Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Soluções positivas de um sistema elíptico semilinear nos casos crítico e supercrítico

Fernando Pereira Paulucio Reis

Vitória, junho de 2011

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de múltiplas soluções positivas de um sistema de equações elípticas semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Tais resultados foram demonstrados por Pigong Han. O método de sub-supersolução permite obter uma solução minimal quando um parâmetro $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. No caso crítico, utilizando o método variacional, é possível garantir a existência de uma segunda solução positiva. No caso supercrítico, utilizando a identidade de Pohozaev, obtém-se que a existência de soluções está condicionada à existência de soluções não negativas de dois problemas elípticos lineares.

Abstract

In this work we study the existence of multiple positive solutions for a system of elliptic equations involving critical Sobolev exponent in a bounded domain in $\mathbb{R}^N$. These results were demonstrated by Pigong Han. The sub-supersolution method allows to obtain a minimal solution when a parameter $\varepsilon > 0$ is small enough. In the critical case, by using the variational method, we may prove the existence of a second positive solution. In the supercritical case, by using the Pohozaev identity, we obtain that the existence of solutions is related to the existence of nonnegative solutions for two linear elliptic problems.

Sumário

Introdução **1**

1 Resultados preliminares **4**

1.1 Espaços L^p e espaços de Sobolev 4

1.2 O problema de Dirichlet 7

1.3 Princípios do Máximo 8

1.4 O método de sub-supersolução 9

1.5 Três desigualdades 12

1.6 Um teorema minimax 14

2 Existência de uma solução minimal **15**

3 Existência de uma segunda solução **27**

4 O caso supercrítico **57**

Referências Bibliográficas **67**

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de múltiplas soluções do sistema de equações elípticas semilineares

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^{\beta} + \varepsilon f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\,|u|^{\alpha}\,v\,|v|^{\beta-2} + \varepsilon g(x), & \text{em } \Omega, \\ u > 0,\ v > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_\varepsilon$}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\theta}$, para algum $\theta \in (0,1)$, $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha, \beta > 1$ são números reais e $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são funções conhecidas.

Observamos que tomando $\alpha = \beta = (p+1)/2$, $u = v$ e $f = g$, o problema (P$_\varepsilon$) reduz-se ao problema semilinear elíptico escalar

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \varepsilon f(x), & \text{em } \Omega, \\ u > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Para $p = \dfrac{N+2}{N-2}$, Tarantello [20] provou que (1) admite duas soluções em $H_0^1(\Omega)$ para $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Cao e Zhou em [8] consideraram uma forma mais geral de (1), que é:

$$\begin{cases} -\Delta u = cu^p + f(x,u) + \varepsilon h(x), & \text{em } \Omega, \\ u > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $c > 0$. Através do método de sub-supersolução e a abordagem variacional, eles provaram que (2) admite pelo menos duas soluções para $h \in H^{-1}(\Omega)$, quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e supondo que f satisfaz certas condições. Squassina [18] considerou um caso mais geral de (2), a saber, uma classe de problemas não lineares com crescimento crítico e com perturbações de mais baixa ordem, obtendo a existência de duas soluções não triviais através de um argumento de minimização local e uma versão do teorema do passo da montanha. Em um estudo recente, Alves et al [2] consideraram o seguinte sistema de equações elípticas

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^{\beta}, & \text{em } \Omega, \\ \\ -\Delta v = bu + cv + \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\,|u|^{\alpha}\,v\,|v|^{\beta-2}, & \text{em } \Omega, \\ u > 0,\ v > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

e generalizaram o resultado correspondente em [6] para o caso do problema (3).

O objetivo desse trabalho é estudar resultados de existência de soluções para o sistema (P_ε), demonstrados por P. Han em [12]. Para f, g não negativas e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o método de sub-supersolução permite obter uma solução minimal de (P_ε). Mais especificamente, vale o seguinte teorema.

Teorema A *Suponhamos que $\alpha, \beta > 1$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. Então existe um número $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ o problema (P_ε) possui uma solução minimal $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ e valem*

(i) $||z_\varepsilon||_\infty \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$;

(ii) $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$ e $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ *para todos* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *em* $(0, \varepsilon^*)$.

Além disso, o problema (P_ε) não tem solução para $\varepsilon > \varepsilon^*$.

No caso $\alpha + \beta = 2^*$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, a existência de uma segunda solução de (P_ε) pode ser obtida utilizando o método variacional e argumentos presentes em [2].

Teorema B *Suponhamos que $N \geq 5$, α, $\beta > 1$, $\alpha + \beta = 2^*$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$* são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. *Então existe $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$, com ε^* obtido no Teorema A, tal que para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$, o problema (P_ε) admite uma segunda solução $\overline{z} = (\overline{u}, \overline{v})$, com $\overline{u} > u_\varepsilon$ e $\overline{v} > v_\varepsilon$ em Ω, onde $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é a solução obtida pelo Teorema A.*

No próximo teorema, a hipótese de f, g serem não negativas é removida. A existência de soluções para o problema (P_ε) está relacionada com a existência de soluções não negativas para os dois seguintes problemas lineares elípticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} -\Delta v = g(x), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Mais especificamente, vale o seguinte resultado, onde denotamos por $(\widehat{P}_\varepsilon)$ o problema (P_ε) sem a condição $u > 0,\ v > 0$ em Ω.

Teorema C *Seja* Ω *um domínio estrelado do* $\mathbb{R}^N$, de classe C^1, com $N \geq 3$. *Sejam* $\alpha, \beta > 1$ *e* $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ tais que $f, g \not\equiv 0$ em Ω.

(*i*) *Se os dois problemas (4) e (5) tem soluções não negativas então o problema* $(\widehat{P}_\varepsilon)$ *tem pelo menos uma solução não negativa* $\overline{z_\varepsilon} = (\overline{u}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)$ *para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

(*ii*) *Se* $\alpha + \beta > 2^*$, *com* $\alpha, \beta \in (1, 2^*]$ *então vale a recíproca do item* (*i*). *Além disso,* $||\overline{z}_\varepsilon|| \to 0$ *com* $\varepsilon \to 0$, *onde* $||\cdot||$ *denota a norma do espaço de Banach* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Observamos que os problemas (4) e (5) podem admitir soluções não negativas com f e g que mudam de sinal satisfazendo certas condições (veja [7]).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, reunimos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para as demonstrações dos teoremas. Nos Capítulos 2, 3 e 4 apresentamos as demonstrações dos Teoremas A, B e C, respectivamente.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo reunimos alguns conceitos e resultados importantes que serão utilizados ao longo desse trabalho.

1.1 Espaços L^p e espaços de Sobolev

As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontrados, por exemplo, em [1] e [4].

Para $1 \leq p < \infty$ e Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Designamos por p' o expoente conjugado de p, isto é, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b > 0$, vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

A desigualdade acima, conhecida como desigualdade de Young, é usada para demonstrar a desigualdade de Hölder.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Holder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $|| \; ||_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$. $\left(L^p, || \; ||_p \right)$, $1 < p < \infty$, é um espaço de Banach reflexivo e separável. Seguem os principais resultados dos espaços L^p que utilizamos nesse trabalho.

Teorema 1.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Suponhamos que*
(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
(ii) existe uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.
Então $f \in L^p(\Omega)$ e $||f_n - f||_p \to 0$.

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, se (f_n) é uma sequência limitada de $L^p(\Omega)$ então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para uma certa função g. O próximo resultado (ver Lema 4.8 em [14]) garante que se já tivermos que (f_n) converge para f q.t.p. em Ω então, necessariamente, $g = f$.

Teorema 1.3 *Seja $1 < p < \infty$. Se (f_n) é uma sequência limitada de $L^p(\Omega)$ que converge para f q.t.p. em Ω, então*

$$\int_\Omega f_n(x) \varphi(x) \, dx \to \int_\Omega f(x) \varphi(x) \, dx, \text{ para todo } \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ um multiíndice. A derivada fraca $D^\alpha u$, quando existe, é uma função $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega g_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$. Observamos que $D^\alpha u$ é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Denotamos por $W^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$, o espaço das funções k vezes diferenciáveis, isto é, o espaço das funções cujas derivadas fracas $D^\alpha u$ existem para todo $|\alpha| \leq k$.

Se Ω é um domínio de $\mathbb{R}^N$, denotamos por $W^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$, o espaço das funções k vezes fracamente diferenciáveis, isto é, o espaço das funções cujas derivadas fracas $D^\alpha u$ existem para todo $|\alpha| \leq k$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é definido por

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo} 1 \leq |\alpha| \leq k \right\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está dotado da norma $||u||_{W^{k,p}} = ||u||_p + \sum_{|\alpha|=1}^{k} ||D^{\alpha}u||_p$. Designamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o completamento de $C_c^{\infty}(\Omega)$ na norma de $W^{k,p}(\Omega)$. O espaço $\left(W^{k,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{k,p}}\right)$ e o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ com a norma induzida pela norma de $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach separáveis para $1 \leq p < \infty$ e reflexivos para $1 < p < \infty$. Denotamos o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega)$.

Recordamos que se $(E, ||.||_E) \subset (F, ||.||_F)$ são dois espaços de Banach então dizemos que E está imerso continuamente em F se o operador $id : E \to F$, dado por $id(x) = x$, é um operador linear e contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $||u||_F \leq C\,||u||_E$ para todo $u \in E$. Se além disso, cada sequência limitada em E possui uma subsequência convergente na norma de F dizemos que a imersão é compacta. No que segue, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Teorema 1.4 *Se $N \geq 3$, existe uma constante $C = C(N)$ tal que*

$$||u||_{2^*} \leq C\,||\nabla u||_2\,, \text{ para todo } u \in C_c^{\infty}(\Omega)\,,$$

e por completamento, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é uma imersão contínua.

Teorema 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, N)$ tal que*

$$||u||_2 \leq C\,||\nabla u||_2\,, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Em particular, a Desigualdade de Poincaré nos informa que quando Ω é um domínio limitado, $||\nabla u||_2$ é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma $||u||_{H^1}$. Denotamos $||u||_{H_0^1(\Omega)} = ||\nabla u||_2$. Também como consequência do Teorema 1.4 e da Desigualdade de Hölder, sendo Ω um domínio limitado, temos que, para $N \geq 3$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $1 \leq q \leq 2^*$. Mais precisamente, podemos enunciar o resultado de compacidade a seguir.

Teorema 1.6 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é uma imersão compacta para todo $1 \leq q < 2^*$.*

Combinamos os resultados acima, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.7 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N, N \geq 3$. Seja (u_n) uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$;

(ii) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $L^{2^*}(\Omega)$;

(iii) $u_n \to u$ fortemente em $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$;

(iv) $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;

(v) $|u_n(x)| \leq h_q(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h_q(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$.

O teorema a seguir reúne as mais importantes imersões dos espaços $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.8 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$. Sejam j e k números inteiros não negativos e $1 \leq p < \infty$. Então*

(i) se $kp < N$ então a imersão $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, para todo $p \leq q \leq Np/(N-kp)$;

(ii) se $kp = N$ então a imersão $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, para todo $p \leq q < \infty$;

(iii) se $kp > N > (k-1)p$, então a imersão $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ é contínua para todo $0 < \theta \leq k - \dfrac{N}{p}$;

(iv) se $N = (k-1)p$, então a imersão $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ é contínua, para todo $0 < \theta < 1$.

1.2 O problema de Dirichlet

Teorema 1.9 *Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\alpha}$, $c \leq 0, f \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta v + cv = f, & \text{em } \Omega, \\ v = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução $v \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||v||_{C^{2,\alpha}} \leq C(||f||_{C^{0,\alpha}} + ||\varphi||_{C^{2,\alpha}}).$$

Como referência do teorema acima veja, por exemplo, Teorema 1.4 e Corolário 1.1 em [10].

Teorema 1.10 *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{1,1}\left(\overline{\Omega}\right)$ *e* $c \leq 0$. *Então se* $f \in L^p(\Omega)$, *com* $1 < p < \infty$, *o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta v + cv = f, & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$||v||_{W^{2,p}} \leq C\,||f||_{L^p}.$$

Como referência do teorema acima citamos, por exemplo, Teorema 9.15 e Lema 9.17 em [11].

1.3 Princípios do Máximo

As demonstrações dos resultados a seguir podem ser encontradas em [11].

Teorema 1.11 (Princípio do Máximo Fraco) *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$. *Suponha* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. *Se* $\Delta u + cu \geq 0$ *e* $c \leq 0$ *em* Ω, *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Se $\Delta u + cu \leq 0$ *e* $c \leq 0$ *em* Ω, *então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ *e* $u^- = \min\{u, 0\}$.

Teorema 1.12 (Lema de Hopf) *Suponha que* L *é uniformemente elíptico,* $c \equiv 0$, $Lu \geq 0$ *em* Ω. *Seja* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

(i) u *é contínua em* x_0;

(ii) $u(x_0) > u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$;

(iii) $\partial\Omega$ *satisfaz a condição da esfera interior em* x_0, *isto é, existe uma bola* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial B$.

Então a derivada normal exterior de u *em* x_0, *se existir, satisfaz a desigualdade estrita*

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0.$$

Teorema 1.13 (Princípio do Máximo Forte) *Seja* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^N$ *e* $u \in C^2(\Omega)$. *Se* $\Delta u \geq 0$ *(respectivamente,* $\Delta u \leq 0$*) em* Ω *e* u *atinge seu máximo (respectivamente, mínimo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*

1.4 O método de sub-supersolução

Vamos analisar uma versão do método de sub-supersolução que encontra soluções clássicas. Como referência do que segue, podemos citar, por exemplo, seção 13.2 em [15].

Seja Ω um domínio de classe $C^{2,\alpha}$, limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$. Consideramos o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = h\left(x,u\right), & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ são funções conhecidas. Dizemos que uma função $u_+ \in C^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ é uma supersolução do problema (1.1) quando

$$\begin{cases} \Delta u_+ \leq h\left(x,u_+\right), & \text{em } \Omega, \\ u_+ \geq \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Similarmente, dizemos que uma função $u_- \in C^2\left(\Omega\right) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ é uma subsolução do problema (1.1) quando

$$\begin{cases} \Delta u_- \geq h\left(x,u_-\right), & \text{em } \Omega, \\ u_- \leq \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se, além disso, tivermos $u_- \leq u_+$, então dizemos que u_-, u_+ são barreiras globais do problema (1.1).

Teorema 1.14 *Suponhamos que $h \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}\left(\partial\Omega\right)$. Se u_-, $u_+ \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ são barreiras globais do problema (1.1), então (1.1) admite uma solução $u \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo $u_- \leq u \leq u_+$.*

Demonstração. Sejam $c_1 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u_-\left(x\right)$, $c_2 = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} u_+\left(x\right)$ e $k > 0$ tal que

$$k \geq \max\left\{\left|\frac{\partial h}{\partial s}\left(x,s\right)\right| : \left(x,s\right) \in \overline{\Omega} \times \left[c_1, c_2\right]\right\}. \tag{1.2}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $t, r \in \left[c_1, c_2\right]$, com $t \leq r$, existe $\xi \in [t, r]$ tal que

$$h\left(x,r\right) - h\left(x,t\right) = \frac{\partial h\left(x,\xi\right)}{\partial s}\left(r-t\right) \leq k\left(r-t\right). \tag{1.3}$$

Definimos o operador linear elíptico $L = -\Delta + k$. Consideramos $u_0 = u_+$. Pelo Teorema 1.9, definimos indutivamente (u_m) em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $m \in \mathbb{N}$, como a única solução do problema

$$\begin{cases} Lu_m = -h\left(x,u_{m-1}\right) + ku_{m-1}, & \text{em } \Omega, \\ u_m = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Afirmamos que

$$u_0 \geq u_1 \geq ... \geq u_m \geq ... \geq u_- \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Para provar esse fato notamos, inicialmente, que

$$\begin{cases} Lu_1 = -h(x, u_0) + ku_0, & \text{em } \Omega, \\ u_1 = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Observamos que, como $u_0 = u_+$ é supersolução de (1.1),

$$Lu_0 = -\Delta u_0 + ku_0 \geq -h(x, u_0) + ku_0 = Lu_1, \text{ em } \Omega,$$

e

$$u_0 = u_+ \geq \varphi = u_1, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Definindo $w = u_0 - u_1$, temos que $Lw \geq 0$ em Ω e $w \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Princípio do Máximo Fraco, $\min\limits_{\overline{\Omega}} w \geq \min\limits_{\partial\Omega} w^- = 0$. Logo, $w \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, ou seja, $u_0 \geq u_1$ em $\overline{\Omega}$. Além disso, por (1.3),

$$h(x, u_+) - h(x, u_-) \leq k(u_+ - u_-), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Daí, e do fato de u_- ser subsolução de (1.1),

$$Lu_- = -\Delta u_- + ku_- \leq -h(x, u_-) + ku_- \leq -h(x, u_+) + ku_+ = -h(x, u_0) + ku_0 = Lu_1 \text{ em } \Omega.$$

Logo $L(u_1 - u_-) \geq 0$ em Ω e $u_1 - u_- \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Novamente, pelo Princípio do Máximo Fraco, concluímos que $u_1 \geq u_-$ em $\overline{\Omega}$. Assim, notamos que $u_0 \geq u_1 \geq u_-$, em $\overline{\Omega}$ e $Lu_0 \geq Lu_1 \geq Lu_-$ em Ω. Por argumento de indução, supomos que

$$\begin{aligned} u_{m-1} \geq u_m \geq u_-, &\quad \text{em } \overline{\Omega}, \\ Lu_{m-1} \geq Lu_m \geq Lu_-, &\quad \text{sobre } \Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por (1.4), (1.6) e (1.3)

$$Lu_m = -h(x, u_{m-1}) + ku_{m-1} \geq -h(x, u_m) + ku_m = Lu_{m+1}, \text{ em } \Omega.$$

Segue que $L(u_m - u_{m+1}) \geq 0$ em Ω e $(u_m - u_{m+1}) \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Princípio do Máximo Fraco, deduzimos que $u_m \geq u_{m+1}$ em $\overline{\Omega}$. Resta mostrar que $u_{m+1} \geq u_-$ em $\overline{\Omega}$. De fato, por (1.4), (1.6) e (1.3),

$$Lu_{m+1} = -h(x, u_m) + ku_m \geq -h(x, u_-) + ku_- = Lu_-, \text{ em } \Omega.$$

Seja $s_{m+1} = u_{m+1} - u_-$. Segue que $Ls_{m+1} \geq 0$ em Ω e $s_{m+1} \geq 0$ sobre $\partial\Omega$. Novamente, pelo Princípio do Máximo Fraco, $s_{m+1} \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto, $u_{m+1} \geq u_-$ em $\overline{\Omega}$. Assim, (u_m) é uma sequência monótona não-crescente e limitada inferiormente por u_-. Logo, para cada $x \in \overline{\Omega}$, existe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. Definimos a função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. Observamos que $u_+ \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$. Pelo Teorema 1.2, $u \in L^p(\Omega)$ e $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Agora, pela definição de L e por (1.4), para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$-\Delta u_m + ku_m = Lu_m = -h(x, u_{m-1}) + ku_{m-1}, \tag{1.7}$$

e

$$-\Delta u_n + ku_n = Lu_n = -h(x, u_{n-1}) + ku_{n-1}. \tag{1.8}$$

Daí,

$$\begin{cases} \Delta(u_m - u_n) - k(u_m - u_n) = h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1}) + k(u_{n-1} - u_{m-1}), & \text{em } \Omega, \\ u_n - u_m = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observamos que, para todo $p \geq 1$,

$$h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1}) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^p(\Omega)$$

e

$$k(u_{n-1} - u_{m-1}) \in C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^p(\Omega).$$

Então, $(u_m - u_n)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta v - kv = f(x), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f(x) = h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1}) + k(u_{n-1} - u_{m-1}) \in L^p(\Omega)$. Pelo Teorema 1.10, $(u_m - u_n) \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} ||u_m - u_n||_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq c\, ||f||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ||h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1})||_{L^p(\Omega)} + k\, ||u_{n-1} - u_{m-1}||_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por (1.3),

$$\begin{aligned} ||h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1})||^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1})|^p\, dx \\ &\leq k^p \int_\Omega |u_{m-1} - u_{n-1}|^p\, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$||u_m - u_n||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2k\, ||u_{n-1} - u_{m-1}||_{L^p(\Omega)}\,.$$

Como $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$ e, pela desigualdade acima, (u_n) é uma sequência de Cauchy também em $W^{2,p}(\Omega)$. Escolhendo $p > \max\left\{N, \dfrac{N}{1-\alpha}\right\}$, pelo Teorema 1.8 (iii), $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ continuamente. Logo, (u_n) também é uma sequência de Cauchy em $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. Pelo Teorema 1.9,

$$||u_m - u_n||_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq C\, ||f(x)||_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}\,.$$

Daí, por (1.3),

$$\begin{aligned} ||u_m - u_n||_{C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} &\leq C\, ||h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1}) + k(u_{n-1} - u_{m-1})||_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \\ &\leq C\, ||h(x, u_{m-1}) - h(x, u_{n-1})||_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} \\ &\quad + Ck\, ||u_{n-1} - u_{m-1}||_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Como (u_n) é de Cauchy em $C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e $h \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ então $(h(x, u_n))$ é de Cauchy em $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. De (1.9) segue que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ e portanto convergente para u em $C^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \Delta u_n(x) = \Delta u(x)\,, \text{ para todo } x \text{ em } \Omega.$$

Fazendo $m \to \infty$ em (1.7) e usando que h é contínua concluímos que

$$\Delta u = h(x, u)\,, \text{ em } \Omega.$$

Além disso, como $u_n = \varphi$ sobre $\partial\Omega$ e $u_- \leq u_n \leq u_+$ em $\overline{\Omega}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$u = \varphi, \text{ sobre } \partial\Omega,$$

$$u_- \leq u \leq u_+ \text{ em } \overline{\Omega}.$$

■

1.5 Três desigualdades

Lema 1.15 *Sejam $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)\, b^q.$$

Demonstração. Para todo $\varepsilon > 0$ podemos escrever

$$ab = \left((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}\, a\right)\left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Pela desigualdade de Young,

$$ab \leq \frac{\left((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}\, a\right)^{p}}{p} + \frac{\left(\dfrac{b}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{q}}{q} = \varepsilon a^{p} + C(\varepsilon)\, b^{q},$$

onde $C(\varepsilon) := (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}\, q^{-1}$. ■

Lema 1.16 *Sejam $a, b, p \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p < \infty$ e $a, b > 0$. Então*

$$(a+b)^{p} \leq 2^{p-1}\left(a^{p} + b^{p}\right).$$

Demonstração. Segue da convexidade da função $f(t) = t^{p}, t \geq 0$. ■

Lema 1.17 *Seja $p > 1$ .Então existe uma constante $\overline{c} > 0$ que depende de p e tal que*

$$(a+b)^{p} \geq a^{p} + b^{p} + \overline{c}a^{p-1}b, \text{ para todos } a, b \geq 0.$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, a desigualdade é claramente satisfeita. Supomos então que $a, b > 0$. Consideramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 - 1 < p \leq n_0$. Vamos analisar dois casos: $a > b$ ou $a < b$. No primeiro caso, como $0 < \dfrac{b}{a} < 1$ e $n_0 - 1 < p$, temos

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n_0-1} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^{p}. \tag{1.10}$$

Pelo Binômio de Newton,

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^{p} \geq \left(1+\frac{b}{a}\right)^{n_0-1} = \sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{n_0-1}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^{k}, \tag{1.11}$$

onde $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ e $\dbinom{n}{0} = 1$ para $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. De (1.11) e (1.10) e por ser $n_0 \geq p$,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{p} &\geq \binom{n_0-1}{0} + \binom{n_0-1}{1}\frac{b}{a} + \binom{n_0-1}{n_0-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n_0-1}\\ &= 1 + (n_0-1)\,\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n_0-1}\\ &\geq 1 + (p-1)\,\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^{p}.\end{aligned}$$

Multiplicando por a^p, obtemos

$$(a+b)^p \geq a^p + (p-1)\, a^{p-1}b + b^p.$$

No segundo caso, $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ e

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^p &\geq \left(1+\frac{a}{b}\right)^{n_0-1} \\
&\geq \binom{n_0-1}{0} + \binom{n_0-1}{n_0-2}\left(\frac{a}{b}\right)^{n_0-2} + \binom{n_0-1}{n_0-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n_0-1} \\
&= 1 + (n_0-1)\left(\frac{a}{b}\right)^{n_0-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n_0-1} \\
&\geq 1 + (p-1)\left(\frac{a}{b}\right)^{p-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{p},
\end{aligned}$$

uma vez que $n_0 - 2 < p - 1 \leq n_0 - 1 < p$. Multiplicando a última desigualdade por b^p, segue que

$$(a+b)^p \geq b^p + (p-1)\, a^{p-1}b + a^p,$$

também nesse caso. ■

1.6 Um teorema minimax

Teorema 1.18 *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$. Se*

(i) existem $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $I(v) \geq \alpha > 0$ para todo $v \in E$ com $||v|| = \rho$;

(ii) existe $e \in E$ com $||e|| > \rho$ tal que $I(e) < 0$;

então existe uma sequência (u_n) em E satisfazendo $I(u_n) \to c$ e $||I'(u_n)||_{E'} \to 0$ quando $n \to \infty$, onde

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

com

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}.$$

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [21].

Capítulo 2

Existência de uma solução minimal

Neste capítulo obtemos uma solução minimal do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^{\beta} + \varepsilon f(x), & \text{em } \Omega, \\ \\ -\Delta v = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\,|u|^{\alpha}\,v\,|v|^{\beta-2} + \varepsilon g(x), & \text{em } \Omega, \\ u > 0,\ v > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_ε}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\theta}$, para algum $\theta \in (0,1)$, $N \geq 2$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha, \beta > 1$ são números reais e $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são funções conhecidas. Por solução minimal entendemos $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ com $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfazendo (P_ε) e tal que se $z = (u, v)$ com $u, v \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ é outra solução de (P_ε) então $u \geq u_\varepsilon$, $v \geq v_\varepsilon$ em Ω.

Teorema A *Suponhamos que $\alpha, \beta > 1$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. Então existe um número $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ o problema (P_ε) possui uma solução minimal $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ e valem*

(i) $||z_\varepsilon||_\infty \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$;

(ii) $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$ e $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ *para todos* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *em* $(0, \varepsilon^*)$.

Além disso, o problema (P_ε) não tem solução para $\varepsilon > \varepsilon^*$.

Para demonstrarmos o Teorema A, utilizaremos os lemas a seguir.

Lema 2.1 *Suponhamos que $\alpha, \beta > 1$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são tais que $f, g \not\equiv 0$ em Ω. Então existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema (P_ε) possui uma supersolução $(\overline{w}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon)$, com $\overline{w}_\varepsilon > 0$ em Ω.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.9, existe $h \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta h = 1, & \text{em } \Omega, \\ h = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo Forte, $h > 0$ em Ω. Seja $\overline{w}_\varepsilon = \varepsilon^\gamma h$, com $\gamma \in (0,1)$. Para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} -\Delta \overline{w}_\varepsilon - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\overline{w}_\varepsilon^{\alpha-1}\overline{w}_\varepsilon^{\beta} - \varepsilon f(x) &= \varepsilon^\gamma - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{(\alpha+\beta-1)\gamma} h(x)^{(\alpha+\beta-1)} - \varepsilon f(x) \\ &= \varepsilon^\gamma \left(1 - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{(\alpha+\beta-2)\gamma} h(x)^{(\alpha+\beta-1)} - \varepsilon^{1-\gamma} f(x)\right) \\ &\geq \varepsilon^\gamma \left(1 - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{(\alpha+\beta-2)\gamma} \|h\|_\infty^{(\alpha+\beta-1)} - \varepsilon^{1-\gamma} \|f\|_\infty\right) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$-\Delta \overline{w}_\varepsilon - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\overline{w}_\varepsilon^{\alpha}\overline{w}_\varepsilon^{\beta-1} - \varepsilon g(x) \geq \varepsilon^\gamma \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{(\alpha+\beta-2)\gamma} \|h\|_\infty^{(\alpha+\beta-1)} - \varepsilon^{1-\gamma} \|g\|_\infty\right).$$

Como $(\alpha+\beta-2)\gamma > 0$ e $(1-\gamma) > 0$, existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeno tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$,

$$-\Delta \overline{w}_\varepsilon - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\overline{w}_\varepsilon^{\alpha-1}\overline{w}_\varepsilon^{\beta} - \varepsilon f(x) > 0 \tag{2.1}$$

e

$$-\Delta \overline{w}_\varepsilon - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\overline{w}_\varepsilon^{\alpha}\overline{w}_\varepsilon^{\beta-1} - \varepsilon g(x) > 0. \tag{2.2}$$

Como $\overline{w}_\varepsilon = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que $(\overline{w}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon)$ é uma supersolução do problema (P_ε) para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$. Como $h > 0$ em Ω, $\overline{w}_\varepsilon = \varepsilon^\gamma h > 0$ em Ω. ■

Lema 2.2 *Suponhamos que $\alpha, \beta > 1$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. Então existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema (P_ε) admite pelo menos uma solução.*

Demonstração. Inicialmente observamos que, para todo $\varepsilon > 0$, tomando $(u_-, v_-) = (0,0)$, como $f \geq 0$ em Ω, temos $\Delta u_- \geq -\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_- |u_-|^{\alpha-2} |v_-|^\beta - \varepsilon f(x)$ em Ω. Também, como $g \geq 0$ em Ω, $\Delta v_- \geq -\frac{2\beta}{\alpha+\beta} |u_-|^\alpha v_- |v_-|^{\beta-2} - \varepsilon g(x)$ em Ω. Assim, $(u_-, v_-) = (0,0)$

é uma subsolução de (P_ε). Pelo Lema 2.1, existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema ($\mathrm{P}_\varepsilon$) tem uma supersolução $(\overline{w}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon)$ com $\overline{w}_\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 1.14, o problema (P_ε) tem uma solução $(\widetilde{u}_\varepsilon, \widetilde{v}_\varepsilon)$ com a propriedade

$$0 = u_- \leq \widetilde{u}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon \tag{2.3}$$

e

$$0 = v_- \leq \widetilde{v}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Afirmamos que $\widetilde{u}_\varepsilon > 0$ em Ω e $\widetilde{v}_\varepsilon > 0$ em Ω. De fato, como $f, g \geq 0$ em Ω,

$$-\Delta \widetilde{u}_\varepsilon = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \widetilde{u}_\varepsilon^{\alpha-1} \widetilde{v}_\varepsilon^{\beta} + \varepsilon f(x) \geq 0, \text{ em } \Omega$$

e

$$-\Delta \widetilde{v}_\varepsilon = \frac{2\beta}{\alpha+\beta} \widetilde{u}_\varepsilon^{\alpha} \widetilde{v}_\varepsilon^{\beta-1} + \varepsilon g(x) \geq 0, \text{ em } \Omega.$$

Suponhamos que exista $x_1 \in \Omega$ tal que $\widetilde{u}_\varepsilon(x_1) = 0$. Então, $\widetilde{u}_\varepsilon$ atinge o mínimo no interior de Ω. Pelo Princípio do Máximo Forte, $\widetilde{u}_\varepsilon$ seria constante no interior de Ω. Logo seria $\widetilde{u}_\varepsilon \equiv 0$ e isso implicaria que $\varepsilon f \equiv 0$ em Ω, contradizendo a hipótese de que $f \not\equiv 0$ em Ω. Portanto, $\widetilde{u}_\varepsilon > 0$ em Ω. Analogamente, $\widetilde{v}_\varepsilon > 0$ em Ω. ■

Lema 2.3 *Seja $\widetilde{\varepsilon}$ obtido no Lema 2.2. Então para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema (P_ε) possui uma solução minimal $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ e valem*

(*i*) $\|z_\varepsilon\|_\infty \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$;

(*ii*) $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$ *e* $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ *para todos* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *em* $(0, \widetilde{\varepsilon})$.

Demonstração. Para $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$ consideramos $z = (u, v)$ uma solução do problema (P_ε) e $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$ em Ω. Pelo Teorema 1.9, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_0^{\alpha-1} v_0^{\beta} + \varepsilon f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_1 = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} u_0^{\alpha} v_0^{\beta-1} + \varepsilon g(x), & \text{em } \Omega, \\ u_1 = v_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

admite uma única solução $(u_1, v_1) \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$. Além disso, $f \geq 0$ em Ω implica que $\Delta u_1 \leq 0$. Pelo Princípio do Máximo Fraco, $\min\limits_{\overline{\Omega}} u_1 \geq \min\limits_{\partial\Omega} u_1^- = 0$. Logo, $u_1 \geq 0$. Vamos supor que $u_1(\overline{x}) = 0$, para algum $\overline{x}$ no interior de Ω, ou seja, u_1 atinge o mínimo no interior de Ω. Pelo Princípio do Máximo Forte, u_1 seria constante no interior de Ω. Assim,

$$u_1 \equiv 0 \text{ em } \Omega \Rightarrow \Delta u_1 \equiv 0 \text{ em } \Omega \Rightarrow \varepsilon f(x) \equiv 0 \text{ em } \Omega,$$

contradizendo a hipótese de que $f(x) \not\equiv 0$ em Ω. Portanto, $u_1 > 0$ em Ω. Procedendo de maneira análoga, obtemos que v_1 é estritamente positiva em Ω. Indutivamente, podemos construir sequências (u_n) e (v_n) em $C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{n-1}^{\alpha-1} v_{n-1}^{\beta} + \varepsilon f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v_n = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} u_{n-1}^{\alpha} v_{n-1}^{\beta-1} + \varepsilon g(x), & \text{em } \Omega, \\ u_n > 0, \ v_n > 0, & \text{em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Afirmamos que

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_n < ... < u, \text{ em } \Omega, \tag{2.6}$$

e

$$0 = v_0 < v_1 < v_2 < ... < v_n < ... < v \text{ em } \Omega. \tag{2.7}$$

Sabemos que $0 = u_0 < u_1$ e $0 = v_0 < v_1$ em Ω. Vamos supor que, $u_{m-1} < u_m$ e $v_{m-1} < v_m$ em Ω. Definimos $w_{m+1} = u_{m+1} - u_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} -\Delta w_{m+1} &= -\Delta(u_{m+1} - u_m) \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_m^{\alpha-1} v_m^{\beta} + \varepsilon f(x) - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{m-1}^{\alpha-1} v_{m-1}^{\beta} - \varepsilon f(x) \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u_m^{\alpha-1} v_m^{\beta} - u_{m-1}^{\alpha-1} v_{m-1}^{\beta}\right). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, segue que $\Delta w_{m+1} < 0$ em Ω. Sabemos que $w_{m+1} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelo Princípio do Máximo Fraco, $w_{m+1} \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Supomos que para algum $x \in \Omega$, tenhamos que $w_{m+1}(x) = 0$. Então, w_{m+1} atingiria o mínimo no interior de Ω. Pelo Princípio do Máximo Forte, $w_{m+1}(x) \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Mas isso implicaria que $\Delta w_{m+1} \equiv 0$ em Ω, contradizendo a hipótese de indução. Logo, $w_{m+1} > 0$. Dessa maneira, provamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências monótonas crescentes. Definimos $\varphi_m = u - u_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que

$$-\Delta\varphi_m = -\Delta(u - u_m) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u^{\alpha-1} v^{\beta} - u_{m-1}^{\alpha-1} v_{m-1}^{\beta}\right).$$

Para $m = 1$,

$$-\Delta \varphi_1 = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u^{\alpha-1}v^{\beta} - u_0^{\alpha-1}v_0^{\beta}\right) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}u^{\alpha-1}v^{\beta} > 0.$$

Assim, $\Delta\varphi_1 < 0$. Pelo Princípio do Máximo Fraco, $\varphi_1 \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo Forte, $\varphi_1 > 0$ no interior de Ω. Logo, $u_1 < u$ em Ω. Supondo que valha $u_{m-1} < u$ em Ω, segue que

$$\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u^{\alpha-1}v^{\beta} - u_{m-1}^{\alpha-1}v_{m-1}^{\beta}\right) > 0 \Rightarrow -\Delta\varphi_m < 0.$$

Novamente pelo Princípio do Máximo Fraco, $\varphi_m \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo Forte, $\varphi_m > 0$ em Ω. Logo, $u_m < u$ em Ω, para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso mostra (2.6). Procedendo da mesma forma para a sequência v_n, concluímos (2.7). Com isso, para cada $x \in \Omega$, $(u_n(x))$ e $(v_n(x))$ são sequências monótonas, limitadas e, portanto, convergentes. Definamos, para cada $x \in \Omega$,

$$u_\varepsilon(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{2.8}$$

e

$$v_\varepsilon(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x). \tag{2.9}$$

Observamos que u_n, v_n são limitadas superiormente, respectivamente, por u e v. Como $u, v \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$, obtemos, como consequência do Teorema 1.2, que, para todo $p \geq 1$,

$$u_\varepsilon, v_\varepsilon \in L^p(\Omega),\ u_n \to u_\varepsilon \text{ e } v_n \to v_\varepsilon \text{ em } L^p(\Omega).$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$, por (2.5),

$$\begin{cases} \Delta(u_m - u_n) = -\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u_{m-1}^{\alpha-1}v_{m-1}^{\beta} - u_{n-1}^{\alpha-1}v_{n-1}^{\beta}\right), & \text{em } \Omega, \\ u_m - u_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, $w = u_m - u_n$ é solução de

$$\begin{cases} \Delta w = q(x), & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $q = -\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(u_{m-1}^{\alpha-1}v_{m-1}^{\beta} - u_{n-1}^{\alpha-1}v_{n-1}^{\beta}\right)$. Como $u_{m-1}, v_{m-1}, u_{n-1}, v_{n-1} \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, segue que $q \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$. Pelo Teorema 1.10, $w = u_m - u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$||u_m - u_n||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left|\left|u_{m-1}^{\alpha-1}v_{m-1}^{\beta} - u_{n-1}^{\alpha-1}v_{n-1}^{\beta}\right|\right|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Por $(2.6), (2.7), (2.8)$ e (2.9),

$$\left|u_n^{\alpha-1}v_n^{\beta} - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}\right|^p \to 0, \text{ para todo } x \in \Omega$$

quando $n \to \infty$ e, para todo $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left|u_n^{\alpha-1}v_n^{\beta} - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}\right|^p &\leq 2^{p-1}\left|u_n^{\alpha-1}v_n^{\beta}\right|^p + 2^{p-1}\left|u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}\right|^p \\ &\leq 2^p\left(u^{\alpha-1}v^{\beta}\right)^p \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^p(\Omega).\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.2,

$$u_n^{\alpha-1}v_n^{\beta} \to u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta} \quad \text{em} \quad L^p(\Omega)$$

e, consequentemente, $\left(u_n^{\alpha-1}v_n^{\beta}\right)$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Por (2.10), (u_n) é também uma sequência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$. Procedendo de forma análoga com a diferença $v_m - v_n$, obtemos que (v_n) é de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$. Escolhendo $p > \dfrac{N}{1-\theta}$, pelo Teorema 1.8 (iii), $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ continuamente. Logo (u_n) e (v_n) também são sequências de Cauchy em $C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right) \subset C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Pelo Teorema 1.9,

$$||u_m - u_n||_{C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)} \leq C\,||q||_{C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)} = C\left|\left|u_{m-1}^{\alpha-1}v_{m-1}^{\beta} - u_{n-1}^{\alpha-1}v_{n-1}^{\beta}\right|\right|_{C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

Segue que (u_n) é de Cauchy em $C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Similarmente, (v_n) é de Cauchy em $C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Logo, u_n, v_n convergem para $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ em $C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta u_n(x) \to \Delta u_\varepsilon,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \Delta v_n(x) \to \Delta v_\varepsilon,$$

para todo $x \in \Omega$. Fazendo $n \to \infty$ em (2.5), obtemos que $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é solução do problema (P_ε). Observamos que $0 < u_\varepsilon \leq u$ e $0 < v_\varepsilon \leq v$. Como u e v são soluções escolhidas arbitrariamente, z_ε é a solução minimal do problema (P_ε). Afirmamos que $|z_\varepsilon|_\infty \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. De fato, nos Lemas 2.1 e 2.2, vimos que, para $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema (P_ε) tem uma solução $(\widetilde{u}_\varepsilon, \widetilde{v}_\varepsilon)$ tal que

$$0 < \widetilde{u}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon = \varepsilon^\gamma h$$

e

$$0 < \widetilde{v}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon = \varepsilon^\gamma h,$$

onde $\gamma \in (0,1)$ e $h \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Como z_ε é solução minimal, segue que

$$0 < u_\varepsilon \leq \widetilde{u}_\varepsilon \leq \varepsilon^\gamma h$$

e

$$0 < v_\varepsilon \leq \widetilde{v}_\varepsilon \leq \varepsilon^\gamma h,$$

Logo, $||u_\varepsilon||_\infty \leq \varepsilon^\gamma ||h||_\infty$ e $||v_\varepsilon||_\infty \leq \varepsilon^\gamma ||h||_\infty$ e, consequentemente, $||u_\varepsilon||_\infty, ||v_\varepsilon||_\infty \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Para completar a prova do lema precisamos mostrar que z_ε é crescente com $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$. Com efeito, seja $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Então,

$$-\Delta u_{\varepsilon_2} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_2}^{\beta} + \varepsilon_2 f(x) \geq \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_2}^{\beta} + \varepsilon_1 f(x)$$

e $u_{\varepsilon_2} > 0$ em Ω, com $u_{\varepsilon_2} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Seguindo de maneira análoga para v_{ε_2}, vamos concluir que $z_{\varepsilon_2} = (u_{\varepsilon_2}, v_{\varepsilon_2})$ é uma supersolução do problema (P_{ε_1}). Temos também que $(0,0)$ é uma subsolução de (P_{ε_1}). Pelo método de sub-supersolução, existe $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ solução do problema (P_{ε_1}) com $0 \leq \widetilde{u} \leq u_{\varepsilon_2}$ e $0 \leq \widetilde{v} \leq v_{\varepsilon_2}$ em Ω. Provamos acima, que o problema (P_{ε_1}) admite uma solução minimal, $z_{\varepsilon_1} = (u_{\varepsilon_1}, v_{\varepsilon_1})$. Então,

$$0 < u_{\varepsilon_1} \leq \widetilde{u} \leq u_{\varepsilon_2} \qquad \text{e} \qquad 0 < v_{\varepsilon_1} \leq \widetilde{v} \leq v_{\varepsilon_2} \text{ em } \Omega. \tag{2.11}$$

Definimos $q_\varepsilon = u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}$. Por (2.11), $q_\varepsilon \geq 0$ em Ω. Além disso,

$$-\Delta q_\varepsilon = -\Delta u_{\varepsilon_2} + \Delta u_{\varepsilon_1} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_2}^{\beta} - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_1}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_1}^{\beta} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) f(x).$$

E, como $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$ e $f(x) \geq 0, f(x) \not\equiv 0$ em Ω, segue que $\Delta q_\varepsilon \leq 0$ e $\Delta q_\varepsilon \not\equiv 0$ em Ω. Supomos que para algum $\overline{x} \in \Omega$, se tenha $q_\varepsilon(\overline{x}) = 0$. Isso implicaria que q_ε atingiria seu mínimo no interior de $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo Forte, q_ε seria constante no interior de Ω. Com isso, $q_\varepsilon \equiv 0$ e assim, $\Delta q_\varepsilon \equiv 0$, o que é uma contradição. Portanto, $q_\varepsilon > 0$ em Ω e finalmente, $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$ em Ω. ■

Lema 2.4 *Suponhamos que $\alpha, \beta > 1$ e que $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. Então o conjunto $E := \{\varepsilon > 0 : (P_\varepsilon)$ admite pelo menos uma solução$\}$ é não vazio e limitado superiormente.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2, E é não vazio. Como $f \geq 0$ e $f \not\equiv 0$ em Ω, existe $x_1 \in \Omega$ tal que $f(x_1) > 0$. Por continuidade da f, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ em

$\Omega_0 := B_\delta(x_1) \subset\subset \Omega$. Logo, $f(x) + g(x) \geq f(x) > 0$ em Ω_0. Seja λ_1 o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi, & \text{em } \Omega_0, \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

e $\varphi_1 > 0$ uma autofunção correspondente. Fazendo $\omega = -\varphi_1$, temos que $\Delta\omega = \lambda_1\varphi_1 > 0$ em Ω_0. Além disso, para todo $x_0 \in \partial\Omega_0$

$$\omega(x_0) = -\varphi_1(x_0) = 0 > -\varphi_1(x) = \omega(x), \text{ para todo } x \in \Omega_0.$$

Pelo Lema de Hopf, temos que $\dfrac{\partial\omega}{\partial n}(x_0) > 0$, ou seja, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}(x_0) < 0$. Sejam $\overline{u}_0, \overline{v}_0$ soluções dos problemas (4) e (5) respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u}_0 = f(x), & \text{em } \Omega, \\ \overline{u}_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta\overline{v}_0 = g(x), & \text{em } \Omega, \\ \overline{v}_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Observamos que, como $f, g \geq 0$ e $f, g \not\equiv 0$ em Ω, pelo Princípio do Máximo Fraco, $\overline{u}_0 \geq 0$ e $\overline{v}_0 \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo Forte, $\overline{u}_0 > 0$ e $\overline{v}_0 > 0$ em Ω. Seja $\varepsilon > 0$ tal que existe uma solução (u, v) de (P_ε). Então,

$$-\Delta u = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^\beta - \varepsilon\Delta\overline{u}_0, \text{ em } \Omega,$$

e

$$-\Delta v = \frac{2\beta}{\alpha+\beta} |u|^\alpha\, v\,|v|^{\beta-2} - \varepsilon\Delta\overline{v}_0, \text{ em } \Omega.$$

Obtemos assim o sistema

$$\begin{cases} -\Delta(u - \varepsilon\overline{u}_0) = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^\beta, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta(v - \varepsilon\overline{v}_0) = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} |u|^\alpha\, v\,|v|^{\beta-2}, & \text{em } \Omega, \\ u - \varepsilon\overline{u}_0 = v - \varepsilon\overline{v}_0 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Como $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u\,|u|^{\alpha-2}\,|v|^\beta > 0$ em Ω então $\Delta(u - \varepsilon\overline{u}_0) < 0$ em Ω. Pelo Princípio do Máximo Fraco, $\min\limits_{\overline{\Omega}}(u - \varepsilon\overline{u}_0) \geq \min\limits_{\partial\Omega}(u - \varepsilon\overline{u}_0) = 0$. Logo, temos que $u - \varepsilon\overline{u}_0 \geq 0$. Suponha, por contradição, que exista um $\overline{x}$ no interior de Ω, tal que $(u - \varepsilon\overline{u}_0)(\overline{x}) = 0$. Desse modo, $u - \varepsilon\overline{u}_0$ atingiria o mínimo no interior de Ω. Pelo Princípio do Máximo Forte, $u - \varepsilon\overline{u}_0$ seria constante e assim $u - \varepsilon\overline{u}_0 \equiv 0$. Isso implicaria que $\Delta\left(u - \varepsilon\overline{u}_0\right) \equiv 0$, o que, por (2.14), é uma contradição pois $u, v > 0$ em Ω. Portanto, $u - \varepsilon\overline{u}_0 > 0$ em Ω. De maneira análoga, temos $v - \varepsilon\overline{v}_0 > 0$ em Ω. Definimos $\vec{F}(x) = \varphi_1(x)\nabla u(x)$, onde x pertence a Ω_0. Pelo Teorema da Divergência, como $\varphi_1 \equiv 0$ sobre $\partial\Omega_0$,

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1 \nabla u dx + \int_{\Omega_0} \varphi_1 \Delta u dx = \int_{\partial\Omega_0} \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \tag{2.15}$$

Tomando agora $\vec{F}(x) = u(x)\nabla\varphi_1(x)$, para $x \in \Omega_0$,

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1 \nabla u dx + \int_{\Omega_0} u \Delta\varphi_1 dx = \int_{\partial\Omega_0} u \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS. \tag{2.16}$$

Portanto, como $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}(x_0) < 0$, de (2.16) e (2.15) segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_{\Omega_0} u\varphi_1 dx &\geq \int_{\Omega_0} u\lambda_1\varphi_1 dx + \int_{\partial\Omega_0} u\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} dS \\
&= -\int_{\Omega_0} u\Delta\varphi_1 dx + \int_{\Omega_0} u\Delta\varphi_1 dx + \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1\nabla u dx \\
&= \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1\nabla u dx = -\int_{\Omega_0} \varphi_1 \Delta u dx.
\end{aligned}$$

Como (u, v) é solução de (P_ε),

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_{\Omega_0} u\varphi_1 dx &\geq -\int_{\Omega_0} \varphi_1 \Delta u dx \\
&= \int_{\Omega_0} \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u^{\alpha-1} v^\beta + \varepsilon f(x)\right) \varphi_1 dx \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \int_{\Omega_0} u^{\alpha-1} v^\beta \varphi_1 dx + \varepsilon \int_{\Omega_0} f(x)\varphi_1 dx.
\end{aligned}$$

Sejam $a_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}_0} \overline{u}_0^{\alpha-1} > 0$ e $b_0 = \inf\limits_{\overline{\Omega}_0} \overline{v}_0^{\beta-1} > 0$. Lembrando que $u > \varepsilon\overline{u}_0$ em Ω, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_{\Omega_0} u\varphi_1 dx &\geq \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Omega_0} \overline{u}_0^{\alpha-1} v^\beta \varphi_1 dx + \varepsilon \int_{\Omega_0} f(x)\varphi_1 dx \\
&\geq \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Omega_0} a_0 v^\beta \varphi_1 dx + \varepsilon \int_{\Omega_0} f(x)\varphi_1 dx \\
&= \frac{2\alpha a_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Omega_0} v^\beta \varphi_1 dx + \varepsilon \int_{\Omega_0} f(x)\varphi_1 dx.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\varepsilon \int_{\Omega_0} f(x)\varphi_1 dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega_0} u\varphi_1 dx - \frac{2\alpha a_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1} \int_{\Omega_0} v^\beta \varphi_1 dx. \tag{2.17}$$

E, de maneira análoga, como $v > \varepsilon\overline{v}_0$ em Ω,

$$\varepsilon \int_{\Omega_0} g(x)\varphi_1 dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega_0} v\varphi_1 dx - \frac{2\beta b_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\beta-1} \int_{\Omega_0} u^\alpha \varphi_1 dx. \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18) ,

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_{\Omega_0} f(x)\,\varphi_1 dx+\varepsilon\int_{\Omega_0} g(x)\,\varphi_1 dx\\ &\leq\int_{\Omega_0}\left(\lambda_1 u-\frac{2\beta b_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\beta-1}u^{\alpha}\right)\varphi_1 dx+\int_{\Omega_0}\left(\lambda_1 v-\frac{2\alpha a_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1}v^{\beta}\right)\varphi_1 dx.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Afirmamos que

$$\lambda_1 u-\frac{2\beta b_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\beta-1}u^{\alpha}\leq\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\lambda_1\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta b_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\varepsilon^{-\frac{(\beta-1)}{(\alpha-1)}}\tag{2.20}$$

e

$$\lambda_1 v-\frac{2\alpha a_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha-1}v^{\beta}\leq\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\lambda_1\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta a_0}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\varepsilon^{-\frac{(\alpha-1)}{(\beta-1)}}.\tag{2.21}$$

Vamos provar apenas (2.20) pois (2.21) prova-se de maneira inteiramente análoga. Definimos $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $\zeta(t)=\lambda_1 t-\dfrac{2\beta b_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\beta-1}t^{\alpha}$. Temos que

$$\zeta'(t)=\lambda_1-\frac{2\beta b_0}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\beta-1}\alpha t^{\alpha-1}.$$

Portanto, $t_M=\left(\dfrac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ é ponto de máximo absoluto de ζ. Assim,

$$\begin{aligned}\zeta(u)\quad\leq\quad\zeta(t_M)\quad&=\lambda_1\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-\frac{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}}{\alpha+\beta}\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\\ &=\lambda_1\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-\frac{\lambda_1}{\alpha}\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\beta b_0\varepsilon^{\beta-1}\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1}\\ &=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\lambda_1\left(\frac{\lambda_1(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta b_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\varepsilon^{-\frac{\beta-1}{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

e a afirmação (2.20) está provada. Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19) obtemos

$$\varepsilon\, a_1\leq a_2\,\varepsilon^{-\frac{(\beta-1)}{(\alpha-1)}}+a_3\,\varepsilon^{-\frac{(\alpha-1)}{(\beta-1)}}\tag{2.22}$$

onde a_1,a_2,a_3 são constantes positivas que não dependem de $\varepsilon>0$, a saber,

$$a_1=\int_{\Omega_0}(f(x)+g(x))\,\varphi_1 dx,$$

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \lambda_1 \left(\frac{\lambda_1 (\alpha+\beta)}{2\alpha\beta b_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_{\Omega_0} \varphi_1 dx,$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \lambda_1 \left(\frac{\lambda_1 (\alpha+\beta)}{2\alpha\beta a_0}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \int_{\Omega_0} \varphi_1 dx.$$

Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$h(\varepsilon) = a_2\ \varepsilon^{-\frac{(\beta-1)}{(\alpha-1)}} + a_3\ \varepsilon^{-\frac{(\alpha-1)}{(\beta-1)}} - \varepsilon\ a_1.$$

Se E não fosse limitado superiormente, existiria uma sequência (ε_n) em E com $\varepsilon_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} h(\varepsilon) = -\infty$, existiria $\varepsilon \in E$ com $h(\varepsilon) < 0$, impossível pois, por (2.22), $h(\varepsilon) \geq 0$, para todo $\varepsilon \in E$. Logo E é limitado superiormente. ■

Demonstração do Teorema A. Considere o conjunto

$$E = \{\varepsilon > 0 : (\mathrm{P}_\varepsilon) \text{ admite pelo menos uma solução}\}.$$

Pelos Lemas 2.2 e 2.4, E é não vazio e limitado superiormente. Seja $\varepsilon_0 = \sup E$. Logo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ para todo $\varepsilon \in E$ e (P_ε) não tem solução para $\varepsilon > \varepsilon_0$. Pelos Lemas 2.2 e 2.3, existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, o problema (P_ε) possui uma solução minimal $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ e valem

(*i*) $||z_\varepsilon||_\infty \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$;

(*ii*) $u_{\varepsilon_1} < u_{\varepsilon_2}$ e $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ *para todos* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *em* $(0, \widetilde{\varepsilon})$.

Então o conjunto

$$A := \{\widetilde{\varepsilon} > 0 : \forall\, \varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})\, \text{o problema}\, (P_\varepsilon)\, \text{possui solução minimal e valem}\ (i)\ \text{e}\ (ii)\}$$

é não vazio. É claro que $\widetilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$, para todo $\widetilde{\varepsilon} \in A$. Seja $\varepsilon^* = \sup A$. Então $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$. Se $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, por definição de supremo, existe $\widetilde{\varepsilon} \in A$ tal que $\varepsilon < \widetilde{\varepsilon}$. Logo, $\varepsilon^* \in A$. Para concluir a demonstração usaremos um argumento de contradição para mostrar que (P_ε) não tem solução para todo $\varepsilon \in (\varepsilon^*, \varepsilon_0]$. Desse modo, supomos que existe $\varepsilon_2 \in (\varepsilon^*, \varepsilon_0]$ tal que (P_{ε_2}) admite solução $z_{\varepsilon_2} = (u_{\varepsilon_2}, v_{\varepsilon_2})$. Seja $\delta \in [\varepsilon^*, \varepsilon_2)$. Tomando $(u_-, v_-) = (0, 0)$, como $f, g \geq 0$ em Ω, temos $\Delta u_- \geq -\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\, u_- |u_-|^{\alpha-2} |v_-|^\beta - \delta f(x)$ em Ω e $\Delta v_- \geq -\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} |u_-|^\alpha v_- |v_-|^{\beta-2} - \delta g(x)$ em Ω. Assim, $(0, 0)$ é subsolução do problema

(P_δ). Além disso, como $\delta < \varepsilon_2$ então

$$-\Delta u_{\varepsilon_2} = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_2}^{\beta} + \varepsilon_2 f(x) \geq \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha-1} v_{\varepsilon_2}^{\beta} + \delta f(x)$$

e

$$-\Delta v_{\varepsilon_2} = \frac{2\beta}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha} v_{\varepsilon_2}^{\beta-1} + \varepsilon_2 g(x) \geq \frac{2\beta}{\alpha+\beta} u_{\varepsilon_2}^{\alpha} v_{\varepsilon_2}^{\beta-1} + \delta g(x).$$

Logo, z_{ε_2} é uma supersolução de (P_δ). Pelo Teorema de sub-supersolução, (P_δ) admite uma solução $\tilde{z}_\delta$ tal que $0 \leq \tilde{z}_\delta \leq z_{\varepsilon_2}$. Isso implica que (P_δ) tem solução para todo $\delta \in (0, \varepsilon_2)$. Argumentando como no Lema 2.3, obtemos que para todo $\delta \in (0, \varepsilon_2)$, o problema (P_δ) tem uma solução minimal z_δ e, além disso, para $\delta_1 < \delta_2$ em $(0, \varepsilon_2)$, vale $z_{\delta_1} \leq z_{\delta_2}$. Quando fazemos $\delta \to 0$, sem perda de generalidade, podemos considerar $\delta < \varepsilon^* \in A$. Logo $\|z_\delta\|_\infty \to 0$ quando $\delta \to 0$. Assim $\varepsilon_2 \in A$, com $\varepsilon_2 > \varepsilon^*$, contradizendo $\varepsilon^* = \sup A$. Portanto, (P_ε) não tem solução para $\varepsilon > \varepsilon^*$, concluindo a demonstração do teorema. ■

Capítulo 3

Existência de uma segunda solução

Neste capítulo encontramos uma segunda solução para o problema (P_ε), $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, da forma

$$\overline{z} = z_\varepsilon + z,$$

onde $z_\varepsilon = (u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é a solução minimal de (P_ε) obtida pelo Teorema A e $z = (u, v)$ com $u, v > 0$. O sistema correspondente para z é

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left((u+u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v+v_\varepsilon)^{\beta} - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}\right), & \text{em } \Omega, \\ \\ -\Delta v = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\left((u+u_\varepsilon)^{\alpha}(v+v_\varepsilon)^{\beta-1} - u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta-1}\right), & \text{em } \Omega, \\ u > 0, \ v > 0, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Consideramos em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ a norma $||(u,v)|| = \left(||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Dizemos que $z = (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (3.1) se

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla u.\nabla\varphi_1 + \nabla v.\nabla\varphi_2)\,dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left((u^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v^+ + v_\varepsilon)^{\beta} - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}\right)\varphi_1 dx \\ - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left((u^+ + u_\varepsilon)^{\alpha}(v^+ + v_\varepsilon)^{\beta-1} - u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta-1}\right)\varphi_2 dx = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. O funcional correspondente ao problema (3.1) é dado por

$$\begin{aligned} I(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u^+ + u_\varepsilon\right)^{\alpha}\left(v^+ + v_\varepsilon\right)^{\beta} - u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta}\right)dx \quad (3.3) \\ + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^{\beta}u^+ dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta-1}v^+ dx, \end{aligned}$$

para todos $u, v \in H_0^1(\Omega)$, onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. As soluções não triviais do problema (P_ε) são os pontos críticos não nulos do funcional I. Mais ainda, pela teoria de regularidade, cada solução fraca do problema (3.1) é uma solução clássica.

Estamos interessados em demonstrar o teorema seguinte.

Teorema B *Suponhamos que $N \geq 5$, α, $\beta > 1$, $\alpha + \beta = 2^*$ e que $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$* são tais que $f, g \not\equiv 0$ e $f, g \geq 0$ em Ω. *Então existe $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$, o problema (P_ε) admite uma segunda solução $\overline{z} = (\overline{u}, \overline{v})$, com $\overline{u} > u_\varepsilon$ e $\overline{v} > v_\varepsilon$ em Ω, onde $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ é a solução obtida pelo Teorema A.*

Demonstraremos agora alguns resultados que serão utilizados para provar o Teorema B. Primeiramente, definimos, para $\alpha + \beta \leq 2^*$,

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta}\, dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \tag{3.4}$$

e

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta} = \inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx : (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ com } \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta\, dx = 1\right\}.$$

Lema 3.1 *Se $\alpha + \beta \leq 2^*$, então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}} \leq c\,||(u, v)||, \text{ para todo } (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente, $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ está bem definido e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0$.

Demonstração. Pela definição de $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, para todo $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}} &\leq \left[\int_\Omega (\max\{|u|, |v|\})^{\alpha+\beta}\, dx\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left[\int_\Omega \left(|u|^{\alpha+\beta} + |v|^{\alpha+\beta}\right) dx\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq \left(2\max\left\{\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta}\, dx, \int_\Omega |v|^{\alpha+\beta}\, dx\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[\left(\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \left(\int_\Omega |v|^{\alpha+\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}{S_{\alpha+\beta}^{\frac{1}{2}}}\left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \frac{2^{\frac{1}{\alpha+\beta}}}{S_{\alpha+\beta}^{\frac{1}{2}}} 2\,||(u,v)||\,.$$

■

O lema a seguir foi demonstrado por Alves et al em [2].

Lema 3.2 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 3.$ *Então*

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) S_{\alpha+\beta}(\Omega)\,. \tag{3.5}$$

Demonstração. Seja (ω_n) em $H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$. Considere $u_n = s\omega_n$ e $v_n = t\omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, com $s, t > 0$ a serem escolhidos posteriormente. Então

$$A_n = \left(\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left(s^\alpha t^\beta\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \int_\Omega \left(|\omega_n|^{\alpha+\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \neq 0$$

e $\left(\dfrac{u_n}{A_n}, \dfrac{v_n}{A_n}\right)$ é tal que $\displaystyle\int_\Omega \left|\frac{u_n}{A_n}\right|^\alpha \left|\frac{v_n}{A_n}\right|^\beta = 1$. Pela definição de $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$,

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta} \leq \int_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{u_n}{A_n}\right)\right|^2 + \left|\nabla\left(\frac{v_n}{A_n}\right)\right|^2\right) dx$$

$$= \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx}{A_n^2} = \frac{s^2+t^2}{\left(s^\alpha t^\beta\right)^{\frac{2}{(\alpha+\beta)}}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \omega_n|^2\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta}\,dx\right)^{\frac{2}{(\alpha+\beta)}}}.$$

Observamos que

$$\frac{s^2+t^2}{\left(s^\alpha t^\beta\right)^{\frac{2}{(\alpha+\beta)}}} = \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{s}{t}\right)^{-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}. \tag{3.6}$$

Escolhendo $s, t > 0$ tais que $\dfrac{s}{t} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, das duas expressões acima segue que

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \omega_n|^2\,dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta}\,dx\right)^{\frac{2}{(\alpha+\beta)}}}.$$

Como (ω_n) é uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] S_{\alpha+\beta}(\Omega). \tag{3.7}$$

Consideremos agora $((u_n, v_n))$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, tal que $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$z_n = s_n v_n, \tag{3.8}$$

onde $s_n > 0$ é tal que

$$\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta} \, dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta} \, dx.$$

Pela Desigualdade de Young, com expoentes $p = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ e $p' = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$ segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_n|^\alpha |z_n|^\beta \, dx &\leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta} \, dx + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta} \, dx \\ &= \int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta} \, dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta} \, dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela definição de $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, por (3.8) e (3.9),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \right) dx &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \, dx \right)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx \right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \\ &= \frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |z_n|^\beta \, dx \right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} + \frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} \displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |z_n|^\beta \, dx \right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \\ &\geq \left(s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} + s_n^{-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}} \right) S_{\alpha+\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definimos a função $g(s) = s^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} + s^{-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}$ com $s > 0$. Temos que $s = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ é ponto de mínimo absoluto de g. Agora, por (3.10),

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \right) dx &\geq g(s_n) S_{\alpha+\beta}(\Omega) \geq g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) S_{\alpha+\beta}(\Omega) \\ &= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha(\alpha+\beta)} \right] S_{\alpha+\beta}(\Omega). \end{aligned}$$

Como $((u_n, v_n))$ é uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, fazendo $n \to \infty$ obtemos a desigualdade contrária,

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \geq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha(\alpha+\beta)} \right] S_{\alpha+\beta}(\Omega) .$$

■

Vamos considerar o caso crítico: $\alpha + \beta = 2^*$, $\alpha, \beta > 1$. Nesse caso $S_{\alpha+\beta}(\Omega) = S_{2^*}(\Omega) = S_{2^*}\left(\mathbb{R}^N\right) = S$ é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. É conhecido (veja [19], [21]) que S é atingido pela função

$$U(x) = \frac{(N(N-2))^{\frac{(N-2)}{4}}}{\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{(N-2)}{2}}}, \tag{3.11}$$

que satisfaz a equação

$$-\Delta U = U^{2^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{3.12}$$

e também vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx. \tag{3.13}$$

Como S é atingido em U,

$$S = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |U|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{3.14}$$

Usando (3.13) e (3.14),

$$S = \left(\int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx \right)^{1-\frac{2}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{N}}.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.15}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in \Omega$. Seja $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função não negativa tal que $\psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ em $B_\delta = B_\delta(0) \subset \Omega$ para algum $\delta > 0$. Definimos, para $\eta > 0$,

$$U_\eta(x) = \eta^{-\frac{(N-2)}{2}} U\left(\frac{x}{\eta}\right) \tag{3.16}$$

e

$$u_\eta(x) = \psi(x) U_\eta(x) . \tag{3.17}$$

Lema 3.3 *Seja $N \geq 3$. Vale a seguinte estimativa:*

$$\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2 \, dx = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\eta^{\frac{N-2}{2}}\right). \tag{3.18}$$

Demonstração. Pela definição de u_η, temos $\nabla u_\eta = U_\eta \nabla\psi + \psi\nabla U_\eta$ e

$$|\nabla u_\eta|^2 \leq U_\eta^2 |\nabla\psi|^2 + \psi^2 |\nabla U_\eta|^2 + 2U_\eta |\nabla\psi| \psi |\nabla U_\eta| . \tag{3.19}$$

Como $|\nabla\psi|^2 = 0$ em B_δ e $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega U_\eta^2 |\nabla\psi|^2 dx = \int_{\Omega\backslash B_\delta} U_\eta^2 |\nabla\psi|^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega\backslash B_\delta} U_\eta^2 dx,$$

onde C_1 é uma constante real positiva. Das definições de U_η e U dadas em (3.16) e (3.11),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash B_\delta} U_\eta^2\, dx &= \eta^{-(N-2)} C_N \int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{1}{\left(1+\left|\frac{x}{\eta}\right|^2\right)^{N-2}} dx = \eta^{-(N-2)} C_N \int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{\eta^{2(N-2)}}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{N-2}} dx \\ &= \eta^{N-2} C_N \int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{N-2}} dx,\end{aligned}$$

onde $C_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{2}}$. Observamos que

$$\int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{N-2}} dx \leq \int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{1}{|x|^{2(N-2)}} dx \leq \frac{|\Omega|}{\delta^{2(N-2)}}.$$

Isso nos permite concluir que

$$\int_\Omega U_\eta^2 |\nabla\psi|^2 dx \leq C_2\, \eta^{N-2}, \tag{3.20}$$

onde $C_2 = C_1 C_N \dfrac{|\Omega|}{\delta^{2(N-2)}}$. Agora, vamos analisar a segunda parcela de (3.19). Novamente, pela definição de U_η,

$$\int_\Omega \psi^2 |\nabla U_\eta|^2 dx = \int_\Omega \psi^2(x) \left|\eta^{-\frac{(N-2)}{2}} \frac{1}{\eta} \nabla U\left(\frac{x}{\eta}\right)\right|^2 dx = \eta^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2(x) \left|\nabla U\left(\frac{x}{\eta}\right)\right|^2 dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x}{\eta}$, como $0 \leq \psi \leq 1$ e por (3.15),

$$\int_\Omega \psi^2 |\nabla U_\eta|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2(\eta y) |\nabla U(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(y)|^2 dy = S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.21}$$

Para terminarmos a prova do lema, analisamos a última parcela de (3.19). Pela Desigualdade de Hölder, por (3.20) e (3.21)

$$\int_\Omega U_\eta \left|\nabla\psi\right| \psi \left|\nabla U_\eta\right| \leq \left(\int_\Omega U_\eta^2 \left|\nabla\psi\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \psi^2 \left|\nabla U_\eta\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \eta^{\frac{N-2}{2}} S^{\frac{N}{4}}. \quad (3.22)$$

De (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22),

$$\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^2 dx \leq C_2 \eta^{N-2} + S^{\frac{N}{2}} + C_4 \eta^{\frac{N-2}{2}}.$$

Logo,

$$\int_\Omega \left|\nabla u_\eta\right|^2 dx - S^{\frac{N}{2}} \leq C_2 \eta^{N-2} + C_4 \eta^{\frac{N-2}{2}},$$

implica que

$$\int_\Omega \left|\nabla u_\eta\right|^2 dx - S^{\frac{N}{2}} = O\left(\eta^{\frac{N-2}{2}}\right)$$

e o lema está demonstrado. ■

Para $\lambda > 0$ definimos

$$Q_\lambda(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Em [6], Brézis e Nirenberg mostraram que no caso em que $N \geq 4$ e $\lambda > 0$,

$$Q_\lambda(u_\eta) < S \quad (3.23)$$

para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno. (Veja também Lema 1.46 em [21]).

Lema 3.4 *Seja $N \geq 3$. Existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in (0, \eta_0)$, valem*

$$\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1} dx \geq C_1 \, \eta^{N - \frac{(N-2)(\alpha+1)}{2}} \quad (3.24)$$

e

$$\int_\Omega u_\eta^{\beta+1} dx \geq C_2 \, \eta^{N - \frac{(N-2)(\beta+1)}{2}}, \quad (3.25)$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas que não dependem de η.

Demonstração. Pela definição de u_η,

$$\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1} dx = \int_\Omega \psi^{\alpha+1}(x) \, \eta^{-\frac{(N-2)}{2}(\alpha+1)} U^{\alpha+1}\left(\frac{x}{\eta}\right) dx.$$

Como supp $\psi \subset\subset \Omega$, estendendo a ψ como zero em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ e fazendo a substituição de variáveis $y = \dfrac{x}{\eta}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{\alpha+1}(x)\, \eta^{-\frac{(N-2)}{2}(\alpha+1)} U^{\alpha+1}\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{\alpha+1}(\eta y)\, \eta^{-\frac{(N-2)}{2}(\alpha+1)} U^{\alpha+1}(y)\, \eta^N dy \\
&= \eta^\theta \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{\alpha+1}(\eta y)\, U^{\alpha+1}(y)\, dy \\
&\geq \eta^\theta \int_\Omega \psi^{\alpha+1}(\eta y) \frac{c_N}{\left(1+|y|^2\right)^{\frac{(N-2)}{2}(\alpha+1)}} dy,
\end{aligned}$$

onde $\theta = N - \frac{(N-2)(\alpha+1)}{2}$. Como Ω é limitado, para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno, $\psi(\eta y) = 1$ e, portanto,

$$\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1} dx \geq C\eta^\theta,$$

onde $C = \displaystyle\int_\Omega \frac{c_N}{\left(1+|y|^2\right)^{\frac{(N-2)}{2}(\alpha+1)}} dy$. A prova de (3.25) é inteiramente análoga. ■

Lema 3.5 *Existe $C > 0$ independente de η tal que*

$$\int_\Omega u_\eta dx \leq C\ \eta^{\frac{N-2}{2}}.$$

Demonstração. Pela definição de u_η, e por ser $\psi \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_\eta dx = \int_\Omega \psi(x)\, \eta^{-\frac{(N-2)}{2}} U\left(\frac{x}{\eta}\right) dx &\leq \eta^{-\frac{(N-2)}{2}} \int_\Omega \frac{c_N}{\left(1+|x/\eta|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx \\
= c_N\ \eta^{\frac{N-2}{2}} \int_\Omega \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx,
\end{aligned}$$

onde c_N é uma constante que depende somente de N. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta = B_\delta(0) \subset \Omega$. Então

$$\int_\Omega \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx = I_1 + I_2,$$

onde $I_1 = \displaystyle\int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{\Omega\backslash B_\delta} \frac{1}{\left(\eta^2+|x|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}} dx$. Pelo Teorema 4 do Apêndice C em [9],

$$I_1 \leq \int_{B_\delta} \frac{1}{|x|^{N-2}} dx = \int_0^\delta \int_{\partial B_r} \frac{1}{|x|^{N-2}} dS\ dr = k_N \int_0^\delta \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1} dr = k_N \frac{\delta^2}{2}.$$

Uma vez que em $\Omega\backslash B_\delta$, $\eta^2+|x|^2\geq\delta^2$, segue que

$$I_2\leq\int_{\Omega\backslash B_\delta}\frac{1}{\delta^2}dx\leq\frac{|\Omega|}{\delta^2}.$$

Assim,

$$\int_\Omega u_\eta dx\leq c_N\ \eta^{\frac{N-2}{2}}\left(I_1+I_2\right)\leq C\ \eta^{\frac{N-2}{2}},$$

onde $C=c_N\left[k_N\frac{\delta^2}{2}+\frac{|\Omega|}{\delta^2}\right]$. ■

Lema 3.6 *Seja $(u,v)\in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ tais que $u,v>0$ para algum $\Omega_0\subset\Omega$ com $|\Omega_0|>0$. Então*

$$\lim_{t\to\infty}I\left(tu,tv\right)=-\infty.$$

Demonstração. Pela definição de I em (3.3) e por ser $u_\varepsilon,v_\varepsilon>0$ em Ω,

$$\begin{aligned}I\left(tu,tv\right)\leq&\ \frac{t^2}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx-\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega\left(tu^+\right)^\alpha\left(tv^+\right)^\beta\\&+\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx+\frac{2\alpha t}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u^+dx+\frac{2\beta t}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v^+dx\\=&\ t^2A-t^{\alpha+\beta}B+tC+D,\end{aligned}$$

onde

$$A=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)dx,\quad B=\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega\left(u^+\right)^\alpha\left(v^+\right)^\beta dx,\quad D=\frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx\quad\text{e}$$
$$C=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u^+dx+\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v^+dx,$$

independem de t. Note que, por hipótese, $B>0$. Assim, como $\alpha+\beta>2$,

$$\lim_{t\to\infty}I\left(tu,tv\right)=-\infty.$$

Desse modo, concluímos que existe t_1 estritamente positivo, tal que $I\left((t_1u,t_1v)\right)$ é estritamente negativo. ■

Lema 3.7 *Existem $t_\eta\geq0$ e uma constante $\overline{C}>0$ tal que*

$$\sup_{t\geq0}I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta,t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)=I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta,t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)\leq\overline{C}\left(t_\eta^2+t_\eta\right),$$

para cada $\eta>0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Para $\eta > 0$, definimos $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $g(t) = I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)$. Como $g(0) = 0$ e, pelo Lema 3.6,

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty,$$

então g atinge um máximo para algum $t = t_\eta \geq 0$, ou seja,

$$\sup_{t\geq 0} I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) = I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right).$$

Observamos que

$$\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta\right)^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(\left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta \geq 0.$$

Daí e de (3.3),

$$\begin{aligned} I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) &\leq \frac{(\alpha+\beta)\,t_\eta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx + \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\alpha+\beta}t_\eta\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_\eta dx \\ &\quad + \frac{2\beta\sqrt{\beta}}{\alpha+\beta}t_\eta\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}u_\eta dx \\ &= \frac{(\alpha+\beta)}{2}t_\eta^2\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx \\ &\quad + \left(\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\alpha+\beta} + \frac{2\beta\sqrt{\beta}}{\alpha+\beta}\right)t_\eta\int_\Omega \left(u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta + u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right)u_\eta\;dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3, existe uma constante $\overline{C}_1 > 0$ tal que

$$\frac{(\alpha+\beta)\,t_\eta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx \leq \overline{C_1}t_\eta^2,$$

para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Como $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, existe uma constante $\overline{C}_2 > 0$ tal que $u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta + u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1} \leq \overline{C}_2$ em Ω. Logo,

$$\int_\Omega \left(u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta + u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right)u_\eta dx \leq \overline{C}_2\int_\Omega u_\eta dx.$$

Por fim, usamos o Lema 3.5 para concluir que existem constantes positivas $\overline{C_3}, \overline{C_4}, \overline{C}$ tais que

$$\begin{aligned} I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) &\leq \overline{C_1}t_\eta^2 + t_\eta\overline{C_3}\left(\int_\Omega u_\eta dx\right) \leq \overline{C_1}t_\eta^2 + \overline{C_4}t_\eta \\ &\leq \overline{C}\left(t_\eta^2 + t_\eta\right), \end{aligned}$$

para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. ■

Pelo Lema 3.6, existe $t_1 = t_1(u_\eta) > 0$ tal que $z_1 = \left(t_1\sqrt{\alpha}u_\eta, t_1\sqrt{\beta}u_\eta\right)$ satisfaz $I(z_1) < 0$. Definimos

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = z_1\right\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Lema 3.8 *Seja $N \geq 5$. Então,*

$$c < \frac{2}{N}\left(\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Seja $\gamma_1(t) = tz_1, t \geq 0$. Então $\gamma_1 \in \Gamma$. Pela definição de c, e pelo Lema 3.7, existe $t_\eta \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} c &\leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_1(t)) \leq \sup_{t\geq 0} I\left(\gamma_1\left(\frac{t}{t_1}\right)\right) \\ &= \sup_{t\geq 0} I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) = I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right). \end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração do lema é suficiente mostrar que

$$I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) < \frac{2}{N}\left(\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{3.26}$$

Vamos mostrar que (3.26) é verdadeira para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Primeiro observamos que, pelo Lema 3.7,

$$I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_{\eta,}t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) \leq \overline{C}\left(t_\eta^2 + t_\eta\right),$$

Se $t_\eta = 0$ ou $t_\eta \to 0$ quando $\eta \to 0$, (3.26) é satisfeita e o lema está demonstrado. Assim, podemos admitir que $0 < m_0 \leq t_\eta$ com $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Vejamos ainda que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $t_\eta \leq C_0$ para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Caso contrário, existiria uma sequência $\eta_k \to 0$ com $t_{\eta_k} \to \infty$. Considere a função $\xi(\eta) = I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_{\eta,}t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)$ com $\eta > 0$. Pelo Lema 3.6, para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, com $u, v > 0$ em Ω,

$$\lim_{t\to\infty} I(tu, tv) = -\infty.$$

Em particular, teríamos

$$\lim_{\eta_k\to 0} \xi(\eta_k) = \lim_{\eta_k\to 0} I\left(\left(t_{\eta_k}\sqrt{\alpha}u_{\eta_k}, t_{\eta_k}\sqrt{\beta}u_{\eta_k}\right)\right) = -\infty,$$

uma contradição pois $\xi(\eta) \geq 0$ para todo $\eta > 0$. Portanto, admitimos que $0 < m_0 \leq t_\eta \leq C_0$ para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Pela definição de I em (3.3),

$$\begin{aligned} I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta, t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) &= \frac{(\alpha+\beta)\, t_\eta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\, dx \\ &- \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta + v_\varepsilon\right)^\beta dx \\ &+ \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx \\ &+ \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}t_\eta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_\eta dx + \frac{2\beta\sqrt{\beta}t_\eta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}u_\eta dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aplicando o Lema 1.17, obtemos

$$\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta + u_\varepsilon\right)^\alpha \geq \left[(u_\varepsilon)^\alpha + \left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta\right)^\alpha + c_1 u_\varepsilon^{\alpha-1}\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta\right)\right] \tag{3.28}$$

e

$$\left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta + v_\varepsilon\right)^\beta \geq \left[(v_\varepsilon)^\beta + \left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)^\beta + c_2 v_\varepsilon^{\beta-1}\left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right], \tag{3.29}$$

onde c_1, c_2 são constantes positivas. Assim,

$$\begin{aligned} \left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta + v_\varepsilon\right)^\beta &\geq u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta + u_\varepsilon^\alpha t_\eta^\beta \beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^\beta + c_2 v_\varepsilon^{\beta-1} u_\varepsilon^\alpha t_\eta \sqrt{\beta}u_\eta \\ &+ t_\eta^\alpha \alpha^{\frac{\alpha}{2}} u_\eta^\alpha v_\varepsilon^\beta + t_\eta^{\alpha+\beta}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\alpha+\beta} + c_1 u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta \\ &+ c_2 v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^{\alpha+1}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}u_\eta^{\alpha+1} + c_1 u_\varepsilon^{\alpha-1} t_\eta^{\beta+1}\sqrt{\alpha}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\beta+1} \\ &+ c_1 c_2 u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^2 \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}u_\eta^2 \\ &\geq u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta + t_\eta^{\alpha+\beta}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\alpha+\beta} + c_2 v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^{\alpha+1}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}u_\eta^{\alpha+1} \\ &+ c_1 u_\varepsilon^{\alpha-1} t_\eta^{\beta+1}\sqrt{\alpha}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\beta+1} + c_1 c_2 u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}u_\eta^2. \end{aligned}$$

Em (3.27),

$$\begin{aligned} I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) &\leq \frac{(\alpha+\beta)\, t_\eta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\, dx - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega t_\eta^{\alpha+\beta}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\alpha+\beta} dx \\ &- \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega c_1 c_2 u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}u_\eta^2 \\ &- \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega c_2 v_\varepsilon^{\beta-1} t_\eta^{\alpha+1}\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}u_\eta^{\alpha+1} dx \\ &- \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega c_1 u_\varepsilon^{\alpha-1} t_\eta^{\beta+1}\sqrt{\alpha}\beta^{\frac{\beta}{2}} u_\eta^{\beta+1} \\ &+ \frac{2\alpha\sqrt{\alpha}t_\eta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta u_\eta dx + \frac{2\beta\sqrt{\beta}t_\eta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1} u_\eta dx. \end{aligned}$$

Seja $K = \operatorname{supp} u_\eta = \operatorname{supp} \psi$. Temos $K \subset\subset \Omega$. Como $u_\varepsilon, v_\varepsilon > 0$ em Ω, existem constantes $m, M > 0$ tais que

$$0 < m \leq u_\varepsilon, v_\varepsilon \leq M \quad \text{em } K.$$

Assim, obtemos constantes $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) \leq\ & \frac{(\alpha+\beta)}{2}t_\eta^2\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx - \frac{2\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}}{\alpha+\beta}t_\eta^{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\eta^{\alpha+\beta}dx \\ & - \frac{2c_1c_2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}d_1}{\alpha+\beta}t_\eta^2\int_\Omega u_\eta^2 dx \\ & - \frac{2c_2\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}d_2}{\alpha+\beta}t_\eta^{\alpha+1}\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1}dx \\ & - \frac{2c_1\sqrt{\alpha}\beta^{\frac{\beta}{2}}d_3}{\alpha+\beta}t_\eta^{\beta+1}\int_\Omega u_\eta^{\beta+1}dx \\ & + \left(\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}d_4}{\alpha+\beta} + \frac{2\beta\sqrt{\beta}d_5}{\alpha+\beta}\right)t_\eta\int_\Omega u_\eta dx. \end{aligned}$$

Como $0 < m_0 \leq t_\eta \leq C_0$, segue que

$$\begin{aligned} I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) \leq\ & \frac{(\alpha+\beta)}{2}t_\eta^2\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx - C_1t_\eta^2\int_\Omega u_\eta^2dx - \frac{2\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}}{\alpha+\beta}t_\eta^{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\eta^{\alpha+\beta}dx \\ & C_2\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1}dx - C_3\int_\Omega u_\eta^{\beta+1}dx + C_4\int_\Omega u_\eta dx, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \dfrac{2c_1c_2d_1\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}{\alpha+\beta}$, $C_2 = \dfrac{2c_2d_2\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\beta}}{\alpha+\beta}m_0^{\alpha+1}$, $C_3 = \dfrac{2c_1d_3\sqrt{\alpha}\beta^{\frac{\beta}{2}}}{\alpha+\beta}m_0^{\beta+1}$ e $C_4 = \left(\dfrac{2\alpha\sqrt{\alpha}d_4}{\alpha+\beta} + \dfrac{2\beta\sqrt{\beta}d_5}{\alpha+\beta}\right)C_0$. Daí,

$$\begin{aligned} & I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) \\ & \leq \max_{t\geq 0}\left(\frac{(\alpha+\beta)}{2}t^2\left(\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega u_\eta^2dx\right) - \frac{2\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}}{\alpha+\beta}t^{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\eta^{\alpha+\beta}dx\right) \\ & - C_2\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1}dx - C_3\int_\Omega u_\eta^{\beta+1}dx + C_4\int_\Omega u_\eta dx, \end{aligned}$$

onde $\mu_1 = \dfrac{2C_1}{(\alpha+\beta)} > 0$. Definimos

$$\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \text{ por } \varphi(t) = a_1t^2 - a_2t^{2^*},$$

onde

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(B^2 + C^2\right)Q_{\mu_1}(u_\eta)\left(\int_\Omega u_\eta^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}, \quad a_2 = \frac{2}{2^*}B^\alpha C^\beta\int_\Omega u_\eta^{2^*}dx,$$

$$Q_{\mu_1}(u_\eta) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\eta|^2\,dx - \mu_1 \int_\Omega u_\eta^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\eta^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}, \quad B = \sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad C = \sqrt{\beta}.$$

Note que

$$I\left(\left(t\sqrt{\alpha}u_\eta, t\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right) \leq \max_{t\geq 0} \varphi(t) - C_2 \int_\Omega u_\eta^{\alpha+1} dx - C_3 \int_\Omega u_\eta^{\beta+1} dx + C_4 \int_\Omega u_\eta dx. \quad (3.30)$$

Temos que $t_0 = \left(\dfrac{2}{2^*}\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é ponto de máximo absoluto da função φ e

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{2}\left(B^2 + C^2\right) Q_{\mu_1}(u_\eta) \left(\int_\Omega u_\eta^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\left(B^2+C^2\right)}{B^\alpha C^\beta} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{1}{2^*-2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\eta^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}}\right)^2$$

$$- \frac{2}{2^*} B^\alpha C^\beta \int_\Omega u_\eta^{2^*} dx \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\left(B^2+C^2\right)}{B^\alpha C^\beta} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{1}{2^*-2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\eta^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}}\right)^{2^*}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0) &= \frac{1}{2}(B^2 + C^2) Q_{\mu_1}(u_\eta) \left(\frac{1}{2}\frac{(B^2+C^2)}{B^\alpha C^\beta} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{2}{2^*-2}} \\
&\quad - \frac{2}{2^*} B^\alpha C^\beta \left(\frac{1}{2}\frac{(B^2+C^2)}{B^\alpha C^\beta} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{(B^2+C^2)}{(B^\alpha C^\beta)^{\frac{2}{2^*}}} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{1+\frac{2}{2^*-2}} - \frac{2}{2^*}\left(\frac{1}{2}\frac{(B^2+C^2)}{(B^\alpha C^\beta)^{\frac{2}{2^*}}} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{B^2+C^2}{(B^\alpha C^\beta)^{\frac{2}{2^*}}} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} \left(1 - \frac{2}{2^*}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{B^2+C^2}{(B^\alpha C^\beta)^{\frac{2}{2^*}}} Q_{\mu_1}(u_\eta)\right)^{\frac{N}{2}} \frac{2}{N}.
\end{aligned}$$

Substituindo B e C por $\sqrt{\alpha}$ e $\sqrt{\beta}$, respectivamente, obtemos, por (3.23) e Lema 3.2,

$$
\begin{aligned}
\max_{t\geq 0}\varphi\left(t\right)=\varphi\left(t_0\right) &= \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha+\beta}{\left(\alpha^{\frac{\alpha}{2}}\beta^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}}}Q_{\mu_1}\left(u_\eta\right)\right)^{\frac{N}{2}}\\
&= \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{2^*}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{2^*}}\right)Q_{\mu_1}\left(u_\eta\right)\right)^{\frac{N}{2}}\\
&< \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{2^*}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{2^*}}\right)S\right)^{\frac{N}{2}}=\frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\alpha,\beta}\right)^{\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
$$

Em (3.30),

$$
I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta,t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)\leq\frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\alpha,\beta}\right)^{\frac{N}{2}}-C_2\int_\Omega u_\eta^{\alpha+1}dx-C_3\int_\Omega u_\eta^{\beta+1}dx+C_4\int_\Omega u_\eta dx.
$$

Pelos Lemas 3.5 e 3.4,

$$
I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta,t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)\leq\frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\widetilde{S}_{\alpha,\beta}\right)^{\frac{N}{2}}-C_5\ \eta^{N-\frac{(N-2)(\alpha+1)}{2}}-C_6\ \eta^{N-\frac{(N-2)(\beta+1)}{2}}+C_6\eta^{\frac{N-2}{2}}.
$$

Caso seja $\alpha\geq\beta$, vejamos que

$$
N-\frac{(N-2)\left(\alpha+1\right)}{2}<\frac{N-2}{2}.
$$

De fato, $N\geq 5$ implica que $1<\dfrac{N-2}{2}$. Logo basta verificarmos que $N-\dfrac{(N-2)\left(\alpha+1\right)}{2}\leq 1$. Mas essa desigualdade é equivalente a $\alpha\geq\dfrac{N}{N-2}$, que é verdadeira pois

$$
2\alpha\geq\alpha+\beta=2^*=\frac{2N}{N-2}.
$$

Caso seja $\beta>\alpha$, de forma análoga obtemos

$$
N-\frac{(N-2)\left(\beta+1\right)}{2}<\frac{N-2}{2},
$$

quando $N\geq 5$. Em qualquer dos dois casos, para $\eta>0$ suficientemente pequeno, temos que

$$
-C_5\ \eta^{N-\frac{(N-2)(\alpha+1)}{2}}-C_6\ \eta^{N-\frac{(N-2)(\beta+1)}{2}}+C_6\eta^{\frac{N-2}{2}}<0
$$

e, consequentemente,

$$
I\left(\left(t_\eta\sqrt{\alpha}u_\eta,t_\eta\sqrt{\beta}u_\eta\right)\right)<\frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}\tilde{S}_{\alpha,\beta}\right)^{\frac{N}{2}}.
$$

Isso mostra (3.26) e conclui a demonstração do lema. ■

Agora apresentamos uma versão do Lema de Brézis-Lieb [5](veja também [13]).

Lema 3.9 *Seja* $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ *fracamente em* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *e* $\alpha + \beta = 2^*$. *Então, a menos de subsequência,*

$$\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx = \int_\Omega |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \, dx + \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta \, dx + o(1). \tag{3.31}$$

Demonstração. Para provarmos (3.31) vamos analisar a diferença

$$\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx - \int_\Omega |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \, dx. \tag{3.32}$$

Iniciamos observando que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx - \int_\Omega |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \, dx \\ &= \int_\Omega \left(|u_n|^\alpha |v_n|^\beta - |u_n|^\alpha |v_n - v|^\beta \right) dx + \int_\Omega \left(|u_n|^\alpha |v_n - v|^\beta - |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \right) dx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Definimos $H_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, por

$$H_1(t) = |u_n|^\alpha |v_n - tv|^\beta.$$

Então

$$\frac{dH_1}{dt}(t) = \beta |u_n|^\alpha |v_n - tv|^{\beta-2} (v_n - tv)(-v), \ t \in [0,1].$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|u_n|^\alpha |v_n|^\beta - |u_n|^\alpha |v_n - v|^\beta \right) dx &= -\int_\Omega [H_1(1) - H_1(0)] \, dx \\ &= -\int_\Omega \left[\int_0^1 \frac{dH_1}{dt} dt \right] dx \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \beta |u_n|^\alpha |v_n - tv|^{\beta-2} (v_n - tv) v \ dtdx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Analogamente, definimos $H_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$H_2(t) = |u_n - tu|^\alpha |v_n - v|^\beta.$$

Então

$$\frac{dH_2}{dt}(t) = \alpha |u_n - tu|^{\alpha-2} (u_n - tu) |v_n - v|^\beta (-u), \ t \in [0,1]$$

e, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(|u_n|^\alpha |v_n - v|^\beta - |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \right) dx &= -\int_\Omega [H_2(1) - H_2(0)] \, dx \\ &= -\int_\Omega \int_0^1 \left[\frac{dH_2}{dt} dt \right] dx \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \alpha |u_n - tu|^{\alpha-2} |v_n - v|^\beta (u_n - tu) u \ dtdx. \end{aligned} \tag{3.35}$$

De (3.34) e (3.35) em (3.33) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \, dx - \int_\Omega |u_n - u|^\alpha |v_n - v|^\beta \, dx \\
&= \int_\Omega \int_0^1 \beta h_n(x,t)\, v \; dtdx - \int_\Omega \int_0^1 \alpha g_n(x,t)\, u \; dtdx,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde

$$h_n(x,t) = |u_n|^\alpha |v_n - tv|^{\beta-2}(v_n - tv) \quad \text{ e } \quad g_n(x,t) = |u_n - tu|^{\alpha-2} |v_n - v|^\beta (u_n - tu)$$

com $(x,t) \in \Omega \times [0,1]$. Como $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v)$ fracamente em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, então (u_n, v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e, a menos de subsequência, $(u_n, v_n) \to (u,v)$ fortemente em $L^q(\Omega)$, com $1 \le q < 2^*$ e $u_n(x) \to u(x)$, $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω. Logo,

$$h_n(x,t) \to (1-t)^{\beta-1} |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v \quad \text{ e } \quad g_n(x,t) \to 0$$

q.t.p. em $\Omega \times [0,1]$. Afirmamos que:

(i) $(h_n), (g_n)$ são sequências limitadas em $L^p(\Omega \times [0,1])$, onde $p = \dfrac{2^*}{2^*-1}$ e

(ii) $u, v \in L^{p'}(\Omega \times [0,1])$, onde $p' = 2^*$.

Admitindo essas afirmações verdadeiras, pelo Teorema 1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_0^1 \beta h_n(x,t)\, v \; dx &= \int_\Omega \int_0^1 |u|^\alpha |v|^\beta \beta (1-t)^{\beta-1} \, dtdx \\
&= \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta \left[-(1-t)^\beta\right]_0^1 dx \\
&= \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta \, dx
\end{aligned} \tag{3.37}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_0^1 \alpha g_n(x,t)\, u \; dtdx = 0. \tag{3.38}$$

De (3.37), (3.38) e (3.36) concluímos o lema. Desse modo, resta apenas mostrarmos (i) e (ii). Para provar (i), vejamos que pela Desigualdade de Hölder com expoentes $r = \dfrac{2^*-1}{\alpha}$

e $r' = \dfrac{2^*-1}{\beta-1}$ e usando a continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times[0,1]} |h_n(x,t)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dtdx \\
&= \int_{\Omega\times[0,1]} |u_n|^{\alpha\frac{2^*}{2^*-1}} |v_n - tv|^{(\beta-1)\frac{2^*}{2^*-1}}\, dtdx \\
&\leq \left(\int_{\Omega\times[0,1]} |u_n|^{2^*}\, dtdx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega\times[0,1]} |v_n - tv|^{2^*}\, dtdx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq C_1 \left(\int_{\Omega} |u_\eta|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega\times[0,1]} 2^{2^*}\left(|v_n|^{2^*} + |t|^{2^*}|v|^{2^*}\right) dtdx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq C_2 \,||u_n||_{2^*}^{\frac{2^*}{r}} \left(\int_{\Omega} |v_n|^{2^*}\, dx + \int_{\Omega} |v|^{2^*}\, dx\right) \\
&\leq C_3 \,||u_n||^{\frac{2^*}{r}} \left(||v_n||^{2^*} + 1\right) \\
&\leq C_4
\end{aligned}$$

pois (u_n, v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Também, pela Desigualdade de Hölder com expoentes $q = \dfrac{2^*-1}{\alpha-1}$ e $q' = \dfrac{2^*-1}{\beta}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times[0,1]} |g_n(x,t)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\, dtdx \\
&= \int_{\Omega\times[0,1]} |u_n - tu|^{\frac{2^*(\alpha-1)}{(2^*-1)}} |v_n - v|^{\frac{2^*\beta}{(2^*-1)}}\, dtdx \\
&\leq \left(\int_{\Omega\times[0,1]} |u_n - tu|^{2^*}\, dtdx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega\times[0,1]} |v_n - v|^{2^*}\, dtdx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega\times[0,1]} 2^{2^*}\left(|u_n|^{2^*} + |t|^{2^*}|u|^{2^*}\right) dtdx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega\times[0,1]} 2^{2^*}\left(|v_n|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) dtdx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq C_6,
\end{aligned}$$

onde usamos novamente a continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e o fato de que (u_n, v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Isso mostra (i). Agora, para provar (ii), basta observar que

$$\int_{\Omega}\int_0^1 |u|^{2^*}\, dtdx = \int_{\Omega} |u|^{2^*}\, dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega}\int_0^1 |v|^{2^*}\, dtdx = \int_{\Omega} |v|^{2^*}\, dx < \infty.$$

■

Lema 3.10 *Dado $\varepsilon > 0$, existem constantes $\widetilde{C}$, $\widehat{C}(\varepsilon) > 0$ tais que*

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx - \widetilde{C}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \widehat{C}(\varepsilon)$$

e ainda, $\widehat{C}(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Pela definição de I em (3.3),

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(v^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta\right) dx.$$

Do Lema 1.16, para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\left(u^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(v^+ + v_\varepsilon\right)^\beta &\leq 2^\alpha \left(\left(u^+\right)^\alpha + (u_\varepsilon)^\alpha\right) 2^{\beta-1}\left(\left(v^+\right)^\beta + (v_\varepsilon)^\beta\right) \\ &= 2^{\alpha+\beta-1}\left[\left(u^+\right)^\alpha \left(v^+\right)^\beta + \left(u^+\right)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha \left(v^+\right)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u,v) \geq{} & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx \qquad (3.39) \\ & - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega 2^{\alpha+\beta-1}\left[\left(u^+\right)^\alpha \left(v^+\right)^\beta + \left(u^+\right)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha \left(v^+\right)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta\right] dx \\ & + \frac{2}{\alpha+\beta}\int u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx \\ \geq{} & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx - \frac{2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx \\ & - \frac{2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left[\left(u^+\right)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha \left(v^+\right)^\beta + (u_\varepsilon)^\alpha (v_\varepsilon)^\beta\right] dx. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx\right) \leq \left(\frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx}{\tilde{S}_{\alpha,\beta}}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}. \qquad (3.40)$$

De fato, se $\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx = 0$, (3.40) é satisfeita. Caso contrário, consideramos $a = \left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \neq 0$. Então, $\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}\right)$ é tal que $\int_\Omega \left|\frac{u}{a}\right|^\alpha \left|\frac{v}{a}\right|^\beta dx = 1$. Pela definição de $\tilde{S}_{\alpha,\beta}$,

$$\tilde{S}_{\alpha,\beta} \leq \int_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{u}{a}\right)\right|^2 + \left|\nabla\left(\frac{v}{a}\right)\right|^2\right) dx = \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx}{\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}$$

e isso nos dá (3.40). Agora, pela Desigualdade de Young com $p = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ e $p' = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$,

$$\left(u^+\right)^{\alpha}(v_\varepsilon)^{\beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(u^+\right)^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(v_\varepsilon)^{\alpha+\beta},$$

$$(u_\varepsilon)^{\alpha}\left(v^+\right)^{\beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(u_\varepsilon)^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(v^+\right)^{\alpha+\beta},$$

$$(u_\varepsilon)^{\alpha}(v_\varepsilon)^{\beta} \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(u_\varepsilon)^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(v_\varepsilon)^{\alpha+\beta}.$$

Isso nos permite concluir que existe uma constante $C_2 = C_2(\alpha,\beta)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left[\left(u^+\right)^{\alpha}(v_\varepsilon)^{\beta} + (u_\varepsilon)^{\alpha}\left(v^+\right)^{\beta} + u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta}\right]dx \\
&\leq C_2\left(\int_\Omega \left(u^+\right)^{\alpha+\beta}dx + \int_\Omega \left(v^+\right)^{\alpha+\beta}dx\right) + \widehat{C}(\varepsilon) \qquad (3.41)\\
&\leq C_2\left(\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta}dx + \int_\Omega |v|^{\alpha+\beta}dx\right) + \widehat{C}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde $\widehat{C}(\varepsilon) = C_2\left[\int_\Omega (u_\varepsilon)^{\alpha+\beta}dx + \int_\Omega (v_\varepsilon)^{\alpha+\beta}dx\right]$. Pela definição de $S_{\alpha+\beta}$,

$$\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta}dx \leq (S_{\alpha+\beta})^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

e

$$\int_\Omega |v|^{\alpha+\beta}dx \leq (S_{\alpha+\beta})^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Em (3.41), obtemos $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left[\left(u^+\right)^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta}dx + u_\varepsilon^{\alpha}\left(v^+\right)^{\beta} + u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta}\right]dx \qquad (3.42)\\
&\leq C_3\left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\right] + \widehat{C}(\varepsilon)\\
&\leq 2C_3\left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx\right]^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \widehat{C}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Portanto, (3.40) e (3.42) em (3.39) nos dá

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx - \widetilde{C}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - \widehat{C}(\varepsilon).$$

Para finalizar, vamos mostrar que $\widehat{C}(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Sabemos, pelo item (i) do Teorema A, que $||u_\varepsilon||_\infty \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Logo,

$$\int_\Omega (u_\varepsilon)^{\alpha+\beta}dx \leq ||u_\varepsilon||_\infty^{\alpha+\beta}\int_\Omega 1dx = ||u_\varepsilon||_\infty^{\alpha+\beta}|\Omega| \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$ pois Ω é limitado. Desse modo,

$$\int_\Omega (u_\varepsilon)^{\alpha+\beta}\, dx \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

e, analogamente,

$$\int_\Omega (v_\varepsilon)^{\alpha+\beta}\, dx \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Concluímos que $\widehat{C}(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. ■

Lema 3.11 *Existem $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$ e $\rho, \sigma > 0$ tais que $I(u,v) \geq \sigma$, para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com $||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \rho$.*

Demonstração. Dados $\rho, \varepsilon > 0$, pelo Lema 3.10, existem constantes $\widetilde{C}$, $\widehat{C}(\varepsilon)$ tais que, para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com $||(u,v)|| = \rho$,

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \widetilde{C}\rho^{\alpha+\beta} - \widehat{C}(\varepsilon), \tag{3.43}$$

onde $\widehat{C}(\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Como $\alpha + \beta > 2$,

$$\frac{1}{2}\rho^2 - \widetilde{C}\rho^{\alpha+\beta} = \rho^2\left[\frac{1}{2} - \widetilde{C}\rho^{\alpha+\beta-2}\right] > 0$$

para $\rho = \rho_0$ suficientemente pequeno. Podemos escolher $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$ suficientemente pequeno tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$,

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho_0^2 - \widetilde{C}\rho_0^{\alpha+\beta} - \widehat{C}(\varepsilon) > 0.$$

Assim,

$$I(u,v) \geq \sigma > 0,$$

para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, com $||(u,v)|| = \rho_0$. ■

Lema 3.12 *Considere uma sequência $(z_n) = ((u_n, v_n)) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, tal que quando $n \to \infty$,*

$$I(z_n) \to c, \ I'(z_n) \to 0 \ \textit{ fortemente em } H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

Então (z_n) é limitada.

Demonstração. Por hipótese,

$$I(z_n) = c + o(1)$$

e

$$\left|I'(z_n)\cdot\left(z_n^+ + z_\varepsilon\right)\right| = \|I'(z_n)\|_{H^{-1}\times H^{-1}}\cdot\left\|z_n^+ + z_\varepsilon\right\| = o(1)\left\|z_n^+ + z_\varepsilon\right\|.$$

Logo,

$$c + o(1) + o(1)\left\|z_n^+ + z_\varepsilon\right\| = I(z_n) - \frac{1}{\alpha+\beta}I'(z_n)\,.\left(z_n^+ + z_\varepsilon\right). \tag{3.44}$$

Por definição de I,

$$\begin{aligned} I(z_n) = {} & \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right)dx + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v_n^+ dx \\ & - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta\right)dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I'(z_n)\,.\left(z_n^+ + z_\varepsilon\right) = {} & \int_\Omega \left(\nabla u_n^+\nabla\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right) + \nabla v_n^+\nabla\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)\right)dx \\ & - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^{\alpha-1}\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right)\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)dx \\ & - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^{\beta-1} - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right)\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & I(z_n) - \frac{1}{\alpha+\beta}I'(z_n)\,.\left(z_n^+ + z_\varepsilon\right) \\ & = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^+\right|^2 + \left|\nabla v_n^+\right|^2\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla v_n^-\right|^2\right)dx \\ & + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v_n^+ dx \\ & - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta dx + \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx \\ & - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^+\right|^2 + \left|\nabla v_n^+\right|^2\right)dx - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\nabla u_n^+\nabla u_\varepsilon + \nabla v_n^+\nabla v_\varepsilon\right)dx \\ & + \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega \left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta dx - \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega \left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha\left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta dx \\ & - \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx - \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v_n^+ dx \\ & - \frac{2\alpha}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx - \frac{2\beta}{(\alpha+\beta)^2}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx. \end{aligned}$$

Daí, e de (3.44),

$$
\begin{aligned}
&c + o(1) + o(1)\left|\left|z_n^+ + z_\varepsilon\right|\right| \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^+\right|^2 + \left|\nabla v_n^+\right|^2\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla v_n^-\right|^2\right)dx \\
&\quad + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v_n^+ dx \qquad (3.45)\\
&\quad - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\nabla u_n.\nabla u_\varepsilon + \nabla v_n.\nabla v_\varepsilon\right)dx.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n\right|^2 + \left|\nabla v_n\right|^2\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^+\right|^2 + \left|\nabla v_n^+\right|^2\right)dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla v_n^-\right|^2\right)dx \\
&\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^+\right|^2 + \left|\nabla v_n^+\right|^2\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla v_n^-\right|^2\right)dx \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \nabla u_n^+.\nabla u_\varepsilon dx + \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \nabla v_n^+.\nabla v_\varepsilon dx \\
&\quad - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}v_n^+ dx \\
&\quad + c + o(1) + o(1)\left|\left|z_n^+ + z_\varepsilon\right|\right|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega \left(\left|\nabla u_n\right|^2 + \left|\nabla v_n\right|^2\right)dx \leq{}& \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|\left|\nabla u_\varepsilon\right| dx \\
&+ \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left|\nabla v_n\right|\left|\nabla v_\varepsilon\right| dx \\
&+ c + o(1) + o(1)\left|\left|z_n^+ + z_\varepsilon\right|\right|.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 1.15 com $p = q = 2$, para qualquer $\delta > 0$,

$$
\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|\left|\nabla u_\varepsilon\right| dx \leq \delta\int_\Omega \left|\nabla u_n\right|^2 dx + C(\delta)\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon\right|^2 dx
$$

e

$$
\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left|\nabla v_n\right|\left|\nabla v_\varepsilon\right| dx \leq \delta\int_\Omega \left|\nabla v_n\right|^2 dx + C(\delta)\int_\Omega \left|\nabla v_\varepsilon\right|^2 dx.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_{\Omega}\left(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2\right)dx\\
&\leq \delta\int_{\Omega}\left(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2\right)dx + C(\delta)\int_{\Omega}\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+|\nabla v_\varepsilon|^2\right)dx\\
&\quad + c + o(1) + o(1)\,||z_n|| + o(1)\,||z_\varepsilon||\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+\beta}\right)||z_n||^2 \leq \delta\,||z_n||^2 + C(\delta)\,||z_\varepsilon||^2 + o(1)\,||z_n|| + C_2.$$

Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+\beta}-\delta > 0,$$

obtemos

$$||z_n||^2 \leq \widehat{C}(\delta) + ||z_n||\,.$$

Logo existe $C > 0$ tal que

$$||z_n|| \leq C.$$

■

Demonstração do Teorema B. Pelo Lema 3.11, existem $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*]$ e $\rho, \sigma > 0$ tais que $I(u,v) \geq \sigma$, para todo $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e para todo $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ com $||(u,v)||_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \rho$. Dado $\eta > 0$ seja u_η como definida em (3.17). Pelo Lema 3.6, existe $t_1 = t_1(\eta)$ tal que $z_1 = \left(t_1\sqrt{\alpha}u_\eta, t_1\sqrt{\beta}u_\eta\right)$ satisfaz $I(z_1) < 0$ e $||z_1|| > \rho$. Definimos

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\right) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = z_1\right\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))\,.$$

Pelo Teorema 1.18, existe uma sequência $z_n \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ tal que quando $n \to \infty$,

$$I(u_n, v_n) \to c,\ I'(u_n, v_n) \to 0 \ \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\,. \tag{3.46}$$

Pelo Lema 3.12, (z_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$z_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup z_0 = (u_0, v_0) \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

e

$$z_n(x) \to z_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mostraremos agora que $z_0 = (u_0, v_0)$ é solução fraca do problema (3.1). Com efeito, como $I'(u_n, v_n) \to 0$,

$$I'(u_n, v_n)(\varphi_1, \varphi_2) = o(1), \text{ para todo } (\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} o(1) = & \int_\Omega (\nabla u_n . \nabla \varphi_1 + \nabla v_n . \nabla \varphi_2) \, dx \\ & - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega \left((u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1} (v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta \right) \varphi_1 dx \\ & - \frac{2\beta}{\alpha+\beta} \int_\Omega \left((u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha} (v_n^+ + v_\varepsilon)^{\beta-1} - u_\varepsilon^{\alpha} v_\varepsilon^{\beta-1} \right) \varphi_2 dx, \end{aligned} \tag{3.47}$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Analisaremos o comportamento de cada termo de (3.47) quando $n \to \infty$. Afirmamos que

$$\int_\Omega \nabla u_n . \nabla \varphi_1 dx \to \int_\Omega \nabla u_0 . \nabla \varphi_1 dx \tag{3.48}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_n . \nabla \varphi_2 dx \to \int_\Omega \nabla v_0 . \nabla \varphi_2 dx \tag{3.49}$$

quando $n \to \infty$, para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De fato, seja $h : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $h(u) = \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi_1 dx$. Observamos que h é linear. Além disso, pela Desigualdade de Hölder, $|h(u)| \leq ||\varphi_1||_{H_0^1(\Omega)} ||u||_{H_0^1(\Omega)}$. Logo h é contínua. Como $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ então $h(u_n) \to h(u_0)$, o que mostra (3.48). De maneira análoga, mostra-se (3.49). Agora, aplicando o Teorema 1.3, mostraremos que para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1} (v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta \varphi_1 dx \to \int_\Omega (u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1} (v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta \varphi_1 dx \tag{3.50}$$

e

$$\int_\Omega (u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha} (v_n^+ + v_\varepsilon)^{\beta-1} \varphi_2 dx \to \int_\Omega (u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha} (v_0^+ + v_\varepsilon)^{\beta-1} \varphi_2 dx \tag{3.51}$$

quando $n \to \infty$. Com esse fim, observamos que $(u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta$ é limitada em $L^p(\Omega)$, com $p = 2^*/(2^*-1)$. De fato, aplicando a Desigualdade de Hölder com expoentes $r = (2^*-1)/(\alpha-1)$ e $r' = (2^*-1)/\beta$, pela continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|(u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &\leq \left(\int_\Omega \left|u_n^+ + u_\varepsilon\right|^{\frac{2^*(\alpha-1)r}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega \left|v_n^+ + v_\varepsilon\right|^{\frac{2^*\beta r'}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left|u_n^+ + u_\varepsilon\right|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega \left|v_n^+ + v_\varepsilon\right|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= \left|\left|u_n^+ + u_\varepsilon\right|\right|_{2^*}^{\frac{2^*}{r}} \left|\left|v_n^+ + v_\varepsilon\right|\right|_{2^*}^{\frac{2^*}{r'}} \\
&\leq \left(\left|\left|u_n^+\right|\right|_{2^*} + ||u_\varepsilon||_{2^*}\right)^{\frac{2^*}{r}} \left(\left|\left|v_n^+\right|\right|_{2^*} + ||v_\varepsilon||_{2^*}\right)^{\frac{2^*}{r'}} \\
&\leq \left[C_1 \left|\left|u_n^+\right|\right| + ||u_\varepsilon||_{2^*}\right]^{\frac{2^*}{r}} \left[C_1\left(\left|\left|v_n^+\right|\right| + ||v_\varepsilon||_{2^*}\right)\right]^{\frac{2^*}{r'}}.
\end{aligned}$$

Como u_n^+, v_n^+ são limitadas em $H_0^1(\Omega)$, segue que $(u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$. Como $(u_n^+, v_n^+) \to (u_0^+, v_0^+)$ q.t.p em Ω, pelo Teorema 1.3,

$$\int_\Omega (u_n^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_n^+ + v_\varepsilon)^\beta \varphi_1 dx \to \int_\Omega (u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta \varphi_1 dx,$$

para todo $\varphi_1 \in L^{2^*}(\Omega)$. Em particular, para todo $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$. Isso mostra (3.50). Analogamente, mostra-se (3.51). Fazendo $n \to \infty$ em (3.47) e usando $(3.48) - (3.51)$,

$$I'((u_0, v_0)) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = \lim_{n\to\infty} I'((u_n, v_n)) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Agora vamos mostrar que u_0 e v_0 são estritamente positivas. Com efeito,

$$\begin{aligned}
0 &= I'((u_0, v_0)) \cdot (u_0^-, 0) \\
&= \int_\Omega (\nabla u_0 . \nabla u_0^-) dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega \left((u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx \qquad (3.52) \\
&= \int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^2 dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega \left((u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx,
\end{aligned}$$

Além disso, denotando $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u_0 \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega : u_0 < 0\}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left((u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx \\
&= \int_{\Omega^+} \left((u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx \\
&\quad + \int_{\Omega^-} \left((u_0^+ + u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_0^+ + v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx \qquad (3.53) \\
&= \int_{\Omega^-} \left(u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta\right) u_0^- dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por (3.53) e (3.52) ,

$$\left|\left|u_0^-\right|\right|^2 = \int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^2 dx = 0.$$

E daí, $u_0^- = 0$ q.t.p. em Ω e, portanto, $u_0 = u_0^+ \geq 0$. Analogamente, de

$$I'\left((u_0, v_0)\right) \cdot \left(0, v_0^-\right) = 0$$

obtemos que $v_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω. Vamos mostrar que $u_0, v_0 > 0$ em Ω. Pela teoria de regularidade, (u_0, v_0) é uma solução clássica de (3.1) . Suponhamos que exista x no interior de Ω tal que $u_0(x) = 0$. Então, u_0 atingiria o mínimo no interior de Ω. Nesse caso, pelo Princípio do Máximo Forte, u_0 seria constante no interior de Ω e portanto, seria $u_0 \equiv 0$. Fazendo uma análise análoga para v_0, verificamos que $v_0 > 0$ ou $v_0 \equiv 0$ em Ω. Supondo o caso em que $z_0 = (u_0, v_0)$ é tal que $u_0 > 0$ e $v_0 \equiv 0$ e substituindo em (3.1) temos

$$0 = \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\left((u_0 + u_\varepsilon)^\alpha (v_\varepsilon)^{\beta-1} - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right) > 0$$

que é uma contradição. Com o mesmo argumento verificamos que o caso $u_0 \equiv 0$ e $v_0 > 0$ também não ocorre. Concluímos que há somente duas possibilidades para $z_0 = (u_0, v_0)$:

$$(i) \;\; z_0 > 0 \text{ em } \Omega \qquad \text{ou} \qquad (ii) \;\; z_0 \equiv 0 \text{ em } \Omega.$$

Se valer (i) o teorema está provado. Suponhamos então que vale (ii) . Vamos denotar

$$\widetilde{u}_n = u_n^+ + u_\varepsilon \text{ e } \widetilde{v}_n = v_n^+ + v_\varepsilon. \tag{3.54}$$

Por $(u_n, v_n) \rightharpoonup z_0 \equiv 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, segue que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ e $\widetilde{v} \rightharpoonup v_\varepsilon$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Sabendo que $I'\left((u_n, v_n)\right) \to 0$ e (u_n, v_n) é limitada, temos que

$$\begin{aligned} o(1) &= I'\left((u_n, v_n)\right) \cdot (u_n, v_n) \\ &= ||z_n||^2 - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left((\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right) u_n dx \\ &\quad - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left((\widetilde{u}_n)^\alpha (\widetilde{v}_n)^{\beta-1} - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right) v_n dx. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega \left((\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right) u_n dx = \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + o(1) \tag{3.56}$$

e

$$\int_\Omega \left((\widetilde{u}_n)^\alpha (\widetilde{v}_n)^{\beta-1} - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1}\right) v_n dx = \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + o(1). \tag{3.57}$$

Vamos mostrar apenas (3.56) pois a prova de (3.57) é inteiramente análoga. Seja $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u_n(x) \geq 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega : u_n(x) < 0\}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left((\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right)\left(u_n^+ + u_n^-\right)dx &= \int_{\Omega^+}\left((\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right)(\widetilde{u}_n - u_\varepsilon)\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega^-}\left((u_\varepsilon)^{\alpha-1}(v_\varepsilon)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right)\left(u_n^-\right)dx \\
&= \int_{\Omega^+}\left((\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta - u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right)(\widetilde{u}_n - u_\varepsilon)\,dx \\
&= \int_{\Omega^+}(\widetilde{u}_n)^\alpha(\widetilde{v}_n)^\beta dx - \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\widetilde{u}_n dx \\
&\quad - \int_{\Omega^+} u_\varepsilon(\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta + \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Observamos, pelo Lema 3.9, que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^+}(\widetilde{u}_n)^\alpha(\widetilde{v}_n)^\beta dx &= \int_{\Omega^+}(\widetilde{u}_n - u_\varepsilon)^\alpha(\widetilde{v}_n - v_\varepsilon)^\beta dx + \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx + o(1) \\
&= \int_{\Omega^+}\left(u_n^+\right)^\alpha\left(v_n^+\right)^\beta dx + \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx + o(1).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Agora, definimos o funcional linear $h_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $h_1(u) = \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta u\ dx$. Aplicando a Desigualdade de Hölder com expoentes $r = \dfrac{2^*}{2^*-1}$ e $r' = 2^*$ e do fato de u_ε e v_ε serem contínuas e portanto limitadas em Ω, podemos obter uma constante $C_1 > 0$ de modo que

$$|h_1(u)| \leq \left(\int_\Omega \left|u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega |u|^{r'} dx\right)^{\frac{1}{r'}} \leq C_1 \|u\|_{2^*}.$$

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|h_1(u)| \leq C_1\|u\|_{2^*} \leq C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, h_1 é contínua. Desse modo, como $\widetilde{u}_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ então $h_1(\widetilde{u}_n) \to h_1(u_\varepsilon)$, ou seja,

$$\int_{\Omega^+} u_\varepsilon^{\alpha-1}v_\varepsilon^\beta\widetilde{u}_n dx = \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx + o(1). \tag{3.60}$$

Para concluir a afirmação, vejamos que

$$\int_{\Omega^+} u_\varepsilon(\widetilde{u}_n)^{\alpha-1}(\widetilde{v}_n)^\beta = \int_{\Omega^+} u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx + o(1). \tag{3.61}$$

Com efeito, pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < 2^*$, e passando a uma subsequência se necessário, $\widetilde{u}_n \to u_\varepsilon$ em $L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < 2^*$. Logo

$\widetilde{u}_n(x) \to u_\varepsilon(x)$ q.t.p. em Ω e $|\widetilde{u}_n| \leq h_2$ q.t.p. em Ω, onde $h_2 \in L^q(\Omega)$ e $1 \leq q < 2^*$. Analogamente, temos $|\widetilde{v}_n| \leq h_3$ q.t.p. em Ω, onde $h_3 \in L^q(\Omega)$ e $1 \leq q < 2^*$. Pela Desigualdade de Young, com expoentes $r = \dfrac{2^*-1}{\alpha-1}$ e $r' = \dfrac{2^*-1}{\beta}$,

$$|\widetilde{u}_n|^{\alpha-1} |\widetilde{v}_n|^{\beta} \leq \frac{|\widetilde{u}_n|^{2^*-1}}{r} + \frac{|\widetilde{v}_n|^{2^*-1}}{r'} \leq \frac{h_2^{2^*-1}}{r} + \frac{h_3^{2^*-1}}{r'} \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema 1.2 temos (3.61). Substituindo (3.59), (3.60) e (3.61) em (3.58) obtemos (3.56) e a afirmação está provada. Por (3.55), (3.56) e (3.57)

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx - 2\int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx \to 0.$$

Como (z_n) é uma sequência limitada, podemos passar a uma subsequência se necessário e obter um número real $a \geq 0$, tal que, quando $n \to \infty$,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx \to 2a, \quad \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx \to a. \tag{3.62}$$

Primeiramente, vamos considerar o caso em que $a = 0$. Então, $||z_n|| \to 0$, ou seja, $z_n = (u_n, v_n) \to z = (0,0)$ fortemente em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} I(u_n, v_n) = I(0,0) = 0,$$

o que nos dá uma contradição. Agora, supomos $a > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande,

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}$$

e daí,

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \left(\int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx.$$

De (3.62),

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)\, a^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \leq 2a.$$

Daí,

$$\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)}{2} \leq a^{\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha+\beta}} \Rightarrow \left(\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)}{2}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)-2}} \leq a.$$

Observando que

$$\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)-2} = \frac{2^*}{2^*-2} = \frac{N}{2},$$

temos

$$\left(\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \leq a. \tag{3.63}$$

Como $u_n \rightharpoonup 0$ e $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ então $\widetilde{u}_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ e $\widetilde{v}_n \rightharpoonup v_\varepsilon$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 3.9, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\widetilde{u}_n|^\alpha |\widetilde{v}_n|^\beta dx &= \int_\Omega |\widetilde{u}_n - u_\varepsilon|^\alpha |\widetilde{v}_n - v_\varepsilon|^\beta dx + \int_\Omega |u_\varepsilon|^\alpha |v_\varepsilon|^\beta dx + o(1)\\ &= \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + \int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta dx + o(1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega \left(|\widetilde{u}_n|^\alpha |\widetilde{v}_n|^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta\right) dx = \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + o(1),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \left(\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta\right) dx = \int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + o(1). \tag{3.64}$$

Além disso, observando que $u_n^+ \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e repetindo a mesma prova de (3.60) temos

$$\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx \to 0. \tag{3.65}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1} v_n^+ dx \to 0. \tag{3.66}$$

Segue de (3.64), (3.65), (3.66) e (3.63) que

$$\begin{aligned}c &= I(u_n, v_n) + o(1)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx\\ &\quad - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(\left(u_n^+ + u_\varepsilon\right)^\alpha \left(v_n^+ + v_\varepsilon\right)^\beta - u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^\beta\right) dx\\ &\quad + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1} v_\varepsilon^\beta u_n^+ dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega u_\varepsilon^\alpha v_\varepsilon^{\beta-1} v_n^+ dx + o(1)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right) dx - \frac{2}{\alpha+\beta}\int_\Omega \left(u_n^+\right)^\alpha \left(v_n^+\right)^\beta dx + o(1)\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima, por (3.62) e (3.63), obtemos

$$c = \left(1 - \frac{2}{\alpha+\beta}\right) a \geq \frac{2}{N}\left(\frac{\widetilde{S}_{\alpha,\beta}}{2}\right)^{\frac{N}{2}},$$

contradizendo o Lema 3.8. Isso mostra que (ii) $z_0 \equiv 0$ em Ω não pode ocorrer e o teorema está demonstrado. ■

Capítulo 4

O caso supercrítico

Neste capítulo temos como objetivo relacionar a existência de solução do sistema $(\widehat{P}_\varepsilon)$ no caso supercrítico à existência de solução dos problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v = g(x), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Mais precisamente, demonstraremos o teorema abaixo, onde denotamos por $(\widehat{P}_\varepsilon)$ o problema (P_ε) sem a condição $u > 0,\ v > 0$ em Ω.

Teorema C *Seja Ω um domínio estrelado do $\mathbb{R}^N$,* de classe C^1, com $N \geq 3$. *Sejam $\alpha, \beta > 1$ e $f, g \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$* tais que $f, g \not\equiv 0$ em Ω.

(i) Se os dois problemas (4.1) e (4.2) tem soluções não negativas então o problema $(\widehat{P}_\varepsilon)$ tem pelo menos uma solução não negativa $\overline{z_\varepsilon} = (\overline{u}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

(ii) Se $\alpha + \beta > 2^*$, com $\alpha, \beta \in (1, 2^*]$ então vale a recíproca do item (i). Além disso, $||\overline{z}_\varepsilon|| \to 0$ com $\varepsilon \to 0$, onde $||\cdot||$ denota a norma do espaço de Banach $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Para demonstrar o Teorema C utilizamos alguns resultados que apresentamos a seguir. Primeiramente veremos uma versão da identidade de Pohozaev [17], que é um caso especial de uma identidade estabelecida em [16].

Lema 4.1 *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, onde Ω é um domínio de classe C^1 em $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, satisfazendo $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então*

$$\int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla u)\, dx = \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS,$$

onde n é o vetor normal unitário exterior a Ω.

Demonstração. Para $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega$, valem as seguintes identidades:

$$\Delta u (x \cdot \nabla u) = \operatorname{div} [\nabla u (x \cdot \nabla u)] - \nabla u \cdot \nabla (x \cdot \nabla u),$$

$$\nabla u \cdot \nabla (x \cdot \nabla u) = |\nabla u|^2 + x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right)$$

e

$$x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - N \frac{|\nabla u|^2}{2}.$$

Das três igualdades anteriores segue que

$$\Delta u (x \cdot \nabla u) = \operatorname{div} \left[\nabla u (x \cdot \nabla u) - \frac{|\nabla u|^2}{2} x \right] + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2.$$

Integrando em Ω e aplicando o Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla u) = \int_{\partial\Omega} \left[(\nabla u \cdot \vec{n}) (x \cdot \nabla u) - \frac{|\nabla u|^2}{2} (x \cdot n) \right] dS + \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx. \tag{4.3}$$

Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que $\nabla u = (\nabla u \cdot n)\, n$ sobre $\partial\Omega$, pois ∇u é ortogonal à superfície de nível $u = 0$. Daí,

$$\int_{\partial\Omega} \left[(\nabla u \cdot \vec{n}) (x \cdot \nabla u) - \frac{|\nabla u|^2}{2} (x \cdot n) \right] dS = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u \cdot n|^2 (x \cdot n)\, dS. \tag{4.4}$$

Por (4.4) e (4.3) concluímos a prova do lema. ■

Lema 4.2 *Seja $f, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, onde Ω é um domínio de classe C^1 em $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, satisfazendo $w = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então*

$$\int_\Omega \nabla (fw) \cdot x\ dx = -N \int_\Omega fw\ dx \tag{4.5}$$

e

$$\int_\Omega f (x \cdot \nabla w)\, dx = -N \int_\Omega fw\ dx - \int_\Omega w (x \cdot \nabla f)\, dx. \tag{4.6}$$

Demonstração. Inicialmente observamos que

$$\operatorname{div}(fwx) = \nabla(fw)\cdot x + fw(\operatorname{div} x) = \nabla(fw)\cdot x + Nfw.$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\partial\Omega} fw\,(x\cdot n)\,dS = \int_\Omega \operatorname{div}(fwx)\,dx = \int_\Omega \nabla(fw)\cdot x\ dx + N\int_\Omega fw\ dx.$$

Como $w=0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos (4.5). Agora,

$$\nabla(fw)\cdot x = (f\nabla w + w\nabla f)\cdot x = f(x\cdot\nabla w) + w(x\cdot\nabla f). \tag{4.7}$$

De (4.7) e (4.5),

$$\int_\Omega [f(x\cdot\nabla w) + w(x\cdot\nabla f)]\,dx = -N\int_\Omega fw\ dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega f(x\cdot\nabla w)\,dx = -N\int_\Omega fw\ dx - \int_\Omega w(x\cdot\nabla f)\,dx.$$

■

Lema 4.3 *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio de classe $C^1, N\geq 3$ e $w_1, w_2 \in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, tais que*

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}w_1^{\alpha-1}w_2^{\beta} + f(x), & \text{em } \Omega,\\ -\Delta w_2 = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}w_1^{\alpha}w_2^{\beta-1} + g(x), & \text{em } \Omega,\\ w_1 = w_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

Então

$$\begin{aligned} &\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left(\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w_2}{\partial n}\right|^2\right)dS\\ &= \frac{N+2}{2}\int_\Omega w_1 f\ dx + \frac{N+2}{2}\int_\Omega w_2 g\ dx + \int_\Omega w_1(x\cdot\nabla f)\,dx + \int_\Omega w_2(x\cdot\nabla g)\,dx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Demonstração. Por (4.8) e pelo Lema 4.1,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta w_1(x\cdot\nabla w_1)\,dx &= -\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^{\alpha-1}w_2^\beta(x\cdot\nabla w_1)\,dx - \int_\Omega f(x)(x\cdot\nabla w_1)\,dx \\ &= \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla w_1|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 dS. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pelo Teorema da Divergência aplicado ao campo $\vec{F} = w_1 \nabla w_1$,

$$0 = \int_{\partial\Omega} w_1 (\nabla w_1 \cdot \vec{n})\, dS = \int_\Omega |\nabla w_1|^2\, dx + \int_\Omega w_1 \Delta w_1 dx.$$

Daí, e de (4.8),

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w_1|^2\, dx &= \int_\Omega w_1 (-\Delta w_1)\, dx \\ &= \int_\Omega w_1 \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \varepsilon^{\alpha+\beta-2} w_1^{\alpha-1} w_2^\beta + f(x) \right) dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por (4.10) e (4.11) temos

$$\begin{aligned} &-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2} \int_\Omega w_1^{\alpha-1} w_2^\beta (x \cdot \nabla w_1)\, dx - \int_\Omega f(x)(x \cdot \nabla w_1)\, dx \\ &= \frac{N-2}{2}\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta + \frac{N-2}{2}\int_\Omega w_1 f(x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 dS. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por (4.6) do Lema 4.2,

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_1^{\alpha-1} w_2^\beta (x \cdot \nabla w_1)\, dx &= -\int_\Omega w_1 \left(x \cdot \nabla \left(w_1^{\alpha-1} w_2^\beta \right) \right) dx - N \int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx \\ &= -\int_\Omega w_1 (\alpha-1) w_1^{\alpha-2} w_2^\beta (\nabla w_1 \cdot x) \\ &\quad - \int_\Omega w_1 \beta w_1^{\alpha-1} w_2^{\beta-1} (\nabla w_2 \cdot x)\, dx - N \int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx. \end{aligned}$$

Isso implica diretamente que

$$\alpha \int_\Omega w_1^{\alpha-1} w_2^\beta (x \cdot \nabla w_1)\, dx = -\beta \int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1} (\nabla w_2 \cdot x)\, dx - N \int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx. \tag{4.13}$$

De (4.12) juntamente com (4.13) e (4.6) do Lema 4.2,

$$\begin{aligned} &\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\left[\frac{\beta}{\alpha}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1}(\nabla w_2 \cdot x)\, dx + \frac{N}{\alpha}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx \right] \\ &+ \int_\Omega w_1 (\nabla f \cdot x)\, dx + N \int_\Omega w_1 f dx \\ &= \frac{N-2}{2}\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx + \frac{N-2}{2}\int_\Omega w_1 f dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 dS. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\left[\frac{N-2}{2}\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\frac{N}{\alpha} \right] \int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 dS \\ &= \left[N - \frac{N-2}{2} \right] \int_\Omega w_1 f dx + \int_\Omega w_1 (\nabla f \cdot x)\, dx + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1}(\nabla w_2 \cdot x)\, dx. \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon^{\alpha+\beta-2}}{\alpha+\beta}\left[(N-2)\alpha-2N\right]\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2 dS\\ &=\left[\frac{N+2}{2}\right]\int_\Omega w_1 f dx+\int_\Omega w_1(\nabla f\cdot x)\,dx+\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1}(\nabla w_2\cdot x)\,dx.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Analogamente a (4.12) podemos obter

$$\begin{aligned}&-\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1}(\nabla w_2\cdot x)\,dx-\int_\Omega g(x)(\nabla w_2\cdot x)\,dx\\ &=\frac{N-2}{2}\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx+\frac{N-2}{2}\int_\Omega w_2\ g\ dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_2}{\partial n}\right|^2 dS.\end{aligned}$$

Por (4.5) do Lema 4.2, deduzimos da equação acima que

$$\begin{aligned}&-\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^{\beta-1}(\nabla w_2\cdot x)\,dx+\int_\Omega w_2(\nabla g\cdot x)\,dx+N\int_\Omega w_2 g dx\\ &=\frac{N-2}{2}\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx+\frac{N-2}{2}\int_\Omega w_2\ g\ dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left|\frac{\partial w_2}{\partial n}\right|^2 dS.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, somando (4.14) com (4.15), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon^{\alpha+\beta-2}}{\alpha+\beta}\left[(N-2)\alpha+(N-2)\beta-2N\right]\int_\Omega w_1^\alpha w_2^\beta dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left(\left|\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial w_2}{\partial n}\right|^2\right)dS\\ &=\frac{N+2}{2}\int_\Omega w_1 f dx+\frac{N+2}{2}\int_\Omega w_2 g dx+\int_\Omega w_1(\nabla f\cdot x)\,dx+\int_\Omega w_2(\nabla g\cdot x)\,dx,\end{aligned}$$

o que prova (4.9). ■

Demonstração do Teorema C. Inicialmente provamos (*ii*). Suponhamos que $(\widehat{P}_\varepsilon)$ tenha pelo menos uma solução não negativa $\overline{z}_\varepsilon=(\overline{u}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon)$ com $\overline{u}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon\in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, para todo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Primeiro vamos mostrar que $||\overline{z}_\varepsilon||\to 0$ quando $\varepsilon\to 0$ e, em seguida, que (4.1) e (4.2) tem soluções não negativas. Definindo

$$w_{1\varepsilon}=\frac{\overline{u}_\varepsilon}{\varepsilon},w_{2\varepsilon}=\frac{\overline{v}_\varepsilon}{\varepsilon},$$

obtemos

$$\begin{cases}\varepsilon(-\Delta w_{1\varepsilon})=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}(\varepsilon w_{1\varepsilon})^{\alpha-1}(\varepsilon w_{2\varepsilon})^\beta+\varepsilon f(x), & \text{em }\Omega,\\ \varepsilon(-\Delta w_{2\varepsilon})=\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}(\varepsilon w_{1\varepsilon})^{\alpha}(\varepsilon w_{2\varepsilon})^{\beta-1}+\varepsilon g(x), & \text{em }\Omega,\\ \varepsilon w_{1\varepsilon}=\varepsilon w_{2\varepsilon}=0, & \text{sobre }\partial\Omega,\end{cases}$$

A partir disso, segue que o par $(w_{1\varepsilon}, w_{2\varepsilon})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_{1\varepsilon} = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2} w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\beta} + f(x), & \text{em } \Omega, \\ -\Delta w_{2\varepsilon} = \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2} w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta-1} + g(x), & \text{em } \Omega, \\ w_{1\varepsilon} = w_{2\varepsilon} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Assim, pelo Lema 4.3,

$$\begin{aligned} &\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left(\left|\frac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w_{2\varepsilon}}{\partial n}\right|^2\right) d\sigma \\ &= \frac{N+2}{2}\int_\Omega w_{1\varepsilon} f\ dx + \frac{N+2}{2}\int_\Omega w_{2\varepsilon} g\ dx + \int_\Omega w_{1\varepsilon}(x\cdot\nabla f)\,dx + \int_\Omega w_{2\varepsilon}(x\cdot\nabla g)\,dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx = &-\tfrac{1}{2\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)\left(\left|\frac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w_{2\varepsilon}}{\partial n}\right|^2\right) d\sigma \\ &+ \tfrac{N+2}{2\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}\int_\Omega w_{1\varepsilon} f\ dx + \tfrac{N+2}{2\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}\int_\Omega w_{2\varepsilon} g\ dx \\ &+ \tfrac{1}{\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}\int_\Omega w_{1\varepsilon}(x\cdot\nabla f)\,dx + \tfrac{1}{\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}\int_\Omega w_{2\varepsilon}(x\cdot\nabla g)\,dx \end{aligned}$$

Como Ω é um domínio estrelado, $x \cdot n > 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx \le C\bigg(&\int_\Omega w_{1\varepsilon} f(x)\,dx + \int_\Omega w_{2\varepsilon} g(x)\,dx \\ &+ \int_\Omega w_{1\varepsilon}(x\cdot\nabla f(x))\,dx + \int_\Omega w_{2\varepsilon}(x\cdot\nabla g(x))\,dx\bigg) \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $C = \dfrac{N+2}{2\left(N-2-\frac{2N}{\alpha+\beta}\right)}$. Observamos que $C > 0$ pois $\alpha+\beta > 2^*$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega \nabla w_{1\varepsilon}.\nabla w_{1\varepsilon} dx + \int_\Omega w_{1\varepsilon}\Delta w_{1\varepsilon} dx = \int_\Omega \operatorname{div}(w_{1\varepsilon}\nabla w_{1\varepsilon})\,dx = \int_{\partial\Omega}(w_{1\varepsilon}\nabla w_{1\varepsilon}\cdot n)\,dS = 0.$$

Daí, e de (4.16),

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla w_{1\varepsilon}|^2 dx &= \int_\Omega w_{1\varepsilon}(-\Delta w_{1\varepsilon})\,dx \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx + \int_\Omega w_{1\varepsilon} f\ dx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |\nabla w_{2\varepsilon}|^2 dx = \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx + \int_\Omega w_{2\varepsilon} g\ dx.$$

Somando as duas últimas igualdades, obtemos

$$\int_\Omega \left(|\nabla w_{1\varepsilon}|^2 + |\nabla w_{2\varepsilon}|^2\right) dx = 2\varepsilon^{\alpha+\beta-2} \int_\Omega w_{1\varepsilon}^\alpha w_{2\varepsilon}^\beta + \int_\Omega w_{1\varepsilon} f \ dx + \int_\Omega w_{2\varepsilon} g \ dx. \tag{4.19}$$

Pela Desigualdade de Hölder, por $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, por Ω ser limitado e pelo Teorema 1.5, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega w_{1\varepsilon} f \ dx \leq \left(\int_\Omega |w_{1\varepsilon}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \, ||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 \tag{4.20}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega w_{1\varepsilon} \left(x \cdot \nabla f\right) dx &\leq \left(\int_\Omega |w_{1\varepsilon}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(x \cdot \nabla f\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ||w_{1\varepsilon}||_2 \left(\int_\Omega |x|^2 |\nabla f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \, ||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 \, . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Tomando $C_1 > 0$ maior se necessário, obtemos igualmente que

$$\int_\Omega w_{2\varepsilon} g \ dx \leq C_1 \, ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2 \tag{4.22}$$

e

$$\int_\Omega w_{2\varepsilon} \left(x \cdot \nabla g\right) dx \leq C_1 \, ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2 \, . \tag{4.23}$$

Substituindo (4.20),(4.21) , (4.22) , (4.23) em (4.18) obtemos

$$\varepsilon^{\alpha+\beta-2} \int_\Omega w_{1\varepsilon}^\alpha w_{2\varepsilon}^\beta dx \leq C_2 \left(||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 + ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2\right). \tag{4.24}$$

De (4.20) , (4.22) e (4.24) em (4.19) segue que

$$\begin{aligned} ||\nabla w_{1\varepsilon}||_2^2 + ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2^2 &\leq C_3 \left(||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 + ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2\right) \\ &= C_3 \left[\left(||\nabla w_{1\varepsilon}||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(||\nabla w_{2\varepsilon}||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq 2C_3 \left(||\nabla w_{1\varepsilon}||_2^2 + ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Chamando $A = \left(||\nabla w_{1\varepsilon}||_2^2 + ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$, a desigualdade acima implica que $A^2 \leq 2C_3 A$, o que nos dá $A \leq 2C_3$, ou seja,

$$\int_\Omega \left(|\nabla w_{1\varepsilon}|^2 + |\nabla w_{2\varepsilon}|^2\right) dx \leq \left(2C_3\right)^2.$$

Logo

$$||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 \leq 2C_3 \text{ e } ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2 \leq 2C_3. \tag{4.25}$$

Por $(4.25), (4.24)$ e pelo Teorema 1.4, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{2^*} dx \le C_4, \quad \int_\Omega w_{2\varepsilon}^{2^*} dx \le C_4 \tag{4.26}$$

e

$$\varepsilon^{\alpha+\beta-2} \int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx \le C_4, \tag{4.27}$$

onde C_4 não depende de ε. Como $\overline{u}_\varepsilon = \varepsilon w_{1\varepsilon}$ e $\overline{v}_\varepsilon = \varepsilon w_{2\varepsilon}$, de (4.25) segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||\nabla \overline{u}_\varepsilon||_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \, ||\nabla w_{1\varepsilon}||_2 = 0$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||\nabla \overline{v}_\varepsilon||_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \, ||\nabla w_{2\varepsilon}||_2 = 0.$$

Isso mostra que $||\overline{z}_\varepsilon|| = \left(||\nabla \overline{u}_\varepsilon||_2^2 + ||\nabla \overline{v}_\varepsilon||_2^2 \right)^{1/2} \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Agora vamos mostrar que (4.1) e (4.2) tem soluções não negativas. Por (4.25), $w_{1\varepsilon}$ e $w_{2\varepsilon}$ são limitadas em $H_0^1(\Omega)$. Logo, podemos supor que $w_{1\varepsilon} \rightharpoonup w_1, w_{2\varepsilon} \rightharpoonup w_2$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0$. Para $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ e α, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\beta} \varphi_1 dx \right| &\le \int_\Omega \left| \left(w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}} \right) \left(w_{2\varepsilon}^{\frac{\beta}{\alpha}} \varphi_1 \right) \right| dx \\
&\le \left(\int_\Omega \left| w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} dx \right)^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} \left(\int_\Omega \left| w_{2\varepsilon}^{\frac{\beta}{\alpha}} \varphi_1 \right|^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha} w_{2\varepsilon}^{\beta} dx \right)^{\frac{(\alpha-1)}{\alpha}} \left(\int_\Omega w_{2\varepsilon}^{\beta} |\varphi_1|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Como $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\beta \in (1, 2^*]$ e Ω é limitado, pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{2^*}{\beta}$ e $\dfrac{2^*}{2^* - \beta}$ e também por (4.26), obtemos constantes $C_5, C_6 > 0$ tais que

$$\int_\Omega w_{2\varepsilon}^{\beta} |\varphi_1|^\alpha dx \le C_5 \left(\int_\Omega w_{2\varepsilon}^{2^*} dx \right)^{\frac{\beta}{2^*}} \le C_6. \tag{4.29}$$

Substituindo (4.27) e (4.29) em (4.28) segue que

$$\left| \int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\beta} \varphi_1 dx \right| \le C_7 \varepsilon^{-(\alpha+\beta-2)\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Daí,

$$\left| \varepsilon^{(\alpha+\beta-2)} \int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1} w_{2\varepsilon}^{\beta} \varphi_1 dx \right| \le C_7 \varepsilon^{(\alpha+\beta-2)\left[1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right]}.$$

Logo

$$\varepsilon^{(\alpha+\beta-2)}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1}w_{2\varepsilon}^{\beta}\varphi_1 dx \to 0, \text{ quando } \varepsilon\to 0. \tag{4.30}$$

Analogamente,

$$\varepsilon^{(\alpha+\beta-2)}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha}w_{2\varepsilon}^{\beta-1}\varphi_2 dx \to 0, \text{ quando } \varepsilon\to 0. \tag{4.31}$$

Seja $\vec{F}=\varphi_1\nabla w_{1\varepsilon}$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1.\nabla w_{1\varepsilon}dx+\int_\Omega \varphi_1\triangle w_{1\varepsilon}dx=\int_\Omega \operatorname{div}\overrightarrow{F}dx=\int_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}\cdot n\, dS=0. \tag{4.32}$$

Agora, multiplicando a primeira equação em (4.16) por φ_1 e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega \varphi_1\left(-\triangle w_{1\varepsilon}\right)dx=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1}w_{2\varepsilon}^{\beta}\varphi_1 dx+\int_\Omega f\left(x\right)\varphi_1 dx.$$

E de (4.32),

$$\int_\Omega \nabla w_{1\varepsilon}.\nabla\varphi_1 dx=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha-1}w_{2\varepsilon}^{\beta}\varphi_1 dx+\int_\Omega f\left(x\right)\varphi_1 dx. \tag{4.33}$$

De maneira análoga,

$$\int_\Omega \nabla w_{2\varepsilon}.\nabla\varphi_2 dx=\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta-2}\int_\Omega w_{1\varepsilon}^{\alpha}w_{2\varepsilon}^{\beta-1}\varphi_2 dx+\int_\Omega g\left(x\right)\varphi_2 dx. \tag{4.34}$$

Observamos que $h: H_0^1\left(\Omega\right)\to\mathbb{R}$ dada por $h\left(w\right)=\int_\Omega \nabla w.\nabla\varphi_1 dx$ é linear. Além disso, pela Desigualdade de Hölder,

$$\left|h\left(w\right)\right|\le\left|\left|\nabla\varphi_1\right|\right|_2\left|\left|\nabla w\right|\right|_2\le C_1\left|\left|w\right|\right|_{H_0^1(\Omega)},$$

logo h é contínua. Como $w_{1\varepsilon}\rightharpoonup w_1$ fracamente em $H_0^1\left(\Omega\right)$ então $h\left(w_{1\varepsilon}\right)\to h\left(w_1\right)$ quando $\varepsilon\to 0$. Fazendo $\varepsilon\to 0$ em (4.33) e usando (4.30) temos

$$\int_\Omega \nabla w_1.\nabla\varphi_1 dx=\int_\Omega f\left(x\right)\varphi_1 dx.$$

Analogamente, fazendo $\varepsilon\to 0$ em (4.34) e usando (4.31), obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_2.\nabla\varphi_2 dx=\int_\Omega g\left(x\right)\varphi_2 dx.$$

Portanto, w_1 e w_2 são soluções fracas dos problemas (4.1) e (4.2), respectivamente. Temos que $w_{1\varepsilon}\ge 0,\ w_{2\varepsilon}\ge 0$ em Ω. A menos de subsequência, $w_{1\varepsilon},\ w_{2\varepsilon}$ convergem fortemente em $L^q\left(\Omega\right)$, com $1\le q<2^*$. Logo, passando a outra subsequência se necessário, $w_{1\varepsilon},\ w_{2\varepsilon}$

convergem, q.t.p em Ω, para w_1 e w_2, respectivamente. Dessa maneira, $w_1, w_2 \geq 0$, q.t.p. em Ω. Pela teoria de regularidade sabemos que w_1, w_2 são soluções clássicas dos problemas (4.1) e (4.2). Concluímos assim que se o problema $(\widehat{P}_\varepsilon)$ admite pelo menos uma solução não negativa para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então os problemas (4.1) e (4.2) admitem soluções não negativas. Isso finaliza a demonstração do item (ii). Agora, vamos demonstrar o item (i). Com essa finalidade, vamos denotar por u_0, v_0 as soluções não negativas dos problemas (4.1) e (4.2) respectivamente. Assim, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \Delta(\varepsilon u_0) = -\varepsilon f(x) \geq -\left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta}|u_0|^{\alpha-1}|v_0|^{\beta} + \varepsilon f(x)\right), & \text{em } \Omega, \\ (\varepsilon u_0) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta(\varepsilon v_0) = -\varepsilon g(x) \geq -\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\varepsilon^{\alpha+\beta}|u_0|^{\alpha}|v_0|^{\beta-1} + \varepsilon g(x)\right) & \text{em } \Omega, \\ (\varepsilon v_0) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e daí, $(\varepsilon u_0, \varepsilon v_0)$ é uma subsolução do problema $(\widehat{P}_\varepsilon)$. Pelo Lema 2.1, existe $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, $(\widehat{P}_\varepsilon)$ possui uma supersolução $(\overline{w}_\varepsilon, \overline{w}_\varepsilon)$ com $\overline{w}_\varepsilon > 0$ em Ω. Afirmamos que $\overline{w}_\varepsilon \geq \varepsilon u_0$ e $\overline{w}_\varepsilon \geq \varepsilon v_0$ em Ω para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$. De fato, como $-\Delta u_0 = f(x)$ em Ω, por (2.1) do Lema 2.1,

$$-\Delta(\overline{w}_\varepsilon - \varepsilon u_0) > \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\overline{w}_\varepsilon^{\alpha-1}\overline{w}_\varepsilon^{\beta} > 0.$$

Como $\overline{w}_\varepsilon - \varepsilon u_0 = 0$ sobre $\partial\Omega$, pelo Princípio do Máximo Fraco, $\overline{w}_\varepsilon \geq \varepsilon u_0$ em Ω. Analogamente, utilizando a equação (2.2) do Lema 2.1, obtemos que $\overline{w}_\varepsilon \geq \varepsilon v_0$ em Ω. Pelo Teorema 1.14, $(\widehat{P}_\varepsilon)$ admite uma solução $(\widetilde{u}_\varepsilon, \widetilde{v}_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$, satisfazendo

$$0 \leq \varepsilon u_0 \leq \widetilde{u}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon \quad \text{e} \quad 0 \leq \varepsilon v_0 \leq \widetilde{v}_\varepsilon \leq \overline{w}_\varepsilon.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A. Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[2] Alves, C. O.; de Morais Filho, D. C.; Souto M. A. S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents. Nonlinear Analysis, v.42, p.771-787, 2000.

[3] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal., v.14, p.349-381, 1973.

[4] Brézis, H. Analyse fonctionnelle, theorie et applications. Masson, 1983.

[5] Brézis, H.;Lieb, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Amer. Math. Soc., v.88, p.486-490, 1983.

[6] Brézis, H.; Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving-critical Sobolev exponent. Comm. Pure Appl. Math., v.36, p.437-477, 1983.

[7] Các, N. P.; Gatica, J. A.; Li, Y. Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign. Nonlinear Analysis, v.37, p.501-510, 1999.

[8] Cao, D.; Zhou, H. On the existence of multiple solutions of nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), v.47, p.89-96, 1996.

[9] Evans, L. C. Partial Differential Equations. AMS, 1997.

[10] Figueiredo, Djairo G. Equações elípticas não lineares, 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1977.

[11] Gilbarg, D; Trundinger, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, 1983.

[12] Han, P. Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents. Nonlinear Analysis, v.64, p.869-886, 2006.

[13] Han, P. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of an elliptic system involving critical Sobolev exponents. Houston Journal of Mathematics, v.32, p.1241-1257, 2006.

[14] Kavian, O. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques. Paris: Springer-Verlag, 1993.

[15] McOwen, R. C. Partial differential equations. Prentice Hall, 1995.

[16] Mitidieri, E. A Rellich type identity and applications, Commun. Partial Differential Equations, v.18, p.125-151, 1993.

[17] Pohozaev, S. Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Soviet. Math. Dokl., v.6, p.1408-1411, 1965.

[18] Squassina, M. Two solutions for inhomogeneous nonlinear elliptic equations at critical growth. Nonlinear Differential Equations Appl., v.11, p.53-71, 2004.

[19] Talenti, G. Best constants in Sobolev inequality. Ann. Mat., v.110, p.353-372, 1976.

[20] Tarantello, G. On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire, v.9, p.281-304, 1992.

[21] Willem, M. Minimax theorems. Birkhäuser, 1996.