

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gabriel Nazarh Aprahamian de Oliveira Romão

SISTEMAS DE REAÇÃO-DIFUSÃO VIA TEORIA DE
SEMIGRUPOS DE OPERADORES LIMITADOS

VITÓRIA
2020

SISTEMAS DE REAÇÃO-DIFUSÃO VIA TEORIA DE
SEMIGRUPOS DE OPERADORES LIMITADOS

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof^a Dr^a Ginnara Mexia Souto

Coorientadora: Prof^a Dr^a Jacqueline da Costa Ferreira

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

R756s Romão, Gabriel Nazarh Aprahamian De Oliveira, 1994-
 Sistemas de reação-difusão via Teoria de semigrupos de
operadores limitados. / Gabriel Nazarh Aprahamian De Oliveira
Romão. - 2020.
 117 f. : il.

 Orientadora: Ginnara Mexia Souto.
 Coorientadora: Jaqueline da Costa Ferreira.
 Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

 1. Semigrupos. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Souto,
Ginnara Mexia. II. Ferreira, Jaqueline da Costa. III.
Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências
Exatas. IV. Título.

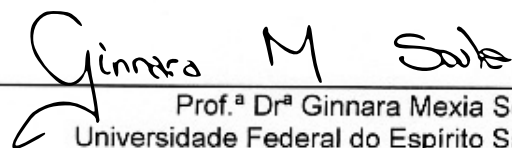
CDU: 51

Sistemas de Reação-Difusão Via Teoria de Semigrupos de Operadores Limitados

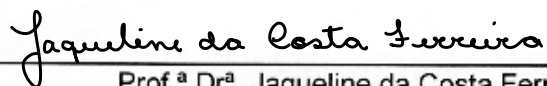
Gabriel Nazarh Aprahamian de Oliveira Romão

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 19 de outubro de 2020 por:


Prof.^a Dr.^a Ginnara Mexia Souto

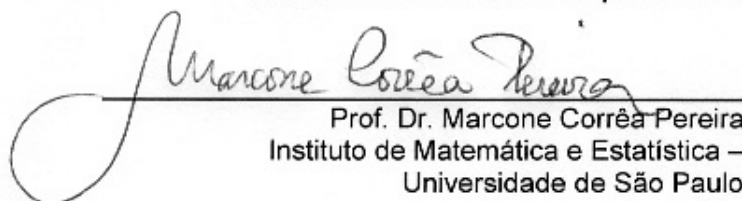
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientadora


Prof.^a Dr.^a Jaqueline da Costa Ferreira

Universidade Federal do Espírito Santo
Coorientadora


Prof.^a Dr.^a Mariane Pigossi

Universidade Federal do Espírito Santo


Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira
Instituto de Matemática e Estatística –
Universidade de São Paulo

Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, outubro de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
GINNARA MEXIA SOUTO - SIAPE 2427186
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 04/11/2020 às 10:51

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/88796?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
MARIANE PIGOSSI - SIAPE 3089047
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 04/11/2020 às 10:54

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/88801?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JAQUELINE DA COSTA FERREIRA - SIAPE 1284657
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 04/11/2020 às 12:19

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/88878?tipoArquivo=O>

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família e a todos os professores que encontrei durante minha jornada pelos estudos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força, paz de espírito e clareza em meus estudos, e por ter me ajudado a encontrar meu caminho, todas as vezes que me senti perdido.

Agradeço aos meus país e irmão, pelo carinho, amor e compreensão, por me apoiar, por me ajudar e sempre acreditar em mim.

Agradeço a minha o orientadora, Ginnara Mexia Souto, e minha Coorientadora, Jaqueline da Costa Ferreira, pelo apoio, paciência, e por serem grandes exemplos excelência profissional. E agradeço professora Mariane Pigossi por ter acompanhado e apoiado o processo de aprendizagem para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que tive, da graduação ao mestrado.

Agradeço a CAPES pelas bolsas no período do mestrado.

Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudaremos sistemas de reação e difusão do tipo

$$u_t = \mathbf{M}\Delta u + f(u),$$

onde $\mathbf{M}$ é uma matriz real $N \times N$ e a função $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ com certa regularidade, $u = (u_1, \dots, u_N)$ e $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_N)$. Utilizando a Teoria de Semigrupos de Operadores lineares limitados em espaços de Banach para demonstrar resultados sobre existência e unicidade de soluções locais e globais para esta equação diferencial. Por fim, aplicaremos estes resultados em alguns exemplos.

Palavras-chave: Sistemas de reação e difusão, teoria de semigrupos de operadores lineares limitados.

Abstract

In this work we will study reaction-diffusion systems of the type

$$u_t = M\Delta u + f(u),$$

where M is a real matrix $N \times N$ and $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ is a function satisfying certain regularity assumptions, $u = (u_1, \dots, u_N)$ and $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_N)$. Using the Theory of Semigroups of Bounded Linear Operators in Banach spaces to demonstrate results on the existence and uniqueness of local solutions for this differential equation. Finally, we will apply these results in some examples.

Key-Words: Reaction-diffusion systems, semigroup theory of bounded linear operators.

Sumário

Notação	20
Introdução	21
1 Preliminares	23
1.1 Espaços de Funções	25
1.2 Teoria espectral de operadores em espaços de Banach	27
1.3 Operadores compactos	31
1.4 Operadores auto-adjuntos	33
1.5 Breve estudo do operador Laplaciano	36
2 Teoria de Semigrupos de operador limitados	47
2.1 Semigrupos de operadores limitados	48
2.2 Teorema de Hille-Yosida	54
2.3 Operadores dissipativos e o Teorema de Lummer-Phillips	58
2.4 Transformada inversa de Laplace	64
2.5 Operadores setoriais e semigrupos analíticos	65
3 Sistemas de difusão: problema linear	71

3.1	Apresentação da equação	71
4	Sistemas de reação difusão: semilinear	79
4.1	Potências fracionárias de operadores setoriais.	79
4.2	Espaços de Potências Fracionárias.	84
4.3	Potência fracionária do operador Laplaciano.	85
4.4	Existência e Unicidade de soluções.	90
5	Exemplos	93
5.1	Exemplo I	93
5.2	Exemplo II	94
5.3	Exemplo III	97
5.4	Exemplo IV	99
	Appendices	105
	Apêndice A Resultados auxiliares	105
A.1	Alguns resultados de Análise Funcional	105
A.2	Formula de Green Generalizada	106
A.3	Integral de Riemann-Stieltjes em espaços de Banach	109
A.4	Calculo diferencial em espaços de Banach	112
A.5	Crítério de Routh-Hurwitz	113
	Referências Bibliográficas	115

Notação

$\mathbb{K}$	corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou corpo dos números complexos $\mathbb{C}$
$\text{Re } \lambda$	parte real de um número complexo λ
$\arg \lambda$	argumento de um número complexo λ
M	matriz quadrada de ordem N
$\det$	determinante de uma matriz.
$\overline{X}$	fecho de um conjunto X
I	operador identidade
$D(A)$	domínio de um operador A
$\text{Im}(A)$	imagem de um operador A
$\text{Ker}(A)$	núcleo do operador A
$G(A)$	gráfico do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\sigma(A)$	espectro do operador A
$T(t)$	semigrupo definido em espaço de Banach
Ω	subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	fronteira do conjunto Ω
∇	operador gradiente $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$
Δ	operador Laplaciano $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
$\mathcal{C}(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathcal{C}^j(\Omega)$	espaço das funções j vezes diferenciáveis
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$L^p(\Omega)$	espaço de Lebesgue
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev
$H^m(\Omega)$	espaço $W^{m,2}(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	espaço das funções de $W^{m,p}(\Omega)$ com suporte compacto
$D^+\phi$	derivada a direita da função ϕ

Introdução

Este trabalho se baseia no artigo “**On reaction-difusion system**” [26] de Luiz Augusto F. de Oliveira, para estudar sistemas de reação e difusão da forma

$$u_t = M\Delta u + f(u) \quad (1)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_N)$, com $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \dots, N$ e Ω uma aberto limitado com fronteira suave, no sentido de $\mathbb{C}^\infty$, contido em $\mathbb{R}^n$. Além disso, definimos o operador $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_N)$ com,

$$\Delta u_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \forall j = 1, \dots, N$$

sendo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ não representa necessariamente a derivada parcial no sentido usual, por isso, definiremos o conceito de derivada fraca. Além do mais, a letra M representa uma matriz $N \times N$, podendo não ser diagonal, e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função com certa regularidade. Pretendemos apresentar a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares limitados e aplica-lá ao estudo destes sistemas.

Processos de difusão são fenômenos que envolvem transporte de energia, como a condução térmica em uma barra, de massa, como uma gota de tinta se dispersando em um copo de água, ou de momento linear como o transporte de fluidos em meios contínuos. Geralmente, os processos de difusão podem ser acompanhados por outros processos (reações) que influenciam a organização espacial dos elementos envolvidos, como o resultado das interações entre esses elementos. Como exemplo, podemos pensar nas reações químicas entre duas substâncias se difundindo em um copo de água.

Entre suas aplicações as equações de reação-difusão e sistemas de reação difusão podem ser utilizados para estudar e modelar processos físicos, como a equação do calor, veja [14], químicos, computacionais e ecológicos, para estes últimos indicamos, [2, 9, 15]. Além

destas referências, o artigo [26] apresenta exemplos de aplicações de sistemas de reação e difusão, e estes serão estudados nesse trabalho.

Nosso objetivo é investigar a existência e a unicidade de soluções locais e globais para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t = M\Delta u + f(u), & x \in \Omega \text{ e } t > 0 \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ou seja, queremos entender quais condições sobre M e f são necessárias para que possamos garantir a existência e unicidade de soluções, em relação a variável $t \in (0, \infty)$.

Observe que a parte linear do problema acima é um operador linear definido em dimensão infinita. Por esta razão, introduziremos no Capítulo 1 alguns conceitos de Análise Funcional que nos permita estudar este tipo de operador. Além disso, veremos que este operador não é limitado (1.0.1), assim não é válido o teorema clássico de Peano, por isso, no Capítulo 2, introduziremos a da Teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados, para que estudar o problema homogêneo

$$\begin{cases} u_t = M\Delta u, & x \in \Omega \text{ e } t > 0 \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

de forma qualitativa. Nesta etapa estudaremos os teoremas de **Hille-Yosida** e **Lumner-Phillips**, que garantem a existência e unicidades de soluções. Além disso, estudaremos o conceito de **operadores setoriais**, que compõem uma classe de operadores importante para garantir existência de soluções dos problemas linear, homogêneo e não-homogêneo.

No Capítulo 3 estudaremos o operador linear $Au = -M\Delta u$, para entender sobre quais condições este operador será setorial, o que nos auxiliará no estudo dos sistemas de reação e difusão.

No Capítulo 4 estudaremos os resultados de existência (local e global) e unicidade de soluções para problemas semilineares. Para isso, precisaremos introduzir os conceitos de **operadores com potência fracionária** e **espaços fracionários**.

No Capítulo 5 estudaremos os exemplos de sistemas de reação e difusão apresentados no artigo [26], aplicados os resultados de existência e unicidades de soluções.

Alguns resultados complementares serão apresentados no Apêndice.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este Capítulo visa introduzir alguns conceitos de Análise Funcional que serão necessários para a compreensão da Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados, o que os tornam fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. O conteúdo deste Capítulo se baseou nas Notas de aula [5, 7, 10] e nos livros [1, 6, 8, 22].

Antes de iniciar as seções destinadas a estes conceitos, faremos um breve “paralelo” entre ideias que os motivam com conteúdos da graduação estudados em Equações Diferenciais e Álgebra Linear.

Em Equações Diferenciais, dado um operador diferencial L , ou seja,

$$\begin{aligned} L: \mathcal{C}^k &\rightarrow \mathcal{C} \\ u &\rightarrow Lu \end{aligned}$$

estudamos o seguinte problema

$$Lu = f$$

com u suficientemente diferenciável e f contínua. Neste trabalho, estamos interessados em um problema semelhante embora em outro contexto. Em nosso problema, f não será necessariamente contínua, mas Lesbegue Integrável ($f \in L^p(\Omega)$, veja a Definição (1.1.1)), e u não será necessariamente diferenciável no sentido usual. Assim, nosso estudo necessita de algo mais elaborado, por isso a primeira seção deste Capítulo será sobre o espaço de derivadas fracas (espaço de Sobolev, apresentado na Definição (1.1.5)) que contém o domínio do operador Laplaciano.

Em Álgebra Linear nós estudamos operadores lineares porém, geralmente não estamos interessados na continuidade. A continuidade dos operadores lineares é equivalente a noção de limitação, que são operadores que levam conjuntos limitados do domínio em conjuntos limitados do contradomínio, definiremos o conceito de **operador limitado**.

Definição 1.0.1. *Sejam E e F espaços vetoriais normados, sendo $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$ suas respectivas normas e ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Então, o operador linear $A : E \rightarrow F$ será dito **limitado** quando existir um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para qualquer $x \in E$. Caso contrário o operador A será dito **ilimitado**.*

O conjunto

$$\mathcal{L}(E, F) \doteq \{A : E \rightarrow F : A \text{ é um operador linear limitado}\}$$

é um espaço normado munido com a seguinte norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup\{\|Ax\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Caso F seja um espaço de Banach então $\mathcal{L}(E, F)$ também será um espaço de Banach e quando $E = F$ escreveremos apenas $\mathcal{L}(E)$.

Um exemplo simples de operador limitado é o operador identidade. Mas para ilustrar o conceito de operadores ilimitados, escolhemos o operador derivada.

Exemplo 1.0.2. *Sejam $\mathcal{C}[0, 1]$ o conjunto das funções contínuas e $\mathcal{C}^1[0, 1]$ o conjunto de funções pelo menos uma vez diferenciáveis munido da norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}.$$

O operador

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C}^1[0, 1] \subset \mathcal{C}[0, 1] &\rightarrow \mathcal{C}[0, 1] \\ Af &= f' \end{aligned}$$

é um operador ilimitado.

Para verificar isso, considere o conjunto de polinômios do tipo $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$. Disto seguirá que não existe uma contante C que satisfaça a condição de limitação.

Frequentemente lidamos com operadores que estão definidos em subconjuntos de um espaço, ou seja, tome X um espaço normado e o domínio do operador $D(A)$ seja estritamente contido em X . Neste caso, escrevemos $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. Além disso, chamamos A de **densamente definido** quando $\overline{D(A)} = X$.

Na segunda seção, traçaremos um paralelo com ferramentas utilizadas em Álgebra Linear introduzindo as noções da Teoria Espectral dos Operadores Lineares. A seção seguinte será dedicada aos Operadores Compactos, que são os operadores que transformam conjuntos limitados em conjuntos compactos, o espectro desses operadores é caracterizado pelos os autovalores e o valor nulo, veja Lema (1.3.4). Outra importante classe são os Operadores Auto-adjuntos, os quais dedicaremos nossa terceira seção e apresentaremos o Teorema Espectral para Operadores auto-adjuntos e compacto.

Por fim, faremos um breve estudo do operador Laplaciano, pois este é fundamental para o estudo de sistemas e equações de reação e difusão.

1.1 Espaços de Funções

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos de espaços de derivadas “fracas”, definindo os espaços de Sobolev, e enunciaremos alguns resultados.

O espaço das funções integráveis no sentido de Lebesgue será denotado por $L^1(\Omega)$ e na sequência definiremos o **espaço de Lebesgue** $L^p(\Omega)$.

Definição 1.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $L^p(\Omega)$ o espaço de funções mensuráveis cuja potência p , $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω . Munido da seguinte norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sobre os espaços L^p vamos mencionar duas propriedades importantes, sendo a completude e a densidade do espaço das funções contínuas com suporte compacto $\mathcal{C}_0(\Omega)$. Seguem os resultados.

Teorema 1.1.2 (Livro [1], Teorema 2.16, página 29). *O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.1.3 (Livro [1], Teorema 2.19, página 31). *O espaço de funções contínuas $\mathcal{C}_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

O próximo resultado nos diz sobre a densidade do espaço das funções suave com suporte compacto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ nos espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.1.4 (Livro [1], Corolário 2.30, página 38). *O espaço de funções $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Definimos agora o espaço de derivadas fracas, os resultados aqui apresentados são encontrados no livro [8].

Definição 1.1.5. *Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que, para todo $i = 1, \dots, n$ existe uma função $g_i \in L^p(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

*é chamado de **espaço de Sobolev** e denotado por $W^{1,p}(\Omega)$.*

Ademais a função g_i é chamada de **derivada fraca** em relação a x_i e denotada por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. E denotamos por $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ as funções $u = (u_1, \dots, u_d)$ tal que $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$ para cada i .

Observação 1.1.6. *A unicidade de g_i , da definição acima, segue da densidade de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, pois se $\int_{\Omega} (g - f) \phi dx = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ então, $\int_{\Omega} (g - f) \phi dx = 0$ para todo $\phi \in L^p(\Omega)$.*

Na sequência, mostraremos a completude desses espaços com respeito a uma norma usual. Para isso, consideramos o gradiente de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ por

$$\nabla u = \text{grad}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \in (L^p(\Omega))^n.$$

Teorema 1.1.7. *Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$.*

i) *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}.$$

ii) *O espaço $H^1(\Omega) \doteq W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do seguinte produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a seguinte norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^n}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. **i)** Seja $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u_k - u_m\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{} 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla u_k - \nabla u_m\|_{(L^p(\Omega))^n} \xrightarrow{} 0 \quad \text{quando} \quad k, m \rightarrow \infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, existem $u, v_1, \dots, v_n$ tais que

$$\|u_k - u\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{} 0 \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{} 0 \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Vejamos que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$. De fato, para todo $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$, teremos

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} u_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx.$$

Tomando $k \rightarrow \infty$ concluímos que

$$\int_{\Omega} \phi v_i dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx,$$

assim $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

ii) Com o mesmo argumento de **i)** e observando que, se $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(\Omega)$ então $\|u_k - u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ o resultado segue.

□

O fecho das funções com suporte compacto com respeito ao espaço de Banach $W^{1,p}(\Omega)$ será denotado por $W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{\text{o fecho de } \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{1,p}(\Omega)\} = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

e das funções $\mathcal{C}_0$ com respeito ao espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ será denotado por $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{\text{o fecho de } \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \text{ em } H^1(\Omega)\} = W_0^{1,2}(\Omega).$$

E podemos concluir que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach e $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável. O próximo resultado, estabelece uma condição para uma função estar em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposição 1.1.8 (Livro [8] Lema 9.5, página 287). *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ possui suporte compacto, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Para finalizar esta seção, vamos enunciar um resultado de extrema importância para os espaços de Sobolev e que usaremos adiante.

Proposição 1.1.9 (Livro [8], Corolário 9.19 página 290). *(Desigualdade de Poincaré). Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C > 0$ que depende de Ω e de p , tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ a expressão

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

é um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, sendo equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Observação 1.1.10. *Daqui em diante, consideraremos o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2 Teoria espectral de operadores em espaços de Banach

Em Álgebra Linear, estudamos operadores lineares entre espaços vetoriais e seus autovalores e autovetores, ou seja, dado um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ e um operador linear $T: V \rightarrow V$, se existir um $v \in V$, com $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, então v será chamado autovetor do operador T associado ao autovalor λ .

No nosso contexto, estamos mais preocupados com operadores lineares com domínio estritamente contido nos espaços vetoriais normados, e que muitas vezes, com possuem dimensão infinita.

Definição 1.2.1. *Sejam X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, $\lambda \in \mathbb{K}$ e um vetor $v \in X$ com $v \neq 0$ tal que*

$$A(v) = \lambda v.$$

*Chamamos λ de **autovalor** e v de **autovetor** de A , respectivamente. Além disso, subespaço gerado pelo conjunto $X_\lambda = \{v : A(v) = \lambda v\}$ é chamado de **auto-espaço** do operador A associado ao autovalor λ .*

No caso em que $\lambda \in \mathbb{K}$ não é um autovalor do operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, concluímos que o operador $(\lambda - A) = (\lambda I - A)$ é injetivo. Isso faz com que o operador

$$(\lambda - A)^{-1} : (\lambda - A)(D(A)) \subset X \rightarrow X$$

faça sentido, sendo $(\lambda - A)(D(A))$ o conjunto imagem do operador $\lambda - A$. Ao contrário dos operadores lineares que são definidos em espaços de dimensão finita, não temos informações sobre sobrejetividade de $\lambda I - A$ e a limitação de $(\lambda I - A)^{-1}$, que nos leva procurarmos os números λ de modo que tais propriedades sejam cumpridas, motivando a próxima definição.

Definição 1.2.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear definido densamente, chamamos de **conjunto resolvente** do operador A , denotado por $\rho(A)$, o subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que, se $\lambda \in \rho(A)$, então valem as seguintes propriedades:*

- i) $\lambda - A$ é injetor.
- ii) $Im(\lambda - A)$ é densa em X .
- iii) $(\lambda - A)^{-1} : Im(\lambda - A) \subset X \rightarrow X$ é limitado.

Definimos o **espectro** do operador A , denotado por $\sigma(A)$, como o complementar de $\rho(A)$ em $\mathbb{C}$, ou seja, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Segue desta definição que o conjunto dos autovalores de um operador está contido no espectro dele. Além disso, se A é um operador definido em um espaço de dimensão finita, então o espectro de A , $\sigma(A)$ é o conjunto dos autovalores de A .

Definição 1.2.3. *Denotamos por gráfico do operador A o conjunto $G(A) \doteq \{(x, Ax) : x \in X\} \subset X \times X$. Assim, o operador A será dito **fechado** (fechável), quando $G(A)$ for fechado em $X \times X$ (quando $\overline{G(A)}$, for gráfico de um operador $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \rightarrow X$).*

Nos casos em que o operador A é fechado em um espaço de Banach, podemos dar a seguinte caracterização ao conjunto resolvente de A , $\rho(A)$.

Proposição 1.2.4. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. O conjunto resolvente $\rho(A)$ é o conjunto dos valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - A$ é bijetor.*

Demonstração. Seja $(\lambda - A)$ uma bijeção, pelo Teorema do Gráfico Fechado, veja no Teorema A.1.4, temos que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, portanto $\lambda \in \rho(A)$. Reciprocamente, se $\lambda \in \rho(A)$ como $\overline{Im(\lambda - A)} = X$ então, para todo $x \in X$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $Im(\lambda - A)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Tomando $x_n = (\lambda - A)y_n$, com $y_n \in D(A)$ para todo n , teremos que $y_n = (\lambda - A)^{-1}x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\lambda - A)^{-1}x \in D(A)$ pois $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado. Como $(\lambda - A)$ é fechado, concluímos $X \subset Im(\lambda - A)$, isto é, $(\lambda - A)$ é sobrejetor e a bijeção do operador $\lambda - A$ segue. $\square$

No caso em que o operador for fechado, seguindo algumas restrições, podemos obter uma caracterização para o operador $(\lambda - A)^{-1}$, por meio dos seguintes resultados

Teorema 1.2.5 (Livro [10], Teorema 2.1.1, página 29). *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. Então $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. De fato, se, $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\|\mu - \lambda\| \|(\mu - A)^{-1}\| < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-1-n}. \quad (1.1)$$

Demonstração. Observe que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-1-n} = (\mu - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n}$$

converge absolutamente na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$, e portanto converge em $\mathcal{L}(X)$. Basta provar a equação (1.1) para concluir que a bola aberta $B\left(\mu, \frac{1}{\|(\mu - A)^{-1}\|}\right) \subset \rho(A)$.

Se $\mu \in \rho(A)$ então $(\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ podemos escrever

$$(\lambda - A) = (\mu - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}].$$

Da desigualdade $\|\mu - \lambda\| \|(\mu - A)^{-1}\| < 1$ segue que

$$(I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1})^n \in \mathcal{L}(X).$$

Portanto

$$(\lambda - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1})^n.$$

$\square$

Teorema 1.2.6 ((Identidade do resolvente) Livro [34], Teorema 1, página 211). *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Se $\lambda, \mu \in \rho(A)$ então*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

e

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}.$$

Demonstração. Sejam μ e $\lambda \in \rho(A)$, então

$$\begin{aligned} (\mu - A)^{-1} &= (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1}[(\mu - A) + (\lambda - \mu)I](\lambda - A)^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}. \end{aligned}$$

A segunda equação é consequência imediata da primeira. $\square$

E também obtemos a analiticidade da aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Corolário 1.2.7. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado. Então a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}$ é analítica e*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1}.$$

Demonstração. Fixe $\lambda_0 \in \rho(A)$ e tome λ em uma vizinhança de λ_0 , suficientemente pequena, tal que

$$|\lambda_0 - \lambda| \|(\lambda_0 - A)^{-1}\| < \frac{1}{2}.$$

Segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - A)^{-n-1}$ converge uniformemente para

$$|\lambda_0 - \lambda| \leq \frac{1}{2 \|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Portanto a aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto \mathcal{L}(X)$ é contínua, e segue da Identidade do resolvente (1.2.6) que a aplicação é derivável em λ_0 com

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda - A)^{-1} = -(\lambda - A)^{-2}.$$

O caso geral segue da identidade do resolvente e de um argumento de indução.

Segue da identidade

$$(\lambda - A)^{-n} - (\mu - A)^{-n} = ((\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}) \sum_{j=1}^n (\mu - A)^{-n+j} (\lambda - A)^{1-j},$$

que a aplicação $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-n}$ é diferenciável para qualquer $n \in \mathbb{N}$, em uma vizinhança de λ_0 . Além disso, suponhamos por hipótese de indução que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}(\lambda - A)^{-1} &= \frac{d}{d\lambda}(-1)^n n! (\lambda - A)^{-n-1} \\ &= (-1)^n n! [-(\lambda - A)^{-2}(n+1)(\lambda - A)^{-n}] \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! (\lambda - A)^{-n-2}. \end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.2.8. *Seja X é um espaço de Banach real, denotamos por $X_{\mathbb{C}}$, a **complexificação** do espaço X , unicamente representada por $X_{\mathbb{C}} = X + iX$. Além disso, sejam X, Y espaços vetoriais reais e $G : X \mapsto Y$ um operador linear então, definimos a **complexificação** de G por $G_{\mathbb{C}}$ por*

$$G(x + iy) = G(x) + iG(y) \forall x, y \in X,$$

assim $G_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \mapsto Y_{\mathbb{C}}$.

Se X é um espaço de Hilbert, com a norma induzida pelo produto interno, então $X_{\mathbb{C}}$ é um espaço de Hilbert complexo, com a seguinte norma $\|x + iy\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$, induzida pelo produto interno complexo.

$$\langle x + iy, u + iv \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i[\langle y, u \rangle + \langle x, v \rangle]$$

Seja X um espaço real normado. Se em uma determinada fórmula houver referências implícitas ou explícitas a números complexos, sempre se entende que essa fórmula é interpretada em sua versão complexificada. Assim, por exemplo, se X é um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e A é um operador linear em X , entendemos por $\sigma(A)$ e $\rho(A)$ o espectro e o conjunto resolvente, respectivamente, de A se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e de $A_{\mathbb{C}}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Para mais detalhes da complexificação de um operadores, indicamos o livro [4], página 4.

1.3 Operadores compactos

Estudaremos agora, alguns resultados relacionados aos operadores compactos com a finalidade de compreender como é o espectro e o resolvente deste tipo de operador.

Seja E espaços de normado sobre $\mathbb{K}$, denotamos a bola unitária por

$$B_E(0) \doteq \{x \in E : \|x\| < 1\}.$$

Definição 1.3.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Diremos que um operador $T : E \rightarrow F$ é **compacto** se $T(B_X(0))$ é relativamente compacto em E , ou seja, $\overline{T(B_X(0))}$ é compacto em F .*

A seguir enunciaremos o critério sequencial para operadores compactos.

Teorema 1.3.2 ([6], Proposição 7.2.3 página 187). *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T : E \rightarrow F$:*

- (a) T é compacto;
- (b) $\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo A limitado em E ;

(c) Para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em E existe uma subsequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{T(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ é convergente em F .

Proposição 1.3.3. *Todo operador compacto é limitado.*

Demonstração. Basta observar que, $T(B_E(0)) \subset \overline{T(B_E(0))}$ então $T(B_E(0))$ é limitado, pois $\overline{T(B_E(0))}$ é compacto. $\square$

O resultado a seguir caracteriza o espectro de um operador compacto.

Teorema 1.3.4. *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e T um operador compacto. Então $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}$. Além disso, se uma sequência $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\sigma(T) \setminus \{0\}$ for convergente, então $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Demonstração. Suponha que $0 \in \rho(T)$, então T^{-1} está bem definido e é limitado. Note que $I = T \circ T^{-1}$, ou seja, I será compacto, o que é um absurdo, logo devemos ter $0 \in \sigma(T)$. Por definição, os autovalores estão contidos em $\sigma(T)$. Suponha que $\lambda \in \sigma(T)$ com $\lambda \neq 0$, então o operador $\lambda - T$ não é injetor ou não é sobrejetor. Pelo Lema A.1.7 (Apêndice), se for injetor também será sobrejetor, o que nos levaria em $\lambda \in \rho(T)$. Portanto o operador $\lambda - T$ não é injetor, donde λ é autovalor de T .

Provaremos agora que, se uma sequência $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\sigma(T) \setminus \{0\}$ for convergente, então $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Basta mostrar que, dado $\epsilon > 0$ o conjunto de autovalores λ tais que $|\lambda| \geq \epsilon$ é finito. Suponha que isso não aconteça então, existe ϵ_0 tal que o conjunto de autovalores λ tais que $|\lambda| \geq \epsilon_0$ é infinito.

Sejam $\{\lambda\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de autovalores tais que $|\lambda_n| \geq \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, x_n o autovetor associado a λ_n e $M_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M_n é fechado (pois tem dimensão finita), usando o **Lema de Riesz**(A.1.1) podemos construir uma sequência $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{dist}(y_n, M_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Mostraremos então

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \forall n > m,$$

o que estará em contradição á compacidade do operador T . Observe que, $T(M_n) \subseteq M_n$ assim, se $n > m$ então $T(y_m) \in T(M_{n-1}) \subseteq M_{n-1}$, além disso, $(T - \lambda_n I)(z) \in M_{n-1}$ para todo $z \in M_n$. Logo $((\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)) \in M_{n-1}$, assim

$$\begin{aligned} \|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|\lambda_n y_n + T(y_n) - T(y_m) + \lambda_n y_n\| \\ &= \|\lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n} [(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)] - y_n \right)\| \\ &= \|\lambda_n\| \cdot \left\| \frac{1}{\lambda_n} [(\lambda_n y_n - T(y_n)) + T(y_m)] - y_n \right\| \\ &\geq \|\lambda_n\| \cdot \text{dist}(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{\epsilon_0}{2}, \end{aligned}$$

para todos $n > m$. A demonstração está completa. □

Definição 1.3.5. *Sejam X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado e com resolvente não vazio. Diremos que A tem **resolvente compacto** se, para algum $\lambda \in \rho(A)$ o operador $(\lambda - A)^{-1}$ for compacto.*

Como consequência da identidade do resolvente (1.2.6), teremos que, para todo $\lambda \in \rho(A)$ o operador $(\lambda - A)^{-1}$ será compacto.

Por fim, daremos um exemplo de operador compacto.

Exemplo 1.3.6 (Operador integral). *Seja $K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Considere o operador*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}[a, b] &\rightarrow \mathcal{C}[c, d] \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

$$\text{onde } T(f)(t) = \int_a^b K(s, t)f(s)ds \text{ para todo } t \in [c, d].$$

Para verificar que este operador é compacto, basta mostrar que ele está bem definido e utilizar o Teorema de Arzelá-Ascoli para mostrar que $\overline{T(B_{\mathcal{C}[a, b]})}$ é compacto em $\mathcal{C}[c, d]$. Esta verificação é encontrado no livro [6] Exemplo 7.2.4 página 188.

1.4 Operadores auto-adjuntos

Nesta seção consideramos o operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, onde H é um espaço de Hilbert munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$, temos por objetivo compreender o espectro e resolvente de operadores auto-adjunto. Nosso estudo é focado no operador Laplaciano que está definido em espaços de Hilbert e cumprirá tal propriedade.

Antes de definir operador auto-adjunto, precisamos definir o operador adjunto e o simétrico.

Definição 1.4.1. *Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear densamente definido. O operador **adjunto** de A denotado por A^* é definido por*

$$D(A^*) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u \rangle : D(A) \rightarrow \mathbb{K} \text{ é limitado}\}$$

e se $u \in D(A^*)$, então A^*u é o único elemento de H tal que

$$\langle Av, u \rangle = \langle v, A^*u \rangle, \forall v \in D(A).$$

De fato, suponhamos que exista um $z \in H$ tal que $\langle Av, u \rangle = \langle v, z \rangle$, segue que $\langle v, A^*u - z \rangle = 0$ para todo $v \in D(A)$. Pela densidade de $D(A)$ em H e continuidade do produto interno temos que $\langle v, A^*(u) - z \rangle = 0$ para todo $v \in H$, então podemos concluir que $A^*u = z$.

Lema 1.4.2. *Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear e A^* seu adjunto, então o operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset H \rightarrow H$ será fechado.*

Demonstração. Suponhamos uma sequência $\{x_n\}$ em $D(A)$ com $\{(x_n, A^*x_n)\}_{n=1}^\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$ em $H \times H$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Av, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, A^*x_n \rangle$$

e da continuidade do produto interno, teremos

$$\langle Av, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rangle = \langle v, \lim_{n \rightarrow \infty} A^*x_n \rangle$$

e, assim,

$$\langle Av, x \rangle = \langle v, y \rangle.$$

Novamente, usando a continuidade do produto interno, podemos concluir que a aplicação $\langle A(\cdot), x \rangle : D(A) \rightarrow \mathbb{K}$ é limitada, portanto $x \in D(A^*)$ e $A^*x \in \text{Im}(A^*)$. Logo, o operador A^* é fechado. $\square$

Definição 1.4.3. *Diremos que o operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é **simétrico** se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$, ou seja, $D(A) \subset D(A^*)$ e $\langle Av, u \rangle = \langle v, Au \rangle$ para todo $u, v \in D(A)$.*

*Além disso, diremos que o operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é **auto-adjunto**, se $D(A) = D(A^*)$ e assim $A = A^*$.*

Da definição de operador simétrico observamos que seus autovalores são números reais. De fato, seja λ é autovalor de um operador simétrico A , então

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle \implies \lambda \langle u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle,$$

donde $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é, $\lambda \in \mathbb{R}$. Obviamente, o mesmo vale para operadores auto-adjuntos.

Exemplo 1.4.4. *Defina $T : l_2(\mathbb{N}) \rightarrow l_2(\mathbb{N})$ dado por $T(\{a_j\}_{j=1}^\infty) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_n}{n}, \dots\right)$.*

Observe que o operador T é simétrico, de fato, sejam $a, b \in l_2(\mathbb{N})$ então

$$\langle T(a), b \rangle_{l_2} = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{j} b_j = \sum_{j=1}^\infty a_j \overline{\left(\frac{b_j}{j}\right)} = \langle a, T(b) \rangle_{l_2}.$$

Como $D(T) = l_2$, o operador T é auto-adjunto.

A seguir enunciaremos um critério que garante quando um operador simétrico é auto-adjunto.

Teorema 1.4.5. *Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear simétrico. Se A é sobrejetor, então A é auto-adjunto.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que o operador A não seja auto-adjunto, segue que existe um $z \in D(A^*)$ tal que $A^*z \neq Au$ para todo $u \in D(A)$, logo A não é sobrejetor. $\square$

Antes do próximo resultado precisamos definir o conceito de sistema ortonormal completo. Dado um espaço vetorial normado V , se S um subconjunto de V denotaremos por $[S]$ o subespaço de V gerado pelo elementos de S . Se V é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos utilizar o conceito de ortogonalidade, assim, o conjunto S será chamado de **sistema ortonormal completo** se possuir as seguintes propriedades:

i) dados $x, y \in S$

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq y \\ 1 & \text{para } x = y; \end{cases}$$

ii) o único elemento $z \in V$ tal que

$$\langle z, x \rangle = 0 \quad \forall x \in V$$

é o 0.

O seguinte resultado nos diz que sempre existirá uma base ortonormal de autovetores quando o operador for compacto e auto-adjunto e o operador será **diagonalizável**.

Teorema 1.4.6 (Livro [6], Teorema 7.5.6, página 208). *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador compacto e auto-adjunto. Então H admite um sistema ortonormal completo formado por autovetores de T . Mais ainda, existem sequências de autovalores $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de T associados aos autovalores $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, tais que*

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n, \quad \text{para } x \in H.$$

Além disso, operadores simétricos são, por definição, injetivos. Logo, se um operador simétrico for sobrejetor, também será bijetor e fechado (por ser auto-adjunto), e assim $A^{-1} : H \rightarrow H$ estará bem definido. Podemos, então concluir que $0 \in \rho(A)$ e $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Para ilustrar o conceito de operadores auto-adjuntos iremos definir um operador simétrico e fechável e, estendê-lo a um operador fechado e auto-adjunto. Neste processo iremos usar um resultado conhecido como Teorema de Friedrich A.1.2 para provar que a extensão do operador é auto-adjunta.

Exemplo 1.4.7. *Consideremos agora o seguinte problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} u_t = A_0 u(t) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $A_0 : \mathcal{C}_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é dado por $A_0 u = -\Delta u$.

Observe que A_0 é densamente definido e, além disso, segue das fórmulas de Green que

$$\begin{aligned} \langle A_0 u, v \rangle &= -\langle \Delta u, v \rangle = -\langle u, \Delta v \rangle = \langle u, A_0 v \rangle \\ \langle A_0 u, v \rangle &= -\langle \Delta u, v \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle. \end{aligned}$$

Assim, o operador A_0 é simétrico e, pela desigualdade de Poincaré 1.1.9, existe $c > 0$ tal que

$$\langle A_0 x, x \rangle \geq c \|x\|^2,$$

portanto, segue do teorema de Friedrich A.1.2 que, existe um operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, auto-adjunto tal que, $Ax = A_0x$ para todo $x \in D(A_0)$.

Seja Y o fecho de $D(A_0)$ pela norma induzida do produto interno definido por $\langle A_0 u, v \rangle$, para $u, v \in D(A_0)$, segue que $Y = H_0^1(\Omega)$, assim $D(A_0) \subset H_0^1(\Omega)$. Como A é um operador fechado então, $D(A) \subset H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, da simetria do operador A teremos que $u \in D(A)$ se, e somente se, existe $u^* \in L^2(\Omega)$

$$\{u \in H_0^1(\Omega) : \langle A_0 v, u \rangle = \langle v, u^* \rangle \ \forall v \in D(A_0)\}$$

portanto $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Segue que, a extensão de A_0 é operador $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por

$$Au = -\Delta u = -\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

1.5 Breve estudo do operador Laplaciano

De posse das definições e resultados das seções anteriores faremos um breve estudo sobre o operador Laplaciano, esta seção se baseia no trabalho [5].

Segue da Desigualdade de Poincaré (1.1.9) que o espaço $H_0^1(\Omega)$ pode ser munido da norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, para $u \in H_0^1(\Omega)$. Como o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}$$

induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ que, por outro lado, é equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Então $H_0^1(\Omega)$ pode ser munido da norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, além disso, é um espaço de Hilbert.

Como o objetivo deste trabalho é estudar sistemas do tipo

$$u_t = \mathbf{M} \Delta u \tag{1.2}$$

sendo Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, no sentido de $\mathcal{C}^\infty$, e $\mathbf{M}$ uma matriz $N \times N$. Nesta última seção do Capítulo vamos dar continuidade ao Exemplo 1.4.7. Desta forma, ao logo desta seção, estudaremos o operador Laplaciano $\Delta : D(\Delta) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{1.3}$$

onde $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para isso, será necessário investigarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

para qualquer $f \in L^2(\Omega)$, a fim de provar a existência e unicidade de soluções. Depois estudaremos algumas propriedades do operador, seu espectro e relações entre as autofunções e o espaço $L^2(\Omega)$.

Definição 1.5.1. *Seja $f \in L^2(\Omega)$. Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é **solução fraca** do problema 1.4 se satisfaz a igualdade*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que, pela Segunda Fórmula de Green, A.2.12. temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = - \int_{\Omega} \Delta u v,$$

se a igualdade acima for satisfeita teremos que

$$- \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v,$$

pelo teorema de Representação de Riesz (A.1.6) podemos concluir que $-\Delta u = f$.

Sobre a existência e unicidade de soluções, estabeleceremos os seguintes teoremas.

Teorema 1.5.2 (Unicidade da solução fraca). *Seja $f \in L^2(\Omega)$ qualquer, se existe solução fraca para o problema (1.4), então ela é única.*

Demonstração. Vamos provar algo mais geral que a unicidade, que é a estabilidade fraca da equação de Poisson. Sejam $u, v \in D(\Delta)$, de modo

$$-\Delta u = f \quad \text{e} \quad -\Delta v = g \quad \text{em } \Omega,$$

onde $f, g \in L^2(\Omega)$ e $u - v \in D(\Delta)$. Da Segunda Fórmula de Green generalizada A.2.12 temos

$$\int_{\Omega} \nabla(u - v) \nabla h = - \int_{\Omega} (f - g) h, \quad \text{para todo } h \in W_0^2(\Omega),$$

e tomando $h = u - v$ obtemos

$$\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (f - g)(u - v),$$

Segue da desigualdade de Holder que

$$\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f - g\|_{L^2(\Omega)} \|u - v\|_{L^2(\Omega)},$$

A desigualdade de Poincaré 1.1.9, garante que existe $C > 0$ tal que

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.5)$$

Logo,

$$\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f - g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)},$$

e obtemos

$$\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f - g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela desigualdade (1.5) novamente, temos

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2 \|f - g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.6)$$

Em particular, se $-\Delta u = f$ e $-\Delta v = f$ em Ω , ou seja $f = g$, pela desigualdade anterior obtemos $u = v$ e a unicidade é obtida.

□

Do teorema concluímos que o operador Laplaciano Δ , dado por 1.3, é injetivo e no teorema a seguir vamos garantir a sobrejetividade.

Teorema 1.5.3 (Existência de soluções fracas). *Seja $f \in L^2(\Omega)$ então existe única solução fraca $u \in W_0^2(\Omega)$ para o problema 1.4.*

Demonstração. Observe que, a existência de solução é equivalente a existência de um único vetor $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Então, basta mostrar que

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \in (H_0^1(\Omega))^*,$$

e do Teorema da Representação de Riez A.1.6 teremos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$.

Da desigualdade de Holder temos

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

da desigualdade de Poincaré, existe $C = C(n, \Omega)$ tal que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$, assim

$$|F(v)| \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

portanto $F(v) \in (H_0^1(\Omega))^*$.

□

Os Teoremas 1.5.2 e 1.5.3 garantem que operador Laplaciano 1.3 possui inverso bem definido

$$\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

No próximo resultado, trazemos mais propriedades deste operador.

Proposição 1.5.4. *Seja Ω um aberto com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$. O operador inverso do Laplaciano Δ^{-1} satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *é limitado;*
- (ii) *é compacto;*
- (iii) *é auto-adjunto;*

Demonstração. (i) Tome $u, v \in D(\Delta)$ tal que $\Delta u = f$ e $\Delta v = g$, da desigualdade 1.6 no Teorema 1.5.2 temos

$$\|\Delta^{-1}f - \Delta^{-1}g\|_{H^1(\Omega)} = \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2\|f - g\|_{H^1(\Omega)},$$

donde Δ^{-1} é limitado.

(ii) Observe a inclusão

$$i : H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

é uma imersão compacta. De fato, sabemos pelo Teorema **Rellich–Kondrachov** A.1.8, que a imersão

$$\bar{i} : W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

é compacta. Uma vez que toda sequência limitada em $H^1(\Omega)$ é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$, segue compacidade da imersão i . Da limitação do operador Δ^{-1} segue que o operador $i \circ \Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é compacto.

Devido as equivalências das normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, a seguinte aplicação

$$i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega),$$

é compacta, segue então o operador $\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é compacto. Uma vez que Δ^{-1} é compacto então, $0 \in \rho(\Delta)$.

iii) Sejam $u, v \in D(\Delta)$, então, da **Primeira Fórmula de Green Generalizada** A.2.10

$$\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$$

Pelo Teorema 1.5.3, sabemos que operador Laplaciano é sobrejetor. Portanto o operador Δ é auto-adjunto. Chamando $\Delta u = w$ e $\Delta v = z$ teremos

$$\langle w, \Delta^{-1}z \rangle = \langle \Delta^{-1}w, z \rangle,$$

segue da sobrejetividade do operador Laplaciano, que o operador Δ^{-1} é auto-adjunto.

□

A fim de estabelecer algumas propriedades do operador Laplaciano, vamos estudar alguns resultados envolvendo seus autovalores e autofunções.

Teorema 1.5.5. *O operador $A : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ dado por $Au = -\Delta u$ possui um número infinito e enumerável de autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ satisfazendo*

$$(i) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{j-1}$$

com $\lambda_j \rightarrow \infty$. Além disso, existem autofunções $u_i \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ associada ao autovalor λ_i que satisfazem

$$(ii) \quad -\Delta u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, j-1;$$

$$(iii) \quad \langle u_k, u_i \rangle = \delta_{ki}, \quad 1 \leq i, k \leq j.$$

Demonstração. Precisamos obter uma sequência de autovalores $\{\lambda_j\}$ tais que $\lambda_j \rightarrow \infty$. Para realizar essa demonstração, definiremos um funcional conveniente e mostraremos que possui um mínimo, e este será um autovalor e será atingido aplicando uma autofunção. Os demais autovalores e autofunções seguirá por indução.

Passo 1 - Definiremos o funcional conveniente e mostraremos que, se seu valor mínimo existe, então é um autovalor atingido em uma autofunção.

Defina o seguinte funcional $I : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} \|u\|^2 dx} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Mostraremos que o funcional I possui ponto crítico (mínimo): Por definição o funcional I é limitado inferiormente então defina

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} I(u) = \lambda_1,$$

além disso $I(u) = I(\alpha u)$ para $\alpha \neq 0$. Podemos considerar uma sequência minimizante,

$$\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_1, \quad \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } \|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \forall k.$$

Assim, a sequência $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ também é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Como a inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é uma imersão compacta (Teorema de Rellich–Kondrakhov, em (A.1.8)), podemos tomar uma subsequência $\{v_{k'}\}_{k' \in \mathbb{N}} \xrightarrow{L^2(\Omega)} v$, obtendo $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, e assim, $v \neq 0$.

Afirmamos que $\{v_{k'}\}_{k' \in \mathbb{N}} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} v$. De fato, segue da lei do paralelogramo que

$$\|\nabla(v_{k'} - v_{l'})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(v_{k'} + v_{l'})\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\|\nabla v_{k'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e

$$\|v_{k'} - v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{k'} + v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\|v_{k'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

assim $\|v_{k'} + v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 4$, além disso, uma vez que $\inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} I(u) = \lambda_1$, obtemos a desigualdade

$$\|\nabla(v_{k'} + v_{l'})\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_1 \|v_{k'} + v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

segue que

$$\|\nabla(v_{k'} - v_{l'})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\nabla v_{k'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda_1 \|v_{k'} + v_{l'}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0.$$

Assim, $\{\nabla v_{k'}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e o que prova a convergência de $\{v_{k'}\}_{n=0}^\infty$. Segue que $\|\nabla v_k\|^2 = \lambda_1$, e pela desigualdade de Poincaré $\lambda_1 \neq 0$. Podemos concluir que v é ponto crítico (mínimo) de I . Denotaremos $v = u_1$.

Passo 2 Provaremos agora que $\lambda_1 = \inf I(u)$ existe, além disso, λ_1 será autovalor do operador $-\Delta$.

Suponhamos que u_1 seja ponto crítico do funcional I , então mostraremos que u_1 é uma solução fraca de $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$. De fato, para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} I(u_1 + tv) &= \frac{\|\nabla(u_1 + tv)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_1 + tv\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\langle \nabla(u_1 + tv), \nabla(u_1 + tv) \rangle}{\langle (u_1 + tv), (u_1 + tv) \rangle} \\ &= \frac{\|\nabla u_1\|^2 + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v \rangle + |t|^2 \|\nabla v\|^2}{\|u_1\|^2 + 2t\langle u_1, v \rangle + |t|^2 \|v\|^2} \end{aligned}$$

tomando $|t|$ suficientemente pequeno para que o denominador nunca se anule.

Uma vez que u_1 é um mínimo para este funcional, então

$$\frac{d}{dt} I(u_1 + tv)|_{t=0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt} I(u_1 + tv) = \frac{(2\langle \nabla u_1, \nabla v \rangle + 2t\|\nabla u_1\|^2)\|u_1 + tv\|^2 - (2\langle u_1, v \rangle + 2t\|v\|)\|\nabla(u_1 + tv)\|^2}{\|u_1 + tv\|^4},$$

tomando $t = 0$

$$\frac{d}{dt} I(u_1 + tv)|_{t=0} = \frac{(2\langle \nabla u_1, \nabla v \rangle)\|u_1\|^2 - 2\langle u_1, v \rangle \|\nabla(u_1)\|^2}{\|u_1\|^4}.$$

Como $\lambda_1 = \frac{\|\nabla u_1\|^2}{\|u_1\|^2}$, obtemos

$$\frac{d}{dt} I(u_1 + tv)|_{t=0} = \frac{(2\langle \nabla u_1, \nabla v \rangle) - 2\lambda_1 \langle u_1, v \rangle}{\|u_1\|^2}.$$

Isso implica em $\langle \nabla u_1, \nabla v \rangle = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle$, ou seja $\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v = \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 v$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, portanto, segue da Segunda fórmula de Green Generalizada A.2.12 $-\Delta u_1 = \lambda u_1$.

Passo 3 - Obteremos os demais autovalores e mostraremos que eles formam uma sequência com limite infinito.

Suponhamos por hipótese de indução que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}$ e $u_1, u_2, \dots, u_{j-1}$ sejam autovalores e autofunções de $-\Delta$, respectivamente, isto é, satisfazem as seguintes condições (i), (ii) e (iii) do enunciado deste Teorema.

Defina

$$V_j \doteq \{v \in H_0^1(\Omega) : \langle v, u_i \rangle = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, j-1\} \quad (1.7)$$

e $\lambda_j = \inf_{u \in V_j} I(u)$. Assim $\lambda_j \geq \lambda_i$, para $i = 1, 2, \dots, j-1$, pois o ínfimo está sendo tomado sobre um espaço menor, donde temos o item (i).

Observe que V_j é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, considere uma sequência $\{x_n\}$ em V_j tal que $x_n \rightarrow x \in H_0^1(\Omega)$. Dado qualquer $z \in \overline{[u_1, u_2, \dots, u_{j-1}]}$ teremos que $\langle x_n, z \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, z \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle = 0,$$

portanto $x \in V_j$, o que prova que V_j é subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$. Desta forma, V_j é um espaço de Hilbert com a norma induzida pelo produto interno de $H_0^1(\Omega)$. Segue pelos mesmos argumentos anteriores usados em $H_0^1(\Omega)$ para obter $u_j \in V_j$, tal que $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_j$ e assim

$$\int_{\Omega} \nabla u_j \nabla v = \lambda_j \int_{\Omega} u_j v, \quad \forall v \in V_j.$$

Sendo verdadeira também para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, pois pelo **Teoremas da Soma Direta**, (Teorema 3.3-4, pág 146, [19]), todo $v \in H_0^1(\Omega)$ pode ser escrito de forma única como $v = y + z$ com $y \in \overline{[u_1, u_2, \dots, u_{j-1}]}$, $z \in V_j$. Assim, basta provar que a igualdade é válida para qualquer $y \in \overline{[u_1, u_2, \dots, u_{j-1}]}$.

Segue do produto interno de $W_0^{1,2}(\Omega)$ que, se $\int_{\Omega} uy = 0$ então $\int_{\Omega} \nabla u \nabla y = 0$, logo

$$\int_{\Omega} \nabla u_j \nabla v = \lambda_j \int_{\Omega} u_j v \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Isto é, u_j é solução fraca de $-\Delta u_j = \lambda_j u_j$, e pela definição de V_j temos que $\{u_j\}$ é uma sequência de autofunções ortonormais.

Vejamos agora que $\lambda_j \rightarrow \infty$. Supondo por absurdo que $\lambda_j \rightarrow \lambda_0$, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, obtemos uma sequência de autofunções $\{u_k\}$ associadas aos autovalores $\{\lambda_k\}$, com $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_k \rightarrow \lambda_0$. Portanto $\{u_k\}$ é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Pelo Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (A.1.8), a menos de uma subsequência,

$u_k \rightarrow u$ quando $k \rightarrow \infty$. O que é um absurdo pois, como $\{u_k\}$ é uma sequência ortonormal, ou seja:

$$\|u_k - u_l\|^2 = \|u_k\|^2 + \|u_l\|^2 = 2.$$

Como queríamos $\lambda_j \rightarrow \infty$, uma vez que vale (ii).

□

Utilizaremos sistema ortogonais completos quando associamos ao resultado que garante que os sistemas ortogonais completos formam uma espécie de “base” para um espaço vetorial. Segue o resultado.

Teorema 1.5.6. *Seja Ω um aberto com suave em $\mathbb{R}^n$. O operador Laplaciano Δ é ilimitado.*

Demonstração. Considere os autovalores e as autofunções obtidos no Teorema 1.5.5 ,

$$\Delta u_j = \lambda_j u_j, \quad \|u_j\| = 1, \quad \lambda_j \rightarrow \infty.$$

Como $\|\Delta u_j\|_{L^2(\Omega)} = \lambda_j \|u_j\|_{L^2(\Omega)}$, a ilimitação de Δ segue de

$$\frac{\|\Delta u_j\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}} = \lambda_j \rightarrow \infty,$$

segue o resultado. □

Lema 1.5.7 (Livro [6], Teorema 5.3.10, página 119). *Seja V um espaço de Hilbert. Se $S = \{x_i : i \in I\}$ é um sistema ortonormal completo, então para cada $v \in V$ podemos escrever*

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, x_i \rangle x_i.$$

Teorema 1.5.8. *O conjunto de autofunções $\{u_j\}$ do operador Laplaciano Δ , definido no Teorema (1.5.5), compõem um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$, ou seja, dado qualquer $v \in L^2(\Omega)$ podemos escrever*

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, u_j \rangle u_j.$$

Demonstração. Considere o conjunto

$$S = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \text{ é solução fraca de } -\Delta u = -\lambda u \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Queremos mostrar que S forma um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$.

Para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$ e $k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$v_k = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i.$$

Considere $w_k = v - v_k$, então para $i \leq k$, temos

$$\langle w_k, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i, u_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (1.8)$$

pelo item (iii) do Teorema 1.5.5.

Além disso, como u_i é uma solução fraca de (1.4), obteremos

$$\langle \nabla u_i, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_i \langle u_i, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle v - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i, v - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Usando que $v = w_k + v_k$, temos

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i, w_k + v_k \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle v_k, v_k \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned} \langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\nabla v\|^2 - \|\nabla v_k\|^2 \end{aligned}$$

e isso nos dá a seguinte desigualdade

$$\|\nabla w_k\|^2 \leq \|\nabla v\|^2.$$

Segue de (1.8), que $w_k \in V_{k+1}$, sendo V_{k+1} definido em (1.7) do Teorema 1.5.5. Desta forma vale

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_{k+1} \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$

e então,

$$\|w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Portanto

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k + w_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} u_i.$$

Portanto $[u_i : i \in \mathbb{N}]$ é um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$.

□

CAPÍTULO 2

Teoria de Semigrupos de operador limitados

Sabemos que, em Equações Diferenciais Ordinárias a solução de uma equação linear autônoma

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

é um *fluxo*, ou seja, a solução denotada por $\phi(t, u_0)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\phi(0, u_0) = u_0$;
2. $\phi(t + s, u_0) = \phi(t, \phi(s, u_0))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Tais propriedades motivam a definição do conceito de *semigrupo*. Observe o seguinte problema.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \\ T(0) = I \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear definido em espaços de Banach e a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é o operador solução do problema acima. Assim o objetivo deste Capítulo é estudar a teoria de semigrupos de operadores lineares limitado.

Queremos entender sob quais condições, em relação o operador A , podemos garantir a existência e unicidade de soluções. Para isso, estudaremos os Teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillipis. Além disso, definiremos **semigrupos analíticos** e estabeleceremos uma relação entre os semigrupos e seu gerador infinitesimal.

O conteúdo deste Capítulo se baseou nas notas de aula [7] e [10], na dissertação de mestrado [29] e no livro [33].

2.1 Semigrupos de operadores limitados

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Um **semigrupo** de operadores lineares limitados em X é uma família*

$$\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$$

tal que

i) $T(0) = I$ onde I é o operador identidade em X .

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Além disso,

*iii) Se $\|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ diremos que o semigrupo é **uniformemente contínuo**.*

*iv) Se $\|T(t)x - x\|_X \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ diremos que o semigrupo é **fortemente contínuo** ou **C^0 -semigrupo**.*

Nosso primeiro exemplo será referente ao caso em que o operador A do problema de valor inicial (2.1) é limitado.

Exemplo 2.1.2 ([29], Teorema 1.2.). *Suponhamos que o operador A do problema de valor inicial (2.1) seja limitado. Segue que o operador solução deste problema é um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ uniformemente contínuo, dado por*

$$T(t)x = e^{At}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!}. \quad (2.2)$$

Além disso, o operador A deve estar definido em todo X , ou seja, $D(A) = X$.

As demonstrações sobre a convergência da série e do operador soluções ser um semigrupo uniformemente contínuo pode ser encontrada nas Notas de Aula [7] no Exemplo 2.1.1. e no livro [29], Teorema 1.2.

Em um contexto mais geral, podemos lidar com Equações Diferenciais Lineares, como dada por (2.1), em que o operador A não será limitado. Nem sempre as soluções serão um semigrupo uniformemente contínuo como em (2.2), contudo a teoria de semigrupo nos auxiliará nessa questão.

Observe que, se o semigrupo é uniformemente contínuo então também é fortemente contínuo. Por isso, focaremos na caso dos semigrupos fortemente contínuos.

Exemplo 2.1.3. Considere $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ o espaço de Banach formado pelas funções uniformemente contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$ munido da norma

$$\|u\| \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$

Em $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$, defina a seguinte aplicação para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{C}_u(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}_u(\mathbb{R}) \\ u &\mapsto T(t)u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto T(t)u(x) = u(t+x) \end{aligned}$$

Então $\{T(t), t \geq 0\}$ é uma família de operadores lineares limitados de norma igual a 1.

De fato, $\|T(t)u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t+x)| = \|u\|$, logo $T(t)$ é um operador linear de norma igual a 1 para todo $t \geq 0$.

É fácil ver que a aplicação que a aplicação $t \mapsto T(t)$ é um semigrupo. Verificaremos, agora, que essa aplicação é um semigrupo fortemente contínuo. Da continuidade uniforme de u , dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um δ com $t < \delta$ tal que $\|u(t+s) - u(s)\| < \epsilon$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, donde $\|T(t)u - u\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Dado um semigrupo de operadores limitados $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ uniformemente contínuo, ou fortemente contínuo, podemos estabelecer uma relação com um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ caracterizando-o em função do semigrupo, tendo a seguinte definição.

Definição 2.1.4. Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu **gerador infinitesimal** é o operador definido por $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

Apresentaremos agora, resultados sobre os semigrupos fortemente contínuos que serão importante para o desenvolvimento deste estudo.

Teorema 2.1.5. Se $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Então existem $M \geq 1$ e β tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{t\beta}.$$

Além disso, para qualquer $l > 0$ podemos escolher $\beta = \frac{1}{l} \log \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e então escolher M .

Demonstração. Note que existe um $\eta > 0$ tal que

$$\sup_{s \in [0, \eta]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \quad (2.3)$$

De fato, para cada sequência $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ em $(0, \infty)$, com $t_n \rightarrow 0^+$, a sequência $\{T(t_n)x\}_{n=1}^\infty$ é limitada para todo $x \in X$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, a sequência $\{\|T(t_n)\|\}_{n=1}^\infty$ é limitada e temos a desigualdade (2.3). Tomando $C > 1$ tal que

$$C > \sup_{s \in [0, \eta]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}$$

e escolhendo os números positivos $l > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\beta \geq \frac{1}{l} \log \|T(l)\|_{\mathcal{L}(X)}$, que é equivalente a

$$\|T(l)\| \leq e^{\beta l}. \quad (2.4)$$

Para $t \geq 0$, podemos escrever $t = nl + s$ com $s \in [0, \eta]$, pela propriedade de semigrupo e a desigualdade (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(nl + s)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(l)^n T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|T(l)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{nl\beta} C \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como $nl\beta < nl\beta + l\beta + \beta s$ ao tomar $M := Ce^{l\beta} > 1$, por (2.5) obtemos

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{nl\beta + l\beta + \beta s} = Ce^{l\beta} e^{\beta(nl+s)} = Ce^{l\beta} e^{\beta t} = Me^{\beta t}$$

e a afirmativa segue. □

Corolário 2.1.6. Para qualquer $x \in X$ a aplicação $0 \leq t \mapsto T(t)x$ é contínua para $(0, \infty)$

Demonstração. Sejam $t, h > 0$ teremos

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|, \end{aligned}$$

e para $t \geq h \geq 0$

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\|, \end{aligned}$$

segue o resultado. □

O seguinte lema é importante para obter certa regularidade de semigrupos, mais precisamente, lida com continuidade da **derivada a direita** de uma função real, ou seja, dada $\phi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que ϕ possui derivada a direita em $c \in [a, b)$, que denotamos por $D^+(c)$, se o limite

$$D^+\phi(c) = \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{\phi(t) - \phi(c)}{t - c}$$

existir. Se ϕ possui derivada a direita em todo $c \in [a, b)$, dizemos que ϕ é diferenciável a direita no intervalo $[a, b)$.

A demonstração do próximo lema foi tirada do livro [29], Lema 1.1, e Corolário 1.2 da página 42.

Lema 2.1.7. *Seja ϕ uma função contínua e diferenciável a direita no intervalo $[a, b)$. Se $D^+\phi$ é contínua em $[a, b)$, então ϕ é continuamente diferenciável em $[a, b)$.*

Demonstração. A ideia desta demonstração é definir uma função $x(t)$ continuamente diferenciável e mostrar que $\phi(t) = x(t)$.

Seja $\phi(t)$ uma função contínua e diferenciável a direita em $[a, b)$. Vamos dividir esta demonstração em três passos, a ideia desta demonstração é definir uma função $x(t)$ continuamente diferenciável e mostrar que $\phi(t) = x(t)$.

Passo 1: No caso em que $\phi(a) = 0$ e $D^+\phi(t) < 0$ com $t \in (a, b)$, teremos $\phi(t) \leq 0$ em $[a, b)$. Com efeito, assumindo que $D^+\phi(t) < 0$ para todo $t \in (a, b)$ e supondo por absurdo que exista $t_1 \in (a, b)$ tal que $\phi(t_1) > 0$. Tome $t_0 = \inf\{t \in (a, b) : \phi(t) > 0\}$, pela continuidade de ϕ segue que $\phi(t_0) = 0$. Da definição de t_0 , podemos construir uma sequência $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $t_n \rightarrow t_0^+$ e $\phi(t_n) > 0$. Assim,

$$D^+\phi(t_0) = \lim_{t_n \rightarrow t_0^+} \frac{\phi(t_n) - \phi(t_0)}{t_n - t_0} \geq 0$$

o que é um absurdo pois estávamos no caso em que $D^+\phi(t) < 0$ em $t \in (a, b)$. Portanto, neste caso devemos $\phi(t) \leq 0$ em $t \in [a, b)$.

Passo 2: Consideramos o caso em que $\phi(a) = 0$ e $D^+\phi(t) \leq 0$ para todo $t \in [a, b)$. Dado $\epsilon > 0$ e $t \in (a, b)$, considere a função $\phi_\epsilon(t) = \phi(t) - \epsilon(t - a)$. Então $\phi_\epsilon(a) = 0$ e $D^+\phi_\epsilon(t) = D^+\phi(t) - \epsilon \leq -\epsilon < 0$. Pela primeira parte desta demonstração concluímos que $\phi_\epsilon(t) \leq 0$ para todo $t \in [a, b)$, ou seja, $\phi(t) = \phi_\epsilon(t) + \epsilon(t - a) \leq \epsilon(t - a)$. Como $\epsilon > 0$ foi dado arbitrariamente, concluímos que $\phi(t) \leq 0$ para todo $t \in [a, b)$.

Passo 3: Considere ϕ nas hipóteses deste Lema. Defina $x(t) = \phi(a) + \int_a^t D^+\phi(\tau) d\tau$ para $t \in [a, b)$. Então a função $x(t)$ é claramente continuamente diferenciável em $[a, b)$. Tomando $\omega(t) = x(t) - \phi(t)$ para $t \in [a, b)$, então $\omega(a) = 0$ e $D^+\omega(t) = 0 \leq 0$ em $[a, b)$, ou seja, ω e $-\omega$ satisfazem as hipóteses do Passo 2, logo $\omega(t) = 0$ em $[a, b)$. Portanto $\phi = x$ e o resultado segue.

□

Exemplo 2.1.8. *A partir do Lema (2.1.7) encontraremos o gerador infinitesimal do semigrupo do exemplo (2.1.3). Denote por $A: D(A) \subset C_u(\mathbb{R}) \rightarrow C_u(\mathbb{R})$ o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)u(x) = u(t + x)$ do exemplo citado. Se $u \in D(A)$, temos que $Au = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h}$ e este limite existe na norma uniforme. Por outro lado,*

$$(Au)(s) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h + s) - u(s)}{h} = D^+u(s),$$

onde o limite existe na norma uniforme. Portanto D^+u existe e é uniformemente contínua. Do Lema anterior, $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua. Reciprocamente, se $u \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ e $\frac{du}{dt}$ existe e é uniformemente contínua, do Teorema do Valor Médio, dado $h > 0$ existe $\epsilon_{t,h} \in (t, t+h)$ tal que

$$\frac{T(h)u(t) - u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(\epsilon_{t,h}) - \frac{du}{dt},$$

como

$$\epsilon_{t,h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} t$$

a continuidade uniforme de $\frac{du}{dt}$ garante que o $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h}$ existe uniformemente, logo $u \in D(A)$ e $Au = \frac{du}{dt}$. Portanto, caracterizamos o domínio de A como $D(A) = \{u \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R}) : \frac{du}{dt} \text{ existe e é uniformemente contínua}\}$. E para $u \in D(A)$ teremos que $Au = \frac{du}{dt}$.

Os resultados seguintes dão uma caracterização útil aos semigrupos fortemente contínuos. Dado um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ qualquer, garantimos que esse semigrupo é contínuo para qualquer t . Além disso, seu gerador infinitesimal está bem definido em X , e possui domínio não nulo.

Teorema 2.1.9 (Livro [29], Teorema 2.4, página 4). *Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados e A seu gerador infinitesimal. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(1) Para qualquer $x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$$

(2) Para qualquer $x \in X$, $\int_t^{t+h} T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x$$

(3) Seja A gerador infinitesimal de $T(t)$ então A é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$ a aplicação $0 \leq t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

(4) Para $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(\tau)x = \int_t^\tau T(s)Ax ds = \int_t^\tau AT(s)x ds$$

Segue do Teorema acima que o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores é densamente definido e fechado.

Corolário 2.1.10 (Livro [29], Corolário 2.5, página 6). *Seja A um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$. Então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

O próximo resultado nos mostra que as iteradas do operador A estão bem definidas e possuem domínio denso em X . Este resultado é demonstrado na Nota de Aula [7] no Teorema 2.2.3. e no livro [29] Teorema 2.7.

Teorema 2.1.11 ([29], Teorema 2.7, página 6). *Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Então $\bigcap_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em X .*

Observe que, se o operador A do Problema de Valor Inicial (2.1) for gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então este semigrupo é o operador solução do problema. Isto segue do item 3 do Teorema (2.1.9). Nosso próximo resultado garantirá que esta solução é única.

Teorema 2.1.12. *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados em X com geradores geradores infinitesimais A e B respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $x \in D(A) = D(B)$. Sabemos que a aplicação $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)B(s)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portando, a aplicação $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante, em particular seu valores para $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, isto é, $T(t)x = S(t)x$. Segue da densidade de $D(A)$ e da limitação do operador $T(t)$ para todo $t \geq 0$,

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

□

O próximo resultado mostra que o **operador resolvente** $(\lambda - A)^{-1}$ pode ser expresso em função do semigrupo $T(t)$.

Teorema 2.1.13 (Livro [34], Corolário 1, página 241). *Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ do Teorema 2.1.5, então λ está no resolvente $\rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in X.$$

2.2 Teorema de Hille-Yosida

Nesta seção, vamos investigar sob quais condições um operador é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Assim saberemos que, para este operador, o problema descrito na equação (2.1) possui solução única, o que nos motiva a estudar os seguintes resultados:

Teorema 2.2.1 (Hille-Yosida). *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, então os fatos seguintes são equivalentes.*

i) A é gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|T(t)\| \leq e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

ii) A é um operador fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém (β, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \beta}, \quad \forall \lambda > \beta.$$

Demonstração. Que i) implica em ii) segue do Corolário 2.1.10 e do item (3) do Teorema (2.1.9), em particular

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \|x\|, \text{ se } \lambda > \omega.$$

Agora provaremos que ii) implica em i), note que a família de operadores dada por $T(t)_1 \doteq T(t)e^{-\omega t}$ é um semigrupo com $\|T(t)_1\| \leq 1$, chamado de **semigrupo de contrações**, e o gerador de $T(t)_1$ é o operador $A - I\omega$. Logo, é suficiente tratar o caso $\omega = 0$. Vamos dividir essa demonstração em três passos.

Passo 1. Definir os operadores limitados $A_\lambda : X \rightarrow X$ pondo

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1},$$

chamados de **aproximações de Yosida**, e mostrar que para cada $x \in D(A)$ temos $A_\lambda x \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} Ax$ em X .

Para $\lambda > 0$, temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \lambda(\lambda - A)^{-1} = I + A(\lambda - A)^{-1}.$$

A partir da igualdade acima, para $x \in D(A)$, pela desigualdade (2.9), temos

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\|_X = \|(\lambda - A)^{-1}Ax\|_X \leq \frac{\|Ax\|}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Uma vez que, $D(A)$ é denso X na norma $\|\cdot\|_X$, temos

$$\lambda(\lambda - A)^{-1}x \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} x, \text{ para cada } x \in X. \quad (2.6)$$

Observe que, para $x \in D(A)$, temos pelo item (4) do Teorema 2.1.13, que

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1}Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)x dt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x dt\right) = A(\lambda - A)^{-1}x \end{aligned} \quad (2.7)$$

Usando (2.6) e (2.7), temos

$$A_\lambda x = \lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} Ax,$$

em X .

Para a limitação das aproximações de Yosida, ou seja, $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, sabemos que $A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I$, ou seja, $\frac{A_\lambda}{\lambda} \in \mathcal{L}(X)$ implicando em $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$. Além do mais, temos para $x \in X$

$$\|A(\lambda - A)^{-1}x\| = \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x - x\| \leq \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\| + \|x\| \leq 2\|x\|,$$

donde

$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\lambda A(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2\lambda,$$

especificando a norma de cada operador A_λ

Passo 2 Como o operador A_λ é limitado, segue do Exemplo (2.1.2) que

$$e^{tA_\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_\lambda^n t^n}{n!}$$

é um semigrupo uniformemente contínuo e A_λ é seu gerador infinitesimal. Provaremos que o limite $e^{tA_\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} T(t)$ converge em $\mathcal{L}(X)$. Note que podemos escrever

$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I,$$

logo,

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2(\lambda - A)^{-1}}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\frac{1}{\lambda}} = 1. \quad (2.8)$$

Pela identidade do resolvente (1.2.6), dados $\lambda, \mu > 0$,

$$A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda. \quad (2.9)$$

Além disso

$$\frac{d}{ds}e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu} = tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu} - tA_\mu e^{t(1-s)A_\mu}e^{tsA_\lambda}$$

$$= te^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda - A_\mu).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x)\|_X ds \\ &\leq t \|(A_\lambda x - A_\mu x)\|_X. \end{aligned}$$

Portanto $\{e^{tA_\lambda}x\}_{\lambda=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em X , e denotamos o seu limite por

$$T(t)x \doteq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x \quad (2.10)$$

existe uniformemente para $0 \leq t \leq t_0$, para qualquer $t_0 > 0$.

Passo 3. Provaremos que $T(t)$ definido pela equação (2.10) é um semigrupo.

1. Seja $x \in X$ então

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Ix = x.$$

2. Seja $x \in X$ então

$$T(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} e^{sA_\lambda}x,$$

por outro lado

$$T(t)T(s)x = T(t) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(t)e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} e^{sA_\lambda}x \right),$$

assim

$$T(t)T(s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} e^{sA_\lambda}x.$$

Portanto

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x \quad \forall x \in X \text{ ou seja } T(t+s) = T(t)T(s).$$

Passo 4. Provar que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo e A é seu gerador infinitesimal.

Observe que $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é contínuo para $t \geq 0$, e devido a unicidade do limite, podemos definir de forma única $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ para cada $t \geq 0$.

Além disso, segue da equação (2.8) que $\|T(t)x\| \leq \|x\|$. Para verificar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$, seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$ dado, podemos encontrar $x_1 \in D(A)$ e $\delta > 0$, tais que $\|x - x_1\| \leq \frac{\epsilon}{3}$ e $\|T(t)x_1 - x_1\| < \frac{\epsilon}{3}$, para $t \in [0, \delta]$. Assim, para todo $t \in [0, \delta]$,

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t)(x - x_1)\| + \|T(t)x_1 - x_1\| + \|x - x_1\| < \epsilon,$$

o que implica em $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$.

Se $x \in D(A^2)$, então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$ e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}Ax = T(t)Ax$. Sabemos que, se $x \in D(A_\lambda)$, então

$$e^{tA_\lambda}A_\lambda x = A_\lambda e^{tA_\lambda}x,$$

tomando $\lambda \rightarrow \infty$ teremos que o $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A e^{tA_\lambda}x$ existe, como o operador A é fechado então $T(t)x \in D(A)$. Além disso $T(t)Ax = AT(t)x$.

Agora vamos provar que o operador A é gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$. Para qualquer $\lambda > 0$ sabemos que o operador A_λ é gerador infinitesimal do semigrupo e^{tA_λ} . Segue que

$$\frac{d}{dt}e^{tA_\lambda}x = A_\lambda e^{tA_\lambda}x, \quad (2.11)$$

integrando e aplicando a parte (4) do Teorema 2.1.9, teremos

$$e^{tA_\lambda}x - x = \int_0^t A_\lambda e^{sA_\lambda}x ds. \quad (2.12)$$

Portanto, segue das equações (2.11), (2.12) e da definição do semigrupo $T(t)$ que, para qualquer $x \in D(A)$ teremos

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t A_\lambda e^{sA_\lambda}x ds = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax) ds + \int_0^t e^{sA_\lambda}Ax ds \right). \quad (2.13)$$

Segue da equação (2.8) que $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$ então

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax) ds \right\| &\leq \int_0^t \|e^{sA_\lambda}\| \|A_\lambda x - Ax\| ds \\ &\leq \int_0^t \|A_\lambda x - Ax\| ds \\ &= t \|A_\lambda x - Ax\|. \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ temos que $A_\lambda x \rightarrow Ax$, donde segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax) ds = 0. \quad (2.14)$$

Agora note que

$$\left\| \int_0^t e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax ds \right\| \leq \int_0^t \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| ds.$$

Considere a família de funções dada por $F_\lambda(s) = \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\|$. Temos que $F_\lambda \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Além disso, $F_\lambda(s) \leq 2\|Ax\|$, logo $F_\lambda \in L^1([0, t])$.

Pelo teorema da **Convergência Dominada de Lebesgue** teremos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \|e^{sA_\lambda} Ax - T(s)Ax\| ds = 0. \quad (2.15)$$

Assim, das equações (2.13), (2.14) e (2.15), obtemos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax ds,$$

multiplicando por $\frac{1}{t}$ teremos

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds.$$

Segue do teorema 2.8. que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = T(0)Ax = Ax$$

Seja B o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, segue que $B|_{D(A)} = A$. Seja $\mu \in \rho(A)$ e $u \in D(B)$, então

$$v = (\mu - A)^{-1}(\mu - B)u \in D(A)$$

e

$$(\mu - A)v = (\mu - A)(\mu - A)^{-1}(\mu - B)u = (\mu - B)u,$$

o que implica em

$$(\mu - A)v = (\mu - B)u \implies \mu v - Bv = \mu u - Bu \implies (\mu - B)(v - u) = 0.$$

Segue da injetividade do operador $(\mu - B)$ que $v = u$. Portanto $D(B) \subset D(A)$, assim $D(B) = D(A)$. Logo $B = A$. $\square$

2.3 Operadores dissipativos e o Teorema de Lummer-Phillips

O próximo resultado envolverá algumas hipóteses, mais fáceis de se verificar, que garantem que o operador A seja gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. Mas primeiro precisamos definir mais uma classe de operadores, os operadores dissipativos em espaços de Banach. Para isso, precisamos da aplicação dualidade.

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. A **aplicação dualidade** $J : X \mapsto 2^{X^*}$ é uma função multiunívoca definida por*

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re}\langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2, \|x\|_X = \|x^*\|_{X^*}\}.$$

Observe que $J(x) \neq \emptyset$. De fato, seja $\|x\| = \alpha$ e defina $\psi : [x] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(tx) = t\alpha^2$. Então $\psi \in [x]^*$ e $\|\psi\|_{[x]^*} = \|x\|$, segue do **Teorema de Hahn-Banach** A.1.3 que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*|_{[x]} = \psi$ para todo $y \in [x]$ e $\|x^*\| = \|\psi\|$.

Observação 2.3.2. Dado $x^* \in X^*$, é comum encontrarmos na literatura, a notação $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$ para todo $x \in X$. Tal notação será utilizada em algumas demonstrações.

Teorema 2.3.3. Se H é um espaço de Hilbert e $x \in H$ então $J(x) = \{x\}$, ou seja, o único funcional é dado por $x^*(y) = \langle x, y \rangle$ para todo $y \in H$.

Demonstração. Sabemos que todo espaço de Hilbert H é uniformemente convexo e que o espaço dual H^* também é um espaço de Hilbert, portanto H^* é uniformemente convexo. Seja $x \in H$ e $a, b \in J(x)$ então, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\|a - b\|}{\|x\|} \geq 2\epsilon \implies \frac{\|a + b\|}{2\|x\|} \leq 1 - \delta < 1,$$

logo

$$\|a + b\| < 2\|x\|.$$

Por outro lado,

$$\langle a + b, x \rangle = \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle \implies \operatorname{Re} \langle a + b, x \rangle = 2\|x\|_X^2$$

então

$$\|a + b\| \cdot \|x\| \geq |\langle a + b, x \rangle| \geq 2\|x\|^2 \implies \|a + b\| \geq 2\|x\|,$$

o que é um absurdo. Segue que $a = b$. Note que o operador $x^*(y) = \langle y, x \rangle$ é tal que $x(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ e $\|x\|_{X^*} = \|x\|_X$ concluindo o resultado. $\square$

Definição 2.3.4. Seja X um espaço de Banach. Chamaremos o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ de **dissipativo** quando para cada $x \in D(A)$ temos $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, para algum $x^* \in J(x)$.

Lema 2.3.5. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, com X um espaço de Banach. O operador A será dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \|\lambda x\|, \text{ para todo } x \in D(A) \text{ e } \lambda > 0.$$

Demonstração. Se A é dissipativo, $\lambda > 0$, $x \in D(A)$, $x^* \in J(x)$ e $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ então, segue que

$$\|(\lambda - A)x\| \|x\| \geq |\langle (\lambda - A)x, x^* \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle (\lambda - A)x, x^* \rangle \geq \lambda \|x\|^2.$$

Assim $\|(\lambda - A)x\| \geq \|\lambda x\|$. Reciprocamente, seja $x \in D(A)$ e suponha $\|(\lambda - A)x\| \geq \|\lambda x\|$ para todo $\lambda > 0$. Tome $y_\lambda^* \in J(\lambda x - Ax)$ e denote por $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$, assim $\|z_\lambda^*\| = 1$.

Observe que

$$\lambda \|x\|^2 \leq \|\lambda x - Ax\|^2 = \langle \lambda x - Ax, y_\lambda^* \rangle \leq \|\lambda x - Ax\| \|y_\lambda^*\| = \|\lambda x - Ax\|^2$$

e

$$\langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle = \frac{1}{y_\lambda^*} \langle \lambda x - Ax, y_\lambda^* \rangle = \frac{\|\lambda x - Ax\|^2}{\|\lambda x - Ax\|} = \|\lambda x - Ax\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle = \lambda \operatorname{Re} \langle x, z_\lambda^* \rangle - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &= \leq \lambda \|x\| - \operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle. \end{aligned}$$

Segue as seguintes relações

$$\operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0 \text{ e } \operatorname{Re} \langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| + \frac{\operatorname{Re} \langle Ax, z_\lambda^* \rangle}{\lambda}.$$

Sendo a bola unitária de X^* compacta na topologia fraca*, temos que existe uma sequência $z_{\lambda'}$ que converge para algum $z^* \in X^*$ com $\|z^*\| \leq 1$. Tomando $\lambda' \rightarrow \infty$ teremos

$$\operatorname{Re} \langle Ax, z^* \rangle \leq 0 \text{ e } \operatorname{Re} \langle x, z^* \rangle \geq \|x\|.$$

Como $\operatorname{Re} \langle x, z' \rangle \leq \|x\|$, então $\operatorname{Re} \langle x, z' \rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = z^* \|x\|$, teremos $x^* \in J(x)$ e $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto, dado qualquer $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, logo o operador A é dissipativo. □

O seguinte resultado nos mostra que o operador Laplaciano é dissipativo.

Proposição 2.3.6. *Seja Ω um aberto com fronteira suave em $\mathbb{R}^n$. O operador Laplaciano Δ é dissipativo.*

Demonstração. Sabemos que $\sigma(\Delta) \subset \mathbb{R}$ e que, se $\lambda \in \sigma(\Delta)$ então $\lambda \leq 0$. Além disso

$$\langle \Delta u, u \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, \phi_j \rangle \phi_j, \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, \phi_j \rangle^2 \leq 0.$$

Portanto, o operador Δ é dissipativo. □

Teorema 2.3.7 (Lumner-Phillips). *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X .*

- i) *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é fechado, densamente definido, dissipativo e $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*
- ii) *Se A é dissipativo e $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Demonstração. Para o item **i)**, segue diretamente do Teorema de Hille-Yosida que, se o operador A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, então A é fechado, densamente definido e $\text{Im}(\lambda - A) = X$. Além disso, para qualquer $x \in X$, $x^* \in J(x)$, $t > 0$, temos

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|x^*\|_{X^*} \|T(t)x\|_X \leq \|x\|_X^2,$$

então

$$\text{Re} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle = \frac{1}{t} \{ \text{Re} \langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|_X^2 \} \leq 0$$

e tomando $t \rightarrow 0$ e $x \in D(A)$, teremos $\text{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto A é dissipativo.

Agora, para o item **ii)**, provaremos que todas as hipóteses do teorema de Hille-Yosida estão verificadas, e por isso o operador A será gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, ou seja, verificaremos que A é fechado e $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Como A é dissipativo, pelo Lema 2.3.5, sabemos que, se $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, então

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X.$$

Uma vez que, $\|(\lambda_0 - A)x\|_X \geq \lambda_0 \|x\|_X$ e $\text{Im}(\lambda_0 - A)x = X$ temos que, λ_0 pertence ao conjunto resolvente, pois para qualquer $y \in X$ existe $x \in D(A)$ tal que $(\lambda_0 - A)x = y$ e assim

$$\|y\| \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 - A)^{-1}y\|.$$

Como $(\lambda_0 - A)$ é o inverso de um operador limitado, então este operador também é fechado. Logo A é fechado. Considere o conjunto $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$, observe que Λ é aberto em $(0, \infty)$, pois $\rho(A)$ é aberto. Provaremos que Λ é fechado em $(0, \infty)$, e assim $\Lambda = (0, \infty)$, implicando em $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Note que, se $\lambda \in \Lambda$ então, o operador $\lambda - A$ é sobrejetor. De fato, como X é um espaço de Banach e $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador limitado, este operador leva sequências convergentes em sequências convergentes, e como $(\lambda - A)$ é fechado, segue da densidade de $\text{Im}(\lambda - A)$ em X que $\text{Im}(\lambda - A) = X$.

Suponha, agora, uma sequência $\{\lambda_n\}$ em Λ , com $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$. Segue da sobrejetividade do operador $\lambda_n - A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que dado qualquer $y \in X$ podemos tomar uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$(\lambda_n - A)x_n = y.$$

Pela dissipatividade do operador A temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| \leq \frac{\|y\|}{\lambda_n} \leq C \text{ para algum } C > 0.$$

Além disso,

$$\lambda_n \|(x_n - x_m)\| \leq \|\lambda_n(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\|.$$

Somando e subtraindo y e $[(\lambda_m x_m - A(x_m)) - (\lambda_n x_n - A(x_n))]$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_n \|(x_n - x_m)\| &\leq |\lambda_n - \lambda_m| \|x_m\| \\ &\leq \|y\| \leq C |\lambda_n - \lambda_m|. \end{aligned}$$

Assim, se $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy. Como X é um espaço de Banach, podemos tomar $x_n \rightarrow x$ em X , e assim teremos $\lambda x - Ax = y$, donde segue a sobrejetividade do operador $(\lambda - A)$. Logo $\lambda \in \Lambda$, donde Λ é fechado em $(0, \infty)$. $\square$

Corolário 2.3.8. *Seja A um operador fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então $(0, \infty) \subset \rho(A)$, e*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Consequentemente, A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Demonstração. Do Teorema anterior, basta provar que $\text{Im}(I - A) = X$. Como o operador A é dissipativo e fechado, temos que $\text{Im}(I - A)$ é um subespaço fechado de X . Seja $x^* \in X^*$ tal que $\langle (I - A)x, x^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$, então

$$\langle x, x^* \rangle = \langle Ax, x^* \rangle \implies A^*x^* = x^*,$$

donde $x^* \in D(A^*)$ e $(I^* - A^*)x^* = 0$. E pela dissipatividade do operador A^* temos que $x^* = 0$. Portanto $\text{Im}(I - A)$ é densa em X e como também é fechado, concluímos que $\text{Im}(I - A) = X$. $\square$

Segue das Proposições 1.1.4, 1.5.4, 2.3.6, que o operador Laplaciano é densamente definido, auto-adjunto (e portanto fechado) e dissipativo. Assim concluímos o operador Laplaciano é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Assim, o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u = \Delta u \\ u(0) = u \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

possuirá solução para $u \in D(A)$.

Teorema 2.3.9. *O operador Laplaciano Δ é gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo*

$$e^{\Delta t}f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j. \quad (2.16)$$

Demonstração. Do Teorema 1.5.5 podemos definir um conjunto ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ como $S = \{\phi_j \in L^2(\Omega) : \Delta \phi_j = -\lambda_j \phi_j \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \phi_j \perp \phi_i \text{ para } j \neq i\}$ assim, para todo $u \in D(\Delta)$ e $f \in L^2(\Omega)$ teremos

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{\infty} -\lambda_j \langle u, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \phi_j \text{ e } x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \phi_j.$$

Defina os operadores uma família de operadores $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ tal que

$$A_n x = \sum_{j=1}^n -\lambda_j \langle x, \phi_j \rangle \phi_j,$$

entao teremos que:

- i) $A_n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii) dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ o operador A_n será dissipativo, por isso A_n gerador infinitesimal de um semigrupo (uniformemente contínuo) de contrações, denotado por
$$T_n(t)x = e^{tA_n}x = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j;$$
- iii) $u \in D(\Delta)$ teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n u = \Delta u$;
- iv) dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$ teremos que operador $A_m - A_n$ é dissipativo.

Analogamente ao **Passo 2** da demonstração do Teorema 2.2.1 teremos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)x = T(t)x.$$

existe.

Analogamente aos Passos **3** e **4** da demonstração do Teorema 2.2.1, podemos concluir que o operador Laplaciano é gerador infinitesimal do semigrupo

$$T(t)x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \langle x, \phi_j \rangle \phi_j$$

□

Por fim, definiremos duas classes de semigrupos, os **semigrupos compactos** e os **semigrupos diferenciáveis** e enunciaremos resultados, relacionados com seu gerador infinitesimal.

Definição 2.3.10. *Seja $t_0 > 0$, dizemos que um C^0 -semigrupo $\{T(t) : t > 0\}$ é **compacto** para $t > t_0$ se $T(t)$ é um operador compacto para cada $t > t_0$. Se $t_0 = 0$, dizemos simplesmente que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é compacto.*

Teorema 2.3.11 ([29], Teorema 3.3, página 48). *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C^0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então $\{T(t) : t > 0\}$ é compacto se, e somente se, a aplicação $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínua para $t > 0$ e o operador resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Definição 2.3.12. *Seja $t_0 > 0$, dizemos que um C^0 -semigrupo $\{T(t) : t > 0\}$ é **diferenciável para $t > t_0$** se $T(t)$ é um operador compacto para cada $t > t_0$. Se $t_0 = 0$, dizemos simplesmente que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **diferenciável**.*

Teorema 2.3.13 ([29], Lema 4.2, página 52). *Seja $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um C^0 -semigrupo diferenciável para $t \geq t_0$ e A seu gerador infinitesimal, então*

- i) *para $t > nt_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ $T(t)X \subset D(A^n)$ e $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ é um operador linear limitado;*
- ii) *para $t > nt_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ $T^{(n-1)}(t)$ é contínuo na norma do espaço $\mathcal{L}(X)$.*

2.4 Transformada inversa de Laplace

Nosso objetivo nesta seção é estabelecer uma relação entre um semigrupo de operadores limitados e seu operador infinitesimal, os resultados contidos aqui se baseiam na dissertação de mestrado [33] e no livro [29]. Pelo Teorema 2.1.13 sabemos que

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

e isso nos sugere que, usando a transformada inversa de Laplace e sendo conhecido o operador A como um gerador infinitesimal de um semigrupo, podemos exibir o semigrupo $T(t)$ em termos de A .

Teorema 2.4.1 ([29], Corolário 1.7.5, página 29). *Suponha que A seja o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$. Se $\gamma > \max\{0, \beta\}$, $x \in D(A^2)$ e $t > 0$ então*

$$T(t)x = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - mi}^{\gamma + mi} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda.$$

Além disso, para cada $0 < \epsilon < 1$, o limite acima é uniforme no intervalo $[\epsilon, \epsilon^{-1}]$.

Teorema 2.4.2 ([29], Corolário 1.7.7, página 30). *Seja A um operador densamente definido, satisfazendo as seguintes condições.*

1. *Assuma que existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que*

$$\rho(A) \subseteq \Lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}.$$

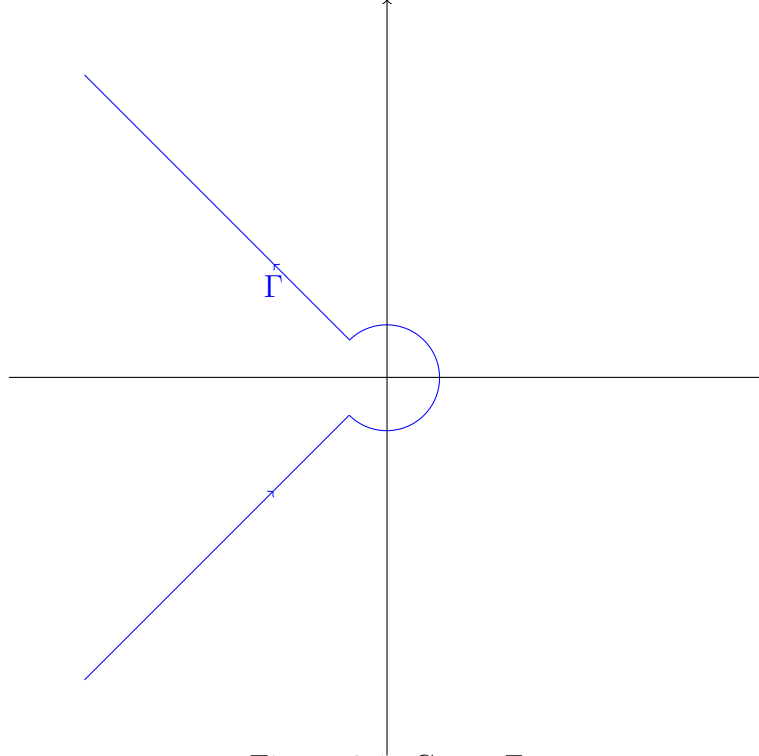
2. *E existe uma contante M tal que*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda}, \text{ para todo } \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0.$$

Então A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| < C$ para alguma constante. Além disso

$$T(t) = \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \tag{2.17}$$

onde Γ é a curva que consiste dos raios $\{\lambda : |\arg \lambda| = \phi, \text{ e } |\lambda| > r\}$, e do arco $\{\lambda : |\lambda| = r, |\arg \lambda| \leq \phi\}$ para r pequeno e $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$ orientada no sentido da parte imaginária crescente, como na figura abaixo, converge, para $t > 0$, na norma do espaço $\mathcal{L}(X)$.

Figura 2.1: Curva Γ

A demonstração deste resultado pode ser encontrada nas notas de aulas [7] (Teorema 5.3.4) e na dissertação de mestrado [33] (Teorema 1.5). As duas demonstrações utilizam a analiticidade do integrando em Λ e a Fórmula da integral de Cauchy, utilizando uma curva fechada e diferenciável por partes como na figura acima. Além disso, a dissertação [33] mostra que $T(t)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados, o mesmo é feito no livro [29] no Teorema 2.5.2. Isto nos leva a introduzir o conceito de **Semigrupos Analíticos** e estudar sua relação com Operadores Setoriais.

Observação 2.4.3. *Seja $\epsilon > 0$, a aplicação $t \mapsto T(t)$ é contínua em $\mathcal{L}(X)$ para $t \geq \epsilon$, pois a integral (2.17) converge uniformemente.*

2.5 Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Para iniciar essa seção precisamos definir o conceito de operadores setoriais.

Definição 2.5.1 (Operadores setoriais). *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e densamente definido. Chamaremos o operador A de **setorial** se satisfizer as seguintes condições.*

Para algum $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ o setor

$$S_{\alpha, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg(\lambda - \alpha)| \leq \pi, \alpha \neq \theta\}$$

estiver contido no conjunto resolvente de A e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \alpha|}, \quad \forall \lambda \in S_{\alpha, \theta}.$$

Proposição 2.5.2. *Todo operador limitado em espaço de Banach é setorial.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach, B um operador limitado em X e $\frac{\pi}{6} < \theta \leq \pi$. Defina o setor

$$S_{2\|B\|, \theta} = \{-2\|B\| + te^{i\theta} : t \geq 0\}.$$

Sabemos que, o conjunto $\sigma(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| \leq \|B\|\}$, então $S_{2\|B\|, \theta} \subset \rho(B)$. Além disso, para todo $\lambda \in S_{2\|B\|, \theta}$, teremos

$$\frac{\|B\|}{\lambda} \leq \frac{1}{2},$$

o que garante a convergência da seguinte série

$$(\lambda - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{\lambda^{n+1}},$$

obtendo a desigualdade

$$\begin{aligned} \|(\lambda - B)^{-1}\| &\leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}\|B\|} \\ &= \frac{1}{\lambda - \|B\|}. \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados desta desigualdade por $|\lambda + 2\|B\||$, teremos

$$|\lambda| + 2\|B\| \|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{|\lambda + 2\|B\||}{|\lambda| - \|B\|} \leq C$$

para $C = \sup \left\{ \frac{|\lambda + 2\|B\||}{|\lambda| - \|B\|} : \lambda \in S_{2\|B\|, \theta} \right\}$. Observe que $C < \infty$, pois

1. a função real $f(x) = \frac{x + 2\|B\|}{x - \|B\|}$, para $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq \|B\|$, possui derivada negativa no eixo real;
2. função real f possui assintota vertical em 1 quando $x \rightarrow \infty$;
3. para $x > 2\|B\|$ teremos $4 \geq f(x) \geq 1$.

Segue da desigualdade $\frac{|\lambda + 2\|B\||}{|\lambda| - \|B\|} \leq f(|\lambda|)$ para $|\lambda| \geq 2\|B\|$, assim, $C \leq \infty$.

Portanto temos a equação

$$\|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda + 2\|B\||}. \quad (2.18)$$

portanto, concluimos que todo operador limitado em espaços de Banach é setorial.

□

Agora, provaremos que o operador Δ é setorial. Para isso definiremos o conceito de **imagem numérica**, o mesmo e os resultados seguintes estão nas Notas de Aula [10].

Seja A um operador linear em um espaço de Banach complexo X a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) \doteq \{\langle Ax, x^* \rangle : x \in D(A), x^* \in X^*, \|x\| = \|x^*\| = \langle x, x^* \rangle = 1\}.$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert obtemos,

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Teorema 2.5.3. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, um operador fechado e densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A .*

1. *Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetivo e tem a imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq d(\lambda, W(A))\|x\|, \quad (2.19)$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \quad (2.20)$$

2. *Se Σ é um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus W(A)$ e $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\Sigma \subset \rho(A)$ e desigualdade 2.20 é satisfeita para todo Σ .*

Demonstração. Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x, x^* \rangle = 1$ então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leq |\lambda - \langle Ax, x^* \rangle| = |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \leq \|\lambda x - Ax\|, \quad (2.21)$$

portanto o operador $\lambda - A$ é injetivo e a desigualdade (2.19) esta satisfeita. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$ então (2.21) implica em (2.20).

Resta mostrar que, se Σ intercepta $\rho(A)$ então $\Sigma \subset \rho(A)$. Observe que o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma$ é aberto em Σ , mas também é fechado. De fato, considere a sequência $\{\lambda_n\}$ em $\rho(A) \cap \Sigma$ com $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \Sigma$. Isso implica que, para n suficientemente grande teremos $\|\lambda - \lambda_n\| \leq d(\lambda, W(A))$. Disto e de (2.20), segue que para n suficientemente grande, $\|\lambda - \lambda_n\| \|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1$ segue do Teorema 1.2.5 que $\lambda \in \rho(A)$, portanto $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em Σ . Segue $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$ e assim $\Sigma \subset \rho(A)$. □

Proposição 2.5.4. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) : X \rightarrow X$ um operador linear auto-adjunto. Segue que A é fechado e densamente definido. Se A é limitado superiormente; isto é $\langle Ax, x \rangle \leq a \langle x, x \rangle$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

para alguma contante $M \geq 1$ dependendo somente ψ e para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \psi\}$ com $\psi < \pi$.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\} \subset (-\infty, a].$$

Uma vez que os operadores $A - a = A^* - a$ são dissipativos segue do corolário 2.3.8, que $(0, \infty) \subset \rho(A - a)$. Do Teorema (2.5.3) temos que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])}$$

Além disso, se $\lambda \in \Sigma_{a,\phi}$, temos que

$$\frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leq \frac{1}{\sin(\psi)|\lambda - a|}$$

o resultado segue. □

Uma consequência direta desta proposição é o resultado seguinte.

Corolário 2.5.5. *Todo operador auto-adjunto A tal que $\langle Au, u \rangle \geq C \langle u, u \rangle$ para algum $C \geq 0$ é setorial.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição 2.5.4 que, existe $M > 1$ e $\psi < \pi$ tal que, se $-\lambda \in \Sigma_{-c,\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(-\lambda - (-c))| < \psi\}$ com $\psi < \pi$, teremos a desigualdade

$$\|(-\lambda - (-A))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - (-c)|}.$$

Uma vez que $\lambda \in \Sigma_{c,\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \psi \leq |\arg(\lambda - c)| \leq \pi\} \in \rho(A)$ e vale a desigualdade

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - c|},$$

segue que o operador A é setorial. □

Exemplo 2.5.6. *Seja A um operador um operador dissipativo e auto-adjunto, então $-A$ é setorial. O que nos permite concluir que o operador $-\Delta$ é setorial.*

Definição 2.5.7. *Considere o setor $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$ com $\phi_1 \leq 0 \leq \phi_2$. Uma família de operadores limitados $\{T(z) : z \in \Lambda\}$ é dita um **semigrupo analítico** quando*

i) a aplicação $\Lambda \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(X)$ é analítica.

ii) $T(0) = I$ e $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ para cada $x \in X$.

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para $z_1, z_2 \in \Lambda$.

Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ será dito **analítico** se possuir uma extensão a um semigrupo analítico em um setor que contém o eixo real positivo. Como a multiplicação de um semigrupo fortemente contínuo $T(t)$ por $e^{\beta t}$ não afeta a possibilidade de estendê-lo, podemos nos restringir ao caso de semigrupos fortemente contínuos e uniformemente limitados. Isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Além disso, é possível que $0 \in \rho(A)$, onde A é gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Claramente a restrição de um semigrupo analítico é um C^0 -semigrupo, contudo estamos interessando no problema oposto. Ou seja, sob quais condições um C^0 -semigrupo pode ser estendido a um semigrupo analítico. Nesta direção considere o seguinte resultado.

Teorema 2.5.8 ([29], Teorema 2.5.2 página 61). *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo e uniformemente limitado, A seu gerador infinitesimal e assumamos que $0 \in \rho(A)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O semigrupo pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Lambda_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitada em cada subsector fechado de $\overline{\Lambda'_\delta}$, $\delta' < \delta$ de Λ_δ .*

(b) *Existe uma constante C tal que para cada $\sigma > 0$ e $\tau \neq 0$ temos*

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) *Existem $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, e $M > 0$ tal que*

$$\rho(A) \supset \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\} \text{ e}$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ para todo } \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0.$$

(d) *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é diferenciável e existe uma constante C tal que*

$$\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{t} \text{ para todo } t > 0.$$

Deste Teorema podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 2.5.9. *O operador A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, se e somente se, o operador $-A$ é setorial.*

Demonstração. Observe que

$$\lambda \in \rho(A) \implies -\lambda \in \rho(-A)$$

logo, se A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico então, existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, e tal que

$$\rho(A) \supset \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$$

logo o operador $-A$ é setorial.

Por outro lado, se $-A$ é setorial, existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, e tal que

$$\rho(A) \supset \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$$

segue do teorema anterior que o semigrupo pode ser estendido para um semigrupo analítico em um setor $\Lambda_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uniformemente limitada em cada subsetor fechado de $\overline{\Lambda'_\delta}$, $\delta' < \delta$ de Λ_δ , portanto $T(t)$ é um semigrupo analítico.

□

Observação 2.5.10. Sabemos que o operador $-\Delta$ setorial, portanto, o operador Δ gera um semigrupo é analítico.

CAPÍTULO 3

Sistemas de difusão: problema linear

Neste Capítulo, vamos usar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores e as propriedades do operador Laplaciano para estudar o problema de difusão proposto no artigo [26]. Na primeira seção, vamos apresentar o modelo para compreender as notações envolvidas além de propriedades básicas. Na segunda seção do Capítulo nos dedicamos a provar o principal Teorema do artigo supracitado sobre a geração de um semigrupo analítico para o operador em questão.

3.1 Apresentação da equação

Considere o problema linear de difusão descrito a seguir

$$\begin{cases} u_t = M\Delta u, & t > 0 \\ u(t, x) = 0 & \text{sobre } x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde:

- o conjunto Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave;
- M uma matriz $N \times N$, não necessariamente diagonalizável

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Observe que na equação (3.1), a função u toma valores no $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^+ \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x_1, \dots, x_n) &\mapsto (u^1(t, x), \dots, u^N(t, x)), \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, e $u^1, \dots, u^N$ são as funções coordenadas. Neste contexto, portanto, Δu representa o seguinte vetor em $\mathbb{R}^N$

$$\Delta u = (\Delta u^1, \dots, \Delta u^N),$$

onde para cada $j = 1, \dots, N$, como habitualmente,

$$\Delta u^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u^j}{\partial x_i^2}.$$

Expandindo a notação, podemos reescrever a equação (3.1) da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ \vdots \\ u_t^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u^1 \\ \Delta u^2 \\ \vdots \\ \Delta u^N \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1.1. Considere o seguinte problema, com $\beta > 0$

$$\begin{cases} u_{tt} - 2\beta \Delta u_t + \Delta^2 u = 0 & x \in \Omega, t > 0 \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Essa equação é a parte linear do modelo que aparece no estudo de vibrações não lineares amortecidas de corda ou vigas, para mais detalhes veja o o artigo [32]. Neste trabalho, estudaremos a versão não-linear dessa equação no Capítulo 5.

Tomando $w = \Delta u$ e $v = u_t$ o sistema de difusão torna-se

$$\begin{cases} w_t = \Delta v \\ v_t = -\Delta w + 2\beta \Delta v. \end{cases}$$

Observe que, podemos reescrever esse sistema nos molde de (3.1), ou seja, da forma

$$\begin{cases} z_t = \mathbf{M} \Delta z & x \in \Omega, t > 0 \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\text{com } z = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, \Delta z = \begin{pmatrix} \Delta w \\ \Delta v \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\beta \end{pmatrix}.$$

Na sequência, vamos fixar as seguintes notações:

i) $X = L^2(\Omega)^N$ é o espaço de funções com quadrado integrável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\Omega} (u_1 \overline{v_1} + \dots + u_N \overline{v_N}).$$

ii) $\{\lambda_j\}$ são os autovalores do operador $-\Delta$ e satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \quad \text{e} \quad \lambda_j \rightarrow +\infty.$$

iii) $\{\phi_j\}$ são autofunções do operador $-\Delta$ associados a cada λ_j , respectivamente, isto é,

$$\Delta \phi_j + \lambda_j \phi_j = 0.$$

iv) Operador $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$ é dado por

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}\Delta,$$

$$\text{onde } D(\mathbf{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^N.$$

O problema (3.1) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\mathbf{A}u, \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)^N. \end{cases}$$

Além disso, como o operador Laplaciano Δ é densamente definido, ou seja, $\overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} = L^2(\Omega)$, e também é fechado, então o operador $\mathbf{A}$ também possui estas propriedades em X , isto é:

P1. O operador $\mathbf{A} = -\mathbf{M}\Delta$ é fechado e densamente definido.

Logo, uma maneira de garantir a existência e unicidade de soluções é impor condições sobre a matriz $\mathbf{M}$ que torne o operador $\mathbf{A}$ setorial, consequentemente, $-\mathbf{A}$ será um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. E ainda, é sabido que a solução é dada pelo semigrupo.

No restante do texto, vamos assumir a seguinte hipótese

H1. Todos os autovalores da matriz $\mathbf{M}$ possuem parte real positiva.

Consequentemente, $\mathbf{M}$ é inversível.

Observação 3.1.2. Nos Teoremas (1.5.5) e 1.5.8, definimos um conjunto de autofunções do operador Laplaciano que forma um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$. Considere o conjunto

$$\mathcal{B}_{\Delta}^i \doteq \left\{ \underbrace{(0, 0, \dots, \phi, \dots, 0)}_{N \text{ vezes}} : \phi \text{ é uma autofunção de } \Delta \right\}.$$

Onde, na coordenada i se encontra uma autofunção de $-\Delta$ e as outras coordenadas nulas. Então o conjunto $\mathcal{B} \doteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_{\Delta}^i$ é um sistema ortonormal completo de $(L^2(\Omega))^N$.

Para provar que o operador é **A** setorial, precisamos de alguns resultados técnicos.

Proposição 3.1.3. *Sejam E um espaço de Banach, B um operador limitado definido em E e $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dado pela Proposição (2.5.2). Se o setor*

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg \lambda| \leq \pi\}$$

está contido conjunto $\rho(B)$, então existe uma contante $C > 0$ tal que

$$\|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in S_\theta.$$

Demonstração. Defina o operador limitado $\tilde{B} \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\tilde{B} = -2\|B\|I + B.$$

Desta forma, dado $\lambda \in \rho(B)$ teremos $(\lambda - 2\|B\|) \in \rho(\tilde{B})$. Assim o setor $S_{2\|B\|, \theta}$ esta contido no resolvente de $\tilde{B}$, ou seja,

$$S_{2\|B\|, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg(\lambda - 2\|B\|)| \leq \pi\} \subset \rho(\tilde{B}).$$

Além disso, da proposição 2.5.2, o operador $\tilde{B}$ é setorial e segue da equação (2.18) que existe um C tal que, se $\mu \in \rho(\tilde{B})$ então

$$\|(\mu - \tilde{B})^{-1}\| \leq \frac{C}{|\mu - (-2\|\tilde{B}\|)|}$$

donde

$$\begin{aligned} \|(\lambda - B)^{-1}\| &= \|(\lambda - 2\|B\| - (-2\|B\| + B))^{-1}\| = \|((\lambda - 2\|B\|) - \tilde{B})^{-1}\| \\ &\leq \frac{C}{|(\lambda - 2\|B\|) - (-2\|\tilde{B}\|)|} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda - 2\|B\| - (-2\|B\| + \|B\|)|} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda - 2\|B\| + 2\|B\|}| \leq \frac{C}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.4. *Suponha que a matriz $\mathbf{M}$ satisfaça a (H1). Então existe $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que para todo autovalor λ de $\mathbf{M}$ temos $|\arg \lambda| < \theta$.*

Demonstração. Sejam $m_1, \dots, m_n$ autovalores da matriz $\mathbf{M}$, podemos escrever $m_k = p_k e^{i\theta_k}$ com $k = 1, \dots, n$. Como todo autovalor tem parte real positiva então, $\theta_k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para todo k . Tome $\theta > \max\{|\theta_k| : k = 1, \dots, n\} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Assim os autovalores m_k da matriz M são tais que $|\arg(m_k)| < \theta$. Como na figura abaixo, os todos os autovalores pertencem ao setor S_{-1} entre θ e $-\theta$. □

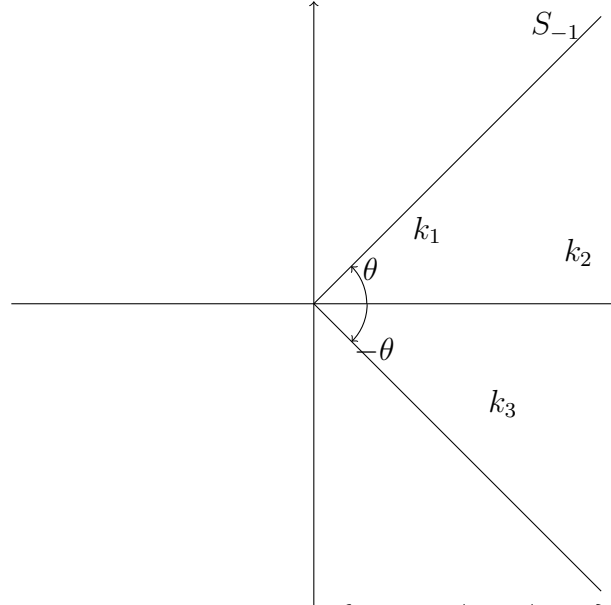


Figura 3.1: Setor $S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \theta\}$.

Com, k_1, k_2, k_3 são exemplos de autovalores pertencentes ao setor S_{-1} .

Teorema 3.1.5. *Suponhamos que todos os autovalores da matriz $\mathbf{M}$ (não necessariamente diagonalizável) possuem parte real positiva. Então o operador $\mathbf{A}$ é setorial e, portanto, $-\mathbf{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Seja $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obtido no Proposição 3.1.4, ou seja, tal que $|\arg \lambda| < \theta$ para todo autovalor λ de $\mathbf{M}$, defina o seguinte setor $S = \{z \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg z| \leq \pi, z \neq 0\}$.

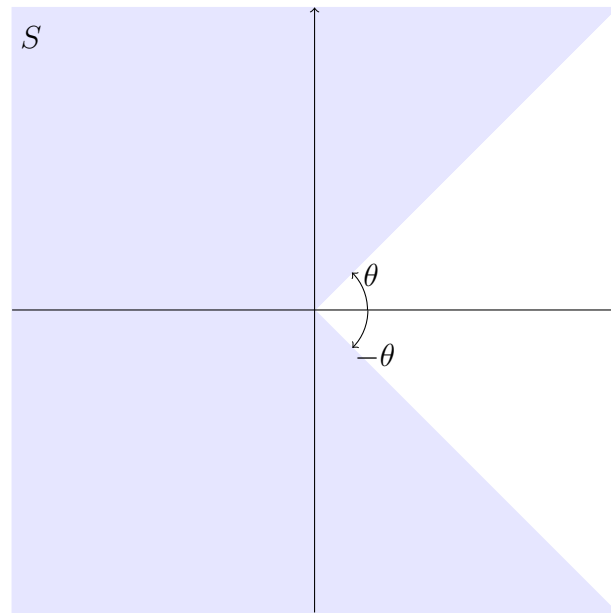


Figura 3.2: Setor $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg \lambda| \leq \pi\}$.

Vamos provar que $S \subset \rho(\mathbf{A})$ e que existe uma constante $C > 0$ tal que, para algum $z \in S$,

tenhamos

$$\|(z - \mathbf{A})^{-1}\| \leq \frac{C}{|z|}.$$

Como $\mathbf{A}$ é fechado, para obter $S \subset \rho(\mathbf{A})$, basta provar que para todo $z \in S$ o operador $(z - \mathbf{A})$ é bijetivo, isto é, dada $f \in X$ existe u tal que $(z - \mathbf{A})u = f$. Com esse intuito, sejam $(\lambda_j, \phi_j)_{j=1}^\infty$ os autovalores e as autofunções associadas, respectivamente, de $-\Delta$ em Ω .

Note que, se $z \in S$ então $(z - \lambda_j \mathbf{M})$ é inversível para $j \geq 1$, pois, como $\lambda_j > 0$ então

$$\frac{z}{\lambda_j} = \frac{r}{\lambda_j} e^{i\phi} \text{ com } \theta \leq |\phi| \leq \pi.$$

Assim, $\frac{z}{\lambda_j}$ não é autovalor da matriz $\mathbf{M}$ portanto, a matriz $(z - \lambda_j \mathbf{M})$ é inversível. Segue da proposição 3.1.3, como $\mathbf{M}$ é um operador limitado e $S \subset \rho(\mathbf{M})$, que, existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{z}{\lambda_j} - \mathbf{M} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{C}{|z|} \lambda_j, \quad \forall j \geq 1,$$

multiplicando os dois lados dessa desigualdade por $\frac{1}{\lambda_j}$ teremos

$$\|(z - \lambda_j \mathbf{M})^{-1}\| \leq \frac{C}{|z|}, \quad \forall j \geq 1. \quad (3.2)$$

Para $z \in S$ e $f \in X$, definimos

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (z - \lambda_j \mathbf{M})^{-1} f_j \phi_j,$$

onde $f_j = \int_{\Omega} f(x) \phi_j(x) dx \in \mathbb{R}^N$. Por (3.2) segue então que

$$\|u\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{\|z\|} \langle f_j, \phi_j \rangle \phi_j \right\| = \frac{C}{\|z\|} \|f\|,$$

ou seja, u está bem definido.

Note que

$$\begin{aligned} (z + \mathbf{M}\Delta)u &= zu + \mathbf{M}\Delta u = \sum_{j=1}^{\infty} z(z - \lambda_j \mathbf{M})^{-1} f_j \phi_j - \lambda_j (z - \lambda_j \mathbf{M})^{-1} f_j \phi_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (z - \lambda_j \mathbf{M})(z - \lambda_j \mathbf{M})^{-1} f_j \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \phi_j = f. \end{aligned}$$

Como queríamos $z - \mathbf{A}$ é bijetivo para todo $z \in S$ e portanto $S \subset \rho(\mathbf{A})$. Consequentemente $u = (z - A)^{-1}f$, além disso obtemos a estimativa que queríamos para o operador resolvente:

$$\|(z - A)^{-1}\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|(z - A)^{-1}f\| \leq \frac{C}{\|z\|} \quad \forall z \in S.$$

Decorre que o operador A é setorial e $-A$ é gerador de um semigrupo analítico. $\square$

Observe que, dado autovalor μ da matriz $\mathbf{M}$, como $Re(\mu) > 0$ então o operador A^{-1} está bem definido, segue que $0 \in \rho(A)$.

Lema 3.1.6. *O operador $\mathbf{A}^{-1}$ é compacto, onde $\mathbf{A} = -\mathbf{M}\Delta$.*

Demonstração. Observe que $\mathbf{A}^{-1}u = -\Delta^{-1}\mathbf{M}^{-1}u$ para todo $u \in (L^2(\Omega))^N$. Tomando uma sequência $\{u_n\}_n^\infty$ limitada em $(L^2(\Omega))^N$, então a sequência $\{\mathbf{M}^{-1}u_n\}_n^\infty$ será limitada em $(L^2(\Omega))^N$. Da compacidade do operador Δ^{-1} teremos que a sequência $\{\Delta^{-1}\mathbf{M}^{-1}u_n\}_n^\infty$ possui subsequência convergente. Portanto o operador $-\Delta^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ é compacto. $\square$

Proposição 3.1.7. *O espectro do operador $\mathbf{A} = -\mathbf{M}\Delta$ é caracterizado da seguinte forma*

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma(\mathbf{M}).$$

Demonstração. Sabemos que μ pertence ao espectro de $\mathbf{A}$ se, e somente se, a equação

$$\begin{cases} \mathbf{M}\Delta u + \mu u = 0 \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

possui solução não trivial em $L^2(\Omega)^N$. Escrevendo

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \phi_j,$$

onde $u_j = \int_{\Omega} u(x) \phi_j(x) dx \in \mathbb{R}^N$, segue do sistema acima que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} \lambda_j u_j \phi_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} u_j \phi_j = 0 \implies \sum_{j=1}^{\infty} (\mu - \lambda_j \mathbf{M}) u_j \phi_j = 0,$$

como $\{\phi_j\}_1^\infty$ é um conjunto ortogonal completo $(\mu I - \lambda_j \mathbf{M})u_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots$. Assim (3.3) possui solução não trivial se, e somente se, $(\mu I - \lambda_j \mathbf{M})u_j = 0$ para algum $j \geq 1$, isto é,

$$\det(\mu I - \lambda_j \mathbf{M}) = 0 \text{ para algum } j \geq 1.$$

Portanto, $\mu \in \sigma(A)$ se, e somente se, $\mu = \lambda_j m_k$, onde m_k é autovalor da matriz $\mathbf{M}$, para algum $k = 1, \dots, N$ e $j \geq 1$. Ou seja:

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sigma(\mathbf{M}) \text{ com } \lambda_j > 0 \text{ para todo } j = 1, 2, \dots$$

$\square$

Corolário 3.1.8. *O semigrupo $\{e^{-\mathbf{A}t} : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é compacto e existem constantes $C \geq 1$ e $\delta > 0$ tal que*

$$\|e^{-\mathbf{A}t}\| \leq C e^{-\delta t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demonstração. Da observação 2.4.3, e da compacidade do operador $\mathbf{A}^{-1}$ temos que o semigrupo $\{e^{-\mathbf{A}t} : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é compacto. Agora, basta provar a desigualdade

$$\|e^{-\mathbf{A}t}\| \leq Ce^{-\delta t} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Como $0 \in \rho(\mathbf{A})$ e o resolvente de um operador é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ então, existe um $\delta > 0$ tal que para o conjunto $S_\delta \doteq \{\lambda + \delta : \lambda \in S\}$ temos

$$S_\delta \cup \{0\} \subset \rho(\mathbf{A}).$$

Note que $S \in \rho(A - \delta)$ e além disso para $z \in S$ existe $C > 0$ tal que,

$$\|(z - (\mathbf{A} - \delta))^{-1}\| = \|(z + \delta - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|z + \delta|} \leq \frac{C}{|z|}.$$

Logo o operador $(\mathbf{A} - \delta)$ é setorial, e o operador $(\delta - \mathbf{A})$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}((L^2(\Omega))^N)$, e pelo Teorema 2.5.8 teremos $\|S(t)\| \leq C$.

Por outro lado, $S(t) = e^{\delta t}T(t)$ para $t \geq 0$, onde $T(t) = e^{-\mathbf{A}t}$ o semigrupo gerado pelo operador $-\mathbf{A}$. De fato, basta mostrar que o gerador infinitesimal do semigrupo $e^{t\delta}T(t)$ é o operador $(\delta - \mathbf{A})$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h\delta}T(h)x - x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{h\delta}T(h)x - e^{0\delta}T(h)x + e^{0\delta}T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[T(h) \frac{e^{h\delta} - 1}{h} x + e^{0\delta} \frac{T(h) - I}{h} x \right] \\ &= \delta - \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Segue que

$$e^{\delta t}T(t) = e^{\delta t}\|T(t)\| = \|S(t)\| \leq C$$

e concluimos que $\|e^{-\mathbf{A}t}\| \leq Ce^{-\delta t}$. □

Por fim, podemos expressar o semigrupo gerado por $\mathbf{A}$, que é solução do problema linear, como

$$e^{\mathbf{M}\Delta t}f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j \mathbf{M}t} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j. \quad (3.4)$$

CAPÍTULO 4

Sistemas de reação difusão: semilinear

Nosso objetivo neste Capítulo é estudar um resultado de existência e unicidade de soluções, locais e globais, para equações do tipo

$$\begin{cases} u_t = Au + f(u), & t > 0 \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e o operador A é setorial. Sabemos que para todo operador setorial A , o operador $-A$ sempre é gerador de um semigrupo analítico. Desta forma, precisamos compreender a relação que existe entre operadores setoriais e a existência e unicidade de soluções, globais e locais da equação

$$u_t = Au + f(u), \quad (4.2)$$

com condições de Dirichlet.

Para isso, dedicamos nossa primeira seção a estudar potência fracionárias de operadores setoriais.

4.1 Potências fracionárias de operadores setoriais.

Dedicamos essa seção ao estudo de potências fracionários para operadores setoriais. Os resultados apresentados aqui foram adaptados do livro do [29], tratam de uma classe de operadores fechados. Uma função importante para a definição de operadores setoriais com potência fracionária é a função Gama.

Definição 4.1.1. *Seja $\alpha \geq 0$, chamamos de **função Gama** a função $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Gamma(\alpha) \doteq \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Segue algumas propriedades da função Gama, que podem ser visto com mais detalhes em [28], página 84.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt \text{ e } \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.3)$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\alpha+\epsilon)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\epsilon-1} dt, \quad \alpha, \epsilon > 0. \quad (4.4)$$

E para $\alpha, \beta > 0$, para $0 \leq s < t \leq T$.

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1} d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (4.5)$$

Seja A um operador linear setorial, tal que

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi \leq |\arg \lambda| \leq \theta\} \cup \{0\} \subset \rho(A), \text{ com } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

definiremos o seguinte operador

Definição 4.1.2. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial como $-A$ o gerador do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Definimos $A^{-\alpha} : X \rightarrow X$, para $\alpha \geq 0$, por*

$$A^{-\alpha}x = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t)x dt & \text{para } \alpha > 0 \\ Ix & \text{para } \alpha = 0. \end{cases}$$

Teorema 4.1.3 (Livro [29], Teorema 6.3, página 71). *Existe uma contante $C > 0$ tal que*

$$\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \text{ para } \alpha \in [0, 1]$$

Teorema 4.1.4 (Livro [16], Teorema 1.4.2, página 25). *Sejam A um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ (ou seja, a parte real de todos os elementos do espectro de A é maior que zero) e $\alpha, \beta > 0$. Então o operador $A^{-\alpha}$ é linear, limitado (para $0 \leq \alpha \leq 1$), injetivo e satisfaz as seguintes condições*

$$A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$$

e

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda, \quad \text{para } \alpha \in (0, 1).$$

Agora estamos aptos para definir o operador potência fracionária, e estudar alguns resultados.

Definição 4.1.5. *Seja $\alpha \geq 0$, o operador $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1} : D(A^\alpha) \subset X \rightarrow X$, onde $D(A^\alpha) = Im(A^{-\alpha}) = \{A^{-\alpha}x : x \in X\}$ é chamado de **operador potência fracionária** associado ao operador A .*

Teorema 4.1.6 (Livro [29], Teorema 6.8, página 72.). *Seja $\alpha > 0$ e A um operador setorial, então as seguintes propriedades são verificadas*

- i) A^α é fechado;
- ii) se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$;
- iii) $\overline{D(A^\alpha)} = X$;
- iv) se $\alpha, \beta \geq 0$ então $A^{\alpha+\beta}x = A^\beta A^\alpha x$ para $x \in D(A^\gamma)$ com $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Demonstração. i) Devemos mostrar que $G(A^\alpha)$ é fechado em $X \times X$ na norma usual de produto cartesiano em espaços de Banach. Sejam $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em $D(A^\alpha)$ com $u_n \rightarrow u$ e $A^\alpha(u_n) \rightarrow v$.

Observe que $w_n = A^\alpha u_n$ é equivalente a $A^{-\alpha} w_n = u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ então,

$$A^{-\alpha} v = u.$$

Assim, $G(A^\alpha)$ é fechado em $X \times X$.

- ii) Por hipótese, $\alpha - \beta \geq 0$ então

$$A^{-\alpha} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}$$

portanto $Im(A^{-\alpha}) \subset Im(A^{-\beta})$ que implica que $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

- iii) Sabemos que, se $\overline{D(A)} = X$ então $\overline{D(A^n)} = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $m \in \mathbb{N}$ com $\alpha \leq m$ teremos $D(A^m) \subset D(A^\alpha)$ o que implica em $\overline{D(A^\alpha)} = X$.

- iv) Seja $x \in D(A^\alpha A^\beta)$, então $x \in D(A^\beta)$ e $A^\beta x \in D(A^\alpha)$. Tome $y = A^\alpha A^\beta x$, então $A^{-\alpha} y = A^\beta x$ e $x = A^{-\alpha} A^{-\beta} y = A^{-(\alpha+\beta)} y$. Logo $x \in D(A^{(\alpha+\beta)})$ sabemos que

$$x = A^{-(\alpha+\beta)} y = A^{-\alpha} A^{-\beta} y.$$

Portanto $D(A^\alpha A^\beta) \subset D(A^{(\alpha+\beta)})$ e

$$A^{\alpha+\beta} x = y = A^\alpha A^\beta x.$$

Analogamente, se $x \in D(A^{(\alpha+\beta)})$, temos $x \in D(A^\alpha A^\beta)$ e

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta.$$

□

Teorema 4.1.7. *Sejam A um operador setorial e $\{T(t) \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ o semigrupo gerado pelo operador $-A$. As seguintes condições são verificadas.*

i) $T(t)X \subset D(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e $\alpha \geq 0$.

ii) $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$ para todo $t > 0$ e todo $x \in D(A^\alpha)$ e $\alpha > 0$.

iii) Para $t > 0$ e $\alpha > 0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e existe M_α tal que

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

iv) Para $\alpha \in (0, 1]$ existe C_α tal que

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \leq \|A^\alpha x\|.$$

Demonstração. i) Por hipótese, o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é analítico e portanto é diferenciável para $t > 0$. Do Teorema 2.3.13 temos a seguinte igualdade

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x \quad \forall x \in X$$

e $T(t)X \subset D(A^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $m \in \mathbb{N}$ com $m > \alpha$, então

$$T(t)X \subset D(A^m) \subset D(A^\alpha).$$

ii) Seja $x \in D(A^\alpha)$ e como A^α é invertível, existe $y \in X$ tal que $A^{-\alpha}y = x$. Da definição de $A^{-\alpha}$ teremos

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y \\ &= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(s)y ds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} T(t)T(s)y ds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y \\ &= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x. \end{aligned}$$

Portanto $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$.

iii) Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência em X com $u_n \rightarrow u$ e $A^\alpha T(t)u_n \rightarrow v$ quando $n \rightarrow +\infty$, como $T(t)$ é limitado e A^α é fechado, segue que $A^\alpha T(t)u = v$, logo o operador $A^\alpha T(t)$ é fechado. Por outro lado, segue do item i) que $D(A^\alpha T(t)) = X$, segue do **Teorema do gráfico fechado** que o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado. Além disso,

tomando $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha + 1$ segue que

$$\begin{aligned}
 \|A^\alpha T(t)\| &= \|A^{\alpha-n+n}T(t)\| = \|A^{\alpha-n}A^nT(t)\| \\
 &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}T(s)A^nT(t)ds \right\| \\
 &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}A^nT(s+t)ds \right\| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\|A^nT(s+t)\|ds \\
 &= \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}ds \\
 &\leq \frac{M_ne^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^n ds.
 \end{aligned}$$

uma vez que a exponencial é uma função crescente e $-\delta s < 0$. Por outro lado, fazendo a mudança $s = rt$ temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^n ds &= \int_0^\infty (rt)^{n-\alpha-1}t^{-n}(1+r)^{-n}dr \\
 &= \int_0^\infty r^{n-\alpha-1}t^{-(\alpha+1)}(1+r)^{-n}dr
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{M_ne^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}\left[t\left(1+\frac{s}{t}\right)\right]^n ds = \frac{M_ne^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha)t^\alpha} \int_0^\infty r^{n-\alpha-1}(1+r)^{-n}dr.$$

Como

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-(\alpha+1)}}{(1+r)}dr < \infty,$$

temos

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}.$$

iv) Sejam $x \in X$ e $\alpha \in (0, 1]$, segue do resultado anterior que

$$\begin{aligned}
 \|T(t)x - x\| &= \left\| \int_0^t AT(s)x ds \right\| \\
 &= \left\| \int_0^t A^{1-\alpha}T(s)A^\alpha x ds \right\| \\
 &\leq \int_0^t \|A^{1-\alpha}T(s)\| \|A^\alpha x\| ds \\
 &\leq C \int_0^t s^{\alpha-1} \|A^\alpha x\| ds \\
 &\leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.
 \end{aligned}$$

Completando a demonstração do teorema. □

4.2 Espaços de Potências Fracionárias.

Seja A um operador setorial com $0 \in \rho(A)$ e $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ o semigrupo analítico gerado pelo operador $-A$. Então, dado qualquer $\alpha > 0$, o operador A^α estará bem definido, e além disso, será fechado. O que nos leva a seguinte definição:

Definição 4.2.1. Para A um operador setorial e X um espaço de Banach, para cada $\alpha \geq 0$ definimos $X^0 = X$ e $X^\alpha \doteq D((A)^\alpha)$ munimos com a norma do gráfico

$$\|x\|_\alpha \doteq \|x\| + \|A^\alpha x\|.$$

Teorema 4.2.2. Para $\alpha > 0$, X^α é um espaço de Banach.

Demonstração. Por definição, $A^0 = I$, logo $X^0 = X$. Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em X^α , como A^α é fechado então existe $u \in X^\alpha$ tal que $u_n \rightarrow u$. Portanto $X^\alpha = (D(A^\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ é um espaço de Banach. $\square$

Na sequência, provaremos que

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} \doteq \|A^\alpha u\|_X, \forall u \in D(A^\alpha)$$

define uma norma em $D(A^\alpha)$ que é equivalente a norma $\|\cdot\|_\alpha$.

Proposição 4.2.3. Dado qualquer $u \in D(A^\alpha)$, $\|\cdot\|_{D(A^\alpha)}$ é uma norma em $D(A^\alpha)$ e é equivalente a $\|\cdot\|_\alpha$.

Demonstração. Primeiro provaremos que $\|\cdot\|_{D(A^\alpha)}$ é uma norma em $D(A^\alpha)$.

N1 $\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha u\|_X \geq 0$ pois $\|\cdot\|_X$ é uma norma em X . Além disso, segue da injetividade de A^α que

$$\|A^\alpha u\|_X = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

portanto $\|u\|_{D(A^\alpha)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

N2 $\|au\|_{D(A^\alpha)} = |a|\|u\|_{D(A^\alpha)}$, segue diretamente da linearidade do operador A^α .

N3 Dados $u, v \in D(A^\alpha)$ $\|u + v\|_{D(A^\alpha)} \leq \|u\|_{D(A^\alpha)} + \|v\|_{D(A^\alpha)}$. Segue da linearidade do operador A e do fato que $\|\cdot\|_X$ é uma norma em X .

Agora observe que

$$\|u\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha u\|_X \leq \|u\|_X + \|A^\alpha u\|_X = \|u\|_\alpha.$$

Por outro lado, sendo $A^{-\alpha}$ um operador limitado, existe $C > 0$ tal que $\|A^{-\alpha}v\|_X \leq C\|v\|_X$ para todo $v \in X$. Logo, para $v = A^\alpha u$, temos

$$\|u\|_\alpha \leq C\|A^\alpha u\|_X,$$

assim

$$\|u\|_\alpha \leq (1 + C)\|A^\alpha u\|_X = (1 + C)\|u\|_{D(A^\alpha)}.$$

Concluimos que as normas $\|\cdot\|_{D(A^\alpha)}$ e $\|\cdot\|_\alpha$ em $D(A^\alpha)$ são equivalentes. $\square$

Segue diretamente deste resultado que o espaço $D(A^\alpha) = (D(A^\alpha), \|\cdot\|_{D(A^\alpha)})$ é um espaço de Banach. A partir de agora, para simplificar a notação, iremos identificar o espaço X^α dotado da norma

$$\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\|_X.$$

4.3 Potência fracionária do operador Laplaciano.

Esta seção se baseia nos resultados do artigo [26] e na dissertação de mestrado [24].

Nosso objetivo agora é estudar o operador $(-\Delta)^\alpha$ para $\alpha \geq 0$ e em particular o operador $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} : D(\Delta^{\frac{1}{2}}) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, estudando seu domínio e formas de representação do operador com potência fracionária para posteriormente aplicar o resultados obtidos ao operador $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = -M\Delta^{\frac{1}{2}}$. Consideramos aqui a norma induzida pelo produto interno em $L^2(\Omega)$, nos casos em que o espaço esteja munido de outro norma, a mesma será definida no texto.

Como já vimos, o conjunto de autofunções $S = \{\phi_j, j \in \mathbb{N}\}$ o operador Laplaciano $-\Delta$ constitui um conjunto ortonormal completo do espaço $L^2(\Omega)$. Desta forma, qualquer $u \in L^2(\Omega)$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Além disso, para $u \in D(\Delta)$ podemos escrever a seguinte representação

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{\infty} -\lambda_j \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

sendo λ_j o autovalor associado a autofunção ϕ_j . Dessa representação segue que, para $u \in D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$ possamos escrever

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Nosso primeiro resultado prova essa afirmação.

Proposição 4.3.1. *Sejam $0 < \alpha < 1$, $v \in D(-\Delta^\alpha)$ e $S = \{\phi_j, j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ formado pelas autofunções do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet e $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ seus respectivos autovalores então*

$$(-\Delta)^\alpha v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Demonstração. O primeiro passo é demonstrar que para qualquer $j \in \mathbb{N}$, a autofunção ϕ_j de $-\Delta$ também é autofunção de $-\Delta^\alpha$, ou seja,

$$(-\Delta)^\alpha \phi_j = \lambda_j^\alpha \phi_j.$$

Como $D(-\Delta) \subset D((-\Delta)^\alpha)$ então $\phi_j \in D(-\Delta)^\alpha, \forall j \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$(\lambda I - \Delta)\phi_j = (\lambda + \lambda_j)\phi_j.$$

Por outro lado $[0, \infty) \subset \rho(\Delta)$ para qualquer $\lambda \in [0, \infty)$ então o operador $(\lambda I - \Delta)$ será inversível, assim,

$$(\lambda I - \Delta)^{-1}\phi_j = \frac{\phi_j}{\lambda + \lambda_j} \text{ para } j \geq 1.$$

Aplicando o Teorema 4.1.4 temos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-\alpha}\phi_j &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I - \Delta)^{-1}\phi_j d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} \frac{\phi_j}{\lambda + \lambda_j} d\lambda \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)\phi_j}{\pi\lambda_j} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}}{\frac{\lambda}{\lambda_j} + 1} d\lambda. \end{aligned}$$

Realizando a seguinte substituição $t = \frac{\lambda}{\lambda_j}$, teremos $\lambda_j dt = d\lambda$ e $(\lambda_j t)^{-\alpha} = \lambda^{-\alpha}$. Disto segue que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-\alpha}\phi_j &= \frac{\sin(\alpha\pi)\phi_j}{\pi\lambda_j} \int_0^\infty \frac{(\lambda_j t)^{-\alpha}\lambda_j}{t+1} dt \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)\lambda_j^{-\alpha}\phi_j}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{t+1} dt. \end{aligned}$$

Tomando $h = -\alpha + 1$ teremos que

$$(-\Delta)^{-\alpha}\phi_j = \frac{\sin(\alpha\pi)\lambda_j^{-\alpha}\phi_j}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{h-1}}{t+1} dt.$$

Pela equação (4.3) $\Gamma(h)\Gamma(1-h) = \int_0^\infty \frac{t^{h-1}}{t+1} dt$ segue que

$$(-\Delta)^\alpha\phi_j = \frac{\sin(\alpha\pi)\lambda_j^{-\alpha}\phi_j}{\pi} \Gamma(h)\Gamma(1-h).$$

Além disso, $\Gamma(h)\Gamma(1-h) = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)$ e pela equação (4.3)

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Aplicando estas igualdades na equação acima podemos concluir que

$$(-\Delta)^{-\alpha}\phi_j = \lambda_j^{-\alpha}\phi_j.$$

Por outro lado, sabemos que $(-\Delta)^{-\alpha}$ é um operador limitado, então existe um K real tal que $\|(-\Delta)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq K$. Seja $u \in L^2(\Omega)$, sabemos que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Consideremos a soma parcial

$$s_m = \sum_{j=1}^m \langle u, \phi_j \rangle \phi_j$$

então

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{-\alpha} u - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-\alpha} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j\|_{L^2(\Omega)} &= \|(-\Delta)^{-\alpha} u - (-\Delta)^{-\alpha} s_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|(-\Delta)^{-\alpha} (u - s_m)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K \|u - s_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$(-\Delta)^{-\alpha} u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Suponhamos $v \in D(-\Delta)^\alpha$ como $Im((-\Delta)^{-\alpha}) = D(-\Delta)^\alpha$ então existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j = (\Delta)^{-\alpha} u$$

Além disso, como

$$(-\Delta)^{-\alpha} \phi_j = \lambda_j^{-\alpha} \phi_j$$

então,

$$(-\Delta)^\alpha \phi_j = \lambda_j^\alpha \phi_j.$$

Observe que

$$\frac{1}{\lambda_j^{-\alpha}} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j = \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Além disso

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{-\alpha}} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j = u = (-\Delta)^\alpha v,$$

então

$$(-\Delta)^\alpha v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j.$$

□

Proposição 4.3.2. $D((-\Delta)^\alpha)$ é um espaço de Hilbert munido com a norma induzida pelo produto interno

$$\langle v, u \rangle_{D((-\Delta)^\alpha)} = \langle \Delta^\alpha v, \Delta^\alpha u \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Sabemos que da proposição 4.2.3 que o espaço $(D(-\Delta)^\alpha, \|\cdot\|_{(-\Delta)^\alpha})$ é um espaço de Banach. Definindo o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{D((-\Delta)^\alpha)} = \langle (-\Delta)^\alpha u, (-\Delta)^\alpha v \rangle.$$

teremos que a norma $\|\cdot\|_{D((-\Delta)^\alpha)}$ é induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D((-\Delta)^\alpha)}$, assim $D((-\Delta)^\alpha)$ é um espaço de Hilbert. □

Observação 4.3.3. *A série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$$

é convergente em $L^2(\Omega)$ se, e somente se, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle|^2$$

converge. Logo a definição do domínio $D((-\Delta)^\alpha)$, torna-se

$$D((-\Delta)^\alpha) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} |\langle v, \phi_j \rangle|^2 \text{ converge} \right\}.$$

Proposição 4.3.4. *Se $\alpha = \frac{1}{2}$ então $D((-\Delta)^\alpha) = H_1^0(\Omega)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $\overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$ então

$$\overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Por outro lado, dado $v \in D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$, considere a sequência $y_n = \sum_{j=1}^n \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$, definida no conjunto $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Segue da convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(v)$ que, a sequência $y_n \xrightarrow{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})} v$, portanto

$$\overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})} = D((-\Delta)^{\frac{1}{2}}). \quad (4.7)$$

Agora provaremos que

$$\overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})} = \overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)}$$

.

Seja, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ provaremos que, se $v_n \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_n \rightarrow v_1$ em $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$, então, $v_0 = v_1$.

Tomando $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ veremos que

$$\begin{aligned}
 \langle v, v \rangle_{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})} &= \langle (-\Delta)^{\frac{1}{2}} v, (-\Delta)^{\frac{1}{2}} v \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \langle v, \phi_j \rangle \phi_j, \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j, \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \right\rangle \\
 &= \langle v, -\Delta v \rangle = \langle \nabla v, \nabla v \rangle = \langle v, v \rangle_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Isso nos dá que, uma sequência $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, será de Cauchy em $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$ se, e somente se, for de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$.

Além disso, observe que, se $v_n \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ então, $v_n \rightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado $v_n \rightarrow v_1$ em $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})$ então, como a norma $\|\cdot\|_{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})}$ é equivalente a norma do gráfico do operador $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ então, $v_n \rightarrow v_1$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, segue da unicidade do limite em $L^2(\Omega)$ que $v_1 = v_0$, ou seja $\overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})} = \overline{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)}$ e $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} = \|\cdot\|_{D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})}$, o que nos dá a igualdade entre espaços de Hilbert. $\square$

Agora, retornamos ao operador de difusão apresentado na primeira seção do terceiro Capítulo. O próximo resultado visa conhecer o espaço de potência fracionária com respeito ao operador de difusão $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$ é dado por

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}\Delta,$$

onde $D(\mathbf{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^N$ e $\mathbf{M}$ é uma matriz com todos os autovalores com parte real positiva. Recordando, para cada $\alpha \geq 0$ definimos $X^0 = X$ e $X^\alpha \doteq D((\mathbf{A})^\alpha)$ munimos com a norma do gráfico

$$\|x\|_\alpha \doteq \|x\| + \|\mathbf{A}^\alpha x\|.$$

Proposição 4.3.5. *Seja $\alpha > 0$ então $X^\alpha = D(-\Delta^\alpha)^N$. Em particular*

$$X^{\frac{1}{2}} = D(-\Delta^{\frac{1}{2}})^N = (H_0^1(\Omega))^N.$$

Demonstração. Definimos $u_j = \langle u, \phi_j \rangle$ com $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de autofunções do operador $-\Delta$. E sejam $\alpha > 0$ e $u \in L^2(\Omega)^N$ e, $T(t) = e^{-\mathbf{A}t}$ o semigrupo gerado pelo operador $\mathbf{A}$ então

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{-\alpha} u &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) u_j \phi_j dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j \mathbf{M}t} u_j \phi_j dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda_j \mathbf{M}t} dt \right) u_j \phi_j.
 \end{aligned}$$

Tomando $s_j = \lambda_j t$ teremos que $dt = \frac{ds_j}{\lambda_j}$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda_j M t} dt &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_j} \cdot \frac{s_j^{\alpha-1}}{\lambda_j^{\alpha-1}} e^{-M s_j} ds_j \\ &= \lambda_j^{-\alpha} \int_0^\infty s_j^{\alpha-1} e^{-M s_j} ds_j \\ &= \lambda_j^{-\alpha} M^{-\alpha} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{A}^{-\alpha} u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha} M^{-\alpha} u_j \phi_j = M^{-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha} u_j \phi_j.$$

então, dado $v \in D(\mathbf{A}^\alpha)$, como $Im(\mathbf{A}^{-\alpha}) = D(\mathbf{A}^\alpha)$ podemos escrever, para algum $u \in (L^2(\Omega))^N$

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha} M^{-\alpha} \langle u, \phi_j \rangle \phi_j.$$

Logo $v \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ se, e somente, se a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha M^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$ converge. Além disso, essa convergência é equivalente a convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$, isto segue diretamente da continuidade do operador M^α , pois é um operador definido em dimensão finita. Portanto, podemos definir o domínio do operador $\mathbf{A}^\alpha$ como

$$D(\mathbf{A}^\alpha) = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^N : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \text{ converge} \right\}.$$

Segue diretamente da proposição 4.3.2 que $D(\mathbf{A}^\alpha) = (D(-\Delta^\alpha))^N$, em particular, segue da proposição 4.3.4 que $D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}) = (H_0^1(\Omega))^N$. $\square$

4.4 Existência e Unicidade de soluções.

Nesta seção, iremos estudar a existência e unicidade de soluções para os problemas lineares e semilineares de Cauchy. Os resultados expostos são baseados no livro [16]. Primeiro, assumamos que $-A$ é um gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo. Considere o seguinte problema linear de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, & \text{para } 0 < t < J \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Sabemos que pelos Teoremas 2.1.9 e 2.1.12 que existe uma única função $u : [0, \infty) \mapsto X$ que satisfaz (4.8), além disso, essa solução será da forma

$$u(t) = T(t)u_0,$$

com $T(t) \doteq e^{-At}$ o semigrupo gerado por $-A$. Além disso, pelo corolário 2.5.9, quando A for um operador setorial, o semigrupo $T(t)$ será analítico.

Agora considere a equação não autônoma semilinear.

$$\begin{cases} u_t + Au = f(s, u) & \text{para } t > t_0 \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Assumamos que o operador A é setorial e que para $\alpha \geq 0$ o operador A^α e o espaço X^α estão bem definidos. Considere uma função $f : \mathcal{U} \rightarrow X$ com $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ aberto, tal que $f(t, x)$ localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em x . Mais precisamente, dado $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}$ existe uma vizinhança $V_{\{t_1, x_1\}} \subset \mathcal{U}$ tal que, se $(t, x), (s, y) \in V_{\{t_1, x_1\}}$ então existem constantes K e γ tais que

$$\|f(t, x) - f(s, y)\|_X \leq K(|t - s|^\gamma + \|x - y\|_\alpha)$$

Definição 4.4.1. A ***solução*** do problema (4.9) em (t_0, t_1) é uma aplicação $u : [t_0, t_1] \rightarrow X$ tal que

1. $u \in \mathcal{C}([t_0, t_1], X) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), X)$ e $u(t_0) = u_0$;
2. para $u(t) \in D(A)$ e $(t, u(t)) \in \mathcal{U}$ para $t_0 < t < t_1$;
3. $\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = f(t, u(t))$ para $t_0 < t < t_1$;

Os próximos resultados garantem a existência e unicidade de soluções locais e globais para o problema (4.9).

Teorema 4.4.2 (Livro[16], Lema 3.3.2, página 53). *Se u é solução de (4.9) para (t_0, t_1) então*

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s, u(s))ds.$$

Teorema 4.4.3 (Livro[16] Teorema 3.3.3, página 54.). *Sejam $\mathcal{U}$ um aberto de $[0, \infty) \times X^\alpha$ e $f : \mathcal{U} \subset [0, \infty) \times X^\alpha \rightarrow X$, com $0 < \alpha < 1$, uma função localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana na segunda variável. Então, para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existe um t_1 , que depende de (t_0, x_0) , tal que o problema (4.9) possui uma única solução em (t_0, x_0) .*

Este teorema também pode ser encontrado no livro [29], Teorema 3.1, página 195.

Teorema 4.4.4 (Livro[16] Teorema 3.3.4, página 55.). *Assuma que A e f satisfazem as hipóteses do teorema (4.4.3), assumo também que, para todo subconjunto fechado e limitado $B \subset U$ a imagem $f(B)$ é limitada em X . Se u é solução do problema (4.9) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, isto é, não existe solução de (4.9) em (t_0, t_2) tal que $t_2 > t_1$. Então, ou $t_1 = \infty$, ou existe uma sequência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_1^-$ tal que $(t_n, u(t_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial U$. Se U é ilimitado então o ponto no infinito esta em ∂U .*

Para o caso autônoma (4.1), basta tomar $f : \mathcal{U} \subset X^\alpha \rightarrow X$ lipschitziana.

CAPÍTULO 5

Exemplos

Pretendemos neste Capítulo estudar a existência e unicidade de soluções locais e globais para algumas equações diferenciais. Para isso iremos reescrever as equações, a partir de uma mudança de variável, para expressá-las na forma de um sistema de reação e difusão tal que, a parte linear possa ser expressa como um operador $\mathbf{M}\Delta$, onde $\mathbf{M}$ é uma matriz $N \times N$ com autovalores estritamente positivos. E assim, utilizaremos o Teorema 3.1.5 para garantir que a parte linear da equação gera um semigrupo analítico de operadores limitados. Todos os exemplos estudados aqui se encontram no artigo [26].

5.1 Exemplo I

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e $\mathbf{M}$ uma matriz quadrada $N \times N$. Com $n = 1, 2$ ou 3 . Considere o seguinte sistema;

$$\begin{cases} u_t = \mathbf{M}\Delta u + f(u) \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

No trabalho [21] é estudado a estabilidade das soluções periódicas do sistema acima, considerando a matriz $\mathbf{M}$ diagonal e condições de fronteira de Neumann.

Para $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, defina a aplicação

$$\begin{aligned} f^e : X^\alpha &\rightarrow X \\ u &\rightarrow f^e(u) \text{ dada por } f^e(u)(x) = f(u(x)). \end{aligned}$$

podemos então reescrever o sistema (5.1) como

$$\begin{cases} u_t = M\Delta u + f^e(u) \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}.$$

Segue do Teorema 4.4.3, que o seguinte resultado garante existência e unicidade de soluções locais.

Teorema 5.1.1 (Artigo [21], Lema 2.1). *A função f^e é localmente lipschitziana.*

Portanto, segue do Teorema (4.4.2) e da equação (3.4), que o sistema estudando possui a seguinte solução local única

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j M(t-t_0)} \langle u_0, \phi_j \rangle \phi_j + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j M(t-s)} \langle f^e(u(s)), \phi_j \rangle \phi_j ds.$$

5.2 Exemplo II

Seja $\beta > 0$ considere a seguinte equação

$$\begin{cases} u_{tt} - 2\beta\Delta u_t - f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + \Delta^2 u = 0 & x \in \Omega, t > 0 \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (5.2)$$

Esta equação aparece no estudo de vibrações não lineares amortecidas de corda ou vigas. Chamando $u_t = v$ temos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = 2\beta\Delta u_t + f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u - \Delta^2 u, & x \in \Omega, t > 0 \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que a parte linear da equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$z_t = Lz, \text{ com } z = (u, v) \quad e \quad L = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & 2\beta\Delta \end{bmatrix}.$$

Com

$$\begin{aligned} L : D(L) \subset Y &\rightarrow Y \\ (u, v) &\mapsto (v, -\Delta^2 u + 2\beta\Delta v). \end{aligned}$$

Observe que $D(L) = \{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\} \times [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$ será densamente definido, pois $D(L) = D(\Delta^2) \times D(\Delta)$. No trabalho [32], onde é provado que o operador L gera um semigrupo analítico de operadores lineares limitados no seguinte espaço de Hilbert

$$Y = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega), \quad \text{munido da norma,} \quad \|(u, v)\|_Y = (\|u\|_{X^1} + \|v\|_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

para $(u, v) \in Y$ e $X^1 = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$, com $\|u\|_1 = \|\Delta u\|$, segue do Teorema 4.3.2 que X^1 é um espaço de Hilbert. Nosso objetivo é chegar ao mesmo resultado mas como consequência do Teorema (3.1.5). Para isso, reescrevemos o sistema acima de forma a poder aplicar o Teorema 3.1.5. Chamando $v = u_t$ e $w = \Delta u$, teremos

$$\begin{cases} w_t = \Delta v \\ v_t = -\Delta w + 2\beta \Delta v. \end{cases} \quad (5.3)$$

Agora, tomando

$$z = (w, v) \quad e \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\beta \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$z_t = \mathbf{M}\Delta z,$$

com condições de Dirichlet, é a formulação abstrata do problema de Cauchy linear homogêneo. Além disso, os autovalores da matriz $\mathbf{M}$ são $d_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$. Observe que;

- se $\beta^2 - 1 \geq 0$ então, $\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} > 0$ e;
- se $\beta^2 - 1 \leq 0$ então $\text{Re}\{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\} > 0$.

Tomando $D(\mathbf{M}\Delta) = [H^2(\Omega) \cap H_1^0(\Omega)] \times [H^2(\Omega) \cap H_1^0(\Omega)]$ teremos que o problema abstrato homogêneo possui solução única, pois segue da proposição 3.1.5 que o operador $-\mathbf{M}\Delta$ é setorial e por isso o operador $\mathbf{M}\Delta$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Considere o seguinte operador

$$\begin{aligned} G : X^1 \times L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ (u, v) &\mapsto (\Delta u, v). \end{aligned}$$

Observe $\Delta \in \mathcal{L}(X^1, L^2(\Omega))$ com $\|\Delta\|_{\mathcal{L}(X^1, L^2(\Omega))} = 1$ e $\Delta^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), X^1)$ com $\|\Delta\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), X^1)} = 1$ segue que, G é um isomorfismo isométrico.

Lema 5.2.1. *Sejam X um espaço de Hilbert $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial, com setor*

$$S_{\alpha, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg(\lambda - \alpha)| \leq \pi, \alpha \neq \lambda\} \subset \rho(A), \quad \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

e E um espaço de Hilbert. Se o operador $B : E \rightarrow X$ é um isomorfismo então, o operador

$$\tilde{A} = B^{-1}AB : D(\tilde{A}) \subset E \rightarrow E \quad \text{com} \quad D(\tilde{A}) = \{u \in E : Bu \in D(A)\},$$

é setorial com $S_{\alpha, \theta} \subset \rho(\tilde{A})$.

Demonstração. Dado $\lambda \in \rho(A)$ teremos

$$(\lambda - \tilde{A})u = B^{-1}(\lambda - A)Bu, \quad u \in D(B), \quad \text{tal que} \quad Bu \in D(A)$$

observe que o operador $B^{-1}(\lambda - A)B$ é fechado, além disso, segue da bijetividade do operador $(\lambda - A)$ que $\text{Im}(B^{-1}(\lambda - A)B) = X$ então, o operador $(\lambda - \tilde{A})$ é uma bijeção, segue do Teorema 1.2.4 que $\lambda \in \rho(\tilde{A})$.

Por fim, uma vez que o operador A é setorial, existe um $M > 0$ tal que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \alpha|}$$

então

$$\|(\lambda - \tilde{A})^{-1}\| = \|B^{-1}(\lambda - A)^{-1}B\| \leq \frac{\|B\|\|B^{-1}\|M}{|\lambda - \alpha|}$$

portanto o operador $-\tilde{A}$ é setorial, logo, $-\tilde{A}$ é gerador de um semigrupo analítico de operadores limitados. $\square$

Teorema 5.2.2. *O operador $-L$ é setorial.*

Demonstração. Observe que $L = G^{-1}(-M\Delta)G$, então, segue diretamente do lema anterior que o operador L é setorial. $\square$

Agora, para discutir o problema não linear, observe que a equação

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = 2\beta\Delta u_t + f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u - \Delta^2 u, \quad x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

Pode ser reescrita da forma

$$z_t = Lz + f^e(z) \tag{5.4}$$

com

$$\begin{aligned} f^e : Y^\alpha &\rightarrow Y \\ (u, v) &\rightarrow (0, f\left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx\right)\Delta u) \end{aligned}$$

Para que exista solução local (e global), precisamos que a função seja localmente lipschitziana em Y^α , para algum $\alpha \in [0, 1)$. Isto é feito no Artigo [32]. Onde, baseados nos teoremas de existência e unicidade de soluções, globais e locais, teoremas 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4, o artigo enuncia e demonstra o seguinte resultado:

Teorema 5.2.3 ([32], Teorema 3.2). *Se f é localmente lipschitziana, para cada $\Phi_0 \in Y$ existe t_1 e uma única função $\Phi = \Phi(t, \Phi_0)$ tal que*

i) $\Phi \in \mathcal{C}([0, t_1], Y) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), Y^\alpha)$ para todo $0 < \alpha < 1$ e $0 < t_0 < t_1$.

- ii) $\Phi(t) \in D(L)$ para cada $t \in (0, t_1)$.
- iii) $\frac{d}{dt}\Phi(t) = L\Phi(t) + f^e(\Phi(t))$ em $(0, t_1)$ e $\Phi(0) = \Phi_0$.
- iv) Se t_1 é maximal então, ou $t_1 = \infty$ ou $\|\Phi(t)\|_Y$ é ilimitado em $[0, \infty)$.

Suponhamos que:

H1. Seja $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathbb{R})$ teremos que f é localmente lipschitziana, o que garante a existência e unicidade de soluções locais.

H2. Seja f crescente com

$$\int_0^\infty f(s)ds > -\infty,$$

teremos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.4 (Teorema 4.1 do Artigo[32]). Para cada $\Phi_0 \in Y$ a única solução do Teorema 5.2.3 existe, e é limitada em $[0, \infty)$.

Baseados na solução do problema (5.4) escreveremos a solução do problema (5.2). Defina Π_1 e Π_2 as projeções de Y sobre, X^1 e $L^2(\Omega)$, respectivamente, por $\Pi_1(u, v) = u$ e $\Pi_2(u, v) = v$. Suponha Φ seja solução da equação (5.4), com $\Phi(0) = \Phi_0 = (u_0, v_0)$, no intervalo (t_0, t_1) .

Colocando $u(t, u_0, v_0) = \Pi_1\Phi(t, \Phi_0)$ para cada $t \in [0, t_1)$, veremos que $u_t(t) = \Pi_2\Phi(t)$ em $(0, t_1)$. E $u(0) = \Pi_1\Phi(0) = u_0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} u_t(h) = \Pi_2\Phi(0) = v_0$. Além disso $u(t) \in \mathcal{C}([0, t_1], X^1) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), X^1) \cap \mathcal{C}^2((t_0, t_1), X)$ para cada $0 < t_0 < t_1$ e $u(t) \in D(A^2)$ para cada $t \in (0, t_1)$.

5.3 Exemplo III

Da teoria termoelasticidade encontramos o seguinte sistema que modela a deflexão u de uma placa submetida a variação local de sua temperatura θ .

Seja $f \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ e uma contante real $m \neq 0$.

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha \Delta^2 u - m \Delta \theta = f\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u, & x \in \Omega, t > 0 \\ \theta_t - \Delta \theta + m \Delta u_t = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

definido em um conjunto limitado $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sob as seguintes condições

$$u = \Delta u = \theta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

a parte linear deste sistema é estudada em [18, 23, 27].

De forma semelhante a seção anterior vamos rescrever o sistema de forma a obter um sistema de equações de primeira ordem. Chamando $v = u_t$ teremos

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = -\alpha \Delta^2 u + m \Delta \theta + f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t = \Delta \theta - m \Delta u_t \end{cases} \quad (5.6)$$

Considere o seguinte espaço $Y = X^1 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, logo Y é um espaço de Hilbert na norma $\|u\|_Y = (\|u_1\|_{X^1}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + \|u_3\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$, com $(u_1, u_2, u_3) \in Y$. E defina o seguinte operador

$$\begin{aligned} L : D(L) \subset Y &\rightarrow Y \\ (u, v, \theta) &\rightarrow (-v, \alpha \Delta^2 u - m \Delta \theta, -\Delta \theta + m \Delta u_t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

com

$$D(L) = \{u \in X^1 : \Delta u \in X^1, u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \times X^1 \times X^1$$

Defina também a seguinte função

$$\begin{aligned} f^e : Y &\rightarrow Y \\ (u, v, \theta) &\rightarrow (0, f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u, 0). \end{aligned}$$

Tomando $z = (u, v, \theta)$ podemos reescrever a equação (5.5) pelo seguinte sistema.

$$z_t = -Lz + f^e(z). \quad (5.8)$$

Analogamente a seção anterior, f^e é localmente lipschiziana em Y , logo, basta provar que L é um operador setorial e, do Teorema 4.9, seguirá que esse sistema possuirá solução única local.

Chamando $u_t = v$ e $w = \Delta u$ obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} w_t = \Delta v \\ v_t = -\alpha \Delta^2 u + m \Delta \theta, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \theta_t = \Delta \theta - m \Delta u_t \end{cases} \quad (5.9)$$

Chamando $z = (w, v, \theta)$ o sistema (5.9) acima pode ser reescrito como

$$z_t = M \Delta z$$

com

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & m \\ 0 & -m & 1 \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores da matriz M são as raízes da seguinte equação característica

$$z^3 - (z^2) + (\alpha + m^2)z - \alpha = 0$$

Seguindo o critério Routh-Hurwit (Anexo A.4, página 104) encontramos a seguinte tabela

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & \alpha + m^2 \\ z^2 & -1 & -\alpha \\ z^1 & m^2 & 0 \\ z^0 & -\alpha & 0 \end{array}$$

portanto todos os autovalores possuem parte real estritamente positiva. Portanto o operador $-\mathbf{M}\Delta z$ é setorial. Agora, defina o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned} G : Y &\rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ (u, v, \theta) &\rightarrow (\Delta u, v, \theta). \end{aligned}$$

Observe que $L = G^{-1}(\mathbf{M}\Delta)G$, portanto o operador L dado por (5.7) é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Assumindo que a função f satisfaça as mesmas hipóteses do exemplo II H1, H2, teremos que o sistema possui solução única global.

Como no exemplo anterior, baseados na solução do problema (5.8) escreveremos a solução do problema (5.5). Defina Π_1 , Π_2 e Π_3 as projeções de Y sobre, X^1 , $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, por $\Pi_1(u, v, \theta) = u$, $\Pi_2(u, v, \theta) = v$ e $\Pi_3(u, v, \theta) = \theta$. Suponha Φ seja solução da equação (5.8), com $\Phi(0) = \Phi_0 = (u_0, v_0, \theta_0)$, no intervalo (t_0, t_1) .

Colocando $u(t, u_0, v_0, \theta_0) = \Pi_1\Phi(t, \Phi_0)$ para cada $t \in [0, t_1)$, veremos que $u_t(t) = \Pi_2\Phi(t)$ em $(0, t_1)$ e $u(0) = \Pi_1\Phi(0) = u_0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} u_t(h) = \Pi_2\Phi(0) = v_0$. Além disso $u(t) \in \mathcal{C}([0, t_1], X^1) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), X^1) \cap \mathcal{C}^2((t_0, t_1), X)$ para cada $0 < t_0 < t_1$ e $u(t) \in D(A^2)$ para cada $t \in (0, t_1)$. Analogamente $\theta(t) = \Pi_3\Phi(t)$ e $\theta(0) = \Pi_3\Phi(0)$, com $\theta(t) \in \mathcal{C}([0, t_1], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2((t_0, t_1), L^2(\Omega))$ para cada $0 < t_0 < t_1$ e $\theta(t) \in D(A)$ para cada $t \in (0, t_1)$.

5.4 Exemplo IV

Sejam $\alpha, \gamma, \delta, c$ e β_0 constantes positivas tal que $\gamma > c^2$. Além disso $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Considere o seguinte sistema, com $t > 0$

$$\begin{cases} u_{tt} - cv_{tt} + \alpha\Delta^2 u - \Delta u_t - f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = 0 \\ -cu_{tt} + \gamma v_{tt} + \delta\Delta^2 v - \beta_0\Delta v - \Delta v_t = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

definido em uma região com fronteira suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, juntamente com as condições de contorno

$$u = \Delta u = 0 \text{ e } v = \Delta v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

No trabalho [3], é provado que o sistema dinâmico gerado por este sistema possui um atrator global.

De forma semelhante aos exemplos anteriores, com uma substituição de variáveis, iremos rescrever esse sistema de forma ser um sistema de primeira ordem, porém, iremos separar em três passos para que fique organizado.

Passo 1. Chame $u_t = w$ e $v_t = z$, e fazendo as devidas substituições no (5.10) obtemos um novo sistema

$$\begin{cases} w_t - cz_t + \alpha\Delta^2 u - \Delta u_t - f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = 0 \\ -cw_t + \gamma z_t + \delta\Delta^2 v - \beta_0\Delta v - \Delta v_t = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Passo 2. Multiplique a primeira equação do sistema (5.11) por γ e a segunda equação por C , em seguida some as duas, obtendo a seguinte equação

$$(\gamma - c^2)w_t - \left[-\alpha\gamma\Delta^2 u - \delta c\Delta^2 v + \gamma\Delta w + c\Delta z + c\beta_0\Delta v + \gamma f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \right] = 0.$$

Passo 3. Multiplique a primeira equação do sistema (5.11) por C e em seguida some as duas, obtendo a seguinte equação

$$(\gamma - c^2)z_t - \left[-\alpha c\Delta^2 u - \delta\Delta^2 v + c\Delta w + \Delta z + \beta_0\Delta v + cf\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \right] = 0.$$

Passo 4. Por fim, escrevemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t = w \\ w_t = \frac{1}{d} \left[-\alpha\gamma\Delta^2 u - \delta c\Delta^2 v + \gamma\Delta w + c\Delta z + c\beta_0\Delta v + \gamma f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \right] \\ v_t = z \\ z_t = \frac{1}{d} \left[-\alpha c\Delta^2 u - \delta\Delta^2 v + c\Delta w + \Delta z + c\beta_0\Delta v + cf\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u \right], \end{cases} \quad (5.12)$$

onde $d = \gamma - c^2$.

Considere o espaço $Y = X^1 \times L^2(\Omega) \times X^1 \times L^2(\Omega)$, na norma $\|u\|_Y = (\|u_1\|_{X^1}^2 + \|u_2\|_{L^2}^2 + \|u_3\|_{X^1}^2 + \|u_4\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ com $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in Y$. Tomando $p = (u, w, v, z)$ em (5.12) podemos escrever a seguinte equação de evolução

$$p_t = Lp + f(p) \quad (5.13)$$

quando $L : D(L) \subset Y \rightarrow Y$ e

$$L(u, w, v, z) = (w, \frac{1}{d}(-\alpha\Delta^2 u - \delta c\Delta^2 v + \gamma\Delta w + c\Delta z), z, \frac{1}{d}(-\alpha c\Delta^2 u - \delta\Delta^2 v + c\Delta w + \Delta z))$$

com $D(L) = \{(u, w, v, z) : u, v \in H^4(\Omega), w, z \in X^1 \text{ e } u = \Delta u = 0 = v = \Delta v \text{ sobre } \partial\Omega\}$.

Defina também a função

$$\begin{aligned} f^e : Y &\rightarrow Y \\ (u, w, v, z) &\rightarrow \frac{1}{d}(0, c\beta_0\Delta v + \gamma f\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u, 0, c\beta_0\Delta v + cf\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u), \end{aligned}$$

segue que f^e é localmente lipschitziana em Y .

Para provar que o operador $-L$ é setorial, vamos reescrever a parte linear do nosso sistema. Chamando $\Delta u = u_1$ e $\Delta v = v_1$ teremos

$$\begin{cases} (u_1)_t = \Delta w \\ w_t = \frac{1}{d}[-\alpha\gamma\Delta u_1 - \delta c\Delta v_1 + \gamma\Delta w + c\Delta z] \\ (v_1)_t = \Delta z \\ z_t = \frac{1}{d}[-\alpha c\Delta u_1 - \delta\Delta v_1 + c\Delta w + \Delta z], \end{cases}$$

chamando $q = (u_1, w, v_1, z)$ teremos a seguinte equação

$$q_t = M\Delta q$$

com

$$M = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ -\alpha\gamma & \gamma & -\delta c & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ -\alpha c & c & -\delta & 1 \end{bmatrix}.$$

e os autovalores da matriz M são as raízes do polinômio característico

$$(\gamma - c^2)^4 - (\gamma + 1)z^3 + (\alpha\gamma + \delta + 1)z^2 - (\alpha + \delta)z + \alpha\delta = 0.$$

Aplicando o critério Routh-Hurwit encontramos a seguinte tabela

$$\begin{array}{l|lll} z^4 & \gamma - c^2 & \alpha\gamma + \delta + 1 & \alpha\delta \\ z^3 & -(\gamma + 1) & -(\alpha + \delta) & 0 \\ z^2 & B > 0 & B_1 & B_2 \\ z^1 & C < 0 & C_1 & C_2 \\ z^0 & D > 0 & D_1 & D_2 \end{array}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} B &= \frac{-[-(\gamma - c^2)(\alpha + \delta) + (\alpha\gamma + \delta + 1)(\gamma + 1)]}{-(\gamma + 1)} \\ &= \frac{-(\gamma - c^2)(\alpha + \delta) + (\alpha\gamma + \delta + 1)(\gamma + 1)}{\gamma + 1} \\ &= \frac{c^2(\alpha + \delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1}{\gamma + 1} > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-[(\gamma - c^2)0 + \alpha\delta(\gamma + 1)]}{-(\gamma + 1)} \\ &= \alpha\delta > 0 \end{aligned}$$

e $B_2 = 0$.

Calculando C teremos

$$\begin{aligned}
C &= \frac{-[-(\gamma+1)\alpha\delta + (\alpha+\delta)B]}{B} \\
&= \frac{(\gamma+1)\alpha\delta - (\alpha+\delta)B}{B} \\
&= \frac{(\gamma+1)^2\alpha\delta - (\alpha+\delta)[c^2(\alpha+\delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1]}{c^2(\alpha+\delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1} \\
&= \frac{2\gamma\alpha\delta - [c^2(\alpha+\delta)^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha\gamma + \alpha + \gamma\delta + \delta^2 + \delta]}{c^2(\alpha+\delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1} \\
&= \frac{-\alpha^2\gamma^2 + 2\gamma\alpha\delta - \delta^2 - [c^2(\alpha+\delta)^2 + \alpha\gamma + \alpha + \gamma\delta + \delta]}{c^2(\alpha+\delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1} \\
&= \frac{-(\alpha\gamma + \delta)^2 - [c^2(\alpha+\delta)^2 + \alpha\gamma + \alpha + \gamma\delta + \delta]}{c^2(\alpha+\delta) + \alpha\gamma^2 + \gamma + \delta + 1} < 0
\end{aligned}$$

Além disso, $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$.

Por fim, observe que, como $C_1 = 0$ então,

$$\begin{aligned}
D &= \frac{-[B.C_1 - B_1.C]}{C} \\
&= B_1 \\
&= \alpha\delta > 0,
\end{aligned}$$

além disso, $D_1 = 0$ e $D_2 = 0$.

Observe que os elemento da primeira coluna da Tabela trocam de sinal 4 vezes logo, todos os autovalores possuem parte real estritamente positiva. Portanto o operador $-\mathbf{M}\Delta z$ é setorial.

Agora considere o seguinte isomorfismo

$$\begin{aligned}
G : Y &\rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \\
(u, w, v, z) &\rightarrow (\Delta u, w, \Delta v, z).
\end{aligned}$$

Observe que $L = G^{-1}(\mathbf{M}\Delta)G$, portanto o operador L é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Assumindo que a função f satisfaça as mesmas hipóteses do exemplo II, teremos que o sistema possui solução única global. Baseados na solução do problema (5.13) escreveremos a solução do problema (5.10). Defina Π_1 e Π_2 as projeções de Y sobre, X^1 e $L^2(\Omega)$, respectivamente, por $\Pi_1(u, w, v, z) = u$ e $\Pi_2(u, w, v, z) = w$. Suponha Φ seja solução da equação (5.13), com $\Phi(0) = \Phi_0 = (u_0, w_0, v_0, z_0)$, no intervalo (t_0, t_1) .

Colocando $u(t, u_0, w_0, v_0, z_0) = \Pi_1\Phi(t, \Phi_0)$ para cada $t \in [0, t_1)$, veremos que $u_t(t) = \Pi_2\Phi(t)$ em $(0, t_1)$. E $u(0) = \Pi_1\Phi(0) = u_0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} u_t(h) = \Pi_2\Phi(0) = v_0$. Além disso $u(t) \in \mathcal{C}([0, t_1], X^1) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), X^1) \cap \mathcal{C}^2((t_0, t_1), X)$ para cada $0 < t_0 < t_1$ e $u(t) \in D(A^2)$ para cada $t \in (0, t_1)$.

Analogamente, definimos as projeções Π_3 e Π_4 de Y sobre, X^1 e $L^2(\Omega)$, respectivamente, por $\Pi_3(u, w, v, z) = v$ e $\Pi_4(u, w, v, z) = z$, assim teremos que $v(t, u_0, w_0, v_0, z_0) =$

$\Pi_3\Phi(t, \Phi_0)$ para cada $t \in [0, t_1)$, veremos que $v_t(t) = \Pi_2\Phi(t)$ em $(0, t_1)$. E $u(0) = \Pi_1\Phi(0) = u_0$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} u_t(h) = \Pi_2\Phi(0) = v_0$. Além disso $v(t) \in \mathcal{C}([0, t_1), X^1) \cap \mathcal{C}^1((t_0, t_1), X^1) \cap \mathcal{C}^2((t_0, t_1), X)$ para cada $0 < t_0 < t_1$ e $v(t) \in D(A^2)$ para cada $t \in (0, t_1)$.

A.1 Alguns resultados de Análise Funcional

Nesta seção exporemos alguns resultados fundamentais da Análise funcional que foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. Eles se baseiam principalmente nos livros [19], [8], [6].

Teorema A.1.1 ((Lema de Riesz) Livro [6], Lema 1.5.2, página 17). *Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja k um número real tal que $0 < k < 1$. Então existe $y \in E - M$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| \geq k$ para todo $x \in M$.*

Teorema A.1.2 (Friedrichs, Livro[30], Theorem, página 330). *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ e $S : D(S) \subset H \rightarrow H$ um operador simétrico, para o qual existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle Sf, f \rangle \geq \alpha \langle f, f \rangle, \quad \forall f \in D(s),$$

então o operador S admite uma extensão auto-adjunta $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ que preserva limitação.

Teorema A.1.3 (Teorema da extensão de Hann-Banach, Livro [19], Theorem 4.3-1, página 219). *Sejam X um espaço de Banach, $G \subset X$ um subespaço de X e $f_G \in G^*$ então existe um funcional $f \in X^*$ tal que f^* estende f , ou seja, $f(x) = f^*(x)$ para todo $x \in G$. Além disso, teremos que $\|f^*\|_{G^*} = \|f\|_{X^*}$*

Teorema A.1.4 (Teorema do Gráfico Fechado, Livro [19], Theorem 4.13-2página 292). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(A) \subset X \rightarrow Y$. Se $D(T)$ é fechado em X então, T é limitado.*

Teorema A.1.5 (Princípio da Limitação Uniforme, Livro [19], Theorem 4.7-3, página 249). *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de operadores limitados $T_n : X \rightarrow Y$. Tal que, para cada $x \in X$ tenhamos $\|T_n(x)\| \leq C_x$, para todo $n = 1, 2, \dots$, então a sequência $\{\|T_n\|\}_{n=1}^\infty$ é limitada, ou seja, existe uma constante C tal que $\|T_n\| \leq C$.*

Teorema A.1.6 (Teorema da representação de Riesz-Fréchet, Livro [8], Theorem, 5.5, página 135). *Seja H um espaço de Hilbert e H^* seu espaço dual. Dado algum $f \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle, \forall v \in H,$$

além disso

$$\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$$

Teorema A.1.7 (Livro [6], Teorema 7.3.4, página 195). *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $T : X \rightarrow X$ um operador compacto. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ com $\lambda \neq 0$, então o operador $\lambda - T$ é injetivo se e somente se for sobrejetivo.*

Teorema A.1.8 (Teorema Rellich-Kondrachov, Livro [8], Theorem 9.16, página 285). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e classe C^1 . Então a imersão*

$$i : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta.

A.2 Formula de Green Generalizada

O objetivo desta seção é apresentar uma generalização das identidades de Green em espaços de Sobolev. As definições e resultados apresentados aqui se baseiam no Livro [11] e na dissertação de mestrado [13].

Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, defini-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ e } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n}.$$

E denotaremos pois

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

o operador derivação de ordem α , para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ é definido por $D^\alpha u = u$. Por D_i representaremos a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição A.2.1. *Diz-se que uma sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero quando as seguintes condições forem satisfeitas.*

i) *Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\psi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência $\{\mathcal{D}^\alpha \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero.

Se $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sequência $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge para ψ quando $(\psi_n - \psi)$ converge para zero no sentido da definição A.2.1.

O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaços das funções testes, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição A.2.2. Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definisse a transformada de Fourier de f , denotando por $\hat{f}$ a uma função definida sobre $\mathbb{R}^n$ pela formula

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

onde $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Definição A.2.3. O espaço de Schwartz ou espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, que denotaremos por S e o subespaço vetorial formado pelas funções $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tais que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^k D^\alpha \psi(x) = 0,$$

qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição A.2.4. Um funcional linear g definido e contínuo sobre S é denominado uma distribuição temperada (ou lentamente crescente). A totalidade das distribuições temperadas, ou seja, o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos sobre S é denotado por S' .

Proposição A.2.5 (Livro [11], Proposição 5.2, página 247). Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos;

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier de u que é um espaço de Hilbert, com a norma induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle_m = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx$$

. Além disso as normas $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|_{H^m}$ são equivalentes.

Motivados pela proposição A.2.5 definimos, para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ o espaço

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx$$

.

Proposição A.2.6 (Livro [11], Proposição 5.3, página 249). *Para todo $s \geq 0$ o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.*

Seja definir o espaço $H^s(\partial\Omega)$ é utilizado um sistema de cartas locais

$$\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \dots, (U_n, \phi_n)\} \text{ de } \partial$$

. A construção deste espaço pode ser encontrada no livro [11], seção, 5.3, página 271. Além disso, também é mostrado que $H^s(\partial\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

De posse destes resultados, definiremos a aplicação traço.

Definição A.2.7 (Aplicação traço de ordem m). *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e a aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\Omega) &\rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow \gamma u = (\gamma_1 u_1, \gamma_2 u_2, \dots, \gamma_{m-1} u_{m-1}), \end{aligned}$$

linear e contínua quando munimos o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ da topologia dada por

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sum_{j=0}^{m-1} \|w_j\|_{H^{m-1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

tal que

$$\gamma \xi = \left(\xi|_{\partial\Omega}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}, \dots, \frac{\partial^{m-1} \xi}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial\Omega} \right), \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Proposição A.2.8. *Existem uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-1-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ com núcleo $\gamma^{-1}\{0\} = H_0^m(\Omega)$ tal que*

$$\gamma \xi = \left(\xi|_{\partial\Omega}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega}, \dots, \frac{\partial^{m-1} \xi}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_{\partial\Omega} \right), \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Seja $s \geq 0$ denotaremos por $H^{-s}(\partial\Omega)$ o dual topológico espaço $H_0^s(\partial\Omega)$. Além disso escreveremos, dado $f \in H^{-s}(\partial\Omega)$ escreveremos $\langle f, x \rangle_{H^{-s}, H^s(\partial\Omega)}$ no lugar de $f(x)$.

Defina o espaço

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{L^2}$$

que o torna um espaço de Hilbert.

Proposição A.2.9. *A aplicação linear*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow \gamma u = \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \end{aligned}$$

se estende, por continuidade, a uma aplicação linear e contínua dada por

$$\begin{aligned}\gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}} \times H^{-\frac{3}{2}} \\ u &\rightarrow \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u).\end{aligned}$$

Além disso a aplicação γ coincide com a aplicação traço de ordem $m = 2$.

Teorema A.2.10 (Primeira formula de Green generalizada, Livro [11], Proposição 6.34, página 362). Para todo $u \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$ tem-se

$$\langle \Delta u, v \rangle_{L^2} - \langle u, \Delta \rangle_{L^2} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{3}{2}} \cdot H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} - \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \cdot H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

Agora defina o espaço

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_{H^1} + \langle \Delta u, \Delta v \rangle_{L^2}$$

que o torna um espaço de Hilbert.

Proposição A.2.11. A aplicação linear

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}} \\ u &\rightarrow \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\end{aligned}$$

se estende, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^0(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Teorema A.2.12 (Segunda formula de Green generalizada, Livro [11], Proposição 6.39, página 367). Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ tem-se

$$\langle \Delta u, v \rangle + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \cdot H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

A.3 Integral de Riemann-Stieltjes em espaços de Banach

Esta seção se baseia no livro [17]. Iremos definir e apresentar alguns resultados de integração envolvendo funções $f : J \rightarrow E$, com J um intervalo real, ou um caminho em $\mathbb{C}$ e E um espaço de Banach.

Sejam f, γ funções definidas no intervalo real $[a, b]$ tais que, a função f leva no espaço vetorial E , e γ leva em um conjunto numérico. considere a partição $(a = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = b)$ e o conjunto de pontos $\pi = \{\tau_j : \sigma_{j-1} \leq \tau_j \leq \sigma_j\}$ com $|\pi| = \max_{j=1,1,\dots,n} |\sigma_j - 1 - \sigma_j|$.

Definição A.3.1. *Seja*

$$S_\pi(f, \gamma) = \sum_{j=1}^n x(\tau_j) [\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})]$$

então, se $\lim_{\pi \rightarrow 0} S_\pi(x, \gamma)$ existe em uma topologia dada, definimos esse limite como sendo a integral

$$\int_a^b f(\xi) d\gamma(\xi)$$

relativo a esta topologia.

Analogamente temos a seguinte definição

Definição A.3.2. *Seja*

$$s_\pi(f, \gamma) = \sum_{j=1}^n \gamma(\tau_j) [f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})]$$

então, se $\lim_{\pi \rightarrow 0} S_\pi(x, \gamma)$ existe em uma topologia dada, definimos esse limite como sendo a integral

$$\int_a^b \gamma(\xi) df(\xi)$$

relativo a esta topologia.

A partir destas definições temos os seguintes resultados.

Teorema A.3.3 (Livro [17], Theorem 3.3.1, página 63). *Se alguma das integrais definidas acima existe em alguma topologia dada, então ambas devem existir nesta topologia e*

$$\int_a^b x(\xi) d\gamma(\xi) = f(\xi) \gamma(\xi) \Big|_a^b - \int_a^b \gamma(\xi) df(\xi).$$

Teorema A.3.4 (Livro [17], Theorem 3.3.2, página 63). *Sejam f, γ funções definidas no intervalo real $[a, b]$ tais que, a função f leva no espaço de Banach E , e γ leva em um conjunto numérico, suponha*

Caso 1 *f é fortemente contínua e γ tem variação limitada,*

Caso 2 *γ é fortemente contínuo e f tem variação limitada.*

Então as seguintes integrais

$$\int_a^b f(\xi) d\gamma(\xi) , \int_a^b \gamma(\xi) df(\xi)$$

existem na topologia induzida pela norma. Além disso, se L é um operador linear fechado de E em F , com F espaço de Banach e $\text{Im}(f) \in D(L)$, e se $T(f(\xi))$ é fortemente contínuo (caso 1) ou possui variação limitada (caso 2). então

$$L\left(\int_a^b f(\xi)d\gamma(\xi)\right) = \int_a^b L(f(\xi))d\gamma(\xi)$$

e

$$L\left(\int_a^b \gamma(\xi)df(\xi)\right) = \int_a^b \gamma(\xi)dL(f(\xi)).$$

Em particular, se L fosse um operador limitado, então valem as mesmas igualdade (que seguem direto da continuidade forte ou da variação limitada).

Destes resultados definiremos a Integral de Cauchy

Definição A.3.5 (Livro [17], 3.11., página 94). *Sejam C uma curva retificável no plano complexo, dada pela função $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}$ com γ contínua e de variação limitada. Se a função $f : C \rightarrow E$, com E uma espaço de Banach, é fortemente contínua. Então a integral*

$$\int_0^a f(\gamma(\xi))d\gamma(\xi) = \int_C f(\gamma)d\gamma$$

Definição A.3.6 (Livro [17], Theorem 3.10.1 , página 92). *A função $f : C \rightarrow E$, com E uma espaço de Banach, é dita holomorfa se, para qualquer $x^* \in E^*$ a função $x^* \circ f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é holomorfa.*

Segue alguns resultados.

Teorema A.3.7 (Livro [17], Theorem 3.11.1 , página 95). *Se a função $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow E$, com E um espaço de Banach, é holomorfa em um domínio D no plano complexo, então*

$$\int_C f(\gamma)d\gamma = 0$$

para toda curva C simples e fechada contida em D .

Teorema A.3.8 (Livro [17], Theorem 3.11.3 , página 96). *Sejam $f(\xi)$ uma função holomorfa de um domínio D para um espaço de Banach E e C uma curva retificável e fechada em D e seja ξ tal que o $\arg(\xi - \gamma)$ aumenta em 2π quando γ descreve C (orientação positiva). Então*

$$f^{(n)}(\gamma) = \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{x(\gamma)}{(\xi - \gamma)^{(n+1)}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema A.3.9 (Livro [17], Theorem 3.13.3 , página 100). *Sejam $f(\xi)$ uma função holomorfa de um domínio D para um espaço de Banach E então, $\|f(\xi)\|$ não possui máximo no interior de D a menos que $\|f(\xi)\|$ seja contante em D .*

A.4 Calculo diferencial em espaços de Banach

Esta seção se baseia nos livros [6, 17], nosso objetivo é apresentar alguns resultados de calculo diferencial em espaços de Banach.

Definição A.4.1. *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E . Dizemos que uma função $f : U \rightarrow F$ é **Fréchet-diferenciável** no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $L : E \rightarrow F$ tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + R(x_0, h)$$

para todo h tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 e contida em U onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

O operador A é chamado derivada de Fréchet de f no ponto x_0 , denotada por $A = Df(x_0)$.

Dizemos que f é **Fréchet-diferenciável** se f for Fréchet-diferenciável em todos os pontos de U .

Segue alguns resultados envolvendo a derivada de Fréchet.

Proposição A.4.2 (Livro [6], Proposição 9.6.2. página 274). *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E . Se a função $f : U \rightarrow F$ é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in E$ então, a derivada de Fréchet de f em x_0 é única e f é contínua em x_0*

Exemplo A.4.3. 1. *Toda função contante em um aberto de um espaço de Banach é Fréchet-diferenciável e tem derivada nula.*

2. *Toda aplicação $A : E \rightarrow F$ linear contínua em espaços de Banach é Fréchet-diferenciável e $DA(x_0) = A$ para todo $x_0 \in E$.*

3. *Sejam H um espaço de Hilbert e*

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^2.$$

Então f é Fréchet-diferenciável e $Df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$ para todos $x, h \in H$.

Proposição A.4.4 (Livro [6], Proposição 9.6.4. página 275). *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E . se as funções f, g Fréchet-diferenciáveis em $x_0 \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então a função $f + \lambda g$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $D(f + \lambda g)(x_0) = D(f)(x_0) + \lambda D(g)(x_0)$.*

Teorema A.4.5 ((Regra da Cadeia), Livro [6], Teorema 9.6.5. página 276). *Sejam E, F, G espaços de Banach,*

$$f : U \subset E \rightarrow F$$

e

$$g : V \subset F \rightarrow G,$$

com U, V abertos e $f(U) \subseteq V$. Se f é Fréchet-diferenciável em $x_0 \in U$ e g é Fréchet-diferenciável em $f(x_0)$, a aplicação $g \circ f : U \rightarrow G$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

Teorema A.4.6 ((Desigualdade do Valor Médio) Livro [6], Teorema 9.6.6. página 277). *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E e f uma aplicação Fréchet-diferenciável. Sejam $x_1, x_2 \in U$ tais que o seguimento $l = \{tx_1 + (1-t)x_2 : 0\}$ esta contido em U . Então*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in l} \|Df(x)\| \|x_1 - x_2\|.$$

Corolário A.4.7 (Livro [6], Corolário 9.6.7. página 277). *Sejam E, F espaços de Banach e U um aberto em E e f uma aplicação Fréchet-diferenciável tal que $Df(c) = 0$ para todo $x \in U$, então f é constante.*

A.5 Critério de Routh-Hurwitz

Devotamos essa seção para descrever brevemente o critério de Routh-Hurwitz, nos baseando no livro [20], página 334. Este critério é uma ferramenta para determinar localizar os zeros de um polinômio, com coeficientes reais, em relação aos semiplanos esquerdo e direito.

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ considere o polinômio $\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$ com $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para $n = 0, 1, \dots, n$.

Organizaremos uma tabela da seguinte forma

1. Na primeira coluna colocaremos os elementos $z^n, z^{n-1}, \dots, z^1, z^0$.
2. Na primeira linha, a partir da segunda coluna, colocaremos os elementos a^{n-2j} com $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, sendo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ a parte inteira do número $\frac{n}{2}$.
3. Na segunda linha, a partir da segunda coluna, colocaremos os elementos $a^{(n-1)-2j}$ com $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Se alguma célula não tiver elemento para colocar, será colocado 0.
4. Chamando as células de b_{il} com, i referente a linha e j referente a coluna. Assim, na terceira linha a partir da segunda coluna teremos $b_{3j} = -\frac{1}{b_{22}}(b_{12} \cdot b_{(i-1)j+1} - b_{22} b_{(i-2)j+1})$. Nas células onde não for possível tal procedimento, será colocado o número 0

5. Generalizando teremos que, para linha n , a partir da segunda o elemento b_{ij} será escrito como

$$b_{ij} = \frac{-1}{b_{(i-1)2}} \begin{vmatrix} b_{(i-2)2} & b_{(i-2)(j+1)} \\ b_{(i-1)2} & b_{(i-1)(j+1)} \end{vmatrix}.$$

Terminada a tabela, o critério nos diz que; o número de vezes em que os elementos da segunda coluna trocam de sinal é igual o numero de zeros da polinômio com parte real positiva. Para ilustrar critério, daremos dois exemplos.

Exemplo A.5.1. *Considere equação*

$$(z - 2)(z + 1)(z - 3) = z^3 - 4z^2 + z + 6$$

teremos a seguinte tabela

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & -4 & 6 \\ z^1 & 2,5 & 0 \\ z^0 & 6 & 0 \end{array}$$

como sabemos, este polinômio possui duas raízes no semiplano direito, e encontramos duas trocas de sinal nos elementos da primeira coluna.

Exemplo A.5.2. *Considere o seguinte polinômio*

$$2z^4 + z^3 + 3z^2 + 5z + 10 = 0,$$

teremos a seguinte tabela

$$\begin{array}{c|ccc} z^4 & 2 & 3 & 10 \\ z^3 & 1 & 5 & 0 \\ z^2 & -7 & 10 & 0 \\ z^1 & 6,43 & 0 & 0 \\ z^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

segue que este polinômio possui duas raízes no semiplano direito.

Para mais detalhes sobre este critério recomendamos o livro [20].

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. E.; Fournier, J. J. F. Sobolev Spaces, second edition, Elsevier. 2009
- [2] Adamatzky, A.; Costello, B. D.; Asai, T. Reaction-Diffusion Computers, ELSEVIER, 2005.
- [3] Alves, M.S. Atrator global para o sistema de Timoshenko, atas do 44o. Seminário Brasileiro de Análise, 597-602, 1996
- [4] Amann, H. Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I, BirkhauserVerlag, Basel, 1995. MR 96g:34088
- [5] Biezuner, R. J. Notas de Aula Autovalores do Laplaciano, Departamento de Matemática Instituto de Ciências Exatas (ICEx) Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). 2006
- [6] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E.; Fundamentos da Análise Funcional. SBM, Rio de Janeiro 2015
- [7] Bortolani, M. C. Notas de aula MTM 510002: Teoria de semigrupos e aplicações a EDP's, Departamento de Matemática - MTM Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis 2015
- [8] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer. 2005
- [9] Cantrell, R. S. Spatial ecology via reaction-diffusion equations/Robert Stephen Cantrell and Chris Cosner. John Wiley e Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, England, 2003
- [10] Carvalho, A. L. Análise Funcional II. ICMC, São Carlos Análise Funcional II. 2012

- [11] Cavalcanti, M, e , Cavalcanti, V. Introdução a teoria de distribuições e aos espaços de Sobolev. Maringá, UEM, 2009.
- [12] Czaja, R. Differential Equation with Sectorial Operators, Windawnictwo Uniwersitetu Slaskiego, Katowice, 2002.
- [13] Filho, T, J. Sobre um problema de valor de fronteira para equações da onda. Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Matemática da UFS, São Cristovão-SE,2016
- [14] Gondar, J.L.; Cipolatti, R. Iniciação a física matemática, Impa, Rio de Janeiro 2016
- [15] Grzybowski, B. A. Chemistry in Motion: Reaction–Diffusion Systems for Micro- and Nanotechnology, John Wiley e Sons Ltd,2009
- [16] Henry, D. Geometric Theory of Semilinear-Parabolic Equations, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [17] Hille. E.; Philips, R. “Functional Analysis and Semigroups,” Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.
- [18] Kim, J.U. On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate, SIAM J. Math. Anal., vol. 23, no. 4, 889-899, 1992.
- [19] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley e Sons. Inc, 1989
- [20] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Editora Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México, Sétima edição, 1996.
- [21] Leiva, H. Stability of a periodic solution for a system of parabolic equations, Applicable Analysis, vol. 60, 277-300, 1996.
- [22] Leoni, G. A First Course in Sobolev Spaces, American Mathematical Society, United States of America, Providence, Rhode Island, 2009.
- [23] Liu, Z.-Y.; Renardy, M. A note on the equations of a thermoelastic plate, Appl. Math. Lett, Vol. 8, 1-6, 1995.
- [24] Silva,. M. B.; Potência fracionária do operador laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet. Dissertação de mestrado. Departamento de matemática UEL, Londrina, 2015.
- [25] Medeiros, L. A.; Miranda, M.M.; Espaços de Sobolev, Iniciação a problemas elíticos não homogêneos. Instituto de matemática-UFRJ, Rio de janeiro. 2000.
- [26] Oliveira, L. A. F. On reaction-diffusion systems, Electronic Journal of Differential equations, 1998.
- [27] Oliveira, L.A.F. Exponential decay in thermoelasticity, Comm. in Appl. Analysis, vol.1, 113-118, 1997.

- [28] Oliveira, E. C. Funções Especiais com Aplicações. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [29] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [30] Riesz, F.;Sz.-Nagy, B. Functional Analysis, Black Son limited, London e Glasgow. 1956.
- [31] Robinson, J, C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors, Cambridge University Press
- [32] Sevicovic, D. Existence and limiting behaviour for damped nonlinear evolution equations with nonlocal terms, Comment. Math. Univ. Carolinae 31, 2, 283-293, 1990.
- [33] Silva, F. C. F. Existência de Solução para algumas Equações de evolução via Teoria de semigrupo analítico. Dissertação de mestrado. Pós-Graduação em Matemática-CCT-UFCG, Campina Grande - Paraíba, 2007.
- [34] Yosida, K. Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.