UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS AUGUSTO RIBEIRO JÚNIOR

O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

Vitória-ES

2025

CARLOS AUGUSTO RIBEIRO JÚNIOR

O ESTUDO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

Vitória-ES
2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

RIBEIRO JÚNIOR, CARLOS AUGUSTO, 1986-
R484e O Estudo da Análise Combinatória como Ferramenta Pedagógica na Resolução de Problemas do ENEM / CARLOS AUGUSTO RIBEIRO JÚNIOR. - 2025.
90 f. : il.

Orientador: MOACIR ROSADO FILHO.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

I. ROSADO FILHO, MOACIR. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"O Estudo da Análise Combinatória como Ferramenta Pedagógica na Resolução de Problemas do ENEM"

Carlos Augusto Ribeiro Junior

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23/10/2025 por:

____

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Orientador – UFES

____

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Examinador interno – UFES

____

Prof. Dr. Mateus Mendes Magela
Examinador externo – IFES

Campus Universitário Alaor de Queiroz Araújo
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória – ES │ 29075-910 │ (27) 4009-2473/2474
│ https://matematica.redenacional.ufes.br/ – profmat.ufes@gmail.com – pos.matematicaredenacional@ufes.br

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 24/10/2025 às 05:54:50

folha_de_assinaturas_Carlos_Augusto_Ribeiro_Junior

Data e Hora de Criação: 15/10/2025 às 12:32:06

Documentos que originaram esse envelope:

- folha_de_assinaturas_Carlos_Augusto_Ribeiro_Junior.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: d0c7e7b13014bc46c6f0a9e580a16e88a6348ba6d52eff240ce3920949593dc1
[SHA512]: 98db180682859772b9c10750e8982ca488a480fab87fa9285f4f87f312323efd52991e22e009fea3739233d65742e864675179c448bbe2bf54806aacae71808c

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)
Data/Hora: 24/10/2025 - 05:54:50, IP: 187.36.172.141
[SHA256]: 2cd6a98a21bcb18a9b262266e8eea51702cdd7600ca6af270d434c13a2ae94b9
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Mateus Mendes Magela (mateus.magela@ifes.edu.br)
Data/Hora: 23/10/2025 - 19:48:30, IP: 216.238.109.50, Geolocalização: [-20.315483, -40.293933]
[SHA256]: 4a09a4f02bb358668d6694dab47d9f64d671f9137b6529cd8380e43dd53b7648
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Moacir Rosado Filho (moacir.rosado@ufes.br)
Data/Hora: 23/10/2025 - 19:03:21, IP: 179.95.223.202, Geolocalização: [-20.295094, -40.296514]
[SHA256]: e5bc858bf7e189991f3cc3b624bcdb8b2e7c8476b0ebae5630c8b82bbd95d0fb
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

24/10/2025 05:54:50 - Envelope finalizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141
24/10/2025 05:54:50 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141
24/10/2025 05:54:40 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141
23/10/2025 19:48:30 - Assinatura realizada por mateus.magela@ifes.edu.br, IP 216.238.109.50
23/10/2025 19:48:18 - Envelope visualizado por mateus.magela@ifes.edu.br, IP 216.238.109.50
23/10/2025 19:03:21 - Assinatura realizada por moacir.rosado@ufes.br, IP 179.95.223.202
23/10/2025 19:02:55 - Envelope visualizado por moacir.rosado@ufes.br, IP 179.95.223.202
23/10/2025 07:00:26 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
23/10/2025 07:00:25 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
15/10/2025 12:32:07 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.104

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar saúde e sabedoria para que eu pudesse superar todos os obstáculos e chegar até aqui. Apesar de todas as adversidades, Deus me manteve forte, me capacitou e me sustentou até esse momento.

Aos meus pais: Carlos Augusto Ribeiro e Estela Lira Ribeiro, por sempre colocarem como prioridade em suas vidas a educação dos seus filhos e por me proporcionarem as condições necessárias para que eu chegasse até aqui. Obrigado por todo apoio, por todo carinho e pelo suporte em todos os momentos de dificuldade, é um orgulho para mim proporcionar a vocês esse momento.

Aos meus irmãos: Renato Ribeiro e Luciano Ribeiro por me incentivarem e me fazerem acreditar que essa caminhada valeria a pena, vocês foram fundamentais nessa caminhada.

A minha filha, Violeta Valente Ribeiro, pois mesmo sem saber, foi uma inspiração para que eu buscasse a chegada desse momento, pois sei que a conclusão desse trabalho abrirá novos horizontes para que eu consiga proporcionar um futuro ainda mais promissor para ela e espero que ela se orgulhe dessa conquista no futuro.

Agradeço ao meu orientador, Moacir Rosado Filho, por todos os ensinamentos, pela paciência e por todas as aulas brilhantes.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, em especial aos professores Florêncio e Moacir, vocês me inspiraram através das aulas a ser um professor ainda melhor, tenho uma enorme admiração pelo trabalho de vocês.

Agradeço ao meu professor e ex-diretor, Alessandro Valadares, por todo incentivo, apoio e pela oportunidade que me deu, você é um dos grandes responsáveis para que eu escolhesse ser professor. Agradeço ao meu amigo e professor, Ramon Teodoro, pelo apoio e pelo incentivo, muito obrigado pela parceria e pela amizade.

Por último, agradeço a todos os colegas de turma do PROFMAT, em especial ao Fabrício Alves Macedo e Jacqueline Lopes, pela parceria e pelo apoio.

“Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte, não temerei mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me protegem.” (Salmos, 23:4)

RESUMO

A proposta deste trabalho é apresentar uma sequência didática voltada ao ensino da Análise Combinatória buscando orientar professores de matemática no desenvolvimento deste tema voltado, especificamente à resolução de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O objetivo é proporcionar uma alternativa que promova o engajamento dos alunos na realização das atividades voltada a valorização da criatividade, paciência, perseverança e o desenvolvimento de habilidades necessárias para que o aluno seja capaz de resolver tais problemas. O desenvolvimento dessa dissertação consiste em auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem e tornar o ensino da Análise Combinatória mais agradável e menos árduo. A dissertação divide-se em capítulos abordando sobre o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, a Base Nacional Comum Curricular – BNNC e ensino da Análise Combinatória. Apresenta-se, portanto de forma sucinta a definição dos principais métodos de contagem abordados no ENEM nos últimos anos. Por fim, realiza-se uma seleção de algumas questões de Análise Combinatória que apareceram nas provas do ENEM nos últimos anos. Para cada questão apresentada, propõe-se pelo menos uma solução, acompanhada de uma análise crítica.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Exame Nacional do Ensino Médio. Principais métodos de contagem. Sequência didática.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present a didactic sequence focused on the teaching of Combinatorial Analysis, aiming to guide mathematics teachers in developing this topic, specifically in relation to solving problems from the National High School Examination (ENEM). The objective is to provide an alternative that fosters student engagement in carrying out activities, emphasizing creativity, patience, perseverance, and the development of skills necessary for solving such problems. The development of this dissertation seeks to assist teachers and students in the teaching-learning process and to make the teaching of Combinatorial Analysis more pleasant and less arduous. The dissertation is divided into chapters that address the National High School Examination (ENEM), the National Common Curricular Base (BNCC), and the teaching of Combinatorial Analysis. It briefly presents the definition of the main counting methods covered in ENEM in recent years. Finally, a selection of some Combinatorial Analysis questions that have appeared on ENEM exams in recent years is carried out. For each question presented, at least one solution is proposed, accompanied by a critical analysis.

Keywords: Combinatorial Analysis. National High School Examination. Main counting methods. Didactic sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória tem um papel relevante no desenvolvimento do raciocínio lógico e do espírito de investigação.

Aquino (2013) destaca a importância da Análise Combinatória no ensino básico julgando-a como essencial na formação de indivíduos críticos e conscientes devido o fato de estar presente em situações do cotidiano que podem ser exploradas capacidades como observação, levantamento hipóteses, investigação e sistematização.

Colins e Colins (2020) destacam a relevância da introdução do pensamento combinatório desde as séries iniciais, através da resolução de problemas, pois desenvolve o processo da leitura (interpretação e compreensão do problema) e da escrita (registro do pensamento combinatório).

A presença da Combinatória pode ser observada desde as séries iniciais do ensino fundamental, por meio da contagem de objetos e da comparação da quantidade de objetos entre dois conjuntos. No 4º ano, a BNCC estabelece como um dos objetos de conhecimento o estudo de problemas de contagem. Já no 5º ano, propõe-se que os alunos sejam capazes de contabilizar o número de agrupamentos formados pela combinação dos elementos de dois conjuntos, A e B. Por fim, o ensino da Combinatória volta a estar presente no 8º ano, por meio do estudo do princípio multiplicativo. (Brasil, 2018, p.294)

Ferreira (2013), destaca que o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio não é algo simples, pois sua prática pedagógica deve priorizar o entendimento dos conceitos, procedimentos e o desenvolvimento de habilidades necessárias para resolver problemas combinatórios.

A importância da Análise Combinatória ao longo da vida acadêmica de um aluno do ensino básico faz com que, frequentemente, itens desse assunto apareçam em provas de alguns exames nacionais tais como as Olímpiadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e o ENEM. Ao longo do período de 2004 a 2024, 50 itens deste assunto estiveram presente no ENEM. Já no período de 2009 a 2024, no qual foi instituído o novo ENEM, este conteúdo esteve presente em quase todas as provas aplicadas, muitas vezes aparecendo mais do que dois itens por prova. E o que se observa através dos microdados do INEP é o baixo desempenho dos estudantes ao se deparem com questões de Análise Combinatória no ENEM.

Oliveira e Gottardi (2024) ressaltam a importância do ensino da Análise Combinatória não apenas pelo seu valor intrínseco como conteúdo matemático, mas também pelo potencial de desenvolver habilidades fundamentais para a resolução de problemas. No entanto, muitos alunos saem do ensino médio sem ter o mínimo conhecimento sobre o assunto, não identificando o método de contagem que pode ser utilizado na resolução de determinado problema e apresentando dúvidas em relação a abordagem correta. Frequentemente surge incerteza se o problema envolve o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), um Arranjo, uma Combinação ou uma Permutação. Lós e Gusmão (2025) descrevem em sua pesquisa que os obstáculos encontrados pelos estudantes na aprendizagem de Análise Combinatória vão desde a dificuldade na interpretação e compreensão do problema até a dúvida no método mais adequado para resolver um determinado tipo de problema. Ferreira (2013) destaca que essa dificuldade é fruto de uma metodologia de ensino focada na utilização mecânica de fórmulas para a resolução de exercícios sem priorizar o entendimento do conceito e da teoria por trás de cada assunto. Dessa forma, surge a seguinte questão-problema: Como nós professores podemos construir as nossas aulas de Análise Combinatória para que o processo ensino-aprendizagem não aconteça de forma mecânica e descontextualizada, fazendo que o aluno passe a ser protagonista nesse processo, valorizando a criatividade, o espírito investigativo, o raciocínio lógico e tornando os habilitados a resolverem problemas como os que aparecem no ENEM?

Schliemann (2001), ao observar aulas de Análise Combinatória, notou que o foco do ensino estava na construção de um algoritmo para resolução de exercícios, baseando-se em fórmulas apresentadas pelos professores, sem a participação dos alunos na construção dessas fórmulas ou na compreensão do seu real significado. Mendonça (2011, p.19) complementa: “(...) os docentes dispensam a abordagem do tema e optam por apresentar algumas situações a partir da apresentação de fórmulas, sem a construção de um conhecimento expressivo por parte do aluno”.

Lós e Gusmão (2025) identificaram através da sua pesquisa que a formação do professor possui lacunas quando se trata de Análise Combinatória, fatores como baixo repertório metodológico ao ensinar o conteúdo e pouco conhecimento da área foram detectados. Essas lacunas interferem diretamente na maneira como os professores conduzem a aula e na proposição de estratégias que favoreçam o aprendizado do conteúdo.

Em busca de um resultado mais eficaz no processo de ensino-aprendizagem, a resolução de problemas surge como uma alternativa, pois é uma ferramenta poderosa para desenvolver as habilidades de raciocínio do aluno e tem a capacidade de induzir, deduzir, organizar as informações, fazendo com que ele faça a escolha da estratégia mais adequada. Através da resolução de problemas contextualizados de Análise combinatória, buscamos não s apenas o desenvolvimento do raciocínio lógico, mas também o desenvolvimento de habilidades cognitivas que sejam capazes de auxiliar na resolução de problemas do dia a dia.

A escolha do tema “O Estudo da Análise Combinatória Como Ferramenta Pedagógica na Resolução de Problemas do ENEM” foi motivada pela experiência de mais de 15 anos como professor da educação básica e de cursos preparatórios para o ENEM e vestibulares, onde pude identificar as principais dificuldades e desafios encontrados tanto por alunos quantos professores no processo de ensino-aprendizagem desse assunto. Além disso, o curso de Resolução de Problemas do PROFMAT-UFES, ministrado pelo professor Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, onde os alunos eram convidados a resolver questões e apresentar a resolução no quadro para toda a turma, foi fundamental para escolher escrever sobre este assunto, pois numa dessas aulas eu apresentei para a turma uma questão de Análise Combinatória e fui muito elogiado pelo professor que é uma referência e inspiração para mim. Este trabalho tem como objetivo geral elaborar uma sequência didática que auxilie professores do Ensino Médio, especialmente da 2ª Série, no ensino da Análise Combinatória, utilizando problemas contextualizados com foco no ENEM, a fim de promover o desenvolvimento das habilidades necessárias para que os estudantes sejam capazes de resolver problemas similares aos que são cobrados no ENEM. Para alcançar esse objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:
1) Investigar a abordagem da Análise Combinatória, identificando os métodos de contagens mais recorrentes nas provas do ENEM.
2) Diagnosticar as principais dificuldades enfrentadas por alunos e professores no ensino e aprendizagem da Análise Combinatória em contextos escolares;
3) Desenvolver uma sequência didática para apoiar professores no trabalho com Análise Combinatória por meio da resolução de problemas contextualizados.

A relevância desta proposta está no fato de que ela articula teoria e prática, oferecendo aos professores uma ferramenta concreta para o trabalho em sala de aula, enquanto propicia aos alunos uma aprendizagem mais significativa e funcional, alinhada às demandas do ENEM e às competências estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2 A TRAJETÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DO ENSINO BÁSICO

2.1 SOBRE O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado pelo Ministério da Educação (MEC), em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes ao final da escolaridade básica. Inicialmente, o ENEM era uma prova interdisciplinar, realizada em apenas um dia, composta por 63 questões, formato o qual se manteve até 2008. Vale destacar que, ao longo desse período, em 2005, foi criado o Programa Universidade para Todos (ProUni) com o propósito de oferecer bolsas de estudos parciais e integrais em instituições privadas, utilizando a nota do ENEM.

Isso fez com que o número de inscritos aumentasse consideravelmente. Entre os anos de 1998 a 2008, o ENEM utilizou a Teoria Clássica dos Testes (TCT) como método para avaliar o desempenho de cada estudante no Exame. Nesse método cada acerto contabilizava um mesmo valor na pontuação, a partir de 2009, a Teoria da Resposta ao Item (TRI) tornou-se o modelo utilizado para determinar a nota do estudante em cada uma das quatro provas objetivas do ENEM.

> A TRI é um conjunto de modelos matemáticos que busca representar a relação entre a probabilidade de o participante responder corretamente a uma questão, seu conhecimento na área em que está sendo avaliado e as características (parâmetros) dos itens (Brasil, 2021, p. 8).

Também em 2009, o ENEM passou a ter um novo formato, com 180 questões divididas em quatro áreas: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, e matemática e suas Tecnologias. Nesse mesmo ano, a prova passa a ter uma maior importância ao passar a ser utilizado como forma de acesso a universidades e instituições de ensino superior do país através do Sistema de Seleção Unificada (SISU).

A disciplina de matemática, no novo ENEM, ganha destaque, uma vez que passa a contar com 45 questões na prova. Essas 45 questões estão divididas entre as 7 competências e as 30 habilidades descritas na matriz de referência do ENEM. Este estudo, concentra as atenções na Habilidade 2 (identificar padrões numéricos ou princípios de contagem) presente na competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais (Rabelo, 2013).

Dentre essas 45 questões, apenas no ENEM de 2023 não foi cobrada nenhuma questão de Análise Combinatória, reforçando a importância do assunto. A Tabela 01 abaixo mostra a distribuição de questões de Análise Combinatória em cada ano após o início do novo ENEM:

Tabela 01: Questões do ENEM

ANO	Enem	Enem PPL
2009	2 questões	1 questão
2010	2 questões	0
2011	1 questão	0
2012	2 questões	0
2013	3 questões	0
2014	1 questão	1 questão
2015	2 questões	1 questão
2016	2 questões	1 questão
2017	4 questões	2 questões
2018	1 questão	0
2019	2 questões	2 questões
2020	4 questões	3 questões
2021	2 questões	1 questão
2022	2 questões	1 questão
2023	0	2 questões
2024	2 questões	0

Fonte: INEP

2.2 BNCC E A ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que tem como objetivo nortear o currículo dos sistemas e redes das unidades federativas, e serve como guia para as propostas pedagógicas de todas as escolas de Ensino Infantil, Fundamental e Médio, sejam elas particulares ou públicas. Além disso, visa assegurar que um conjunto de habilidades e competências sejam trabalhadas durante cada fase educacional, assegurando o aprendizado, o desenvolvimento cultural do aluno, a sua evolução como cidadão e a sua qualificação para o mercado de trabalho (Brasil, 2018).

Na BNCC, já no Ensino Fundamental I, a Análise Combinatória está presente no 5º ano na unidade temática Números, na qual o objeto de conhecimento são problemas de Contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” (Brasil, 2018, p.294).

A habilidade referente a essa temática e a esse objeto de conhecimento exige que os alunos sejam capazes de:

> Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (Brasil, 2018, p.295).

Já no Ensino Fundamental II, a Análise Combinatória está presente no 8º ano na unidade temática Números, onde o objeto de conhecimento é o princípio multiplicativo da contagem. A habilidade dessa mesma unidade temática e desse objeto de conhecimento, exige que os estudantes sejam capazes de: “Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo” (Brasil,2018, pp.312-313).

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas tecnologias, a BNCC aborda as seguintes habilidades especificas:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (LDB, Lei nº9.934/1996)

No ensino da Análise Combinatória, estamos interessados em explorar a competência 3.

Nessa competência, buscamos desenvolver a habilidade:

> "Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore" (Brasil, 2018, p. 537).

Além dessa habilidade, os conceitos que serão vistos nesse trabalho são fundamentais para que o aluno possa resolver problemas da habilidade: "Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade" (Brasil, 2018, p. 537).

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM NA MATEMÁTICA

Na Matemática, um problema pode ser definido como: "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (Brasil, 1997, p. 33).

Segundo Dante (1989, p. 9): "um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la". Estreitando a definição de problema para a Matemática, o autor ainda complementa o raciocínio "um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (Dante, 1989, p. 10).

Um problema Matemático é uma situação que exige concentração, estratégia e a concatenação de conhecimentos prévios para resolvê-lo, diferentemente de um exercício que simplesmente reproduz de forma mecânica um modelo já conhecido, o problema desenvolve o pensamento crítico e o raciocínio lógico-dedutivo através do espírito investigativo, reflexão e da tomada de decisões.

Nesse sentido, Almeida, Gomes e Madruga (2020) destacam a contribuição da resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática escolar pela capacidade de despertar o espírito crítico e investigativo nos alunos. Corroborando com essa linha de pensamento, Gomez-Granell (2008, p. 276) enfatiza que “a resolução de problemas foi habitualmente usada no ensino da Matemática como uma forma de aplicar os conhecimentos previamente adquiridos”.

Sobre a resolução de problemas em Análise Combinatória, Morgado (2004) aponta que um dos encantos deste tópico da Matemática é que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Dessa forma o primeiro passo para estar apto para resolver problemas de Análise Combinatória é ter um bom entendimento dos conceitos que definem cada método de contagem, a fim de saber qual deles utilizar. No entanto, apenas dominar os conceitos não é suficiente para resolver problemas de Combinatória: é também necessária uma boa capacidade de interpretação e criatividade.

Polya (1978) destaca a importância do professor no ensino da Matemática ao assumir um papel de mediador, propondo problemas compatíveis com os conhecimentos destes e incentivando-os ao gosto pelo raciocínio independente através de indagações estimulantes. Além disso, ele reforça que a forma de pensar um problema era tão importante como o problema em si, por isso no seu livro descreveu o processo de resolução de problema em 4 etapas: Compreensão do problema, elaboração de um plano, execução de um plano, revisão e verificação da solução. Por fim, o auto nos mostra a necessidade de organização para o enfrentamento de desafios e mostra que seu guia para resolver problemas matemáticos não se trata de uma forma engessada para desenvolver o raciocínio, mas sim uma forma de estimular o pensamento estratégico para que o resolvedor seja mais eficaz na hora de buscar a solução.

Um fator importante no ensino da Análise Combinatória por meio da resolução de problemas é o professor evidenciar que a Análise Combinatória vai muito além da aplicação de fórmulas e procedimentos engessados. Logo, o ideal é que o professor comece por problemas que possam ser explorados conceitos envolvidos em cada método de contagem e que estimule a resolução mesmo que os alunos ainda não conheçam as fórmulas.

Esteves (2001) defende que inicialmente os problemas aplicados aos alunos sejam resolvidos sem o conhecimento de fórmula, pois se as fórmulas forem apresentadas após uma ligeira abordagem da definição de cada tipo de agrupamento, o aluno pode ter dificuldade em distinguir os tipos de métodos de contagem em problemas futuros.

Por fim, o professor é figura fundamental no desenvolvimento da autoconfiança do aluno no processo de ensino-aprendizagem por intermédio da resolução de problemas.

Oliveira e Gottardi (2024) descrevem a Análise Combinatória como um assunto que oferece uma oportunidade valiosa ao professor de ser o facilitador do processo de ensino-aprendizagem, mediando esse processo desde as estratégias de interpretação do problema até a elaboração de um modelo algébrico aritmético que o conduza a solução.

No ensino através de resolução de problemas, o professor deve promover discussões acerca do resultado obtido, incentivar o aluno a refletir antes de resolver o problema, oferecer alguma dica sutil para que ele possa avançar um pouco mais e, caso não consiga, apresentar soluções de fácil compreensão. Afinal, nem sempre a solução mais elegante é a mais fácil de entender ou a que ajudará, futuramente, a resolver uma maior quantidade de problemas.

Uma das ferramentas valiosas para resolução de problemas de Análise Combinatória são os três preceitos de Morgado. Estes preceitos foram denominados por Morgado (2004) como Normas da boa técnica e são eles que nortearão as nossas ações antes de começarmos a executar qualquer problema.

Eis os três pilares que utilizaremos na busca pela solução dos problemas propostos:

a) Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisão devemos tomar.
b) Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões mais complexas de serem tomadas em divisões mais simples.
c) Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, abordaremos os principais temas de Análise Combinatória que estiveram presentes nas provas do ENEM nos últimos anos. Para embasar essa discussão, estamos utilizando como referência o livro de Matemática Discreta, coleção Profmat, dos autores Augusto Cesar Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho. Além dessa fonte de conhecimento, também estamos utilizando o livro Análise Combinatória e Probabilidade de Augusto Cesar Morgado e as videoaulas de combinatória também ministradas por ele ao PAPMEM e disponibilizadas pelo IMPA.

Segundo Hazzan (2013), a Análise Combinatória é a parte da Matemática que tem como objetivo resolver problemas de contagem mediante métodos específicos para cada tipo de problema.

Para Morgado (1991), a Análise Combinatória é uma parte da Matemática discreta que estuda ferramentas poderosas de contagem que vão muito além do Arranjo Simples, da Combinação simples e das Permutações, que são métodos estudados durante o Ensino Médio.

Morgado et al (2004), ainda complementa que existem dois tipos de problemas de Análise combinatória: aqueles que demonstram a existência de subconjuntos de um determinado conjunto finito com condições específicas e problemas com o objetivo de contar ou classificar subconjuntos de um conjunto finito.

A Análise Combinatória está presente no nosso dia a dia, seja na engenharia, na ciência da computação, seja na hora de testar possibilidades ao escolher uma roupa antes de sair de casa, seja quando paramos para observar as possibilidades de formação de um número telefônico, da placa de um veículo, quando fazemos uma aposta na Mega-Sena e queremos descobrir a nossa chance de sucesso ao marcar uma certa quantidade de números no cartão, ou ainda quando enviamos uma mensagem pelo WhatsApp e temos certeza de que o conteúdo dela estará seguro, pois é uma mensagem criptografada.

> Os problemas de contagem aparecem em matemática e ciência da computação. Por exemplo, devemos contar as possibilidades favoráveis de um experimento e o total de possibilidades desse experimento para determinar a probabilidade dos eventos discretos. Precisamos contar o número de operações usado por um algoritmo para estudar seu tempo de complexidade (Rosen, 2010, p.356).

Este trabalho, tem como foco o estudo no Princípio Aditivo, no Princípio Multiplicativo, nas Permutações Simples e com Repetição, no Arranjo Simples e na Combinação Simples, pois são ferramentas essenciais para resolução de problemas do dia a dia, como o cálculo de possibilidades de uma pessoa ganhar na Mega-Sena ao fazer uma aposta simples ou a quantidade de combinações possíveis que ela tem para se vestir na hora de se arrumar para um evento, ou seja, problemas similares aos que têm sido cobrados nas provas do ENEM nos últimos anos.

3.1 PRINCÍPIO ADITIVO E PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

3.1.1 Princípio Aditivo

Definição: Dados dois conjuntos X e Y finitos e disjuntos tal que X possui x elementos e Y possui y elementos, então X U Y possui x + y elementos.

Exemplo 1: Uma lanchonete vende três tipos de salgado: Empada, Coxinha e Quibe. Além disso, ela vende dois tipos de suco natural: Laranja e Limão. De quantas maneiras um cliente pode comprar um salgado ou um suco natural?

Podemos resolver esse simples problema com uma aplicação direta do Princípio Aditivo. Chamaremos de X o conjunto dos tipos de salgados e de Y o conjunto dos tipos de suco natural, então X = {Empada, Coxinha, Quibe} e Y = {Laranja, Limão} tal que $X \cap Y = \emptyset$, logo o número de maneiras que um cliente pode escolher um salgado ou um suco (X U Y) é dado por 3 + 2, ou seja, 5 maneiras distintas.

3.1.2 Princípio Multiplicativo

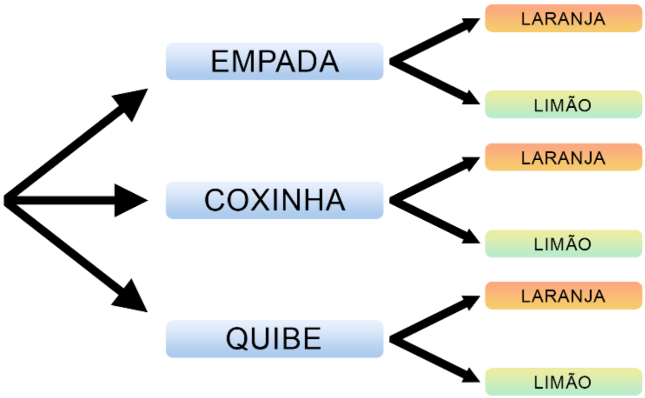
Antes de definir o Princípio Multiplicativo, analisaremos o exemplo abaixo.

Exemplo: Uma lanchonete vende três tipos de salgado: Empada, Coxinha e Quibe. Além disso, ela vende dois tipos de suco natural: Laranja e Limão. De quantas maneiras um cliente pode comprar um salgado e um suco natural?

Solução: Uma das maneiras de resolver esse problema é enumerando as possibilidades de se escolher um salgado e um suco através de uma representação gráfica que é o diagrama árvores ou diagrama de possibilidades, uma ferramenta muito útil para a resolução dos problemas de Análise combinatória e de Probabilidade.

As possibilidades vistas no problema podem ser visualizadas na figura1.

Figura 01: Diagrama de possibilidades



Fonte: Autoria própria (2024).

Por meio do diagrama, pode-se concluir que as possíveis possibilidades são formadas por: empada e suco de laranja, empada e suco de limão, coxinha e suco de laranja, coxinha e suco de limão, quibe e suco de laranja e quibe e suco de limão. Logo, há 6 possibilidades de escolha.

Continuando a análise do problema, também é possível perceber que a quantidade maneira que um cliente possui para efetuar essa compra pode ser obtida pela multiplicação das opções presentes em cada uma das etapas de escolha. Na primeira etapa (escolha do salgado), o cliente possui três opções. Na segunda etapa (escolha do suco), o cliente possui duas opções, logo $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

O que acabamos de fazer foi utilizar o princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC) na resolução do problema; dessa forma, podemos enunciá-lo da seguinte maneira, seguindo a teoria de Morgado e col. (1991): “Se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x.y”.

Entender o conceito do princípio multiplicativo e saber aplicá-lo na resolução de problemas é fundamental para construção cognitiva dos métodos de contagem que estudaremos posteriormente. Não ter o domínio dessa técnica implicará na dificuldade de entendimento das permutações, dos arranjos e combinações.

3.2 FATORIAL

O fatorial de um número, é uma importante ferramenta que nos auxiliará e facilitará a resolução de problemas quando forem utilizados outros métodos de contagem.

Seja $n \in \mathbb{N}$, define-se fatorial de $n\,(n!)$ o produto de n por todos os seus antecessores positivos, ou seja, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 1$.

Por convenção, foi definido que $0! = 1$.

Abaixo, listamos os fatoriais de alguns números:

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$1! = 1$

Seja um número x e um outro número y, tal que $x > y$, observe que o fatorial de x pode ser escrito em função do fatorial y. Observemos alguns exemplos:

$6! = 6.5! = 6.5.4! = 6.5.4.3!$

$4! = 4.3!$

Vejamos agora um exemplo de como utilizar esse conceito para simplificar algumas expressões com fatorial:

$$\frac{9!}{5!\,3!} = \frac{9x8x7x6x5!}{5!\,3!} = \frac{9x8x7x6}{3!} = \frac{9x8x7x6}{6} = 9x8x7 = 504$$

3.3 PERMUTAÇÃO

3.3.1 Permutação Simples

Antes de definir o conceito de permutação simples, iremos propor o problema abaixo.

Exemplo: Determine o número de anagramas que podem ser formados permutando as letras da palavra PAI.

Solução: Inicialmente temos que lembrar que anagrama é toda palavra com ou sem sentido que podemos formar simplesmente trocando as letras de posição. Então, colocando os anagramas da palavra PAI em ordem alfabética, temos: AIP, API, IAP, IPA, PAI e PIA. Podemos concluir então que com as letras da palavra PAI, podemos formar 6 anagramas.

Observe que este problema é análogo ao problema “De quantas maneiras podemos organizar em fila os alunos André, Bruno e Carlos?”, pois se chamarmos André de A, Bruno de B e Carlos de C, teríamos as seguintes configurações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

Resolvemos o problema acima através da enumeração dos casos abaixo, iremos resolve-lo através do princípio multiplicativo:

Para a primeira posição da fila (posição mais à esquerda), temos três opções de escolha.

Escolhido o elemento que ocupará a primeira opção, para a segunda posição sobraram duas opções de escolha.

Feita a escolha das duas primeiras posições, sobra apenas uma opção de escolha.

Pode-se concluir, pelo princípio multiplicativo que o número de maneiras de organizar essa fila é dado por: $3.2.1 = 6$.

Iremos propor agora o seguinte problema:

Exemplo 2: De quantas maneiras podemos organizar n pessoas em fila?

Para a primeira posição da fila (posição mais à esquerda), temos n opções de escolha.

Escolhido o elemento que ocupará a primeira opção, para segunda posição sobram $n - 1$ opções de escolha.

Escolhido o elemento que ocupará a primeira posição e o elemento que ocupará a segunda posição, para a terceira posição sobram $n - 2$ opções de escolha.
- Seguindo essa linha de raciocínio, para a quarta posição teremos $n - 3$ opções, para a quinta $n - 5$ e assim sucessivamente, até que na n-ésima posição teremos 1 opção de escolha.

Logo o número de maneiras que podemos organizar essa fila é dado por: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$

Podemos definir a permutação de n elementos distintos (Permutação Simples), ao número de filas que podemos formar com esses n elementos e representaremos essa quantidade de filas por $P_n = n!$.

3.3.2 Permutação com Repetição

Utilizaremos a mesma estratégia utilizada ao fazer a abordagem de permutação simples e começaremos propondo dois problemas e em seguida definiremos o conceito de permutação com repetição.

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra OVO?

Solução: Colocando em ordem alfabética todos os anagramas que podem ser formados, obtemos a sequência: OOV, OVO, OVO. Chega-se a conclusão que apesar de a palavra OVO ter três letras assim como a palavra PAI, podemos formar 3 anagramas ao permutar as suas letras, enquanto a palavra PAI gera 6 anagramas, isso acontece devido a palavra OVO possuir duas letras repetidas e as permutações dessas letras entre si não gerarem um novo anagrama. Portanto o número de anagramas formados pode ser calculado por $\frac{3!}{2!} = \frac{3x2!}{2!} = 3$.

Exemplo 2: Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ARARA?

Solução: Enumerando os possíveis anagramas, obtemos: AAARR, AARAR, AARRA, ARAAR, ARRAA, ARARA, RAAAR, RAARA, RARAA, RRAAA (10 anagramas ao todo). Como a palavra ARARA possui 5 letras e desse total de letras o A se repete três vezes e o R se repete duas vezes, podemos escrever o total de anagramas da palavra ARARA como $\frac{5!}{3!2!} = \frac{5x4x3!}{3!2!} = 10$, pois a permutação das três letras A entre si e das duas letras R entre si, não formam novos anagramas.

Dados n elementos, se dentre esses n elementos um deles se repete x vezes, outro y vezes e um terceiro w vezes, o número de permutações que podem ser formadas é dado por $P_n^{x,y,w} = \frac{n!}{x!y!z!}$.

3.4 ARRANJO SIMPLES

Antes de definirmos o conceito de Arranjo, chamamos a atenção que este método é uma aplicação imediata do princípio fundamental da contagem e alguns livros, como é o caso do livro de Matemática discreta da coleção do Profmat, sequer mencionam em sua literatura, mas iremos mencioná-lo devido ao fato do ENEM cobrar o conceito de Arranjo na questão 14 e utilizar a simbologia A_n^p nas questões 15 e 19 da seção de problemas do ENEM que iremos resolver.

Iniciaremos a abordagem do assunto discutindo o exemplo a seguir e adiante definiremos o conceito de Arranjo.

Exemplo: André, Bruno, Carlos, Daniel e Edgar estão disputando a última fase da olímpiada de Matemática da escola onde estudam. De quantas maneiras podem ser formados os três primeiros lugares?

Solução: Esse é um problema que pode ser facilmente resolvido pelo PFC, pois para o 1º lugar temos 5 opções de escolha, para o 2º lugar temos 4 opções de escolha e para o 3º lugar temos 3 opções de escolha, então o total de possibilidades é dado por: $5x4x3 = 60$ possibilidades.

Observe que podemos reescrever este resultado da seguinte forma: $\frac{5x4x3x2!}{2!}$.

Obtido o resultado do problema anterior, iremos propor um novo exemplo com o intuito de generalizar a situação acima.

Exemplo: Numa escola n alunos estão disputando a última fase da olímpiada de Matemática. De quantas maneiras podem ser formados os p primeiros lugares?

Solução: Para o 1º lugar temos n opções de escolha, para o 2º lugar temos $n-1$ opções de escolha, para o 3º lugar temos $n-2$ opções e assim sucessivamente, até que para o p-ésimo lugar, temos $n-(p-1)$ opções de escolha. Então, o total de maneiras de escolher os p primeiros lugares é dado por: $n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(p-1))$. Podemos reescrever esse resultado da seguinte maneira: $\frac{n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(p-1)).(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Dados n elementos distintos, chama-se de Arranjo simples de n tomado p a p ($A_{n,p}$ ou A_n^p) a todos os agrupamentos ordenados que podemos formar utilizando p desses n elementos. Esse número de agrupamentos pode ser representado por: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ sendo n e p $\in \mathbb{N}$ e $n \geq p$.

3.5 COMBINAÇÃO SIMPLES

Imagine agora que ao invés de formar agrupamentos ordenados, nosso intuito seja formar subconjuntos. Seguindo essa linha de raciocínio, iremos começar propondo o seguinte problema:

Exemplo: André, Bruno, Carlos, Daniel e Edgar estão disputando a última fase da olímpiada de Matemática da escola onde estudam. De quantas maneiras podemos escolher três desses alunos para uma entrevista?

Solução: Vamos supor que este fosse um problema em que quiséssemos formar agrupamentos ordenados, então o total de escolhas seria dado por:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60 \text{ maneiras.}$$

Entretanto, sabemos que escolher o trio André, Bruno e Carlos equivale a escolher: André, Carlos e Bruno ou Bruno, André e Carlos ou Bruno, Carlos e André ou Carlos, André e Bruno ou Carlos, Bruno e André, pois a permutação desses três elementos gera um mesmo subconjunto. Então estamos contando cada trio 6 vezes (3!), logo o número de trios é dado por $\frac{60}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.

Iremos propor mais um exemplo para definirmos o conceito de combinação simples.

Exemplo: n alunos de uma escola estão disputando a última fase de uma olímpiada, de quantas maneiras podemos escolher p desses alunos para uma entrevista?

Solução: Se quiséssemos formar agrupamentos ordenados com p desses n elementos, o número total de agrupamentos seria dado por: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$. Mas como a nossa ideia é formar subconjuntos de p elementos, devemos lembrar que a permutação desses p elementos forma um mesmo conjunto, logo o número de subconjuntos de p elementos será dado por: $\frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

A partir desse resultado podemos definir o conceito de Combinação Simples.

Definição: Dados n elementos distintos, chamamos de Combinação Simples de n tomado p a p ($C_{n,p}$), ao número de modos de escolher p dentre esses n elementos. Esse número de número de modos pode ser representado por: $C_{n,p=}\frac{n!}{p!(n-p)!}$, sendo $n\ e\ p\ \in \mathbb{N}\ e\ n \geq p$.

Podemos ainda demonstrar a fórmula que nos permite calcular o número de subconjuntos de p elementos que podemos formar através de um conjunto de n elementos de uma outra maneira.

Consideremos o problema de calcular o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de n elementos, com p e n inteiros não negativos e $0 \leq p \leq n$.

Um subconjunto de p elementos de um conjunto A de n elementos é chamado de uma *combinação de classe* p *de* A.

O número de combinações de classe p de um conjunto de n elementos é denotado por $\binom{n}{p}$ (ou por C_n^p).

Assim, $\binom{n}{0} = 1$, pois há apenas uma combinação de classe 0 de um conjunto de n elementos, a saber, o conjunto vazio. Também tem-se $\binom{n}{n} = 1$, pois há apenas uma combinação de classe n de um conjunto de n elementos, a saber, o próprio conjunto.

Para obter uma fórmula para o cálculo de $\binom{n}{p}$, para o caso em que $1 \leq p < n$, vamos considerar novamente o problema de calcular o número de permutações dos elementos de um conjunto A de n elementos.

Já sabemos que esse total de permutações é igual a $n!$.

Uma maneira de formar uma permutação dos elementos do conjunto A é a seguinte. Inicialmente, escolhemos p elementos do conjunto A, que serão os p primeiros elementos da permutação. Há $\binom{n}{p}$ maneiras de escolher esses elementos. Uma vez escolhidos esses elementos, vamos escolher como eles serão dispostos como os p primeiros elementos da permutação, o que pode feito de $p!$ maneiras. Por fim, basta dispor os $n-p$ restantes elementos do conjunto A como os $n-p$ últimos elementos da permutação, o que pode ser feito de $(n-p)!$ maneiras. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações do conjunto A de n elementos é igual a $\binom{n}{p} \cdot p! \cdot (n-p)!$. Mas, sabemos que esse número também é igual a $n!$ e, logo, $n! = \binom{n}{p} \cdot p! \cdot (n-p)!$. Daí, segue que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Como $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$ e $\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n!(n-n)!}$, então a fórmula acima vale para todos p e n inteiros não negativos, com $0 \leq p \leq n$.

Como $A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, então $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!}$.

4 METODOLOGIA

Nesse trabalho utilizaremos a pesquisa qualitativa bibliográfica com ênfase no processo de ensino-aprendizagem através de uma sequência didática estruturada no modelo sistêmico. O objetivo é propor a professores do Ensino Médio uma sequência didática, com foco na resolução de problema do ENEM, que seja capaz de promover o desenvolvimento de habilidades e competências nos seus alunos para que os tornem preparados para resolver problemas contextualizados como os que tem sido cobrados nas provas do ENEM.

4.1 TIPO DE PESQUISA

Segundo Cunha e Rego (2019) existem dois motivos especiais para se utilizar a pesquisa qualitativa, o primeiro deles é a não limitação de hipóteses em cima de teorias já existentes, pois os pensamentos indutivos possuem uma poderosa fonte de descoberta. O Segundo motivo é a possibilidade dos métodos indutivos a desafiarem a aplicabilidade de teorias antigas. Dessa forma, no contexto do ensino de Análise Combinatória mediado pela resolução de problemas, a abordagem qualitativa configura-se como um recurso metodológico relevante para investigar, de maneira profundada, o desenvolvimento e a evolução de um grupo de alunos.

Segundo Gil (2002, p. 44): “A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.”.

4.2 PARTICIPANTES E CONTEXTO

A pesquisa não foi aplicada, mas ela foi elaborada tendo como público-alvo professores do Ensino Médio, preferencialmente professores da 2ª Série, onde é trabalhado o ensino da Análise Combinatória. Sugerimos aos professores que ao aplicarem essa sequência didática, solicitem aos alunos que sejam autorizados pelos seus responsáveis através da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

4.3 AVALIAÇÃO AO LONGO DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

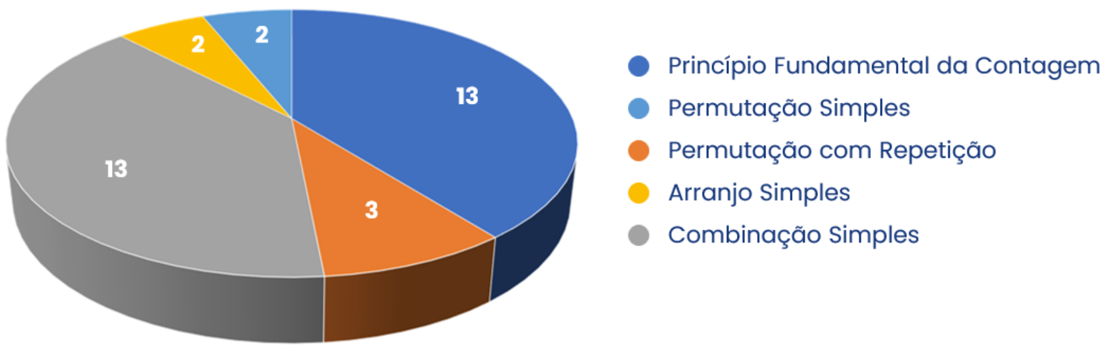
Para análise da eficácia da Sequência Didática sugerimos que os alunos sejam monitorados e avaliados durante todas as aulas. Também sugerimos que seja dada a oportunidade aos alunos ao final de cada aula para que eles apresentem as suas dificuldades para que intervenções sejam feitas com o objetivo de tornar o processo de ensino-aprendizagem eficaz. A observação do engajamento dos estudantes na execução, discussão e apresentação das soluções, bem como o registro das respostas no google forms, serão essenciais para essa avaliação.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 DISTRIBUIÇÃO DE QUESTÕES POR MÉTODO DE CONTAGEM NAS PROVAS DO ENEM DE 2004 A 2024.

No período de 2004 a 2024, foi observado a incidência de 33 questões de Análise Combinatória somente na primeira aplicação do ENEM. Essas questões foram distribuídas no Gráfico 01:

Gráfico 01: Distribuição de questões por método de contagem nas provas do ENEM de 2004 a 2024 (1ª Aplicação)

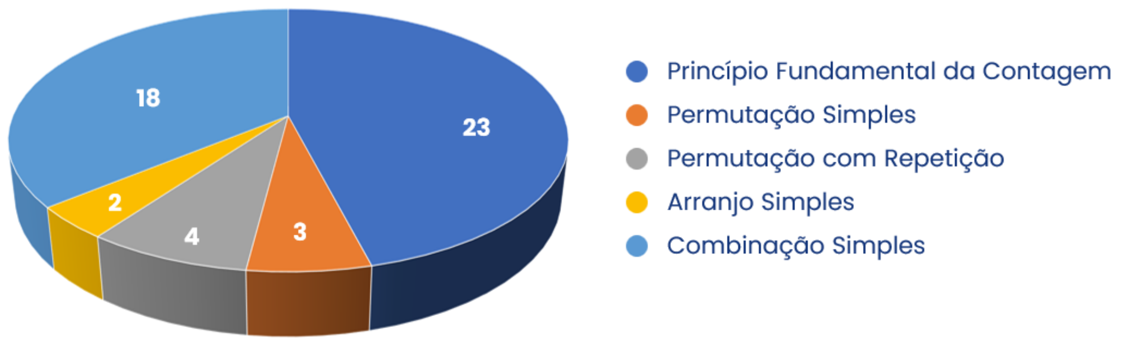


Fonte: Autoria própria

Esses dados nos mostram a importância que o ENEM tem dado ao Princípio Fundamental da Contagem e a Combinação Simples em suas edições. Vale ainda enfatizar que em muitas questões que foram classificadas com um outro tipo de método de contagem, o domínio do Princípio Fundamental da Contagem foi essencial para que o problema fosse resolvido.

No período de 2004 a 2024, também foi observada a incidência das 50 questões de Análise Combinatória que apareceram na 1ª aplicação, 2ª aplicação, ENEM digital e ENEM PPL e a distribuição do número de questões por método de contagem pode ser representado pelo gráfico 02:

Gráfico 02: Distribuição de questões de Análise Combinatória por método de contagem nas provas do ENEM no período de 2004 a 2024 (Todas as aplicações)



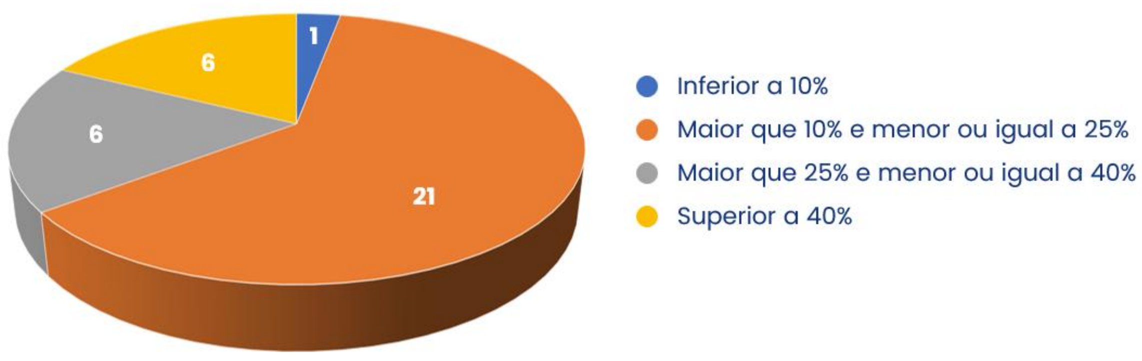
Fonte: Autoria própria (2025).

É possível perceber que mesmo nas outras aplicações, existe uma incidência maior de questões voltadas para o Princípio Fundamental da Contagem e Combinação Simples, informação que pode auxiliar os professores de ensino médio na preparação dos seus alunos para realizarem a prova do ENEM.

5.2 DESEMPENHO DOS ESTUDANTES POR ITEM NAS PROVAS DO ENEM DE 2004 A 2024

Um outro fator que foi possível verificar, por meio dos dados divulgados pelo INEP, entre as 30 questões que apareceram no período de 2004 a 2022, foi em relação ao percentual de acertos que cada um desses itens teve, os resultados foram representados pelo gráfico 03:

Gráfico 03: Quantidade de itens distribuídos por intervalo percentual de acertos de cada item



Fonte: Autoria própria (2025)

Nesse gráfico pode ser observado que dentre os 3 itens, 22 itens tiveram menos que 25% de acerto entre os participantes, o que mostra de maneira evidente a dificuldade que os participantes do ENEM possuem quando se trata de Análise

Combinatória e a necessidade de que os professores busquem alternativas que possibilitem a melhora desses índices.

5.3 ANÁLISE CRÍTICA E PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA 20 QUESTÕES QUE CAÍRAM NO ENEM

Neste capítulo resolveremos alguns problemas que foram cobrados no ENEM entre os anos de 2004 e 2022. Esses problemas foram propostos na sequência didática apresentada ao longo do trabalho e estão disponíveis no site do INEP (https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-ducacionais/enem/provas-e-gabaritos).

Em todas as vinte questões o leitor encontrará pelo menos uma maneira de resolver cada problema. O intuito é ajudar o professor de ensino médio a visualizar possibilidades de abordagem dessas questões em sala de aula. Além disso, no comentário de cada questão foi indicado o método de contagem que o aluno deveria ter conhecimento prévio para que conseguisse resolver o problema, ademais procurou-se discutir os distratores obtidos quando um aluno tomava uma decisão errada, seja ela por optar por um método de contagem inadequado para o exercício proposto ou por tomar uma decisão errada. Esses comentários foram feitos com o intuito de auxiliar os estudantes ao longo da preparação para o ENEM.

1. (Questão 144 - Enem 2012 - prova azul): O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

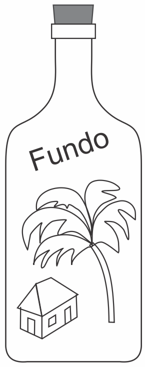
Solução: Podemos dividir o problema proposto em três etapas: adivinhar o objeto, adivinhar o personagem e adivinhar o cômodo da casa.

Para a escolha do objeto temos 5 opções, para a escolha do personagem temos 6 opções e para a escolha do cômodo da casa existem 9 opções, logo o total de respostas possíveis é dado por: $5.6.9 = 270$. Como existem 280 alunos no total, podemos concluir que existem 10 alunos a mais que a quantidade de possíveis respostas.

Comentário sobre a questão: Apesar de ser uma questão que pode ser resolvida de forma direta pelo princípio multiplicativo, apenas 32% dos candidatos que realizaram a prova azul conseguiram acertá-la segundo os dados do ENEM de 2012 divulgados pelo INEP.

2. (Questão 13 - Enem 2004 – prova amarela) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

Figura 02: Questão 13 - Enem 2004



Fonte: ENEM (2004)

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.
e) 10.

Solução: Começaremos a resolução organizando as informações do problema.

Possíveis cores da casa: Azul, verde ou amarelo.

Possíveis cores do fundo: Azul ou cinza.

Possíveis cores da palmeira: Cinza ou verde.

Repare que o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa e nem da palmeira, então essa é a restrição imposta ao problema. Então iremos separar o problema nos seguintes casos:

1º caso: Fundo Azul.

Neste caso, temos 2 opções de escolher a cor da casa (verde ou amarelo) e 2 opções de escolher a palmeira (cinza ou verde), logo pelo PFC temos $2.2 = 4$ maneiras.

2º caso: Fundo Cinza.

Neste caso, temos 3 opções de escolher a cor da casa (azul, verde ou amarelo) e 1 opção de escolher a palmeira (verde), logo pelo PFC temos: $3.1 = 3$ maneiras.

Logo, temos $4 + 3 = 7$ variações de paisagem.

Solução alternativa: Caso o problema não tivesse qualquer tipo de restrição e o fundo pudesse ter a mesma cor tanto da casa quanto da palmeira, o número de variações seria igual a: $3.2.2 = 12$.

Mas como fundo e casa não podem ter a mesma cor, nem fundo e palmeira podem ter a mesma cor, devemos subtrair os seguintes casos:

Fundo (Azul), Casa (Azul) e Palmeira (qualquer cor): $1.1.2 = 2$.

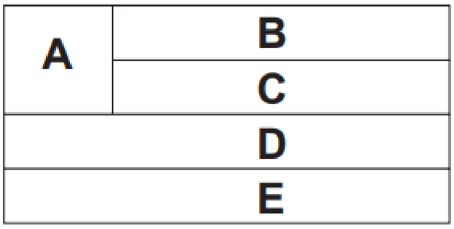
Fundo (Cinza), Casa (qualquer cor) e Palmeira (Cinza): $1.3.1 = 3$.

Logo o total de variações da paisagem é dado por: $12 - 2 - 3 = 7$.

Comentário sobre a questão: O problema proposto deveria ser dividido em três etapas que consiste na pintura do fundo, casa e palmeira. Porém o candidato deveria perceber que uma vez escolhido uma cor para o fundo, essa escolha pode restringir a pintura da casa ou restringir a pintura da palmeira, por isso o problema deveria ser dividido em dois casos. Segundo os micro dados do ENEM de 2004, somente 29% das pessoas que fizeram a prova amarela acertaram essa questão.

3) (Questão 158 - ENEM PPL 2015 – prova cinza) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.

Figura 03: Questão 158 - ENEM PPL 2015



Fonte: ENEM (2015)

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

a) $1\times2\times1\times1\times2$.

b) $3\times2\times1\times1\times2$.

c) $3\times2\times1\times1\times3$.

d) $3\times2\times1\times2\times2$.

e) $3\times2\times2\times2\times2$.

Solução: Iniciaremos a pintura pela faixa “A”, pois ela é a que possui mais faixas adjacentes a ela, ou seja, é ela quem vai restringir uma quantidade maior de faixas.

Então, para a faixa “A”, temos 3 opções de cores. Depois de colorimos a faixa “A”, iremos colorir a faixa “B”, como ela é adjacente a faixa “A”, sobram apenas 2 opções de cores para colori-la. Depois de pintarmos a faixa “A” e a faixa “B”, iremos colorir a faixa “C”. Como a faixa “C” é adjacente a “A” e “B”, não podemos utilizar nenhuma das duas cores que foram utilizadas, então sobra apenas 1 opção para a faixa “C”. Agora vamos colorir a faixa “D”, como ela é adjacente a faixa “B” e adjacente a faixa “C”, então podemos utilizar nenhuma das duas cores utilizadas nessa faixa e com isso temos apenas 1 opção para a faixa “D”. Para a faixa “E”, devemos observar que ela só é adjacente a faixa “D” então só não podemos colori-la com a cor da faixa “D”, com isso sobram duas opções de cores.

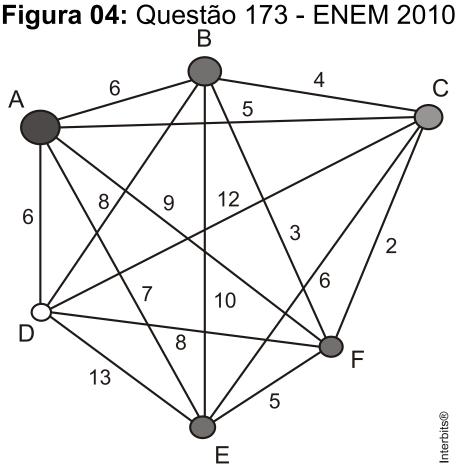
Logo, o número total de possibilidades de colorir essa bandeira é dado por: $3x2x1x1x2$.

Comentário sobre a questão: Esse é um problema clássico de princípio fundamental da contagem em que colorir cada faixa está relacionado a uma tomada de decisão.

O candidato deveria ter uma atenção especial na primeira tomada de decisão, começando o problema pela faixa A, já que ela representa a faixa com mais restrições.

4) (Questão 173 - ENEM 2010 – prova azul) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

Figura 04: Questão 173 - ENEM 2010



Fonte: ENEM (2010)

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.

Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

a) 60 min.

b) 90 min.

c) 120 min.

d) 180 min.

e) 360 min.

Solução: Para resolver o problema proposto podemos pensar na formação de um anagrama de 7 letras que começa pela letra A e termina pela letra A. Além disso, as 5 letras entre os extremos devem ser necessariamente as letras B, C, D, E e F não necessariamente nessa ordem.

Para escolha da letra que entrará na $2^{\underline{a}}$ posição do anagrama temos 5 opções disponíveis. Escolhido um elemento, para a escolha da letra que entrará na $3^{\underline{a}}$ posição do anagrama temos 4 opções disponíveis. Ao escolher mais um elemento, para escolha da letra que entrará na $4^{\underline{a}}$ posição do anagrama temos 3 opções disponíveis. Escolhido outro elemento, para escolha da letra que entrará na $5^{\underline{a}}$ posição do anagrama temos 2 opções disponíveis. Escolhido mais um elemento, para escolha do elemento que ocupará a $6^{\underline{a}}$ posição do anagrama, temos apenas 1 opção disponível, logo temos: $5.4.3.2.1 = 120$ trajetos. Como um determinado trajeto possui um simétrico de mesmo custo, então o tempo que ele levará para examinar todas as sequências será dado por: $\frac{120.1,5}{2} = 90$ minutos.

Solução alternativa: Para resolver o problema proposto podemos pensar na formação de um anagrama de 7 letras que começa pela letra A e termina pela letra A. Além disso, as 5 letras entre os extremos devem ser necessariamente as letras B, C, D, E e F não necessariamente nessa ordem. Temos que distribuir as 5 letras nos 5 espaços vagos, o total de maneiras de fazer essa distribuição é dado por: $P_5 = 5! =$ $= 5.4.3.2.1 = 120$ trajetos. Como um determinado trajeto possui um simétrico de mesmo custo, então o tempo que ele levará para examinar todas as sequências será dado por: $\frac{120.1,5}{2} = 90$ minutos.

Comentário sobre a questão: Para resolver a questão o candidato deveria ter um conhecimento prévio do princípio fundamental da contagem ou de permutação simples. A questão poderia ser resolvida por qualquer um dos dois métodos de contagem. Um detalhe importante que o aluno deveria perceber é que João leva 1 e 30 segundos para analisar duas sequências, se o aluno considerasse esse tempo para analisar apenas uma sequência, encontraria 180 minutos e marcaria a letra D como resposta e assim erraria a questão. Segundo os microdados relativos ao ENEM de 2010, apenas 28% das pessoas que fizeram a prova azul acertaram essa questão.

5) **(Questão 168 - Enem digital 2020 – Prova rosa)** Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59

b) 60

c) 118

d) 119

e) 120

Solução: Neste problema temos como objetivo calcular todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com as letras da palavra "Eduardo" de maneira que as letras da palavra "edu" apareçam sempre juntas e nessa ordem no anagrama formado.

Consideremos que as letras da palavra "edu" formam um elemento x, então reduziremos o nosso problema a um problema mais simples de calcular o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra "xardo". O número de maneiras de organizar essas 5 letras em ordem é dado por $P_5 = 5! = 120$. Como o e-mail Eduardo já foi cadastrado por outro usuário, então o número de possibilidades disponíveis é dado por: $120 - 1 = 119$.

Solução alternativa: Neste problema temos como objetivo calcular todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com as letras da palavra "eduardo" de maneira que as letras da palavra "edu" apareçam sempre juntas e nessa ordem no anagrama formado.

Consideremos que as letras da palavra "edu" formam um elemento x, então reduziremos o nosso problema a um problema mais simples de calcular o número de maneiras que temos para organizar os elementos x, a, r, d, o em 5 posições. Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos 5 opções de letra para $1^{\underline{a}}$ posição a ser ocupada, 4 opções para a $2^{\underline{a}}$ posição a ser ocupada, 3 opções para a $3^{\underline{a}}$ posição a ser ocupada, 2 opções para a $4^{\underline{a}}$ opção a ser ocupada e 1 opção para a última opção a ser ocupada. Logo o número de maneiras de organizar esse elementos em 5 posições é dado por: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras, como o e-mail Eduardo já foi cadastrado, então o usuário terá $120 - 1 = 119$ possibilidades disponíveis.

Comentário sobre a questão: Para resolver a questão era necessário que o candidato tivesse conhecimento prévio dominasse o princípio fundamental da contagem ou o conceito de permutação simples. Não foram divulgados microdados relativos ao ENEM digital para que fossem feitos os cálculos relativos a taxa de acerto da questão.

6) (Questão 174 – ENEM 2011 – prova azul) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados.

Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é

a) 24.

b) 31.

c) 32.

d) 88.

e) 89.

Solução: Para resolver esse problema pensaremos em todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos:$1, 3, 5, 7\ e\ 9$. Além disso, colocaremos todos esses números em ordem crescente até chegar à posição ocupada pelo número75.913. Com isso, podemos dividir o problema nos seguintes casos:

$1^{\underline{o}}$ Caso: Quantidade de números de 5 algarismos que começam com o algarismo 1: (Números da forma 1 _ _ _ _). Como o primeiro algarismo começa com o algarismo 1, temos que organizar os algarismos $3, 5, 7\ e\ 9$ nas 4 posições restantes, isso pode ser feito de $4!$ maneiras distintas, ou seja, 24 maneiras.

$2^{\underline{o}}$ Caso: Quantidade de números de 5 algarismos que começam com o algarismo: 3: (Números da forma 3 _ _ _ _). Como o primeiro algarismo começa com o algarismo 3, temos que organizar os algarismos $1, 5, 7\ e\ 9$ nas 4 posições restantes, isso pode ser feito de $4!$ maneiras distintas, ou seja, 24 maneiras.

$3^{\underline{o}}$ Caso: Quantidade de números de 5 algarismos que começam com o algarismo: 5: (Números da forma 5 _ _ _ _). Como o primeiro algarismo começa com o algarismo 5, temos que organizar os algarismos $1, 3, 7\ e\ 9$ nas 4 posições restantes, isso pode ser feito de $4!$ maneiras distintas, ou seja, 24 maneiras.

$4^{\underline{o}}$ Caso: Quantidade de números de 5 algarismos que começam com o algarismo 7, como nesse caso existem algarismos que começam por 7 que são maiores do que 75.913, dividiremos esse caso em subcasos, formando os algarismos que as duas primeiras casas são $71, 73\ e\ 75$.

Quantidade de números de 5 algarismos distintos que começam por 71: (Números da forma 71_ _ _). Como os dois primeiros algarismos são ocupados por 71, temos que organizar os algarismos $3{,}5\ e\ 9$ nas três posições restantes, isso pode ser feito de $3!$ maneiras distintas, ou seja, 6 maneiras.

Quantidade de números de 5 algarismos distintos que começam por 73: (Números da forma 73_ _ _). Como os dois primeiros algarismos são ocupados por 73, temos que organizar os algarismos $1{,}5\ e\ 9$ nas três posições restantes, isso pode ser feito de $3!$ maneiras distintas, ou seja, 6 maneiras.

Quantidade de números de 5 algarismos distintos que começam por 75: (Números da forma 75_ _ _). Como os dois primeiros algarismos são ocupados por 75, temos que organizar os algarismos $1{,}3\ e\ 9$ nas três posições restantes, isso pode ser feito de $3!$ maneiras distintas, ou seja, 6 maneiras. Dentre todos os números iniciados por 75 apenas um deles, o número 75.931, é maior do que o 75.913. Então quando colocamos os números que começam com 75 em ordem crescente, 75.913 ocupará a $5^{\underline{a}}$ posição.

Somando todos os casos anteriores, temos: $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 5 = 89$.

Logo a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é 89.

Comentário sobre a questão: Para resolver a questão o participante deveria ter um conhecimento prévio sobre princípio multiplicativo e/ou permutação simples. Algumas etapas desta resolução poderiam ser simplificadas, pois os casos 1, 2 e 3 podem ser reduzidos num único caso. Porém, a opção de dividir em mais casos facilita a compreensão do problema para as pessoas que possuem um pouco mais de dificuldade. Segundo os microdados do ENEM 2011, apenas 16% dos alunos que fizeram a prova acertaram essa questão.

7) **(Questão 163 - Enem 2020 – Prova Azul)** Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT". Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

a) $9!$

b) $4!5!$

c) $2 \times 4!5!$

d) $\frac{9!}{2}$

e) $\frac{4!5!}{2}$

Solução: A frase "I AM POTTER" é formada por 9 letras das quais 4 são vogais e 5 são consoantes, então a única maneira de intercalar vogal e consoante é iniciando a frase por consoante e aí teremos uma frase no seguinte formato: CVCVCVCVC, em que C são as posições que podemos ocupar com consoante e V são as posições que podemos ocupar com vogais.

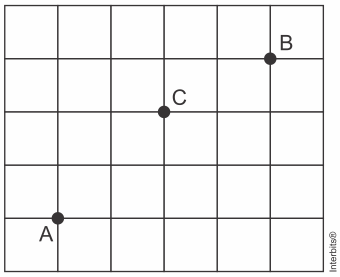
Inicialmente iremos ordenar as consoantes M, P, T, T e R nas 5 posições disponíveis, como temos dois elementos repetidos, o número de maneiras de fazer essa ordenação é dado por: $\frac{5!}{2!}$. Em seguida iremos ordenar as vogais I, A, O e E nas 4 posições disponíveis, com isso, temos $4!$ maneiras. Como dividimos nosso problema em duas etapas (ordenação das consoantes e ordenação das vogais) o número de maneiras de anagramas que podemos formar com as letras da frase "I AM POTTER" é dado pelo produto dos resultados obtidos nessas duas etapas, ou seja, $\frac{4!5!}{2!}$ maneiras.

Comentário sobre a questão: A questão exigia que o candidato conhecesse e soubesse aplicar os conceitos de permutação simples e permutação com repetição.

Vale chamar a atenção que se o candidato esquecesse de considerar que duas letras repetidas quando trocam de posição entre elas formam um mesmo anagrama e consequentemente não dividisse por $2!$, encontraria como resposta a letra B e erraria a questão. Também podemos observar um outro distrator que é dado pela permutação das nove letras, sem considerar o fato delas se intercalarem e sem considerar a repetição dos elementos, nesse caso o candidato encontraria como resultado $9!$, letra A. Segundo os microdados do ENEM 2020, somente 21% dos alunos que fizeram a prova azul acertaram essa questão.

8) (Questão 158 – ENEM 2020 – Prova Azul) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.

Figura 05: Questão 158 - ENEM 2020



Fonte: ENEM (2020)

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita $(\rightarrow)$ ou para cima $(\uparrow)$, segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

a) 4.

b) 14.

c) 17.

d) 35.

e) 48.

Solução: Para resolver este problema e encontrarmos o número de trajetos possíveis de A até B que não passam por C, utilizaremos o princípio da exclusão, ou seja, calcularemos todos os trajetos possíveis de A até B e excluiremos todos os trajetos de A até B que necessariamente passam por C.

Inicialmente iremos calcular todos os trajetos possíveis de A até B, pode-se perceber que um dos trajetos possíveis de A até B é dado por DDDDSSS, em que D representa se deslocar sob o lado de um dos quadrados para direita e S representa se deslocar sob o lado de um dos quadrados para cima. Independente do trajeto de A até B, André sempre se fará 7 movimentos, sendo 4 para direita e 3 para cima, com isso temos um total de caminhos possíveis dado por $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = 35.$

Para calcular o número de trajetos de A até B passando por C, temos que dividir o problema em duas etapas: Calcular o número de trajetos possíveis de A até C e em seguida calcular o número de trajetos possíveis de C até B.

De A até C, um dos deslocamentos possíveis é DDSS, independente do trajeto escolhido, temos sempre 4 movimentos sendo 2 para direita e 2 para cima e o número de trajetos possíveis será dado por: $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$

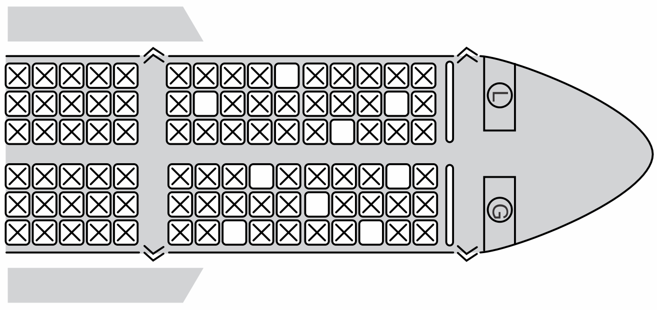
Já de C até B, um dos deslocamentos possíveis será dado por DDS, independente do trajeto escolhido, temos sempre 3 movimentos sendo 2 para direita e 1 para cima e o número de trajetos possíveis será dado por: $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3.$

Logo o número de trajetos de A até B passando por C será dado por: $6.3 = 18$ trajetos possíveis. Então, pode-se concluir que o número de trajetos de A até B que não passam por C é igual a: $35 - 18 = 17.$

Comentário sobre a questão: A questão exigia do aluno um conhecimento prévio de permutação com repetição. Essa é uma questão corriqueira nos livros didáticos de ensino médio e nos exames de vestibulares. Segundo os microdados do ENEM 2020, apenas 19% das pessoas que fizeram a prova azul, acertaram a questão.

9) (Questão 164 – Enem 2015 – Prova Azul) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Figura 06: Questão 164 - Enem 2015



Fonte: ENEM (2015)

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Solução: Podemos observar que existe um conjunto de 9 poltronas disponíveis e devemos escolher um subconjunto de 7 poltronas que são as poltronas que serão utilizadas, logo temos $C_{9,7} = \frac{9!}{7!2!}$ maneiras de escolher as 7 poltronas. Uma vez escolhida as 7 poltronas, devemos distribuir as 7 pessoas nessas poltronas e o total de maneiras para distribuí-las é dado por $P_7 = 7!$.

Como dividimos o nosso problema em duas etapas, através do PFC, temos que o número de maneiras de organizar essa família nesse voo é dado por:

$$\frac{9!}{7!2!}.7! = \frac{9!}{2!}.$$

Solução alternativa: Podemos pensar numa escolha de 7 das 9 poltronas já ordenando as pessoas nos lugares escolhidos, nesse caso, temos o total de maneiras de organizar sendo dado por: $A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$.

Comentário sobre a questão: A questão exigia o domínio dos conceitos de combinação simples e permutação simples e apesar dos livros didáticos atuais não darem ênfase a arranjo simples, o aluno conhecedor do método também poderia aplicar para resolve-la. Segundo os microdados do ENEM 2015, apenas 21% das pessoas que realizaram a prova azul, acertaram essa questão

10) (Questão 179 – ENEM 2021 – prova azul) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

Solução: Dividiremos o problema proposto em duas etapas: escolha dos tecidos e escolha das pedras Ornamentais. Na primeira etapa, dispõe-se de 6 tipos de tecidos e deseja-se formar subconjuntos com 2 tipos de tecidos, o número de subconjuntos que podem ser formados é dado por: $C_{6,2} = \frac{6}{4!2!}$. Na segunda etapa, dispõe-se de 15 tipos de pedras ornamentais e deseja-se formar subconjuntos com 5 tipos de pedras, o número de subconjuntos que podem ser formados é dado por: $C_{15,5} = \frac{15}{10!5!}$. Aplicando o princípio multiplicativo obtém-se que o número de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é dado por $\frac{6}{4!2!} \cdot \frac{15}{10!5!}$.

Comentário sobre a questão: Para resolver o problema proposto, o candidato deveria ter um conhecimento prévio de combinação simples e do princípio multiplicativo. Caso o candidato calculasse o número de subconjuntos com 2 tipos de tecidos que podem ser formados e somasse com o número de subconjuntos de 5 pedras que podem ser formados, encontraria a letra A que é um distrator nessa questão. Segundo os microdados do ENEM 2021, apenas 22% dos alunos que fizeram a prova azul, acertaram a questão.

11) (Questão 142 – ENEM 2020 – prova azul) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1.000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8.

b) 9.

c) 11.

d) 18.

e) 24.

Solução: Dividiremos o problema em quatro etapas: Etapa 1 (Escolha do modelo), Etapa 2 (Escolha do motor), Etapa 3 (Escolha dos opcionais) e Etapa 4 (Escolha da cor).

Para a Etapa 1 temos: 7 opções de escolha.

Para a Etapa 2 temos: 2 opções de escolha.

Para a Etapa 3 temos 4 casos possíveis:

$1^{\underline{o}}$ caso – Escolher três opcionais: $C_{3,3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$

2º caso – Escolher dois opcionais: $C_{3,2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$

3º caso – Escolher um opcional: $C_{3,1} = \frac{3!}{1!2!} = 3$

4º caso – Não fazer escolha de opcional: $C_{3,0} = \frac{3!}{0!3!} = 1$.

Logo, para a terceira etapa um cliente tem: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ opções de escolha.

Para a Etapa 4 temos: n possibilidades.

Aplicando o princípio fundamental da contagem, obtém-se que o número de configurações possíveis para esse automóvel pode ser representado por: $7.2.8.n = 112n$. Como a questão diz que a montadora tem que ter mais de 1000 configurações possíveis, o valor mínimo de n que satisfaz a inequação $112n > 1000$, é $n = 9$.

Comentário sobre a questão: A questão exigia do candidato um domínio teórico dos métodos de contagem principalmente no cálculo da quantidade de opcionais, pois a escolha trata-se da formação de subconjuntos e não da formação de um agrupamento ordenado, por esse motivo a combinação simples é aplicada. Segundo os microdados do ENEM 2022, apenas 21% das pessoas que fizeram a prova azul, acertaram essa questão.

12) (Questão 147 – ENEM 2016 – prova azul) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

Solução: Para resolver o problema aplicaremos o princípio da exclusão: Número de maneiras de não escolher dois canhotos = Total de maneiras de escolher dois jogadores – número de maneiras de escolher dois canhotos.

O total de maneiras de escolher dois jogadores é dado pelos subconjuntos de 2 elementos que podem ser formados com os 10 elementos disponíveis. Esse cálculo pode ser representado por: $C_{10,2} = \frac{10!}{2!8!}$. Para calcular o número de maneiras de se escolher dois canhotos para formar uma partida, devemos calcular o número de subconjuntos de 2 elementos que podem ser formados com os 4 canhotos disponíveis.

Podemos representar esse cálculo por: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}$.

Logo o número de maneiras de escolher dois jogadores de maneira que não sejam dois canhotos, é dado por: $\frac{10!}{2!8!} - \frac{4!}{2!2!}$.

Comentário sobre a questão: Para resolver a questão, era essencial que o aluno dominasse o conceito de combinação simples. Além disso, para escrever a resposta conforme as alternativas propostas, o aluno deveria lembrar do princípio da exclusão. Segundo os microdados do ENEM 2016, apenas 19% das pessoas que realizaram a prova azul acertaram essa questão.

13) (Questão 171 - Enem 2009 – prova azul) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase.

Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50. N Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.

b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

c) 4 vezes menor.

d) 9 vezes menor.

e) 14 vezes menor.

Solução: Neste problema, começaremos calculando o número de quinas que pode ser formadas com 84 apostas de 6 dezenas diferentes, para isso precisamos saber quantas quinas podem ser formadas com uma aposta de 6 dezenas. Então nosso problema consiste em saber quantos subconjuntos de 5 elementos podemos formar com um conjunto de 6 elementos, esse cálculo pode ser obtido através de $C_{6,5} = \frac{6!}{5!1!} = 6$, ou seja, com 6 dezenas podem ser formadas 6 quinas diferentes. Como são 84 apostas, então temos um total de $84.6 = 504$ quinas.

Agora iremos calcular o número de quinas que podem ser calculadas com 9 dezenas, isto é, vamos calcular o número de subconjuntos de 5 elementos que podem ser formados com um conjunto de 9 elementos, esse cálculo pode ser obtido através de $C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$, ou seja, com 9 dezenas podem ser formadas 126 quinas diferentes. Comparando o número de quinas formadas com 84 apostas de 6 dezenas com o número de quinas formadas com uma única aposta de 9 dezenas, obtém-se:

$$\frac{nº\ de\ quinas\ formadas\ com\ 9\ dezenas}{nº\ de\ quinas\ formadas\ com\ 84\ apostas\ de\ 6\ dezenas} = \frac{126}{504} = \frac{1}{4}$$

Pode-se concluir que a probabilidade de ganhar a quina no $2º$ caso em relação ao $1º$ caso, é 4 vezes menor.

Comentário sobre a questão: Para resolver a questão o candidato deveria ter um conhecimento prévio de combinação simples e entender que a formação de quinas nada mais é do que a formação de subconjuntos de 5 elementos. Segundo os microdados do ENEM 2009, 32% dos participantes que fizeram a prova azul, acertaram a questão.

14) (Questão 165 - Enem 2009 – prova azul) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.

b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) duas combinações.

e) dois arranjos.

Solução: No problema proposto, escolher as 4 equipes que formarão o grupo A consiste num problema de formar subconjuntos de 4 elementos dentre os 12 elementos disponíveis, logo trata-se de um problema de combinação simples. Em seguida o problema propõe uma segunda etapa de escolha, em que serão escolhidos dois times desse grupo de maneira que o primeiro escolhido terá a vantagem de jogar em casa e o segundo escolhido será o visitante, nesse caso temos uma escolha ordenada de 2 elementos entre 4 disponíveis, logo trata-se de um problema de arranjo simples.

Comentário sobre a questão: A questão exigia do aluno um domínio teórico sobre combinação simples e arranjo simples e ele teria que ser capaz de reconhecer que quando formamos um agrupamento não ordenado (subconjunto) trata-se de um problema de combinação simples e quando formamos um agrupamento ordenado, trata-se de um arranjo simples.

15**.** (Enem PPL 2020) O governador de um estado propõe a ampliação de investimentos em segurança no transporte realizado por meio de trens. Um estudo para um projeto de lei prevê que se tenha a presença de três agentes mulheres, distribuídas entre os 6 vagões de uma composição, de forma que duas dessas agentes não estejam em vagões adjacentes, garantindo assim maior segurança aos usuários. Disponível em: www.sisgraph.com.br. Acesso em: 29 jan. 2015 (adaptado).

A expressão que representa a quantidade de maneiras distintas das três agentes serem distribuídas nos vagões é

a) $C_4^3 + 3!$

b) C_6^3

c) $C_4^3 \times 3!$

d) A_6^3

e) $A_4^3 \times 3!$

Solução: Para resolver o problema, inicialmente iremos enumerar todas as configurações possíveis em que duas das agentes não apareçam em vagões adjacentes, para isso chamaremos de A um vagão ocupado por uma das agentes e de N um vagão não ocupado por essas agentes.

1ªConfiguração:AVAVAV

2ªConfiguração:AVVAVA

3ªConfiguração:AVAVVA

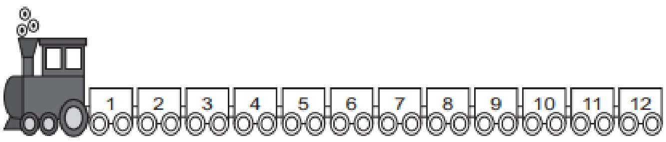
4ªConfiguração:VAVAVA

Em cada configuração podemos distribuir as agentes de $3!$ maneiras, como são 4 configurações, então a quantidade de maneiras distintas das três agentes serem distribuídas nos vagões não ocupando vagões adjacentes é: $4.3!$ e isso pode ser escrito como $C_4^3 \times 3!$.

Comentário sobre a questão: A questão exigia que o participante tivesse conhecimento sobre as maneiras de se representar um valor através da simbologia de combinação simples e arranjo simples. Apesar de atualmente alguns livros didáticos mais novos não abordarem arranjo simples, o ENEM utilizou a simbologia nessa questão. Devido a esse fato não descartei o arranjo simples na abordagem teórica dos métodos de contagem. Como o INEP não divulgou os microdados relativos a prova do ENEM PPL 2020, não foi possível calcular a taxa de acerto dessa questão.

16) (Questão 171 - ENEM 2019 – prova azul) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

Figura 07: Questão 171 - ENEM 2019



Fonte: ENEM (2019)

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$

b) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$

c) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$

d) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$

e) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

Solução: No problema proposto temos uma locomotiva formada por 12 vagões dividiremos o nosso problema em 4 etapas:

Etapa 1 – Dentre os 12 vagões disponíveis, temos que escolher 4 vagões para pintar de vermelho, então queremos montar subconjuntos de 4 elementos entre os 12 elementos disponíveis, o número de maneiras pode ser calculado por: C_{12}^{4}.

Etapa 2 – Aplicada a 1^{a} etapa, devemos escolher 3 vagões, dentre os 8 que restaram, para pintar de azul: C_{8}^{3}.

Etapa 3 – Feita as escolhas da 1^{a} e 2^{a} etapa, devemos escolher 3 vagões, dentre os 5 que restaram, para pintar de verde: C_{5}^{3}.

Etapa 4 – Feita as escolhas da 1^{a}, 2^{a} e 3^{a} etapa, nos resta escolher 2 vagões para pintar de amarelo entre os 2 vagões que restaram: C_{2}^{2}.

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de trens que podem ser montados é dada por: $C_{12}^{4} \times C_{8}^{3} \times C_{5}^{3} \times C_{2}^{2}$.

Comentário sobre a questão: O elaborador já facilitou a compreensão dos participantes quando colocou todas as escritas em função de combinações simples. Um detalhe importante também é perceber que as combinações são multiplicadas pelo fato de executarmos uma etapa e em seguida uma outra etapa, logo aplica-se o principio fundamental da contagem. Segundo os microdados do ENEM 2019, apenas 19% dos participantes que realizaram a prova azul acertaram a questão.

17) (ENEM PPL 2020) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

a) 64.

b) 74.

c) 254.

d) 274.

e) 634.

Solução: Como o cálculo do número de jogos é dado por uma escolha ordenada de duas das vinte equipes que disputam o campeonato, podemos aplicar o principio multiplicativo para obter esse resultado já que temos 20 opções de escolha para a primeira equipe e 19 opções de escolha para a segunda equipe que participará do jogo. Logo o número de jogos será dado por $20 \times 19 = 380$. Então o número de jogos em que houve algum ganhador é dado por: $380 - 126 = 254$.

Solução alternativa: Para resolver o problema devemos inicialmente calcular o número De partidas realizadas nesse campeonato, como cada time joga com o outro em dois turnos, então dados dois times A e B, a partida A versus B é diferente da partida B versus A. Portanto para formar o número de jogos do campeonato temos que calcular o número de agrupamentos ordenados que podemos formar com 2 dos 20 times disponíveis, isso pode ser calculado por $A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 380$. Como podemos afirmar que nas partidas em que não houve empate uma das equipes foi vencedora, então o número de jogos com ganhador é dado por: $380 - 126 = 254$.

Comentário sobre a questão: O problema exigia do participante a capacidade de compreender que como as equipes jogavam em dois turnos, a ordenação era importante para o cálculo do número de jogos. Os participantes que fizeram esse cálculo considerando a formação do número jogos como agrupamentos não ordenados e aplicaram combinação simples na resolução do problema, acharam um total de partidas igual a 190 e quando subtraíram 126, encontraram como alternativa 64 que é a resposta da letra A e consequentemente erraram a questão. Como o INEP não divulgou os microdados do ENEM PPL 2020, não foi possível calcular a taxa de acerto da questão.

18) (Questão 178 - ENEM 2017 – prova azul) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Figura 08: Questão 178 - ENEM 2017

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Fonte: ENEM (2019)

Se a quantidade de jogadores for quantas partidas serão realizadas?

a) 64

b) 56

c) 49

d) 36

e) 28

Solução: Como cada jogador enfrenta uma única vez cada um dos seus adversários, isso significa que ao escolhermos dois jogadores A e B, a partida A versus B e a partida B versus A deve ser contada uma única vez, pois são consideradas a mesma partida, logo temos um agrupamento não ordenado. O número de partidas realizadas por esses jogadores equivale ao número de subconjuntos que podemos formar escolhendo 2 desses 8 elementos disponíveis, isso pode ser calculado através da seguinte combinação simples: $C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$.

Logo o número de partidas realizadas por esses jogadores é igual a 28.

Comentário sobre a questão: O problema exigia do participante a capacidade de compreender que como os jogadores enfrentavam seus adversários uma única vez, a ordenação não era importante para o cálculo do número de jogos. Os participantes que consideraram que o número de partidas consistia na escolha de agrupamentos ordenados com 2 desses 8 elementos, chegaram a um número total de jogos igual $A_{8,2} = 56$ e encontraram a letra B como resposta e consequentemente erraram a questão. Segundo os microdados do ENEM 2017, o percentual de participantes que fizeram a prova azul e acertaram a questão foi de 50%.

19) (Questão 165 - ENEM 2018 – prova azul) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em *design* e tecnologia. Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

a) A_{10}^{4}

b) C_{10}^{4}

c) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

d) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$

e) $C_4^2 \times C_6^2$

Solução: O problema proposto frisa que a posição dos veículos dentro do estande é irrelevante. Dividiremos o problema proposto em duas etapas, a primeira delas calcularemos o número de maneiras de organizar os carros compactos e a segunda calcularemos o número de maneiras de organizar as caminhonetes. Começaremos escolhendo duas posições (uma em cada estande) para alocar quatro dos carros compactos, o número de maneiras de fazermos essa escolha é dado por C_4^2, como esses dois carros compactos podem trocar de posição nesses estandes, então temos $2 \times C_4^2$ maneiras de organizá-los. Agora alocaremos as 6 caminhonetes nas duas posições restantes, o número de maneiras de fazer essa escolha é dado por C_6^2, como essas duas caminhonetes podem trocar de posição nesses estandes, então temos $2 \times C_6^2$ maneiras de organizá-las utilizando o princípio multiplicativo, temos que a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é dada por: $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$.

Comentário sobre a questão: Para resolver essa questão o candidato deveria ter um conhecimento prévio de Arranjo simples e Combinação simples, pois era necessário saber se o problema consistia num agrupamento ordenado ou não. Além disso, era fundamental que o candidato dominasse as notações utilizadas para representar esses dois métodos de contagem. Segundo os microdados do ENEM 2018, 26% dos alunos que realizaram a prova azul acertaram essa questão.

6 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM

6.1 APRESENTAÇÃO

Este material foi elaborado com o intuito de auxiliar professores de Matemática do Ensino Médio, especialmente da 2ª Série, no ensino da Análise Combinatória e na preparação de seus alunos para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O material é composto de uma sequência didática para o Ensino da Análise Combinatória através de Resolução de Problemas no ENEM e foi produzido a partir da dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/UFES) e intitulada como: “O Ensino da Análise Combinatória como Ferramenta Pedagógica na Resolução de Problemas do ENEM”.

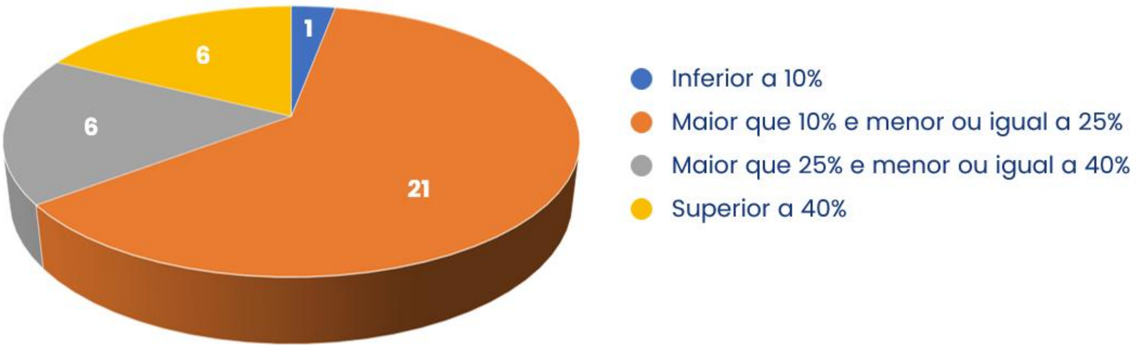
Esta sequência didática foi elaborada utilizando como referência as competências e habilidades do ENEM e da BNCC, o seu desenvolvimento foi organizado em três aulas. Na 1ª aula é trabalhado o conceito de Princípio Fundamental da Contagem e de Princípio Aditivo como ferramenta na resolução problemas, na 2ª aula são trabalhados os conceitos de Permutação Simples e Permutação com Repetição e na 3ª aula são trabalhados os conceitos de Arranjo Simples e de Combinação Simples.

O objetivo deste trabalho é ser um instrumento facilitador para os professores que desejam trabalhar o ensino da Análise Combinatória através de problemas contextualizados, valorizando a criatividade, o espírito investigativo e colocando o aluno como protagonista no processo ensino-aprendizagem. Além disso, busca-se através dessa sequência didática promover um aprendizado significativo para que os estudantes que aprenderem através dela consigam desenvolver as habilidades necessárias para resolverem problemas no modelo dos que tem sido cobrado no ENEM.

6.2 INTRODUÇÃO

Os microdados fornecidos pelo INEP mostram que o resultado dos participantes nas questões que envolvem Análise Combinatória é insatisfatório.

Gráfico 01: Quantidade de itens distribuidos por intervalo percentual de acertos de cada item



Fonte: Autoria própria (2025)

Pensando nisso, este produto educacional tem como objetivo auxiliar professores e alunos da 2ª Série do Ensino Médio no processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Neste trabalho, concentraremos as nossas atenções para que os alunos possam desenvolver a Habilidade 2 (identificar padrões numéricos ou princípios de contagem) presente na competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais (Rabelo, 2013). Além disso, trabalhando de maneira alinhada a BNCC, estamos interessados em desenvolver a habilidade: “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (Brasil, 2018, p. 537).

Para alcançar esses objetivos, propõe-se uma sequência didática baseada na resolução de problemas do ENEM, valorizando o pensamento crítico e o espírito investigativo de cada aluno.

6.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

6.3.1 Matemática

Área de estudo:

- Matemática e suas Tecnologias

Conteúdos abordados:

- Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo.

- Permutação Simples e Permutação Competição.
- Arranjo Simples e Combinação Simples.

Competências e habilidades trabalhadas segundo a Matriz de Referência do ENEM

- Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
- H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem

6.3.2 Competências gerais da BNCC

O presente produto educacional propõe uma sequência didática para o ensino de análise combinatória no Ensino Médio, articulada com as orientações curriculares do Estado do Espírito Santo e com as dez competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A proposta tem como objetivo não apenas o desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas, mas também a formação integral do estudante, promovendo a articulação entre o conteúdo matemático e aspectos cognitivos, sociais, éticos e culturais.

A prática pedagógica sugerida está estruturada em atividades interativas, situações-problema contextualizadas, uso de recursos digitais e estratégias colaborativas, promovendo uma aprendizagem ativa e significativa. Abaixo, descreve-se como essa proposta contribui para o desenvolvimento das competências gerais estabelecidas pela BNCC:

1. Conhecimento: A sequência didática propicia aos estudantes o domínio dos princípios da análise combinatória (princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações), aplicando esse conhecimento à resolução de problemas reais e contextualizados, o que fortalece a capacidade de usar o saber matemático de forma funcional e crítica.

2. Pensamento científico, crítico e criativo: Ao serem desafiados com situações-problema que exigem análise combinatória, os alunos são estimulados a observar padrões, levantar hipóteses, testar estratégias e propor soluções criativas. O uso de jogos, enigmas e desafios matemáticos favorece o raciocínio lógico e a capacidade de inovar.

3. Repertório cultural: A matemática é apresentada não como um saber isolado, mas como parte de uma construção cultural e histórica. São exploradas situações que envolvem jogos populares, festividades e aspectos do cotidiano que exigem contagem e organização de possibilidades, conectando o conteúdo à vivência dos estudantes.

4. Comunicação: Os estudantes são incentivados a expressar suas ideias matemáticas oralmente e por escrito, utilizando diferentes formas de representação (tabelas, diagramas, esquemas, linguagem algébrica e natural), o que contribui para a clareza e precisão na comunicação de raciocínios e argumentos.

5. Cultura digital: A proposta inclui o uso de ferramentas digitais, como o Google Forms que é capaz de gerar planilhas e gráficos com o desempenho dos alunos. Além disso, é uma ótima ferramenta pedagógica para simular o aprendizado, promovendo o letramento digital e a compreensão crítica do uso da tecnologia como aliada na aprendizagem matemática.

6. Trabalho e projeto de vida: Ao participar de projetos que envolvem planejamento, organização de estratégias e tomada de decisões baseadas em possibilidades combinatórias, os estudantes desenvolvem habilidades importantes para a vida acadêmica e profissional, como autonomia, responsabilidade e visão de futuro.

7. Argumentação: Durante as discussões em grupo e as apresentações das soluções, os estudantes são convidados a justificar suas escolhas, defender pontos de vista e refinar suas ideias com base em argumentos consistentes, fortalecendo a capacidade de argumentar com lógica e clareza.

8. Autoconhecimento e autocuidado: A proposta valoriza o processo de aprendizagem individual, respeitando o ritmo de cada estudante e promovendo momentos de reflexão sobre os desafios enfrentados, desenvolvendo a autoconfiança e o reconhecimento de suas potencialidades.

9. Empatia e cooperação: A organização das atividades em grupos favorece a escuta ativa, o respeito às opiniões divergentes e a construção conjunta do conhecimento. Os estudantes aprendem a cooperar, negociar e resolver conflitos de maneira ética e construtiva.

10. Responsabilidade e cidadania: Ao analisar problemas que envolvem planejamento e tomada de decisões coletivas, os estudantes desenvolvem uma

consciência crítica sobre o papel da matemática na sociedade e sobre seu papel como cidadãos ativos e responsáveis.

Em suma, a sequência didática proposta promove uma abordagem pedagógica que vai além do ensino tradicional de fórmulas e técnicas, integrando o conteúdo matemático ao desenvolvimento das competências necessárias para a formação de indivíduos autônomos, críticos e socialmente comprometidos. Dessa forma, a proposta está em plena consonância com os princípios do Currículo do Espírito Santo e da BNCC, fortalecendo a educação matemática como ferramenta de transformação e cidadania.

6.3.3 Proposta pedagógica

Em nosso cotidiano, muitas decisões envolvem escolhas, arranjos e combinações – seja na escolha de uma roupa antes de sair de casa, na organização de livros numa prateleira, na montagem de um cardápio ou na criação de uma senha de segurança. Todas essas situações, por mais simples que pareçam, podem ser resolvidas através da Análise Combinatória. Por isso, é fundamental que os professores percebam a importância desse assunto, não só em sala de aula, mas também no dia a dia, no desenvolvimento do pensamento lógico, no espírito investigativo e na capacidade de resolução de problemas. A presença da Análise Combinatória, no contexto social, pode ser observada na realização de sorteios, formação de grupos e organização de jogos, no contexto tecnológico pode-se observar a presença da Análise Combinatória na área computacional e na criptografia, já contexto cultural desde cerca de 1650 a.C. nota-se a presença da Análise Combinatória em desafios e enigmas populares como o papiro de Rhind.

Para tornar o aprendizado do conteúdo mais significativo é fundamental que os estudantes sejam colocados perante a situações problemas que representem desafios reais, despertando a curiosidade e o pensamento crítico. Imagine por exemplo, se quiséssemos descobrir a chance que uma pessoa teria de ganhar na mega sena ao se realizar uma aposta simples. Como faríamos esses cálculos? Através de qual método de contagem podemos chegar ao resultado? Por que uma pessoa que marca sete números tem mais chance de ganhar do que uma pessoa que marcou seis? O objetivo deste trabalho é propor uma sequência didática que auxilie professores do Ensino Médio, especialmente da 2ª Série, no ensino da Análise Combinatória, utilizando problemas contextualizados como este que foi apresentado, a fim de promover o desenvolvimento das habilidades necessárias para que os estudantes sejam capazes de resolver problemas similares aos que são cobrados no ENEM.

Através desse trabalho, propõe-se uma sequência didática através da resolução de problemas que trabalhem a interpretação, a criatividade e o espírito investigativo. Valorizando o raciocínio lógico, o domínio de conceitos e colocando o aluno como ator principal do processo de ensino-aprendizagem para que não seja apenas um reprodutor de algoritmos prontos, replicando fórmulas sem ao menos ter um entendimento mínimo dos conceitos.

6.3.4 Propostas e Atividades

6.3.4.1 Aula 1: Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo

Objetivo principal da aula: Compreender e aplicar o Princípio Fundamental da Contagem e o Princípio Aditivo na resolução de problemas que envolvam situações de escolha sequencial e alternativa, com foco em problemas do ENEM. Objetivos Específicos:

Identificar situações-problema em que se aplicam o princípio aditivo ou multiplicativo.

Resolver problemas através de listagens de possibilidades e/ou através de diagrama de árvores.

Relacionar o conteúdo com questões do ENEM e discutir diferentes formas de abordagem.

Desenvolver o raciocínio lógico e a organização do pensamento em etapas

Nesta aula será construído o conceito de Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo através de um problema inicial, em seguida os alunos farão uma atividade prática que consiste na resolução de 4 problemas que caíram em provas do ENEM.

6.3.4.2 Aula 2: Permutação Simples e Permutação com Repetição

Objetivo principal da aula: Entender o conceito de permutação como um caso de contagem de ordenações e desenvolver as habilidades necessárias para resolver problemas contextualizados como os que são cobrados na prova do ENEM.

Objetivos Específicos:

Entender o conceito de permutação como um caso de contagem de ordenações.

Distinguir entre situações com elementos distintos e com elementos repetidos. Nesta aula será construído o conceito de Permutação Simples através de um exemplo simples de ordenação. Num segundo exemplo aborda-se casos específicos de ordenação, em seguida insere-se uma situação que envolve permutação com repetição. Por fim, os alunos são confrontados com 4 problemas que já caíram em provas do ENEM.

6.3.4.3 Aula 3: Arranjo Simples e Combinação Simples

Objetivo geral: Compreender os conceitos de arranjo simples e combinação simples, diferenciando situações em que a ordem é ou não relevante, e aplicar esses conhecimentos em problemas contextualizados, especialmente com foco em questões do ENEM.

Objetivos específicos:

Identificar a diferença conceitual entre arranjos e combinações.

Reconhecer nos enunciados das questões se a ordem influencia o resultado.

Resolver problemas envolvendo agrupamentos com e sem preocupação com a ordem dos elementos.

Apesar de qualquer problema de Arranjo Simples poder ser resolvido através do Princípio Fundamental da Contagem, nesta aula será construído através de um exemplo simples o conceito de Arranjo devido ao fato de o ENEM utilizar a representação de Arranjo em algumas questões. Em seguida também será construído o conceito de Combinação Simples, mostrando que os problemas de combinação são problemas de formação de subconjuntos. Por fim, os alunos serão confrontados com

4 problemas que já caíram em provas anteriores do ENEM.

6.4 AULA 01

Descrição da Atividade

Nesta atividade os alunos, os alunos serão levados a explorar uma situação problema simples do cotidiano que envolva contagem de possibilidades, eles serão incentivados a identificar padrões, propor soluções criativas, desenvolver estratégias de resolução, inicialmente por listagens e por diagrama de árvore. Com base nas descobertas dos próprios alunos, o professor conduzirá a formalização dos conceitos de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e Princípio Aditivo. Por fim, o es alunos serão confrontados com problemas do ENEM. A proposta tem como objetivo trabalhar a interpretação, promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e a compreensão conceitual da Análise Combinatória, integrando a metodologia da resolução de problemas e favorecendo a construção ativa do conhecimento.

Metodologia

Para o desenvolvimento da aula combinaremos a metodologia de aula expositiva com a metodologia de aprendizagem baseada em problemas.

Materiais

- Lousa e Pincéis.
- Folha de papel A4 em branco.
- Lápis, borracha e caneta.
- Laboratório de Informática com acesso à internet.

Tempo Previsto para Execução

A aula deverá ser realizada durante um tempo de 50 minutos. Esse tempo será dividido em três etapas, na primeira delas que consiste na proposição de um problema introdutório e na apresentação de conceitos será utilizado 10 minutos. Na segunda etapa que consiste na aplicação de 4 problemas que já foram cobrados em provas anteriores do ENEM, será utilizado 20 minutos. Por fim, na última etapa será destinado 20 minutos para que os alunos apresentem as suas respectivas soluções e para que possam compartilhar as dificuldades encontradas na hora de resolver os problemas.

Desenvolvimento (Passo a Passo)

1ª etapa – Problema introdutório e apresentação dos conceitos - tempo estimado: 10 minutos.

No primeiro momento da aula, o professor deverá propor o seguinte problema:

Uma lanchonete vende 3 tipos de salgado e 2 tipos de suco, determine:

a) De quantas maneiras ela pode escolher um salgado e um suco.

b) De quantas maneiras ela pode escolher um salgado ou um suco.

O objetivo desse problema é fazer os alunos perceberem de maneira intuitiva a diferença entre o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. O professor disponibilizará este problema no projetor e incentivará os alunos a proporem soluções criativas, sejam elas através da listagem das possibilidades ou através do diagrama de árvore.

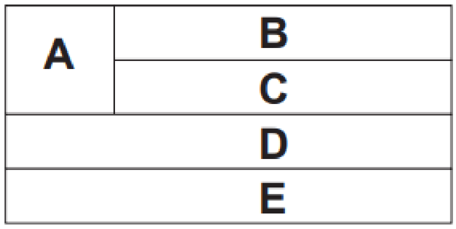
Para finalizar essa etapa, o professor deverá resolver o problema apresentando o conceito de princípio fundamental da contagem e princípio aditivo.

2ª etapa – Resolução de Problemas do ENEM - tempo estimado de 20 minutos.

Nesta etapa o professor irá propor que os alunos resolvam, individualmente, 4 problemas do ENEM que exijam o conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e do Princípio Aditivo, esses problemas serão disponibilizados no Google forms, o aluno deverá resolver numa folha A4 em branco que será entregue e marcar o gabarito no google forms. O intuito é acompanhar de perto o desempenho inicial dos alunos, pois o princípio Fundamental da Contagem é a base de toda Análise Combinatória. Para esta etapa sugerimos 4 problemas:

1) (ENEM PPL 2015) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.

Figura 09: Bandeira



Fonte: ENEM (2015)

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é:

a) $1\times 2\times 1\times 1\times 2$.
b) $3\times 2\times 1\times 1\times 2$.
c) $3\times 2\times 1\times 1\times 3$.
d) $3\times 2\times 1\times 2\times 2$.
e) $3\times 2\times 2\times 2\times 2$.

2) (Enem 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

3) (Enem digital 2020) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Figura 10: Tela de celular

Fonte: ENEM DIGITAL 2020

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$

b) $4^5 + 4^4 + 4^3$

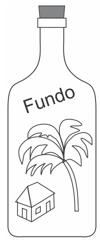
c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$

d) $(4!)^5$

e) 4^5

4) (ENEM 2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

Figura 03: Garrafa de artesanato



Fonte: ENEM 2004

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

3ª etapa – Apresentação das soluções e das dificuldades encontradas – tempo estimado de 20 minutos.

Na última etapa dessa aula, os alunos serão convidados a ir até o quadro para apresentarem as soluções obtidas nos problemas apresentados. O intuito é promover um momento em que os alunos possam compartilhar o seu ponto de vista e as dificuldades encontradas em cada uma das questões.

Avaliação

Sugere-se utilizar a avaliação formativa como método de avaliação, com isso os alunos deverão ser observados e acompanhados durante todo processo para que o professor possa identificar as dificuldades e ajudar os alunos a evoluírem durante o processo. Além disso, o google forms ajudará, nesta primeira aula a identificar o desempenho individual dos alunos nos problemas propostos. Também será avaliado a participação, o desempenho e a proatividade dos alunos durante a apresentação das soluções no quadro para toda a turma.

6.5 AULA 02

Descrição da Atividade

A atividade consiste na resolução orientada de questões do ENEM que envolvem o conceito de Permutação Simples e Permutação com Repetição. Os alunos serão desafiados a interpretar os enunciados e a identificar o tipo de Permutação envolvido.

Metodologia

Ao longo da aula serão utilizadas duas metodologias, sendo utilizada a aula expositiva na 1ª e 2ª etapa, a aprendizagem baseada em problemas na 3ª etapa.

Materiais

- Lousa e Pincéis.
- Folha de atividades impressa.
- Lápis, borracha e caneta.

Tempo Previsto para Execução

O tempo necessário para esta aula é de 50 minutos, sendo destinados 15 minutos a 1ª etapa, 7 minutos a 2ª etapa, 18 minutos a 3ª etapa e por fim, 10 minutos para a 4ª etapa.

Desenvolvimento (Passo a Passo)

1ª etapa – Definição do conceito de fatorial e introdução do conceito de permutação simples – Tempo estimado: 15 minutos.

O professor deverá começar essa etapa definindo fatorial e ensinando as suas operações, enfatizando que o fatorial é uma ferramenta importante para resolução de problemas de Análise Combinatória.

Em seguida o professor irá propor aos alunos o seguinte problema:

De quantas maneiras os alunos André, Bernardo e Carlos podem ser organizados em fila indiana?

Após o aluno perceber que é um simples problema que pode ser resolvido através do princípio fundamental da contagem, será proposto um novo problema: De quantas maneiras n alunos podem ser organizados em fila indiana?

Através desse problema, o professor definirá o conceito de permutação simples e com o objetivo de fortalecer o embasamento teórico do aluno, irá propor e resolver o seguinte problema:

Com as letras da palavra BRASIL, determine:

a) O número de anagramas que podem ser formados.

b) O número de anagramas que começam e terminam com consoante.

c) O número de anagramas que possuem as vogais juntas.

d) O número de anagramas que possuem as consoantes juntas.

e) O número de anagramas que não possuem as vogais juntas.

2ª etapa – Definição do conceito de fatorial e introdução do conceito de permutação com repetição – Tempo estimado: 7 minutos.

Para iniciar essa etapa, será proposto aos alunos o seguinte problema: Quantos são os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra asa?

A ideia é incentivar a criatividade dos alunos para montar a solução mesmo que seja descrevendo cada uma das palavras e com isso eles percebam que ao trocarem de posição duas letras iguais não se formará um novo agrupamento.

Em cima desse problema, será apresentada aos alunos a definição de permutação com repetição e para ampliar a discussão, em seguida, será proposto e resolvido o seguinte problema: Quantos são os anagramas que podem ser formados com as letras da palavra BATATA?

3ª etapa – Resolução de problemas do ENEM - 18 minutos.

Nesta etapa o professor irá propor que os alunos se organizem em duplas para resolverem 4 problemas do ENEM que exijam o conhecimento do Permutação Simples e com Repetição, esses problemas serão disponibilizados em uma folha impressa que deverá ser entregue a cada um dos alunos. Para esta etapa sugerimos 4 problemas:

1) (ENEM digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59

b) 60

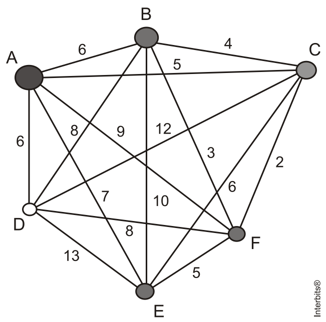
c) 118

d) 119

e) 120

2) (ENEM 2010) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

Figura 11: Custo de deslocamento



Fonte: ENEM (2010)

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes.

Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a) 60 min.

b) 90 min.

c) 120 min.

d) 180 min.

e) 360 min.

3) (ENEM 2020) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”.

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por:

a) $9!$

b) $4!5!$

c) $2 \times 4!5!$

d) $\frac{9!}{2}$

e) $\frac{4!5!}{2}$

4) (ENEM 2016) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

a) $10^2 \cdot 26^2$

b) $10^2 \cdot 52^2$

c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

4ª etapa – Apresentação das soluções e das dificuldades encontradas - duração de 10 minutos.

Na última etapa dessa aula, as duplas de alunos serão convidadas a ir até o quadro para apresentarem as soluções obtidas nos problemas apresentados. O intuito é promover um momento em que os alunos possam compartilhar as suas soluções e as dificuldades encontradas em cada uma das questões.

Avaliação

Sugere-se utilizar a avaliação formativa como método de avaliação, com isso os alunos deverão ser observados e acompanhados durante todo processo para que o professor possa identificar as dificuldades e ajudar os alunos a evoluírem durante o processo. Nessa etapa um dos pontos que será avaliado vai ser a capacidade de trabalhar em equipe, já que os alunos estarão organizados em dupla. Também será avaliado a participação, o desempenho e a proatividade dos alunos durante a apresentação das soluções no quadro para toda a turma.

6.6 AULA 03

Descrição da Atividade

Nesta aula, o professor deverá construir o conceito de Arranjo Simples, mostrando que apesar de todo problema de Arranjo poder ser resolvido pelo Princípio Fundamental da Contagem, é importante conhecê-lo, pois o ENEM utiliza a representação de Arranjo em algumas questões. Além disso, o professor deverá construir junto com os alunos o conceito de Combinação Simples, mostrando que diferentemente do Arranjo, ao aplicar a Combinação não é formado um ordenado, mas sim um subconjunto, por isso a ordem dos elementos não é importante. Em seguida os alunos serão confrontados com questões do ENEM que envolvam arranjos e combinações simples. A atividade será desenvolvida por meio da leitura e interpretação dos enunciados, identificação do tipo de agrupamento e aplicação dos conceitos estudados. Por fim, os alunos serão convidados a apresentar as resoluções e compartilhar as dificuldades encontradas na resolução dos problemas.

Metodologia

Ao longo da aula serão utilizadas três metodologias, sendo utilizada a aula expositiva na 1ª e 2ª etapa, a aprendizagem baseada em problemas na 3ª etapa;

Materiais

- Lousa e Pincéis.
- Folha de atividades impressa.
- Lápis, borracha e caneta.

Tempo Previsto para Execução

O tempo necessário para esta aula é de 50 minutos, sendo destinados 10 minutos a 1ª etapa, 10 minutos a 2ª etapa, 15 minutos a 3ª etapa e por fim, 15 minutos para a 4ª etapa.

Desenvolvimento (Passo a Passo)

1ª Etapa – Construção do conceito de Arranjo Simples – 10 minutos

Para dar início a essa aula será proposto o seguinte problema: Cinco alunos, Arnaldo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo disputam um concurso de Matemática, de quantas maneiras pode-se escolher os três primeiros colocados nesse concurso?

A ideia inicial e que os alunos tenham liberdade para apresentar as suas soluções. Após esse momento será proposto o seguinte problema: Se n alunos estivessem disputando esse mesmo concurso de Matemática, de quantas maneiras pode-se escolher os p primeiros colocados? Ao propor esse problema, o intuito é construir a fórmula de Arranjo Simples junto com os alunos, pois o ENEM costuma representar algumas soluções através da notação de arranjo e da sua fórmula. Enfatizar aos alunos que eles não devem ficar preso a fórmulas, mas é importante conhecê-las.

2ª Etapa – Construção do conceito de Combinação Simples – 10 minutos

O professor iniciará essa etapa propondo o seguinte problema: Quantas duplas podem ser formadas com os alunos Arnaldo, Bernardo e Carlos?

O intuito é instigar os alunos a perceberem que a dupla Arnaldo e Bernardo é a mesma dupla que Bernardo e Arnaldo e que esse problema pode ser resolvido por PFC, mas que devemos sempre dividir pela permutação dos elementos escolhidos, pois essa permutação não gera um novo agrupamento.

Em seguida o professor deverá propor o problema: Quantas comissões de p alunos podem ser formadas se dispõe-se de n alunos? O intuito é chegar até a fórmula de Combinação Simples e mostrar ao aluno a relação entre as fórmulas de Arranjo Simples e Combinação Simples, frisando novamente que não é necessário se apegar a fórmulas, mas é importante conhecê-las já que o ENEM ao longo da sua história tem exigido esse conhecimento em algumas questões.

3ª Etapa – Resolução de Problemas do ENEM – 15 minutos

Nessa etapa, os alunos receberão uma folha impressa com 4 problemas do ENEM e será proposto eu os alunos resolvam, individualmente, estes problemas. Sugerimos os seguintes problemas para aplicação:

1) (Enem PPL/2020) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

a) 64.

b) 74.

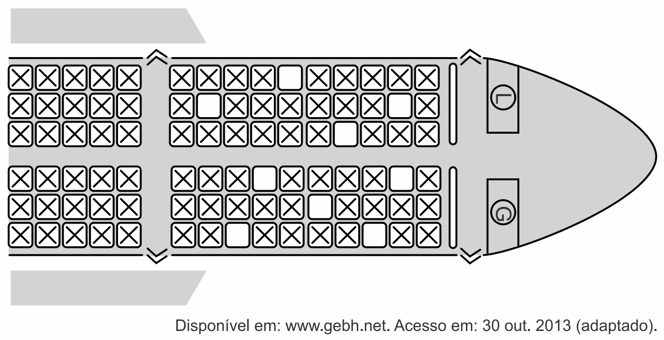
c) 254.

d) 274.

e) 634.

2) (ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Figura 11: Poltronas



Fonte: ENEM 2015

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

3) (ENEM PPL 2020) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

a) 5

b) $5 \cdot 3$

c) $\frac{5!}{(5-3)!}$

d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$

e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

4) (ENEM 2ª aplicação 2010) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Figura 03: Museus nacionais e internacionais

Museus nacionais	**Museus internacionais**
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madri
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova York

Fonte: Autor (2025).

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

a) 6

b) 8

c) 20

d) 24

e) 36

4ª Etapa – Apresentação das soluções e das dificuldades encontradas – duração de 15 minutos

Na última etapa dessa aula, os alunos serão convidados a ir até o quadro para apresentarem as soluções obtidas nos problemas apresentados. O intuito é promover um momento em que os alunos possam compartilhar as suas soluções e as dificuldades encontradas em cada uma das questões.

Avaliação

Sugere-se utilizar a avaliação formativa como método de avaliação, com isso os alunos deverão ser observados e acompanhados durante todo processo para que o professor possa identificar as dificuldades e ajudar os alunos a evoluírem durante o processo. Também será avaliado a participação, o desempenho e a proatividade dos alunos durante a apresentação das soluções no quadro para toda a turma.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os microdados do ENEM, divulgados pelo INEP, indicam que grande parte dos estudantes possuem dificuldades ao se deparar com problemas de Análise Combinatória. Essas dificuldades são oriundas de um modelo de ensino em que o aluno não é colocado como protagonista do processo ensino-aprendizagem, se comportando como um mero reprodutor de algoritmos que são ensinados, por professores, de forma mecânica para resolver determinados tipos de exercícios, utilizando fórmulas sem ao menos compreender os conceitos.

Um outro fator que contribui para que o desempenho dos alunos nas questões de Análise Combinatória no ENEM não seja satisfatório é a falta de continuidade do ensino deste assunto ao longo da educação básica, na proposta apresentada pela BNCC, o aluno tem o primeiro contato com problemas de contagem no 5º ano, depois se depara novamente com o assunto ao longo do 8º ano e em seguida só volta a estudar na 2ª série do ensino. É importante que os professores da educação básica se sintam encorajados para ao longo de todo o ensino fundamental 2 e ensino médio a trabalharem, por conta própria, sempre que possível problemas que estimulem o raciocínio combinatório, o espírito investigativo e a interpretação.

Devido a necessidade de se propor alternativas pedagógicas, a sequência didática que foi proposta tem como objetivo valorizar a criatividade, a interpretação, o espírito investigativo e a autonomia dos alunos. Sendo o aluno o protagonista e o professor o mediador de todo esse processo de ensino-aprendizagem, identificando os erros cometidos ao longo desse percurso, mapeando os conceitos não compreendidos e retomando-os quando necessário, para que os alunos possam alcançar uma aprendizagem significativa e consequentemente desenvolver as habilidades necessárias para que estejam aptos a resolver qualquer modelo de problema de Análise Combinatória.

Através desse trabalho, busca-se auxiliar professores de Ensino Médio no ensino da Análise Combinatória, através de uma sequência didática focada na resolução de problemas contextualizados que estiveram presentes nas provas do ENEM no período entre 2004 e 2024. Neste material, o professor também encontra dados estatísticos sobre as questões de Análise Combinatória que foram cobradas na prova durante esse período, um deles mostra que o Princípio Fundamental da Contagem, seguido da Combinação Simples foram os métodos de contagem mais recorrentes nas provas desses 21 anos de ENEM, fato que pode ser utilizado como ferramenta na preparação dos alunos para obtenção de melhores resultados. Além disso, este trabalho disponibiliza a resolução de 20 questões que foram cobradas nos últimos anos, juntamente com uma análise crítica acerca de cada uma delas, informações que podem ser úteis aos professores no processo de preparação de seus alunos.

Espera-se que os professores que utilizarem o produto educacional anexado a este trabalho sejam capazes de desenvolver em seus alunos as habilidades necessárias para que eles sejam capazes de resolver os problemas de Análise Combinatória que aparecerem no ENEM e consequentemente que os resultados alcançados pelos seus alunos sejam melhores que a média nacional. Por fim, deseja-se aplicar esta sequência didática em trabalhos futuros para análise dos resultados e desenvolvimento de novos estudos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Carlson Guerreiro de; GOMES, Larissa Pinca Sarro; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas na Educação: um panorama de pesquisas recentes. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n.10, p. 1-21, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2070/2847. Acesso em 30 de Julho de 2025.

ALVES, André Carvalho. **Uma introdução ao pensamento combinatório no 9º ano do ensino fundamental**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016. Disponível em: <arquivo fornecido>. Acesso em: 22 ago. 2025.

AQUINO, Claudivânia de Alencar de. **Análise de erros em equações do 2º grau em turmas de ensino médio**. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2011. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/profmat/dissertacoes/claudivania_de_alencar_de_aquino_turma_2011.pdf. Acesso em: 22 ago. 2025.

BARBOSA, Letícia Coelho. ***Sequência didática mediada pelas novas tecnologias nas metodologias ativas.*** Recurso digital. Rio de Janeiro: UniCarioca, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. In**stituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: 06 de agosto de 2025.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** 2. ed. Brasília: MEC/SEF, 2001.

COLINS, Fábio; COLINS, Érica. **Problemas de pensamento combinatório nos anos iniciais do ensino fundamental.** Congresso nacional de educação. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA13_ID2584_26042020212227.pdf. Acesso em: 15 de outubro de 2025.

CUNHA, M.; REGO, A. Métodos qualitativos nos estudos organizacionais e de gestão. **Revista de Gestão dos Países de Língua Portuguesa**, Rio de Janeiro, v. 18, n. 3, p. 188-206, dez.2019. Acesso em 30 de Julho de 2025.

DA SILVA, Ademir; BENTO, Débora Aparecida. **A mediação didática e os registros de representação semiótica na educação matemática**. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 13, n. 29, p. 199-222, maio/ago. 2024. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/9038/6897. Acesso em: 22 ago. 2025.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries.** São Paulo: Ática, 1989.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos-8ª série do ensino fundamental.** São Paulo, 2001, 203f. Dissertação (Mestrado Em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontífice Universidade Católica de São Paulo, 2001.

FERREIRA, Francinária, Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas, 2013, Dissertação, Mestrado, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2013. https://portais.univasf.edu.br/profmat/dissertacoes/francinaria_parente_ferreira_turma_2011.pdf. Acesso em: 15 de Outubro de 2025.

GÓMEZ-GRANEL, C. **A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado.** In A. Teberosky & L. Tolchinsky (Eds.), Além da alfabetização – Aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 2008.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**: Combinatória, Probabilidade.. 8ª ed. São Paulo: Atual, v. 5, 2013. (Fundamentos da Matemática Elementar).

LIMA, E; CARVALHO, P; WAGNER, E; MORGADO, A; **Temas e Problemas Elementares.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 201.

LÓS, Dayvid; GUSMÃO, Cristine. CombInter: repercussões no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo, V24, p. 01-26, 2025. Disponível em: Vista do CombInter: repercussões no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória. Acesso em 15 de outubro de 2025.

LUPINACCI, M. L. V; BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

MENDONÇA, Luciane. **Trajetória hipotética de aprendizagem**: análise combinatória. 245 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC -- SP, São Paulo, 2011.

MOURA, Valéria da Silva. **A matemática como mediadora da leitura de mundo**. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 10, n. 7, p. 2071-2083, 2024. Disponível em: https://revista.scientificsociety.net/wp-content/uploads/2024/07/Art.171-2024.pdf. Acesso em: 22 ago. 2025.

MORGADO, A. C. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 2001.

NASCIMENTO, Daiane Gomes do; NASCIMENTO, José Edson Ferreira. **A importância da matemática financeira para a vida cotidiana**. In: **CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – CONEDU**, 7., 2020, Maceió. Anais [...]. Campina Grande: Editora Realize, 2020. Disponível em:

https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA13_ID2584_26042020212227.pdf. Acesso em: 22 ago. 2025.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas; tradução / de / Heitor Lisboa de Araújo.** Rio de Janeiro, interciência, 1978.

PORTAL DA OBMEP. **Princípio fundamental da contagem.** Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=15. Acesso em 12 de julho de 2024.

RABELO, M. **Avaliação Educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SCHLIEMANN, A. D.; Na vida dez, na escola zero / Analúcia Dias Schliemann, David William Carraher, Terezinha Nunes Carraher. – 12a. ed. – São Paulo, Cortez, 2001.

SILVA, Iago Barros dos Anjos. **Estudo dos estilos de pensamento matemático de estudantes do ensino médio em aulas de geometria analítica: um olhar sob a perspectiva da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud**. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2024. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/48354/1/IagoBarrosDosAnjosSilva_DISSERT.pdf. Acesso em: 22 ago. 2025.

SOARES DE OLIVEIRA, Maxwel; RODRIGUES GOTTARDI, Thiago. Ensino de análise combinatória na perspectiva de resolução de problemas: estado do conhecimento. **Revista Sociedade Científica**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 3010–3028, 2024. DOI: 10.61411/rsc202461817. Disponível em: https://journal.scientificsociety.net/index.php/sobre/article/view/618. Acesso em: 6 ago. 2025.

SOUZA, Ricardo; CALEJON, Laura. **Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no Ensino da 19 Estatística Descritiva.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 10, n. 4, p. 227-244, 18 jul. 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2432 Acesso em: o4 março. 2025.

YOUTUBE. **Canal do IMPA.** Disponível em: https://www.youtube.com/@impabr. Acesso em 12 de julho de 2024.

ANEXO I: MODELO DE TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TLCE)

O(A) Sr.(a) ____foi convidado (a) a participar da pesquisa intitulada ____________________________________, sob a responsabilidade de **(nome do mestrando)**.

JUSTIFICATIVA

Explicar em dez a 12 linhas a razão de se fazer a pesquisa e sua importância.

OBJETIVO(S) DA PESQUISA

A pesquisa tem o objetivo geral de __________________________________. Seus objetivos específicos são: 1) __________________________________, 2) _______________________, 3) __________________________________ .

PROCEDIMENTOS

Se você concordar em participar deste estudo será solicitado que responda a um questionário, que será enviado por e-mail, contendo perguntas sobre _____________________________ .

DURAÇÃO E LOCAL DA PESQUISA

Você poderá responder o questionário no local em que sentir-se mais confortável, visto que será enviado por -email. O questionário é curto e tomará cerca de X minutos do seu tempo.

RISCOS E DESCONFORTOS

Durante a sua participação neste projeto você consentirá acesso às informações sobre ______________________ na organização ____________________, que serão mantidas em sigilo. O risco de quebra de sigilo pode ocorrer, mas será minimizado pelo comprometimento do(a) pesquisador(a) em garantir o sigilo dos dados.

BENEFÍCIOS

Não haverá benefícios diretos para você que não a satisfação de participar desta pesquisa para o possível benefício _________________________________. Sua participação é muito importante para o sucesso desta pesquisa científica.

ACOMPANHAMENTO E ASSISTÊNCIA

Como o questionário será respondido em poucos minutos, não há necessidade de acompanhamento ao longo da pesquisa, caso necessite de assistência o(a) pesquisador(a) responsável poderá ser contatado(a).

GARANTIA DE RECUSA EM PARTICIPAR DA PESQUISA E/OU RETIRADA DE CONSENTIMENTO

O(A) Sr.(a) não é obrigado(a) a participar da pesquisa, podendo deixar de participar dela em qualquer momento, sem que haja penalidades ou prejuízos. Caso decida retirar seu consentimento, o(a) Sr.(a) não mais será contatado(a) pela pesquisador(a).

GARANTIA DE MANUTEÇÃO DO SIGILO E PRIVACIDADE

As informações relativas à sua participação no estudo serão mantidas confidenciais e serão usadas apenas para fins científicos.

GARANTIA DE RESSARCIMENTO FINANCEIRO E INDENIZAÇÃO

Além disso, não há qualquer valor econômico, a receber ou a pagar, pela sua participação nesta pesquisa. Porém, é garantida indenização mediante eventuais danos decorrentes da pesquisa, desde de que comprovados por meio de decisão judicial ou extrajudicial, de acordo com o item IV.4.c da Res. CNS 466/12.

ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o(a) Sr.(a) pode contatar o(a) pesquisador(a) (nome do(a) aluno(a)) nos telefone ___________________________ ou endereço Rua ____________________. nº ___, Bairro _________, Cidade/ estado _________________, CEP________. O(A) Sr.(a) também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa do (CCH ou CCS da Ufes, ou outro mais adequado à sua pesquisa) cujo telefone é (27) ___________, e-mail ___________________________, endereço: Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, Prédio _________ do Centro ________, Rua ____________________. nº ___, Bairro _________, Cidade/ estado _________________, CEP________. O CEP/(centro)/UFES tem a função de analisar projetos de pesquisa visando à proteção dos participantes dentro de padrões éticos nacionais e internacionais. Seu horário de funcionamento é de segunda a sexta-feira, das 8h às 14h.

Declaro que li e não tenho dúvidas sobre o presente documento, entendendo todos os termos acima expostos, e que voluntariamente aceito participar deste estudo. Também declaro ter recebido uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, de igual teor, assinada pelo(a) pesquisador(a) principal ou seu representante, rubricada em todas as páginas.

LOCAL, DATA

____

Participante da pesquisa/Responsável legal

Na qualidade de pesquisador responsável pela pesquisa "**________________.**", eu, **nome do mestrando**, declaro ter cumprido as exigências da Resolução CNS 466/12, a qual estabelece diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos.

____

Nome do mestrando