tau)|^2, \quad (4.31)$$

Figura 18, em que, $x_{max} = 100$ (o infinito numérico), $\tau_{max} = 15$, $N = 9000$ (a discretização espacial), e $dt = 0.05$, a partir da qual é possível verificar que os pacotes de onda retêm a norma ao longo do tempo com um erro menor que 5%, bem como que parte do pacote de onda atravessa a barreira de potencial V_{ef} , apesar da energia E_M ser menor que E_{max} .

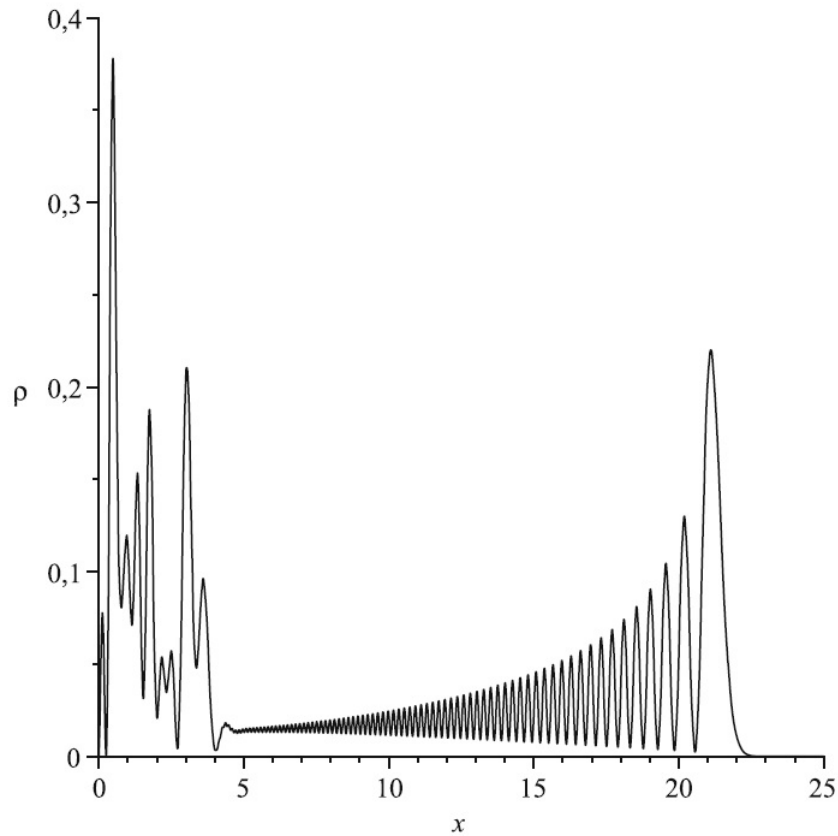


Figura 18: Comportamento da densidade de probabilidade (ρ), com $x_{max} = 100$, $\tau_{max} = 15$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $dt = 0.05$, com o ponto mais à direita da barreira: $x_2 = 22.0497989282069$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Dessa forma, o comportamento da densidade de probabilidade (4.31) indica a possibilidade do nosso modelo de universo tunelar quanticamente e surgir do lado direito da barreira de potencial como um sistema clássico de tamanho finito, cuja taxa de tunelamento numérico, isto é, a probabilidade do evento de tunelamento ocorrer, pode ser calculada a partir da seguinte relação,

$$PT = \frac{\int_{x_2}^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}{\int_0^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx} \quad , \quad (4.32)$$

na qual, o denominador é a norma, x_{max} é o infinito numérico, e x_i é o ponto de retorno da barreira de potencial efetivo (3.7), com x_1 o ponto de retorno à esquerda e x_2 o ponto de retorno à direita (como pode ser observado no esquema da Figura 19).

Os resultados das probabilidades de tunelamento para o nosso modelo serão apresentados no Capítulo 5 do presente trabalho, para os quais será realizado um comparativo com resultados da probabilidade de tunelamento WKB (aproximação semiclássica), assim como um comparativo com resultados da taxa de probabilidade de tunelamento quântico obtidos

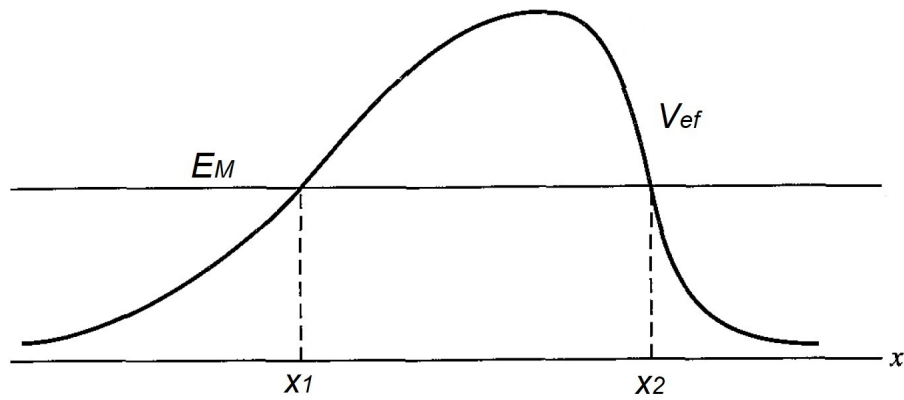


Figura 19: Exemplo de barreira de potencial, na qual os pontos de retorno x_1 e x_2 são, respectivamente, os pontos de retorno à esquerda e à direita da barreira.

através das mesmas técnicas¹, mas para o fluido de radiação ao invés do fluido de poeira, previamente calculados por (MONERAT et al., 2007).

¹A técnica numérica utilizada em nossa análise foi desenvolvida e aplicada em publicações tais quais (MONERAT et al., 2007), (SILVA et al., 2009), (MONERAT et al., 2020), (MONERAT et al., 2021), e (MONERAT et al., 2022).

5 Resultados

Neste Capítulo apresentaremos nossos resultados para as probabilidades de tunelamento quântico em função de (i) a energia cinética média E_M do fluido de poeira, e (ii) dos parâmetros A e B do gás de Chaplygin.

Também realizaremos um comparativo com resultados para (i) probabilidades de tunelamento WKB, e (ii) probabilidades de tunelamento para um modelo semelhante ao nosso, mas com fluido de radiação ao invés de poeira, cujos resultados foram previamente calculados por (MONERAT et al., 2007).

Os dados da nossa análise foram gerados ao se utilizar uma rotina (MELLO et al., 2018) do Mathematica 12.3.1, cujas tabelas, nas quais constam os dados utilizados para os nossos principais resultados, encontram-se no Apêndice B do presente trabalho.

5.1 Tunelamento em Função de E_M

Como mencionado ao final do Capítulo 4 do presente trabalho, a probabilidade de tunelamento quântico é calculada a partir de (4.32),

$$PT = \frac{\int_{x_2}^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx}{\int_0^{x_{max}} |\Psi(x, \tau_{max})|^2 dx} \quad , \quad (5.1)$$

e, para a aproximação semiclássica WKB, temos,

$$PT_{WKB} = \frac{4}{\left(2\theta + \frac{1}{2\theta}\right)^2} \quad , \quad (5.2)$$

isto é, equação (2.166), cujo numerador representa o módulo quadrado da amplitude transmitida da função de onda WKB, e o denominador o módulo quadrado da amplitude

incidente da função de onda WKB, com,

$$\theta = \exp \left(\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{12(V_{ef}(x) - E_M)} \right) , \quad (5.3)$$

uma medida da opacidade da barreira.

O comparativo entre PT e PT_{WKB} torna-se relevante pois analisamos a emergência de um sistema clássico a partir do processo de tunelamento quântico (o universo tunela através da barreira de potencial e surge ao lado direito da mesma, como um sistema clássico e finito), cuja comparação entre ambas as probabilidades expõe a existência de uma concordância apenas para valores de energia E_M próximos ao topo da barreira de potencial, uma vez que esta região corresponde à região semiclássica, na qual a aproximação WKB é válida.

Ao considerar o evento de tunelamento, temos que para PT , uma onda incidente (Ψ_I) atinge a barreira de potencial no ponto de retorno x_1 , em que, parte de Ψ_I é transmitida, e parte é refletida (Ψ_R); a parte da onda refletida, isto é, Ψ_R , atinge $x = 0$ (uma vez que o fator de escala não pode ser menor que zero), reflete e se torna uma nova onda incidente. Esta nova onda incidente passa pelo mesmo processo de transmissão e reflexão, e sua nova onda transmitida contribui com a onda transmitida original.

Porém, próximo ao topo da barreira de potencial, na região semiclássica, o PT_{WKB} calculado quantifica a densidade de probabilidade que atravessa a barreira e vai até o infinito numérico (x_{max}), isto é, considera-se apenas a componente transmitida da função de onda Ψ nesta região, onde o mesmo ocorre para PT na região semiclássica, pois quanto maior a energia E_M maior o tempo que a componente refletida leva para retornar até a barreira depois de ser refletida em $x = 0$, ou seja, a componente transmitida tem tempo suficiente de chegar até o infinito numérico (x_{max}) sem contribuições das componentes refletidas (Ψ_R).

Assim, como a concordância entre PT e PT_{WKB} se dá próximo ao topo da barreira, esta concordância será mais nítida para valores os quais E_M , apesar de menor que a energia máxima E_{max} do potencial efetivo V_{ef} , encontra-se muito próximo de E_{max} .

Dessa forma, ao fixarmos os parâmetros A e B do gás de Chaplygin, realizamos cálculos para diferentes valores de $E_M < E_{max}$, os quais são calculados para a condição inicial (3.26),

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{8192 E_M^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} x \cdot \exp(-4E_M x^2) ,$$

e cujos resultados podem ser observados na Figura 20, na qual verifica-se que quanto maior o valor de E_M , maior o valor de PT (para um dado valor fixo dos parâmetros A e B), no qual PT encontra-se em escala logarítmica devido aos seus pequenos valores.

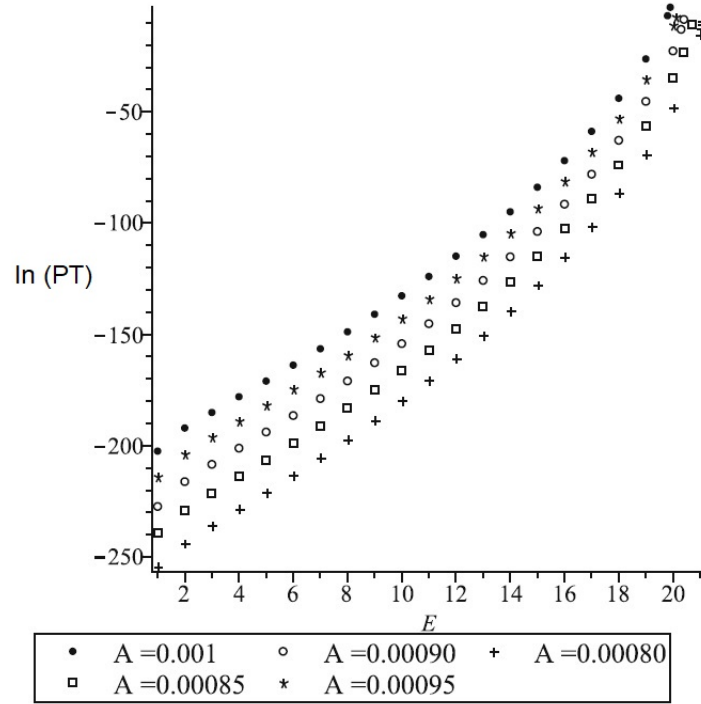


Figura 20: Probabilidades de tunelamento PT (em escala de \log) em função de E_M , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, e diferentes valores de A , com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Ao efetuar a comparação dos resultados de PT , em função de E_M , com os resultados obtidos para PT_{WKB} para as mesmas especificações, é possível perceber a concordância entre ambos para valores de E_M próximos ao topo da barreira (Figura 21).

5.2 Tunelamento em Função dos Parâmetros do Gás de Chaplygin

Dependência de PT com relação ao parâmetro A

Fixamos as condições do sistema (com $B = 0.001$), para diferentes valores fixos de E_M , e variamos os valores de A com o intuito de obter a dependência de PT com relação a A , onde é possível verificar, a partir da Figura 22, que PT cresce com A .

Dependência de PT com relação ao parâmetro B

De semelhante forma, para avaliar a dependência de PT com relação ao parâmetro B ,

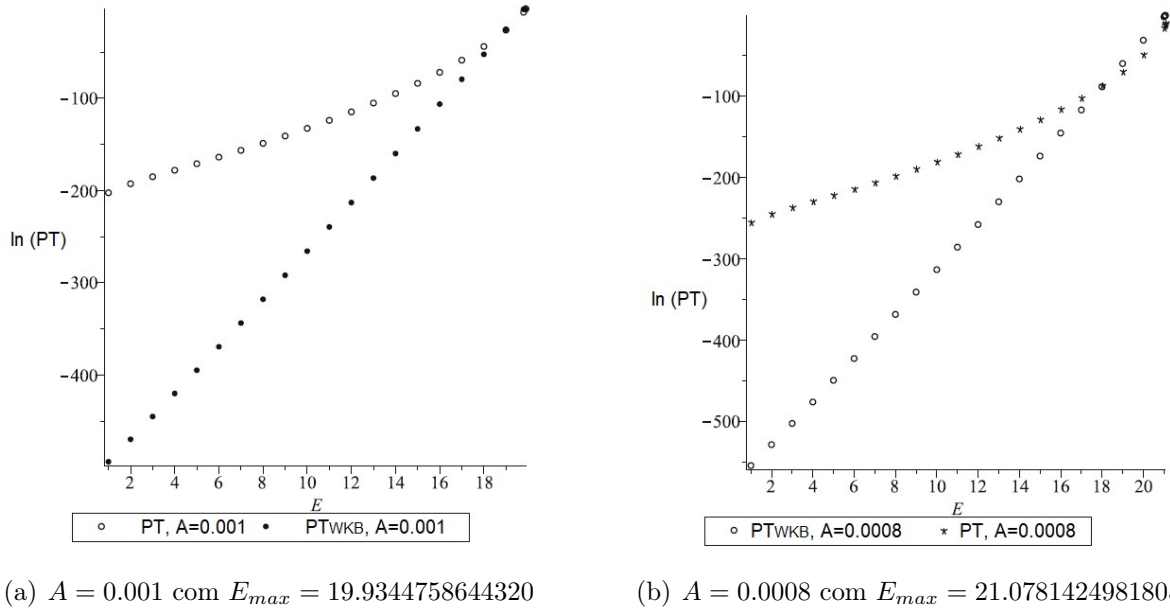


Figura 21: Comparativos entre PT e PT_{WKB} (em escala de \log) em função de E_M , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: Rocha et al. (2022)).

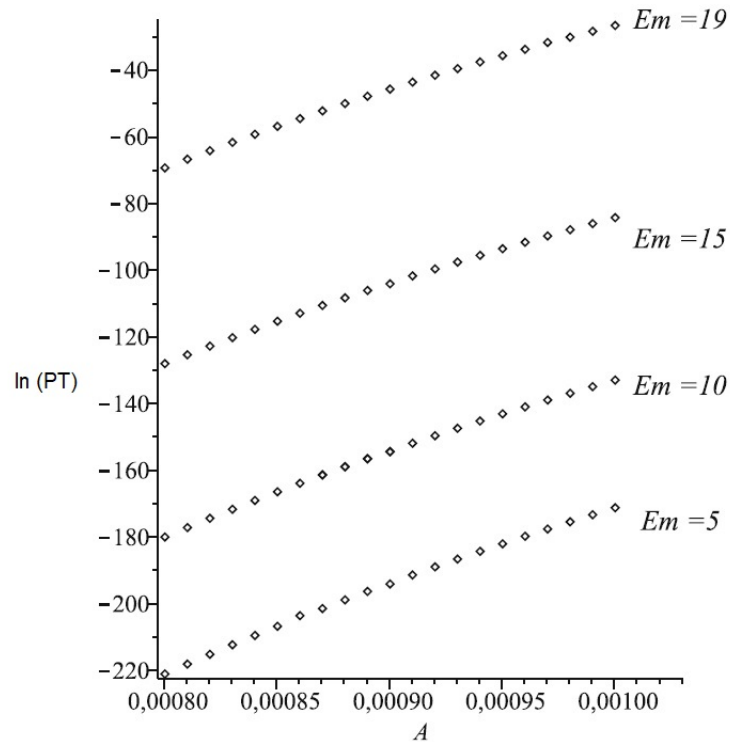


Figura 22: Probabilidades de tunelamento PT (em escala de \log) em função do parâmetro A , para $\alpha = 0$ (poeira), $B = 0.001$, e diferentes valores fixos de E_M , com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

fixamos as condições do sistema (com $A = 0.001$), para o valor fixo de $E_M = 19$, e variamos os valores de B .

Ao analisar os resultados da Figura 23, é possível perceber que PT também cresce com B , mas de forma mais lenta, e menos nítida se comparado aos resultados de PT obtidos para a dependência com relação ao parâmetro A .

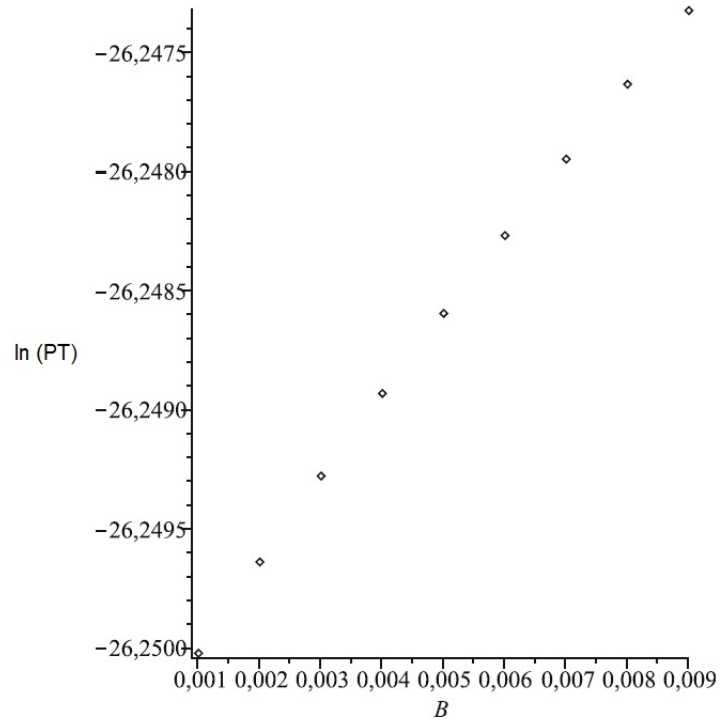


Figura 23: Probabilidade de tunelamento PT (em escala de \log) em função do parâmetro B , para $\alpha = 0$ (poeira), $A = 0.001$, e $E_M = 19$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

5.3 Comparativos com Resultados Preexistentes

Previamente calculados por (MONERAT et al., 2007), os cálculos de probabilidade para o modelo com gás de Chaplygin, para um universo homogêneo e isotrópico, mas com fluido de radiação ($\alpha = \frac{1}{3}$ para $p = \alpha\rho$) no lugar do fluido de poeira ($\alpha = 0$), serão comparados aos resultados probabilísticos do nosso modelo.

Com (3.6) e (3.7) para $\alpha = 1/3$ (radiação),

$$\bar{H} = \frac{p_x^2}{12} + V_{ef}(x, \alpha) - p_T \quad , \quad (5.4)$$

$$V_{ef}(x, \alpha) = 3(x)^2 - \frac{1}{\pi}(x)^2 \sqrt{A + B(x)^2} \quad , \quad (5.5)$$

cujo potencial efetivo V_{ef} para o modelo com fluido de radiação também apresenta um perfil de barreira de potencial, ao se considerar todos os demais parâmetros do sistema, assim como acontece com V_{ef} para o modelo com fluido de poeira, mas com o topo da barreira muito mais elevado, e, efetivamente, de largura mais estreita, como pode ser observado na Figura 24.

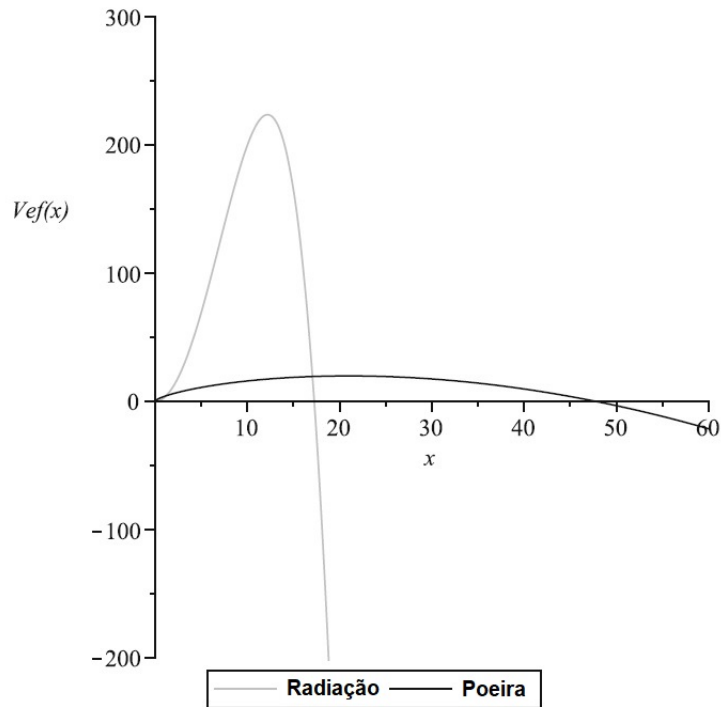


Figura 24: Comparativos entre os potenciais efetivos V_{ef} para ambos os modelos com gás de Chaplygin e radiação ($\alpha = \frac{1}{3}$), e gás de Chaplygin e poeira ($\alpha = 0$), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, $E_{max} = 223.5282022$ para o fluido de radiação, e $E_{max} = 19.9344758644320$ para o fluido de poeira. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Reproduzimos alguns dos cálculos de PT para o fluido de radiação, e os comparamos com os resultados de PT para para o fluido de poeira, no qual consideramos os mesmos parâmetros para ambos os modelos, mas com $\alpha = \frac{1}{3}$ para o fluido de radiação e $\alpha = 0$ para o fluido de poeira.

Na Figura 25 é possível observar o comparativo de PT para ambos os modelos, no qual verifica-se que PT (em escala de \log) é expressivamente maior para o nosso modelo com gás de Chaplygin e poeira, no qual, o universo surge classicamente muito maior em tamanho se comparado ao caso de radiação, ou seja, o fator de escala x assume grandes valores, e, como visto no item (2.2.2.2) do presente trabalho, para grandes valores de x temos que

a evolução da densidade de energia $\rho(x)$ do gás de Chaplygin (2.137), para $x \rightarrow \infty$, corresponde a um universo com constante cosmológica, ou seja, o termo do gás de Chaplygin no potencial efetivo V_{ef} se comporta como um termo do tipo constante cosmológica, isto é, após o processo de tunelamento quântico para o nosso modelo é possível inferir uma eventual fase acelerada para o Universo.

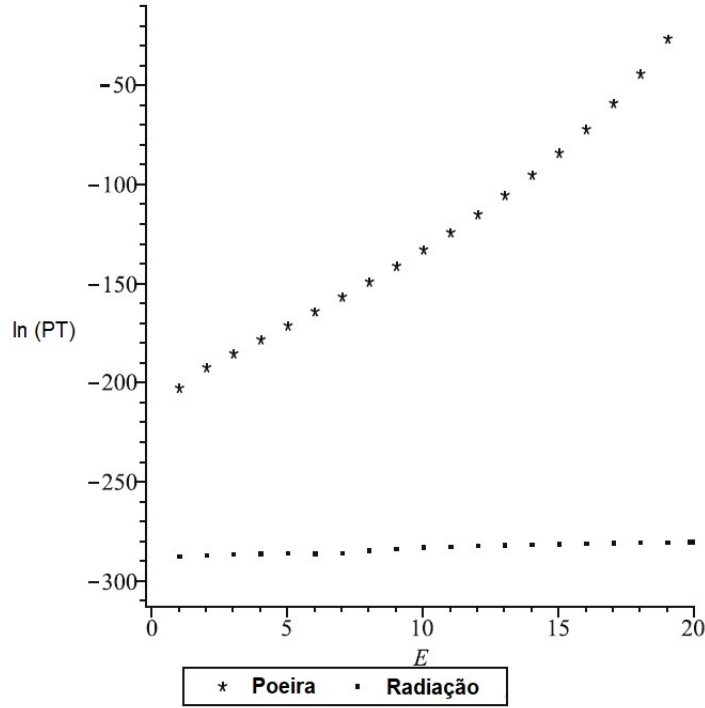


Figura 25: Comparativo entre as probabilidades de tunelamento de modelos com gás de Chaplygin e poeira ($\alpha = 0$) e gás de Chaplygin e radiação ($\alpha = \frac{1}{3}$), para $A = 0.001$, $B = 0.001$, com $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$. (Imagem: (ROCHA et al., 2022)).

Portanto, os resultados para os cálculos de probabilidade de tunelamento quântico de um sistema clássico, para o modelo de um universo de FLRW com $k = 1$, homogêneo e isotrópico, preenchido com poeira ($\alpha = 0$) e gás de Chaplygin, podem ser considerados bons resultados, em virtude do seu bom comparativo com os resultados da probabilidade de tunelamento semiclássico (para os mesmos parâmetros), assim como requerem uma atenção especial em razão do comparativo com os resultados para o modelo com fluido de radiação, os quais apontam uma maior probabilidade do universo preenchido com gás de Chaplygin e poeira surgir ao lado direito da barreira de potencial, mesmo com a barreira para o fluido de poeira mais larga do que a barreira para o fluido de radiação.

6 Considerações finais

O trabalho aqui apresentado teve como objetivo a análise probabilística do tunelamento quântico de um modelo de universo de FLRW, homogêneo e isotrópico, com geometria espacial positiva ($k = 1$) preenchido com poeira e gás de Chaplygin.

Com esse propósito, em um primeiro momento, traçamos a história evolutiva do nosso objeto de estudo, o Universo, bem como ambientamos os seus estágios iniciais, com foco no Universo primitivo, onde também destacamos possíveis evidências observacionais de seus primórdios, tal qual a CMB.

Ademais, apontamos a divergência das leis da física clássica em escalas do nível de Planck, e a conseqüente necessidade da criação de uma teoria gravitacional capaz de abranger e ser aplicada em escalas nas quais apenas as leis da física quântica são passíveis de atuação.

Assim, como uma alternativa a (ainda) não definitiva teoria da gravitação quântica, foi proposta a utilização das ferramentas disponíveis da cosmologia quântica (a aplicação das leis da física quântica ao Universo) como modo de análise dos primórdios do Cosmo.

Os fundamentos e formalismos, os quais constituem essa área da cosmologia, foram delineados no Capítulo 2 do presente trabalho, com notoriedade para o formalismo hamiltoniano da relatividade geral (o formalismo ADM), base para a descrição da equação fundamental da cosmologia quântica, a equação de Wheeler-DeWitt.

De igual relevância, foram apontados os principais aspectos do formalismo de Schutz, cuja aplicação nos permitiu acrescentar à equação de Wheeler-DeWitt uma variável temporal, uma vez que esse formalismo associa o tempo com os graus de liberdade de um fluido perfeito acoplado à gravidade, o que torna a equação de Wheeler-DeWitt uma expressão correspondente a equação de Schrödinger dependente do tempo, a partir da qual nos é concedida a possibilidade de avaliação da dinâmica do sistema.

Com a finalidade de encontrar a condição inicial do modelo, ou seja, a solução para a equação de Wheeler-DeWitt, Ψ (a função de onda do Universo), delineamos propostas

que fornecem as condições de contorno apropriadas para a nossa análise, com destaque para as propostas de Hartle-Hawking e a de tunelamento quântico do Universo.

Para os resultados, foram construídos pacotes de onda de norma finita como soluções da equação de Wheeler-DeWitt, bem definidos em todo o espaço de configuração (mesmo quando o fator de escala $x \rightarrow 0$), os quais foram produzidos numericamente, uma vez que resultados analíticos não são conhecidos para a equação de Wheeler-DeWitt do modelo, cujo método numérico escolhido foi o método de diferenças finitas de Cranck-Nicolson, devido a sua aplicabilidade a equações do tipo EDP (como é o caso da equação de Wheeler-DeWitt), assim como por sua incondicionável estabilidade.

Após a quantização do modelo (a partir da aplicação do formalismo de Dirac), e a avaliação da estabilidade do sistema através da observação do comportamento da norma, assim como a análise do comportamento da densidade de probabilidade, isto é, a constatação da possibilidade do evento de tunelamento quântico por parte da aplicação do método ao nosso modelo, foi possível realizar os vários cálculos das taxas de probabilidade de tunelamento quântico PT do nosso modelo de universo, ao levar em conta a sua dependência quanto aos parâmetros A e B do gás de Chaplygin, bem como sua dependência da energia cinética média E_M do fluido de poeira para $\alpha = 0$.

A partir dos resultados, constatamos que PT cresce com os parâmetros A e B , apesar do crescimento com relação a B (para valores fixos de A e E_M) ser mais lento, e portanto, menos nítido se comparado com o crescimento de PT em função do parâmetro A (para valores fixos de E_M e B), bem como, verificamos o crescimento de PT em função de E_M (para valores fixos de A e B), cuja evolução da densidade de energia do gás de Chaplygin $\rho(x)$ (2.137) infere que o parâmetro A encontra-se relacionado com uma constante cosmológica, enquanto que o parâmetro B encontra-se relacionado com a densidade de energia do fluido de poeira.

Os resultados para PT foram comparados com os resultados para os cálculos probabilísticos da aproximação semiclássica PT_{WKB} , para os mesmos parâmetros, a partir dos quais identificamos a concordância para valores de $E_M < E_{max}$ próximos ao topo da barreira de potencial (V_{ef}).

Nossos resultados também foram comparados a resultados preexistentes, calculados por (MONERAT et al., 2007), para um modelo com gás de Chaplygin, mas com fluido de radiação ao invés de poeira, do qual constatamos uma maior probabilidade de tunelamento quântico para o nosso modelo de universo (preenchido com gás de Chaplygin e poeira), apesar da barreira de potencial para este tipo de modelo ser significativamente mais larga que para

o modelo com fluido de radiação, onde, após o processo de tunelamento quântico para o caso de poeira, o universo surge classicamente muito maior em tamanho se comparado ao caso de radiação, ou seja, após o tunelamento do nosso modelo de universo com poeira e gás de Chaplygin, o fator de escala x assume grandes valores, e para grandes valores de x o termo do gás de Chaplygin no potencial efetivo V_{ef} se comporta como um termo do tipo constante cosmológica, o que implica em uma fase acelerada para o Universo.

Deste modo, obtemos os seguintes resultados qualitativos: um modelo bem definido em todo o espaço (mesmo quando o fator de escala $x \rightarrow 0$), bem como a função de onda Ψ à direita da barreira de potencial (mesmo com uma amplitude muito pequena).

Como resultados quantitativos, temos: o crescimento de PT em função de E_M , a concordância entre PT e $PTWKB$ para resultados no topo da barreira de potencial (região semiclássica), a conservação da norma, e o crescimento de PT em função dos parâmetros A e B .

Os resultados aqui apresentados, para o surgimento de um sistema clássico ao lado direito de uma barreira de potencial, através do processo de tunelamento quântico, aponta uma relevância significativa atrelada a sua concordância com os valores da aproximação semiclássica (ao se considerar as mesmas condições e os mesmos parâmetros), bem como requer atenção quanto a sua comparação com resultados de um modelo similar contido na literatura, ao qual foi aplicado o mesmo método.

A previsão de uma fase acelerada para o Universo após o fenômeno de tunelamento, por parte do modelo, proporciona questionamentos, e, possivelmente, um entendimento mais aprofundado ao que concerne os eventos que circundam os primórdios do Universo e, por consequência, uma provável contribuição ao aperfeiçoamento dos fundamentos da cosmologia quântica, cuja perspectiva almeja a aplicação do método em modelos mais sofisticados, nos quais consideraremos outras fontes de matéria, tal qual campos escalares, e a sua possível aplicação em modelos anisotrópicos, para os quais será necessária uma extensão do método para $(2 + 1)$ dimensões e um aperfeiçoamento computacional.

Portanto, a análise aqui apresentada não apenas alcançou o objetivo desejado, mas também contém perspectivas significativas, tanto para a cosmologia quântica quanto para a cosmologia como um todo.

Referências

- ADAMS, F.; LAUGHLIN, G. *The Five Ages of the Universe: Inside the Physics of Eternity*. illustrated. University of Michigan: Free Press, 1999.
- ALVARENGA, F. et al. Dynamics of a perfect fluid through velocity potentials with application in quantum cosmology. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 47, p. 96–105, 2017.
- ANDERSON, E. Problem of time in quantum gravity. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 524, n. 12, p. 757–786, 2012.
- ANDERSON, E. *The problem of time*. [S.l.]: Springer, 2017.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, 2008.
- ATKATZ, D. Quantum cosmology for pedestrians. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 62, n. 7, p. 619–627, 1994.
- AVELINO, P.; AZEVEDO, R. Perfect fluid lagrangian and its cosmological implications in theories of gravity with nonminimally coupled matter fields. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 6, p. 064018, 2018.
- BAND, Y. B.; AVISHAI, Y. *Quantum mechanics with applications to nanotechnology and information science*. [S.l.]: Academic Press, 2013.
- BENNETT, J. O. et al. *The Essential Cosmic Perspective*. Eighth edition. NY, NY: Pearson Education, Inc., 2018.
- BERNARDINI, A. E.; BERTOLAMI, O. The hamiltonian formalism for scalar fields coupled to gravity in a cosmological background. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 338, p. 1–20, 2013.
- BOJOWALD, M. Quantum cosmology: a review. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 78, n. 2, p. 023901, 2015.
- BOUHADI-LOPEZ, M.; MONIZ, P. V. Frw quantum cosmology with a generalized chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 063521, 2005.
- CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1947. v. 43, n. 1, p. 50–67.

- DANIELI, A.; MOLINARI, L. G. *ADM formalism: a Hamiltonian approach to general relativity*. Tese (Doutorado) — Master's thesis, Università degli Studi di Milano, 2020.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, APS, v. 160, n. 5, p. 1113, 1967.
- DIRAC, P. A. M. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 109, n. 752, p. 642–653, 1925.
- ESPOSITO, G. An introduction to quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:1108.3269*, 2011.
- FALCIANO, F. T. *Quantização do Modelo de Minisuperespaço de Friedmann-Robertson-Walker Permeado por Poeira e Radiação via Interpretação Causal da Mecânica Quântica*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2004.
- FILHO, R. O. C. Estudo de modelos cosmológicos alternativos e análise do gás de chaplygin no contexto de expansão do universo. Universidade de São Paulo, 2020.
- FRIEMAN, J. A.; TURNER, M. S.; HUTERER, D. Dark energy and the accelerating universe. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 46, n. 1, p. 385–432, sep 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.11462Fannurev.astro.46.060407.145243>>.
- GARY, D. E. *Physics 202: Into Astronomy. Lecture 26*. October 2005. Fall 2005. Disponível em: <<http://web.njit.edu/~gary/202>>. Acesso em Agosto, 2022.
- GORINI, V. et al. The chaplygin gas as a model for dark energy. In: WORLD SCIENTIFIC. *The Tenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*. [S.l.], 2005. p. 840–859.
- GOUSHEH, S.; SEPANGI, H. Wave packets and initial conditions in quantum cosmology. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 272, n. 5-6, p. 304–312, 2000.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, APS, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- HALLIWELL, J. The interpretation of quantum cosmology and the problem of time. *arXiv preprint gr-qc/0208018*, 2002.
- HARTLE, J. B. Prediction in quantum cosmology. *NATO Sci. Ser. B*, v. 156, p. 329–360, 1987.
- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the universe. In: *Euclidean Quantum Gravity*. [S.l.]: World Scientific, 1983. p. 310–325.
- IITAKA, T. Solving the time-dependent schrödinger equation numerically. *Physical Review E*, APS, v. 49, n. 5, p. 4684, 1994.

- JHA, R. Introduction to hamiltonian formulation of general relativity and homogeneous cosmologies. *arXiv preprint arXiv:2204.03537*, 2022.
- KIEFER, C. *On the interpretation of quantum theory—from Copenhagen to the present day*. [S.l.]: Springer, 2003.
- KIEFER, C. *Quantum Gravity second edition International Series on Monographs in Physics*. [S.l.]: Oxford science publication, 2007.
- KIEFER, C.; PETER, P. Time in quantum cosmology. *Universe*, MDPI, v. 8, n. 1, p. 36, 2022.
- KIEFER, C.; SANDHÖFER, B. Quantum cosmology. *Zeitschrift für Naturforschung A*, De Gruyter, 2022.
- KONG, Q.; SIAUW, T.; BAYEN, A. *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists*. [S.l.]: Academic Press, 2020.
- KVAERNO, A. *Partial differential equations and finite difference methods*. November 2020. 2020. Disponível em: Lecture notes for TMA4125/4130/4135 Mathematics 4N/D.
- LAZAROU, D. Interpretation of quantum theory-an overview. *arXiv preprint arXiv:0712.3466*, 2007.
- LEMOIS, N. A. Radiation-dominated quantum friedmann models. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 37, n. 3, p. 1449–1460, 1996.
- LEVEQUE, R. J. Finite difference methods for differential equations. *Draft version for use in AMath*, v. 585, n. 6, p. 112, 1998.
- LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- LIDDLE, A. R. *The Early Universe*. arXiv, 1996. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9612093>>.
- LYTH, D. H. *The History of The Universe*. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- MANSOURI, R.; NASSERI, F. Model universe with variable space dimension: Its dynamics and wave function. *Physical Review D*, APS, v. 60, n. 12, p. 123512, 1999.
- MELLO, C. G. M. d. S. et al. Uso do método de diferenças finitas no esquema crank-nicolson em cosmologia quântica. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2018.
- MENDOZA, S.; SILVA, S. The matter lagrangian of an ideal fluid. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 18, n. 04, p. 2150059, 2021.
- MERZBACHER, E. *Quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998.
- MISNER, C. W. Magic without magic: John archibald wheeler edt by J. Klauder. *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, p. 453–486, 1972.

- MONERAT, G. et al. The effects of dark energy on the early universe with radiation and an ad hoc potential. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 137, n. 1, p. 1–15, 2022.
- MONERAT, G. et al. Dynamics of the early universe and the initial conditions for inflation in a model with radiation and a chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 2, p. 024017, 2007.
- MONERAT, G. et al. Quantum cosmology with many fluids and the choice of cosmological time. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 50, n. 1, p. 89–104, 2020.
- MONERAT, G. et al. The dynamics of the early universe in a model with radiation and a generalized chaplygin gas-early universe with radiation and a generalized chaplygin gas. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 136, n. 1, p. 34, 2021.
- MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. First edition. New York: Cambridge University Press, 2005.
- PASACHOFF, J.; FILIPPENKO, A. *The Cosmos: Astronomy in the New Millennium*. Third edition. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2007.
- PEEBLES, P. J. E. et al. *Cosmology: Lecture 18. The Early Universe*. October 1994. 1994. Disponível em: <<https://www.scientificamerican.com/article/the-evolution-of-the-universe/>>. Acesso em Agosto, 2022.
- PINTO-NETO, N. Quantum cosmology: how to interpret and obtain results. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 30, p. 330–345, 2000.
- RIEKE, G. H. *The Start of Everything*. September 2014. 2014. Disponível em: <<http://ircamera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci102/lectures/eraplanck.htm>>. Acesso em Agosto, 2022.
- ROCHA, N. da et al. Early universe with dust and chaplygin gas. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 137, n. 10, p. 1103, 2022.
- ROSENFELD, L. Zur quantelung der wellenfelder. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 397, n. 1, p. 113–152, 1930.
- ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- RYDEN, B. Introduction to cosmology. The Ohio State University, p. 301, January 2006.
- SARAIVA, M. de F. O.; FILHO, K. de S. O.; MÜLLER, A. M. *Aula 27: Cosmologia – O início do Universo*. June 2001. 2001. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/tex/fis02001/aulas/Aula27-122.pdf>>. Acesso em Agosto, 2022.
- SCHUTZ, B. F. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. *Physical Review D*, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970.
- SCHUTZ, B. F. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. *Physical Review D*, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971.

- SEN, A.; SCHERRER, R. J. Generalizing the generalized chaplygin gas. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 6, p. 063511, 2005.
- SILVA, E. et al. A canonical transformation and the tunneling probability for the birth of an asymptotically desitter universe with dust. *arXiv preprint arXiv:0903.3933*, 2009.
- TEUKOLSKY, S. A. Stability of the iterated crank-nicholson method in numerical relativity. *Physical Review D*, APS, v. 61, n. 8, p. 087501, 2000.
- TUOWA. *ast0703/cosmology 1: Timeline of The Universe (factsheet) The University of Western Australia*. August 2011. 2011. Disponível em: <<https://www.uwa.edu.au/study/-/media/Faculties/Science/Docs/Timeline-of-the-Universe.pdf>>. Acesso em Agosto, 2022.
- VILENKIN, A. Creation of universes from nothing. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 117, n. 1-2, p. 25–28, 1982.
- VILENKIN, A. Quantum cosmology. *arXiv preprint gr-qc/9302016*, 1993.
- VILENKIN, A.; YAMADA, M. Tunneling wave function of the universe. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 6, p. 066003, 2018.
- WANG, I.-c. et al. Dust and radiation quantum perfect fluid cosmology: selection of time variable. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 37, n. 5, p. 971–976, 2005.
- WEINBERG, S. *The First Three Minutes, updated edition*. [S.l.]: New York: Basic Books, 1993.
- WHEELER, J. A. pp. 242-307 in: *Batelle Rencontres 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, eds. CM DeWitt and JA Wheeler. [S.l.]: Benjamin New York, 1968.
- WMAP. *Cosmology: The Study of the Universe*. June 2011. 2011. Disponível em: <wmap.gsfc.nasa.gov>. Acesso em Agosto, 2022.

APÊNDICE A – Formalismo de Schutz

As referências utilizadas para a construção e desenvolvimento deste Apêndice são: (SCHUTZ, 1970, 1971; FALCIANO, 2004; ALVARENGA et al., 2017).

O formalismo de Schutz decorre de dois trabalhos publicados por Schutz em 1970 e 1971 os quais têm por objetivo a análise do comportamento dos fluidos perfeitos, sob uma perspectiva relativística, e cuja aplicação à cosmologia quântica possibilita a introdução de uma variável temporal (associada ao fluido) à equação de Wheeler-DeWitt.

Fundamentado do teorema de Pfaff, o formalismo descreve as equações hidrodinâmicas do fluido perfeito a partir de seis potenciais de velocidade, os quais encontram-se distribuídos da seguinte forma: cinco campos escalares $(\mu, \phi, \alpha, \beta, \theta)$, e um potencial representado pela entropia (S) , cuja quadri-velocidade,

$$U_\nu = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \alpha\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (\text{A.1})$$

é expressa em termos dos seis potenciais, com μ a entalpia específica (ou massa inercial específica), α e β potenciais conectados ao rotacional do campo, e ϕ e θ sem um significado físico claro.

A massa inercial específica μ pode ser definida como,

$$\mu = \frac{(p + \rho)}{\rho_0} \quad , \quad (\text{A.2})$$

com p a pressão, ρ a densidade de energia, e ρ_0 a densidade de massa de repouso, uma vez que a componente relativística do fluido perfeito é representada pela equação de estado $p = p(\mu, S)$, e pelo tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$,

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu = pg^{\mu\nu} + \rho_0\mu U^\mu U^\nu \quad , \quad (\text{A.3})$$

o qual não apresenta viscosidade, ou condução de calor, já que trata-se de um fluido perfeito, onde, em um sistema de coordenada comóvel, o tensor é diagonal, isto é, $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. Para um fluido perfeito, temos ainda as seguintes relações termodinâmicas,

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0(1 + \Pi) \quad ; \\ \mu &= (1 + \Pi) + \frac{p}{\rho_0} \quad ; \\ \Theta dS &= d\Pi + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \quad ,\end{aligned}\tag{A.4}$$

com $\Pi \equiv \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0}$ a energia interna específica, $\Theta = (1 + \Pi)$ a temperatura, e $S = \ln \frac{(1 + \Pi)}{\rho_0^\alpha}$ a entropia.

Seja,

$$(\rho_0 U^\mu)_{;\mu} = 0 \quad ,\tag{A.5}$$

a condição de conservação do número de bárions, a qual corresponde classicamente à conservação da massa, e, seja a condição de normalização da quadri-velocidade: $U^\nu U_\nu = -1$ (a qual implica em $U^\nu U_{\nu;\sigma} = 0$), temos que as equações de movimento são dadas pela imposição de $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, a divergência nula do tensor energia-momento, e sua projeção perpendicular e paralela (sobre a hipersuperfície), isto é, as equações de evolução podem ser expressas na forma de leis de conservação.

Para a componente paralela da quadri-velocidade, temos,

$$\begin{aligned}U_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} &= U_\mu [\rho_0 \mu U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}]_{;\nu} \\ &= U^\nu (p_{,\nu} - \rho_0 \mu_{,\nu}) \\ &= -U^\nu (\rho_0 T S_{,\nu}) \quad ,\end{aligned}\tag{A.6}$$

com $p_{,\nu} = \rho_0 \mu_{,\nu} - \rho_0 \Theta S_{,\nu}$ (versão relativística de $dp = \rho d\mu - \rho \Theta dS$). Ou seja, para um fluido perfeito, o seu movimento preserva a entropia por bárions, isto é, a entropia se conserva ($U^\nu S_{,\nu} = 0$) ao longo das linhas de universo do elemento de fluido, o que está de acordo com $\Theta dS = dq$, a característica de não condução de calor por parte do fluido perfeito.

Para a componente perpendicular, consideramos primeiramente o tensor projeção,

$$P_{\mu}^{\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma} + U^{\sigma}U_{\mu} \quad , \quad (\text{A.7})$$

cuja ação em $T^{\mu\nu};_{\nu}$ fornece,

$$P_{\mu}^{\sigma}T^{\mu\nu};_{\nu} = P_{\sigma}^{\nu}(p_{,\nu} + \rho_0\mu U_{\sigma};_{\nu}U^{\nu}) = 0 \quad , \quad (\text{A.8})$$

ou mais precisamente,

$$-P_{\sigma}^{\nu}p_{,\nu} = \rho_0\mu U_{\sigma};_{\nu}U^{\nu} \quad , \quad (\text{A.9})$$

isto é, a lei de força para um fluido relativístico, em que, se $U^{\nu} = \delta_0^{\nu}$, temos,

$$-\vec{\nabla}p = \rho_0\mu \frac{d\vec{v}}{d\tau} = (p + \rho) \frac{d\vec{v}}{d\tau} \quad , \quad (\text{A.10})$$

com τ o tempo próprio e \vec{v} a tri-velocidade.

Se considerarmos um sistema homogêneo, temos que (A.1) torna-se,

$$U_{\nu} = \frac{1}{\mu}(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (\text{A.11})$$

na qual o termo $\alpha\beta_{,\nu}$ foi suprimido, pois α e β estão associados com o movimento rotacional o que os torna nulos em teorias cujo sistema é homogêneo.

Como $U^{\nu}U_{\nu} = -1$, temos que o campo é normalizado, o que nos fornece,

$$g^{\sigma\nu}U_{\sigma}U_{\nu} = -1 \Rightarrow \mu^2 = -g^{\sigma\nu}(\phi_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma})(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad , \quad (\text{A.12})$$

isto é, a entalpia específica em função da métrica e dos potenciais de velocidade ϕ , θ , e S .

Seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R + 16\pi p) \quad , \quad (\text{A.13})$$

uma ação cuja lagrangiana $L = \int d^3x \sqrt{-g}(R + 16\pi p)$, com R o escalar de curvatura do espaço-tempo e p a pressão do fluido. Utilizamos esta ação para reproduzir todas as

equações conhecidas para um fluido perfeito ao variarmos ela em relação a métrica e aos potenciais ϕ , θ , e S , uma vez que a representação de Schutz encontra-se associada ao princípio lagrangiano variacional.

Dessa forma, temos,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R \right) \sqrt{-g} \quad , \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(-\frac{1}{2}pg_{\sigma\nu} + \frac{\partial p}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial g^{\sigma\nu}} \right) \sqrt{-g} \quad . \quad (\text{A.15})$$

Como, $\frac{\partial \mu}{\partial g^{\sigma\nu}} = -\frac{\mu}{2}U_\sigma U_\nu$ e $\frac{\partial p}{\partial \mu} = \frac{(p+\rho)}{\mu} = \rho_0$, temos,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} [pg_{\sigma\nu} + (p+\rho)\mu U_\sigma U_\nu] \quad . \quad (\text{A.16})$$

Devido ao princípio de mínima ação, temos $\frac{\delta S}{\delta g^{\sigma\nu}} = 0$, a partir do qual encontramos a equação de Einstein para o fluido perfeito, isto é,

$$R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R = 8\pi [pg_{\sigma\nu} + (p+\rho)U_\sigma U_\nu] \quad , \quad (\text{A.17})$$

com $T_{\sigma\nu} = [pg_{\sigma\nu} + (p+\rho)U_\sigma U_\nu]$.

De forma análoga, realizamos o mesmo procedimento de variação da ação, agora com relação aos potenciais ϕ , θ , e S , a partir das quais encontramos,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow (\rho_0 U^\nu)_{;\nu} = 0 \quad , \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\delta S}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow S_{;\nu} U^\nu = 0 \quad , \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\delta S}{\delta S} = 0 \Rightarrow \Theta = \theta_{;\nu} U^\nu \quad , \quad (\text{A.20})$$

respectivamente, a condição de conservação do número de bárions (A.5), a conservação da entropia, e a definição da temperatura a partir do potencial θ

Afim de estabelecer a hamiltoniana do sistema, determinamos os momentos conjugados aos potenciais ϕ , θ , e S (para a matéria), assim como o momento associado a parte gravitacional.

Seja o sistema considerado um universo de FLRW homogêneo e isotrópico com métrica definida como,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right) , \quad (\text{A.21})$$

com $N(t)$ a função lapso, $a(t)$ o fator de escala do universo, e k a curvatura espacial (com valores de $k = 0, 1, -1$), temos que (A.12) se torna,

$$\mu^2 = \frac{1}{N^2} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^2 \Rightarrow \mu = \frac{1}{N} (\dot{\phi} + \theta \dot{S}) . \quad (\text{A.22})$$

Se considerarmos a parte gravitacional da ação (A.13),

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-g} R , \quad (\text{A.23})$$

podemos aplicar o formalismo ADM (Capítulo 2), a partir do qual obtemos,

$$H_g = -\frac{p_a^2}{24a} - 6ka , \quad (\text{A.24})$$

a hamiltoniana gravitacional, com p_a o momento canonicamente conjugado ao fator de escala a .

Para o conteúdo de matéria da ação (A.13), isto é,

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} p , \quad (\text{A.25})$$

aplicamos o formalismo de Schutz, cuja hamiltoniana H_M pode ser calculada a partir de $H \equiv \Sigma_i p_i \dot{q}_i - L$, ou seja, $NH_M = \dot{\phi} p_\phi + \dot{\theta} p_\theta + \dot{S} p_S - L_M$, com L_M a lagrangiana de matéria.

Sejam os momentos conjugados aos potenciais ϕ , θ , e S , respectivamente,

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \dot{\phi}} = -\sqrt{-g} \rho_0 U^0 \quad (\text{A.26})$$

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$p_S \equiv \frac{\partial L_M}{\partial \dot{S}} = -\sqrt{-g} \rho_0 U^0 \theta = \theta p_\phi , \quad (\text{A.28})$$

com $L_M = \int d^3x \sqrt{-g} p$, temos,

$$H_M = \mu U_0 p_\phi - \sqrt{-g} p \quad (\text{A.29})$$

$$= \mu U_0 (-\sqrt{-g} \rho_0 U^0) - \sqrt{-g} p \quad (\text{A.30})$$

$$= -\sqrt{-g} [(p + \rho) U_0 U^0 + p] \quad (\text{A.31})$$

$$= \sqrt{-g} T_0^0 \quad , \quad (\text{A.32})$$

a hamiltoniana do fluido, expressa a partir de $(NH_M = \dot{\phi} p_\phi + \dot{S} p_S - L_M)$, já que $p_\theta = 0$.

Por fim, obtemos assim a hamiltoniana total, ou seja, a soma da hamiltoniana gravitacional com a hamiltoniana de matéria, isto é,

$$H = H_g + H_M \quad , \quad (\text{A.33})$$

a qual descreve o comportamento dinâmico do universo, e cuja quantização nos possibilita obter a equação de Wheeler-DeWitt, agora com uma variável temporal associada ao fluido perfeito.

APÊNDICE B – Tabelas

Tabela 2: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00080$, $E_{max} = 21.0781424981805$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
21.07	6.66363×10^{-10}	22.261012485	23.359118398	$4.44236194638648 \times 10^{-1}$
21.06	3.07743×10^{-11}	21.991415985	23.630519207	$2.60186661049263 \times 10^{-1}$
21.04	3.66387×10^{-13}	21.624497499	24.001048002	$7.69009312586492 \times 10^{-2}$
21	5.08979×10^{-16}	21.115694961	24.517077926	$5.64600250802772 \times 10^{-3}$
20	8.85937×10^{-49}	16.602440569	29.214016069	$1.09402274735820 \times 10^{-31}$
19	1.07226×10^{-69}	14.264792065	31.741371951	$2.54006477139099 \times 10^{-60}$
18	5.46636×10^{-87}	12.486971953	33.715329751	$7.15154667239488 \times 10^{-89}$
17	3.67537×10^{-102}	11.010251388	35.395069362	$2.46613946386146 \times 10^{-117}$
16	7.36285×10^{-116}	9.7313864241	36.884337215	$1.05298323292470 \times 10^{-145}$
15	1.93722×10^{-128}	8.5968774375	38.237195497	$5.63364375587524 \times 10^{-174}$
14	3.99836×10^{-140}	7.5749220704	39.486079862	$3.82667195296508 \times 10^{-202}$
13	4.54771×10^{-151}	6.6449560786	40.652271915	$3.34827359654494 \times 10^{-230}$
12	2.20405×10^{-161}	5.7929371874	41.750632252	$3.83528490235682 \times 10^{-258}$
11	3.73995×10^{-171}	5.0089408902	42.792026449	$5.85587448702708 \times 10^{-286}$
10	1.90037×10^{-180}	4.2858284199	43.784685743	$1.21628387782904 \times 10^{-313}$
9	2.5403×10^{-189}	3.6184684195	44.735023929	$3.51687279532158 \times 10^{-341}$
8	7.98253×10^{-198}	3.0032730694	45.648154678	$1.45364289817580 \times 10^{-368}$
7	5.31395×10^{-206}	2.4379328434	46.528233551	$8.85693290487120 \times 10^{-396}$
6	6.74456×10^{-214}	1.9212977373	47.378692292	$8.24804991974136 \times 10^{-423}$
5	1.44505×10^{-221}	1.4533964480	48.202404187	$1.22613440472891 \times 10^{-449}$

Continua na próxima página

Tabela 2 – continuação da página anterior

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
4	4.40831×10^{-229}	1.0356306431	49.001803774	$3.06989249365875 \times 10^{-476}$
3	1.36345×10^{-236}	0.67120078202	49.778975433	$1.38615356793378 \times 10^{-502}$
2	1.5958×10^{-244}	0.36572815518	50.535720202	$1.23504554705470 \times 10^{-528}$
1	5.63119×10^{-255}	0.13024323289	51.273607031	$2.46929371956256 \times 10^{-554}$

Tabela 3: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00085$, $E_{max} = 20.7610874836932$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
20.07	1.17509×10^{-11}	20.820988474	23.783213868	$6.73080169223172 \times 10^{-9}$
20.04	3.63963×10^{-24}	18.730114955	25.928147763	$5.98178500126180 \times 10^{-11}$
20	1.38028×10^{-35}	17.144286003	27.586870833	$2.90875951783196 \times 10^{-22}$
19	3.18561×10^{-57}	14.531307308	30.386304651	$1.72366651166648 \times 10^{-39}$
18	1.30819×10^{-74}	12.648347416	32.462075789	$1.23523263260423 \times 10^{-78}$
17	1.02888×10^{-89}	11.116078530	34.193960000	$1.08113820152316 \times 10^{-106}$
16	2.77287×10^{-103}	9.8035503320	35.713406824	$1.16824390466186 \times 10^{-134}$
15	1.04152×10^{-115}	8.6470673833	37.084670820	$1.57703308771923 \times 10^{-162}$
14	3.14653×10^{-127}	7.6101182082	38.344893137	$2.69437431015770 \times 10^{-190}$
13	5.28221×10^{-138}	6.6696407620	39.517849366	$5.91073682704668 \times 10^{-218}$
12	3.77711×10^{-148}	5.8101369073	40.619851954	$1.69180958192118 \times 10^{-245}$
11	9.40738×10^{-158}	5.0207731160	41.662671293	$6.43244326533460 \times 10^{-273}$
10	6.96089×10^{-167}	4.2938123012	42.655132534	$3.31506605245695 \times 10^{-300}$
9	1.34204×10^{-175}	3.6237124262	43.604055555	$2.36958604293488 \times 10^{-327}$
8	6.01767×10^{-184}	3.0065939307	44.514840975	$2.41189224552366 \times 10^{-354}$
7	5.65026×10^{-192}	2.4399339536	45.391852695	$3.60438421466806 \times 10^{-381}$
6	9.98749×10^{-200}	1.9224225104	46.238677198	$8.19868664319760 \times 10^{-408}$
5	2.93781×10^{-207}	1.4539655579	47.058304926	$2.96418535305590 \times 10^{-434}$
4	1.2096×10^{-214}	1.0358691259	47.853260600	$1.79689214158544 \times 10^{-460}$

Continua na próxima página

Tabela 3 – continuação da página anterior

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
3	4.93367×10^{-222}	0.67126474310	48.625699010	$1.95540250557053 \times 10^{-482}$
2	7.15917×10^{-230}	0.36573416122	49.377476858	$4.17935928848540 \times 10^{-512}$
1	1.57285×10^{-240}	0.13024330376	50.110207582	$1.99490235190530 \times 10^{-537}$

Tabela 4: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00090$, $E_{max} = 20.4665292083541$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
20.04	3.00334×10^{-9}	20.305990144	23.353445050	$1.37846154117922 \times 10^{-2}$
20.03	1.02018×10^{-13}	19.428357791	24.248916306	$2.24326404105508 \times 10^{-5}$
20	1.99377×10^{-23}	17.833548245	25.89759024	$9.57038512512012 \times 10^{-14}$
19	4.75649×10^{-46}	14.821999067	29.092570282	$1.35531592106532 \times 10^{-41}$
18	1.54467×10^{-63}	12.816717775	31.287568899	$2.31522360949340 \times 10^{-69}$
17	9.05785×10^{-79}	11.224112129	33.076623349	$4.81766704488168 \times 10^{-97}$
16	3.23875×10^{-92}	9.8762600440	34.628151836	$1.23428777606423 \times 10^{-124}$
15	1.70836×10^{-104}	8.6971949228	36.018676804	$3.93936763327206 \times 10^{-152}$
14	7.41114×10^{-116}	7.6450500109	37.290691227	$1.58664355177835 \times 10^{-179}$
13	1.79779×10^{-126}	6.6940246466	38.470705676	$8.18063548931536 \times 10^{-207}$
12	1.85422×10^{-136}	5.8270650513	39.576584411	$5.48608041671048 \times 10^{-234}$
11	6.62047×10^{-146}	5.0323848901	40.621046610	$4.87128919191228 \times 10^{-261}$
10	6.96316×10^{-155}	4.3016292735	41.613531014	$5.84329262638500 \times 10^{-288}$
9	1.88943×10^{-163}	3.6288371972	42.561272060	$9.68771616311508 \times 10^{-315}$
8	1.17954×10^{-171}	3.0098344188	43.469960456	$2.27886924101688 \times 10^{-341}$
7	1.52399×10^{-179}	2.4418843864	44.344168997	$7.84105927928200 \times 10^{-368}$
6	3.659×10^{-187}	1.9235180132	45.187638233	$4.09050848565444 \times 10^{-394}$
5	1.43999×10^{-194}	1.4545199448	46.003474552	$3.37807578597470 \times 10^{-420}$
4	7.79549×10^{-202}	1.0361021072	46.794291448	$4.65790057754268 \times 10^{-446}$
3	4.13698×10^{-209}	0.67132787158	47.562312701	$1.14794363798645 \times 10^{-471}$

Continua na próxima página

Tabela 4 – continuação da página anterior

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
2	7.24347×10^{-217}	0.36574015543	48.309449321	$5.53226968917372 \times 10^{-497}$
1	5.07521×10^{-228}	0.13024337462	49.037357985	$5.92742986264540 \times 10^{-522}$

Tabela 5: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.00095$, $E_{max} = 20.1917482467770$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
20.01	4.26717×10^{-8}	19.628622438	23.159143845	$2.96544470309033 \times 10^{-3}$
20	7.87979×10^{-12}	18.851250436	23.954250122	$5.23477409415780 \times 10^{-6}$
19	5.21575×10^{-36}	15.144094420	27.842013515	$1.67204592543364 \times 10^{-33}$
18	1.32816×10^{-53}	12.993346470	30.179589671	$6.42685799134584 \times 10^{-61}$
17	1.50025×10^{-68}	11.334715585	32.031711806	$3.00169103346776 \times 10^{-61}$
16	7.56607×10^{-82}	9.9496646293	33.617410218	$1.72170165971782 \times 10^{-115}$
15	5.8635×10^{-94}	8.7473413476	35.028089886	$1.22696075995239 \times 10^{-142}$
14	3.77853×10^{-105}	7.6797707542	36.312348719	$1.10041445255862 \times 10^{-169}$
13	1.35922×10^{-115}	6.7181458561	37.499700140	$1.25980791516593 \times 10^{-196}$
12	2.06312×10^{-125}	5.8437496565	38.609667966	$1.87043595312294 \times 10^{-223}$
11	1.07289×10^{-134}	5.0437967364	39.655966608	$3.66576044472038 \times 10^{-250}$
10	1.62442×10^{-143}	4.3092940337	40.648668936	$9.67484810774436 \times 10^{-277}$
9	6.26748×10^{-152}	3.6338529064	41.595432798	$3.51762413503772 \times 10^{-303}$
8	5.49396×10^{-160}	3.0130012628	42.502242330	$1.80846403286446 \times 10^{-329}$
7	9.84055×10^{-168}	2.4437883277	43.373879939	$1.35516372214282 \times 10^{-355}$
6	3.23309×10^{-175}	1.9245866260	44.214239715	$1.53400027928672 \times 10^{-381}$
5	1.71772×10^{-182}	1.4550607637	45.026542918	$2.73836012104991 \times 10^{-407}$
4	1.23546×10^{-189}	1.0363299659	45.813490542	$8.12944155164408 \times 10^{-433}$
3	8.42332×10^{-197}	0.6713902001	46.577374056	$4.29593037975292 \times 10^{-458}$
2	1.80917×10^{-204}	0.3657461379	47.320157541	$4.42082768020548 \times 10^{-483}$
1	1.10401×10^{-214}	0.1302434454	48.043539773	$1.00711837786061 \times 10^{-507}$

Tabela 6: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $B = 0.001$, $A = 0.001$, $E_{max} = 19.9344758644320$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19.9	8.34857×10^{-4}	19.912949964	22.049798928	$1.09056919606997 \times 10^{-4}$
19.8	1.38894×10^{-7}	18.880435977	23.099901530	$2.20367859865101 \times 10^{-4}$
19	5.62318×10^{-27}	15.508568628	26.614611533	$4.14592890516908 \times 10^{-26}$
18	1.13616×10^{-44}	13.179764900	29.127535969	$3.406988744600880 \times 10^{-53}$
17	1.6079×10^{-59}	11.448280120	31.049739800	$3.394101468817760 \times 10^{-80}$
16	1.1398×10^{-72}	10.023910786	32.671916866	$4.14245075026068 \times 10^{-107}$
15	1.28468×10^{-84}	8.7975817364	34.103692063	$6.26596591623660 \times 10^{-134}$
14	1.21191×10^{-95}	7.7143279457	35.400650186	$1.18973547545198 \times 10^{-160}$
13	6.35274×10^{-106}	6.7420378535	36.595605893	$2.87589943487092 \times 10^{-187}$
12	1.39202×10^{-115}	5.8602151790	37.709858774	$8.99049073062144 \times 10^{-214}$
11	1.0331×10^{-124}	5.0550265178	38.758167527	$3.69936407495571 \times 10^{-240}$
10	2.20491×10^{-133}	4.3168193654	39.751260583	$2.04377852279185 \times 10^{-266}$
9	1.18417×10^{-141}	3.6387684028	40.697228395	$1.55067454448431 \times 10^{-292}$
8	1.4266×10^{-149}	3.0161003177	41.602352068	$1.65830991455862 \times 10^{-318}$
7	3.46686×10^{-157}	2.4456494218	42.471624472	$2.57620773691694 \times 10^{-344}$
6	1.52494×10^{-164}	1.9256304240	43.309092839	$6.02475674582604 \times 10^{-370}$
5	1.06922×10^{-171}	1.4555890263	44.118092346	$2.21391673279029 \times 10^{-395}$
4	9.98365×10^{-179}	1.0365530395	44.901410329	$1.34789719083793 \times 10^{-420}$
3	8.653×10^{-186}	0.67145175933	45.661404755	$1.45508874447286 \times 10^{-445}$
2	2.22424×10^{-193}	0.36575210868	46.400091636	$3.04693378733106 \times 10^{-470}$
1	3.63503×10^{-203}	0.13024351633	47.119210800	$1.40674229260008 \times 10^{-494}$

Tabela 7: Resultados para $\alpha = 0$ (poeira), com $A = 0.001$, $E_M = 19$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

$B = 0.001$ e $E_{max} = 19.9344758644320$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.62318×10^{-27}	15.508568628	26.614611533	$4.14592890516908 \times 10^{-26}$
$B = 0.002$ e $E_{max} = 19.9344707817318$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.62814×10^{-27}	15.508595319	26.614601898	$4.14737806690712 \times 10^{-26}$
$B = 0.003$ e $E_{max} = 19.9344656990381$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.63282×10^{-27}	15.508622011	26.614592263	$4.14882773063588 \times 10^{-26}$
$B = 0.004$ e $E_{max} = 19.9344606163510$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.63732×10^{-27}	15.508648702	26.614582629	$4.15027789652928 \times 10^{-26}$
$B = 0.005$ e $E_{max} = 19.9344555336701$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.64168×10^{-27}	15.508675393	26.614572994	$4.15172856475720 \times 10^{-26}$
$B = 0.006$ e $E_{max} = 19.9344504509961$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.64593×10^{-27}	15.508702084	26.614563359	$4.15317973549360 \times 10^{-26}$
$B = 0.007$ e $E_{max} = 19.9344453683281$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.6501×10^{-27}	15.508728775	26.614553725	$4.15463140891192 \times 10^{-26}$
$B = 0.008$ e $E_{max} = 19.9344402856669$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.65419×10^{-27}	15.508755466	26.614544090	$4.15608358518296 \times 10^{-26}$
$B = 0.009$ e $E_{max} = 19.9344352030119$				
E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19	5.65822×10^{-27}	15.508782157	26.614534455	$4.15753626447760 \times 10^{-26}$

Tabela 8: Resultados para $\alpha = \frac{1}{3}$ (radiação), com $B = 0.001$, $A = 0.001$, $E_{max} = 223.5282022$, $\tau_{max} = 15$, $dt = 0.05$, $N = 9000$ (discretização espacial), e $x_{max} = 100$.

E_M	PT	x_1	x_2	PT_{WKB}
19.9	1.03232×10^{-280}	2.6054155174	17.066039688	$5.46902658087064 \times 10^{-497}$
19.8	9.91595×10^{-281}	2.5987057198	17.067062738	$4.33402893033764 \times 10^{-497}$
19	7.12562×10^{-281}	2.5444510324	17.075235914	$6.77947906256704 \times 10^{-498}$
18	4.60464×10^{-281}	2.4751158078	17.085424460	$6.76569034353356 \times 10^{-499}$
17	2.88407×10^{-281}	2.4039577511	17.095582199	$6.86365884259176 \times 10^{-500}$
16	1.73905×10^{-281}	2.3308086704	17.105709367	$7.08232029638092 \times 10^{-501}$
15	1.00075×10^{-281}	2.2554736016	17.115806193	$7.43814695904628 \times 10^{-502}$
14	5.43312×10^{-282}	2.1777244358	17.125872908	$7.95741787533848 \times 10^{-503}$
13	2.73971×10^{-282}	2.0972914567	17.135909736	$8.67996777924676 \times 10^{-504}$
12	1.25522×10^{-282}	2.0138518811	17.145916900	$9.66531358242420 \times 10^{-505}$
11	5.05675×10^{-283}	1.9270139973	17.155894621	$1.10027932926446 \times 10^{-505}$
10	1.69879×10^{-283}	1.8362946354	17.165843117	$1.28287947115992 \times 10^{-506}$
9	4.31458×10^{-284}	1.7410861929	17.175762602	$1.53571386567315 \times 10^{-507}$
8	6.55391×10^{-285}	1.6406066018	17.185653289	$1.89352727406723 \times 10^{-508}$
7	1.98793×10^{-286}	1.5338200242	17.195515388	$2.41546227577630 \times 10^{-509}$
6	1.39035×10^{-286}	1.4193041259	17.205349107	$3.20844877468783 \times 10^{-510}$
5	2.12499×10^{-286}	1.2950118710	17.215154650	$4.48199514402724 \times 10^{-511}$
4	1.1499×10^{-286}	1.1578021228	17.224932220	$6.69542491964104 \times 10^{-512}$
3	5.70509×10^{-287}	1.0023838957	17.234682019	$1.10424931805836 \times 10^{-512}$
2	2.43896×10^{-287}	0.81841198810	17.244404242	$2.17004947676598 \times 10^{-513}$
1	6.8548×10^{-288}	0.57906177042	17.254099088	$7.14070505287416 \times 10^{-514}$