

**TENSORES FUNDAMENTAIS DA FORMULAÇÃO DOS  
PROBLEMAS ELÁSTICOS AXISSIMÉTRICOS PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**RAFAEL PACHECO STIKAN**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**VITÓRIA, JUNHO DE 2006**

**TENSORES FUNDAMENTAIS DA FORMULAÇÃO DOS  
PROBLEMAS ELÁSTICOS AXISSIMÉTRICOS PELO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

**RAFAEL PACHECO STIKAN**

**Dissertação submetida ao Corpo Docente do  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica da Universidade Federal do Espírito  
Santo como requisito parcial para a obtenção do  
grau de Mestre em Engenharia Mecânica na área  
de concentração em Mecânica dos Sólidos.**

**ORIENTAÇÃO: PROF. DR. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO**

**VITÓRIA, JUNHO DE 2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**“Tensores Fundamentais da Formulação dos Problemas Elásticos  
Axissimétricos pelo Método dos Elementos de Contorno”**

**RAFAEL PACHECO STIKAN**

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador**  
**Universidade Federal do Espírito Santo – UFES**

---

**Prof. PhD. Fernando César Mera Menandro**  
**Universidade Federal do Espírito Santo – UFES**

---

**Prof. Dr. José Antônio Marques Carrer**  
**Universidade Federal do Paraná– UFPR**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração em Mecânica dos Sólidos.

**Vitória, junho de 2006**

**Dedico este trabalho aos meus Pais,  
Donaldo e Edinéa, à minha irmã e  
à minha esposa Daizy,  
que estiveram sempre presentes,  
incentivando-me na  
realização deste sonho.**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus quem me inseriu incondicionalmente no ramo da tecnologia e pesquisa me fazendo ultrapassar todas as etapas de minha vida acadêmica, como esta, sendo-me fiel a todo instante.

À minha família por ter me fornecido toda a base física, espiritual e psicológica que me sustentou incessantemente durante todos os anos de minha vida sendo responsável pelo meu sucesso acadêmico, profissional e pessoal.

À minha esposa Daizy pelo suporte e incentivo em todas as horas, sendo parte integrante e indispensável ao bom andamento e conclusão deste trabalho.

Ao apoio através das bolsas de mestrado oferecidas pelas entidades de incentivo à pesquisa como a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e a ANP (Agência Nacional do Petróleo) as quais me acolheram durante este trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto pela sua indescritível contribuição de amizade e conhecimento durante todo período em que estive sob sua orientação, e pela sua imensurável participação no meu crescimento intelectual, profissional e pessoal. Sempre compreensivo, incentivou minhas próprias idéias e adicionou conteúdo a este trabalho através de sua imensa experiência e, sobretudo, competência.

Aos Professores Oswaldo Paiva Almeida Filho, Gil Rangel, Gérard Michot e todos os outros professores, especialmente Maria Ângela Loyola, que sempre acreditou no meu potencial me proporcionando experiências práticas que foram, sem dúvida, fundamentais ao meu crescimento profissional e acadêmico.

A todos os colegas e amigos da Graduação e Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo e tantos outros, especialmente aos integrantes da Equipe Vitória Baja, que mesmo não percebendo, contribuíram enormemente à minha vida acadêmica.

## RESUMO

Este trabalho consiste na resolução de problemas elásticos axissimétricos utilizando a formulação do Método dos Elementos de Contorno. A solução de Kelvin, a qual considera uma carga unitária concentrada em um domínio infinito com propriedades e comportamento elásticos, foi tomada como solução fundamental cartesiana tridimensional do problema.

O problema originalmente tridimensional é, então, primeiramente expresso em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e posteriormente integrado em relação à variável “ $\theta$ ” transformando-se num problema bidimensional  $(r, z)$ . Nesta integração há o aparecimento de integrais elípticas e suas derivadas, as quais são manipuladas para a obtenção das expressões de deformações e tensões fundamentais. Estas expressões levam a uma grande quantidade de integrais singulares que são resolvidas, em sua maioria, com o uso de pontos externos ao domínio como pontos fonte do método.

## ABSTRACT

This work presents the Boundary Element formulation to axisymmetric elastic problems. The Kelvin solution, which uses a unitary concentrated load in an infinite elastic domain to generate the fundamental solution, is taken into account.

Initially, the three-dimensional problem expressed in cartesian coordinates is transformed to cylindrical ones. In a second step the mathematical expressions are integrated in the “ $\theta$ ” variable, changing into a two-dimensional model. In this mathematical strategy occur elliptic integrals and their derivatives, which are manipulated to achieve the fundamental stresses. Cumbersome singular integrals would need to be solved using traditional collocation of source points on the boundary. Here the positions of source points are external to physical domain, avoiding singularities.

## ÍDICE DE TABELAS

TABELA 7.1 – DESLOCAMENTO RADIAL  $u_r$  (EM METROS) AO LONGO DO RAIO..... 97

TABELA 7.2 – TENSÃO NORMAL  $\sigma_{\theta\theta}$  (PA) AO LONGO DO RAIO..... 97

TABELA 7.3 – DESLOCAMENTO  $u_\theta$  (EM METROS) AO LONGO DO RAIO..... 102

TABELA 7.4 – TENSÃO DE CISALHAMENTO  $\tau_{r\theta}$  (PA) PARA 3 PONTOS NA SUPERFÍCIE EXTERNA. 102

## ÍNDICE DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 1.1 – SIMPLIFICAÇÃO DO DOMÍNIO E DO CONTORNO NOS CASOS AXISSIMÉTRICOS .....  | 14 |
| FIGURA 2.1 – PARALELEPÍPEDO ELEMENTAR DE TENSÕES NUM PONTO .....  | 22 |
| FIGURA 2.2 – REPRESENTAÇÃO E SIMPLIFICAÇÃO DE UM PROBLEMA AXISSIMÉTRICO .....   | 29 |
| FIGURA 2.3 – REPRESENTAÇÃO FÍSICA DOS ESFORÇOS NA DIREÇÃO CIRCUNFERENCIAL .....   | 30 |
| FIGURA 4.1 – COORDENADAS CILÍNDRICAS PARA O PONTO “P” SITUADO NO CONTORNO DA SEÇÃO DE REVOLUÇÃO, E PARA O PONTO “Q” SITUADO NO CONTORNO TRIDIMENSIONAL DO CORPO ..... | 45 |
| FIGURA 6.1 – ELEMENTO DE GEOMETRIA RETILÍNEA .....  | 72 |
| FIGURA 6.2 – GEOMETRIA RETILÍNEA - ELEMENTO DIFERENCIAL .....   | 73 |
| FIGURA 6.3 – ELEMENTO DE GEOMETRIA NÃO RETILÍNEA .....  | 74 |
| FIGURA 6.4 – VETOR POSIÇÃO E VETORES UNITÁRIOS.....   | 76 |
| FIGURA 6.5 - ELEMENTO DIFERENCIAL DA CURVA .....  | 76 |
| FIGURA 6.6 - SISTEMA DE COORDENADAS ADIMENSIONAL .....  | 79 |
| FIGURA 6.7 - TIPOS DE ELEMENTO DE CONTORNO.....   | 81 |
| FIGURA 6.8 - NÓS GEOMÉTRICOS E PONTOS EXTERNOS AO CONTORNO DE UMA ESFERA OCA ....   | 86 |
| FIGURA 6.9 - REPRESENTAÇÃO DOS VETORES NORMAL E TANGENTE .....  | 87 |
| FIGURA 6.10 – DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO .....   | 89 |
| FIGURA 7.1 - ESFERA OCA SUBMETIDA À PRESSÃO INTERNA .....   | 94 |
| FIGURA 7.2 – MODELO SIMPLIFICADO (UM QUARTO DE ESFERA) CONSIDERANDO UMA SEÇÃO DE  |    |

|  |     |
|--|-----|
| REVOLUÇÃO SUBMETIDA A CONDIÇÕES DE CONTORNO ADEQUADAS.....                                       | 95  |
| FIGURA 7.3 – MALHA UTILIZADA NA SIMULAÇÃO DA ESFERA OCA .....                                    | 96  |
| FIGURA 7.4 – ERRO MÉDIO PERCENTUAL NO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS RADIAIS .....                    | 98  |
| FIGURA 7.5 - ERRO MÉDIO PERCENTUAL NA DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES CIRCUNFERENCIAIS .....            | 99  |
| FIGURA 7.6 - CILINDRO CIRCULAR VAZADO SUBMETIDO A TENSÕES CISALHANTES NA SUPERFÍCIE INTERNA..... | 100 |
| FIGURA 7.7 – CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SEÇÃO DE REVOLUÇÃO DO CILINDRO CIRCULAR OCO .....          | 100 |
| FIGURA 7.8 – MALHA UTILIZADA NA SIMULAÇÃO DO CILINDRO CIRCULAR OCO.....                          | 101 |
| FIGURA A.1 – GRÁFICO DE $F(u(\theta))$ , $\theta \in [0, \pi/2]$ .....                           | 110 |
| FIGURA A.2 – GRÁFICO DE $F(u(\theta))$ , $\theta \in [0, \pi]$ .....                             | 110 |

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO I

---

### INTRODUÇÃO

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS ..... | 13 |
| 1.2 - OBJETIVO .....             | 15 |
| 1.3 – RESUMO HISTÓRICO.....      | 16 |

## CAPÍTULO II

---

### ELASTOSTÁTICA

|  |    |
|--|----|
| 2.1 - INTRODUÇÃO .....                             | 18 |
| 2.2 - EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA .....      | 19 |
| 2.2.1 – EQUAÇÕES DE EQUILÍRIO .....                | 21 |
| 2.2.2 – EQUAÇÕES CINEMÁTICAS .....                 | 24 |
| 2.2.3 – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....                | 26 |
| 2.2.4 – EQUAÇÃO GERAL DE GOVERNO .....             | 27 |
| 2.3 - CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO AXISSIMÉTRICO ..... | 28 |

### **CAPÍTULO III**

---

#### **SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS AXISSIMÉTRICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

|  |    |
|--|----|
| 3.1 - INTRODUÇÃO.....                          | 33 |
| 3.2 - FORMULAÇÃO DO MEC NA ELASTOSTÁTICA ..... | 35 |

### **CAPÍTULO IV**

---

#### **OBTENÇÃO DOS TENSORES FUNDAMENTAIS PARA PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS ELASTOSTÁTICOS**

|  |    |
|--|----|
| 4.1 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRIDIMENSIONAIS EM COORDENADAS<br>CARTESIANAS..... | 42 |
| 4.2 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS AXISSIMÉTRICAS EM COORDENADAS<br>CILÍNDRICAS.....  | 44 |

### **CAPÍTULO V**

---

#### **OBTENÇÃO DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES**

#### **NO INTERIOR DO DOMÍNIO**

|   |    |
|---|----|
| 5.1 - EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS ..... | 55 |
| 5.2 - EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE TENSÕES EM PONTOS INTERNOS .....       | 57 |

## CAPÍTULO VI

---

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MEC

|   |    |
|---|----|
| 6.1 - INTRODUÇÃO .....  | 70 |
| 6.2 – PROCEDIMENTO NUMÉRICO GERAL .....                         | 71 |
| 6.2.1 – <i>ELEMENTOS COM GEOMETRIA LINEAR</i> .....             | 72 |
| 6.2.2 - <i>ELEMENTOS COM GEOMETRIA QUADRÁTICA</i> .....         | 74 |
| 6.2.3 – <i>EXPRESSÕES DOS INTEGRANDOS</i> .....                 | 75 |
| 6.2.4 – <i>FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO</i> .....                    | 78 |
| 6.2.5 – <i>INTEGRAÇÃO NUMÉRICA</i> .....                        | 80 |
| 6.2.6 – <i>POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTE</i> .....            | 84 |
| 6.3 – EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULOS DE TENSÕES NO CONTORNO ..... | 87 |

## CAPÍTULO VII

---

### SIMULAÇÃO NUMÉRICA

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| 7.1 – ESFERA OCA.....            | 94 |
| 7.2 – CILINDRO CIRCULAR OCO..... | 99 |

## **CAPÍTULO VIII**

---

### **COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES**

|  |            |
|--|------------|
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b> | <b>106</b> |
|--|------------|

## **APÊNDICE A**

---

### **INTEGRAIS ELÍPTICAS**

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| A.1 – INTRODUÇÃO.....         | 107 |
| A.2 – FORMAS DE LEGRENGE..... | 108 |

## CAPÍTULO I

---

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

São numerosos e extremamente importantes os problemas axissimétricos em diversos setores da Engenharia. Quase sempre estão associados a alguma forma de transmitir ou armazenar energia, como: tubulações, vasos de pressão, tambores, rotores, linhas de transmissão, solenóides, etc. A grandeza física associada pode ser o deslocamento, a temperatura, o potencial elétrico ou funções especiais de tensão, entre outras, pertinentes a qualquer disciplina ligada à área tecnológica.

É natural, portanto, que muitas pesquisas de cunho científico ainda se concentrem no aprimoramento de tratamentos matemáticos de problemas axissimétricos. Considerando atualmente as necessidades imperiosas de soluções computacionais eficientes, os esforços

científicos incluem o desenvolvimento de métodos numéricos que disponibilizem soluções precisas e acessíveis destes problemas.

Sabe-se que a aplicação do Método dos Elementos de Contorno para problemas axissimétricos pode ser bastante vantajosa se as equações integrais forem previamente integradas na direção circunferencial, resultando posteriormente num modelo bidimensional onde apenas a seção de revolução, como a seção hachurada mostrada na Figura 1.1, necessita ser discretizada.

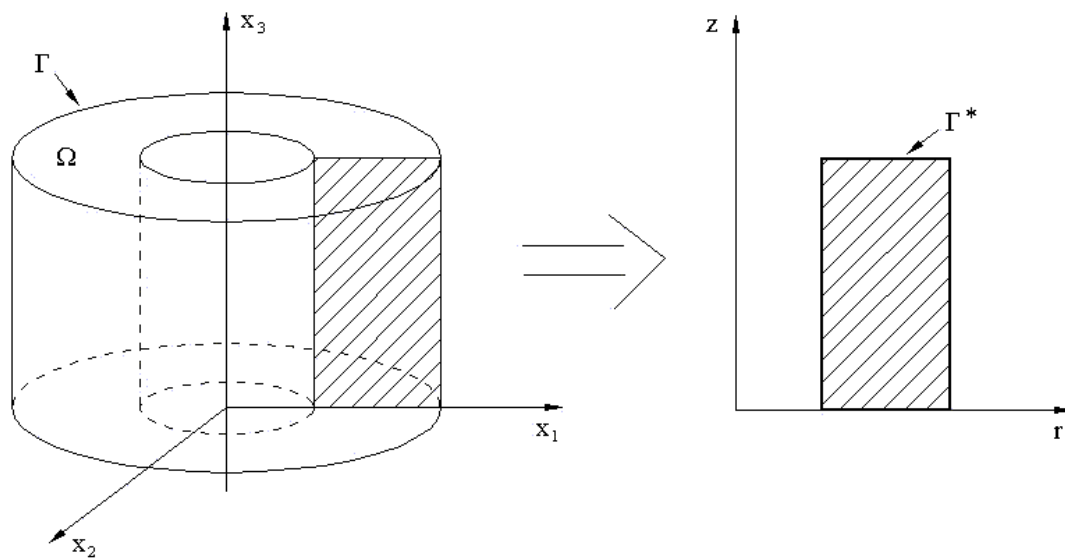


Figura 1.1 – Simplificação do domínio e do contorno nos casos axissimétricos

É preciso ressaltar que também são frequentes os casos em que o corpo possui geometria axissimétrica, mas está sujeito a carregamentos não axissimétricos, de forma que o problema depende matematicamente também da coordenada angular. Estes casos, todavia, devido à sua maior complexidade, não serão aqui tratados.

## 1.2 - OBJETIVO

Este trabalho consiste na resolução de problemas elásticos axissimétricos utilizando a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, gerada a partir da forma integral inversa associada à equação diferencial de governo descrita em Brebbia [1], expressando as grandezas físicas do problema como variáveis básicas ou primais.

A solução de Kelvin, a qual considera uma carga unitária concentrada em um domínio infinito com propriedades e comportamento elásticos, foi tomada como solução fundamental cartesiana tridimensional do problema.

O problema originalmente tridimensional é, então, primeiramente expresso em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e posteriormente integrado em relação à variável angular “ $\theta$ ”, transformando-se num problema bidimensional em termos do par  $(r, z)$ . Nesta integração há o aparecimento de integrais elípticas e suas derivadas, as quais são manipuladas para a obtenção das expressões de deformações e tensões fundamentais. Dentro do contexto do Método dos Elementos de Contorno, exposto em termos de uma formulação integral inversa, estas expressões levam a uma grande quantidade de integrais singulares, que são resolvidas, em sua maioria, com o uso de pontos externos ao domínio como pontos fonte do método.

### 1.3 - RESUMO HISTÓRICO

Este procedimento nos problemas de campo escalar tem sido implementado com generalidade, devido à relativa facilidade na obtenção de equações elípticas resultantes. No entanto, nos problemas de elasticidade, onde a solução do campo vetorial acarreta em integrais elípticas mais complexas, este procedimento tem sido muito limitado, exatamente pelas dificuldades enfrentadas na derivação destas integrais elípticas, mais especificamente quando da obtenção da tensão fundamental. Nos trabalhos realizados por Kermanidis [2], Cruse et al [3], Mayr & Neureiter [4] e ainda Brebbia et al [5], foram apresentadas expressões para as deformações fundamentais; porém, as tensões fundamentais foram deixadas em função das derivadas das deformações. Além disso, apenas no primeiro trabalho [2], foi apresentada a solução fundamental nas três coordenadas do sistema de coordenadas cilíndricas. De modo a apresentar mais detalhadamente todo o conteúdo inerente à formulação matemática do problema elástico axissimétrico, no presente trabalho estão explicitadas, com o auxílio do software “Maple”, todas as expressões que compõem a solução fundamental do problema, os chamados “kernels”, sobretudo as componentes do tensor tensão, pois estes não são apresentados claramente sequer por Brebbia [6]. Se em um outro artigo, Mayr et al [7] explicitaram estas soluções fundamentais para um carregamento arbitrário (não axissimétrico, inclusive), infelizmente suas expressões continham erros de impressão.

Uma outra dificuldade encontrada na abordagem destes problemas axissimétricos deve-se à diversidade de integrais de contorno singulares quando se toma um ponto situado no

contorno como ponto fonte. Para contornar essa dificuldade, neste trabalho são utilizados pontos fonte fora do domínio, o que evita a necessidade de solução de uma grande quantidade de integrais singulares. Em adição a isto, são ainda apresentados resultados que mostram o bom desempenho do método em termos de precisão e economia computacional, principalmente com relação aos modelos tridimensionais.

## CAPÍTULO II

---

### ELASTOSTÁTICA

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

A experiência mostra que todo material sólido se deforma quando alguma força lhe é exercida, interna ou externamente, mantendo-se o equilíbrio estático. Microscopicamente, pode-se dizer que os átomos e as moléculas que compõem um dado corpo, mesmo distando de valores ínfimos umas das outras, ainda possuem espaço para se deslocar, alterando ou não o volume em seu entorno. No caso de materiais lineares, homogêneos e isotrópicos, existem relações lineares relativamente simples entre as deformações e os esforços aplicados, da mesma maneira que um alongamento de uma mola é proporcional à força que nela é exercida. Havendo linearidade, as deformações são, então, reversíveis: tão logo a mola é relaxada, a mesma retornará ao seu comprimento inicial. Estas leis de proporcionalidade constituem o que é chamado de Elasticidade Linear. Conhecer o comportamento do material é importante para definir seu correto uso e também a interação com os outros componentes do conjunto.

Pode-se determinar as condições de equilíbrio estático, sem se ocupar da distribuição interna dos esforços, fazendo-se uso da Mecânica dos Corpos Rígidos. Esta disciplina é fundamentada no fato de que quando uma força é aplicada em um ponto qualquer de uma

estrutura é admitido que sua ação é transmitida instantaneamente para todas as partes da mesma, produzindo reações imediatas nos apoios ou vínculos existentes e promovendo movimentos lineares e angulares caso não haja restrições nesse sentido.

A Mecânica dos Corpos deformáveis, por sua vez, considera a flexibilidade da estrutura e, conseqüentemente, as alterações da configuração geométrica original em razão da distribuição de forças em seu interior, cujos efeitos locais se traduzem em termos de grandezas como a tensão e a deformação. Foi a partir desta necessidade que se desenvolveram os estudos da Teoria da Elasticidade, que ajudam a entender o que acontece no interior de um corpo submetido a qualquer carregamento.

Seguindo as definições usuais da literatura técnica, tem-se que a Teoria da Elasticidade é a disciplina da Mecânica que se ocupa em formular expressões, matematicamente rigorosas, que descrevem as relações entre tensões, deformações e deslocamentos, em corpos sólidos elásticos. As seções que se seguem tratam exatamente de resumir os princípios desta disciplina.

## **2.2 - EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA**

Para dedução e apresentação das equações diferenciais e integrais da Elastostática é preciso se fazer algumas considerações físicas e utilizar artifícios matemáticos objetivando facilitar a compreensão destas equações.

Uma poderosa ferramenta operacional chamada notação indicial, por ser simples e concisa, será utilizada na descrição de algumas equações. Suas vantagens podem ser observadas principalmente nas operações de diferenciação.

Para a constituição dos corpos, algumas considerações físicas serão feitas. Algumas

delas já foram expostas anteriormente, mas a importância delas justifica sua repetição nesta. A primeira hipótese é a de que os corpos que estão submetidos às forças são perfeitamente elásticos, isto é, retornam ao seu estado original quando a ação dessas forças é interrompida.

Também parte-se do princípio de que a matéria de um corpo elástico é homogênea e distribuída continuamente no seu volume. Admite-se ainda, que o corpo é isotrópico, isto é, que seu material apresenta as mesmas propriedades elásticas em todas as direções. Assim sendo, será garantido que as propriedades do meio estudado variam de maneira contínua de um ponto a outro do corpo.

É, também, imprescindível considerar que as deformações e seus deslocamentos correspondentes sejam pequenos, de modo que a linha de ação das forças externas não se altere, satisfazendo assim as condições de homogeneidade e superposição dos carregamentos.

As pequenas variações nas dimensões do corpo e os pequenos deslocamentos dos pontos de aplicação das forças externas são desprezados. Desta forma, as equações de equilíbrio do corpo estarão sempre relacionadas à configuração inicial do carregamento no corpo.

Uma última consideração, importante para futuros procedimentos matemáticos, consiste de que numa integração, o volume elementar estudado será suposto pequeno em relação ao volume total, porém grande suficiente em relação ao tamanho de quaisquer discontinuidades possivelmente existentes na superfície do corpo.

Assim sendo, doravante, com o auxílio das hipóteses explanadas, serão apresentadas as equações básicas que governam o equilíbrio local no meio contínuo, a compatibilidade de movimentos no entorno de um ponto e as relações entre tensões e deformações.

## 2.2.1 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Quando um corpo é submetido a algum esforço externo, forças de coesão se desenvolvem no interior do material a fim de assegurarem a integridade da matéria. Ao mesmo tempo, essas reações se distribuem genericamente de forma contínua e com diferente intensidade e direção em todas as partes do corpo, visando estabelecer o equilíbrio.

De modo a melhor qualificar esses esforços, é preciso analisá-los localmente e normalizá-los com relação a uma dimensão característica, que é a área de aplicação. De fato, é razoável admitir que os elementos de matéria contínua exercem, uns sobre os outros, forças de coesão dentro de um pequeno raio de ação, num determinado plano. Para tanto, estabelece-se o conceito de tensão e as grandezas dele derivadas.

Assim, define-se formalmente tensão como sendo a grandeza que expressa a intensidade e a direção das forças internas presentes num dado corpo, atuantes num ponto particular, agindo em determinado plano. Esta definição mostra que o estado de tensão não apenas pode variar de ponto a ponto, mas depende do plano escolhido e nele possui componentes vetoriais próprias. Esta definição complexa se explica devido ao fato do estado de tensão ser matematicamente um tensor de segunda ordem ou um diádico.

Uma observação mais meticulosa mostrará que de fato o estado de tensão requer um número maior de dados para sua caracterização, conforme mostra a Figura 2.1 a seguir.

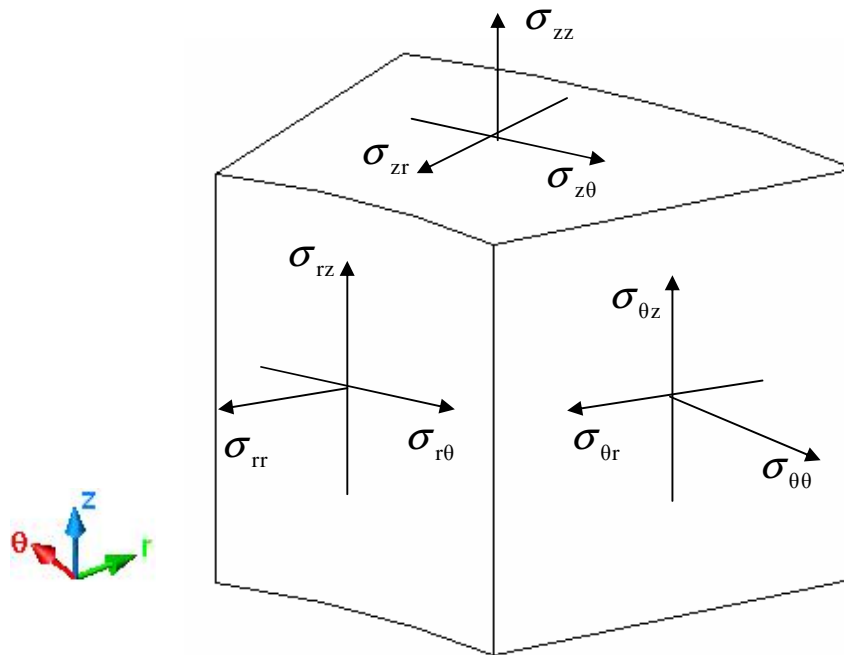


Figura 2.1 – Paralelepípedo elementar de tensões num ponto

Como se pode observar, em cada plano ortogonal existe um conjunto de três diferentes componentes de tensão. Cada um desses três componentes é um escalar, mas o trio define um vetor no plano, denominado de vetor tensão  $p_j$ . Embora possua dimensão similar à de uma pressão, devido a representar o esforço distribuído numa superfície elementar, é uma grandeza vetorial e depende da orientação do plano considerado.

O conjunto de três vetores tensão em planos linearmente independentes, usualmente ortogonais, constituídos de nove componentes escalares, define o estado de tensão através do tensor tensão. É comum representá-los geometricamente através de um paralelepípedo elementar e analiticamente através de matrizes quadradas. É importante ressaltar que as componentes escalares do tensor tensão são sempre de dois tipos: normais e cisalhantes, independentemente da forma de ação externa (mecânica, térmica ou eletromagnética, etc) atuando por efeito de contato (pressão ou fricção) ou por interação com um campo (gravitacional, inercial, centrífugo, etc.).

É possível demonstrar que conhecido o vetor tensão em três planos linearmente independentes é possível determinar o vetor tensão em qualquer outro plano. Logo, o estado de tensão num ponto pode ser completamente representado pelas suas componentes nestes três planos linearmente independentes. Demonstra-se ainda que o estado de tensão num ponto é inalterável, qualquer que seja sua representação. Diferentes posicionamentos do paralelepípedo elementar não lhe alteram as propriedades denominadas de invariantes.

As diferentes componentes do tensor tensão no interior do corpo e também na sua superfície externa devem satisfazer, respectivamente, as condições de equilíbrio para o domínio e para o contorno. Tais equações de equilíbrio estático, que regem o problema no qual um corpo tridimensional é sujeito a carregamentos internos e externos também tridimensionais, são descritas abaixo:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad , \text{ no domínio } \Omega \quad (2.01)$$

$$p_j = \sigma_{ij} n_i \quad , \text{ no contorno } \Gamma \quad (2.02)$$

Na equação (2.02)  $n_i$  representa os cossenos diretores do vetor unitário normal à superfície sobre a qual a força de superfície age, apontando para fora do domínio.

Analisando as tensões que atuam sobre um volume elementar no que tange ao seu equilíbrio estático, é imediata a obtenção da equação a seguir quando se efetua a somatória de momentos:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.03)$$

Essa condição, que dá origem à simetria do tensor das tensões, só não seria verdadeira nos pontos em que houvessem momentos concentrados aplicados. Essa condição é fisicamente inviável. Daí resulta, então, que as tensões cisalhantes são ditas recíprocas: tem mesmo módulo quando seus planos compartilham uma aresta do paralelepípedo elementar.

Como se pode observar, a equação (2.01) corresponde ao equilíbrio no domínio ou interior do corpo, e a equação (2.02) corresponde ao equilíbrio na superfície externa ou

contorno.

## 2.2.2 - EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

A atuação das forças implica na transformação da configuração original do corpo no espaço em outra, cujo processo é chamado movimento. O movimento não inclui apenas trajetórias no espaço, mas também alteração na disposição interna das partes do sistema. Nos problemas da Mecânica dos Sólidos, os vínculos do corpo com partes fixas (apoios, engastes, pinos etc.) fazem com que os movimentos de corpo rígido sejam limitados e movimentos internos das partes do corpo sejam significativos numa análise com vistas à sua integridade. O diferencial entre os movimentos sofridos por essas partes tem assim grande importância; pontos vinculados não se movimentam e outros apresentam destacada alteração no seu posicionamento. É importante, portanto, acompanhar os movimentos localmente. Com esse propósito, é comum empregar-se uma nova nomenclatura, que expresse o movimento local das partículas. Assim, denomina-se por deslocamento a distância percorrida por um ponto do corpo, devido ao movimento resultante da aplicação de esforços externos, com relação a uma posição de referência, normalmente tomada na configuração indeformada do corpo.

O deslocamento de um ponto, entretanto, não é uma grandeza suficiente para estabelecer uma relação matematicamente satisfatória entre os esforços e o movimento resultante de sua ação no corpo, por duas principais razões. Primeiramente, experiências simples em ensaios de tração mostram que é preciso adimensionalizar a relação entre os esforços e o tamanho do corpo, de modo que a resposta elástica a um determinado nível de tensão independa da dimensão do corpo. Em segundo lugar, as tensões surgem devido a gradientes de deslocamento, pois movimentos de corpo rígido por si só não produzem esforços internos. Assim, é preciso contabilizar os diferenciais de movimento entre partículas adjacentes, considerando seu distanciamento original. Surge daí o conceito de deformação. Se um mapeamento dos deslocamentos correspondentes à configuração anterior e à posterior não

preservar as distâncias entre as partículas, há deformação.

No entanto, existem várias medidas de deformação. Todas envolvem o gradiente do campo de deslocamentos como medida básica. No caso de pequenos deslocamentos e movimentos de corpo rígido desprezíveis, pode-se representar a deformação do corpo com ajuda das equações conhecidas como Equações Cinemáticas Lineares:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.04)$$

No conjunto de equações anterior,  $\varepsilon_{ij}$  é a expressão indicial do diádico chamado de tensor de Green para pequenas deformações. A possibilidade de rotações induzirem tensões no corpo motiva definições mais abrangentes do que a exposta, que foi baseada na alteração da distância relativa entre partículas. É o caso de movimento de cordas e cabos, cuja rotação está associada a um acréscimo de esforço. Entretanto, para a Elastostática linear, aqui abordada, a idéia apresentada é plenamente satisfatória.

A equação (2.04) representa, na realidade, um conjunto de seis equações de deformação expressas em termos três deslocamentos. Isso indica que essas seis componentes de deformação não podem ser independentes; devem satisfazer condições adicionais, conhecidas como equações de compatibilidade de deformações, que formam um conjunto de 81 equações originais, definidas indicialmente por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.05)$$

No entanto, a maior parte delas é redundante ou identicamente nula. Apenas 6 são distintas e, na realidade, somente 3 são independentes. Logo, as condições de compatibilidade introduzem 3 equações adicionais, o suficiente para permitir a relação inequívoca entre deslocamentos e deformações. Deve-se ressaltar que o uso das equações de compatibilidade somente se faz necessário se a formulação do problema se partir do campo de tensões e daí para o cálculo dos deslocamentos resultantes; caso se determine inicialmente o campo de deslocamentos, o uso da equação (2.04) pode ser feito diretamente, sem problemas.

### 2.2.3 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

As relações entre tensões e deformações envolvem propriedades físicas que variam de material para material. Por essa razão, também são conhecidas como equações constitutivas. No caso linear, por analogia com o comportamento de uma mola sob tração, seguem uma relação comumente denominada de Lei de Hooke Generalizada. No caso de um material isotrópico, as relações entre tensões e deformações são definidas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.06)$$

Na equação anterior  $\lambda$  e  $\mu$  são conhecidas como as constantes de Lamé. Estas constantes não são muito adequadas a estudos práticos, sendo usualmente expressas através de outras constantes físicas, bem conhecidas em outras disciplinas correlatas: E (módulo de elasticidade longitudinal), G (módulo de elasticidade transversal) e  $\nu$  (coeficiente de Poisson). Assim pode-se expressar  $\lambda$  e  $\mu$  segundo as seguintes relações:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.07)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.08)$$

Substituindo (2.07) e (2.08) em (2.06) tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.09)$$

Ou de forma inversa por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.10)$$

## 2.2.4 - EQUAÇÃO GERAL DE GOVERNO

As equações (2.01), (2.04) e (2.09) representam um conjunto de 15 equações para 15 incógnitas em problemas tridimensionais. Para se gerar uma equação vetorial concisa, denominada de equação de governo, o procedimento consiste em substituir (2.04) em (2.09) para obter a tensão em função do gradiente dos deslocamentos e, depois, substituir este resultado em (2.01) para obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para os deslocamentos. A equação resultante destas operações também é conhecida como Equação de Navier. Indicialmente, expressa-se tal equação por:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad , \text{em } \Omega \quad (2.11)$$

onde  $u_j$  é o vetor deslocamento.

Procedendo da mesma forma, porém, substituindo (2.04) em (2.09) como anteriormente e agora substituindo este resultado em (2.02), obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem, que é válida para o contorno do corpo:

$$\frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k} n_i + G (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = p_i \quad , \text{em } \Gamma \quad (2.12)$$

Observa-se que para a solução da Equação de Navier não é necessário resolver as equações de compatibilidade de deformações, pois é uma formulação de deslocamentos. O procedimento para a obtenção das tensões consiste em se conseguir, primeiramente, a solução de (2.11). Conhecido o campo de deslocamentos, utiliza-se a equação (2.04) para o cálculo

das deformações e, finalmente, emprega-se a equação (2.09) para o cálculo das tensões. A equação (2.12) é utilizada para que sejam satisfeitas as condições de contorno no que diz respeito a forças na superfície.

## 2.3 - CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO AXISSIMÉTRICO

Em toda a análise realizada até o momento foi considerado o espaço como tridimensional. No entanto, em muitos problemas práticos, a conformação geométrica do corpo e a distribuição espacial do carregamento nele aplicado facultam simplificações nas relações anteriormente apresentadas. Desta forma, antes de insistir em maiores considerações sobre o estado geral de tensões e deformações tridimensional, é importante compreender em quais circunstâncias pode-se admitir estados menos complicados.

Realmente, existem algumas classes de problemas da engenharia que, ao satisfazer determinadas condições de geometria e carregamento, podem ser estudadas considerando duas dimensões ou mesmo uma dimensão apenas. Tal redução implica naturalmente em enorme simplificação matemática.

O problema de análise de tensão em corpos de revolução (corpos axissimétricos) sob carregamentos axissimétricos é um deles. Tais problemas têm considerável interesse prático, conforme foi exposto na introdução do presente trabalho.

Por definição, corpos axissimétricos são aqueles nos quais identifica-se a existência de um eixo de revolução, em torno do qual a rotação completa de uma seção bidimensional gera o corpo em sua totalidade. A figura a seguir, já apresentada anteriormente, ilustra o exposto.

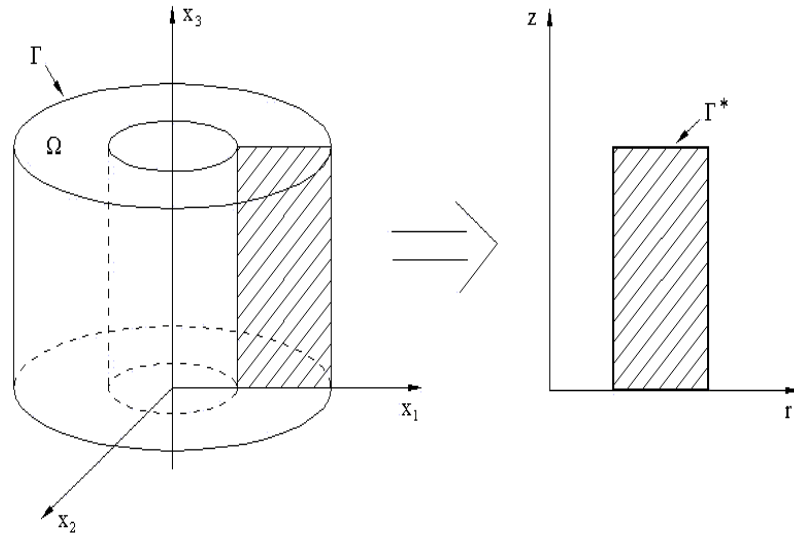


Figura 2.2 – Representação e simplificação de um problema axissimétrico

Como o giro completo da seção de revolução representa o corpo, o equacionamento dos problemas axissimétricos pode ser expresso em termos simplificados mediante adequadas transformações, resultando num modelo tipicamente bidimensional.

Deve-se atentar que não apenas a geometria deve ser axissimétrica; o carregamento e os vínculos também o devem ser pois, em caso contrário, o problema como um todo continua tridimensional e irreduzível às formas bidimensionais de representação, a não ser através de técnicas matemáticas mais sofisticadas, envolvendo, por exemplo, a Série de Fourier. Neste caso, o problema original, com geometria axissimétrica, passaria a ser expresso por uma combinação de problemas axissimétricos sujeitos a carregamentos distintos, associados aos harmônicos da série, tais que resultem nas ações tridimensionais originalmente aplicadas.

Por simetria, as duas componentes dos deslocamentos em qualquer seção plana do corpo ao longo de seu eixo axial de simetria (eixo de revolução) definem completamente o estado de deformação, e conseqüentemente, o estado de tensão.

Na situação axissimétrica qualquer deslocamento axial automaticamente induzirá uma deformação na direção circunferencial e, como as tensões nesta direção são certamente não-

nulas, as componentes de deformação e de tensão associadas têm que ser levadas em consideração. Aí está a diferença essencial no tratamento dos problemas axissimétricos com relação aos problemas de estado plano de tensão e deformação. .

Para se obter a solução de uma gama de problemas axissimétricos muito maior, pode-se tratar o problema tridimensionalmente em coordenadas cilíndricas e efetuar a integração analítica na direção circunferencial. Desta forma é possível se resolver estados de tensão em corpos axissimétricos que apresentem componentes de torção em torno do eixo axial, correspondente à direção  $x_3$  no plano em destaque na Figura 2.2. Assim, o problema estará sendo resolvido de maneira bidimensional em que a única diferença estará no acréscimo de condições de contorno referentes à coordenada circunferencial do sistema de coordenadas cilíndricas, como está mostrado na Figura 2.3 mostrada a seguir.

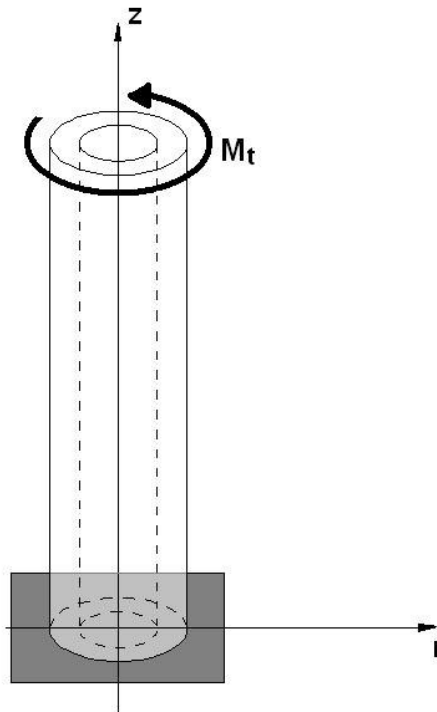


Figura 2.3 – Representação física dos esforços na direção circunferencial

Desta maneira, para a resolução desta gama de problemas chamados axissimétricos, deve-se adotar o uso de coordenadas cilíndricas. Para tanto, as equações explicitadas em coordenadas cilíndricas que possuem origem na equação (2.09), serão:

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right] \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (2.14)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \right] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz} \quad (2.16)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2G \varepsilon_{r\theta} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{z\theta} = 2G \varepsilon_{z\theta} \quad (2.18)$$

No método dos elementos de contorno é preciso que se tenha facilidade em determinar, observando o problema físico, os valores para os parâmetros chamados condições de contorno. É evidente que o parâmetro de deformação  $\varepsilon_{ij}$  não possui uma visualização imediata, desta maneira, faz-se necessário introduzir o parâmetro deslocamento  $u_i$  que, em coordenadas cilíndricas e para os casos axissimétricos (onde nada varia em relação a  $\theta$ ), se relaciona com o deslocamento conforme a equação (2.04) que, explicitada, se apresenta da seguinte forma:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( u_r + \cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}} \right) \Rightarrow \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (2.20)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.21)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \Rightarrow \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (2.22)$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (2.23)$$

$$\epsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \Rightarrow \epsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (2.24)$$

## CAPÍTULO III

---

### SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS AXISSIMÉTRICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica relativamente nova se comparada com o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou Método das Diferenças Finitas (MDF), mas nem por isso menos importante ou de menor potencialidade. Embora a recentidade de uma técnica numérica resulte sempre em um menor campo de aplicação e divulgação mais limitada, o MEC já passou pelas fases iniciais de intensa investigação e vem se consolidando como uma das mais importantes ferramentas para solução computacional de problemas modelados matematicamente por equações diferenciais complexas, problemas estes que na maioria das vezes têm soluções analíticas muito complexas ou mesmo indisponíveis.

Segundo Brebbia, Telles e Wrobel [5], referindo-se ao MEF, foram dois fatores principais que resultaram no interesse pelos métodos numéricos no início dos anos 60. O primeiro é o grande volume de cálculo que se passou a efetivar com a ajuda de técnicas

adequadas e eficientes para processamento em computador. O segundo motivo foram as importantes pesquisas desenvolvidas tendo como base princípios matemáticos, como o Cálculo Variacional e a Técnica de Resíduos Ponderados, que aprimoraram os conceitos relacionados aos métodos numéricos.

É claro que o desenvolvimento contínuo de computadores cada dia mais poderosos estimulou o desenvolvimento eficiente de programas e técnicas para a solução de problemas de engenharia cada vez mais complexos.

Com relação aos demais métodos numéricos já mencionados, de reconhecida aceitação no meio acadêmico e industrial, o MEC se destaca por ser uma técnica de contorno, enquanto o MEF e o MDF são técnicas de domínio.

Basicamente pode-se dizer que o Método dos Elementos de Contorno tenta transformar um modelo formulado por equações diferenciais parciais, que descreve matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal, em equações integrais envolvendo somente valores de contorno e condições iniciais. Dentro da teoria das Equações Integrais, pode-se realizar essa transformação através do emprego dos Teoremas de Divergência e apoio de funções de auxiliares denominadas soluções fundamentais, dentro de um contexto matemático no qual as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. Também é possível realizar tal transformação através do estabelecimento de uma sentença consistente de resíduos ponderados, na qual as soluções fundamentais fazem o papel de funções de ponderação.

Qualquer seja o caminho adotado, a aplicação bem sucedida do MEC promove a redução da dimensão do problema em uma unidade, e no caso do domínio ser composto exclusivamente por variáveis espaciais, somente o contorno precisa ser discretizado.

Esta é a mais peculiar característica do MEC e uma das suas grandes vantagens, porque ao discretizar somente o contorno vai-se ter uma menor entrada de dados, operações matemáticas e numéricas mais simples e, dependendo da extensão do problema, um menor dispêndio computacional.

Outras vantagens do MEC que poderiam ser mencionadas são: a possibilidade de trabalhar com regiões infinitas; a simulação precisa do efeito da concentração de tensões; a operacionalização fácil dos casos de fronteira variável; e, finalmente, a boa precisão obtida nos muitos problemas já resolvidos. É claro que existem algumas desvantagens, como a complexidade apresentada pela solução fundamental em alguns casos, assim como a menor flexibilidade no trato de problemas de meios heterogêneos e inadequação na abordagem de problemas com domínios delgados.

### 3.2 - FORMULAÇÃO DO MEC NA ELASTOSTÁTICA

Os problemas pertinentes à Mecânica dos Sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos.

Estes problemas são estudados por teorias simplificadas nas quais são consideradas algumas idealizações. As hipóteses mais comumente empregadas consideram o meio contínuo, homogêneo e material elástico linear entre outras.

Inicia-se o estudo rerepresentando a Equação de Navier, vista em (2.11) e repetida aqui por conveniência:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = 0 \quad , \text{em } \Omega \quad (3.01)$$

Existe outra forma de escrever esta equação, correspondendo àquela que utiliza as constantes de Lamé, já apresentadas nas equações (2.07) e (2.08). Empregando tais constantes, a Equação de Navier é reescrita como:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + b_j = 0 \quad (3.02)$$

Neste trabalho serão considerados os casos onde a de carga de domínio é nula, ou seja:

$$b_j = 0 \quad (3.03)$$

A formulação tradicional do MEC, via teoria das Equações Integrais, consiste em ponderar a equação (3.02) por uma função vetorial  $u_j^*$ , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, mostrado a seguir, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

É interessante notar que a função  $u_j^*$ , chamada de solução fundamental, é a solução de um problema elástico correlato, cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas; assim:

$$\mu u_{j,ii}^* + (\lambda + \mu) u_{i,ij}^* + b_j^* = 0 \quad (3.04)$$

Na equação anterior, tem-se as ações singulares representadas por:

$$b_j^* = \Delta(\zeta, X) P_j \quad , P_j = 1 \quad (3.05)$$

Na equação (3.05)  $\zeta$  representa o ponto fonte de aplicação da carga enquanto  $X$  representa o ponto campo.  $\Delta(\zeta, X)$  é a função Delta de Dirac, para a qual tem-se as seguintes propriedades:

$$a) \Delta(\zeta, X) = 0 \quad , \text{ se } \zeta \neq X \quad (3.06)$$

$$b) \Delta(\zeta, X) = \infty \quad , \text{ se } \zeta = X \quad (3.07)$$

$$c) \int_{\Omega} f(X) \Delta(\zeta, X) d\Omega = f(\zeta) \quad , \text{ se } \zeta \in \Omega \quad (3.08)$$

Então, tomando a equação (3.02), ponderando-a pela solução fundamental e integrando-a no domínio, considerando que a carga de domínio é nula (equação 3.03), tem-se a expressão seguinte:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \quad (3.09)$$

O procedimento efetuado a seguir utiliza preferencialmente a propriedade da integração por partes, cuja estrutura consiste em:

$$\int_{\Omega} u v_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} (u v)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} v u_{,i} d\Omega \quad (3.10)$$

Também faz uso do Teorema da Divergência, no qual:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma \quad (3.11)$$

Desenvolvendo então a primeira parcela da equação (3.09):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_{j,i} u_{j,i}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_j u_{j,i}^*)_{,i} + (u_j u_{j,ii}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{j,i} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_j u_{j,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{j,ii}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da mesma forma, desenvolve-se a segunda parcela da equação (3.09):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_{i,i} u_{j,j}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_i u_{j,j}^*)_{,i} + (u_i u_{j,ji}^*)] d\Omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_i u_{j,ji}^*) d\Omega \quad (3.13)$$

Trocando os índices da última parcela da equação (3.13):

$$\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{i,ij}^*) d\Omega \quad (3.14)$$

Substituindo (3.12) e (3.14) em (3.09) e rearranjando:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mu (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu) (u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) (u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

A equação (3.04) apresenta  $u_j^*$  como solução fundamental, a qual deve obedecer à equação de Navier. Desta forma a primeira parcela da equação (3.15) fica:

$$\int_{\Omega} [\mu (u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu) (u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\zeta; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\zeta; x) \quad (3.16)$$

Assim, substituindo (3.16) em (3.15) tem-se:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu) (u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma \quad (3.17)$$

Introduz-se, na equação (3.17), uma expressão auxiliar da forma seguinte:

$$\int_{\Gamma} \mu (u_{i,j} u_j^* n_i - u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

Procedendo-se ao reagrupamento de termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P_j u_j(\zeta) = & \int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_i + \lambda (u_{i,i}) n_j] u_j^* d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma} [\mu u_j u_{j,i}^* n_i + \lambda u_i u_{j,j}^* n_i - \mu u_{i,i} u_j^* n_j + \mu u_i u_{j,j}^* n_i + \mu u_{i,j} u_j^* n_i] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Neste ponto é interessante redefinir a Equação de Navier no contorno, equação (2.12), em termos das constantes de Lamé:

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i = p_i \tag{3.20}$$

Observa-se que a equação (3.20) tem a mesma estrutura da primeira integral da equação (3.19), de tal forma que se pode substituir tal parcela pelo termo equivalente  $p_i$ . Assim, substituindo e reagrupando os termos chega-se a:

$$\begin{aligned}
P_j u_j(\zeta) = & \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i}^* u_j n_i) + \lambda (u_{j,j}^* u_i n_i)] d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito da equação (3.21) e introduzindo-se uma nova identidade auxiliar, do mesmo tipo da equação (3.18), tem-se:

$$\begin{aligned}
P_j u_j(\zeta) = & \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{i,j}^*) n_j + \lambda (u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma} \mu (u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu (u_{j,i}^* u_i - u_{j,i}^* u_i) n_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Reagrupando a expressão da mesma forma que na equação (3.19):

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma +$$

$$- \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i - u_{j,i} u_i^* n_j) d\Gamma \quad (3.23)$$

A segunda integral da equação (3.23) tem a mesma estrutura da equação (3.20), de tal forma que será substituída por  $p_i^*$ . Assim:

$$\int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (3.24)$$

Da equação (3.23), trabalha-se a última integral:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* + u_{i,j} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_{i,i} u_j^* + u_{j,i} u_i^*) n_j d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_j^*) n_j d\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \mu(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} d\Omega - \int_{\Omega} \mu(u_i u_j^*)_{,ij} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \mu[(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} - (u_i u_j^*)_{,ij}] d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

Finalmente, substituindo (3.25) e (3.24) em (3.23) tem-se, então, a expressão da Equação Integral de Contorno:

$$P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (3.26)$$

De (3.05) sabe-se que o módulo de  $P_j$  é igual à unidade. No entanto, do modo como está escrita a equação (3.26), o somatório em  $j$  no primeiro termo do lado esquerdo da citada equação impede que cada carga concentrada  $P_j$  atue independentemente uma da outra. É

necessário, então, reestruturá-la. Uma maneira interessante para a reestruturação consiste em adotar uma estrutura diádica para a solução fundamental e sua derivada normal. Desse modo, tais funções, que correspondem aos deslocamentos e forças de superfície fundamentais, ficam escritos na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\zeta; X) P_i = u_{1j}^* P_1 + u_{2j}^* P_2 \quad (3.27)$$

e

$$p_j^* = p_{ij}^*(\zeta; X) P_i = p_{1j}^* P_1 + p_{2j}^* P_2 \quad (3.28)$$

Por adequação às necessidades estritas do modelo axissimétrico, os índices variaram apenas até dois. Para ajustar-se à nova ordem, requer-se também que cada componente de  $P_i$  seja considerado separadamente, ou seja,  $P_i = \delta_{1i}$  ou  $P_i = \delta_{2i}$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Dessa forma  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção “j” no ponto X, resultado de uma carga unitária agindo na direção “i” e aplicada no ponto  $\zeta$ .

Pode-se demonstrar que a equação anterior é um caso particular de uma expressão geral, apresentada com detalhe por Hartmann em [6], na qual um coeficiente diádico  $C_{ij}$  é introduzido em função do posicionamento do ponto fonte se situar dentro do domínio, fora dele ou exatamente sobre o contorno. Tal coeficiente também introduz a possibilidade de tratamento de contornos não suaves. Desse modo, a equação integral (3.26) transforma-se em:

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(X) p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno para a solução de problemas estáticos de elasticidade. Cabe ressaltar que deduções alternativas a essa podem ser obtidas através do Princípio de Reciprocidade de Betti e pela aplicação de uma sentença de Resíduos Ponderados.

## CAPÍTULO IV

---

### OBTENÇÃO DOS TENSORES FUNDAMENTAIS PARA PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS ELASTOSTÁTICOS

#### 4.1 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TRIDIMENSIONAIS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Como foi visto anteriormente, a solução fundamental  $u_j^*$  é a solução de um problema especial correlato de elastostática, cuja equação de governo foi apresentada na equação (3.4). Esta mesma equação, escrita em termos das constantes físicas de engenharia, é repetida aqui, por conveniência:

$$G u_{j,ii}^* + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{i,ij}^* + b_j^* = 0 \quad (4.01)$$

Obviamente, por ser tratar também de uma Equação de Navier, o problema fundamental governado pela expressão (3.04) também obedece aos princípios de equilíbrio, ou seja:

$$\sigma_{ij,i}^* + b_j^* = 0, \text{ no domínio } \Omega \quad (4.02)$$

Existem algumas soluções da equação (4.01) que podem ser empregadas satisfatoriamente com o MEC. Essas variam com relação ao domínio considerado e com as condições de contorno escolhidas. Será apresentada aqui a solução de Kelvin, que considera o domínio  $\Omega^*$  infinito, com propriedades e comportamento elástico, onde uma carga unitária concentrada atua nas três direções coordenadas.

Embora futuramente a equação integral do MEC para os casos axissimétricos seja reduzida a duas dimensões apenas, os deslocamentos  $u_{ij}^*$  e as forças de superfície  $p_{ij}^*$  são concernentes ao espaço tridimensional e dados pelas equações abaixo:

$$u_{ij}^*(\zeta, X) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left\{ (3-\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (4.03)$$

$$p_{ij}^*(\zeta, X) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (4.04)$$

Nestas equações a variável  $r = r(\zeta, X)$  representa a distância entre o ponto fonte  $\zeta$  de aplicação da carga e o ponto campo  $X$  enquanto  $n_i$  são os cossenos diretores. As derivadas são tomadas com relação às coordenadas  $x_i(X)$ .

Alguns dos componentes das equações (4.03) e (4.04) podem ser definidos através da notação indicial na forma seguinte:

$$a) \quad r = (r_1 r_1)^{1/2} = (r_1 r_1 + r_2 r_2)^{1/2} \quad (4.05)$$

$$b) \quad r_{,i} = x_i(X) - x_i(\zeta) \quad (4.06)$$

$$c) \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(X)} = \frac{r_{,i}}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\zeta)} \quad (4.07)$$

## 4.2 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS AXISSIMÉTRICAS EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Com base nas características dos problemas axissimétricos é adequado utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , definido pelas seguintes equações:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z \quad (4.08)$$

Se  $(x_1(P), x_2(P), x_3(P))$  e  $(x_1(Q), x_2(Q), x_3(Q))$  são, respectivamente, as coordenadas cartesianas de dois pontos arbitrários “P” e “Q” do espaço, então, em coordenadas cilíndricas, tem-se para o ponto “P” (vide Figura 4.1):

$$x_1(P) = r_i \cos \theta = r_i, \quad x_2(P) = r_i \sin \theta = 0, \quad x_3(P) = z_i \quad (4.09)$$

De modo similar, para o ponto “Q”:

$$x_1(Q) = r_j \cos \theta_j, \quad x_2(Q) = r_j \sin \theta_j, \quad x_3(Q) = z_j \quad (4.10)$$

A distância euclidiana entre os pontos “P” e “Q”, em coordenadas cartesianas, é dada por:

$$R(P, Q) = \sqrt{(x_1(Q) - x_1(P))^2 + (x_2(Q) - x_2(P))^2 + (x_3(Q) - x_3(P))^2} \quad (4.11)$$

Esta última equação, expressada em coordenadas cilíndricas, toma a forma descrita por Cisternas et al [8]:

$$R(P,Q) = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \theta_j + (z_i - z_j)^2} \quad (4.12)$$

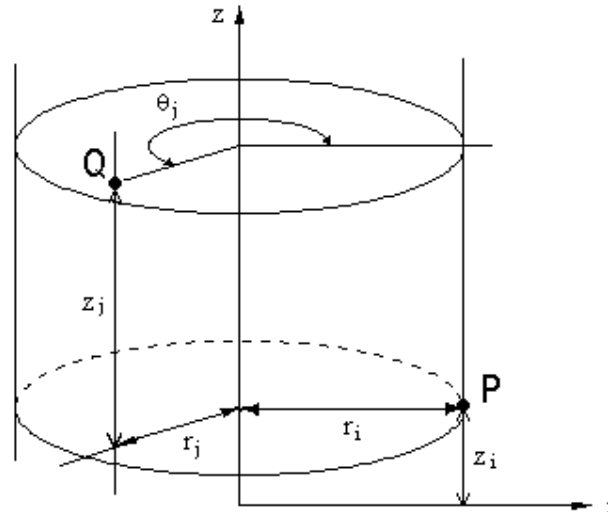


Figura 4.1 - Coordenadas cilíndricas para o ponto “P” situado no contorno da seção de revolução, e para o ponto “Q” situado no contorno tridimensional do corpo

A equação integral utilizada pelo Método dos Elementos de Contorno na solução de problemas elastostáticos em coordenadas cartesianas, já na sua forma matricial tridimensional, será mostrada a seguir com base na equação (3.29), mostrada no capítulo precedente:

$$\begin{aligned} C(P) \begin{bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \\ u_3(P) \end{bmatrix} + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} p_{11}^*(P,Q) & p_{12}^*(P,Q) & p_{13}^*(P,Q) \\ p_{21}^*(P,Q) & p_{22}^*(P,Q) & p_{23}^*(P,Q) \\ p_{31}^*(P,Q) & p_{32}^*(P,Q) & p_{33}^*(P,Q) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(Q) \\ u_2(Q) \\ u_3(Q) \end{bmatrix} d\Gamma \\ = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u_{11}^*(P,Q) & u_{12}^*(P,Q) & u_{13}^*(P,Q) \\ u_{21}^*(P,Q) & u_{22}^*(P,Q) & u_{23}^*(P,Q) \\ u_{31}^*(P,Q) & u_{32}^*(P,Q) & u_{33}^*(P,Q) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1(Q) \\ p_2(Q) \\ p_3(Q) \end{bmatrix} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ressalta-se que, daqui por diante, será abandonada a notação indicial e empregada a notação matricial, para maior clareza das operações realizadas. Na equação anterior, NE

representa o número de elementos discretos escolhidos. Maiores detalhes sobre a formação desta equação matricial podem ser obtidos em Brebbia [6].

Em coordenadas cartesianas, os vetores deslocamento  $\mathbf{u}(X)$  e tensão  $\mathbf{p}(X)$  em um ponto “X” qualquer do contorno, são expressos em função dos respectivos vetores, em coordenadas cilíndricas  $\underline{\mathbf{u}}(X)$  e  $\underline{\mathbf{p}}(X)$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(X) = \begin{bmatrix} u_1(X) \\ u_2(X) \\ u_3(X) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} T(X) \underline{\mathbf{u}}(X) = \frac{1}{2\pi} T(X) \begin{bmatrix} u_r(X) \\ u_\theta(X) \\ u_z(X) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{p}(X) = \begin{bmatrix} p_1(X) \\ p_2(X) \\ p_3(X) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} T(X) \underline{\mathbf{p}}(X) = \frac{1}{2\pi} T(X) \begin{bmatrix} p_r(X) \\ p_\theta(X) \\ p_z(X) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Foi utilizado na equação anterior o tensor de transformação de coordenadas  $T(X)$ , dado por:

$$T(X) = \begin{pmatrix} \cos \theta(X) & -\text{sen } \theta(X) & 0 \\ \text{sen } \theta(X) & \cos \theta(X) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Então, nos pontos “Q” e “P” tem-se, respectivamente:

$$T(Q) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(P) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\text{sen } 0 & 0 \\ \text{sen } 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Nesta última equação tomou-se partido da arbitrariedade do posicionamento de P. Substituindo  $\mathbf{u}(Q)$  e  $\mathbf{p}(Q)$ , agora em função destes mesmos vetores em coordenadas cilíndricas, a equação (4.13) ficará:

$$\begin{aligned}
& C(\mathbf{P}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\mathbf{P}) \\ u_\theta(\mathbf{P}) \\ u_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} + \\
& + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\mathbf{Q}) \\ u_\theta(\mathbf{Q}) \\ u_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \quad (4.18) \\
& = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\text{sen } \theta_j & 0 \\ \text{sen } \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r(\mathbf{Q}) \\ p_\theta(\mathbf{Q}) \\ p_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^*
\end{aligned}$$

Nesta última equação  $\Gamma^*$  é o contorno da seção de revolução (vide Figura 1.1) tal que:

$$d\Gamma = 2\pi r_j d\Gamma^* \quad (4.19)$$

A equação (4.18) poderia também ser expressa na forma:

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{P}) \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{P}) + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{p}}^* \frac{T(\mathbf{Q})}{2\pi} \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{Q}) 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^* \\
= \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{u}}^* \frac{T(\mathbf{Q})}{2\pi} \underline{\mathbf{p}}(\mathbf{Q}) 2\pi r_j d\theta_j d\Gamma^*
\end{aligned}$$

(4.20)

Nos problemas axissimétricos, os tensores cartesianos  $\underline{\mathbf{u}}^*$  e  $\underline{\mathbf{p}}^*$  estarão escritos em função da distância euclidiana entre os pontos “P” e “Q”, expressada em função das coordenadas cilíndricas (vide equação 4.12). Deste modo, estas mesmas grandezas, escritas agora em coordenadas cilíndricas, sairão da primeira integral pois as mesmas não variam em relação à variável  $\theta_j$  (condição de axissimetria).

Finalmente, a equação matricial a ser resolvida pelo Método dos Elementos de Contorno apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r(\mathbf{P}) \\ \mathbf{u}_\theta(\mathbf{P}) \\ \mathbf{u}_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} &+ \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{rr}^* & \mathbf{p}_{r\theta}^* & \mathbf{p}_{rz}^* \\ \mathbf{p}_{\theta r}^* & \mathbf{p}_{\theta\theta}^* & \mathbf{p}_{\theta z}^* \\ \mathbf{p}_{zr}^* & \mathbf{p}_{z\theta}^* & \mathbf{p}_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_\theta(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{u}_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \\
&= \sum_I^{\text{NE}} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{rr}^* & \mathbf{u}_{r\theta}^* & \mathbf{u}_{rz}^* \\ \mathbf{u}_{\theta r}^* & \mathbf{u}_{\theta\theta}^* & \mathbf{u}_{\theta z}^* \\ \mathbf{u}_{zr}^* & \mathbf{u}_{z\theta}^* & \mathbf{u}_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_\theta(\mathbf{Q}) \\ \mathbf{p}_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^*
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{rr}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_{11}^* \cos\theta_j + \mathbf{u}_{12}^* \text{sen}\theta_j) d\theta_j = \\
&= \frac{A_1}{b r_i r_j} \left\{ [(3-4\nu)a + \hat{z}^2] \mathbf{K}(m, \pi/2) - \left[ (3-4\nu)b^2 + \frac{a\hat{z}^2}{d} \right] \mathbf{E}(m, \pi/2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{u}_{rz}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_{13}^* d\theta_j = \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i} \left[ \mathbf{K}(m, \pi/2) + \frac{f}{d} \mathbf{E}(m, \pi/2) \right] \tag{4.23}$$

$$\mathbf{u}_{zr}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_{31}^* \cos\theta_j + \mathbf{u}_{32}^* \text{sen}\theta_j) d\theta_j = \frac{A_1 \hat{z}}{b r_j} \left[ -\mathbf{K}(m, \pi/2) + \frac{h}{d} \mathbf{E}(m, \pi/2) \right] \tag{4.24}$$

$$\mathbf{u}_{zz}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_{33}^* d\theta_j = \frac{2A_1}{b} \left[ (3-4\nu)\mathbf{K}(m, \pi/2) + \frac{\hat{z}^2}{d} \mathbf{E}(m, \pi/2) \right] \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\theta\theta}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u}_{22}^* \cos\theta_j - \mathbf{u}_{21}^* \text{sen}\theta_j) d\theta_j = \\
&= \frac{4A_1(1-\nu)}{b r_i r_j} \left[ a \mathbf{K}(m, \pi/2) - b^2 \mathbf{E}(m, \pi/2) \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{u}_{r\theta}^* = \mathbf{u}_{\theta r}^* = \mathbf{u}_{z\theta}^* = \mathbf{u}_{\theta z}^* = 0 \tag{4.27}$$

O cálculo das derivadas destes deslocamentos fundamentais, apresentados nas equações (4.22) a (4.27), em relação às coordenadas do ponto “Q”, é imprescindível na solução das componentes do tensor das tensões. O programa “Maple” foi utilizado na obtenção destas componentes, nem tanto pela complexidade do cálculo analítico das derivadas, mas, sobretudo, pela diminuição da possibilidade de erros e pela economia de tempo, pois esta etapa seria bastante árdua sem o auxílio deste recurso.

Tais derivadas estão descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_j} = & \frac{A_1}{b r_i r_j} \left[ \frac{\hat{z}^2}{2r_j} \left( \frac{a h}{d b^2} - 3 \right) - (3-4\nu) \frac{r_i^2 + \hat{z}^2}{r_j} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1}{b r_i r_j} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{2r_j} \left( \frac{a h}{d} + b^2 \right) + \frac{\hat{z}^2}{d} \left[ h \left( \frac{r_i}{b^2} + \frac{1}{r_j} \right) + a \left( \frac{r_i + r_j}{b^2} - 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) \right] \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} = & \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i r_j d} \left[ \frac{a \hat{z}^2}{b^2} - (5-4\nu)d \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1 \hat{z}}{b r_i r_j d} \left[ (5-4\nu)a - 2a \hat{z}^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) + 3\hat{z}^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_j} = & - \frac{A_1 \hat{z}}{2 b r_i r_j d} \left( \frac{h f}{b^2} + d \right) K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1 \hat{z}}{2 b r_i r_j d} \left\{ h \left[ 2f \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) + 1 \right] - 3f - 4r_j^2 \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} = & - \frac{A_1}{b r_i d} \left[ \left( \frac{\hat{z}^2 f}{b^2} + d \right) K(m, \pi/2) \right] + \\ & + \frac{A_1}{b r_i d} \left\{ \hat{z}^2 \left[ 3 + 2f \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - f \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} &= A_1 \left\{ \frac{\hat{z}}{2 b^3 r_j^2} \left( 3 b^2 - \frac{h^2}{d} \right) K(m, \pi/2) \right\} + \\ &+ A_1 \left\{ \frac{\hat{z}}{b r_j d} \left[ h \left( \frac{h}{b^2 r_j} - \frac{2}{r_j} + 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) - 2 r_j \right] E(m, \pi/2) \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} &= \frac{A_1}{b r_j d} \left( d - \frac{\hat{z}^2 h}{b^2} \right) K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{A_1}{b r_j d} \left\{ \hat{z}^2 \left[ -3 + 2 h \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - h \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} &= - \frac{A_1}{b r_j d} \left[ (3 - 4\nu) d + \frac{\hat{z}^2 h}{b^2} \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{A_1}{b r_j d} \left[ (3 - 4\nu) h + \hat{z}^2 \left( \frac{d}{b^2} + 4 r_j \frac{r_i - r_j}{d} - 4 \frac{r_j^2}{b^2} \right) \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} = - \frac{2 A_1 \hat{z}^3}{b^3 d} K(m, \pi/2) + \frac{2 \hat{z}}{b d} \left[ 1 - 4\nu + 2 \hat{z}^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d} \right) \right] E(m, \pi/2) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r_j} &= \frac{4 A_1 (\nu - 1)}{b r_i r_j^2 d} \left[ 8 r_i^2 r_j^2 + 4 r_i r_j^3 + (-6 r_i r_j - r_j^2 + b^2) b^2 \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{4 A_1 (\nu - 1)}{b r_i r_j^2 d} \left[ -2 r_i^2 r_j^2 - 2 r_i r_j^3 + (4 r_i r_j + r_j^2 - b^2) b^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z_j} = \frac{4 A_1 \hat{z} (\nu - 1)}{b r_i r_j} \left( K(m, \pi/2) - \frac{a}{d} E(m, \pi/2) \right) \quad (4.37)$$

Como já mencionado anteriormente, de posse das expressões anteriores, pode-se obter as componentes do tensor das forças de superfície fundamentais, via equação (3.20):

$$p_{rr}^* = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_j} + \nu \left( \frac{u_{rr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} \right) \right] \right\} \quad (4.38)$$

$$p_{rz}^* = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z_j} + \nu \left( \frac{u_{rr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_j} \right) \right] \right\} \quad (4.39)$$

$$p_{zr}^* = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} + \nu \left( \frac{u_{zr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} \right) \right] \right\} \quad (4.40)$$

$$p_{zz}^* = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z_j} + \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r_j} \right) + \frac{2 n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z_j} + \nu \left( \frac{u_{zr}^*}{r_j} + \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r_j} \right) \right] \right\} \quad (4.41)$$

$$p_{\theta\theta}^* = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z_j} \right) + n_r \left( \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r_j} - \frac{u_{\theta\theta}^*}{r_j} \right) \right\} \quad (4.42)$$

$$p_{r\theta}^* = p_{\theta r}^* = p_{z\theta}^* = p_{\theta z}^* = 0 \quad (4.43)$$

Os cálculos intermediários foram suprimidos por questão de espaço. As expressões finais são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} = & \frac{A_1}{c r_i r_j} \left[ \frac{\hat{z}^2}{2 r_j} \left( \frac{ah}{dc^2} - 3 \right) - (3-4\nu) \frac{r_i^2 + \hat{z}^2}{r_j} \right] K(m, \pi/2) + \\ & + \frac{A_1}{c r_i r_j} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{2 r_j} \left( \frac{ah}{d} + c^2 \right) + \frac{\hat{z}^2}{d} \left[ h \left( \frac{r_i}{c^2} + \frac{1}{r_j} \right) + a \left( \frac{r_i + r_j}{c^2} - 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) \right] \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} &= \frac{A_1 \hat{z}}{c r_i r_j d} \left[ \frac{a \hat{z}^2}{c^2} - (5-4\nu)d \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{A_1 \hat{z}}{c r_i r_j d} \left[ (5-4\nu)a - 2a \hat{z}^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) + 3\hat{z}^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} &= - \frac{A_1 \hat{z}}{2c r_i r_j d} \left( \frac{hf}{c^2} + d \right) K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{A_1 \hat{z}}{2c r_i r_j d} \left\{ h \left[ 2f \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) + 1 \right] - 3f - 4r_j^2 \right\} E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = - \frac{A_1}{c r_i d} \left[ \left( \frac{\hat{z}^2 f}{c^2} + d \right) K(m, \pi/2) \right] + \frac{A_1}{c r_i d} \left\{ \hat{z}^2 \left[ 3 + 2f \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - f \right\} E(m, \pi/2) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = A_1 \left\{ \frac{\hat{z}}{2c^3 r_j^2} \left( 3c^2 - \frac{h^2}{d} \right) K(m, \pi/2) + \frac{\hat{z}}{c r_j d} \left[ h \left( \frac{h}{c^2 r_j} - \frac{2}{r_j} + 2 \frac{r_i - r_j}{d} \right) - 2r_j \right] E(m, \pi/2) \right\} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = \frac{A_1}{c r_j d} \left( d - \frac{\hat{z}^2 h}{c^2} \right) K(m, \pi/2) + \frac{A_1}{c r_j d} \left\{ \hat{z}^2 \left[ -3 + 2h \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] - h \right\} E(m, \pi/2) \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r} &= - \frac{A_1}{c r_j d} \left[ (3-4\nu)d + \frac{\hat{z}^2 h}{c^2} \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{A_1}{c r_j d} \left[ (3-4\nu)h + \hat{z}^2 \left( \frac{d}{c^2} + 4r_j \frac{r_i - r_j}{d} - 4 \frac{r_j^2}{c^2} \right) \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z} = - \frac{2A_1 \hat{z}^3}{dc^3} K(m, \pi/2) + \frac{2A_1 \hat{z}}{cd} \left[ 1 - 4\nu + 2\hat{z}^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d} \right) \right] E(m, \pi/2) \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} &= \frac{4A_1(\nu-1)}{c r_i r_j^2 d} \left[ 8r_i^2 r_j^2 + 4r_i r_j^3 + (-6r_i r_j - r_j^2 + c^2)c^2 \right] K(m, \pi/2) + \\ &+ \frac{4A_1(\nu-1)}{c r_i r_j^2 d} \left[ -2r_i^2 r_j^2 - 2r_i r_j^3 + (4r_i r_j + r_j^2 - c^2)c^2 \right] E(m, \pi/2) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \frac{4A_1 \hat{z}(v-1)}{c r_i r_j} \left( K(m, \pi/2) - \frac{a}{d} E(m, \pi/2) \right) \quad (4.53)$$

Nas expressões anteriores,  $K(m, \pi/2)$  e  $E(m, \pi/2)$  são Integrais Elípticas Completas do Primeiro e do Segundo Tipo, respectivamente, de módulo  $m^2$ , as quais se encontram devidamente deduzidas no Apêndice A ;  $n_r$ ,  $n_z$  e  $n_\theta$  são as componentes do vetor unitário normal ao contorno no ponto “P”:

$$\hat{z} = (z_i - z_j) \quad (4.54)$$

$$a = r_i^2 + r_j^2 + \hat{z}^2 \quad (4.55)$$

$$b = \sqrt{(r_i + r_j)^2 + \hat{z}^2} \quad (4.56)$$

$$d = (r_i - r_j)^2 + \hat{z}^2 \quad (4.57)$$

$$h = a - 2 r_j^2 \quad (4.58)$$

$$f = h - 2 \hat{z}^2 \quad (4.59)$$

$$m = 2 \sqrt{\frac{(r_i r_j)}{b}} \quad (4.60)$$

$$A_1 = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \quad (4.61)$$

Tais expressões para forças de superfície fundamentais poderiam ter sido obtidas do mesmo modo com que foram gerados os deslocamentos fundamentais. No entanto, a integração angular seria por demais complicada, envolvendo funções elípticas. O

aproveitamento dos deslocamentos fundamentais e sua introdução na Equação de Navier para o contorno (equação 3.20) constitui um procedimento mais simples.

## CAPÍTULO V

---

### OBTENÇÃO DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO INTERIOR DO DOMÍNIO

#### 5.1 – EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS

A Equação (2.09), que representa a Lei de Hooke para um estado tridimensional elástico, relaciona as componentes de tensão em qualquer ponto do corpo solicitado em função das deformações, consideradas conhecidas. Por conveniência, tal equação é repetida a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G \nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (5.01)$$

Sabe-se que as componentes de deformação no caso axissimétrico podem ser escritas com grande vantagem em coordenadas cilíndricas. Tais componentes, em função dos deslocamentos  $u_i(\zeta)$ , são dadas de acordo com Timoshenko e Goodier em [9] nas expressões a seguir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} ; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} ; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} ; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] ; \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] ; \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} ; \end{aligned} \quad (5.02)$$

Conforme descrito por Hartmann em [6], pode-se afirmar que quando o ponto “P” é o ponto fonte  $\zeta$  e está situado no interior do corpo, a matriz  $C(\zeta)$  corresponde à matriz identidade. Portanto, considerando que “Q” representa os pontos campo X dos elementos a serem integrados, pode-se fazer uso da equação (4.21) para se obter os valores dos deslocamentos nos pontos internos a partir dos deslocamentos dos pontos situados no contorno, os quais já foram previamente calculados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_r(\zeta) \\ u_\theta(\zeta) \\ u_z(\zeta) \end{bmatrix} + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} p_{rr}^* & p_{r\theta}^* & p_{rz}^* \\ p_{\theta r}^* & p_{\theta\theta}^* & p_{\theta z}^* \\ p_{zr}^* & p_{z\theta}^* & p_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r(X) \\ u_\theta(X) \\ u_z(X) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* = \\ = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} u_{rr}^* & u_{r\theta}^* & u_{rz}^* \\ u_{\theta r}^* & u_{\theta\theta}^* & u_{\theta z}^* \\ u_{zr}^* & u_{z\theta}^* & u_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r(X) \\ p_\theta(X) \\ p_z(X) \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (5.03)$$

Naturalmente, as integrações dos núcleos que compõem a equação (5.03) deverão ser outra vez efetivadas, pois os pontos fonte  $\zeta$  agora estão posicionados no interior do domínio. No entanto, nenhuma técnica de resolução de sistemas necessitará ser empregada. O cálculo computacional destes pontos no interior é, portanto, bem simples. Também deve-se destacar que a precisão dos resultados nestes pontos é mais elevada, ao contrário do que normalmente acontece em outras técnicas numéricas. Esse comportamento pode ser adequadamente explicado à luz do Método dos Resíduos Ponderados, pois o emprego da equação integral (5.03) equivale a uma nova minimização de resíduos, tomando como base as variáveis nodais de contorno já calculadas anteriormente.

## 5.2 – EQUAÇÃO INTEGRAL PARA CÁLCULO DE TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

Para se calcular as tensões segue-se um processo similar ao anteriormente mostrado para a obtenção dos deslocamentos. Entretanto, algumas etapas intermediárias necessitam ser efetuadas. Como exemplo, para se calcular uma tensão radial no ponto interno  $\zeta$ ,  $\sigma_{rr}(\zeta)$ , faz-se uso primeiramente da Equação (2.09):

$$\sigma_{rr}(\zeta) = 2G \varepsilon_{rr}(\zeta) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{zz}(\zeta) + \varepsilon_{\theta\theta}(\zeta)) \quad (5.04)$$

Substituindo-se agora as fórmulas mostradas em (5.02) para as deformações, tem-se:

$$\sigma_{rr}(\zeta) = 2G \left[ \frac{\partial u_r(\zeta)}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial u_z(\zeta)}{\partial z} + \frac{u_r(\zeta)}{r} \right) \right] \quad (5.05)$$

As derivadas dos deslocamentos podem ser calculadas através da derivação da equação integral matricial (5.03), as quais tomarão a forma da equação exemplificada a seguir (apenas uma derivação em relação à coordenada  $r$  no ponto  $\zeta$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r(\zeta)}{\partial r_i} + \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \left[ \frac{\partial p_{rr}^*}{\partial r_i} u_r(\mathbf{X}) + \frac{\partial p_{r\theta}^*}{\partial r_i} u_\theta(\mathbf{X}) + \frac{\partial p_{rz}^*}{\partial r_i} u_z(\mathbf{X}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* = \\ & = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \left[ \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r_i} p_r(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_{r\theta}^*}{\partial r_i} p_\theta(\mathbf{X}) + \frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r_i} p_z(\mathbf{X}) \right] 2\pi r_j d\Gamma^* \end{aligned} \quad (5.06)$$

Para a obtenção de todas as tensões internas deve-se utilizar o mesmo procedimento adotado com a equação (5.05). A derivação dos deslocamentos  $u_i(\zeta)$  gera derivadas segundas dos núcleos, pois os termos relacionados aos vetores tensão  $p_{ij}^*$  já estão expressos em função das derivadas primeiras dos deslocamentos. As derivadas dos deslocamentos serão listadas a seguir, incluindo as derivadas segundas que compõem seus núcleos. Para facilitar a

compreensão das equações, será feita a adoção das seguintes convenções:

$$r_i = r, \quad r_j = \rho \quad (5.07)$$

$$z_i = z, \quad z_j = \xi \quad (5.08)$$

As derivadas dos deslocamentos fundamentais  $u_{ij}^*$  em relação ao ponto  $\zeta$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} = & \frac{A_1}{b^3 r^2 \rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 r\rho^3 - \right. \\ & 8h^2 r\rho^3 - 8h^2 r\rho \hat{z}^2 + 32\rho^6 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 \rho^4 + 16h\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^4 + 8h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2 + \\ & 4h^3 \hat{z}^2) + 24r\rho^5 \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 r\rho^3 + 2hr\rho^3 \hat{z}^2 + 6h^2 r\rho^3 - 2hr\rho \hat{z}^4 + 10h^2 r\rho \hat{z}^2 - 24\rho^6 \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 \rho^4 - \\ & 14h\rho^4 \hat{z}^2 - 6h^2 \rho^4 - 14h\rho^2 \hat{z}^4 - 11h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2 + h^2 \hat{z}^4 - 5h^3 \hat{z}^2] + E(m, \pi/2) [v(-64\hat{z}^4 \rho^4 \\ & - 16h\hat{z}^4 \rho^2 + 16h\hat{z}^2 \rho^4 - 16h^2 \hat{z}^2 \rho^2 - 4h^3 \hat{z}^2 + 4h^3 \rho^2) + 12\hat{z}^6 \rho^2 + 44\hat{z}^4 \rho^4 - 4h\hat{z}^4 \rho^2 - h^2 \hat{z}^4 - \\ & \left. 4h\hat{z}^2 \rho^4 + 23h^2 \hat{z}^2 \rho^2 + 5h^3 \hat{z}^2 - 3h^3 \rho^2] \right\} \end{aligned} \quad (5.09)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z} = & \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r\rho (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(32\hat{z}^2 \rho^3 r + 8h^2 r\rho - 32\hat{z}^2 \rho^4 \right. \\ & - 16h\rho^2 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^2 - 4h^3) - 36\hat{z}^2 \rho^3 r + 2hr\rho \hat{z}^2 - 10h^2 r\rho + 36\hat{z}^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^2 + 10h^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 \\ & + 5h^3] + E(m, \pi/2) [v(32\hat{z}^2 \rho^4 + 16h\rho^2 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^2 + 4h^3) - 24\hat{z}^2 \rho^4 - 12\hat{z}^4 \rho^2 - 4h\rho^2 \hat{z}^2 \\ & \left. - 10h^2 \rho^2 + h^2 \hat{z}^2 - 5h^3] \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r^2 (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot [K(m, \pi/2) (12\hat{z}^2 r \rho^3 - 4\hat{z}^4 r \rho + 4hr \rho \hat{z}^2 + 2h^2 r \rho - 12\hat{z}^2 \rho^4 + 4\hat{z}^4 \rho^2 - 10h\hat{z}^2 \rho^2 - 2h^2 \rho^2 + 2h\hat{z}^4 - 2h^2 \hat{z}^2 - h^3) + E(m, \pi/2) (8\hat{z}^2 \rho^4 + 12h\rho^2 \hat{z}^2 - 2h^2 \rho^2 - 8h\hat{z}^4 + 12h^2 \hat{z}^2 - 3h^3)] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial u_{rz}^*}{\partial z} = \frac{A_1}{b^3 r (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot [K(m, \pi/2) (-8\rho^3 r \hat{z}^2 + 4r \rho \hat{z}^4 - 2hr \rho \hat{z}^2 - 2h^2 r \rho + 8\rho^4 \hat{z}^2 - 4\hat{z}^4 \rho^2 + 6h\hat{z}^2 \rho^2 + 2h^2 \rho^2 - 2h\hat{z}^4 + h^2 \hat{z}^2 + h^3) + E(m, \pi/2) (-12\hat{z}^4 r^2 - 4f r^2 \hat{z}^2 + f^2 \hat{z}^2 + f^3)] \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r \rho (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot [K(m, \pi/2) (-4\hat{z}^2 \rho^3 r + 2hr \rho \hat{z}^2 - 2h^2 r \rho + 4\hat{z}^2 \rho^4 + 2h^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 + h^3) + E(m, \pi/2) (-12r^4 \rho^2 - 12r^2 \rho^4 + 16ar^2 \rho^2 - a^2 r^2 - a^2 \rho^2)] \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} = \frac{A_1}{b^3 \rho (-4arp - 4\rho^4 + 4ap^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot [K(m, \pi/2) (-4r \rho \hat{z}^4 + 8r^3 \rho \hat{z}^2 - 2f \rho \hat{z}^2 r + 2f^2 \rho r - 2f \hat{z}^4 + 4\hat{z}^4 r^2 - 8r^4 \hat{z}^2 + 6f \hat{z}^2 r^2 - f^2 \hat{z}^2 - 2f^2 r^2 + f^3) + E(m, \pi/2) (12\hat{z}^4 \rho^2 - 4h\hat{z}^2 \rho^2 - h^2 \hat{z}^2 + h^3)] \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial r} = \frac{A_1}{b^3 r (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(32r^3 \rho^3 - 16ar^2 \rho^2 - 8a^2 r \rho + 4a^3) + 4r^5 \rho - 2ar^4 - 20r^3 \rho^3 - 6ar^3 \rho + 10ar^2 \rho^2 + 3a^2 r^2 - 2ar\rho^3 + 8a^2 r \rho + a^2 \rho^2 - 4a^3] + E(m, \pi/2) [v(16fr^2 \hat{z}^2 + 4f^3) - 12\hat{z}^4 r^2 - 20fr^2 \hat{z}^2 + f^2 \hat{z}^2 - 3f^3] \right\} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial u_{zz}^*}{\partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) \cdot \hat{z}^2 (-4r\rho + 2a) + E(m, \pi/2) [v(-32r^2 \rho^2 + 8a^2) + 8a\rho^2 + 8r^2 \rho^2 + 8ar^2 - 10a^2] \right\} \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} = \frac{A_1 \cdot (v-1)}{b^3 r^2 \rho d} \cdot [K(m, \pi/2) (16r^4 \rho^2 - 16a\rho^2 r^2 - 4a^2 r^2 + 4a^3) + E(m, \pi/2) (-16r^3 \rho \hat{z}^2 + 8f\rho r^3 - 8f^2 \rho r - 16r^4 \hat{z}^2 + 8f\hat{z}^2 r^2 + 8fr^4 - 12f^2 r^2 + 4f^3)] \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z} \cdot (v-1)}{b^3 r \rho d} \cdot [K(m, \pi/2) (-16\hat{z}^2 \rho^2 - 4h^2) + E(m, \pi/2) \cdot a(8r\rho + 4a)] \quad (5.18)$$

As derivadas das forças de superfície fundamentais  $p_{ij}^*$  em relação ao ponto  $\zeta$  são:

$$\frac{\partial p_{rr}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial p_{rz}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial r} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial r} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial p_{zr}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial p_{zz}^*}{\partial r} = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial r} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial r} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} \right) \right] \right\} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial p_{\theta\theta}^*}{\partial r} = \mu \left[ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial r} \right) + n_z \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \xi \partial r} \right] \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial p_{rr}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial p_{rz}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial z} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{rr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial p_{zr}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_z \left( \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_r}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial p_{zz}^*}{\partial z} = \mu \left\{ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} \right) + \frac{2n_z}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial z} + \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{zr}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} \right) \right] \right\} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial p_{\theta\theta}^*}{\partial z} = \mu \left[ n_r \left( \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\theta\theta}^*}{\partial z} \right) + n_z \frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \xi \partial z} \right] \quad (5.28)$$

As derivadas segundas, que aparecem nas expressões anteriores, são dadas por:

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} c^3 r^2 \rho^2 (-32r\rho^5 z^2 - 16hr\rho^3 z^2 - 8h^2 r\rho^3 - 4h^3 r\rho + 32\rho^6 z^2 - 16z^4 \rho^4 + 32h\rho^4 z^2 + \\ 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) \left[ v(-64\hat{z}^4 r^7 \rho + 192\hat{z}^6 r^5 \rho + 64f\rho r^5 \hat{z}^4 - 16f^2 \rho r^5 \hat{z}^2 + 80f^2 \rho r^3 \hat{z}^4 + 16f^3 \rho r^3 \hat{z}^2 + \right. \right.$$

$$8f^4 \rho r \hat{z}^2 + 64\hat{z}^4 r^8 - 192\hat{z}^6 r^6 - 96f r^6 \hat{z}^4 + 16f^2 \hat{z}^2 r^6 + 96f r^4 \hat{z}^6 - 48f^2 \hat{z}^4 r^4 - 24f^3 \hat{z}^2 r^4 +$$

$$40f^3 \hat{z}^4 r^2 + 4f^5 \hat{z}^2) + 32\hat{z}^4 r^7 \rho - 176\hat{z}^6 r^5 \rho + 24f^2 \rho r^5 \hat{z}^2 - 40f\rho r^3 \hat{z}^6 - 132f^2 \rho r^3 \hat{z}^4 - 24f^3 \rho r^3 \hat{z}^2$$

$$- 2f^3 \rho r \hat{z}^4 - 10f^4 \rho r \hat{z}^2 - 32\hat{z}^4 r^8 + 176\hat{z}^6 r^6 + 16f r^6 \hat{z}^4 - 24f^2 \hat{z}^2 r^6 - 48f r^4 \hat{z}^6 + 132f^2 \hat{z}^4 r^4 +$$

$$36f^3 \hat{z}^2 r^4 - 20f^2 \hat{z}^6 r^2 - 64f^3 \hat{z}^4 r^2 - 2f^4 \hat{z}^2 r^2 - f^4 \hat{z}^4 - 5f^5 \hat{z}^2 \left. \right] + E(m, \pi/2) \left[ v(-128\hat{z}^4 r^8 + \right.$$

$$256\hat{z}^6 r^6 + 256f\hat{z}^4 r^6 - 192f\hat{z}^6 r^4 - 64f^2 \hat{z}^4 r^4 + 32f^3 r^4 \hat{z}^2 + 8f^4 r^4 - 64f^3 r^2 \hat{z}^4 - 32f^4 r^2 \hat{z}^2 -$$

$$8f^5 r^2 - 4f^5 \hat{z}^2) + 32\hat{z}^4 r^8 - 56\hat{z}^6 r^6 + 32f\hat{z}^4 r^6 + 48f^2 r^6 \hat{z}^2 - 120\hat{z}^8 r^4 - 120f\hat{z}^6 r^4 - 222f^2 \hat{z}^4 r^4$$

$$\left. - 96f^3 r^4 \hat{z}^2 - 6f^4 r^4 + 38f^2 \hat{z}^6 r^2 + 118f^3 r^2 \hat{z}^4 + 44f^4 r^2 \hat{z}^2 + 6f^5 r^2 + f^4 \hat{z}^4 + 5f^5 \hat{z}^2 \right] \left. \right\}$$

(5.29)

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r \rho^2 (-32\rho^5 r \hat{z}^2 - 16hr\rho^3 \hat{z}^2 - 8h^2 r\rho^3 - 4h^3 r\rho + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\hat{z}^2 \rho^4 + \\ 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) \left[ v(-192\hat{z}^4 \rho^5 r + 32h\hat{z}^2 \rho^5 r - 80h^2 \hat{z}^2 \rho^3 r + 8h^3 \rho^3 r - 8h^4 r\rho + 192\hat{z}^4 \rho^6 - 32h\hat{z}^2 \rho^6 \right. \right.$$

$$+ 96h\hat{z}^4 \rho^4 + 64h^2 \hat{z}^2 \rho^4 - 8h^3 \rho^4 + 40h^3 \rho^2 \hat{z}^2 + 4h^4 \rho^2 + 4h^5) + 200\hat{z}^4 \rho^5 r - 8h\hat{z}^2 \rho^5 r - 40hr\rho^3 \hat{z}^4$$

$$+ 122h^2 \hat{z}^2 \rho^3 r - 10h^3 \rho^3 r - 2h^3 \hat{z}^2 \rho r + 10h^4 r\rho - 200\hat{z}^4 \rho^6 + 8h\hat{z}^2 \rho^6 - 60h\hat{z}^4 \rho^4 - 118h^2 \hat{z}^2 \rho^4 +$$

$$10h^3 \rho^4 + 20h^2 \hat{z}^4 \rho^2 - 59h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 5h^4 \rho^2 + h^4 \hat{z}^2 - 5h^5 \left. \right] + E(m, \pi/2) \left[ v(192r^4 \rho^6 - 192ar^4 \rho^4 \right.$$

$$- 32a^2 r^2 \rho^4 + 64a^3 r^2 \rho^2 - 4a^4 \rho^2 - 4a^5) - 120r^6 \rho^4 - 360r^4 \rho^6 + 476ar^4 \rho^4 - 38a^2 r^4 \rho^2 + 116ar^2 \rho^6$$

$$\left. - 114a^2 r^2 \rho^4 - 39a^3 r^2 \rho^2 + a^4 r^2 + 3a^3 \rho^4 + 3a^4 \rho^2 + 4a^5 \right] \left. \right\}$$

(5.30)

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial z} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r \rho (-32 \rho^5 r \hat{z}^2 - 16 h r \rho^3 \hat{z}^2 - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \rho^4 \hat{z}^2 + \\ 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-128 \rho^5 r^5 + 32 a \rho^5 r^3 + 64 a \rho^4 r^4 - 16 a^2 \rho^4 r^2 + 32 a \rho^3 r^5 + 32 a^2 \rho^3 r^3 - 8 a^3 \rho^3 r - 16 a^2 \rho^2 r^4 - 16 a^3 \rho^2 r^2 + 4 a^4 \rho^2 - 8 a^3 \rho r^3 + 4 a^4 r^2) + 40 \rho^7 r^3 - 20 a \rho^6 r^2 + 240 \rho^5 r^5 - 144 a \rho^5 r^3 + 6 a^2 \rho^5 r - 120 a \rho^4 r^4 + 72 a^2 \rho^4 r^2 - 3 a^3 \rho^4 + 40 \rho^3 r^7 - 144 a \rho^3 r^5 + 36 a^2 \rho^3 r^3 + 4 a^3 \rho^3 r - 20 a \rho^2 r^6 + 72 a^2 \rho^2 r^4 - 18 a^3 \rho^2 r^2 - 2 a^4 \rho^2 + 6 a^2 \rho r^5 + 4 a^3 \rho r^3 - 3 a^3 r^4 - 2 a^4 r^2] + E(m, \pi/2) [v(128 \hat{z}^4 r^6 - 192 \hat{z}^6 r^4 - 192 f \hat{z}^4 r^4 - 32 f^2 \hat{z}^4 r^2 - 32 f^3 r^2 \hat{z}^2 - 8 f^4 r^2 + 4 f^4 \hat{z}^2 + 4 f^5) - 96 \hat{z}^4 r^6 + 152 \hat{z}^6 r^4 + 48 f \hat{z}^4 r^4 - 48 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 116 f \hat{z}^6 r^2 + 198 f^2 \hat{z}^4 r^2 + 88 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 10 f^4 r^2 - 3 f^3 \hat{z}^4 - 8 f^4 \hat{z}^2 - 5 f^5] \right\} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rr}^*}{\partial \xi \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r^2 \rho (-32 \rho^5 r \hat{z}^2 - 16 h r \rho^3 \hat{z}^2 - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \rho^4 \hat{z}^2 + \\ 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(192 r^5 \rho^5 - 32 a r^5 \rho^3 - 96 a r^4 \rho^4 + 16 a^2 r^4 \rho^2 - 80 a^2 r^3 \rho^3 + 8 a^3 r^3 \rho + 40 a^3 r^2 \rho^2 - 4 a^4 r^2 + 8 a^4 r \rho - 4 a^5) - 40 r^7 \rho^3 + 20 a r^6 \rho^2 - 280 r^5 \rho^5 + 120 a r^5 \rho^3 - 6 a^2 r^5 \rho + 140 a r^4 \rho^4 - 60 a^2 r^4 \rho^2 + 3 a^3 r^4 + 40 a \rho^5 r^3 + 54 a^2 r^3 \rho^3 - 6 a^3 r^3 \rho - 20 a^2 r^2 \rho^4 - 27 a^3 r^2 \rho^2 + 3 a^4 r^2 - 2 a^3 r \rho^3 - 8 a^4 r \rho + a^4 \rho^2 + 4 a^5] + E(m, \pi/2) [v(192 \hat{z}^4 r^6 + 128 f r^6 \hat{z}^2 - 192 f r^4 \hat{z}^4 - 32 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 32 f^3 r^4 - 64 f^3 r^2 \hat{z}^2 - 20 f^4 r^2 - 4 f^5) - 80 \hat{z}^4 r^6 - 32 f r^6 \hat{z}^2 - 120 \hat{z}^6 r^4 - 36 f r^4 \hat{z}^4 - 112 f^2 r^4 \hat{z}^2 - 40 f^3 r^4 + 38 f^2 r^2 \hat{z}^4 + 107 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 25 f^4 r^2 + f^4 \hat{z}^2 + 5 f^5] \right\} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r^2 \rho (-32r^5 \rho \hat{z}^2 + 16fr^3 \rho \hat{z}^2 - 8f^2 r^3 \rho + 4f^3 \rho r + 32r^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + \\ 8f^2 r^4 - 8f^3 r^2 + f^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left[ \begin{array}{l} Km(-8\rho r^5 \hat{z}^5 + 24f\rho r^5 \hat{z}^3 - 40fr^3 \rho \hat{z}^5 - 42f^2 r^3 \rho \hat{z}^3 - 2f^3 \rho r^3 \hat{z} - 2f^3 \rho r \hat{z}^3 - 2f^4 \rho r \hat{z} + 8\hat{z}^5 r^6 - \\ 24fr^6 \hat{z}^3 + 36fr^4 \hat{z}^5 + 54f^2 r^4 \hat{z}^3 + 2f^3 r^4 \hat{z} - 20f^2 \hat{z}^5 r^2 - 19f^3 \hat{z}^3 r^2 + f^4 r^2 \hat{z} - f^4 \hat{z}^3 - f^5 \hat{z}) + \\ Em(-80\hat{z}^5 \rho^6 + 96h\hat{z}^3 \rho^6 + 64\hat{z}^7 \rho^4 - 276h\rho^4 \hat{z}^5 + 192h^2 \hat{z}^3 \rho^4 - 8h^3 \rho^4 \hat{z} + 116h\hat{z}^7 \rho^2 - \\ 220h^2 \hat{z}^5 \rho^2 + 115h^3 \hat{z}^3 \rho^2 - 11h^4 \rho^2 \hat{z} - 3h^3 \hat{z}^5 + 5h^4 \hat{z}^3 - 2h^5 \hat{z}) \end{array} \right]$$

(5.33)

$$\frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1}{b^3 r \rho (-16\rho^4 r^4 + 16a\rho^3 r^3 - 4a^3 \rho r + a^4)} \cdot [K(m, \pi/2)(32\hat{z}^4 r \rho^5 - 40\hat{z}^6 r \rho^3 +$$

$$32hr\rho^3 \hat{z}^4 + 6h^2 r \rho \hat{z}^4 - 8h^3 r \rho \hat{z}^2 + 2h^4 r \rho - 32\hat{z}^4 \rho^6 + 40\hat{z}^6 \rho^4 - 48hr\rho^4 \hat{z}^4 + 20hr\rho^2 \hat{z}^6 - 22h^2 \hat{z}^4 \rho^2$$

$$+ 8h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 2h^4 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^4 + 4h^4 \hat{z}^2 - h^5) + E(m, \pi/2)(-192r^6 \rho^4 + 116ar^6 \rho^2 - 192r^4 \rho^6 +$$

$$440ar^4 \rho^4 - 200a^2 r^4 \rho^2 + 3a^3 r^4 + 116ar^2 \rho^6 - 200a^2 r^2 \rho^4 + 82a^3 r^2 \rho^2 - 2a^4 r^2 + 3a^3 \rho^4 - 2a^4 \rho^2)]$$

(5.34)

$$\frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r (-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 16h\hat{z}^2 \rho^3 r - 8h^2 \rho^3 r - 4h^3 \rho r + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\hat{z}^2 \rho^4 + \\ 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left[ \begin{array}{l} K(m, \pi/2)(-40\hat{z}^4 r^3 \rho - 8f\rho \hat{z}^2 r^3 + 6f^2 \rho \hat{z}^2 r + 6f^3 \rho r + 40\hat{z}^4 r^4 - 20fr^2 \hat{z}^4 + 8f\hat{z}^2 r^4 - 10f^2 \hat{z}^2 r^2 \\ + 3f^3 \hat{z}^2 - 6f^3 r^2 + 3f^4) + E(m, \pi/2)(-16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 116fr^2 \hat{z}^4 + 112f^2 r^2 \hat{z}^2 + 24f^3 r^2 \\ - 3f^3 \hat{z}^2 - 3f^4) \end{array} \right]$$

(5.35)

$$\frac{\partial^2 u_{rz}^*}{\partial \xi \partial r} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r^2 (-32 r \rho^5 \hat{z}^2 - 16 h \hat{z}^2 \rho^3 r - 8 h^2 r \rho^3 - 4 h^3 r \rho + 32 \rho^6 \hat{z}^2 - 16 \hat{z}^4 \rho^4 + 32 h \hat{z}^2 \rho^4 + \\ 8 h^2 \rho^4 + 8 h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left[ K(m, \pi/2) (-32 \hat{z}^4 r^5 \rho - 40 f \hat{z}^4 r^3 \rho - 32 f^2 \hat{z}^2 r^3 \rho - 2 f^3 \hat{z}^2 r \rho - 2 f^4 \rho r + 32 \hat{z}^4 r^6 + 24 f \hat{z}^4 r^4 + \right.$$

$$32 f^2 r^4 \hat{z}^2 - 20 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 14 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 2 f^4 r^2 - f^4 \hat{z}^2 - f^5) + E(m, \pi/2) (-120 \hat{z}^6 r^4 + 32 \hat{z}^4 r^6 -$$

$$144 f r^4 \hat{z}^4 + 38 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 48 f^2 \hat{z}^2 r^4 + 32 f^3 r^2 \hat{z}^2 + f^4 \hat{z}^2 + 2 f^4 r^2 + f^5) \left. \right]$$

(5.36)

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^5 r \rho^2 (8 r \rho^5 - 8 a r \rho^3 + 8 r \rho^3 \hat{z}^2 - 6 a^2 r \rho - 12 a \rho^4 - 12 a \hat{z}^2 \rho^2 + 12 a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot$$

$$\left[ K(m, \pi/2) (56 \hat{z}^4 r^5 \rho + 24 f \rho r^5 \hat{z}^2 - 40 \hat{z}^6 r^3 \rho - 56 f \rho r^3 \hat{z}^4 - 18 f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 - 2 f^3 \rho r^3 + 6 f^2 \rho r \hat{z}^4 + \right.$$

$$10 f^3 \rho r \hat{z}^2 + 4 f^4 \rho r - 56 \hat{z}^4 r^6 - 24 f r^6 \hat{z}^2 + 40 \hat{z}^6 r^4 + 84 f r^4 \hat{z}^4 + 30 f^2 r^4 \hat{z}^2 + 2 f^3 r^4 - 20 f r^2 \hat{z}^6 -$$

$$34 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 19 f^3 \hat{z}^2 r^2 - 5 f^4 r^2 + 3 f^3 \hat{z}^4 + 5 f^4 \hat{z}^2 + 2 f^5) + E(m, \pi/2) (-112 \hat{z}^4 \rho^6 + 96 h \rho^6 \hat{z}^2$$

$$+ 120 \hat{z}^6 \rho^4 - 228 h \rho^4 \hat{z}^4 + 144 h^2 \rho^4 \hat{z}^2 - 8 h^3 \rho^4 - 38 h^2 \rho^2 \hat{z}^4 + 43 h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 5 h^4 \rho^2 - h^4 \hat{z}^2 + h^5) \left. \right]$$

(5.37)

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1}{b^5 \rho^2 (8 r \rho^5 - 8 a r \rho^3 + 8 r \rho^3 \hat{z}^2 - 6 a^2 r \rho - 12 a \rho^4 - 12 a \hat{z}^2 \rho^2 + 12 a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot$$

$$\left[ K(m, \pi/2) (-32 \hat{z}^4 \rho r^5 + 16 \hat{z}^6 \rho r^3 - 24 f \hat{z}^4 r^3 \rho - 32 f^2 \hat{z}^2 r^3 \rho + 32 f \hat{z}^6 \rho r + 52 f^2 \hat{z}^4 \rho r + 18 f^3 \hat{z}^2 \rho r \right.$$

$$- 2 f^4 \rho r + 32 \hat{z}^4 r^6 - 16 \hat{z}^6 r^4 + 8 f r^4 \hat{z}^4 + 32 f^2 r^4 \hat{z}^2 - 24 f r^2 \hat{z}^6 - 64 f^2 r^2 \hat{z}^4 - 34 f^3 r^2 \hat{z}^2 + 2 f^4 r^2 +$$

$$16 f^2 \hat{z}^6 + 26 f^3 \hat{z}^4 + 9 f^4 \hat{z}^2 - f^5) + E(m, \pi/2) (-120 \hat{z}^6 \rho^4 + 32 \hat{z}^4 \rho^6 + 144 h \rho^4 \hat{z}^4 + 38 h^2 \rho^2 \hat{z}^4$$

$$- 48 h^2 \hat{z}^2 \rho^4 - 32 h^3 \hat{z}^2 \rho^2 + h^4 \hat{z}^2 + 2 h^4 \rho^2 - h^5) \left. \right]$$

(5.38)

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[ \begin{array}{l} b^3 \rho (-32r^5 \rho \hat{z}^2 + 16fpr^3 \hat{z}^2 - 8f^2 \rho r^3 + 4f^3 pr + 32r^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + \\ 8f^2 r^4 - 8f^3 r^2 + f^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left[ K(m, \pi/2) (24\hat{z}^4 r^3 \rho + 32f\rho \hat{z}^4 r - 8f\rho \hat{z}^2 r^3 + 38f^2 \rho \hat{z}^2 r + 6f^3 pr - 24\hat{z}^4 r^4 - 20f\hat{z}^4 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + \right.$$

$$8f\hat{z}^2 r^4 - 42f^2 \hat{z}^2 r^2 + 19f^3 \hat{z}^2 - 6f^3 r^2 + 3f^4) + E(m, \pi/2) (16\hat{z}^4 \rho^4 - 32hp^4 \hat{z}^2 + 116hp^2 \hat{z}^4 -$$

$$112h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 24h^3 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^2 + 3h^4) \left. \right]$$

(5.39)

$$\frac{\partial^2 u_{zr}^*}{\partial \xi \partial r} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} b^3 \rho (-32r\rho^5 \hat{z}^2 - 16hr\rho^3 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^3 - 4h^3 \rho + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\rho^4 \hat{z}^2 + \\ 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot$$

$$\left[ K(m, \pi/2) (32\hat{z}^4 r\rho^5 - 40\hat{z}^6 r\rho^3 + 32hr\rho^3 \hat{z}^4 + 6h^2 r\rho \hat{z}^4 - 8h^3 r\rho \hat{z}^2 + 2h^4 r\rho - 32\hat{z}^4 \rho^6 + \right.$$

$$40\hat{z}^6 \rho^4 - 48h\rho^4 \hat{z}^4 + 20h\rho^2 \hat{z}^6 - 22h^2 \rho^2 \hat{z}^4 + 8h^3 \rho^2 \hat{z}^2 - 2h^4 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^4 + 4h^4 \hat{z}^2 - h^5) +$$

$$E(m, \pi/2) (32\hat{z}^4 \rho^6 - 40\hat{z}^6 \rho^4 + 144h\rho^4 \hat{z}^4 - 48h^2 \rho^4 \hat{z}^2 - 116h\rho^2 \hat{z}^6 + 166h^2 \rho^2 \hat{z}^4 - 56h^3 \rho^2 \hat{z}^2$$

$$+ 2h^4 \rho^2 + 3h^3 \hat{z}^4 - 4h^4 \hat{z}^2 + h^5) \left. \right]$$

(5.40)

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial z} = \frac{A_1}{b^5 (8\rho^5 r - 8a\rho^3 r + 8\rho^3 r \hat{z}^2 - 6a^2 \rho - 12a\rho^4 - 12a\hat{z}^2 \rho^2 + 12a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot$$

$$\left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 r^3 \rho + 16f^2 pr \hat{z}^2 - 64\hat{z}^4 r^4 + 32fr^2 \hat{z}^4 - 16f^2 \hat{z}^2 r^2 + 8f^3 \hat{z}^2) - 32\hat{z}^4 r^3 \rho \right.$$

$$+ 32fpr \hat{z}^4 + 8f^2 pr \hat{z}^2 + 32\hat{z}^4 r^4 - 48fr^2 \hat{z}^4 - 8f^2 \hat{z}^2 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + 4f^3 \hat{z}^2] +$$

$$E(m, \pi/2) [v(128\hat{z}^4 r^4 - 128fr^2 \hat{z}^4 - 32f^3 \hat{z}^2 - 8f^4) - 96\hat{z}^4 r^4 + 72\hat{z}^6 r^2 + 192fr^2 \hat{z}^4 +$$

$$48f^2 r^2 \hat{z}^2 - 46f^2 \hat{z}^4 - 16f^3 \hat{z}^2 + 2f^4] \left. \right\}$$

(5.41)

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{\left[ \begin{array}{l} b^3 \rho (-32r^5 \rho \hat{z}^2 + 16f \rho r^3 \hat{z}^2 - 8f^2 \rho r^3 + 4f^3 \rho r + 32r^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 8f^2 r^4) \\ -8f^3 r^2 + f^4 \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 r^3 \rho + 32f\hat{z}^2 r^3 \rho + 16f^2 \hat{z}^2 r \rho + 8f^3 r \rho - 64\hat{z}^4 r^4 - 32fr^4 \hat{z}^2 + 32fr^2 \hat{z}^4 - 8f^3 r^2 + 8f^3 \hat{z}^2 + 4f^4) - 40\hat{z}^4 r^3 \rho - 40f\hat{z}^2 r^3 \rho + 32f \rho r \hat{z}^4 + 22f^2 \hat{z}^2 r \rho - 2f^3 r \rho + 40\hat{z}^4 r^4 + 40fr^4 \hat{z}^2 - 52fr^2 \hat{z}^4 - 42f^2 r^2 \hat{z}^2 + 2f^3 r^2 + 16f^2 \hat{z}^4 + 11f^3 \hat{z}^2 - f^4] + E(m, \pi/2) [v(-192\hat{z}^4 \rho^4 + 128h\hat{z}^2 \rho^4 - 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 32h^3 \rho^2 + 4h^4) + 208\hat{z}^4 \rho^4 - 160h\hat{z}^2 \rho^4 + 116h\hat{z}^4 \rho^2 - 80h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 - 3h^3 \hat{z}^2 - h^4] \right\} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{\left[ \begin{array}{l} b^3 r \rho (-32r \rho^5 \hat{z}^2 - 16h\hat{z}^2 \rho^3 r - 8h^2 r \rho^3 - 4h^3 r \rho + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 16\hat{z}^4 \rho^4 + 32h\hat{z}^2 \rho^4 + \\ 8h^2 \rho^4 + 8h^3 \rho^2 + h^4) \end{array} \right]} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(64\hat{z}^4 \rho r^5 + 32f \rho r^3 \hat{z}^4 + 48f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 + 8f^3 \rho r \hat{z}^2 + 8f^4 \rho r - 64\hat{z}^4 r^6 - 48f^2 r^4 \hat{z}^2 + 16f^2 r^2 \hat{z}^4 + 16f^3 r^2 \hat{z}^2 - 8f^4 r^2 + 4f^4 \hat{z}^2 + 4f^5) - 32\hat{z}^4 \rho r^5 - 40\hat{z}^6 \rho r^3 - 64f \rho r^3 \hat{z}^4 - 48f^2 \rho r^3 \hat{z}^2 + 6f^2 \rho r \hat{z}^4 - 6f^4 \rho r + 32\hat{z}^4 r^6 + 40\hat{z}^6 r^4 + 48fr^4 \hat{z}^4 + 48f^2 r^4 \hat{z}^2 - 20fr^2 \hat{z}^6 - 38f^2 r^2 \hat{z}^4 - 24f^3 r^2 \hat{z}^2 + 6f^4 r^2 + 3f^3 \hat{z}^4 - 3f^5] + E(m, \pi/2) [v(-128\hat{z}^4 r^6 + 192\hat{z}^6 r^4 + 192fr^4 \hat{z}^4 + 32f^2 r^2 \hat{z}^4 + 32f^3 r^2 \hat{z}^2 + 8f^4 r^2 - 4f^4 \hat{z}^2 - 4f^5) + 160\hat{z}^4 r^6 - 232\hat{z}^6 r^4 - 336fr^4 \hat{z}^4 - 48f^2 r^4 \hat{z}^2 + 116f\hat{z}^6 r^2 + 134f^2 r^2 \hat{z}^4 + 24f^3 r^2 \hat{z}^2 - 6f^4 r^2 - 3f^3 \hat{z}^4 + 3f^5] \right\} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial^2 u_{zz}^*}{\partial \xi \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^5 r (8\rho^5 r - 8a\rho^3 r + 8\rho^3 r \hat{z}^2 - 6a^2 r \rho - 12a\rho^4 - 12a\hat{z}^2 \rho^2 + 12a^2 \rho^2 + a^3)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-64\hat{z}^4 r \rho^3 + 32hr\rho^3 \hat{z}^2 - 16h^2 r \rho \hat{z}^2 + 8h^3 r \rho + 64\hat{z}^4 \rho^4 - 32hr\rho^4 \hat{z}^2 + 32hr\rho^2 \hat{z}^4 - 8h^3 \rho^2 + 8h^3 \hat{z}^2 - 4h^4) + 40\hat{z}^4 r \rho^3 - 40hr\rho^3 \hat{z}^2 + 32hr\rho \hat{z}^4 - 22h^2 r \rho \hat{z}^2 - 2h^3 r \rho - 40\hat{z}^4 \rho^4 + 40hr\rho^4 \hat{z}^2 - 52hr\rho^2 \hat{z}^4 + 42h^2 \hat{z}^2 \rho^2 + 2h^3 \rho^2 - 16h^2 \hat{z}^4 + 11h^3 \hat{z}^2 + h^4] + E(m, \pi/2) [v(-64\hat{z}^4 \rho^4 + 128hr\rho^4 \hat{z}^2 - 128hr\rho^2 \hat{z}^4 + 96h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 32h^3 \rho^2 - 32h^3 \hat{z}^2 + 28h^4) + 112\hat{z}^4 \rho^4 - 160hr\rho^4 \hat{z}^2 - 72\hat{z}^6 \rho^2 + 244hr\rho^2 \hat{z}^4 - 192h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 + 46h^2 \hat{z}^4 - 35h^3 \hat{z}^2 - 7h^4] \right\} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial r} = \frac{A_1}{b^3 r^2 \rho^2 (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(48\hat{z}^4 r \rho^3 + 48\hat{z}^2 r \rho^5 - 48ar\hat{z}^2 \rho^3 + 8a^2 r \rho \hat{z}^2 - 24a\rho^2 \hat{z}^4 - 24a\hat{z}^2 \rho^4 + 24a^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 4a^3 \hat{z}^2) - 48\hat{z}^4 r \rho^3 - 48\hat{z}^2 r \rho^5 + 48ar\hat{z}^2 \rho^3 - 8a^2 r \rho \hat{z}^2 + 24a\rho^2 \hat{z}^4 + 24a\hat{z}^2 \rho^4 - 24a^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 4a^3 \hat{z}^2] + E(m, \pi/2) [v(-32\rho^6 \hat{z}^2 + 64\hat{z}^4 \rho^4 - 64hr\rho^4 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^4 + 48hr\rho^2 \hat{z}^4 - 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 + 8h^3 \rho^2 + 4h^3 \hat{z}^2) + 32\rho^6 \hat{z}^2 - 64\hat{z}^4 \rho^4 + 64hr\rho^4 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^4 - 48hr\rho^2 \hat{z}^4 + 32h^2 \rho^2 \hat{z}^2 - 8h^3 \rho^2 - 4h^3 \hat{z}^2] \right\} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \rho \partial z} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r \rho^2 (-4ar\rho - 4\rho^4 + 4a\rho^2 - 4\rho^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-48\hat{z}^2 r \rho^3 + 8hr\rho^3 r - 8h^2 r \rho + 48\hat{z}^2 \rho^4 - 8hr\rho^4 + 24hr\rho^2 \hat{z}^2 + 4h^2 \rho^2 + 4h^3) + 48\hat{z}^2 r \rho^3 - 8hr\rho^3 r + 8h^2 r \rho - 48\hat{z}^2 \rho^4 + 8hr\rho^4 - 24hr\rho^2 \hat{z}^2 - 4h^2 \rho^2 - 4h^3] + E(m, \pi/2) [v(-48\hat{z}^2 \rho^4 + 32hr\rho^4 - 48h\hat{z}^2 \rho^2 + 20h^2 \rho^2 - 4h^3) + 48\hat{z}^2 \rho^4 - 32hr\rho^4 + 48h\hat{z}^2 \rho^2 - 20h^2 \rho^2 + 4h^3] \right\} \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \xi \partial z} = \frac{A_1}{b^3 r \rho (-4ar\rho - 4r^4 + 4ar^2 - 4r^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(-16r^3 \rho \hat{z}^2 - 8f \hat{z}^2 r \rho - 8f^2 r \rho + 16r^4 \hat{z}^2 + 8f^2 r^2 - 4f^2 \hat{z}^2 - 4f^3) + 16r^3 \rho \hat{z}^2 + 8f \hat{z}^2 r \rho + 8f^2 r \rho - 16r^4 \hat{z}^2 - 8f^2 r^2 + 4f^2 \hat{z}^2 + 4f^3] + E(m, \pi/2) [v(32\rho^4 \hat{z}^2 - 48\hat{z}^4 \rho^2 + 48h\rho^2 \hat{z}^2 - 8h^2 \rho^2 + 4h^2 \hat{z}^2 - 4h^3) - 32\rho^4 \hat{z}^2 + 48\hat{z}^4 \rho^2 - 48h\rho^2 \hat{z}^2 + 8h^2 \rho^2 - 4h^2 \hat{z}^2 + 4h^3] \right\} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial^2 u_{\theta\theta}^*}{\partial \xi \partial r} = \frac{A_1 \cdot \hat{z}}{b^3 r^2 \rho (-4ar\rho - 4r^4 + 4ar^2 - 4r^2 \hat{z}^2 + a^2)} \cdot \left\{ K(m, \pi/2) [v(48\hat{z}^2 r^3 \rho + 8f \rho r^3 + 8f^2 \rho r - 48\hat{z}^2 r^4 - 8f r^4 + 24f r^2 \hat{z}^2 - 4f^2 r^2 + 4f^3) - 48\hat{z}^2 r^3 \rho - 8f \rho r^3 - 8f^2 \rho r + 48\hat{z}^2 r^4 + 8f r^4 - 24f r^2 \hat{z}^2 + 4f^2 r^2 - 4f^3] + E(m, \pi/2) [v(-16\hat{z}^2 \rho^4 + 32h\rho^4 + 48\hat{z}^4 \rho^2 - 64h\rho^2 \hat{z}^2 + 44h^2 \rho^2 - 4h^2 \hat{z}^2 + 8h^3) + 16\hat{z}^2 \rho^4 - 32h\rho^4 - 48\hat{z}^4 \rho^2 + 64h\rho^2 \hat{z}^2 - 44h^2 \rho^2 + 4h^2 \hat{z}^2 - 8h^3] \right\} \quad (5.48)$$

De posse destas equações pode-se integrar numericamente as equações do tipo (5.06), encontrando-se, assim, os valores das derivadas dos deslocamentos. Estas, por sua vez, serão inseridas nas equações do tipo (5.05), para então, finalmente, se obter as tensões nos pontos internos. Ressalta-se que, por simplicidade, as equações (5.05) e (5.06) citadas estão particularizadas para uma determinada componente (plano radial, direção radial). Da mesma maneira deve-se proceder para o cálculo das tensões nas demais direções e planos, cujas componentes foram mostradas a partir da equação (5.09).

## CAPÍTULO VI

---

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MEC

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Quando o objetivo é resolver computacionalmente uma equação diferencial ou integral, antes de expressá-la numa linguagem de programação é preciso modelá-la segundo os padrões típicos das técnicas numéricas. Os princípios básicos do cálculo numérico, especialmente os conceitos de aproximação, discretização, convergência etc. formam a principal ferramenta para a resolução de equações por via computacional. Assim sendo, a escolha de algoritmos, técnicas e procedimentos que componham o método de resolução de um problema específico é uma etapa muito importante.

A equação integral obtida em (3.29), repetida a seguir por conveniência como equação (6.01), envolve uma distribuição dos deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno. Conforme já exposto, o ponto fonte  $\zeta$  é o ponto nodal onde a força unitária produz o campo de deslocamentos  $u_{ij}^*$ , enquanto  $X$  representa os pontos de integração sobre o contorno, os pontos campo.

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(\mathbf{X}) p_{ij}^*(\zeta; \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) = \int_{\Gamma} p_j(\mathbf{X}) u_{ij}^*(\zeta; \mathbf{X}) d\Gamma(\mathbf{X}) \quad (6.01)$$

No caso do Método dos Elementos de Contorno, o tratamento numérico desenvolvido considera uma discretização do contorno em um número finito de elementos. Como será mostrado, para o presente estudo comparam-se os elementos lineares e quadráticos, que correspondem ao uso de funções de interpolação lineares e quadráticas, respectivamente.

Esta discretização leva a um sistema de equações algébricas envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

Em princípio, os métodos numéricos permitem resolver sistemas de difícil resolução analítica, mas de uma forma aproximada. Considerando este aspecto, o método dos Elementos de Contorno envolve um procedimento que procura minimizar o erro cometido com a solução aproximada através de uma ponderação avaliada em todo o contorno, empregando uma função que guarda semelhança com o problema que se deseja resolver.

## 6.2 - PROCEDIMENTO NUMÉRICO GERAL

Uma vez obtida a equação integral geral de contorno (6.01) é preciso discretizá-la, para então resolvê-la aproximadamente.

Inicialmente divide-se o contorno numa série de elementos sobre os quais se interpolam as grandezas  $u_i$  e  $p_i$  em termos dos valores nodais.

$$u_i = \mathbf{N}^e \mathbf{u}_i^e \quad (6.02)$$

$$p_i = \mathbf{N}^e \mathbf{p}_i^e \quad (6.03)$$

onde  $\mathbf{N}^e$  é o vetor das funções de interpolação,  $\mathbf{u}_i^e$  e  $\mathbf{p}_i^e$  são os vetores deslocamento e força de superfície do ponto nodal  $X$ .

A seguir apresentam-se algumas definições importantes no desenvolvimento desta teoria para ajudar na sua compreensão.

## 6.2.1 – ELEMENTOS COM GEOMETRIA LINEAR

Na Figura 6.1 observa-se o exemplo de um elemento de geometria retilínea. Nele observa-se a coordenada natural  $\Gamma(\eta)$ , que é definida como:

$$\Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \Phi_1 + x_2^e \Phi_2 = x_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + x_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (6.04)$$

$$\Gamma_y^e(\eta) = y_1^e \Phi_1 + y_2^e \Phi_2 = y_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + y_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (6.05)$$

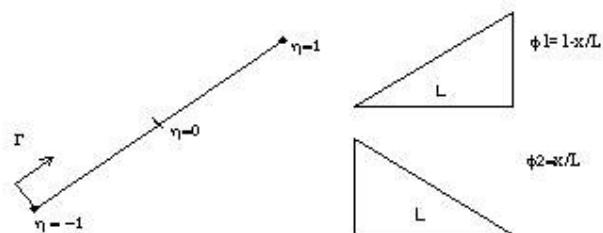


Figura 6.1 – Elemento de geometria retilínea

Com base nos princípios da geometria diferencial e observando, também, a Figura 6.2 pode-se escrever:

$$d\Gamma^2 = d\Gamma_x^2 + d\Gamma_y^2$$

$$\left(\frac{d\Gamma^e}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2$$

$$\frac{d\Gamma^e}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2}$$

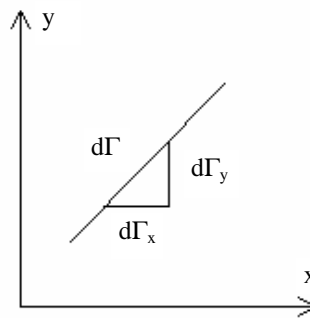


Figura 6.2 – Geometria retilínea - elemento diferencial

Finalmente:

$$d\Gamma^e = |J^e| d\eta \quad (6.06)$$

onde  $|J^e|$  é o Jacobiano da transformação, que para a geometria linear e em 2D tem o valor de:

$$|J^e| = \frac{L_j}{2} \quad (6.07)$$

A variável  $L_j$  representa o comprimento do elemento.

## 6.2.2 – ELEMENTOS COM GEOMETRIA QUADRÁTICA

Para uma geometria não retilínea, como a forma mostrada na Figura 6.3 a seguir:

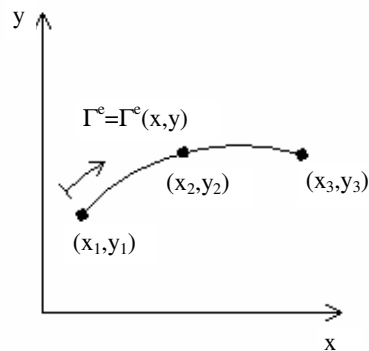


Figura 6.3 – Elemento de geometria não retilínea

Tem-se:

$$\Gamma_x^e(\mathbf{X}) = x_1^e \Phi_1 + x_2^e \Phi_2 + x_3^e \Phi_3 = x_1^e \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + x_2^e (1 - \eta^2) + x_3^e \left( \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (6.08)$$

$$\Gamma_y^e(\mathbf{X}) = y_1^c \Phi_1 + y_2^c \Phi_2 + y_3^c \Phi_3 = y_1^c \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + y_2^c (1 - \eta^2) + y_3^c \left( \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (6.09)$$

Da mesma forma que no caso linear:

$$\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta} = \eta(x_1^c - 2x_2^c + x_3^c) + \frac{1}{2}(x_3^c - x_1^c) \quad (6.10)$$

$$\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta} = \eta(y_1^c - 2y_2^c + y_3^c) + \frac{1}{2}(y_3^c - y_1^c) \quad (6.11)$$

O Jacobiano é definido como na equação (6.06). Assim:

$$|J^e| = \sqrt{\left( \frac{d\Gamma_x^e}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{d\Gamma_y^e}{d\eta} \right)^2} \quad (6.12)$$

### 6.2.3 – EXPRESSÕES DOS INTEGRANDOS

Para se efetuar as integrais indicadas na equação (6.01), deve-se conhecer as expressões dos integrandos em função da coordenada natural  $\eta$ . O Jacobiano é dado pela expressão (6.12). As coordenadas do ponto campo  $x(\eta)$  e  $y(\eta)$  podem ser determinadas a partir das expressões (6.08) e (6.09). Sendo assim, a distância entre os pontos fonte e campo e o vetor  $\mathbf{R}$  (vide a Figura 6.4) estão determinadas, restando apenas obter a expressão para o vetor unitário normal  $\mathbf{n}(\eta)$ .

Então, seja  $\mathbf{t}$  um vetor tangente à curva  $\Gamma$ , conforme apresenta a Figura 6.4.

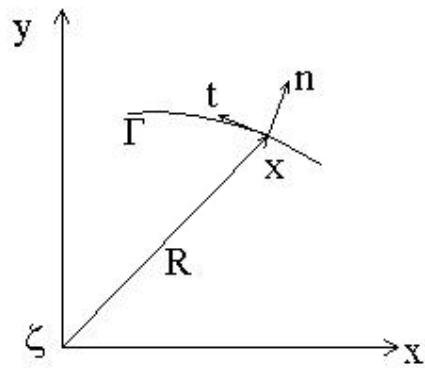


Figura 6.4 – Vetor posição e vetores unitários

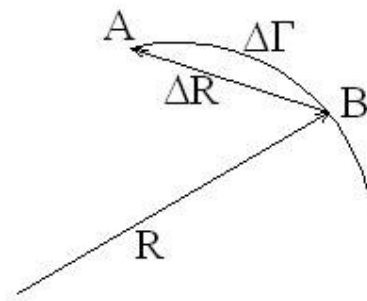


Figura 6.5 – Elemento diferencial da curva

Há uma relação entre  $\mathbf{R}$  e a curva  $\Gamma$ , conforme mostra a Figura 6.5, que pode ser expressa por:

$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \Gamma} = \frac{\mathbf{AB}}{\Delta \Gamma} \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \lim_{\Delta \Gamma \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta \Gamma} = \mathbf{t} \quad (6.13)$$

A análise geométrica mostra que quando  $\Delta\Gamma \rightarrow 0$  e  $A \rightarrow B$  a direção da corda AB tende para a direção da tangente à curva em P.

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \frac{dx}{d\Gamma} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\Gamma} \mathbf{j} = \mathbf{t} \quad (6.14)$$

Por outro lado:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{R}}{d\Gamma} = \frac{d\mathbf{R}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{d\mathbf{R}}{d\eta} \frac{1}{|J|} \quad (6.15)$$

Da expressão anterior falta calcular o termo  $d\mathbf{R}/d\eta$ . Assim:

$$\mathbf{R} = [x(X_i) - x(\zeta)] \mathbf{i} + [y(X_i) - y(\zeta)] \mathbf{j} \quad (6.16)$$

Derivando em  $X_i$ , tem-se:

$$d\mathbf{R} = [dx(X_i)] \mathbf{i} + [dy(X_i)] \mathbf{j} \quad (6.17)$$

onde  $dx$  e  $dy$  são coordenadas globais; então, escrevendo-as em termos de  $\eta$ :

$$x = \Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \Phi_1 + x_2^e \Phi_2 + x_3^e \Phi_3 = x_1^e N_1 + x_2^e N_2 + x_3^e N_3 \quad (6.18)$$

$$y = \Gamma_y^e(\eta) = y_1^e \Phi_1 + y_2^e \Phi_2 + y_3^e \Phi_3 = y_1^e N_1 + y_2^e N_2 + y_3^e N_3 \quad (6.19)$$

E derivando-as:

$$dx = x_1^e d\Phi_1 + x_2^e d\Phi_2 + x_3^e d\Phi_3 \quad (6.20)$$

$$dy = y_1^e d\Phi_1 + y_2^e d\Phi_2 + y_3^e d\Phi_3 \quad (6.21)$$

As funções  $\Phi_k$  são dadas em função de  $\eta$ ; logo:

$$\frac{d \mathbf{R}}{d \eta} = \frac{d x(\eta)}{d \eta} \mathbf{i} + \frac{d y(\eta)}{d \eta} \mathbf{j} \quad (6.22)$$

Com as condições:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{s} &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Obtem-se o vetor normal:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{d y(\eta)}{d \eta} \mathbf{i} - \frac{d x(\eta)}{d \eta} \mathbf{j} \right] \quad (6.24)$$

Feita a discretização, as integrais são resolvidas de forma numérica empregando a Fórmula de Gauss.

## 6.2.4 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Para definir as funções de interpolação espacial, parte-se da adoção de um sistema de coordenadas adimensional, conhecido também como sistema de coordenadas natural.

A coordenada adimensional  $\eta$ , é usada com vantagem por permitir o uso de funções  $\Phi_k$  padronizadas e por se ajustar com mais facilidade aos esquemas de integração aproximada (Gauss, por exemplo), doravante empregados.

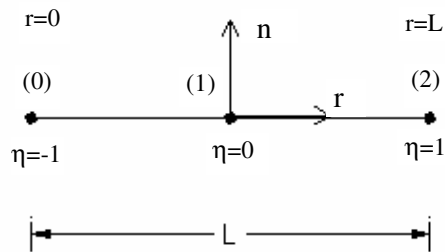


Figura 6.6 – Sistema de coordenadas adimensional

Na Figura 6.6 mostra-se um elemento adimensional, para o qual as componentes de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$ , respectivamente  $u_i$  e  $p_i$ , em qualquer ponto, podem ser definidas em termos de seus valores nodais e as funções de interpolação  $\Phi_k$  são dadas em termos da coordenada adimensional.

Para as funções de interpolação linear, tem-se:

$$u_i(\eta) = u_{i1}^e \Phi_1(\eta) + u_{i2}^e \Phi_2(\eta) = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \begin{bmatrix} u_{i1}^e \\ u_{i2}^e \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$p_i(\eta) = p_{i1}^e \Phi_1(\eta) + p_{i2}^e \Phi_2(\eta) = [\Phi_1 \quad \Phi_2] \begin{bmatrix} p_{i1}^e \\ p_{i2}^e \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Da Figura 6.6, pode-se ver que a coordenada adimensional  $\eta$  varia de -1 a +1 e as duas funções de interpolação são:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (6.27)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (6.28)$$

Da mesma forma, para as funções de interpolação quadráticas tem-se:

$$u_i(\eta) = u_{i1}^e \Phi_1(\eta) + u_{i2}^e \Phi_2(\eta) + u_{i3}^e \Phi_3(\eta) = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \begin{bmatrix} u_{i1}^e \\ u_{i2}^e \\ u_{i3}^e \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$p_i(\eta) = p_{i1}^e \Phi_1(\eta) + p_{i2}^e \Phi_2(\eta) + p_{i3}^e \Phi_3(\eta) = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \begin{bmatrix} p_{i1}^e \\ p_{i2}^e \\ p_{i3}^e \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

E, neste caso, as funções de interpolação são:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1) \quad (6.31)$$

$$\Phi_2 = 1 - \eta^2 \quad (6.32)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} \eta(\eta + 1) \quad (6.33)$$

## 6.2.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

Na Figura 6.7 ilustra-se esquematicamente como se processa a aproximação de um contorno curvilíneo qualquer por elementos de contorno. Na figura a) se apresenta o elemento constante retilíneo. Nele, a aproximação das variáveis básicas ou primais é constante ao longo do elemento, enquanto a descrição geométrica do elemento é linear. É, portanto, um típico elemento hipoparamétrico. Nele, comumente o posicionamento dos pontos nodais é centralizado no elemento de contorno. O uso de tal tipo de elemento é bastante limitado na

elasticidade. Na figura b) vê-se o elemento linear retilíneo, de classe isoparamétrica, no qual o campo de variáveis primais e a geometria do elemento são de mesma ordem. Usualmente os pontos nodais coincidem com as extremidades do elemento de contorno, mas em algumas ocasiões podem ser empregados elementos não-conformes, nos quais os pontos nodais são deslocamentos para o interior ou mesmo para o exterior, embora mais raramente. Por fim, na figura c) vê-se o elemento quadrático isoparamétrico. Três nós funcionais caracterizam este tipo de elemento, de maior precisão.

Assim, substituindo (6.02) e (6.03) em (6.01) tem-se a seguinte expressão:

$$C_{ij}(\zeta_i) u_i(\zeta_i) + \sum_{k=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_k} p_{ij}^* N^e d\Gamma \right) u_i^e = \sum_{k=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_k} u_{ij}^* N^e d\Gamma \right) p_i^e \quad (6.34)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos da discretização.

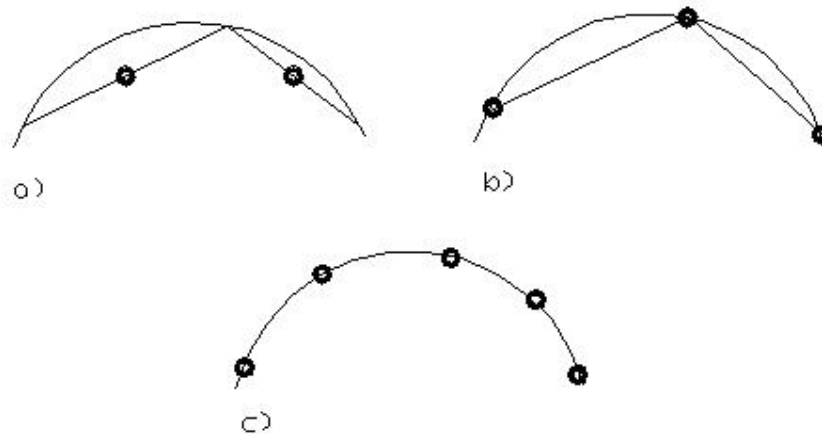


Figura 6.7 – Tipos de elemento de contorno: a) elemento constante,  
 b) elemento linear,  
 c) elemento quadrático.

A geometria de cada elemento é definida em termos de uma função interpolante de forma, que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas. As coordenadas cartesianas  $x_i$  dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como mostra-se a seguir:

$$x_i = \mathbf{M}^e \mathbf{x}_i^e \quad (6.35)$$

onde  $\mathbf{M}^e$  é a matriz contendo as funções de interpolação e  $\mathbf{x}_i^e$  o vetor de coordenadas nodais do elemento.

Durante a montagem do sistema de equações indicado em (6.34), cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dará através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^{PI} f(\eta_i) w_i \quad (6.36)$$

Na equação anterior,  $\eta_i$  é a coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração,  $w_i$  é o fator de peso associado ao ponto  $i$ , e  $PI$  é o número total de pontos de integração utilizado.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da equação (6.34) como segue:

$$\int_{\Gamma_1} p_{ij}^* \mathbf{N}^e d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_{ij}^* \mathbf{N}^e |\mathbf{J}^e| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}^e|_k w_k \mathbf{N}^e_k p_{ij}^* \quad (6.37)$$

$$\int_{\Gamma_1} u_{ij}^* \mathbf{N}^e d\Gamma = \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* \mathbf{N}^e |\mathbf{J}^e| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}^e|_k w_k \mathbf{N}^e_k u_{ij}^* \quad (6.38)$$

nas quais  $NPI$  representa o número de pontos de integração de Gauss.

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente considerando o ponto  $\zeta$  situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de três equações

algébricas por nó é gerado e envolve os valores nodais de deslocamento e força de superfície.

Ainda é interessante levar este sistema para uma forma matricial conforme mostrado a seguir.

Da segunda parcela de (6.34) tem-se:

$$\sum_{k=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_k} \mathbf{p}_{ij}^* \mathbf{N}^e d\Gamma_e \right) \mathbf{u}_i^e = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e \quad (6.39)$$

Similarmente,

$$\sum_{k=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_k} \mathbf{u}_{ij}^* \mathbf{N}^e d\Gamma_e \right) \mathbf{p}_i^e = \sum_{k=1}^{N_e} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad (6.40)$$

O sistema fica reduzido na forma mostrada a seguir:

$$\mathbf{C}(\zeta_i) \mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{N_e} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad (6.41)$$

Resulta, então, um sistema de equações matriciais na forma:

$$(\mathbf{C} + \hat{\mathbf{H}}) \mathbf{u} = \mathbf{Gp} \quad (6.42)$$

Na equação (6.42) os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  contêm os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz  $\mathbf{C}$  é quase diagonal (banda pequena), e pode ser incorporada à matriz  $\hat{\mathbf{H}}$  para formar o sistema abaixo:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad (6.43)$$

## 6.2.6 – POSICIONAMENTO DOS PONTOS FONTE.

Apesar da forma concisa apresentada em (6.43), é necessário agora estudar como determinar as submatrizes da diagonal de  $\mathbf{H}$ . Ressalta-se que os termos dessa diagonal são compostos da submatriz  $\mathbf{C}$  e de parcelas de integrais nas quais há singularidade, pelo fato do ponto fonte estar coincidente com o elemento no qual se processa a integração. O raio vetor  $R$  se anula ou fica próximo de zero. O cálculo dessas integrais singulares é analiticamente bastante complexo e numericamente também bastante sensível a imprecisões. Para se evitar tais problemas, usualmente a forma de cálculo destes componentes é feita através da imposição de translações de corpo rígido, correspondentes a forças de superfície nulas. Desta forma, adotando-se para o caso bidimensional, 2 translações independentes,  $u_i = \delta_{i1}$  e  $u_i = \delta_{i2}$ , chega-se a:

$$\sum_{q=1}^t \mathbf{H}_{pq} \mathbf{u}_q = 0 \quad (p=1,2,\dots,t) \quad (6.44)$$

onde  $\mathbf{H}_{pq}$  representa matrizes  $2 \times 2$  de  $\mathbf{H}$  e:

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{I} \quad (6.45)$$

onde  $\mathbf{I}$  é matriz identidade.

Deste modo, pode-se calcular indiretamente as submatrizes da diagonal de  $\mathbf{H}$  na forma:

$$\mathbf{H}_{\alpha\alpha} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^t \mathbf{H}_{\alpha q} \quad (\alpha = 1,2,\dots,t) \quad (6.46)$$

No entanto, essa estratégia não resulta efetiva nos casos de problemas axissimétricos, pois se é possível simular um movimento de corpo rígido na direção axial, o mesmo não pode ser feito na direção perpendicular ao eixo de revolução. Restaria, nesse caso tentar integrar as

complexas singularidades geradas por funções elípticas, não fosse possível colocar o ponto fonte  $\zeta$  fora do domínio físico do problema, resultando numa matriz  $\mathbf{C}$  identicamente nula.

A introdução da técnica de colocação dos pontos fonte fora do domínio não é novidade com o MEC, mas é um procedimento pouco usual, por se acreditar que há perda apreciável de precisão e requerer-se a definição de novas coordenadas para os pontos fonte, diferentes daquelas escolhidas para definição dos nós funcionais na malha de elementos.

No Brasil, Fernandes & Venturini [10] procederam a diversas pesquisas sobre o tema, chegando a propor expressões interessantes com vistas à manutenção da precisão do método apesar da colocação dos pontos fonte afastados do domínio físico do problema.

Nesta dissertação, portanto, os pontos fonte são posicionados estrategicamente fora do domínio, acarretando, dentre outros benefícios, uma reduzida quantidade de integrais singulares a serem resolvidas, visto que:

$$\mathbf{C}(\zeta) \equiv 0 \quad (6.47)$$

Portanto, tem-se uma equação idêntica à equação (6.43) abaixo, para cada ponto geométrico preestabelecido na etapa de discretização, resultando em um sistema de equações  $3N_p \times 3N_p$ , onde  $N_p$  representa o número total de pontos geométricos situados no contorno.

$$\sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} p_{rr}^* & p_{r\theta}^* & p_{rz}^* \\ p_{\theta r}^* & p_{\theta\theta}^* & p_{\theta z}^* \\ p_{zr}^* & p_{z\theta}^* & p_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* = \sum_I^{NE} \int_{\Gamma^*} \begin{pmatrix} u_{rr}^* & u_{r\theta}^* & u_{rz}^* \\ u_{\theta r}^* & u_{\theta\theta}^* & u_{\theta z}^* \\ u_{zr}^* & u_{z\theta}^* & u_{zz}^* \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_z \end{bmatrix} 2\pi r_j d\Gamma^* \quad (6.48)$$

No que tange à posição exata destes pontos fonte, utilizou-se a mesma estratégia empregada por Fernandes & Venturini [10] em seu trabalho. A Figura 6.8 ilustra a estratégia empregada. Na citada figura representa-se apenas um quadrante de uma esfera oca. Nela estão mostrados, sobre o contorno, os nós geométricos e, externos ao domínio, os pontos fonte. A distância  $d_j$  é dada por:

$$d_i = a_i l_j \quad (6.49)$$

Nesta última equação,  $l_j$  é valor médio dos tamanhos dos elementos adjacentes e  $a_i$  é um parâmetro escolhido dentro de uma escala de 0,1 a 0,5.

Ressalta-se que existe uma outra forma de se obter os coeficientes  $C_{ij}$ , que foi apresentada em Brebbia et al [5]. Porém, após ser testada nessa pesquisa, esta técnica não proporcionou as mesmas vantagens observadas com o posicionamento externo dos pontos fonte.

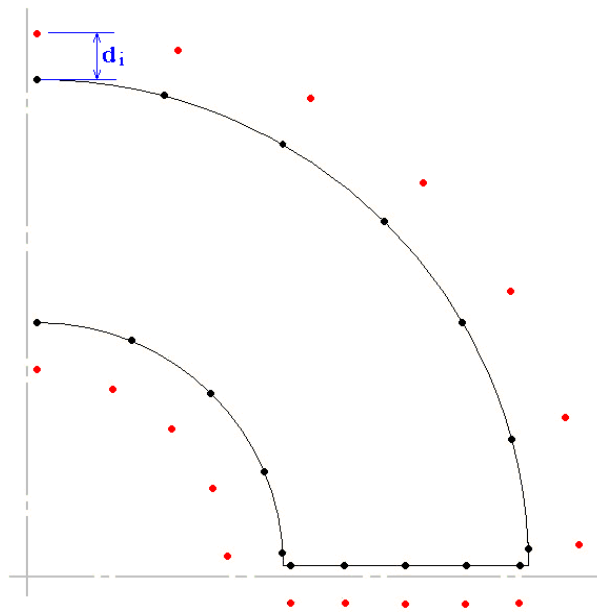


Figura 6.8 – Nós geométricos e pontos externos ao contorno de uma esfera oca

### 6.3 – EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO

Para se conhecer todas as tensões e deformações nos pontos que se encontram exatamente no contorno, é preciso ter, como ponto de partida, todos os vetores deslocamento e força de superfície já conhecidos nos pontos nodais. Isto quer dizer que devem estar disponíveis para o cálculo tanto os valores nodais das variáveis básicas fornecidos ao sistema de equações como condições de contorno, quanto os valores calculados posteriormente pela solução das equações integrais discretizadas. As componentes destes vetores em cada ponto nodal de um dado elemento estão representadas concisamente de acordo com as equações (6.02) e (6.03).

No entanto, para que estes vetores sejam aproveitados, deve-se fazer uso de um eixo de coordenadas tangencial e normal à superfície de contorno, no intuito de se utilizar um plano de tensões principal, o que facilita imensamente os cálculos. A Figura 6.9 exemplifica este sistema de coordenadas para um ponto qualquer do contorno. Os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  representam os vetores unitários que definem este sistema de coordenadas.

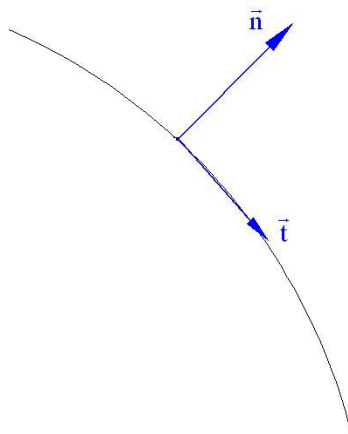


Figura 6.9 – Representação dos vetores normal e tangente

De acordo com a equação (6.14) onde  $x$  e  $y$  serão respectivamente, em coordenadas cilíndricas,  $r$  e  $z$ :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dr}{d\eta} \mathbf{i} + \frac{dz}{d\eta} \mathbf{j} \right) = T_1 \mathbf{i} + T_2 \mathbf{j} \quad (6.50)$$

O vetor  $\mathbf{u}(Q)$  é o vetor deslocamento do ponto  $Q$  nas coordenadas originais, tal que:

$$\mathbf{u}(Q) = u_r(Q) \mathbf{i} + u_z(Q) \mathbf{j} + u_\theta(Q) \mathbf{k} \quad (6.51)$$

Para se obter o deslocamento  $u_t(Q)$  do ponto  $Q$  na direção do vetor  $\mathbf{t}$  basta-se efetuar o produto escalar  $\mathbf{u}(Q) \cdot \mathbf{t}$ :

$$u_t(Q) = (u_r(Q) T_1 + u_z(Q) T_2) \quad (6.52)$$

Para a continuação dos cálculos é preciso que se obtenha a deformação do ponto em relação ao novo sistema de coordenadas. Desta forma, considera-se  $dt$  como um comprimento infinitesimal na direção tangencial ao contorno, de forma que:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{du_t(Q)}{dt} = \frac{du_t(Q)}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \quad (6.53)$$

Tomando-se um segmento qualquer no contorno  $\Delta\Gamma$  e um na direção tangencial ao contorno  $\Delta\Gamma$  como mostrado na Figura 6.10, é imediata a constatação de que fazendo-se ambos tenderem à zero, tem-se:

$$\text{Se } \Delta\Gamma \rightarrow 0 ; \Delta t \rightarrow 0 , \text{ então: } d\Gamma = dt$$

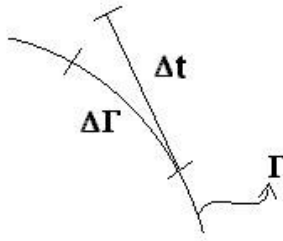


Figura 6.10 – Discretização do contorno

Desta maneira, também pode-se verificar que:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{du_t(Q)}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{du_t(Q)}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{1}{|J|} \frac{du_t(Q)}{d\eta} \quad (6.54)$$

Portanto, desenvolvendo a derivação da equação (6.52) e substituindo-a na equação (6.54), obtém-se:

$$\varepsilon_{tt} = \frac{1}{|J|} \left[ \left( \frac{dN_1}{d\eta} u_{r1}^e + \frac{dN_2}{d\eta} u_{r2}^e + \frac{dN_3}{d\eta} u_{r3}^e \right) T_1 + \left( \frac{dN_1}{d\eta} u_{z1}^e + \frac{dN_2}{d\eta} u_{z2}^e + \frac{dN_3}{d\eta} u_{z3}^e \right) T_2 \right] \quad (6.55)$$

Como esta transformação de coordenadas consiste em apenas uma rotação em torno do eixo  $\theta$ , os alongamentos angulares  $\varepsilon_{\theta\theta}$  não se alteram. Sendo  $\rho$  a distância do ponto ao eixo de simetria (representado na Figura 4.1 como  $r_i$ ), pode-se concluir que:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{N_1 u_{z1}^e + N_2 u_{z2}^e + N_3 u_{z3}^e}{\rho} \quad (6.56)$$

Com a Lei de Hooke tem-se:

$$\frac{\sigma_{nn}}{2\mu} = \varepsilon_{nn} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \quad (6.57)$$

Então:

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[ \frac{(1-2\nu)}{2\mu} \sigma_{nn} - \nu (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.58)$$

Da mesma forma que para com os deslocamentos, é preciso também realizar a rotação do vetor força para que se trabalhe no sistema de coordenadas tangencial e normal. As componentes do vetor força neste sistema de coordenadas são obtidas fazendo-se o produto escalar entre o vetor força  $\mathbf{p}(\mathbf{Q})$  e a matriz transformação (no caso uma transformação definida por uma rotação)  $\mathbf{Tr}$ , onde:

$$\mathbf{p}(\mathbf{Q}) = p_r(\mathbf{Q}) \mathbf{i} + p_z(\mathbf{Q}) \mathbf{j} + p_\theta(\mathbf{Q}) \mathbf{k} \quad (6.59)$$

e,

$$\mathbf{Tr} = \begin{bmatrix} -T_2 & T_1 & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Então:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p} \mathbf{Tr} = p_t(\mathbf{Q}) \mathbf{i} + p_n(\mathbf{Q}) \mathbf{j} + p_\varphi(\mathbf{Q}) \mathbf{k} \quad (6.61)$$

Agora, neste plano de tensões, é possível montar o tensor tensão. Das nove componentes, cinco já foram calculadas com os dados do vetor tensão e as outras três serão encontradas tomando-se como base as deformações e as tensões também já calculadas.

Sendo este vetor tensão  $\bar{\sigma}_t$ , tal que:

$$\bar{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{tn} & \sigma_{t\varphi} \\ \sigma_{nt} & \sigma_{nn} & \sigma_{n\varphi} \\ \sigma_{\varphi t} & \sigma_{\varphi n} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

De posse das componentes do vetor força e sabendo-se que o tensor tensão é sempre simétrico, pode-se afirmar automaticamente que:

$$\bar{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & p_t & \sigma_{\varphi t} \\ p_t & p_n & p_\varphi \\ \sigma_{\varphi t} & p_\varphi & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Pode-se agora completar a equação (6.58) encontrando, desta forma, a deformação  $\varepsilon_{nn}$  que faltava ser calculada, pois sabe-se que  $\sigma_{nn} = p_n$ . Assim sendo, tem-se:

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[ \frac{(1-2\nu)}{2\mu} p_n - \nu (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.64)$$

Para as duas componentes do tensor tensão restantes utiliza-se a lei de Hooke.

$$\sigma_{tt} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{tt} + \nu (\varepsilon_{nn} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \quad (6.65)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu (\varepsilon_{tt} + \varepsilon_{nn}) \right] \quad (6.66)$$

A seguir o desenvolvimento para a obtenção da última componente de tensão a ser calculada:  $\sigma_{t\varphi}$ . As substituições foram feitas de modo a determinar esta componente de tensão dependendo o mínimo possível do cálculo de derivadas de deslocamento. Com isto, ocorre a redução do erro de aproximação devido à derivação da função de interpolação. Para tanto, parte-se da equação matricial que transforma o tensor deformação em coordenadas cilíndricas para o novo sistema de coordenadas:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{T}r \quad (6.67)$$

A seguir serão empregados na transformação apenas os termos necessários na obtenção de  $\sigma_{t\varphi}$ . Fazendo a multiplicação das matrizes termo a termo tem-se:

$$\varepsilon_{r\varphi} = -T_2\varepsilon_{r\theta} + T_1\varepsilon_{z\theta} \quad (6.68)$$

$$\varepsilon_{n\varphi} = T_1\varepsilon_{r\theta} + T_2\varepsilon_{z\theta} \quad (6.69)$$

Pela lei de Hooke:

$$\varepsilon_{n\varphi} = \frac{\sigma_{n\varphi}}{2G} = \frac{P_\varphi}{2G} = T_1\varepsilon_{r\theta} + T_2\varepsilon_{z\theta} \quad (6.70)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{T_1} \left( \frac{P_\varphi}{2G} - T_2\varepsilon_{z\theta} \right) \quad (6.71)$$

Desta forma a equação (6.68) ficará:

$$\varepsilon_{r\varphi} = -T_2 \frac{1}{T_1} \left( \frac{P_\varphi}{2G} - T_2\varepsilon_{z\theta} \right) + T_1\varepsilon_{z\theta}$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{T_1} \left( \varepsilon_{z\theta} - T_2 \frac{P_\varphi}{2G} \right) \quad (6.72)$$

Quando  $T_1 = 0$ , utiliza-se a equação (6.68), onde:

$$\varepsilon_{r\varphi} = -T_2\varepsilon_{r\theta} \quad (6.73)$$

De forma resumida, a última componente do tensor tensão  $\sigma_{t\varphi}$ , em função de apenas uma derivada de deslocamento será:

Se  $T_1 \neq 0$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{G}{T_1} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - T_2 \frac{p_\varphi}{G} \right) \quad (6.74)$$

Quando  $T_1 = 0$  :

$$\sigma_{r\varphi} = -GT_2 \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{\rho} \right) \quad (6.75)$$

## CAPÍTULO VII

---

### SIMULAÇÃO NUMÉRICA

#### 7.1 - ESFERA OCA

Nesta primeira aplicação, considera-se uma esfera oca, de raio interno igual a  $R_a$  e raio externo igual a  $R_b$ , submetida a uma pressão negativa unitária  $P$  em seu interior e a uma pressão externa nula, conforme esquematizado na Figura 7.1 a seguir.

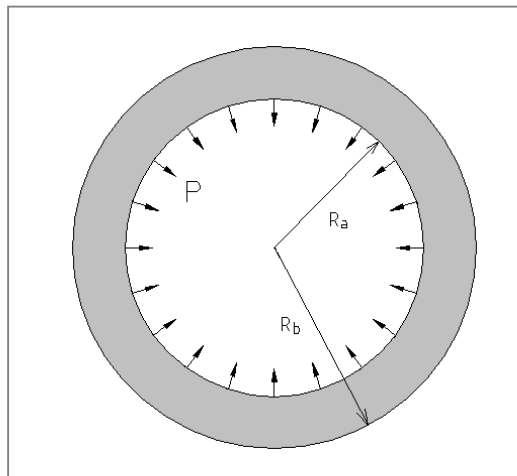


Figura 7.1 – Esfera oca submetida a pressão interna

Uma meia esfera pode representar integralmente uma esfera completa quando nela é restringido o deslocamento no eixo “z”, exatamente como está representado pelo apoio sobre rolos indicado na Figura 7.2. Isto trará enormes benefícios computacionais ao cálculo. Tem-se como solução analítica do problema as seguintes expressões, dadas em função do raio da esfera:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R_a^3}{R_b^3 - R_a^3} \left( 1 + \frac{R_b^3}{2r^3} \right) \quad (7.01)$$

$$u_r = - \frac{R_a^3}{R_b^3 - R_a^3} \left( r + \frac{R_b^3}{2r^2} \right) \quad (7.02)$$

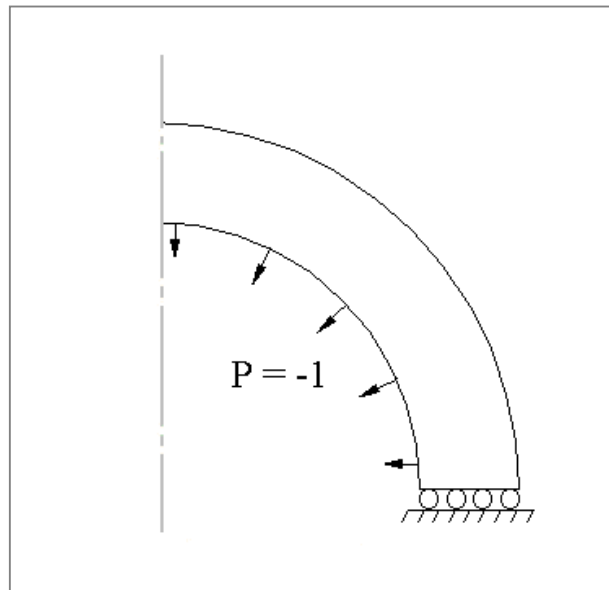


Figura 7.2 – Modelo simplificado (um quarto de esfera) considerando uma seção de revolução submetida a condições de contorno adequadas

O modelo adotado para ser resolvido pelo Método dos Elementos de Contorno considerou a discretização do contorno em 8 elementos quadráticos. Tanto a superfície interior quanto a exterior foram discretizadas em 2 elementos. Os 4 elementos restantes foram posicionados ao longo do raio, na superfície apoiada sobre rolos. A figura a seguir mostra os pontos desta discretização onde cada elemento possui 3 pontos:

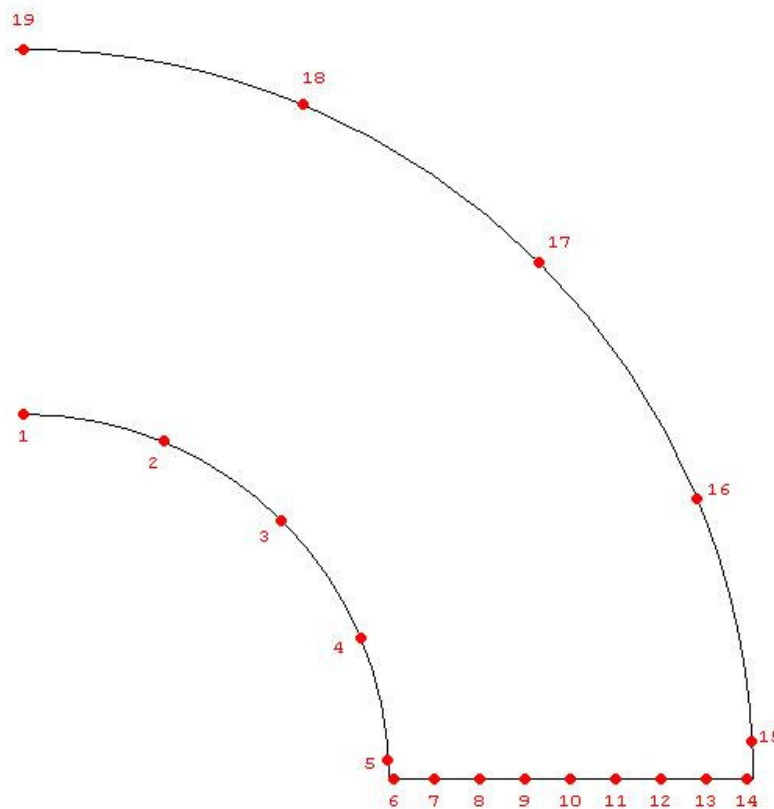


Figura 7.3 – Malha utilizada na simulação da esfera oca

Para o presente cálculo foram adotados os seguintes valores:

$$R_a = 1 \text{ m};$$

$$R_b = 2 \text{ m};$$

$$v = 0;$$

$$E = 1,0 \text{ Pa.}$$

As Tabelas (7.1) e (7.2) a seguir apresentam comparações entre a solução analítica do problema e a solução obtida pelo método, utilizando os parâmetros mencionados anteriormente.

Tabela (7.1) - Deslocamento radial  $u_r$  (em metros) ao longo do raio

| Raio (m) | MEC     | Analítico | Erro % |
|----------|---------|-----------|--------|
| 1.125    | -0.6125 | -0.6122   | 0.04   |
| 1.375    | -0.4983 | -0.4987   | 0.07   |
| 1.625    | -0.4480 | -0.4485   | 0.12   |
| 1.875    | -0.4297 | -0.4304   | 0.16   |

Tabela (7.2) - Tensão normal  $\sigma_{\theta\theta}$  (Pa) ao longo do raio

| Raio (m) | MEC    | Analítico | Erro % |
|----------|--------|-----------|--------|
| 1.125    | 0.5429 | 0.5442    | 0.24   |
| 1.375    | 0.3606 | 0.3627    | 0.58   |
| 1.625    | 0.2746 | 0.2760    | 0.52   |
| 1.875    | 0.2302 | 0.2295    | 0.29   |

Pode-se perceber que a precisão obtida pela simulação numérica é bastante satisfatória, pois o maior erro ficou limitado a 0,6%, não obstante a relativa simplicidade da malha, que embora seja constituída de elementos quadráticos, empregou apenas oito elementos de contorno.

Uma precisão ainda maior seria obtida se os valores apresentados fossem calculados para pontos no interior do domínio, através do uso reiterado da equação integral, usando os valores nodais de contorno previamente processados.

O menor erro observado na determinação dos deslocamentos se deve ao fato de a equação integral dos deslocamentos ser bem mais simples do que a expressão similar para determinação das tensões que, como visto anteriormente, envolve derivadas de funções elípticas e derivadas de segunda ordem.

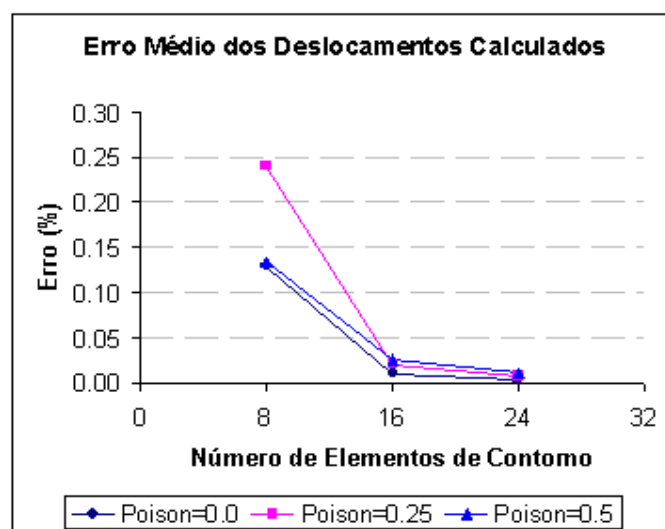


Figura 7.4 – Erro médio percentual no cálculo dos deslocamentos radiais

Para mostrar a convergência dos resultados numéricos de acordo com o refinamento da malha, são reproduzidos, nas Figuras 7.4 e 7.5, gráficos nos quais é empregado um número maior de elementos de contorno. Para a quantificação do erro, calculou-se uma média dos erros cometidos em todos os pontos nodais de cada malha.

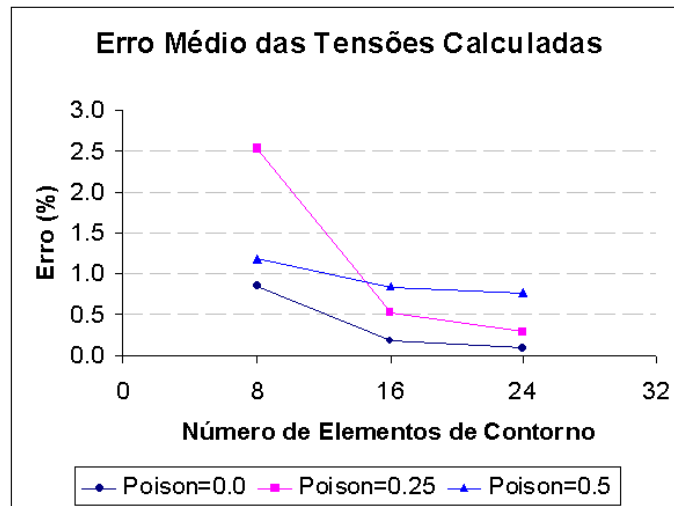


Figura 7.5 – Erro médio percentual na determinação das tensões circunferenciais

Nestes gráficos também foram apresentados resultados nos quais se empregam valores distintos para o coeficiente de Poisson. Este coeficiente, quando tomado igual a zero, elimina a influência de algumas parcelas nas quais estão presentes derivadas de grande sensibilidade. Esta interferência, todavia, não mais causa problemas quando se utilizam malhas mais refinadas, conforme se pode observar.

## 7.2 CILINDRO CIRCULAR OCO

Neste segundo exemplo, tem-se um cilindro circular oco, de raio interno igual a  $R_a$  e raio externo igual a  $R_b$ , submetido a uma tensão de cisalhamento unitária  $P$  em sua parte interna, e fixado em sua parte externa como indicado na Figura 7.6.

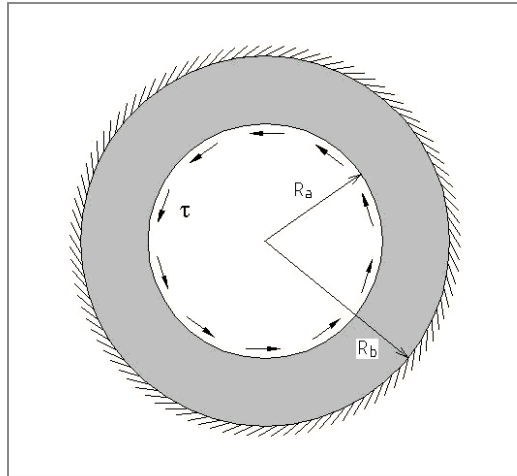


Figura 7.6 – Cilindro circular vazado submetido a tensões cisalhantes na superfície interna

A vista lateral do problema está ilustrada na Figura 7.7, mostrada a seguir, na qual também estão apresentadas as condições de contorno adotadas.

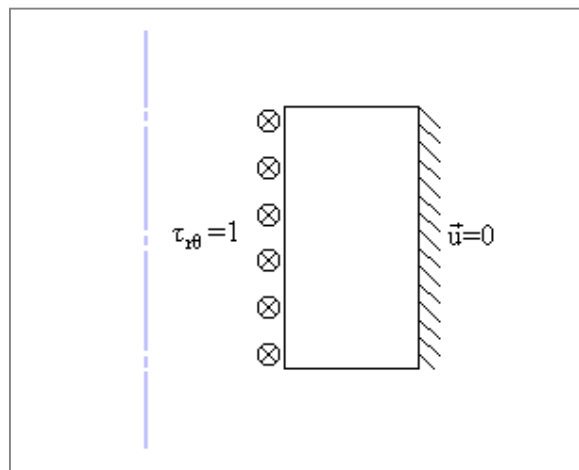


Figura 7.7 – Condições de contorno na seção de revolução do cilindro circular oco

Tem-se, como soluções analíticas, as seguintes expressões em função do raio do cilindro:

$$\tau_{r\theta} = \frac{R_a^2}{r^2} \quad (7.03)$$

$$u_\theta = \frac{R_a^2}{2G} \left( \frac{r}{R_b^2} - \frac{1}{r} \right) \quad (7.04)$$

O modelo computacional obtido pelo Método dos Elementos de Contorno foi composto de uma discretização com 8 elementos quadráticos distribuídos, conforme mostrado na figura a seguir, em 2 elementos em cada superfície no contorno:

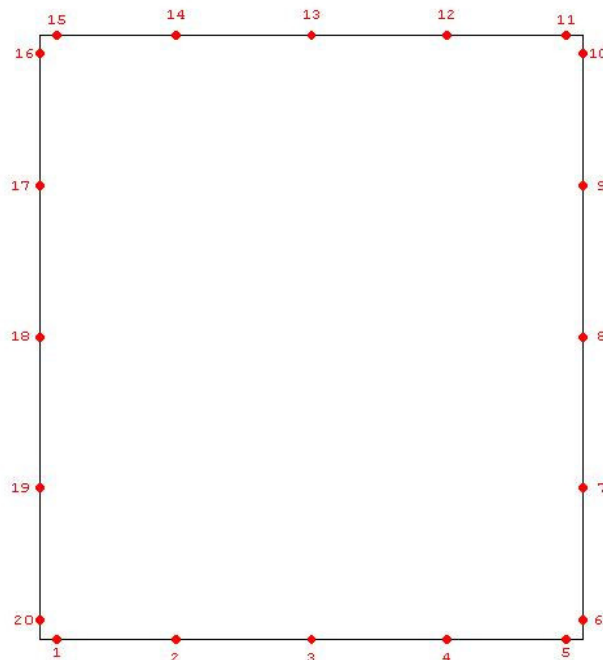


Figura 7.8 – Malha utilizada na simulação do cilindro oco

Para o presente cálculo foram adotados:

$$R_a = 0,1 \text{ m,}$$

$$R_b = 1 \text{ m}$$

$G = 0,5 \text{ Pa}$ .

As tabelas (7.3) e (7.4), mostradas a seguir, apresentam comparações entre a solução analítica do problema e a solução obtida pelo método, utilizando os parâmetros mencionados acima.

Tabela (7.3) - Deslocamento  $u_\theta$  (em metros) ao longo do raio

| Raio (m) | MEC    | Analítico | Erro % |
|----------|--------|-----------|--------|
| 0.10     | 0.0988 | 0.0990    | 0.23   |
| 0.25     | 0.0377 | 0.0375    | 0.66   |
| 0.55     | 0.0126 | 0.0127    | 0.91   |
| 0.85     | 0.0032 | 0.0033    | 1.12   |

Tabela (7.4) - Tensão de cisalhamento  $\tau_{r\theta}$  (Pa) para 3 pontos na superfície externa

| Ponto        | MEC             | Analítico   | Erro %      |
|--------------|-----------------|-------------|-------------|
| 1°           | 0.010005        | 0.01        | 0.05        |
| 2°           | 0.009998        | 0.01        | 0.02        |
| 3°           | 0.010005        | 0.01        | 0.05        |
| <b>Média</b> | <b>0.010000</b> | <b>0.01</b> | <b>0.04</b> |

Neste exemplo, a boa precisão do método se repete, mas um destaque deve ser dado ao desempenho no cálculo das tensões cisalhantes na parede externa, pois o nível de erro foi o mais baixo observado em todas as simulações.

## CAPÍTULO VIII

---

### COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

Um grande número de aplicações bem sucedidas do Método dos Elementos de Contorno em diversos problemas de engenharia, feitas por empresas, centros de pesquisas e Universidades, atestam cada vez mais a versatilidade do método e sua capacidade em obter soluções aproximadas de elevada exatidão.

Dentre uma série de vantagens computacionais, destaca-se a menor quantidade de entrada de dados, decorrente da necessidade de montar uma malha de pontos de discretização limitada apenas ao contorno do problema. Esse é um fator importante, considerando a existência de vários métodos numéricos similares que se colocam como alternativas à altura, capazes de realizar simulações com nível de precisão satisfatório.

No contexto deste trabalho, devido à estrutura da formulação utilizada com o Método dos Elementos de Contorno, expressões analíticas correspondentes a um problema de natureza rigorosamente tridimensional podem ser representadas através de modelos bidimensionais, garantindo consistência matemática e alto nível de precisão. Esta simplificação provém do processo de integração da solução fundamental tridimensional ao longo da variável angular, que fica implícito no modelo computacional final.

Desse modo, se num problema qualquer a abordagem pelo MEC fica limitada ao contorno físico do problema, nos casos axissimétricos este contorno consiste apenas do contorno da seção de revolução, que em peças maciças exclui o eixo de revolução, resultando numa economia considerável de dados de entrada. A precisão, todavia, corresponde à de uma modelagem matemática tridimensional, sem que se cometam os erros inerentes a uma malha em três dimensões, pois a solução fundamental é tridimensional. Isto não acontece com outros métodos numéricos importantes.

Em termos operacionais, o cerne da abordagem de problemas axissimétricos encontra-se na solução das integrais circunferenciais, que se enquadram na categoria das integrais elípticas, notoriamente de difícil tratamento analítico e computacional. Alguns dos recursos empregados nesse mister são bem simples, como, por exemplo, o método de quadratura de Gauss, enquanto que a solução direta das integrais elípticas através de rotinas especializadas é bastante natural.

Nesta dissertação, não apenas a integração das equações, mas também a obtenção de derivadas envolvendo funções elípticas constituiu uma das etapas mais complexas. Por características típicas do problema elastostático, são envolvidas derivadas de segunda ordem na determinação dos vetores tensão. Desse modo, o auxílio do programa MAPLE foi de crucial importância para evitar erros de cálculo, infelizmente cometidos por outras fontes bibliográficas, tamanha a dimensão das operações algébricas.

Um outro mecanismo, do qual o presente trabalho se utilizou, consistiu no uso de nós duplos nos locais onde a prescrição do valor de contorno não é imediata, em virtude da indefinição do seu tipo: natural ou essencial. O não uso dos mesmos eleva consideravelmente o erro dos resultados finais das simulações.

Nos problemas de elasticidade bi e tridimensionais, o cálculo dos coeficientes  $C_{ij}$  é relativamente simples em virtude da eficácia da tática da imposição do deslocamento de corpo rígido nas direções dos eixos cartesianos. No entanto, o mesmo não pode ser empregado em todas as direções quando o sistema de coordenadas do problema não é o cartesiano, uma vez que o deslocamento de corpo rígido no sentido radial não possui um sentido físico. Para evitar

este problema, e ainda favorecer a redução do número de integrais singulares a serem resolvidas, na presente pesquisa se fez uso de pontos fonte fora do domínio. Tal recurso teve êxito, como se pode constatar através dos bons resultados obtidos nos exemplos aqui apresentados. Os erros percentuais, na sua grande maioria, abaixo de 1% em todas as aplicações, com malhas relativamente simples, atestam o sucesso da utilização deste artifício.

A modelagem matemática, de fato, é complexa, mesmo em duas dimensões, mas é indiscutivelmente vantajosa. Isto porque a elaboração de um programa computacional não é tarefa que se repita, sendo feita apenas uma única vez; seu manuseio computacional por usuários e pesquisadores é extremamente fácil; as interfaces para desenvolvimento do código e acoplamento de recursos gráficos são muito simples, dada a modelagem ser bidimensional, encorajando melhorias; e, por fim, seus resultados são indiscutivelmente satisfatórios para as aplicações em engenharia, com dispêndio computacional bastante reduzido.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREBBIA, C.A., **“The Boundary Element Method for Engineers”**. Pentech Press, UK, 1978.
- [2] KERMANIDIS, T., **“A numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems”**, Int. J. Solids Structures, vol. 11, pp. 493-500, 1975.
- [3] CRUSE, T.A., SNOW, D.W. & WILSON, R.B., **“Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity”**, Computers & Structures, vol. 7, pp. 445-451, 1977.
- [4] MAYR, M. & NEUREITER, W., **“Ein numerisches Verfahren zur Lösung des axialsymmetrischen Torsionsproblems”**, Ingenieur Archiv., 46, pp. 137-142, 1977.
- [5] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. & WROBEL, L.C., **“Boundary Element Techniques – Theory and Applications”**, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] BREBBIA, C.A., **“Progress in Boundary Element Methods”**, Halsted Press, New York, 1981.
- [7] MAYR, M., DREXLER, W. & KUHN, G., **“A Semianalytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions”**, J. Solids Structures, vol. 16, pp. 863-871, 1980.
- [8] CISTERNAS, M.A.C, TELLES, J.C.F & MANSUR, W.J., **“Potential Problems Involving Axissymmetric Geometry and Arbitrary Boundary Conditions by The Boundary Element Method”**, Proc. BETECH 86, Rio de Janeiro, 1986.
- [9] TIMOSHENKO, S., GOODIER, J.N., **“Teoria da Elasticidade”**, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.
- [10] FERNANDES, G.R. & VENTURINI, W.S., **“Non-linear Boundary Element Analysis of Plates Applied to Concrete Slabs”**, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 26, pp. 169-181, 2002.

## APÊNDICE A

---

### INTEGRAIS ELÍPTICAS

#### A.1 INTRODUÇÃO

Existem certas integrais abelianas que não são elementares. Cita-se como exemplo a integral:

$$\int \sqrt{\frac{1-m^2t^2}{1-t^2}} dt \quad (\text{A.1})$$

A integral acima aparece no cálculo do comprimento de arco de uma elipse. Daí, provavelmente, surge sua denominação: “Integral Elíptica”. Nota-se que se  $t = \text{sen } \theta$  então  $dt = \cos \theta d\theta$  e, portanto, a integral (A.1) apresenta-se na forma:

$$\int \sqrt{1-m^2 \text{sen}^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.2})$$

## A.2 - FORMAS DE LEGENDRE

As formas de Legendre das funções integrais elípticas de 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> tipos são definidas respectivamente por:

$$F(m, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (\text{A.3})$$

e

$$E(m, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.4})$$

onde  $m$  é um número real do intervalo  $[0,1]$ , sendo  $m^2$  chamado de Módulo, e  $\phi$  é a amplitude da integral elíptica.

Para cada par  $(m, \phi)$  os valores funcionais de  $F(m, \phi)$  e de  $E(m, \phi)$  são encontrados em tabelas de duplas entradas para  $\psi = \operatorname{arcsen}(m)$  e  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ .

Em particular, quando  $\phi = \pi/2$ , as integrais  $K = F(m, \pi/2)$  e  $E = E(m, \pi/2)$  são funções do parâmetro  $m = \operatorname{sen} \psi$ ,  $\psi \in [0, \pi/2]$  e são denominadas “Integrais Elípticas Completas” do 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> tipos, respectivamente.

De modo mais explícito tem-se:

$$K = F(m, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (\text{A.5})$$

e

$$E = E(m, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.6})$$

Utilizando-se o Teorema Binomial na forma:

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

válido para todo  $m$  real e para todo  $x \in ]-1, 1[$ , uma vez para  $p = -1/2$  e outra para  $p = 1/2$ , desenvolve-se os integrandos de (A.5) e de (A.6) em séries de potências de  $x = m^2 \text{sen}^2 \theta$ .

Integrando-se, termo a termo, ambas as séries resultantes de 0 a  $\pi/2$  e levando-se em conta que:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \quad e \quad \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} \theta d\theta = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)} \times \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$$

tem-se:

$$F(m, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 m^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 m^6 + \dots \right\} \quad (\text{A.7})$$

e

$$E(m, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 m^4 - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 m^6 - \dots \right\} \quad (\text{A.8})$$

Entretanto a amplitude  $\phi$  das formas integrais de Legendre (A.3) e (A.4) não é restrita, podendo assumir tanto valores positivos como valores negativos. Como as tabelas geralmente fornecem valores funcionais destas apenas para  $\phi \in [0, \pi/2]$ , faz-se necessário calcular os valores daquelas integrais para os demais valores de  $\phi$ .

Se  $f : [0, 1] \rightarrow R$  é uma função arbitrária da variável  $u = \text{sen}^2 \theta$ , cujo gráfico seja conhecido para  $\theta \in [0, \pi/2]$  como na Figura A.1 então, o gráfico de  $f(u(\theta))$  entre  $\pi/2$  e  $\pi$  é uma reflexão do mesmo sobre a reta  $\theta = \pi/2$ , como na Figura A.2. Além disso,  $f(u)$  tem período  $\pi$  e, portanto, o gráfico de  $f(u(\theta))$  repete-se a cada intervalo de comprimento  $\pi$ .

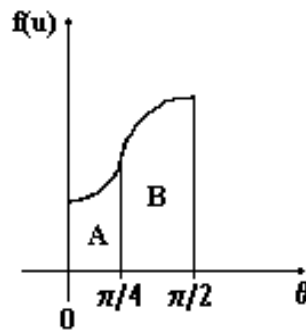


Figura A.1 – Gráfico de  $f(u(\theta))$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$

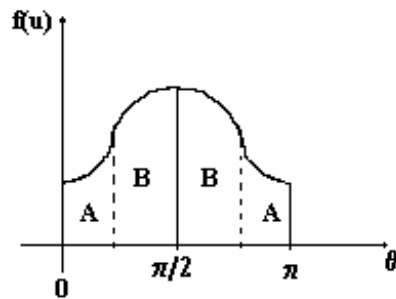


Figura A.2 – Gráfico de  $f(u(\theta))$ ,  $\theta \in [0, \pi]$

Sendo  $A = \int_0^{\pi/4} f(u(\theta))d\theta$  e  $B = \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(u(\theta))d\theta$  verifica-se que os valores de outras

integrais para  $\theta > \pi/2$  podem ser obtidos como somas e/ou diferenças de múltiplos de A e de B.

O mesmo ocorre para cada uma das funções integrais de Legendre, quando considera-se os integrandos  $\sqrt{1-m^2 \text{sen}^2 \theta}$  e  $\frac{1}{\sqrt{1-m^2 \text{sen}^2 \theta}}$  como funções da variável  $u = \text{sen}^2 \theta$ .

Utilizando-se as definições (A.5) e (A.6) pode-se concluir que para todo inteiro n

tem-se:

$$F(m, \phi \pm n\pi) = 2nK \pm F(m, \phi) \quad (\text{A.9})$$

e

$$E(m, \phi \pm n\pi) = 2nE \pm E(m, \phi) \quad (\text{A.10})$$