

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS JURÍDICAS E ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**MARCO ANTÔNIO FERREIRA FILHO**

**ÍNDICES SETORIAIS DO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO E EFICIÊNCIA  
DE MERCADO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A CRISE DO *SUBPRIME*  
E A PANDEMIA DA COVID-19**

**VITÓRIA**

**2026**

**MARCO ANTÔNIO FERREIRA FILHO**

**ÍNDICES SETORIAIS DO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO E EFICIÊNCIA  
DE MERCADO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A CRISE DO *SUBPRIME*  
E A PANDEMIA DA COVID-19**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Espírito Santo como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

**Orientador: Prof. Dr. Edson Zambon Monte**

**VITÓRIA**

**2026**

---

F383i Ferreira Filho, Marco Antônio, 2000-  
Índices setoriais do mercado acionário brasileiro e  
eficiência de mercado: uma análise comparativa entre a crise  
do subprime e a pandemia da COVID-19 / Marco Antônio  
Ferreira Filho. - 2026.  
(recurso não paginado). : il.

Orientador: Edson Zambon Monte.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal  
do Espírito Santo, Centro de Ciências Jurídicas e Econômicas.

1. Econometria. 2. Mercado de capitais. 3. Índices de  
mercado de ações. 4. Análise de séries temporais. 5. Crise  
financeira global, 2008-2009. 6. COVID-19, Pandemia de, 2020  
2023. I. Monte, Edson Zambon. II. Universidade Federal do  
Espírito Santo. Centro de Ciências Jurídicas e Econômicas. III.  
Título.

CDU: 330

---

**MARCO ANTÔNIO FERREIRA FILHO**

**ÍNDICES SETORIAIS DO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO E EFICIÊNCIA DE  
MERCADO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A CRISE DO SUBPRIME E A  
PANDEMIA DA COVID-19**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Vitória, 22 de janeiro de 2026.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
**EDSON ZAMBON MONTE**  
Data: 22/01/2026 16:10:54-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Prof. Dr. Edson Zambon Monte  
Universidade Federal do Espírito

Orientador

Documento assinado digitalmente  
**RICARDO RAMALHETE MOREIRA**  
Data: 26/01/2026 11:19:51-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Prof. Dr. Ricardo Ramalhete Moreira  
Universidade Federal do Espírito Santo

Documento assinado digitalmente  
**ANTONIO FERNANDO COSTA PELLA**  
Data: 26/01/2026 09:33:49-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Prof. Dr Antônio Fernando Costa Pella  
Ministério de Minas e Energia

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois até aqui tem me guiado e me dado forças para seguir em frente nessa montanha-russa chamada vida.

Aos meus pais, Sibebe e Marco Antônio, que foram os melhores que puderam ser. Tudo o que sou carrega algo de vocês, o cuidado, a renúncia, a coragem cotidiana. Se existe em mim algo vivo, nasce desse lugar. Espero que hoje, como sempre, possam se sentir orgulhosos. E não duvidem quando digo, foi e é por vocês.

À minha família, pelo apoio constante, mesmo nos momentos em que eu mesmo não sabia explicar o que estava tentando construir.

Aos amigos, minha sincera gratidão. Pelos momentos compartilhados, pelas risadas que tornaram o caminho mais leve, pelas dificuldades que nos fortaleceram.

Ao meu orientador, Edson, pela confiança, pela paciência e pelo rigor dedicado a cada etapa deste trabalho. Sua orientação foi decisiva para que ele alcançasse a forma que agora assume.

Ao PPGECO, aos professores e aos secretários, pela formação sólida e pelo estímulo constante.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES), pelo suporte financeiro que possibilitou minha dedicação exclusiva e foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que, de algum modo, contribuíram para esta trajetória, registro meu profundo agradecimento.

*E, quando a tempestade passar, na certa lhe será difícil entender como conseguiu atravessá-la e ainda sobreviver. Aliás, nem saberá com certeza se ela realmente passou. Uma coisa porém é certa: ao emergir do outro lado da tempestade, você já não será o mesmo de quando nela entrou.*

Haruki Murakami, Kafka à Beira-Mar

## RESUMO

O objetivo principal desta pesquisa foi verificar a (in)eficiência do mercado financeiro brasileiro, com foco em índices setoriais, durante dois períodos: a crise do *Subprime* (setembro de 2008 a dezembro de 2009) e a pandemia da COVID-19 (fevereiro de 2020 a janeiro de 2022). A pesquisa testou a validade da Hipótese dos Mercados Eficientes (HME), em sua forma fraca, para retornos, analisando a previsibilidade de informações passadas sobre os preços dos ativos. Para isso, foi empregada a *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA), visando identificar e quantificar a multifractalidade nas séries temporais. Ademais, examinou-se a variação da (in)eficiência dos mercados, observando as diferenças no comportamento dos retornos entre setores econômicos e os distintos tipos de crise, uma de natureza financeira e outra sanitária. Os resultados empíricos mostram que todos os setores exibiram comportamento multifractal e antipersistente em ambos os períodos. Observa-se ainda que o setor financeiro foi o mais ineficiente durante o *Subprime*, invertendo-se para o mais eficiente na pandemia. Por outro lado, o setor industrial apresentou maior eficiência na crise de 2008, enquanto o setor imobiliário foi o mais ineficiente durante a pandemia. A análise indica que a multifractalidade decorreu tanto de correlações de longo prazo quanto da presença de distribuições de caudas pesadas, sendo estas mais influentes. Por fim, os setores foram classificados de acordo com seus graus de eficiência de mercado em cada crise. Os resultados contribuem para o debate sobre a eficiência de mercado em economias emergentes, como a brasileira, e oferecem implicações relevantes para investidores e formuladores de políticas públicas.

**Palavras-chave:** Eficiência de Mercado; MF-DFA; Crises Econômicas; Multifractalidade; Índices Setoriais; B3.

## ABSTRACT

The main objective of this research was to examine the (in)efficiency of the Brazilian financial market, focusing on sectoral indices, during two periods: the Subprime crisis (September 2008 to December 2009) and the COVID-19 pandemic (February 2020 to January 2022). The study tested the validity of the Efficient Market Hypothesis (EMH), in its weak form, for return series by assessing the predictability of past price information. To this end, Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA) was employed to identify and quantify multifractality in the time series. In addition, the study examined how market (in)efficiency changed between sectors and across crises of different natures, one financial and the other sanitary. The empirical results show that all sectors exhibited multifractal and antipersistent behavior in both periods. Moreover, the financial sector was the least efficient during the Subprime crisis but became the most efficient during the pandemic. Conversely, the industrial sector displayed higher efficiency in 2008, while the real estate sector was the least efficient during the COVID-19 period. The analysis indicates that multifractality stemmed from both long-range correlations and heavy-tailed distributions, with the latter having a stronger influence. Finally, sectors were classified according to their degrees of market efficiency in each crisis. The findings contribute to the debate on market efficiency in emerging economies such as Brazil and offer relevant implications for investors and policymakers.

**Keywords:** Market Efficiency; MF-DFA; Economic Crises; Multifractality; Sectoral Indices; B3.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Variável, unidade, acrônimo e fonte .....	27
--	----

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fluxo de trabalho do algoritmo de janela móvel sobreposta (OWM) .....	33
Figura 2 – Valores dos índices durante o período do <i>Subprime</i> .....	37
Figura 3 – Valores dos índices durante o período da pandemia da COVID-19.....	37
Figura 4 – Retornos logarítmicos dos índices durante o período da crise do <i>Subprime</i> .....	38
Figura 5 – Retornos logarítmicos dos índices durante o período da pandemia da COVID-19 ...	39
Figura 6 – Gráficos log da função de flutuação $Fqs$ em relação ao log de $s$ para os setores durante a crise do <i>Subprime</i> .....	41
Figura 7 – Gráficos log da função de flutuação $Fqs$ em relação ao log de $s$ para os setores durante a crise da pandemia da COVID-19.....	42
Figura 8 – Expoentes de Hurst Generalizados $hq$ para o retorno logarítmico dos índices, para as séries original, <i>shuffled</i> e <i>surrogated</i> .....	43
Figura 9 – Comparação entre o espectro multifractal $f(\alpha)$ para o retorno logarítmico de cada índice, para as séries original, <i>shuffled</i> e <i>surrogated</i> .....	46

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para os retornos logarítmicos dos índices setoriais durante o período da crise do <i>Subprime</i> . * indica rejeição da hipótese nula à 1% no nível de significância.....	40
Tabela 2 – Estatísticas descritivas para os retornos logarítmicos dos índices setoriais durante o período da crise da pandemia da COVID-19.....	40
Tabela 3 – Métricas do MF-DFA. O desvio padrão é mostrado nos parênteses.....	50
Tabela 4 – Ranking setorial para $\Delta\alpha$ , $\Delta h$ e MDM durante a crise do <i>Subprime</i> . ....	51
Tabela 5 – Ranking setorial para $\Delta\alpha$ , $\Delta h$ e MDM durante a crise da pandemia da COVID-19. ....	51

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>17</b>
2.1 HIPÓTESE DOS MERCADOS EFICIENTES (HME) .....	17
2.2 ABORDAGENS ALTERNATIVAS À HME .....	18
2.3 EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS .....	22
2.4 HIPÓTESES .....	26
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>27</b>
3.1 DADOS .....	27
3.2 MULTIFRACTALIDADE E MF-DFA .....	28
3.2.1 Multifractalidade .....	28
3.2.2 <i>Multifractal Detrended Fluctuation Analysis</i> (MF-DFA) .....	29
3.2.3 <i>Overlap Moving Window</i> (OMW) .....	32
3.2.4 Classificando a multifractalidade .....	33
3.2.5 Causas da multifractalidade.....	34
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>36</b>
4.1 GRÁFICOS E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS.....	36
4.2 ANÁLISE DE FLUTUAÇÃO MULTIFRACTAL SEM TENDÊNCIA.....	40
4.3 CAUSAS DA MULTIFRACTALIDADE .....	52
<b>5 CONCLUSÃO.....</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os mercados financeiros constituem um importante mecanismo de alocação de recursos, permitindo que os agentes econômicos direcionem capital em busca de retorno financeiro e de proteção contra choques adversos. Nesse contexto, Fama (1970, 1991) propôs a Hipótese dos Mercados Eficientes (HME), segundo a qual, em sua forma fraca, os preços dos ativos financeiros refletem todas as informações passadas. Como consequência, não seria possível prever consistentemente o preço de mercado dos ativos com base em dados históricos e obter retornos anormais, pois os preços já incorporam todas as informações relevantes, tornando sua trajetória futura independente do passado.

No entanto, diversos autores questionam a validade da HME, devido a anomalias de mercado que desafiam a aleatoriedade dos preços (Shefrin e Statman, 1985; DeBondt e Thaler, 1985; Fama, 1991). Exemplos incluem o efeito janeiro e o efeito disposição, em que padrões comportamentais geram previsibilidade nos retornos. A HME, de acordo com Fama (1965a), assume que, em um mercado eficiente, existe um grande número de agentes racionais. No entanto, Kahneman e Tversky (1979) demonstram que as decisões financeiras são frequentemente influenciadas por vieses cognitivos, levando a desvios sistemáticos da racionalidade. A partir dessa visão, DeBondt e Thaler (1985) identificam um comportamento de reversão à média nos preços dos ativos, sugerindo previsibilidade dos retornos. Mais recentemente, Hou, Xue e Zhang (2020) afirmam que algumas anomalias desapareceram e outras, apesar de décadas de estudo, permanecem estatisticamente significativas, evidenciando a possibilidade de retornos anormais em determinados momentos.

Outra teoria que contesta os pressupostos da HME é a Hipótese dos Mercados Fractais (HMF), proposta por Peters (1994). Essa hipótese enfatiza a importância da liquidez e dos diferentes horizontes de investimento na formação dos preços. De acordo com Anderson e Noss (2013), essas características resultam em um comportamento de autossimilaridade, típico das estruturas geométricas conhecidas como fractais, que possuem a propriedade de serem semelhantes a partes de si próprias. Na perspectiva da HMF, os mercados são ineficientes em contextos de baixa liquidez.

Além disso, a Hipótese dos Mercados Adaptativos (HMA), proposta por Lo (2004), busca integrar aspectos das finanças comportamentais à HME. Segundo o autor, a eficiência de mercado não é uma condição estática, mas um processo dinâmico no qual os agentes aprendem

e se adaptam continuamente às mudanças ambientais, institucionais e tecnológicas. Assim, os mercados podem ser eficientes em determinados períodos e ineficientes em outros, especialmente diante de mudanças estruturais ou choques significativos que afetam o comportamento dos agentes econômicos.

Neste cenário de controvérsias, destaca-se que as anomalias de mercado se tornam mais evidentes em períodos de crise, uma vez que tais momentos expõem distorções nos preços dos ativos e podem resultar em retornos anormais. Um exemplo é a volatilidade, que tende a se acentuar durante crises, causando movimentos nos preços além do esperado a partir de novas informações (Shiller, 1981). Entre as crises mais recentes, destaca-se a crise financeira do *Subprime* de 2008, que teve início em 2007, nos Estados Unidos, causada inicialmente pela crise do mercado imobiliário e pela excessiva concessão de crédito de alto risco. A instabilidade gerada por esses fatores se espalhou para o sistema financeiro global, em especial com a falência do Lehman Brothers (Mishkin, 2011).

Outro caso é a crise global causada pela pandemia da COVID-19, declarada como pandemia pela Organização Mundial da Saúde (OMS) em 2020. A pandemia levou à adoção de medidas de lockdown e provocou forte impacto na oferta e demanda globais. A oferta de bens e serviços foi afetada pela interrupção na produção e nas cadeias de valor, enquanto a demanda agregada reduziu-se devido à incerteza econômica, ao aumento do desemprego e à inflação dos preços. Esse cenário gerou intensa especulação e volatilidade nos mercados financeiros, agravando ainda mais a crise.

Diversos estudos investigaram a eficiência dos mercados em períodos de crise. Ozkan (2021) analisou o impacto da COVID-19 na eficiência de mercado para os EUA, Espanha, Reino Unido, Itália, França e Alemanha e demonstrou desvios da eficiência no mercado acionário desses países durante a pandemia. Choi (2021) comparou a persistência dos retornos do índice S&P 500 entre a crise do *Subprime* e a pandemia, observando retornos não persistentes na crise e persistentes na pandemia. Maciel e Adache (2022) apresentaram resultados para o período anterior e posterior à pandemia, indicando que, no caso brasileiro, o mercado acionário foi multifractal nos dois períodos, desviando-se da forma fraca de eficiência de mercado.

Neste contexto, esta pesquisa tem três focos principais, que são as suas contribuições científicas para a literatura empírica. Primeiramente, objetivou-se verificar a validade da HME, com o intuito de medir e classificar a eficiência para os retornos de alguns setores do mercado de ações do Brasil, a saber: Índice de Energia Elétrica (IEE), Índice Industrial (INDX), Índice Imobiliário (IMOB), Índice Financeiro (IFNC). Em segundo lugar, o estudo comparou a eficiência dos setores durante as crises do *Subprime* e da pandemia da COVID-19. Em terceiro,

analisou-se a eficiência de mercado, investigando a existência da multifractalidade dos retornos para os índices setoriais. Até o presente momento, não foram encontradas pesquisas que combinem análise multifractal com comparação setorial em diferentes crises para o mercado brasileiro.

Para verificar a presença de multifractalidade nos retornos foi utilizada a metodologia *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA)<sup>1</sup>, conforme proposta por Kantelhardt et al. (2002). Este método permite detectar e quantificar propriedades multifractais em séries temporais, mesmo na presença de tendências não estacionárias. A identificação de comportamento multifractal pode ser interpretada como um sinal de ineficiência, na medida em que sugere que as dinâmicas dos retornos não seguem um processo puramente aleatório, mas exibem correlações e dependências de longo prazo (Zunino et al., 2008). As análises utilizaram duas janelas temporais: a crise do *Subprime* (setembro de 2008 até dezembro de 2009) e a pandemia da COVID-19 (fevereiro de 2020 a janeiro de 2022).

Cabe mencionar que a utilização de índices setoriais permite uma compreensão mais detalhada da eficiência do mercado, uma vez que diferentes setores podem responder de maneira distinta a choques econômicos e crises. Tiwari, Albulescu e Yoon (2017) demonstraram que a percepção dos investidores varia conforme o setor, já que os fundamentos econômicos que influenciam as indústrias são específicos, como as regulações. Choi (2021) e Maciel e Adache (2022) destacaram que a pandemia da COVID-19 impactou as indústrias de forma distinta, ressaltando a importância de se analisar a eficiência em setores específicos. De forma similar, Huynh, Foglia e Doukas (2022) mostraram que a resposta ao risco variou entre os setores durante a pandemia, com algumas indústrias demonstrando maior resiliência do que outras. Esses fatores reforçam a necessidade de avaliar a eficiência do mercado em nível setorial, tornando os índices uma ferramenta importante para capturar os diferentes impactos sobre os setores e a economia.

Além disso, é importante destacar que as crises analisadas neste estudo possuem naturezas distintas. Enquanto a crise do *Subprime* teve origem no setor financeiro e se espalhou para a economia real, a pandemia da COVID-19 surgiu como uma crise de saúde pública que gerou medidas restritivas e afetou as cadeias globais de valor (Baker et al., 2020). A pandemia, portanto, impactou múltiplos setores desde o início, tornando seus efeitos mais heterogêneos e evidenciando a necessidade de abordagens diferenciadas para avaliar sua influência sobre a eficiência dos mercados financeiros. Dessa forma, torna-se especialmente relevante examinar

---

<sup>1</sup> Segundo Maciel (2023), ainda há uma carência de estudos que apliquem a metodologia MF-DFA, de forma geral, ao mercado acionário brasileiro.

os efeitos das crises sobre o mercado de ações brasileiro, uma vez que, segundo Dourado e Tarak (2013), países em desenvolvimento, como o Brasil, possuem mercados menos maduros.

Nesse contexto, estudos sobre eficiência de mercado são relevantes para investidores e formuladores de políticas públicas, pois contribuem para a estabilidade financeira e para o desenvolvimento do mercado de capitais. Sendo assim, este trabalho contribui para a literatura ao aplicar, de forma inédita para o mercado brasileiro setorial, a metodologia MF-DFA investigando ainda, a presença da multifractalidade, mas também sua origem, seja associada à estrutura de correlações temporais ou à distribuição dos retornos, via séries surrogadas e embaralhadas. Dessa forma, o estudo oferece uma análise identificando estruturas complexas, permitindo avanço em relação a análises de eficiência baseadas em testes lineares.

Por fim, destaca-se que a investigação do funcionamento dos mercados financeiros em períodos de crise contribui para orientar políticas públicas voltadas à mitigação dos efeitos negativos das crises sobre o sistema financeiro, como a redução da volatilidade e a manutenção da confiança dos agentes econômicos. Para os investidores, o estudo oferece uma melhor compreensão dos preços, orientando estratégias de alocação de ativos e de gestão de risco, e auxiliando na tomada de decisão em momentos de instabilidade. Assim, a principal contribuição empírica do estudo consiste em mostrar que choques de natureza distinta produzem padrões diferentes de eficiência de mercado no Brasil. Os achados sugerem que a eficiência de mercado depende fortemente do setor econômico, indicando a necessidade de políticas regulatórias e estratégias de monitoramento do risco sistêmico que levem em conta a heterogeneidade setorial, sobretudo em períodos de instabilidade.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. Além desta introdução, a seção 2 apresenta a revisão da literatura, enquanto a seção 3 descreve os dados e a metodologia. Os resultados e discussões são apresentados na seção 4. Por fim, tem-se a conclusão.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção, descreve-se inicialmente sobre a Hipótese dos Mercados Eficientes (HME), a sua formulação original e as formas de eficiência. Em seguida, abordam-se teorias alternativas à HME, como as Finanças Comportamentais, a Hipótese dos Mercados Adaptativos (HMA) e a Hipótese dos Mercados Fractais (HMF). Por fim, apresentam-se evidências empíricas internacionais e nacionais, com foco na persistência e não persistência dos retornos, considerando diferentes mercados financeiros.

### 2.1 HIPÓTESE DOS MERCADOS EFICIENTES (HME)

O artigo seminal de Eugene Fama (1970) marca o início da moderna teoria de finanças. Fama (1970) argumenta que um mercado no qual os preços refletem toda a informação disponível a cada momento é informacionalmente eficiente. Essa definição corresponde à HME, na qual os preços dos ativos são caracterizados por um passeio aleatório (*random walk*), ou seja, seguem um comportamento imprevisível. Isso impossibilita que investidores utilizem informações passadas para prever movimentos futuros. Neste contexto, ganhos de arbitragem sem risco são inviáveis (Malkiel, 2011).

Fama (1970) classifica a HME em três formas diferentes: (1) a forma fraca sustenta que os preços dos ativos já refletem toda a informação contida nos preços e retornos passados, de modo que retornos passados não são capazes de prever retornos futuros; (2) a forma semiforte estabelece que os preços incorporam todas as informações públicas disponíveis; e (3) a forma forte afirma que os preços refletem não apenas as informações públicas, mas também todas as informações privadas. Além disso, destaca-se que a eficiência depende de condições como (i) ausência de custos de transação, (ii) livre acesso à informação para todos os agentes e (iii) todos concordam sobre as implicações das informações atuais para o preço atual e para a distribuição dos preços futuros de cada ativo. Posteriormente, Fama (1991) revisita essas formas e propõe uma nova categorização, agrupando os testes empíricos em três categorias: (i) testes de previsibilidade de retornos; (ii) testes de eventos; e (iii) testes de informação privada.

Shleifer (2000), por sua vez, discute os fundamentos teóricos da HME e os expõe em três pilares: (i) os investidores são racionais e processam as informações corretamente; (ii) mesmo quando há investidores irracionais, seus erros são aleatórios e se anulam mutuamente; e (iii) a arbitragem é ilimitada, permitindo que investidores racionais corrijam rapidamente

desvios de preços. O autor, no entanto, questiona esses pressupostos à luz de evidências comportamentais e das limitações reais à arbitragem.

Em relação a essas críticas, Malkiel (2005) propõe uma definição "flexível" do conceito de eficiência. Segundo o autor, mesmo diante de ineficiências, um mercado pode ser considerado eficiente se os investidores não forem capazes de ganhar retornos anormais de forma consistente, a menos que estejam dispostos a aceitar riscos anormais. Dessa forma, Malkiel reconhece que falhas no mercado podem ocorrer, porém as oportunidades de arbitragem geradas por essas distorções são corrigidas, impedindo que tais ineficiências se tornem sistematicamente exploradas.

Nesse contexto de debates teóricos e críticas, emerge um desafio metodológico denominado de hipótese conjunta. Conforme destacado por Fama (1970), a eficiência de mercado não é testável por si própria e sim em conjunto com algum modelo de precificação de ativos. Assim, se algum teste demonstrar que os mercados são ineficientes, não há como saber se isso é em decorrência da ineficiência do mercado ou do modelo de precificação adotado de forma inadequada. Essa limitação tem motivado o desenvolvimento de abordagens alternativas para avaliar a eficiência, especialmente em sua forma fraca.

Diante desse desafio, diversos estudos buscaram métodos que pudessem analisar a dependência temporal nos retornos, um indicativo de violação da forma fraca da HME. Lo e MacKinlay (1988), por exemplo, desenvolveram um teste de variância que avalia se os preços seguem um processo do tipo *martingale*, no qual os retornos não devem exibir autocorrelação. Mais recentemente, Tran e Leirvik (2019) propuseram o *Adjusted Market Inefficiency Magnitude* (AMIM), um teste que quantifica o grau de ineficiência ao examinar a dependência de longo prazo nas séries de retornos. Tais abordagens, embora não resolvam completamente o problema da hipótese conjunta, oferecem evidências sobre a presença de padrões nos retornos que poderiam ser explorados para obter ganhos anormais, contribuindo assim para o debate sobre a eficiência dos mercados.

## 2.2 ABORDAGENS ALTERNATIVAS À HME

Apesar da influência da HME, alguns estudos empíricos apresentam evidências que desafiam suas premissas. Lo e MacKinlay (1988), por exemplo, rejeitaram a hipótese do *random walk* ao analisarem retornos semanais, sugerindo algum grau de previsibilidade no curto prazo. Essa previsibilidade é frequentemente atribuída a anomalias de mercado,

entendidas como padrões regulares nos retornos dos ativos que não podem ser explicados. Porém, elas permitem que investidores obtenham retornos acima da média de maneira previsível, contrariando a ideia de eficiência (Lo, 2007).

Essas anomalias impulsionaram o desenvolvimento das finanças comportamentais, área que investiga os impactos dos vieses cognitivos no comportamento dos agentes econômicos e suas consequências para a dinâmica da economia. Barberis e Thaler (2003) afirmam que as pessoas são excessivamente confiantes em seus julgamentos. Nesse contexto, de acordo com Lo (2008), um dos principais pontos de divergência entre as finanças comportamentais e a HME refere-se à forma como os agentes reagem a novas informações.

De Bondt e Thaler (1985), ao analisarem ações da Bolsa de Valores de Nova York (NYSE), observaram que os investidores reagem de forma exagerada a novas informações, fenômeno denominado *overreaction*. Para isso, os autores classificaram ações em Vencedoras (que apresentaram grandes ganhos nos 36 meses anteriores à data de formação dos portfólios, em dezembro de 1932) e Perdedoras (que tiveram grandes perdas para o mesmo período). Eles encontraram evidências que sugerem uma reversão à média no longo prazo, isto é, as ações Perdedoras tendem a superar a performance das Vencedoras substancialmente para o período subsequente de três a cinco anos. O efeito do *overreaction* é ainda reforçado por Chopra, Lakonishok e Ritter (1991), que também realizam a análise para a NYSE, com dados mensais entre 1926 e 1986. Esse efeito desafia a HME em sua forma fraca, pois indica que retornos passados podem prever retornos futuros

Outras anomalias amplamente documentadas incluem o efeito disposição (Shefrin e Statman, 1985; Odean, 1998), que revela a tendência dos investidores de venderem ações em alta cedo demais e manterem os ativos em baixa por tempo excessivo. O efeito tamanho ou “*size effect*” (Woo et al., 2020) também é uma anomalia importante, segundo o qual ações de pequenas empresas tendem a gerar retornos superiores.

Além disso, a volatilidade excessiva dos preços também se destaca entre as anomalias. Segundo Malkiel (2011), em um mercado eficiente todos os ativos deveriam ser precificados como o valor presente descontado de todos os seus fluxos de caixa. Nesse sentido, Shiller (1981), por meio do teste de limite de variância (*variance bound test*), demonstrou que a volatilidade do preço das ações é muito alta para ser atribuída a novas informações sobre o futuro. Logo, os mercados não seriam eficientes, pois a variância dos preços observados excederia a variância do valor presente esperado dos dividendos futuros. Contudo, Malkiel (2011) argumenta que os mercados podem ser eficientes mesmo se os preços desviarem entre 200% acima e 50% abaixo de seu valor fundamental, devido a ruídos. De acordo com Black

(1986), ruídos dizem respeito à atividade de negociação de investidores que é baseada em informações irrelevantes, porém tratadas como se fossem informações válidas, como uma informação privada.

Em resposta às críticas à HME, Fama (1998) argumenta que muitos desses efeitos desaparecem ou perdem significância estatística quando se alteram os modelos, a amostra ou a frequência dos dados. Além disso, Fama (1998) explica que episódios de *overreaction* são tão frequentes quanto os de *underreaction*, o que indicaria uma ausência de viés sistemático. As anomalias de longo prazo são geralmente frágeis e tendem a desaparecer com o tempo, especialmente à medida que são descobertas e exploradas pelos participantes do mercado.

Mais recentemente, McLean e Pontiff (2016), ao analisarem 97 anomalias documentadas em publicações acadêmicas, constataram que, após a divulgação das anomalias, a previsibilidade dos preços se reduz. Isto é, à medida que os investidores aprendem sobre novas anomalias e informações, eles as incorporam, tornando o mercado mais eficiente. Porém, os autores também evidenciaram que em alguns casos existe uma persistência das anomalias, gerando ineficiência nos mercados. Woo et al. (2020) fornecem uma extensa revisão acerca das diversas anomalias descritas na literatura econômica.

Segundo Malkiel (2011), apesar do conflito entre a HME e as finanças comportamentais, essas abordagens teóricas não devem ser vistas como competitivas entre si. Ambas podem ser utilizadas em conjunto, explorando suas vantagens, sendo que a presença de vieses comportamentais não implica necessariamente que os investidores podem vencer sistematicamente o mercado, ou seja, a HME ainda é mantida nesses cenários.

Neste contexto emerge a Hipótese dos Mercados Adaptativos (HMA), que busca reconciliar a HME e as finanças comportamentais sob uma perspectiva evolucionária (Lo, 2004; 2005; 2007). Na HMA, os preços refletem as informações de forma dinâmica, conforme o ambiente do mercado se transforma. Esse ambiente é influenciado por uma combinação de condições externas, como o número de participantes no mercado ou a implementação de novas regulações nos mercados financeiros (Lo, 2004).

Segundo Lo (2005), a HMA tem os seguintes componentes: os agentes agem a seu próprio interesse; os indivíduos cometem erros; os indivíduos aprendem e se adaptam; a adaptação e a inovação ocorrem pela competição; a seleção natural determina a ecologia do mercado; e a evolução determina a dinâmica do mercado. Nesse sentido, os agentes teriam que se adaptar às forças evolucionárias que cercam os mercados.

De acordo com Lo (2004), uma consequência prática da HMA é que a relação entre risco e retorno seria instável ao longo do tempo, pois os fatores que determinam essa relação, como

o ambiente regulatório, tendem a variar. Estudos empíricos, como Santos et al. (2022), corroboram essa instabilidade, evidenciando ciclos de maior ou menor eficiência nos mercados. Assim, as preferências dos agentes seriam moldadas de maneira evolucionária em resposta às diferentes informações. Um exemplo disso seria que investidores que foram afetados por bolhas, como a tecnológica, e enfrentaram perdas significativas, são prováveis de exibirem um comportamento diferente daqueles que não enfrentaram (Lo, 2005).

Além disso, a HMA permite que oportunidades de arbitragem existam entre diferentes períodos. A existência desses ganhos de arbitragem seria explorada até que desaparecesse, demonstrando a adaptabilidade dos agentes no mercado. Sobretudo, como na natureza, novas oportunidades surgem conforme entram novos participantes no mercado, mudam-se os regimes regulatórios e as instituições se transformam, seja por inovação ou mudanças estruturais (Lo, 2005). Essa perspectiva é particularmente relevante em contextos de crises econômicas e financeiras. Kim, Shamsuddin e Lim (2011) demonstraram empiricamente como a previsibilidade dos retornos varia ao longo do tempo, sendo mais elevada em períodos de instabilidade política e econômica.

Como já descrito, existem outras alternativas à HME, como a HMF, desenvolvida por Peters (1994). Para a HMF, o mercado reflete as mudanças nos lucros esperados, com base na mudança do ambiente econômico, ou seja, é semelhante à HMA no que diz respeito à influência do ambiente na formação dos preços. Nesse sentido, a HMF surge como uma alternativa à HME, incorporando elementos negligenciados, sendo a importância da liquidez e dos horizontes de investimento. Conforme Anderson e Noss (2013), na HMF, a liquidez de mercado está relacionada à disposição dos investidores em realizarem trocas entre si, o que influencia diretamente a formação dos preços. Isso ocorre porque os investidores possuem diferentes preferências em relação aos seus horizontes de investimento e, conseqüentemente, interpretam as informações de maneira distinta.

Assim, a estabilidade do mercado está relacionada à presença de uma ampla gama de investidores com diferentes horizontes, o que assegura liquidez suficiente para que as transações ocorram, gerando estabilidade entre a oferta e a demanda. Contudo, segundo Peters (1994), um mercado estável é diferente de eficiente; um mercado estável é caracterizado por sua liquidez. Ou seja, quando a liquidez é alta, o preço de mercado tende a refletir o valor considerado “justo” pelos participantes. Entretanto, em situações de falta de liquidez, investidores podem estar dispostos a aceitar qualquer preço, independentemente de sua aderência ao valor fundamental, gerando episódios de volatilidade extrema, pânico ou bolhas.

Anderson e Noss (2013) destacam que os preços não seguem um *random walk*. Eles refletem uma combinação de movimentos aleatórios no curto prazo, guiados por informações técnicas, e de tendências determinísticas no longo prazo, baseadas em fundamentos econômicos. Essa coexistência de padrões estocásticos locais e estruturas determinísticas globais configura uma característica central dos sistemas fractais, a autossimilaridade.

Nesse sentido, o arcabouço teórico apresentado revela-se adequado para analisar a eficiência dos mercados, especialmente ao investigar se comportamento do mercado acionário brasileiro apresenta características associadas a mercados adaptativos e multifractais. Além de como essa eficiência varia ao longo do tempo, com ênfase em períodos de crise e de instabilidade.

### 2.3 EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS

Em termos empíricos, diversos estudos buscaram verificar a validade da HME, com destaque para o papel da persistência dos retornos ao longo do tempo e sob diferentes contextos econômicos. Em nível internacional, Lo (1991), ao aplicar o teste *Rescaled Range* (R/S) modificado a séries de retornos de ações dos EUA, não encontrou evidências de memória longa. Henry (2002) examinou a presença de memória longa nos retornos para países desenvolvidos e asiáticos, com dados mensais para janeiro de 1982 a setembro de 1998, e obteve resultados mistos. Enquanto para o Japão, a Alemanha, a Coreia do Sul e Taiwan observaram-se sinais de memória longa, para os outros países notou-se que a previsibilidade pode estar associada à variação nos retornos esperados ou à presença de bolhas.

Borges (2010), ao investigar seis mercados europeus, identificou evidências de ineficiência em países como Grécia e Portugal, e maior eficiência na Alemanha e na Espanha. Já Charfeddine e Khediri (2016), analisando os mercados do Conselho de Cooperação do Golfo (CCG), considerando os efeitos da crise do *Subprime* e da Primavera Árabe, encontraram evidências de memória longa e variação na eficiência ao longo do tempo, especialmente em momentos de alta volatilidade. Além disso, os autores destacam que eventos financeiros extremos podem acentuar momentos de ineficiência local, afetando significativamente a dinâmica dos mercados analisados.

Tendo isso em vista, nota-se também que a eficiência pode variar não apenas entre países, mas ao longo do tempo, especialmente em momentos de crises. Por exemplo, Han, Wang e Xu (2019) analisaram a multifractalidade dos retornos diários de índices acionários chineses,

com foco nos impactos do *crash* do mercado ocorrido em 2015. Utilizando-se da MF-DFA, os resultados indicaram que todas as séries de retornos dos índices analisados apresentaram propriedades multifractais, o que sugere a existência de alguma previsibilidade nos retornos. Além disso, o estudo mostrou que o *crash* de 2015 afetou de forma distinta a dinâmica e a eficiência dos diferentes mercados.

Tran e Leirvik (2019), ao desenvolverem a métrica *Adjusted Market Inefficiency Magnitude* (AMIM), identificaram que crises financeiras e bolhas especulativas estão associadas a aumentos significativos na ineficiência dos mercados acionários, seguidos por redução em momentos de estabilidade. Dias et al. (2020), analisando os efeitos iniciais da pandemia de COVID-19 em nove mercados, observaram a rejeição da hipótese de *random walk* em diversos casos, indicando oportunidades de arbitragem e sugerindo o impacto da crise sanitária na eficiência desses mercados.

A literatura mais recente também evidencia que os efeitos das crises variam conforme a estrutura dos mercados. Araujo, Fernandes e Tabak (2021) encontraram aumento da ineficiência entre setores do mercado chinês durante a COVID-19, embora de forma heterogênea. Choi (2021), ao comparar os períodos das crises do *Subprime* e da pandemia da COVID-19, para os EUA, mostrou que os retornos médios apresentaram comportamentos distintos. Durante o *Subprime*, houve menor persistência, enquanto na pandemia os retornos se mostraram mais persistentes. A eficiência variou entre os setores, sendo o setor de consumo discricionário o mais eficiente em ambos os períodos, e o setor de utilidades o menos eficiente. Outro ponto importante refere-se ao fato de os autores terem observado características multifractais em quase todos os setores, com destaque para o setor de bens de consumo essenciais. Por fim, o estudo indicou que houve uma distinção entre as crises no que tange aos setores que tiveram a menor eficiência, refletindo os diferentes impactos econômicos em cada caso.

Resultados semelhantes foram encontrados por Erer, Erer e Güngör (2023) para mercado turco, com variação na persistência entre as crises (*Subprime* e pandemia da COVID-19) e evidência de memória longa nos retornos. Finalmente, Bock e Geissel (2024) mostraram que a ineficiência dos mercados europeus aumentou em média 20% entre 2007 e 2022, especialmente em países desenvolvidos.

Esses estudos reforçam a HMA ao demonstrar que a eficiência dos retornos não é constante, variando entre países, setores e ao longo do tempo. Tais resultados indicam que os mercados podem apresentar períodos de ineficiência, o que é compatível com a visão da HMA. Nesse sentido, Kim, Shamsuddin e Lim (2011) investigaram a série de longo prazo do índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) para o período de 1900-2009. Os resultados indicam que

a previsibilidade segue ciclos que refletem as condições de mercado. Isso sugere que a ineficiência dos mercados se acentua em contextos de crise com incerteza moderada, praticamente ausente durante *crashes* e reduzida em momentos de bolhas. O estudo também revela que, ao contrário de parte da literatura, o mercado norte-americano tornou-se mais eficiente após 1980, possivelmente devido à estabilidade macroeconômica e às inovações institucionais. Esses achados são coerentes com a HMA, ao demonstrar que a eficiência é moldada por fatores dinâmicos e não é uma propriedade estática dos mercados.

Urquhart e McGroarty (2016) investigaram a previsibilidade dos retornos em quatro dos maiores mercados acionários globais, S&P500, FTSE100, NIKKEI225 e EURO STOXX 50, entre 1990 e 2014, e mostraram que a previsibilidade dos retornos oscila ao longo do tempo e varia conforme as condições de mercado, como os ciclos de alta, evidenciando que a eficiência não é uma condição “*all or nothing*”.

Santos et al. (2022) apresentaram uma análise quantitativa que fornece evidências que dão suporte à HMA. Este estudo relaciona a eficiência dos mercados a fatores institucionais e ao ciclo econômico. Eles utilizaram dados de índices de mercado de 50 países, sendo eles países desenvolvidos, economias emergentes e mercados de fronteira, como Jordânia e Paquistão, além de Hong Kong e Taiwan. O período analisado foi entre 1990 e 2022, com frequência diária. Para a análise, os autores realizaram uma modelagem multinível. Os resultados revelaram um aumento dos retornos anormais em períodos de expansão associado a um aumento da ineficiência dos mercados financeiros, em conformidade com Lo (2005). Isso sugere que o crescimento econômico pode levar a um relaxamento dos investidores diante de perdas, ocasionado decisões subótimas e consequente aumento da ineficiência do mercado. Outro ponto é que as evidências demonstraram que maior segurança jurídica está associada a um menor grau de ineficiência, sugerindo que a estabilidade legal pode ser um indicativo do grau de desenvolvimento dos mercados de capitais.

Em nível de Brasil, também existem diversos estudos sobre a eficiência de mercado, sendo que há uma controvérsia nos resultados. Urrutia (1995), por exemplo, examinou os mercados latino-americanos, incluindo o brasileiro, com base em dados mensais de 1975 a 1991. O autor encontrou resultados que rejeitam a hipótese de *random walk*, indicando a persistência dos retornos. Apesar disso, os testes de séries de sinais sugeriram que os mercados analisados mantiveram a eficiência em sua forma fraca.

Cajueiro e Tabak (2004) analisaram 13 mercados, incluindo o Brasil, utilizando estatísticas R/S e modificadas, bem como expoentes de Hurst com *rolling sample*. O período utilizado foi de janeiro de 1992 até dezembro de 2002. Os resultados indicaram que, no caso

brasileiro, o mercado apresentou níveis de eficiência inferiores aos dos países desenvolvidos, com indícios de ineficiências associadas ao seu estágio de desenvolvimento e ao tamanho da sua capitalização de mercado. Os autores também observaram uma relação positiva da capitalização de mercado com a eficiência. No caso específico do Brasil, o estudo revelou uma tendência crescente no expoente de Hurst ao longo do tempo, o que sugere uma redução na eficiência do mercado. Essa tendência é atribuída à redução nos fluxos de capital para o mercado acionário brasileiro nos anos finais da amostra, resultando em um ambiente de baixa liquidez.

Dourado e Tabak (2013) testaram a HMA para o Brasil, utilizando dados diários do IBOVESPA, para o período de 02 de janeiro de 1995 a 19 de outubro de 2012. Para isso, executaram o teste de razão de variância automática (RVA) com *wild bootstrap* e o teste de forma espectral generalizada (FEG). O estudo mostrou que, embora o mercado tenha sido eficiente na maior parte do tempo, houve períodos de ineficiência associados a eventos econômicos e políticos, como a criação do Plano Real, a crise asiática de 1997, a crise da desvalorização do real de 1999 e a crise do *Subprime*.

Mais recentemente, Monte (2023) demonstrou que a pandemia da COVID-19 provocou um aumento na persistência da volatilidade no mercado financeiro brasileiro, utilizando como indicador o índice *CBOE Brazil ETF Volatility*. A amostra considerada foi composta pelos dados diários de outubro de 2011 a março de 2021, e a metodologia empregada incluiu estimadores de memória longa, como o GPH, ELW e o *robust* GPH (RGPH). Os resultados indicaram que a volatilidade no mercado brasileiro apresentava um alto grau de persistência, o qual foi significativamente ampliado durante a crise da COVID-19. O estudo concluiu que informações passadas são relevantes para prever os riscos.

Por fim, destacando a influência de eventos extremos sobre a previsibilidade de preços, Maciel (2023) utilizou a abordagem MF-DFA para analisar o período entre 2015 e 2022, ou seja, antes e depois da pandemia de COVID-19. Os resultados revelaram a presença de multifractalidade nos retornos antes e depois da pandemia, rejeitando a hipótese de *random walk*. Após a pandemia, observou-se maior grau de ineficiência do mercado brasileiro.

No contexto brasileiro, os estudos revisados demonstram que o mercado acionário apresenta períodos de eficiência e de ineficiência, com variações associadas a eventos econômicos, crises financeiras e fatores institucionais. Apesar da crescente literatura sobre o tema, persistem lacunas quanto à análise setorial da eficiência do mercado brasileiro, especialmente em comparação entre diferentes crises. Nesse sentido, a presente pesquisa contribui ao investigar a (in)eficiência dos setores do mercado acionário brasileiro sob a ótica

da persistência dos retornos e da multifractalidade, comparando os períodos da crise do *Subprime* e da pandemia de COVID-19. Dessa forma, busca-se avançar na compreensão de como diferentes naturezas de choques afetam a dinâmica dos mercados emergentes, oferecendo subsídios tanto para a teoria financeira quanto para a tomada de decisão de investidores e formuladores de políticas.

## 2.4 HIPÓTESES

Com base na revisão de literatura, tem-se as seguintes hipóteses: (i) os setores do mercado acionário brasileiro exibiram níveis distintos de (in)eficiência, mensurados pela persistência dos retornos e (ii) os retornos apresentaram comportamento de multifractalidade, evidenciado pelo comportamento decrescente do  $h(q)$ ; (iii) o grau de multifractalidade e de (in)eficiência variou entre a crise do Subprime e a pandemia de COVID-19, conforme indicado pelo ranqueamento setorial a partir da complexidade multifractal ( $\Delta h$ ), largura do espectro multifractal ( $\Delta \alpha$ ) e o Market Deficiency Measure (MDM) refletindo diferentes respostas do mercado à natureza dos choques.

### 3 METODOLOGIA

Nesta seção são apresentados os dados do estudo, com a descrição das variáveis e do período de análise. Em seguida, descreve-se a metodologia, mais especificamente, o conceito de multifractalidade, e o método MF-DFA, adotado nas estimações.

#### 3.1 DADOS

A ideia central desta pesquisa foi investigar o comportamento de eficiência de alguns índices setoriais da B3. Para tanto, a pesquisa adotou dois períodos amostrais<sup>2</sup>, a saber: Período I, que corresponde à crise do *Subprime* (de setembro de 2008 a dezembro de 2009), e, Período II, relativo à pandemia da COVID-19 (de fevereiro de 2020 a janeiro de 2022). Os dados referem-se a preços de fechamento diários e foram retirados do site [Investing.com](http://www.investing.com) ([www.investing.com](http://www.investing.com)).

O Quadro 1 apresenta os índices setoriais, os quais representam uma carteira teórica de ativos e refletem o desempenho de grupos específicos de empresas, classificadas conforme o setor econômico ao qual pertencem. O Índice de Energia Elétrica (IEE) é voltado para companhias do setor de energia elétrica. O Índice Industrial (INDX) abrange empresas dos ramos de materiais básicos, bens industriais, tecnologia da informação e saúde, além de setores de consumo. Já o Índice Imobiliário (IMOB) contempla empresas ligadas à exploração de imóveis e à construção civil. Por fim, o Índice Financeiro (IFNC) representa instituições financeiras, incluindo bancos, seguradoras, empresas de previdência e de serviços financeiros diversos (B3, 2025).

**Quadro 1 – Variável, unidade, acrônimo e fonte**

Variável	Unidade	Acrônimo	Fonte
Índice de Energia Elétrica	Índice	IEE	Investing.com
Índice Industrial	Índice	INDX	Investing.com
Índice Imobiliário	Índice	IMOB	Investing.com
Índice Financeiro	Índice	IFNC	Investing.com

Fonte: elaboração própria.

<sup>2</sup> Os períodos amostrais foram tomados com base nos trabalhos de Choi (2021) e Erer, Erer e Güngör (2023).

Para verificar a persistência serão utilizados os índices setoriais transformados em retornos. Seguindo Tsay (2010), os retornos serão calculados com base na diferença logarítmica dos índices, definidos como  $r_t = \ln(I_t) - \ln(I_{t-1})$ , onde  $I_t$  é o índice setorial no tempo  $t$ .

## 3.2 MULTIFRACTALIDADE E MF-DFA

### 3.2.1 Multifractalidade

De acordo com Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997), as medidas multifractais foram inicialmente aplicadas nas ciências físicas para descrever a distribuição de energia e de matéria em sistemas complexos. Desde então, a noção de multifractalidade encontrou aplicações em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, Lovejoy e Schertzer (1985) demonstraram padrões multifractais na precipitação atmosférica, contribuindo para avanços na modelagem climática. Na sismologia, Telesca e Lovallo (2009) utilizaram a análise multifractal para investigar séries temporais de terremotos, enquanto, na fisiologia, Ivanov et al. (1999) revelaram que os batimentos cardíacos humanos apresentam estrutura multifractal. Na neurociência, Linkenkaer-Hansen et al. (2001) identificaram correlações temporais de longo alcance e comportamentos multifractais em oscilações cerebrais humanas.

Na economia, o estudo da multifractalidade também tem sido amplamente empregado, com aplicações para diferentes mercados e ativos. Por exemplo, na análise dos mercados de ouro e petróleo (Mensi et al., 2020), nas criptomoedas (Naeem et al., 2021; Bariviera, 2021), no mercado de ações (Tiwari, Aye e Gupta, 2019; Lee e Choi, 2023), bem como na inflação (Fernandes, Silva e Araújo, 2022).

A multifractalidade refere-se a uma propriedade dos processos estocásticos caracterizada por um conjunto de restrições sobre os momentos do processo, que variam conforme a escala temporal das observações (Mandelbrot, Fisher e Calvet, 1997). De forma simples, a multifractalidade descreve situações em que a complexidade de um fenômeno não pode ser representada por um único padrão em todas as escalas; ou seja, diferentes partes do sistema exibem diferentes graus de variabilidade conforme se amplia ou se reduz a escala de observação.

Nesse sentido, de acordo com Erer, Erer e Güngör (2023), níveis mais elevados de multifractalidade indicam uma multifractalidade mais intensa, o que, por sua vez, implica uma redução na eficiência de mercado. Dessa forma, a multifractalidade pode ser utilizada como um

instrumento de diagnóstico para identificar desvios da eficiência e a presença de estruturas de dependência temporal nos mercados financeiros.

Além disso, conforme demonstrado por Zunino et al. (2008), existe uma relação direta entre o grau de multifractalidade e o estágio de desenvolvimento dos mercados financeiros. Esses autores evidenciaram que a largura do espectro multifractal é uma função crescente do expoente de correlação da série temporal da magnitude (volatilidade), sendo que mercados emergentes tendem a apresentar valores mais elevados, enquanto mercados desenvolvidos exibem valores menores. Esses resultados sugerem que o grau de multifractalidade pode ser utilizado como um indicador do nível de desenvolvimento e de maturidade de um mercado.

### **3.2.2 *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA)***

Para investigar a eficiência dos mercados setoriais brasileiros sob a perspectiva da fractalidade dos retornos, adotou-se a metodologia MF-DFA, proposta por Kantelhardt et al. (2002), que possui a vantagem de ser robusta frente à não estacionariedade dos dados. De acordo com Miloš et al. (2020), o interesse na análise dos mercados de ações por meio do MF-DFA tem aumentado significativamente, sendo que a multifractalidade se consolidou como um dos tópicos mais ativos na área da econofísica.

Cajueiro, Gogas e Tabak (2009) afirmam que, se o expoente de Hurst global<sup>3</sup> variar ao longo do tempo, então o processo subjacente é multifractal. Segundo Han, Wang e Xu (2019), a MF-DFA, juntamente com a análise do espectro multifractal, constitui uma das abordagens mais amplamente utilizadas na investigação de mercados dinâmicos, dada sua capacidade de capturar estruturas complexas e não lineares. Nesse sentido, Erer, Erer e Güngör (2023) ressaltam que, caso a multifractalidade seja verificada, há uma validação empírica da Hipótese dos Mercados Adaptativos (HMA), pois tal comportamento implica que as oportunidades de arbitragem também variam no tempo.

Tomando-se como referência Kantelhardt et al. (2002) e Choi (2021), o procedimento da MF-DFA consiste em cinco passos. Seja uma série temporal  $x_k, k = 1, \dots, N$ , onde  $N$  é o tamanho da série.

- (i). Determina-se o “perfil”

---

<sup>3</sup> Detalhes do expoente de Hurst global podem ser vistos em Cajueiro, Gogas e Tabak (2009).

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k. \quad (2)$$

(ii). Divide-se o perfil  $Y(i)$  em  $N_s = \text{int}\left(\frac{N}{s}\right)$  segmentos não sobrepostos de tamanho  $s$ . Dado que o tamanho de  $N$  pode não ser múltiplo da escala temporal  $s$ , uma pequena parte de no final do perfil pode sobrar. Neste caso, para cobrir toda a amostra, repete-se o mesmo procedimento a partir do final da amostra. Dessa forma, obtêm-se ao todo  $2N_s$  segmentos:

$$\{Y[(v-1)s+i]\}_{i=1}^s, \quad v = 1, 2, \dots, N_s, \quad (3)$$

$$\{Y[N-(v-N_s)s+i]\}_{i=1}^s, \quad v = N_s + 1, N_s + 2, \dots, 2N_s. \quad (4)$$

(iii). Calcula-se a tendência local de cada  $2N_s$  segmentos. Para cada segmento, a tendência local é um polinômio ajustado pelo método dos mínimos quadrados. Consequentemente, a variância é determinada a partir do seguinte:

$$F^2(s, v) = \begin{cases} \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s+i] - \hat{Y}_v^m(i)\}^2, & v = 1, 2, \dots, N_s \\ \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N-(v-N_s)s+i] - \hat{Y}_v^m(i)\}^2, & v = N_s + 1, N_s + 2, \dots, 2N_s, \end{cases} \quad (5)$$

sendo,  $\hat{Y}_v^m(i)$  o polinômio ajustado de ordem  $m$  no segmento  $v$ . De maneira geral, podem ser utilizados nesse passo os seguintes polinômios: linear ( $m = 1$ ), quadrático ( $m = 2$ ), ou cúbico ( $m = 3$ ).

(iv). Calcula-se a média sobre todos os segmentos para se obter a função de flutuação para a  $q$ -ésima ordem:

$$F_q(s) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} (F^2(s, v))^2 \right]^{\frac{1}{q}}, & q \neq 0 \\ \exp \left[ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln(F^2(s, v)) \right], & q = 0. \end{cases} \quad (6)$$

(v). Determina-se o comportamento de escala das funções de flutuação. Compara-se os gráficos log-log para  $F_q(s)$  com  $s$  para cada valor de  $q$ . Se as séries possuírem correlações de longo alcance,  $F_q(s)$  incrementa para grandes valores de  $s$ . A lei de potência é expressa como se segue.

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}, \quad (7)$$

em que  $h(q)$  representa o expoente de Hurst generalizado. A Equação (7) pode ser escrita como  $F_q(s) = a \cdot s^{h(q)} + b$ . Aplicando logaritmos, tem-se,

$$\ln(F_q(s)) = h(q) \cdot \ln(s) + c, \quad (8)$$

sendo  $c$  uma constante.

Observa-se que o expoente  $h(q)$  depende de  $q$ . Quando  $h(q)$  não depende de  $q$  a série é monofractal; caso contrário é multifractal. Para  $q = 2$ ,  $h(2)$  é idêntico ao expoente de Hurst. Logo, a função  $h(q)$  é chamada de expoente de Hurst generalizado. Se  $h(2) = 0,5$ , então a série segue um *random walk*. Quando  $0,5 < h(2)$ , a série temporal apresenta dependência de longo prazo e um aumento (diminuição) tem maior probabilidade de ser seguido por outro aumento (diminuição). Por fim, com  $h(2) < 0,5$ , tem-se um processo com tendência de reversão a média, ou seja, não há persistência. Assim, um aumento (diminuição) tem maior probabilidade de ser seguido por uma diminuição (aumento).

O  $h(q)$  está relacionado com os expoentes de escala multifractal  $\tau(q)$  da seguinte forma:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (9)$$

Para estimar a multifractalidade, transforma-se  $q$  e  $\tau(q)$  em  $\alpha$  e  $f(\alpha)$  utilizando uma transformada de Legendre com as seguintes equações:

$$\alpha = \frac{d}{dq} \tau(q), \quad f(\alpha) = \alpha(q)q - \tau(q), \quad (10)$$

onde  $f(\alpha)$  é o espectro multifractal ou espectro singular e é  $\alpha$  a força da singularidade.

De acordo com Mensi et al. (2020) e Bariviera (2021), pode-se definir o grau de multifractalidade,  $\Delta h$ , como:

$$\Delta h = \max(h(q)) - \min(h(q)). \quad (11)$$

Grandes valores de  $\Delta h$  indicam um maior grau de multifractalidade. Ainda, conforme Lee e Choi (2023) e Fernandes, Silva e Araujo (2022), o tamanho do espectro multifractal,  $\Delta\alpha$ , é dado por:

$$\Delta\alpha = \max(\alpha) - \min(\alpha). \quad (12)$$

Seguindo a mesma forma, um maior espectro multifractal indica um maior grau de multifractalidade. Por fim, define-se o parâmetro de assimetria do espectro como:

$$\Theta = \frac{\Delta\alpha_L - \Delta\alpha_R}{\Delta\alpha_L + \Delta\alpha_R}, \quad (13)$$

sendo,  $\Delta\alpha_L = \alpha_0 - \alpha_{min}$ ,  $\Delta\alpha_R = \alpha_{max} - \alpha_0$ ,  $R$  denominando *right* (direita) e  $L$  *left* (esquerda).

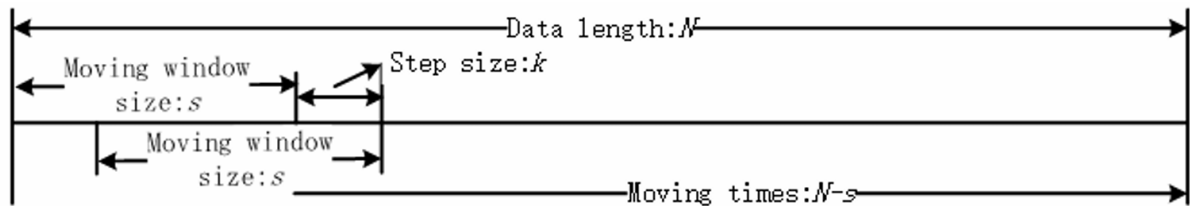
Aqui,  $\alpha_0$  representa o valor de  $\alpha$  correspondente ao ponto máximo de  $f(\alpha)$ . O parâmetro de assimetria é responsável por indicar a predominância entre as flutuações pequenas e grandes no espectro multifractal. Quando o parâmetro de assimetria  $\Theta = 0$ , tanto as flutuações grandes quanto as pequenas contribuem de maneira equilibrada para a multifractalidade. Por outro lado, quando  $\Theta > 0$ , observa-se uma assimetria à esquerda, o que significa que subconjuntos com grandes flutuações exercem uma contribuição significativa no espectro multifractal. Em contraste, quando  $\Theta < 0$ , há uma assimetria à direita, indicando que são as flutuações menores que constituem a principal fonte de multifractalidade.

### 3.2.3 Overlap Moving Window (OMW)

De acordo com Erer, Erer e Güngör (2023), na análise multifractal, a divisão do perfil da série em segmentos não sobrepostos pode gerar pseudo-flutuações devido a descontinuidades na modelagem polinomial nos pontos de junção, distorcendo a estimativa dos expoentes de escala. Para contornar esse problema, aplica-se o algoritmo *de overlapping moving window* (OMW; Figura 1), que substitui a segmentação não sobreposta por uma janela móvel de tamanho  $s$ , deslocada ao longo da série com passo  $k$ .

Esse procedimento melhora a estatística em escalas curtas, especialmente em séries relativamente pequenas, garantindo maior robustez em escalas maiores, onde o número de segmentos não sobrepostos seria insuficiente para resultados confiáveis. Segundo Zhang et al. (2019) e Gorjão et al. (2022), a aplicação do algoritmo consiste em: dado o comprimento da série  $N$ , determinar o tamanho da janela  $s$ , o passo  $k$  para cada deslocamento e o número de movimentos, calculado por  $N - s$ .

Figura 1 – Fluxo de trabalho do algoritmo de janela móvel sobreposta (OMW)



Fonte: retirado de Zhang et al. (2019).

### 3.2.4 Classificando a multifractalidade

O MF-DFA também possibilita classificar a (in)eficiência. De acordo com Zunino et al. (2008), classificar o grau de ineficiência de um mercado representa uma informação relevante para formuladores de políticas públicas, entidades reguladoras e para investidores, pois oferece informações sobre os setores que podem ser adotadas para aprimorar a eficiência dos mercados, assim como para estratégias de administração de carteiras e gestão de riscos.

Neste contexto, para quantificar e comparar a eficiência entre os setores analisados, seguindo Erer, Erer e Güngör (2023) e Maciel (2023), será utilizado o *Market Deficiency Measure* (MDM), que é descrito da seguinte forma:

$$MDM = \frac{1}{2} (|h(q_{min}) - 0,5| + |h(q_{max}) - 0,5|), \quad (14)$$

onde  $q_{min}$  e  $q_{max}$  são, respectivamente, a mínima e a máxima ordem da função de flutuação. Quando  $MDM = 0$ , o mercado segue um *random walk* e, portanto, é eficiente. Caso contrário, o mercado é ineficiente, sendo que quanto maior o valor do MDM, mais ineficiente será o mercado.

### 3.2.5 Causas da multifractalidade

De acordo com Kantelhardt et al. (2002), as causas da multifractalidade nas séries podem ser atribuídas a dois fatores: correlações de longo alcance entre pequenas e grandes flutuações e/ou distribuições com caudas pesadas (*fat-tails*). Nesse sentido, é possível identificar qual a causa da multifractalidade ao gerar séries embaralhadas (*shuffled*) ou surrogadas (*surrogated*) a partir da série original.

Para o caso do embaralhamento, elimina-se quaisquer correlações temporais presentes na série original, ao mesmo tempo em que se preserva a distribuição das flutuações. Ou seja, caso a única causa da multifractalidade seja correlações temporais, as séries embaralhadas não apresentarão a característica multifractal. Nesse sentido, Han, Wang e Xu (2019) estabelecem três passos para embaralhar as séries: (1) gerar pares  $(p, r)$  de números inteiros aleatórios, que satisfaçam a condição  $(p, r) < N$ ; (2) trocar as posições  $p$  e  $r$  na mesma série; e (3) repetir os passos (1) e (2)  $20 \times N$  vezes, garantindo assim que a ordem da série original esteja completamente embaralhada.

Já para o caso de surrogar as séries, esse método atenua a propriedade não-Gaussiana da série. Assim, se a causa da multifractalidade for somente as caudas pesadas da distribuição, então a multifractalidade desaparece. Seguindo Zhou (2009), uma maneira de realizar esse método é por meio da randomização de fase e envolve três etapas: (1) aplicar a transformada discreta de Fourier; (2) selecionar aleatoriamente um ângulo de fase; e (3) aplicar a transformada inversa de Fourier.

Ao comparar os resultados obtidos com as séries embaralhadas e surrogadas, se a característica multifractal da série original permanecer presente, pode-se concluir que esta apresenta simultaneamente correlações de longo alcance e uma distribuição com caudas pesadas.

Assim, seguindo Choi (2021), para investigar a existência e causas da multifractalidade, adotou-se o procedimento baseado no teste MF-DFA, com a comparação entre a série original

e as séries transformadas artificialmente. O procedimento ocorre da seguinte forma: inicialmente gera-se 10.000 séries embaralhadas e 10.000 séries surrogadas, cada uma utilizando diferentes sementes no gerador de números aleatórios, a fim de assegurar a robustez estatística do processo. Em seguida, aplica-se o MF-DFA tanto na série original, quanto em cada uma das 10.000 séries embaralhadas e das 10.000 séries surrogadas. Para as séries transformadas, calcula-se a média aritmética do  $h(q)$ , bem como o desvio-padrão correspondente. A comparação entre os resultados obtidos para a série original e para as séries embaralhadas e surrogadas permite identificar as fontes da multifractalidade. O procedimento foi adotado para cada setor analisado.

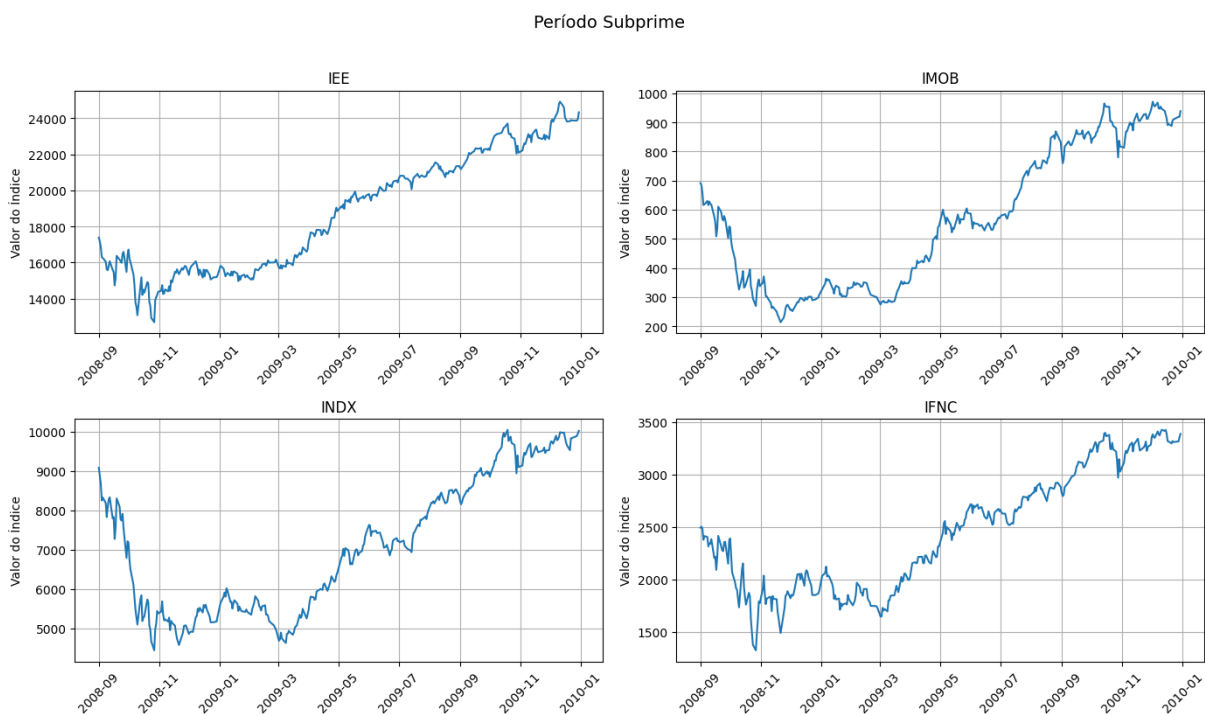
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados da aplicação da metodologia MF-DFA aos retornos dos índices setoriais da B3, incluindo a análise das funções de flutuação, das curvas do Expoente de Hurst Generalizado, dos espectros multifractais e a comparação entre crises e setores, com destaque para as implicações em termos de eficiência de mercado.

### 4.1 GRÁFICOS E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

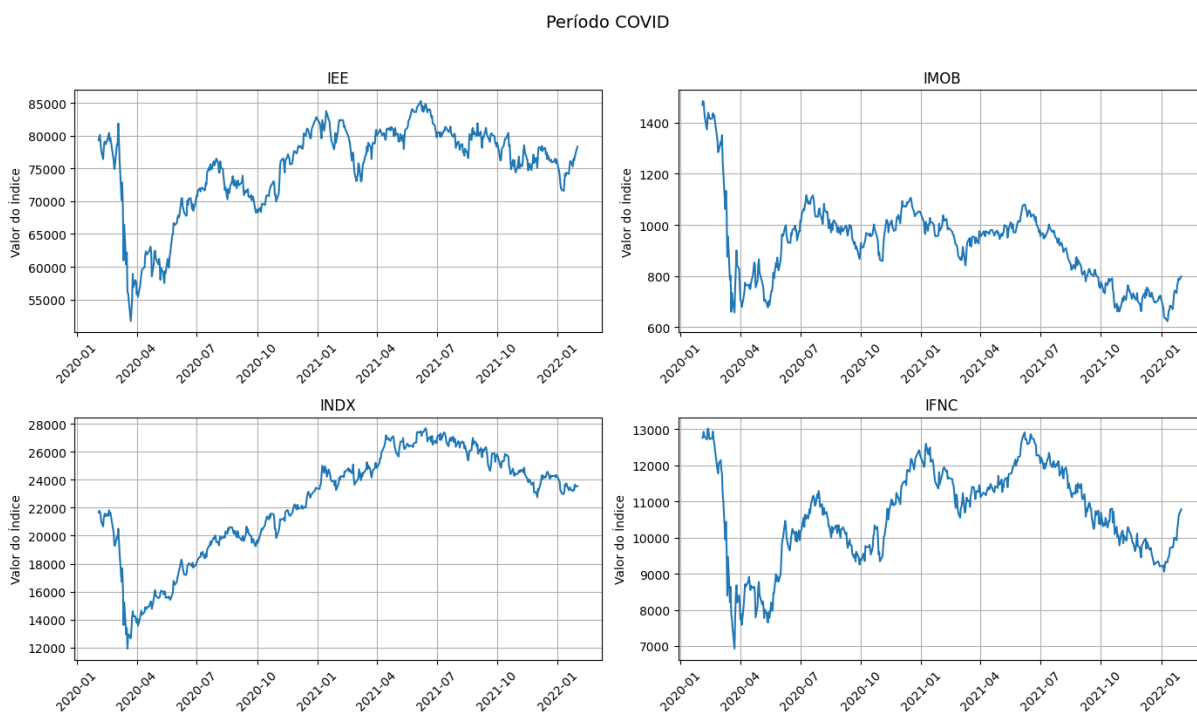
Nas Figuras 2 e 3 é possível observar os valores dos índices durante a crise do *Subprime* e a pandemia da COVID-19. Para o *Subprime*, nota-se em todos os índices uma queda nos primeiros dias do período, seguida por uma fase de estabilização e uma subsequente tendência de recuperação e crescimento. Em contraste, na pandemia houve um comportamento mais volátil e instável. Inicialmente, observa-se uma queda brusca dos índices, seguido por uma recuperação com diversas oscilações, em especial para o IMOB e para o IFNC. Nota-se, também, que ao final do período de estudo, o IEE, IMOB e IFNC não retornaram ao patamar anterior da pandemia. Esse comportamento reflete a incerteza prolongada da pandemia, com interrupções nas cadeias de suprimentos e mudanças no consumo.

Figura 2 – Valores dos índices durante o período do *Subprime*



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

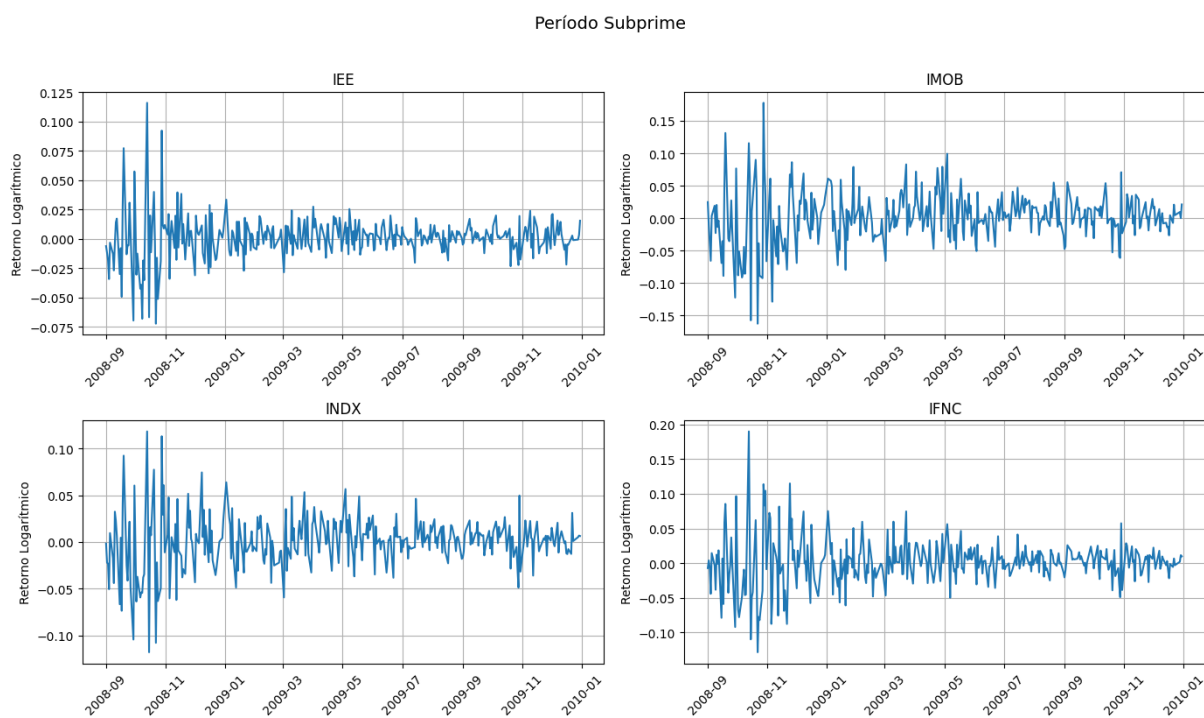
Figura 3 – Valores dos índices durante o período da pandemia da COVID-19



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

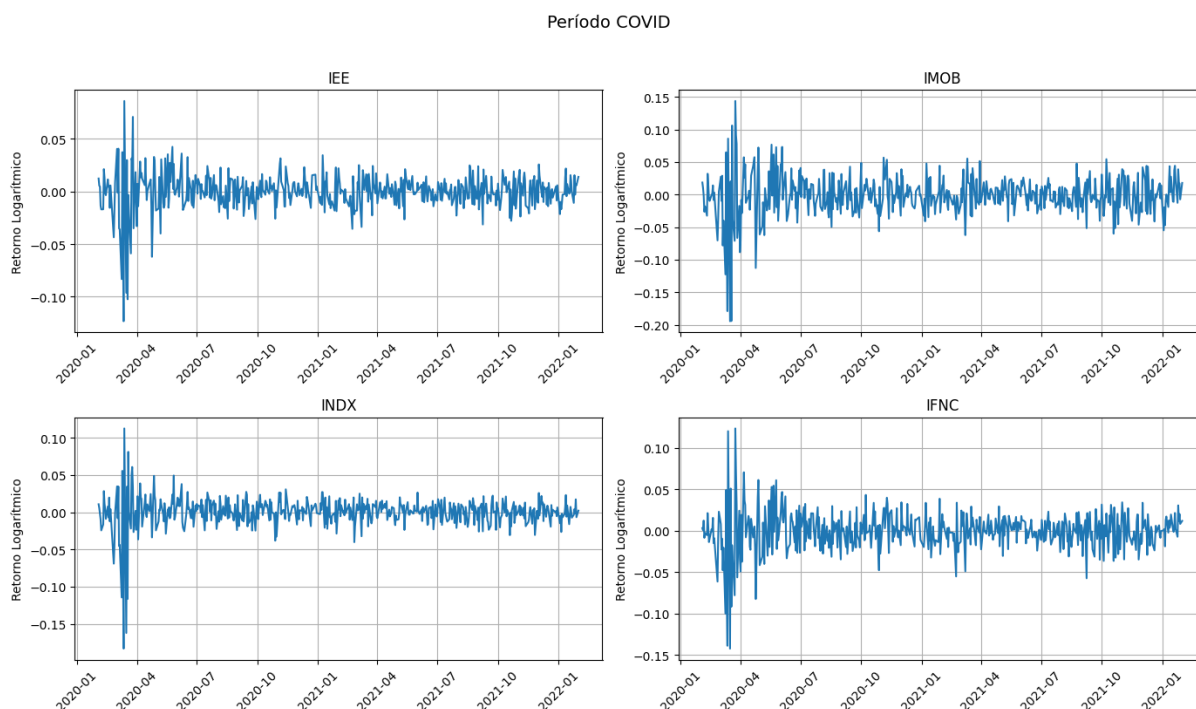
Já as Figuras 4 e 5 mostram o comportamento dos retornos logarítmicos para os períodos da crise do *Subprime* e da pandemia da COVID-19, o que reforça as diferenças entre a volatilidade entre os setores e entre os dois períodos de estudo. Durante o *Subprime*, observa-se um pico inicial de volatilidade, seguido de oscilações progressivamente menores à medida que o mercado foi se ajustando e se recuperando. Já no período da COVID-19, os retornos mostram volatilidade menor que do *Subprime*. Verifica-se uma volatilidade acentuada no início da crise, com forte queda dos retornos, seguida por um processo gradual de estabilização. Embora o choque inicial tenha sido expressivo, a variabilidade dos retornos reduziu-se nos períodos subsequentes, refletindo a adaptação do mercado às novas condições econômicas.

Figura 4 – Retornos logarítmicos dos índices durante o período da crise do *Subprime*



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Figura 5 – Retornos logarítmicos dos índices durante o período da pandemia da COVID-19



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

As Tabelas 1 e 2 fornecem, respectivamente, as estatísticas descritivas para os retornos dos índices durante a crise do *Subprime* e da pandemia da COVID-19. No *Subprime* os retornos dos índices IEE e IFNC exibiram assimetrias positivas, indicando caudas mais pesadas à direita e sugerindo a ocorrência de retornos positivos extremos. Por outro lado, os retornos dos índices IMOB e INDX apresentaram assimetrias negativas, associadas a perdas abruptas. Já no caso da COVID-19, todos os retornos apresentaram assimetria positiva. Destaca-se que a curtose para ambos os períodos indica caudas pesadas (curtose maior que 3), com exceção do IMOB durante o *Subprime*. Ainda, conforme o teste de Jarque–Bera (JB), para todos os retornos setoriais, rejeita-se a hipótese nula de normalidade. Durante a pandemia da COVID-19 essas características de não-normalidade tornaram-se ainda mais pronunciadas. Todos os retornos tiveram valores extremamente elevados de assimetria e de curtose. Esse comportamento pode estar associado a origem da crise, uma vez que a pandemia afetou a economia de maneira generalizada e causou grande incerteza no mundo e no Brasil.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para os retornos logarítmicos dos índices setoriais durante o período da crise do *Subprime*

Estatística	IEE	IFNC	IMOB	INDX
Média	0,0010	0,0009	0,0010	0,0003
Desvio Padrão	0.01846	0,0341	0,04056	0,0280
Mínimo	-0,0721	-0,1284	-0,1629	-0,1181
Máximo	0,1159	0,1899	0,1778	0,1182
Assimetria	0,5583	0,4335	-0,1781	-0,1427
Curtose	8,3753	4,2499	2,7210	3,3949
Jarque-Bera	997.8466*	263,9737*	105,8763*	163,2661*
N	330	330	330	330

Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Nota: 1) \* Indica rejeição da hipótese nula à 1% no nível de significância; 2) Devido à ausência de cotação em um dia sem abertura de mercado, o valor do índice IMOB foi imputado pela média entre os dias anterior e posterior.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas para os retornos logarítmicos dos índices setoriais durante o período da crise da pandemia da COVID-19

Estatística	IEE	IFNC	IMOB	INDX
Média	0	-0,0003	-0,0011	0,0001
Desvio Padrão	0,0177	0,0245	0,0323	0,0214
Mínimo	-0,1232	-0,1425	-0,1946	-0,1833
Máximo	0,0860	0,1235	0,1437	0,1125
Assimetria	-1,3192	-0,5698	-0,9877	-2,4576
Curtose	10,1405	7,0421	7,5007	21,6132
Jarque-Bera	2287,6962*	1061,6278*	1254,5657*	10225,0951*
N	495	495	495	495

Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

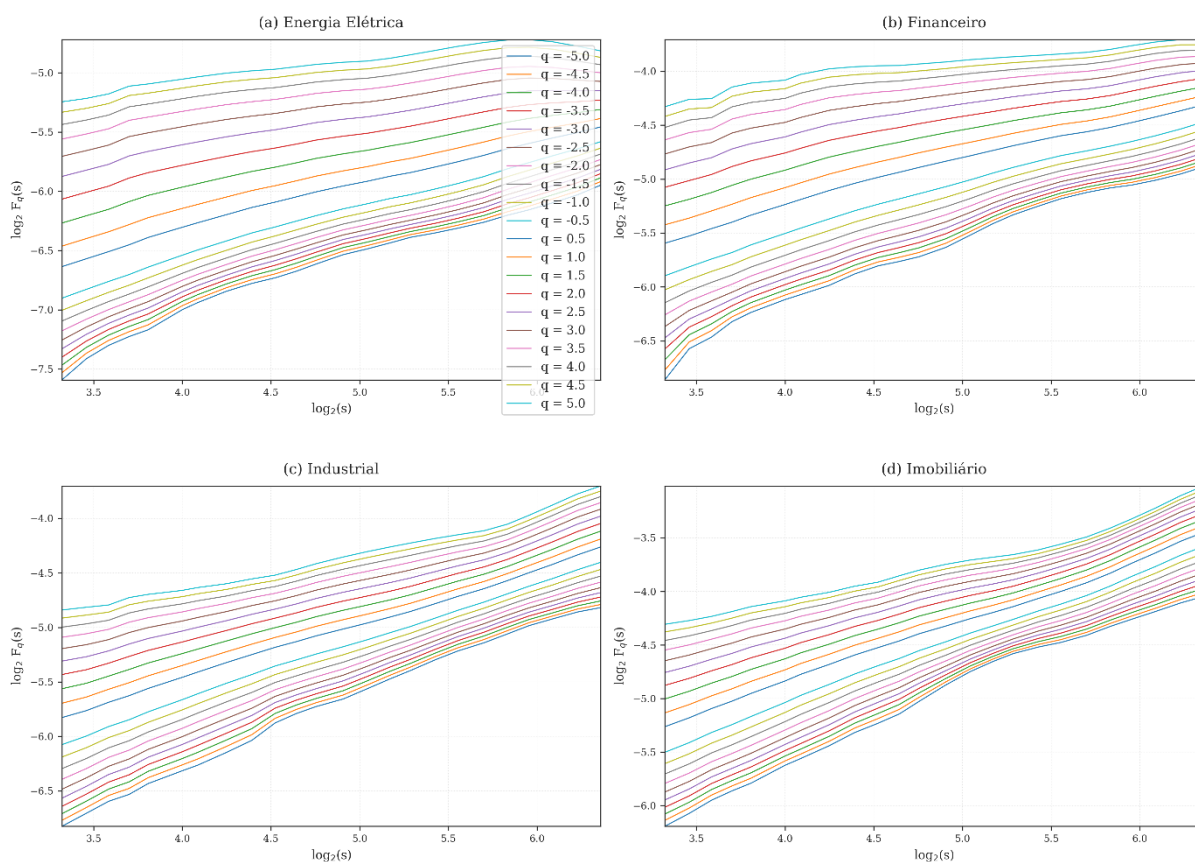
## 4.2 ANÁLISE DE FLUTUAÇÃO MULTIFRACTAL SEM TENDÊNCIA

Nesta subseção são apresentados os resultados da análise multifractal por meio da metodologia MF-DFA aplicada às séries de retornos dos índices setoriais. Para a aplicação,

utilizou-se um polinômio de primeira ordem ( $m = 1$ ) no ajuste das tendências locais, com o fim de evitar sobreajuste, conforme Han, Wang e Xu (2019), Choi (2021) e Maciel (2023).

As Figuras 6 e 7 mostram os gráficos log-log de  $F_q(s)$  em relação a  $s$  para os setores analisados durante o *Subprime* e a pandemia da COVID-19, para  $q = -5; -4,5; \dots; 4,5; 5$ . Destaca-se que, em um processo monofractal, todas as curvas apresentariam inclinações iguais para diferentes valores de  $q$ . Para processos multifractais, a inclinação é distinta para as escalas  $q$ . Observa-se que, nas figuras apresentadas, as inclinações das curvas diferem entre si, o que evidencia a existência de múltiplas leis de potência e, portanto, a presença de multifractalidade. Isso indica que as dinâmicas de flutuação dos índices setoriais foram heterogêneas, refletindo estruturas complexas de correlação de longo prazo e comportamentos diferenciados entre movimentos dos índices de distintas intensidades, tanto durante o *Subprime* quanto na pandemia da COVID-19.

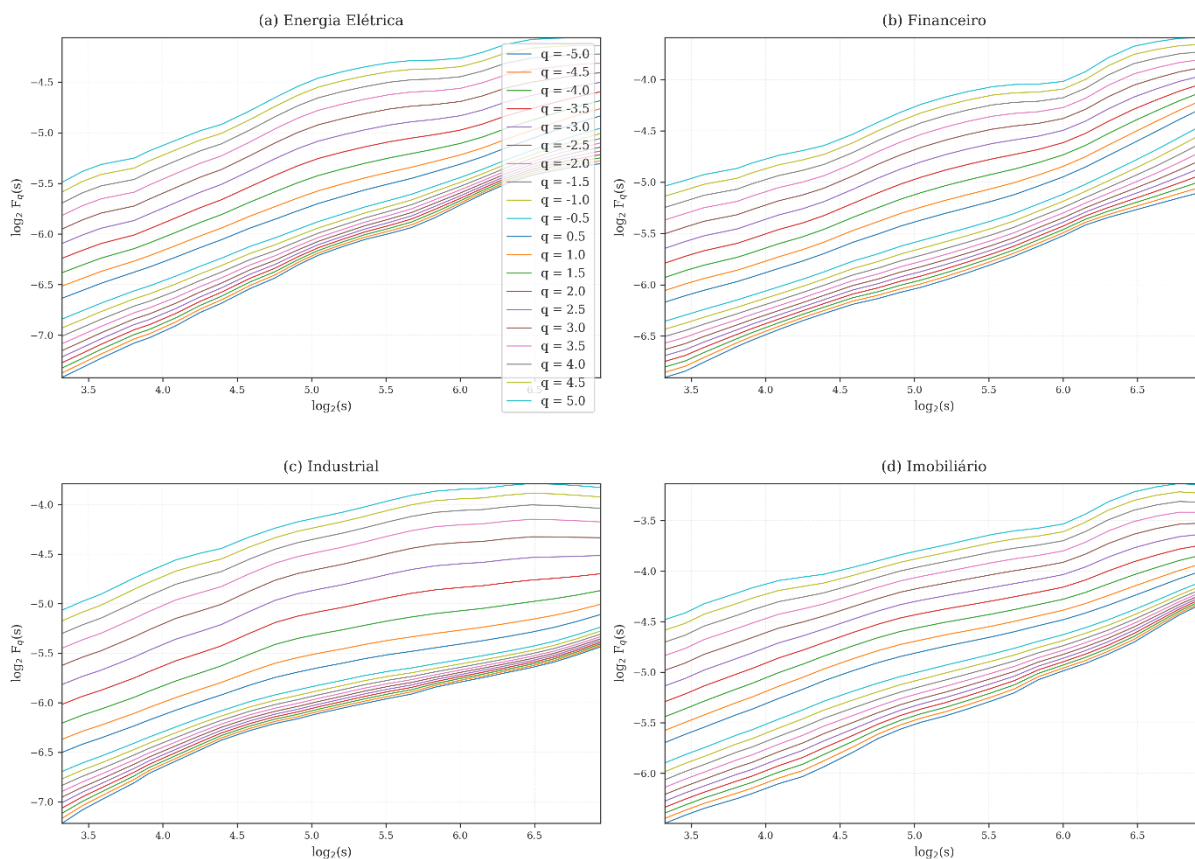
Figura 6 – Gráficos do log da função de flutuação  $F_q(s)$  em relação ao log de  $s$  para os setores durante a crise do *Subprime*



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Nota: as linhas correspondem às funções de flutuação  $F_q(s)$  para diferentes valores de  $q$ . A inclinação dessas linhas fornece o expoente de Hurst generalizado  $h(q)$ . Foram considerados valores de  $q$  no intervalo  $[-5,5]$ , com passo de 0,5.

Figura 7 – Gráficos do log da função de flutuação  $F_q(s)$  em relação ao log de  $s$  para os setores durante a crise da pandemia da COVID-19



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

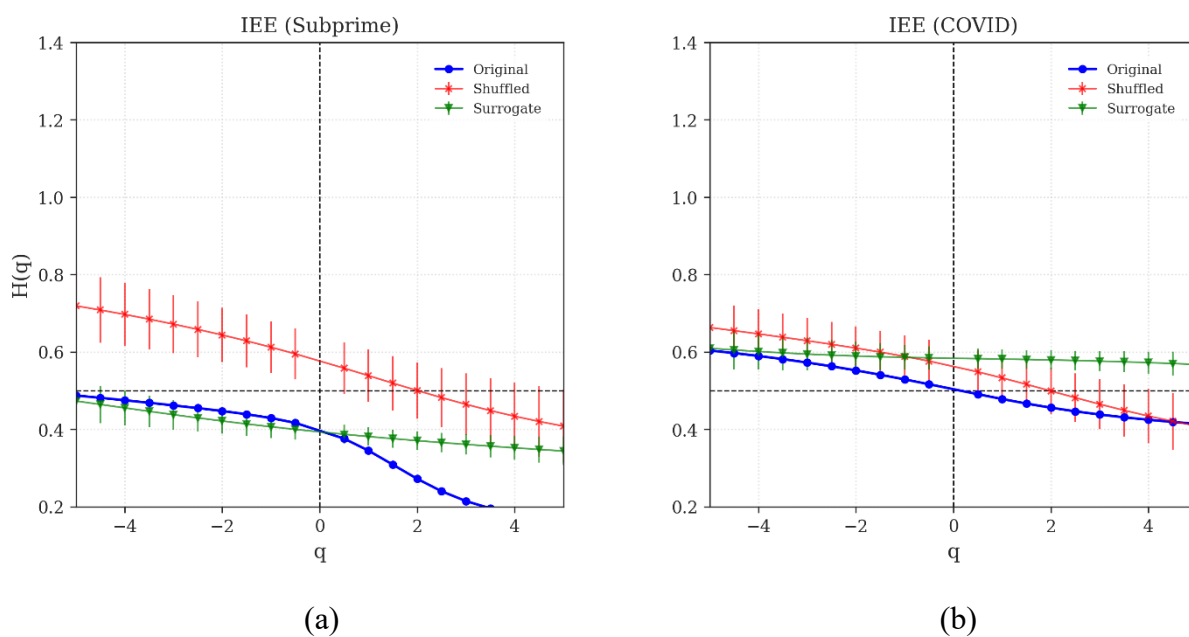
Nota: as linhas correspondem às funções de flutuação  $F_q(s)$  para diferentes valores de  $q$ . A inclinação dessas linhas fornece o expoente de Hurst generalizado  $h(q)$ . Foram considerados valores de  $q$  no intervalo  $[-5,5]$ , com passo de 0,5.

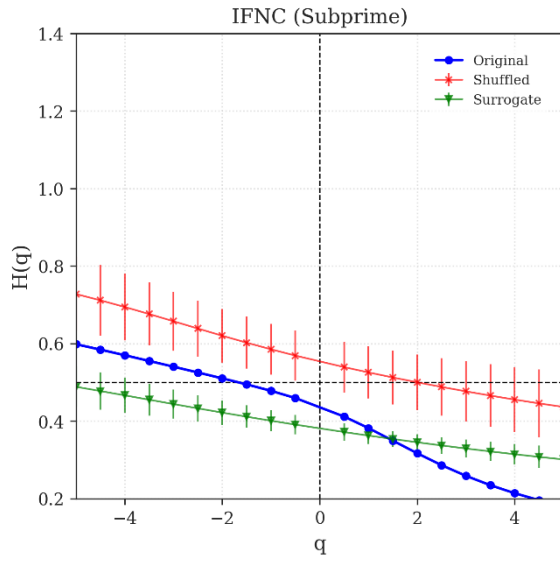
A Figura 8 mostra os expoentes de Hurst generalizados para os retornos dos setores durante as crises. Aqui, o foco da análise é a linha azul (original); as demais (*shuffled* e *surrogated*) serão analisadas na subseção 5.3. Assim, observando-se a linha azul (original), nota-se que em todos os casos,  $h(q)$  decresce em relação a  $q$ , revelando heterogeneidade nas flutuações e confirmando a multifractalidade para os dois períodos de crise, uma vez que  $h(q)$  depende de  $q$ . Achados semelhantes para o período da pandemia reforçam a robustez desse comportamento multifractal, como o estudo de Moraes, Ceretta e Júnior (2024) ao investigarem o IBOVESPA. Resultados compatíveis também são encontrados em Monte (2023), que, ao analisar as propriedades de memória longa para a volatilidade do mercado brasileiro, identificou

evidências favoráveis à HMF. Em conjunto, essas evidências se alinham à HMF, segundo a qual períodos de crise tendem a acentuar estruturas complexas e dependências de longo prazo nos mercados financeiros.

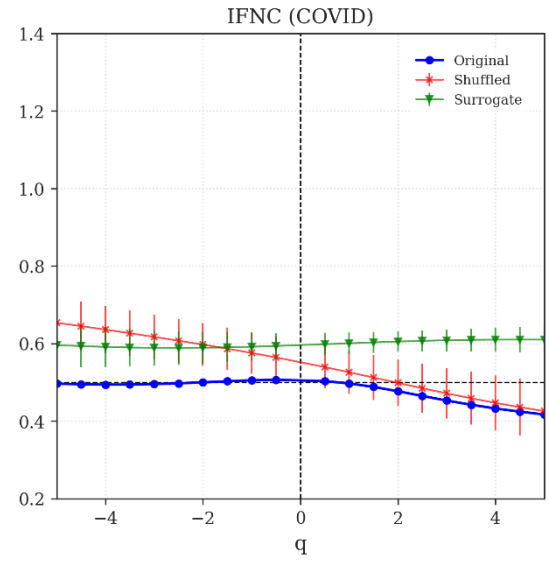
Vale ressaltar que  $h(q) = 0,5$  indica um processo aleatório, ou seja, ausência de correlações. No caso de um  $h(q) > 0,5$ , tem-se persistência, com correlações positivas, isto é, movimentos de alta (ou de baixa) tendem a ser seguidos por movimentos na mesma direção. Além disso, se  $h(q) < 0,5$  as correlações são negativas, logo, existe anti-persistência. No mais, vale ressaltar que o expoente de Hurst generalizado para  $q = 2$  representa o expoente de Hurst tradicional. Considerando  $h(2)$ , todos os setores para as duas crises apresentaram valores menores que 0,5, ou seja, na média, os setores tiveram comportamento antipersistente dos retornos durante as crises.

Figura 8 – Expoentes de Hurst Generalizados  $h(q)$  para o retorno logarítmico dos índices, para as séries original, *shuffled* e *surrogated*

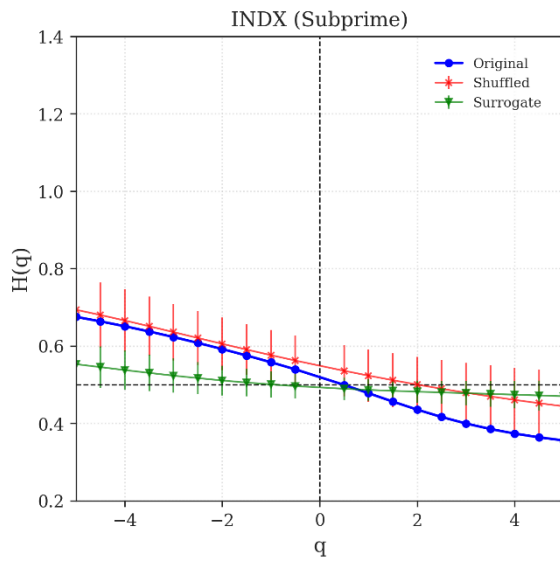




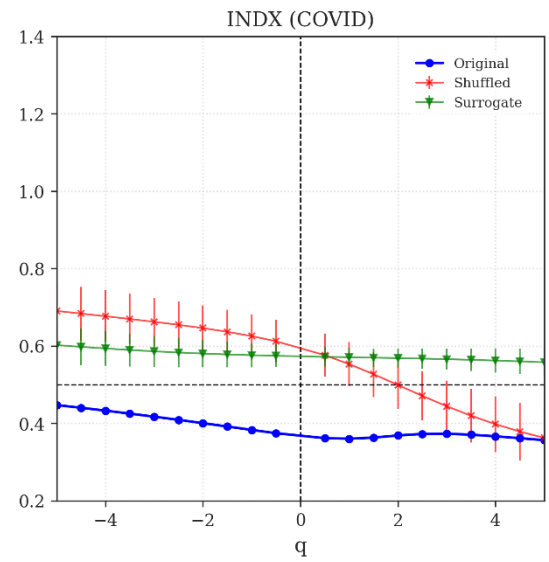
(c)



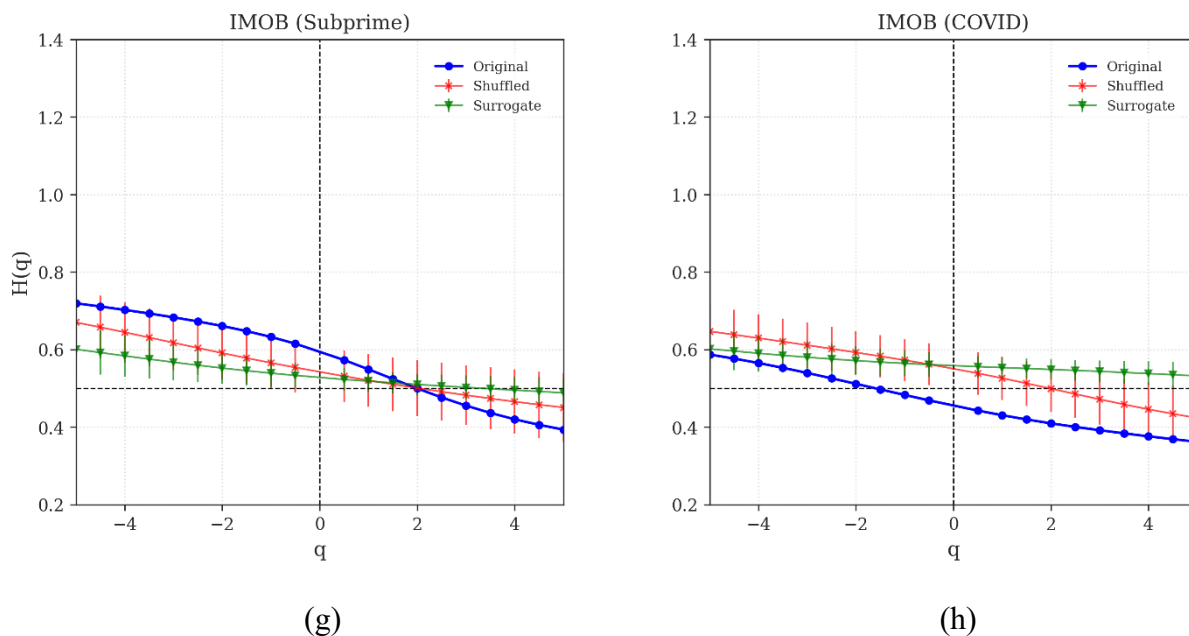
(d)



(e)



(f)



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Nota: as barras de erro são o desvio-padrão para as 10.000 séries shuffled e surrogated.

Especificamente, para o *Subprime*, o índice IEE manteve-se com comportamento de anti-persistência para todo  $q$ . Em contraste, os índices IFNC, INDX e IMOB exibiram persistência em pequenas flutuações, mudando para anti-persistência em relação as flutuações maiores. Na COVID-19, o IEE iniciou com comportamento persistente, em torno de 0,6, mas rapidamente inverteu para anti-persistência. O IFNC manteve-se próximo de 0,5 nas pequenas flutuações, ou seja, passeio aleatório e tornando-se anti-persistente nas grandes flutuações. Para o IMOB manteve persistência inicial, porém, após  $q = 2$ , passou a se comportar de forma anti-persistente. Enquanto o INDX apresentou anti-persistência em todo o intervalo analisado.

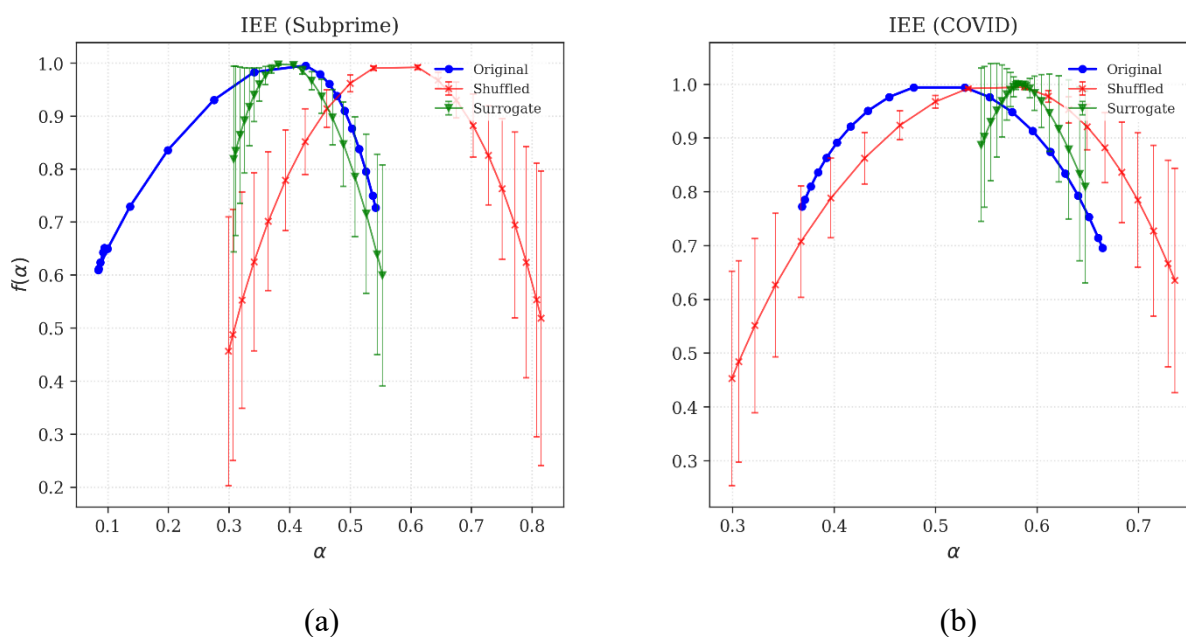
Estes resultados se alinham à Maciel (2023), que aponta que, durante o surto da COVID-19, as ações negociadas na B3 se tornaram mais ineficientes, refletindo aumento na previsibilidade dos retornos e majoritariamente apresentaram comportamento anti-persistente. De modo geral, todos os retornos dos índices mostraram redução da multifractalidade do *Subprime* para a COVID-19, sugerindo que a crise de 2008 gerou uma estrutura temporal mais complexa e heterogênea entre os setores, enquanto a pandemia resultou em um comportamento mais uniforme e controlado das flutuações dos retornos.

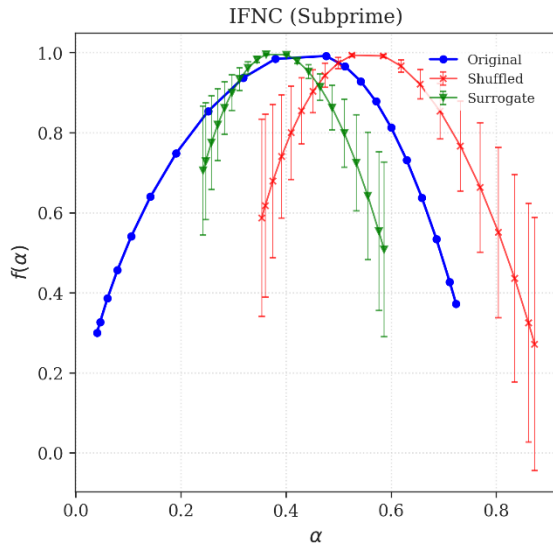
A Figura 9 apresenta os gráficos do espectro multifractal dos retornos, e, juntamente com a Tabela 3, permite analisar a intensidade da multifractalidade. Em alguns gráficos, observa-se a ocorrência do fenômeno denominado de nó, no qual a curva é torcida próxima ao pico. De acordo com Lee e Choi (2023), esse fenômeno pode ser atribuído a vários fatores,

como faixa de escala, as funções de flutuações irregulares observadas em grandes escalas e o comportamento não monotônico exibido pela função do expoente de Hurst generalizado estimado.

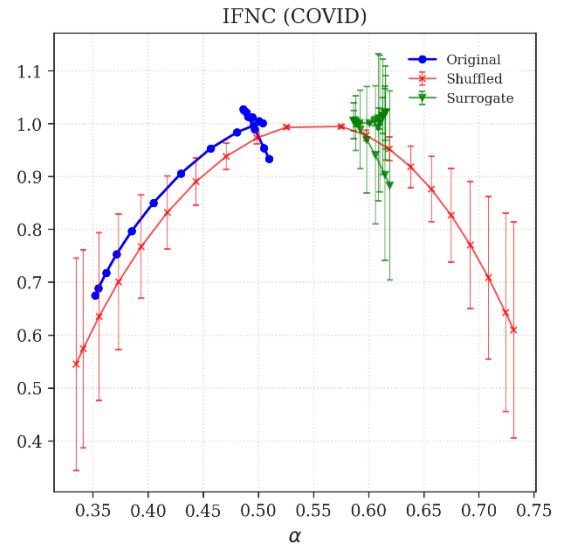
De acordo com Erer, Erer e Güngör (2023), quanto mais estreito o espectro multifractal mais eficiente é o mercado, com menor heterogeneidade e menor risco de mercado, ou seja, quanto maior for  $\Delta\alpha$ , menos eficiente é aquele mercado. Ainda na Tabela 3, observando o  $\Delta\alpha$  da série original, nota-se que no período do *Subprime* houve um maior grau de multifractalidade em todos os setores, em comparação à pandemia da COVID-19. O IFNC, no período da crise do *Subprime*, apresentou o maior grau de multifractalidade, com amplitude multifractal ( $\Delta\alpha$ ) igual à 0,6833. Esse resultado era esperado uma vez que a crise de 2008 foi amplamente disseminada para os mercados financeiros internacionais. Durante a COVID-19, a multifractalidade foi significativamente mais baixa, com a maior amplitude ocorrendo para os retornos do IMOB ( $\Delta\alpha = 0,3795$ ).

Figura 9 – Comparação entre o espectro multifractal  $f(\alpha)$  para o retorno logarítmico de cada índice, para as séries original, *shuffled* e *surrogated*

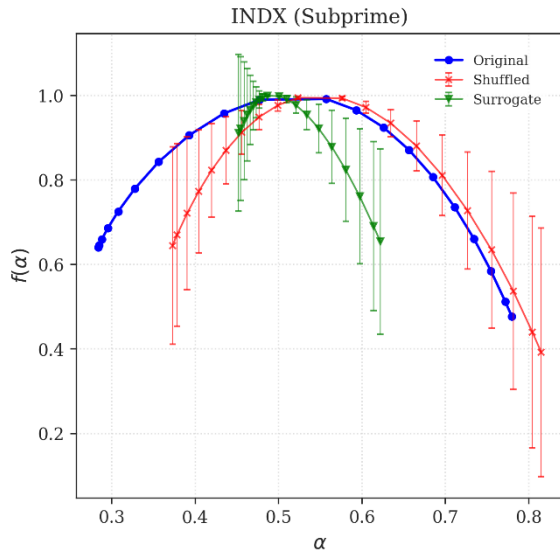




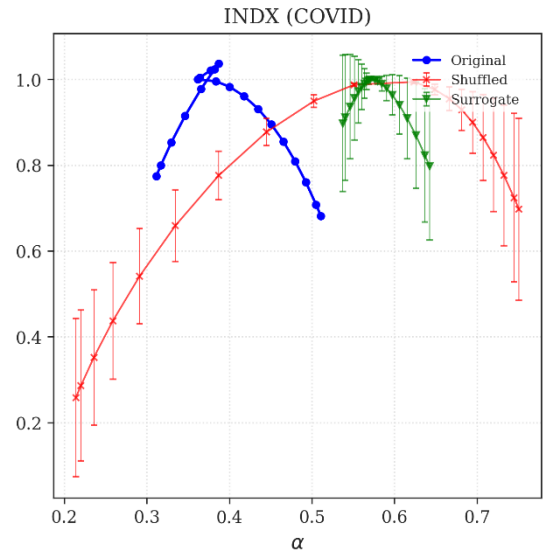
(c)



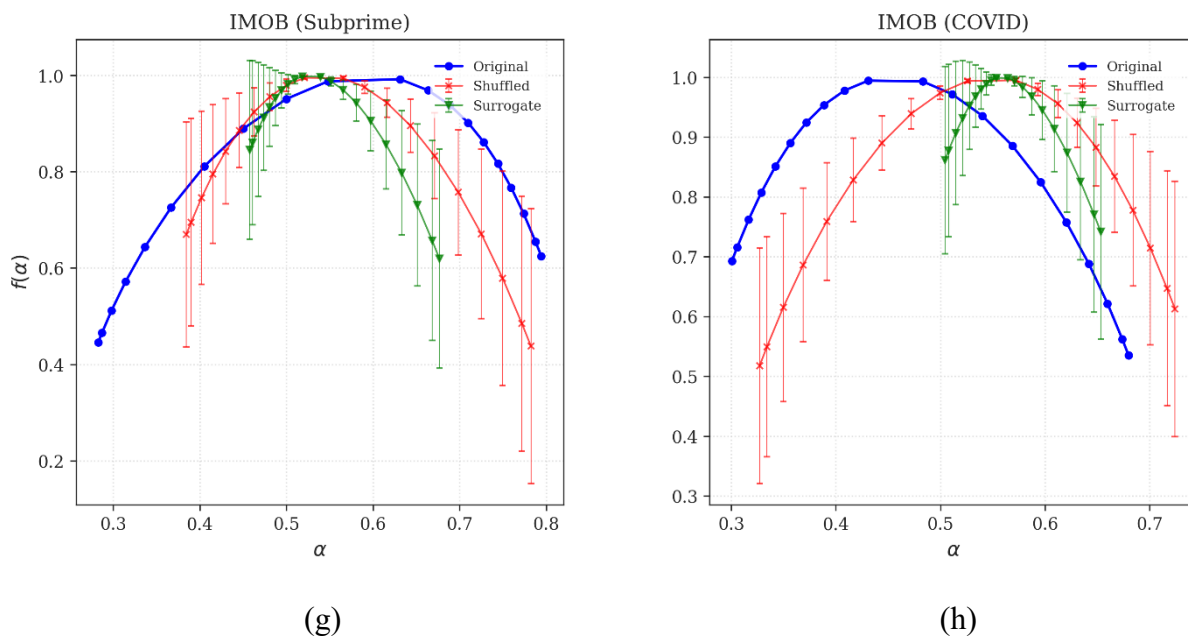
(d)



(e)



(f)



Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Nota: as barras de erro são o desvio-padrão para as 10.000 séries *shuffled* e *surrogated*.

Os resultados indicam que a multifractalidade foi superior durante a crise do *Subprime*, quando comparada com a da pandemia da COVID-19. Segundo Zunino et al. (2008), a largura do espectro multifractal está positivamente correlacionada com o estágio de desenvolvimento do mercado. Neste caso, países com mercados emergentes possuem  $\Delta\alpha$  mais elevado. O resultado de que a multifractalidade foi maior no período do *Subprime* contrasta com parte da literatura internacional, que aponta maior complexidade multifractal associada à COVID-19 em mercados como o norte-americano e o turco (Choi, 2021; Erer, Erer e Güngör, 2023). Uma possível explicação para essa divergência reside nas características estruturais do mercado acionário brasileiro. Em 2008, o país ainda apresentava menor maturidade financeira, ou seja, maior vulnerabilidade a choques externos e forte dependência a fluxos de capitais internacionais, fatores que amplificaram a heterogeneidade dos retornos.

Já durante a pandemia da COVID-19, a forma como os governos lidaram com a crise se diferenciou. Fatores como políticas internas e normas sanitárias distintas resultaram em conjunturas econômicas específicas. Além disso, a COVID-19 impactou de forma mais heterogênea os setores, com alguns segmentos até beneficiados pela nova conjuntura. No caso dos setores analisados, destaca-se o de energia (IEE), que apresentou comportamento relativamente mais resiliente durante a pandemia, uma vez que, a demanda residencial aumentou em função do isolamento social e do *home office*, contribuindo para atenuar a queda agregada do consumo e reduzir a sincronização das perdas, e, conseqüentemente, a intensidade multifractal. Além disso, conforme apontam Lee e Choi (2023), mercados emergentes como o

brasileiro são particularmente sensíveis aos fluxos de capital estrangeiro, sendo fortemente influenciados por políticas financeiras voltadas a esses investimentos, bem como por fatores externos, como tendências de investimento internacional e riscos geopolíticos.

No que se refere à assimetria, na Tabela 3, exceto para o INDX, todos setores apresentaram assimetria à esquerda durante o *Subprime*, sugerindo predominância das grandes flutuações. Destaca-se que o IMOB e o IFNC tiveram os maiores valores de assimetria, indicando que estes setores foram aqueles com maior influência da volatilidade extrema. Já na COVID-19, os padrões foram mais diversos; os setores IEE, IMOB e INDX apresentaram assimetria à direita, indicando maior influência das pequenas flutuações nesses setores. Já o IFNC apresentou alta assimetria à esquerda durante a pandemia, indicando alta volatilidade causada no setor pela instabilidade da crise. Esses resultados ressaltam ainda que a crise do *Subprime* apresentou maior predominância de grandes flutuações, ou seja, alta volatilidade, em relação à pandemia da COVID-19.

Tabela 3 – Tamanho do espectro multifractal  $\Delta\alpha$ , grau de multifractalidade  $\Delta h$ , parâmetro de assimetria  $\theta$  dos retornos para as duas crises

Setor	Período		$\Delta\alpha$	$\Delta h$	$\theta$	$\alpha_{min}$	$\alpha_{max}$	$\alpha_0$
IEE	Subprime	Original	0,4580	0,3234	0,3097	0,0841	0,5421	0,3840
		Shuffled	0,5191	0,3107	0,0745	0,2982	0,8174	0,5751
			(0,1779)	(0,1137)	(0,3092)	(0,1301)	(0,1249)	(0,0656)
	Surrogated	Original	0,2526	0,1293	-0,2966	0,3017	0,5543	0,3942
		Shuffled	0,2962	0,1898	-0,0876	0,3685	0,6647	0,5036
			(0,1100)	(0,0659)	(0,3640)	(0,0566)	(0,0860)	(0,0254)
	COVID	Original	0,2962	0,1898	-0,0876	0,3685	0,6647	0,5036
		Shuffled	0,4385	0,2544	0,2048	0,2990	0,7376	0,5600
			(0,1360)	(0,0854)	(0,2780)	(0,1042)	(0,0935)	(0,0546)
Surrogated	Original	0,1353	0,0418	-0,1378	0,5268	0,6621	0,5838	
	Shuffled	0,1353	0,0418	-0,1378	0,5268	0,6621	0,5838	
		(0,0762)	(0,0655)	(0,5107)	(0,0424)	(0,0648)	(0,0275)	
IMOB	Subprime	Original	0,5023	0,3234	0,1957	0,2863	0,7885	0,5865
		Shuffled	0,4095	0,2237	-0,2063	0,3805	0,7899	0,5445
			(0,1634)	(0,1030)	(0,3484)	(0,1132)	(0,1254)	(0,0656)
	Surrogated	Original	0,2324	0,1119	-0,3181	0,4437	0,6761	0,5251
		Shuffled	0,2324	0,1119	-0,3181	0,4437	0,6761	0,5251
			(0,1133)	(0,0750)	(0,4293)	(0,0581)	(0,0940)	(0,0305)
	COVID	Original	0,3795	0,2250	-0,1751	0,3005	0,6800	0,4571
		Shuffled	0,3991	0,2234	0,1252	0,3265	0,7256	0,5490
			(0,1356)	(0,0841)	(0,3022)	(0,1028)	(0,0941)	(0,0541)
Surrogated	Original	0,1691	0,0697	-0,2088	0,4914	0,6605	0,5589	
	Shuffled	0,1691	0,0697	-0,2088	0,4914	0,6605	0,5589	
		(0,0884)	(0,0670)	(0,4710)	(0,0470)	(0,0714)	(0,0286)	
IFNC	Subprime	Original	0,6833	0,4178	0,1349	0,0404	0,7237	0,4281
		Shuffled	0,5227	0,2913	-0,2211	0,3511	0,8738	0,5557
			(0,1850)	(0,1150)	(0,3077)	(0,1212)	(0,1435)	(0,0649)
	Surrogated	Original	0,3456	0,1874	-0,1898	0,2411	0,5867	0,3819
		Shuffled	0,3456	0,1874	-0,1898	0,2411	0,5867	0,3819
			(0,1121)	(0,0623)	(0,2710)	(0,0573)	(0,0902)	(0,0234)
	COVID	Original	0,1578	0,0794	0,8745	0,3520	0,5098	0,4999
		Shuffled	0,3988	0,2278	0,0897	0,3340	0,7327	0,5505
			(0,1332)	(0,0824)	(0,2975)	(0,1039)	(0,0907)	(0,0542)
Surrogated	Original	0,1086	-0,0141	-0,2055	0,5549	0,6635	0,5963	
	Shuffled	0,1086	-0,0141	-0,2055	0,5549	0,6635	0,5963	
		(0,0634)	(0,0691)	(0,5231)	(0,0466)	(0,0538)	(0,0306)	
INDX	Subprime	Original	0,4959	0,3193	-0,0586	0,2839	0,7798	0,5173
		Shuffled	0,4471	0,2493	-0,1980	0,3692	0,8162	0,5500
			(0,1703)	(0,1071)	(0,3350)	(0,1166)	(0,1297)	(0,0651)
	Surrogated	Original	0,1932	0,0828	-0,4099	0,4344	0,6276	0,4938
		Shuffled	0,1932	0,0828	-0,4099	0,4344	0,6276	0,4938
			(0,1036)	(0,0729)	(0,4428)	(0,0530)	(0,0874)	(0,0297)
	COVID	Original	0,1994	0,0907	-0,3859	0,3115	0,5109	0,3727
		Shuffled	0,5401	0,3280	0,4085	0,2139	0,7541	0,5876
			(0,1404)	(0,0942)	(0,2289)	(0,1029)	(0,0956)	(0,0547)
Surrogated	Original	0,1380	0,0442	-0,1824	0,5177	0,6558	0,5735	
	Shuffled	0,1380	0,0442	-0,1824	0,5177	0,6558	0,5735	
		(0,0771)	(0,0653)	(0,5195)	(0,0444)	(0,0641)	(0,0268)	

Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Nota: o desvio padrão é mostrado entre parênteses.

As Tabelas 4 e 5 apresentam o ranking setorial em termos de multifractalidade ( $\Delta\alpha$  e  $\Delta h$ ) e de eficiência (MDM) durante as crises do *Subprime* e da pandemia da COVID-19. Pelo critério do grau da multifractalidade, o IFNC foi o mais multifractal no *Subprime*. Na COVID-19, os valores de  $\Delta\alpha$  e  $\Delta h$  foram menores em todos os setores e o setor mais multifractal foi o IMOB, sinalizando uma dinâmica menos complexa e confirmando que o *Subprime* gerou uma multifractalidade mais intensa.

Tabela 4 – Ranking setorial para  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta h$  e MDM durante a crise do *Subprime*

Métrica	$\Delta\alpha$		$\Delta h$		MDM		
	Rank	Setor	Valor	Setor	Valor	Setor	Valor
1		INDX	0,4959	INDX	0,3193	INDX	0,1596
2		IMOB	0,5023	IMOB	0,3234	IMOB	0,1617
3		IEE	0,5912	IEE	0,3982	IEE	0,1742
4		IFNC	0,6833	IFNC	0,4178	IFNC	0,2089

Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Tabela 5 – Ranking setorial para  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta h$  e MDM durante a crise da pandemia da COVID-19

Métrica	$\Delta\alpha$		$\Delta h$		MDM		
	Rank	Setor	Valor	Setor	Valor	Setor	Valor
1		IEE	0,2962	INDX	0,1730	IFNC	0,0433
2		INDX	0,3113	IEE	0,1898	IEE	0,0949
3		IFNC	0,3300	IFNC	0,1938	INDX	0,0981
4		IMOB	0,3795	IMOB	0,2250	IMOB	0,1125

Fonte: elaboração própria a partir dos dados da pesquisa.

Em relação ao MDM, no *Subprime* o setor IFNC foi o mais ineficiente, seguido por IEE, IMOB e, por último, INDX, sendo este o mais eficiente. Já na pandemia, o IMOB foi o mais ineficiente (MDM = 0,1125), o que pode estar relacionado com a paralisação provocada pelos *lockdowns* e com a incerteza quanto à recuperação. Por fim, a redução da multifractalidade e o ganho de eficiência durante a COVID-19 pode sugerir que os agentes econômicos incorporaram lições institucionais após 2008. Reguladores e investidores podem ter desenvolvido mecanismos de resposta a crises, contribuindo para mitigar parte das ineficiências observadas.

Além disso, a heterogeneidade setorial encontrada reforça a importância de se analisar o mercado de forma desagregada. A origem do choque determina a heterogeneidade dos impactos e, por consequência, a eficiência setorial. Na crise do *Subprime*, de natureza financeira, o setor financeiro foi o mais diretamente afetado pela contração da liquidez internacional e pelo aumento da aversão ao risco, o que se refletiu em maior desorganização estrutural e níveis mais elevados de multifractalidade. Já o setor imobiliário, embora associado ao epicentro da crise nos Estados Unidos, apresentou no caso brasileiro impacto mais moderado, em parte devido às especificidades institucionais do mercado de crédito imobiliário doméstico e à menor integração desse segmento ao sistema financeiro internacional naquele período. Em contraste, setores ligados à economia real, como energia e indústria, foram impactados de forma mais indireta, via retração da atividade econômica e queda da demanda agregada. Já na pandemia de COVID-19, os choques tiveram origem exógena sobre a oferta e

a demanda, afetando de maneira mais ampla e heterogênea os setores, em especial aqueles dependentes de cadeias globais de valor, o que explica padrões distintos de eficiência e complexidade multifractal em relação ao episódio do Subprime. Ou seja, setores mais sensíveis ao crédito, como o IFNC e o IMOB, tendem a apresentar maior vulnerabilidade a choques financeiros por consequência. Em contraste, setores ligados à consumo essencial, como energia e indústria, mostraram padrões relativamente mais estáveis, sugerindo maior resiliência estrutural da economia real brasileira frente a crises sistêmicas.

Esses resultados dialogam com a HMA, reforçando que a eficiência não é estática, mas um processo dinâmico de adaptação dos mercados. Enquanto a HMF enfatiza a complexidade estrutural e as dependências de longo prazo, a HMA complementa essa visão ao destacar a capacidade de adaptação dos agentes econômicos diante de choques. Em síntese, para o contexto brasileiro, isso implica que choques afetam de forma distinta os setores, alterando temporariamente os mecanismos de formação de preços e a previsibilidade dos retornos.

#### 4.3 CAUSAS DA MULTIFRACTALIDADE

Retornando às Figuras 7 e 8, elas mostram o expoente de Hurst generalizado  $h(q)$  e o espectro multifractal  $f(\alpha)$  para as séries originais, *shuffled* e *surrogated* de cada setor. Para as séries *shuffled* e *surrogated* (linhas vermelhas e verdes, respectivamente), os valores reportados correspondem às médias aritméticas de 10.000 realizações, com as barras de erro representando o desvio-padrão. Observa-se que  $h(q)$  depende de  $q$  em ambas as séries modificadas, indicando que correlações de longo prazo e distribuições de cauda pesada contribuem para a multifractalidade dos retornos setoriais.

Além disso, os resultados apresentados na Tabela 3 evidenciam distinções relevantes entre os índices analisados e entre os períodos considerados. Em todos os setores e períodos, as séries *surrogated* apresentam menores graus de multifractalidade quando comparadas às séries originais e *shuffled*. Isso confirma que as distribuições de cauda pesada exercem papel central na geração de multifractalidade nos retornos. Por outro lado, nota-se que em alguns casos as séries *shuffled* apresentaram valores de  $\Delta\alpha$  superiores aos das séries originais, como o IEE e o INDX durante a COVID19. Esse resultado pode estar refletindo efeitos espúrios associados ao tamanho finito das séries, como discutido por Wan, Wu e Pan (2011).

Outro ponto é que o IFNC exhibe a maior queda na multifractalidade nas séries *surrogated* em ambos os períodos. Consequentemente, o IFNC é consistentemente o menos

eficiente, refletindo o impacto profundo de eventos extremos em sua dinâmica. Finalmente, os resultados indicam que a multifractalidade é predominantemente impulsionada por distribuições de cauda pesada, com eventos extremos (*Subprime* e COVID) como catalisadores. Esse achado está em linha com Choi (2021), ao estudar a multifractalidade do mercado dos EUA, comparando as crises do *Subprime* e da pandemia da COVID-19.

## 5 CONCLUSÃO

Este estudo teve como objetivo identificar a (in)eficiência dos setores do mercado acionário brasileiro durante períodos de crise, avaliando as propriedades multifractais dos retornos setoriais ao longo das crises do *Subprime* e da COVID-19. A eficiência de mercado, entendida como a capacidade de refletir rapidamente novas informações nos preços dos ativos, constitui um indicador essencial para investidores e formuladores de políticas, especialmente em momentos de instabilidade financeira. Assim, a aplicação da metodologia MF-DFA permitiu avaliar o grau de complexidade e heterogeneidade dos setores e compreender como essas características se modificam em contextos de crise.

Os resultados empíricos apontam para três conclusões principais com implicações teóricas e práticas relevantes. Primeiro, as séries de retornos setoriais apresentaram comportamento multifractal em ambos os períodos analisados, indicando que os mercados brasileiros não seguem um processo puramente aleatório, além da predominância de anti-persistência.

Em segundo, a comparação setorial revela que o setor financeiro (IFNC) apresentou a menor eficiência durante o *Subprime*, refletindo sua centralidade na propagação da crise e a elevada exposição a choques de crédito e liquidez. Já durante a pandemia da COVID-19, o setor imobiliário (IMOB) mostrou-se o mais ineficiente, possivelmente devido à retração da atividade econômica e à sensibilidade do setor às restrições impostas pelo isolamento social. Em contraste, o setor de energia (IEE) demonstrou maior estabilidade relativa durante a COVID-19, beneficiando-se da manutenção da demanda residencial e da resiliência do consumo essencial, o que reduziu a intensidade multifractal. Esses resultados estão em linha com a literatura internacional, que identifica diferenças estruturais na resposta setorial às crises conforme suas bases produtivas e regulatórias.

Terceiro, a decomposição da multifractalidade, via comparação com séries embaralhadas e surrogadas, evidencia que a principal fonte de multifractalidade decorre das distribuições de cauda pesada dos retornos, e não apenas das correlações de longo prazo, com maior peso das distribuições na complexidade multifractal.

Outro achado importante foi a constatação de que a multifractalidade foi significativamente superior durante a crise do *Subprime* em comparação com a pandemia da COVID-19. Esta diferença pode ser atribuída às características estruturais do mercado acionário brasileiro em cada período. Em 2008, o país apresentava menor maturidade financeira, maior

vulnerabilidade a choques externos e forte dependência de fluxos de capitais internacionais, fatores que amplificaram a heterogeneidade dos retornos. Já durante a pandemia, a implementação de mecanismos de resposta a crises, desenvolvidos após as lições do *Subprime*, parece ter contribuído para uma resposta mais controlada e uniforme dos mercados.

Estes achados dialogam com a Hipótese dos Mercados Adaptativos (HMA), reforçando que a eficiência não é um estado estático, mas sim um processo dinâmico de adaptação dos mercados às condições econômicas e institucionais. A redução da multifractalidade e o ganho de eficiência observados durante a COVID-19 sugerem que agentes econômicos, reguladores e investidores incorporaram lições institucionais após a crise de 2008, desenvolvendo mecanismos mais eficazes para lidar com choques sistêmicos.

Como contribuição à literatura, este estudo oferece evidências empíricas sobre a dinâmica multifractal em mercados emergentes durante crises de diferentes naturezas. Os resultados também destacam a importância de considerar as particularidades setoriais na análise de eficiência de mercado, uma vez que diferentes setores respondem de forma distinta a choques sistêmicos.

Em termos práticos, os resultados oferecem subsídios tanto para investidores quanto para formuladores de política econômica. Para os primeiros, a identificação dos setores menos eficientes durante as crises pode orientar estratégias de diversificação e gestão de risco em contextos de instabilidade. Para os segundos, compreender as dinâmicas multifractais setoriais pode auxiliar no desenho de medidas e políticas públicas mais eficazes, voltadas à mitigação de choques sistêmicos e estabilidade do sistema financeiro.

Apesar das contribuições deste estudo, algumas limitações devem ser reconhecidas. A análise concentrou-se, devido à disponibilidade de dados, em um conjunto restrito de quatro índices setoriais e em uma janela temporal relativamente curta. Outro ponto é a ausência de uma análise contrafactual com janelas pré-crise, o que poderia ser explorado em trabalhos futuros. Pesquisas futuras podem ampliar o escopo temporal e setorial da análise, incorporar dados de alta frequência ou explorar técnicas multifractais alternativas, contribuindo para uma compreensão mais abrangente da dinâmica multifractal em contextos de crise.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, N.; NOSS, J. The fractal market hypothesis and its implications for the stability of financial markets. **Bank of England Financial Stability Paper**, n. 23, 2013.
- BAKER, S. R. et al. The unprecedented stock market impact of COVID-19. **NBER Working Paper**, n. 26945, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3386/w26945>
- BARBERIS, N.; THALER, R. H. A survey of behavioral finance. In: CONSTANTINIDES, G. M.; HARRIS, M.; STULZ, R. (ed.). **Handbook of the Economics of Finance**. Amsterdam: Elsevier B.V., 2003. v. 1, p. 1053–1128. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1574-0102\(03\)01027-6](https://doi.org/10.1016/S1574-0102(03)01027-6)
- BARIVIERA, A. F. One model is not enough: heterogeneity in cryptocurrencies' multifractal profiles. **Finance Research Letters**, v. 39, p. 101649, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101649>
- BLACK, F. Noise. **Journal of Finance**, v. 41, n. 3, p. 529–544, 1986. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1986.tb04513.x>
- BOCK, J.; GEISSEL, S. Evolution of stock market efficiency in Europe: evidence from measuring periods of inefficiency. **Finance Research Letters**, v. 62, p. 105129, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2024.105129>
- B3 – BRASIL, BOLSA, BALCÃO. Índices de segmentos e setoriais. Disponível em: <https://www.b3.com.br>. Acesso em: 16 maio 2025.
- BORGES, M. R. Efficient market hypothesis in European stock markets. **The European Journal of Finance**, v. 16, n. 7, p. 711-726, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1080/1351847X.2010.495477>
- CAJUEIRO, D. O.; GOGAS, P.; TABAK, B. M. Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. **International Review of Financial Analysis**, v. 18, p. 50–57, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2008.11.004>
- CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. The Hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 336, n. 3-4, p. 521-537, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.031>
- CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. Ranking efficiency for emerging markets. **Chaos, Solitons & Fractals**, Amsterdã, v. 22, n. 2, p. 349–352, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.014>
- CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. **The econometrics of financial markets**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996. ISBN: 978-0-691-04301-2
- CHARFEDDINE, L.; KHEDIRI, K. B. Time varying market efficiency of the GCC stock markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 444, p. 487–504, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.09.063>

CHOI, S.-Y. Analysis of stock market efficiency during crisis periods in the US stock market: differences between the global financial crisis and COVID-19 pandemic. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 574, p. 125988, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125988>

CHOPRA, N.; LAKONISHOK, J.; RITTER, J. R. Measuring abnormal performance: do stocks overreact? **Journal of Financial Economics**, v. 31, n. 2, p. 235–268, 1992. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(92\)90005-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(92)90005-1)

DE ARAÚJO, F. H. A.; FERNANDES, L. H. S.; TABAK, B. M. Effects of COVID-19 on Chinese sectoral indices: a multifractal analysis. **Fractals**, v. 29, n. 7, p. 2150198, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218348X2150198X>

DE BONDT, W. F. M.; THALER, R. H. Does the stock market overreact? **Journal of Finance**, v. 40, n. 3, p. 793–807, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1985.tb05004.x>

DIAS, R.; TEIXEIRA, N.; MACHOVA, V.; PARDAL, P.; HORAK, J.; VOCHOZKA, M. Random walks and market efficiency tests: evidence on US, Chinese and European capital markets within the context of the global Covid-19 pandemic. **Oeconomia Copernicana**, Toruń, v. 11, n. 4, p. 585-608, 2020. DOI: <https://doi.org/10.24136/oc.2020.024>

DOURADO, G. A.; TABAK, B. M. Teste da hipótese de mercados adaptativos para o Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 12, n. 4, p. 517–540, 2014. DOI: <https://doi.org/10.12660/rbfin.v12n4.2014.32203>

ERER, D.; ERER, E.; GÜNGÖR, S. The aggregate and sectoral time-varying market efficiency during crisis periods in Turkey: a comparative analysis with COVID-19 outbreak and the global financial crisis. **Financial Innovation**, v. 9, p. 80, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40854-023-00484-4>

FAMA, E. F. Random walks in stock market prices. **Financial Analysts Journal**, v. 21, p. 55–59, 1965. DOI: <https://doi.org/10.2469/faj.v21.n5.55>

FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. DOI: <https://doi.org/10.2307/2325486>

FAMA, E. F. Efficient capital markets: II. **Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, 1991. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x>

FAMA, E. F. Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. **Journal of Financial Economics**, v. 49, n. 3, p. 283-306, 1998. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(98\)00026-9](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(98)00026-9)

FERNANDES, L. H. et al. Multifractal behavior in the dynamics of Brazilian inflation indices. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdã, v. 550, p. 124158, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124158>

GORJÃO, L. R. et al. MFDFA: Efficient multifractal detrended fluctuation analysis in python. **Computer Physics Communications**, v. 273, p. 108254, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108254>

HAN, C.; WANG, Y.; XU, Y. Efficiency and multifractality analysis of the Chinese stock market: evidence from stock indices before and after the 2015 stock market crash. **Sustainability**, v. 11, n. 6, p. 1699, 2019. DOI: <https://doi.org/10.3390/su11061699>

HENRY, T. Long memory in stock returns: some international evidence. **Journal of Applied Economics**, v. 12, n. 10, p. 725-729, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1080/09603100010025733>

HOU, K.; XUE, C.; ZHANG, L. Replicating anomalies. **The Review of Financial Studies**, v. 33, p. 2019-2133, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1093/rfs/hhy131>

HUYNH, T. L. D.; FOGLIA, M.; DOUKAS, J. A. COVID-19 and tail-event driven network risk in the Eurozone. **Finance Research Letters**, Amsterdã, v. 44, p. 102070, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102070>

IVANOV, P. C. et al. Multifractality in human heartbeat dynamics. **Nature**, Londres, v. 399, n. 6735, p. 461–465, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1038/20924>

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to buying winners and selling losers: implications for stock market efficiency. **The Journal of Finance**, v. 48, p. 65-91, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x>

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: an analysis of decision under risk. **Econometrica**, v. 47, p. 263–292, 1979. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511609220.014>

KANTELHARDT, J. W. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 1, p. 87–114, 2002. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3)

KIM, J. H.; LIM, K.-P.; SHAMSUDDIN, A. Stock return predictability and the adaptive markets hypothesis: evidence from century long U.S. data. Finance and Corporate Governance Conference 2010 Paper, 2010.

LEE, M.-J.; CHOI, S.-Y. Comparing market efficiency in developed, emerging, and frontier equity markets: a multifractal detrended fluctuation analysis. **Fractal and Fractional**, Basel, v. 7, p. 478, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7060478>

LINKENKAER-HANSEN, K. et al. Long-range temporal correlations and scaling behavior in human brain oscillations. **Journal of Neuroscience**, Washington, v. 21, n. 4, p. 1370–1377, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.21-04-01370.2001>

LO, A. W. Long-term memory in stock market prices. **Econometrica**, v. 59, p. 1279-1313, 1991. DOI: <https://doi.org/10.2307/2938368>

LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. **The Review of Financial Studies**, v. 1, n. 1, p. 41–66, 1988. DOI: <https://doi.org/10.1093/rfs/1.1.41>

LO, A. W. The adaptive markets hypothesis: market efficiency from an evolutionary perspective. **Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004. DOI: <https://doi.org/10.3905/jpm.2004.44>

LO, A. W. Reconciling efficient markets with behavioral finance: the adaptive markets hypothesis. **Journal of Investment Consulting**, v. 7, p. 21–44, 2005.

LO, A. W. Efficient markets hypothesis. In: BLUME, L. E.; DURLAUF, S. N. (eds.). **The New Palgrave: A Dictionary of Economics**. 2. ed. New York: Palgrave Macmillan, 2007. ISBN: 978-0-230-22620-3

LOVEJOY, S.; SCHERTZER, D. Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain. **Water Resources Research**, Washington, v. 21, n. 8, p. 1233–1250, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1029/WR021i008p01233>

MACIEL, L. S. Brazilian stock-market efficiency before and after COVID-19: the roles of fractality and predictability. **Global Finance Journal**, v. 58, p. 100887, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gfj.2022.100887>

MACIEL, L. S.; ADACHI, E. N. Efficiency and fractality in the Brazilian stock market: measuring the impacts of COVID-19 on a sector-level analysis. In: SEMINÁRIO DE ADMINISTRAÇÃO SEMEAD, 25., [local não informado], 8-11 nov. Anais... ISSN 2177-3866.

MALKIEL, B. G. The efficient market hypothesis and its critics. **The Journal of Economic Perspectives**, v. 17, n. 1, p. 59–82, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1257/089533003321164958>

MALKIEL, B. G. Reflections on the efficient market hypothesis: 30 years later. **The Financial Review**, v. 40, n. 1, p. 1–9, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6288.2005.00113.x>

MALKIEL, B. G. The efficient-market hypothesis and the financial crisis. **The Journal of Economic Perspectives**, [s.l.], v. 25, n. 4, p. 159-172, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1257/jep.25.4.159>

MANDELBROT, B.; FISHER, A.; CALVET, L. A multifractal model of asset returns. **Cowles Foundation Discussion Paper**, New Haven, n. 1164, 1997.

MCLEAN, R. D.; PONTIFF, J. Does academic research destroy stock return predictability? **The Journal of Finance**, v. 71, p. 5-32, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1111/jofi.12365>

MENSI, W. et al. Impact of COVID-19 outbreak on asymmetric multifractality of gold and oil prices. **Resources Policy**, Amsterdã, v. 69, p. 101829, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2020.101829>

- MILOŠ, L. R. et al. Multifractal detrended fluctuation analysis (MF-DFA) of stock market indexes: empirical evidence from seven central and eastern European markets. **Sustainability**, v. 12, n. 2, p. 535, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3390/su12020535>
- MISHKIN, F. S. Over the cliff: from the *Subprime* to the global financial crisis. **Journal of Economic Perspectives**, v. 25, n. 1, p. 49-70, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1257/jep.25.1.49>
- MONTE, E. Z. A long-memory analysis for the CBOE Brazil ETF volatility index. **International Journal of Emerging Markets**, v. 18, n. 11, p. 5155–5171, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1108/IJOEM-03-2021-0352>
- MORAES, A. K.; CERETTA, P. S.; JÚNIOR, L. G. C. Análise multifractal do IBOVESPA: dinâmicas de preço, volume negociado e eficiência de mercado. **Revista Evidenciação Contábil & Finanças**, João Pessoa, v. 12, n. 1, p. 128-149, jan./abr. 2024. DOI: <https://doi.org/10.22478/ufpb.2318-1001.2024v12n1.70209>
- MURAKAMI, H. **Kafka à beira-mar**. Tradução de Leiko Gotoda. Rio de Janeiro: Alfaguara, 2008. p. 8.
- NAEEM, M. A. et al. Asymmetric efficiency of cryptocurrencies during COVID-19. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdã, v. 565, p. 125562, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125562>
- ODEAN, T. Are investors reluctant to realize their losses? **The Journal of Finance**, v. 53, n. 5, p. 1775–1798, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1998.tb02774.x>
- OZKAN, O. Impact of COVID-19 on stock market efficiency: evidence from developed countries. **Research in International Business and Finance**, v. 58, p. 101445, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2021.101445>
- PETERS, E. **Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and analysis**. New York: Wiley, 1994. ISBN: 978-0-471-58524-4
- RITTER, J. R. The long-run performance of initial public offerings. **The Journal of Finance**, v. 46, p. 3-27, 1991. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb03748.x>
- SANTOS, M. A. et al. Adaptive markets hypothesis and economic-institutional environment: a cross-country analysis. **Revista de Gestão**, v. 31, n. 2, p. 215–236, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1108/REGE-07-2023-0125>
- SCHWERT, G. W. Anomalies and market efficiency. In: CONSTANTINIDES, G. M.; HARRIS, M.; STULZ, R. (Eds.). **Handbook of the Economics of Finance**. Amsterdam, v. 1, p. 937–972, 2003.
- SHEFRIN, H.; STATMAN, M. The disposition to sell winners too early and ride losers too long: theory and evidence. **The Journal of Finance**, Nova Iorque, v. 40, n. 3, p. 777–790, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1985.tb05002.x>

SHILLER, R. J. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? **American Economic Review**, Nashville, v. 71, n. 3, p. 421–436, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1257/000282801323702729>

SHLEIFER, A. **Inefficient markets: a introduction to behavioral finance**. Oxford: Oxford University Press, 2000. ISBN: 978-0-19-829227-2

TELESCA, L.; LOVALLO, M. Analysis of seismic sequences by using the multifractal detrended fluctuation analysis. **Tectonophysics**, Amsterdã, v. 494, n. 3–4, p. 155–162, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2009.04.012>

TESSIER, Y. et al. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. **Journal of Geophysical Research: Atmospheres**, Washington, v. 101, n. D21, p. 26427–26440, 1996. DOI: <https://doi.org/10.1029/95JD02218>

TIWARI, A. K.; ALBULESCU, C. T.; YOON, S.-M. A multifractal detrended fluctuation analysis of financial market efficiency: comparison using Dow Jones sector ETF indices. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdã, v. 483, p. 182–192, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.007>

TIWARI, A. K.; AYE, G. C.; GUPTA, R. Stock market efficiency analysis using long spans of data: a multifractal detrended fluctuation approach. **Finance Research Letters**, Amsterdã, v. 28, p. 398–411, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.06.003>

TORRES, R.; BONOMO, M.; FERNANDES, C. A aleatoriedade do passeio na Bovespa: testando a eficiência do mercado acionário brasileiro. **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, v. 56, p. 199–247, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0034-71402002000200002>

TRAN, V.; LEIRVIK, T. A simple but powerful measure of market efficiency. **Finance Research Letters**, Amsterdã, v. 29, p. 1–6, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.02.026>

URQUHART, A.; MCGROARTY, F. Are stock markets really efficient? Evidence of the adaptive market hypothesis. **International Review of Financial Analysis**, Amsterdã, v. 47, p. 39–49, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2016.07.006>

URRUTIA, J. L. Tests of random walk and market efficiency for Latin American emerging equity markets. **Journal of Financial Research**, Richmond, v. 18, p. 299–309, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.1995.tb00165.x>

WANG, Y.; WU, C.; PAN, Z. Multifractal detrended moving average analysis on the US Dollar exchange rates. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 390, n. 20, p. 3512–3523, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.05.023>

WOO, K.-Y. et al. Review on efficiency and anomalies in stock markets. **Economies**, v. 8, p. 1–51, 2020. DOI: <https://doi.org/10.3390/economies8040087>

ZARGAR, F. N.; KUMAR, D. Heterogeneous market hypothesis approach for modeling unbiased extreme value volatility estimator in presence of leverage effect: an individual stock

level study with economic significance analysis. **The Quarterly Review of Economics and Finance**, Amsterdã, v. 77, p. 271–285, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.qref.2020.04.009>

ZHANG, X. et al. A modified multifractal detrended fluctuation analysis (MFDFA) approach for multifractal analysis of precipitation in Dongting Lake Basin, China. **Water**, v. 11, n. 5, p. 891, 2019. DOI: <https://doi.org/10.3390/w11050891>

ZHOU, W. X. The components of empirical multifractality in financial returns. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 88, n. 2, p. 28004, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/88/28004>

ZUNINO, L. et al. A multifractal approach for stock market inefficiency. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 387, n. 26, p. 6558–6566, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.08.028>