

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALONSO ROMERO FUÑO

**Perturbações da matéria num modelo cosmológico  
com interações no setor escuro**

Vitória - Espírito Santo  
2014

---

ALONSO ROMERO FUÑO

**PERTURBAÇÕES DA MATÉRIA NUM MODELO COSMOLÓGICO COM INTERAÇÕES  
NO SETOR ESCURO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

VITÓRIA  
2014

---

**PERTURBAÇÕES DA MATÉRIA NUM MODELO COSMOLÓGICO COM INTERAÇÕES  
NO SETOR ESCURO**

**ALONSO ROMERO FUÑO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 29 de Abril de 2014

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)  
Orientador

---

Prof. Dr. Jailson Souza de Alcaniz  
Observatório Nacional (ON)

---

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi  
Universidade Federal do Espírito Santo - CEUNES

---

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten  
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

---

---

*Dedico este trabalho aos meus pais, Alonso e Hilda, aos meus irmãos, Ervin e Diego Alonso, aos meus avós, Eulogio e Natividad e a toda minha família e amigos que sempre acreditaram em mim.*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço infinitamente a meus pais Alonso e Hilda, por seu grande amor, por ter me ensinado que a educação é fundamental na vida, por seu grande esforço e apoio para alcançar meus objetivos e muitos outros ensinamentos que me tornaram um ser humano melhor.

A meus irmãos Ervin e Diego Alonso por seu grande amor e porque eles são a minha motivação para continuar lutando por meus objetivos a cada dia.

A meus avós Eulogio e Natividad pela sua preocupação e oração a Deus para cuidar de mim.

A meu orientador Winfried Zimdahl por confiar em mim para a realização deste trabalho, pelas muitas vezes que dedicou a esclarecer e discutir muitas questões sobre cosmologia, pelo exemplo de pesquisador e por muitas outras coisas que vão torná-lo um exemplo para mim.

A meu co-orientador e amigo Wiliam Santiago por sua contribuição para a realização deste trabalho e pelos bons momentos da minha estadia em São Mateus .

A meu amigo Rodrigo por sua amizade desde o primeiro momento que cheguei ao Brasil e por seus conselhos para a realização deste trabalho.

A Carolina, Álefe, Cássio, Thiago Caramês, Daniel e todos os meus outros companheiros da pós-graduação por sua amizade e grandes momentos de futebol.

A meus primos: Guillermo, Luis, Antonio e Karina que fizeram minhas estadias no Perú muito agradáveis, a meus tios: Justo, Jhony, Moises, Bony, Mary e todos os outros membros da minha família por seu grande apoio moral.

Aos amigos da minha república Yopo-Mandía: Jhonny, William e Marcelo por seu grande apoio e companhia em meus últimos meses no Brasil e a todos os meus conterrâneos pelos momentos de fraternidade e diversão.

Ao secretário da Pós-Graduação em Física, José Carlos Cruz pela sua boa vontade em ajudar e por sua amizade, muito obrigado Zé.

Ao Cosmology Group - UFES onde aprendi muito sobre a pesquisa atual em Cosmologia.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo suporte financeiro e a Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

---

“Nunca considere o estudo como uma obrigação, mas como uma oportunidade de penetrar no lindo e maravilhoso mundo do conhecimento.”

*Albert Einstein.*

---

# RESUMO

Interações no setor escuro mudam a dinâmica cosmológica padrão. Em particular, elas podem ser relevantes para aliviar o problema de coincidência. Nesta dissertação estudamos um modelo cosmológico no qual a matéria escura e a energia escura interagem de tal forma que a razão entre as densidades das energias obedece uma lei de potência com respeito ao fator de escala. Este modelo foi introduzido na literatura para abordar o problema de coincidência e sua dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico já foi estudado em trabalhos anteriores. O presente trabalho estende este modelo para incluir desvios da homogeneidade no Universo. Pequenas perturbações da homogeneidade podem crescer devido à instabilidade gravitacional para finalmente formar as estruturas que observamos atualmente. Enquanto estas inomogeneidades são pequenas, seu crescimento pode ser estudado por uma teoria perturbativa de primeira ordem. Fizemos um estudo dessa dinâmica perturbativa tanto no nível newtoniano quanto no relativístico. Por outro lado, atualizamos os estudos anteriores da dinâmica do fundo considerando amostras de dados de supernovas mais recentes na literatura. No fundo, o modelo é testado contra os dados de Supernovas do tipo Ia das amostras SDSS, Constitution e Union 2.1. No âmbito de uma teoria Newtoniana simplificada estudamos a influência do acoplamento entre matéria e energia escuras na dinâmica das perturbações da matéria. Na base de uma teoria relativista invariante de calibre calculamos o espectro de potência da matéria e confrontamos os resultados com os dados da estrutura em larga escala dos projetos 2dFGRS e SDSS DR7. Além disso, é feita um análise conjunta do nível de fundo com o nível perturbativo.

**Palavras-chaves:** cosmologia, energia escura, matéria escura, perturbações cosmológicas.

---

# ABSTRACT

Interactions in the dark sector change the cosmological standard dynamic. In particular, they can be relevant to alleviate the problem of coincidence. In this thesis we study a cosmological model in which dark matter and dark energy interact in such a way that the ratio between the densities of the energies obeys a power law with respect to the scale factor. This model was introduced in the literature to address the problem of coincidence and the dynamics of the homogeneous and isotropic background has been studied in previous works. The present work extends this model to include deviations from homogeneity in the Universe. Small perturbations of homogeneity may grow due to gravitational instability to finally form the structures that we observe today. While these inhomogeneities are small, their growth can be studied by a perturbation theory of first order. We did a study of this perturbative dynamics both at the Newtonian and the relativistic levels. On the other hand, we actualize previous studies of the background dynamics by taking into account the most recent SNIa data. Basically, the model is tested against data from type Ia supernovae samples of SDSS, Constitution and Union 2.1. Within a simplified Newtonian theory we study the influence of the coupling between matter and dark energy on the dynamics of matter perturbations. On the basis of a relativistic gauge invariant theory we calculate the power spectrum of the matter and confront the results with data from the large-scale structure of the 2dFGRS and SDSS DR7 projects. Moreover, we perform a joint analysis of the background level with the perturbative level.

**Keywords:** cosmology, dark energy, dark matter, cosmological perturbations.

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Cosmologia Padrão</b>	<b>17</b>
2.1	Desvio para o vermelho . . . . .	19
2.2	Distância de luminosidade . . . . .	20
2.3	O conteúdo material do Universo . . . . .	22
2.4	Dinâmica de Friedmann . . . . .	24
2.5	Modelo padrão . . . . .	27
2.5.1	Radiação . . . . .	28
2.5.2	Matéria . . . . .	29
2.5.3	Energia escura . . . . .	29
2.5.4	Modelo $\Lambda$ CDM plano . . . . .	30
2.6	Modelos alternativos de energia escura . . . . .	31
2.6.1	$x$ -CDM . . . . .	31
2.6.2	Quartessência . . . . .	32
2.6.3	Decaimento de vácuo . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Teoria das Perturbações Cosmológicas</b>	<b>34</b>
3.1	Teoria Newtoniana de perturbações cosmológicas . . . . .	35
3.1.1	Teoria de Jeans . . . . .	36
3.1.2	Mecanismo de Jeans: fluido em expansão . . . . .	40
3.2	Teoria relativista de perturbações cosmológicas . . . . .	46
3.2.1	Transformação de calibre . . . . .	48
3.2.2	Perturbações da métrica . . . . .	51
3.2.3	Calibre comóvel . . . . .	54
3.2.4	Teoria perturbativa em termos de quantidades invariantes de calibre . . . . .	56
3.2.5	Sistema de duas componentes interagindo . . . . .	65

---

<b>4</b>	<b>Modelo Scaling</b>	<b>67</b>
4.1	Introdução . . . . .	67
4.2	O problema da coincidência cósmica . . . . .	68
4.3	Dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico . . . . .	69
4.4	A análise de Supernovas Ia . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Formação de Estruturas no Modelo Scaling</b>	<b>88</b>
5.1	As Perturbações Newtonianas . . . . .	88
5.2	As Perturbações relativistas . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>As Equações de Campo de Einstein</b>	<b>118</b>
<b>B</b>	<b>Equação de Raychaudhuri</b>	<b>123</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>127</b>

# LISTA DE FIGURAS

4.1	Dependência do redshift das contribuições fracionários $\Omega_M = 8\pi G\rho_M/(3H^2)$ e $\Omega_x = 8\pi G\rho_x/(3H^2)$ , para os modelos scaling e $\Lambda$ CDM (testados com os dados da amostra Union 2.1), e Ref.(9) (testado com os dados de 397 supernovas da amostra Constitution).	72
4.2	Parâmetro de desaceleração para os modelos scaling, $\Lambda$ CDM (testados com os dados da amostra Union 2.1) e Ref.(9) (testado com os dados de 397 supernovas da amostra Constitution).	73
4.3	Dados da amostra SDSS calibrados com MLCS2k2	78
4.4	Curvas de contorno a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para Supernovas do SDSS(MLCS2k2)	78
4.5	<b>Figura esquerda:</b> Valor preferido de $\Omega_{M_0}$ para amostra SDSS(MLCS2k2). <b>Figura direita:</b> Valor preferido de $\xi$ para amostra SDSS(MLCS2k2).	79
4.6	Dados da amostra SDSS calibrados com SALT II	80
4.7	Curvas de contorno a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para Supernovas do SDSS(SALT II)	80
4.8	<b>Figura esquerda:</b> Valor preferido de $\Omega_{M_0}$ para amostra SDSS(SALT II). <b>Figura direita:</b> Valor preferido de $\xi$ para amostra SDSS(SALT II).	81
4.9	Dados da amostra Constitution calibrados com MLCS2k2	82

4.10	Curvas de contorno a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para Supernovas do Constitution(MLCS2k2) . . . . .	82
4.11	<b>Figura esquerda:</b> Valor preferido de $\Omega_{M_0}$ para amostra CONTITUTION(MLCS2k2). <b>Figura direita:</b> Valor preferido de $\xi$ para amostra Constitution(MLCS2k2). . . . .	83
4.12	Dados da amostra Constitution calibrados com SALT II . . . . .	84
4.13	Curvas de contorno a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para Supernovas do Constitution(SALT II) . . . . .	84
4.14	<b>Figura esquerda:</b> Valor preferido de $\Omega_{M_0}$ para amostra CONTITUTION(SALT II). <b>Figura direita:</b> Valor preferido de $\xi$ para amostra Constitution(SALT II). . . . .	85
4.15	Dados da amostra UNION 2.1. . . . .	86
4.16	Curvas de contorno a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para Supernovas do UNION 2.1 . . . . .	86
4.17	<b>Figura esquerda:</b> Valor preferido de $\Omega_{M_0}$ para amostra UNION 2.1. <b>Figura direita:</b> Valor preferido de $\xi$ para amostra UNION 2.1. . . . .	87
5.1	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\alpha$ fixando $\beta = 0$ e $\eta = 0$ . . . . .	94
5.2	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\alpha$ fixando $\beta = 0$ e $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a $k = 1$ , $k = 30$ e $k = 50$ respectivamente. . . . .	94
5.3	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\alpha$ fixando $\beta = 1$ e $\eta = 0$ . . . . .	95
5.4	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\alpha$ fixando $\beta = 1$ e $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a $k = 1$ , $k = 30$ e $k = 50$ respectivamente. . . . .	95
5.5	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\beta$ fixando $\alpha = 0$ e $\eta = 0$ . . . . .	96

5.6	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\beta$ fixando $\alpha = 1$ e $\eta = 0$ . . . . .	96
5.7	Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria $\delta_M$ como função do fator de escala $a$ para diferentes valores de $\beta$ fixando $\alpha = 1$ e $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a $k = 1$ , $k = 30$ e $k = 50$ respectivamente. . . . .	97
5.8	A razão $G_{eff}/G$ como função do fator de escala para diferentes valores de $\alpha$ e $\beta$ fixando $\eta = 0$ . . . . .	98
5.9	A razão $G_{eff}/G$ como função do fator de escala para diferentes valores de $\alpha$ e $\beta$ fixando $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a $k = 1$ , $k = 30$ , e $k = 50$ respectivamente. . . . .	98
5.10	<b>Figura esquerda:</b> PDF unidimensional para o parâmetro de densidade da matéria escura $\Omega_{M_0}$ resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS. <b>Figura direita:</b> PDF unidimensional para $\xi$ resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS. . . . .	110
5.11	Espectro de potência (PS) da matéria previsto para o modelo scaling normalizado em $k = 0.185hMpc^{-1}$ para diferentes valores de $\xi$ confrontado com os dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS. . . . .	111
5.12	<b>Figura esquerda:</b> PDF unidimensional para o parâmetro de densidade da matéria escura $\Omega_{M_0}$ resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7. <b>Figura direita:</b> PDF unidimensional para $\xi$ resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7. . . . .	112
5.13	Espectro de potência (PS) da matéria previsto para o modelo scaling normalizado em $k = 0.185hMpc^{-1}$ para diferentes valores de $\xi$ confrontado com os dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7. . . . .	113
5.14	Curvas de contorno a $2\sigma$ e $3\sigma$ de níveis de confiança de $(\Omega_{M_0}, \xi)$ para o análise conjunta. . . . .	114

## LISTA DE TABELAS

3.1	Elementos do tensor métrico escalar . . . . .	52
4.1	Resultados da análise com Supernovas do SDSS (MLCS2k2) para os modelos $\Lambda$ CDM e scaling . . . . .	79
4.2	Resultados da análise com Supernovas do SDSS (SALT II) para os modelos $\Lambda$ CDM e scaling . . . . .	81
4.3	Resultados da análise com Supernovas do Constitution (MLCS2k2) para os modelos $\Lambda$ CDM e scaling . . . . .	83
4.4	Resultados da análise com Supernovas do Constitution (SALT II) para os modelos $\Lambda$ CDM e scaling . . . . .	85
4.5	Resultados da análise com Supernovas do UNION 2.1 para os modelos $\Lambda$ CDM e scaling . . . . .	87
5.1	Resultados da análise com dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS para o modelo scaling. . . . .	110
5.2	Resultados da análise com dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7 para o modelo scaling. . . . .	112
5.3	Resultados da análise conjunta com dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7 e dados de Supernovas da amostra Union 2.1 para o modelo scaling. . . . .	114

---

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O conjunto dos dados observacionais atuais (1) está indicando que aproximadamente 95% do substrato cosmológico é invisível e só se manifesta através de sua ação gravitacional.

No âmbito da teoria da relatividade geral de Einstein, a conclusão mais aceita é que estes 95% estão formando um "setor escuro" de natureza não bariônica. Este setor é normalmente dividido em energia escura e matéria escura. Energia escura é uma componente exótica com uma pressão negativa que domina dinamicamente o universo atual.

Na teoria de Einstein uma pressão efetiva negativa é necessária para entender a expansão acelerada do universo, onde esta última é uma das questões mais importantes da cosmologia moderna e que foi descoberta e tem sido verificada por observações de Supernovas tipo Ia (2), radiação cósmica de fundo (CMB) (3) e oscilações acústicas bariônicas (BAO) (4).

Matéria escura, por outro lado, é matéria sem pressão, necessária para explicar a origem das estruturas cósmicas.

A natureza da matéria escura e da energia escura é objeto de intensos estudos em todo o mundo, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional.

A maior parte das investigações feitas atualmente é fenomenológica e baseada na hipótese que matéria e energia escuras evoluem independentemente, ou seja, suas energias obedecem leis de conservação separadas.

Mas existe uma linha de pesquisa onde se leva em conta a possibilidade de uma interação não gravi-

tacional entre matéria escura e energia escura [(5), (6), (7)].

Esta interação entre energia escura e matéria escura pode também ser proposta como um meio de procurar aliviar um dos problemas que tem o modelo padrão, chamada "Why now?" ou problema da coincidência, o qual diz: "Porque as densidade de energia de ambas componentes escuras são da mesma ordem hoje?".

Como é sabido, no cenário do  $\Lambda$ CDM, as densidades escalam como  $\rho_X \propto \rho_M a^3$ , enquanto em uma teoria sem problema de coincidência, espera-se  $\rho_X \propto \rho_M$ . Em (8), Dalal *et al.* sugerem uma forma fenomenológica para a razão das densidades da matéria escura e energia escura  $\rho_M \propto \rho_X a^{-\xi}$  para testar o problema de coincidência.

Diferentes aspectos da dinâmica no fundo homogêneo e isotrópico deste modelo já foram estudados e confrontados com os dados observacionais [(9), (10)].

Aqui nós pretendemos complementar este modelo com uma análise da dinâmica perturbativa.

Então o alvo principal desta dissertação é o estudo da dinâmica perturbativa num modelo no qual matéria e energia escuras interagem de tal maneira que a razão entre as densidades da energia das componentes obedeça uma lei de potência no fator de escala. Daqui adiante este modelo é chamado de modelo scaling.

Calculamos o contraste de densidade da matéria num formalismo invariante de calibre e confrontamos o espectro de potência da matéria com os dados observacionais.

Preparando a análise perturbativa, atualizamos também estudos anteriores da dinâmica do fundo e testamos esta dinâmica com as amostras mais recentes na literatura.

A presente tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2 revisamos as noções básicas da cosmologia, como as equações de Friedmann, o modelo padrão  $\Lambda$ CDM e uma descrição breve de alguns modelos alternativos de energia escura.

No capítulo 3 estudaremos a teoria de perturbação linear no nível Newtoniano (válida para escalas menores do raio de Hubble) para o caso de um fluido estático e em expansão para logo abordar a análise desta teoria no nível relativista (válida para todas as escalas), num formalismo invariante de calibre.

---

No capítulo 4 apresentaremos as características básicas da dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico para o modelo Scaling, para logo avaliar a sua compatibilidade com os dados observacionais a partir de testes com Supernovas Ia. Aqui os testes com Supernovas são realizados utilizando três amostras diferentes: SDSS, Constitution e Union 2.1.

O capítulo 5 será exclusivo para o estudo das perturbações cosmológicas aplicado ao nosso modelo. Aqui faremos o estudo no nível Newtoniano, onde se fez uma análise da equação central para as perturbações Newtonianas.

Além disso, se fez um estudo no nível relativista, onde é determinado o espectro de potência da matéria que foram confrontados com os dados de estrutura em grande escala dos projetos: 2dFGRS e SDSS DR7. Nesta última parte o teste de fundo, considerando só a amostra Union 2.1, sera combinado com os teste no nível perturbativo para uma análise final.

Finalmente no capítulo 6, apresentamos as conclusões.

# Capítulo 2

## COSMOLOGIA PADRÃO

Chamamos de cosmologia padrão aquela oriunda dos estudos da Relatividade Geral de Einstein, segundo a qual a interação gravitacional passa a ser interpretada como um efeito da curvatura do espaço-tempo [(11), (12)]. Esta curvatura pode ser entendida como uma consequência provocada pela presença da matéria-energia (considerar que também temos curvatura no espaço-tempo devido ao vácuo). Esta relação está contida nas equações de Einstein (ver apêndice A)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Como a consequência das identidades contraídas de Bianchi, conclui-se que a derivada covariante das equações do campo gravitacional é identicamente nula. Isto implica que a distribuição de matéria deve ser conservada<sup>1</sup>

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} = 0 \Rightarrow T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.2)$$

Dessa forma, é evidente que a inclusão de um termo constante multiplicado pela métrica no termo geométrico não afeta a estrutura das equações de campo, no sentido que as identidades de Bianchi ainda são satisfeitas

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Essa constante cosmológica foi introduzida originalmente para descrever um Universo estático, e após a constatação de que ele se expande foi descartada. Atualmente, sabendo que o Universo se encontra numa fase de expansão acelerada, a constante cosmológica foi resgatada e se apresenta como uma das

<sup>1</sup>De fato as leis de conservação podem ser obtidas desta condição.

possibilidades de descrever a energia escura<sup>2</sup>.

Os índices gregos variam entre 0 até 3. O lado esquerdo da equação [2.3] carrega as informações sobre a geometria do espaço-tempo, através do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e de suas derivadas, que definem o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o escalar de curvatura  $R$ . Já no lado direito, temos o tensor energia-momento, que irá conter informações sobre a constituição do universo, quais elementos o preenchem, com quais densidades de energia e qual é a pressão que os caracterizam. A grandeza  $G$  é a constante da gravitação, que na Relatividade Geral permanece constante.

Atualmente existem motivações fortes para se acreditar que o Universo visível é isotrópico. Os dados da radiação cósmica de fundo, detectada nos anos 60 (13), que fornecem uma "foto" do Universo quando ele tinha apenas 380.000 anos, indicam que nesta época o desvio da isotropia do universo era da ordem de  $10^{-5}$  (14).

Então, o princípio cosmológico, usado como base de modelos teóricos por conferir simplicidade ao formalismo, agora tem argumentos observacionais que justificam seu uso. Matematicamente, essa homogeneidade e isotropia do universo em largas escalas é descrita por um espaço-tempo que possui simetria máxima espacial. Então, seguindo este pensamento, o modelo padrão e os modelos aqui estudados são construídos segundo uma métrica com máxima simetria espacial, chamada de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.4)$$

onde as coordenadas  $(ct, r, \theta, \phi)$  são co-móveis (15). A função  $a(t)$  é o fator de escala, e seu comportamento nos diz sobre a dinâmica do Universo: se ele está em expansão, contração ou com configuração estacionária. Este fator será a chave para estimativa de distâncias físicas, ou grandezas com dimensão de distância. A constante  $K$  pode assumir os valores +1, 0 e -1, correspondendo a universos fechado, plano e aberto, respectivamente.

---

<sup>2</sup>Neste trabalho, consideraremos um modelo em que a energia escura é descrita por um fluido dinâmico e não como uma constante cosmológica.

## 2.1 Desvio para o vermelho

Uma informação importante sobre o fator de escala  $a(t)$  é obtida através da observação dos deslocamentos nas frequências da luz emitida por objetos muito distantes, por exemplo, um sinal de luz emitido de uma fonte na coordenada  $r = r_e$  num tempo  $t = t_e$  que chega a um observador na coordenada  $r = r_0$  num tempo  $t = t_0$ , percorre uma geodésica nula ( $ds^2 = 0$ ), por [2.4], o sinal de luz na direção radial será

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2} dr^2 = 0, \quad (2.5)$$

ou

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr. \quad (2.6)$$

Adotemos o sinal negativo, já que, na trajetória da luz emitida,  $r$  diminui com o passar do tempo. Fazendo a integração entre os limites emitido e observado respectivamente, temos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_e}^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr. \quad (2.7)$$

Se outro sinal de luz for emitido no tempo  $t_e + \Delta t_e$ , chegará ao detetor no tempo  $t_0 + \Delta t_0$ .

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_{r_e}^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr. \quad (2.8)$$

Subtraindo [2.8] de [2.7], obtemos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (2.9)$$

A segunda integral pode ser escrita como

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (2.10)$$

e com [2.10] em [2.9], obtemos a forma seguinte

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (2.11)$$

Considerando que  $\Delta t_0$  e  $\Delta t_e$  são, respectivamente, os intervalos temporais entre a emissão e detecção do primeiro e segundo sinais, e portanto pequenos em comparação com a evolução do fator de escala,

podemos considerar estes constante no cálculo das integrais acima, de onde obtemos

$$\frac{c\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{c\Delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.12)$$

Os comprimentos de onda da luz emitida  $\lambda_e$ , e da luz recebida  $\lambda_0$ , relacionam-se com os períodos das ondas por  $\lambda_e = c\Delta t_e$  e  $\lambda_0 = c\Delta t_0$ . Logo

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.13)$$

A definição usual do redshift é

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.14)$$

temos então que

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.15)$$

Esta expressão relaciona o desvio espectral  $z$  com o fator de escala  $a(t)$ , onde  $a_0$  é o fator de escala atual e a equação [2.15] mostra que o desvio espectral de uma galáxia é uma medida do fator de escala do universo quando a luz foi emitida. Num Universo em expansão  $a(t_0) > a(t_e)$ , e portanto,  $z > 0$ .

## 2.2 Distância de luminosidade

As medições de distância entre objetos no Universo é um assunto fundamental no estudo de qualquer modelo cosmológico. O problema reside na definição dessas distâncias no cenário de um universo curvo e em expansão.

Quando é adotada a métrica de FLRW, e aceitando que o universo, de fato, está expandindo-se, a definição de distância entre objetos muda. Num universo em expansão, a separação entre objetos é uma quantidade dinâmica e depende da geometria do espaço-tempo. Na literatura normalmente se conhecem três tipos de distâncias: distância própria, distância de diâmetro angular e distância de luminosidade. Nesta parte vamos ter em consideração só a distância de luminosidade para o caso de um universo espacialmente plano ( $K = 0$ ).

Num universo estático e euclídeo, se conhece que a propagação do sinal de uma fonte pontual se dá em frentes esféricas, de tal forma que um detector situado a uma distância  $d$  da fonte medirá um fluxo, ou intensidade, com valor

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.16)$$

onde  $L$  é a luminosidade desta fonte, ou seja, a potência por ela irradiada. Se define a função chamada distância de luminosidade  $d_L$ , como

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}. \quad (2.17)$$

A última definição é chamada de distância por sua dimensão.

Consideremos, por simplicidade, um espaço euclidiano. Então tendo em consideração que a fonte emite fótons num instante  $t_{em}$ , no momento da observação,  $t_{obs}$ , eles estarão espalhados em uma superfície cuja área própria será, no espaço euclidiano,

$$A(t_{obs}) = 4\pi d_p(t_{obs})^2 = 4\pi a_0^2 r^2, \quad (2.18)$$

onde  $d_p$  é a distância própria.

Quando um fóton é emitido, sua energia é  $E_{em} = \frac{hc}{\lambda_{em}}$ , e o fator de escala é  $a$ . Mas devido ao redshift, em  $t_{obs}$  temos

$$\lambda_{obs} = \frac{a(t_{obs})}{a} \lambda_{em} = (1+z)\lambda_{em}, \quad (2.19)$$

então a energia ficara como

$$E_{obs} = \frac{E_{em}}{(1+z)}. \quad (2.20)$$

Tendo em conta a mesma análise realizada, para o caso de redshift, o intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons e a recepção dos mesmos também será alterada por causa da expansão. Considerando o intervalo na emissão  $\Delta t_{em}$ , a distância própria entre eles é  $c\Delta t_{em}$ . Na observação esta distância será  $c\Delta t_{em}(1+z)$ , e o intervalo de tempo na detecção  $\Delta t_{obs} = \Delta t_{em}(1+z)$ . Como fluxo é dado pela potência detectada dividida pela área na qual a energia está espalhada, temos

$$f = \frac{\frac{E_{obs}}{\Delta t_{obs}}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{\frac{E_{em}/(1+z)}{\Delta t_{em}(1+z)}}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}. \quad (2.21)$$

A quantidade [2.17] é dada por

$$d_L = a_0 r (1+z) = d_p(t_0) (1+z), \quad (2.22)$$

onde para baixos redshift se aproxima ao valor da distância própria, a qual está definida como

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.23)$$

Usando a equação [2.23] em [2.22], temos a distância de luminosidade em termos do parâmetro de Hubble,

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.24)$$

Introduzindo a relação  $E(z) = \frac{H}{H_0}$ , obtemos

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, \quad (2.25)$$

a qual é chamada de distância de luminosidade para o caso de um universo espacialmente plano ( $K = 0$ ).

Esta grandeza é muito útil quando temos um objeto astronômico que possui uma luminosidade conhecida. Este objeto é chamado de vela padrão.

## 2.3 O conteúdo material do Universo

O princípio cosmológico permite que o universo seja descrito como um fluido tipo-perfeito, e as identidades de Bianchi garantem que esse fluido seja conservado, ou seja, que a derivada covariante do seu tensor energia-momento seja nulo. Por exemplo, o modelo padrão descreve o universo composto por três componentes de natureza distintas: radiação, matéria e energia escura. Cada um desses integrantes também é descrito por um fluido perfeito conservativo.

Aqui será apresentada uma breve descrição da dinâmica de um fluido perfeito, para assim chegar a obter as equações de balanço de energia e de momento.

### Descrição de um fluido perfeito

Se sabe que um fluido perfeito está definido por um tensor energia-momento da forma seguinte<sup>3</sup>

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + p h_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

<sup>3</sup>A partir de agora considera-se nesta tese a velocidade da luz igual a unidade ( $c^2 = 1$ ).

onde  $\rho$  e  $p$  são respectivamente a densidade e a pressão do fluido perfeito, e  $h_{\mu\nu}$  é o tensor de projeção ortogonal à quadrivelocidade, definido como

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (2.27)$$

onde  $u_\mu$  é a quadrivelocidade do fluido.

A dinâmica de cada um dos fluidos é dada por uma equação de estado que relaciona a pressão com a densidade do fluido  $p = p(\rho)$ . Consideramos uma equação de estado simples para descrever os fluidos de nosso interesse.

$$p = w\rho, \quad (2.28)$$

onde  $w$  é o parâmetro de estado constante. Para ter uma descrição da dinâmica de um fluido perfeito temos que ter em conta as leis de conservação, as quais são: as equações de conservação da energia e do momento.

A equação de conservação da energia é obtida através da projeção da derivada covariante do tensor energia-momento na quadrivelocidade

$$-u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.29)$$

Considerando [2.26] e [2.27], a equação anterior fica

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = 0, \quad (2.30)$$

onde o escalar de expansão foi definido como  $\Theta \equiv u^\nu_{;\nu}$  e além disso  $\dot{\rho} = \rho_{;\nu} u^\nu$ .

A equação de conservação do momento é obtida através da projeção da derivada covariante do tensor energia-momento no tensor [2.27], obtendo

$$(\rho + p)\dot{u}^\mu = -p_{;\beta} h^{\mu\beta}, \quad (2.31)$$

onde  $\dot{u}^\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu$ .

As equações [2.30] e [2.31] podem ser usadas para determinar a dinâmica dos fluidos perfeitos com a especificação da equação de estado.

## 2.4 Dinâmica de Friedmann

Ao introduzir a métrica [2.4] nas equações de campo de Einstein [2.3], são obtidas equações para o fator de escala  $a(t)$ , e para ter uma solução viável é conveniente introduzir o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  de um fluido perfeito definido em [2.26], o qual é compatível com a hipóteses de homogeneidade e isotropia. Agora, no lado esquerdo da equação [2.3], as componentes  $G_0^i$  se anulam e as componentes  $G_j^i$  são proporcionais ao delta de Kronecker  $\delta_j^i$

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + K) - \Lambda, \quad (2.32)$$

$$G_j^i = \frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) \delta_j^i \quad (2.33)$$

e considerando as componentes  $T_0^0$  e  $T_j^i$  de [2.26], as equações de campo [2.3] são reduzidas a duas equações independentes

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.35)$$

Estas equações são conhecidas como as equações de Friedmann. A segunda equação também é conhecida como a equação para a aceleração do universo.

Derivando a equação de Friedmann [2.34] e combinando-a com [2.35], é obtida a equação de balanço da energia [2.30], onde no fundo homogêneo e isotrópico é  $\Theta = 3\frac{\dot{a}}{a}$ . Combinando a derivada temporal da equação de Friedmann [2.34] com a equação [2.35] obtém-se o seguinte

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)' = -4\pi G(\rho + p) + \frac{K}{a^2}. \quad (2.36)$$

Dada a equação de estado da forma [2.28], a equação balanço da energia [2.30] pode ser integrada para obter  $\rho = \rho(a)$ , resultando

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.37)$$

Substituindo esta relação na equação [2.34], o fator de escala  $a(t)$  pode ser calculado.

Agora, considerando que o Universo é composto de  $N$  componentes (matéria ordinária, radiação, matéria escura fria, etc.), com parâmetros de equações de estado diferentes  $w_i$ , a equação [2.37] é válida apenas para cada componente por separado, enquanto elas não interagem. Se a densidade atual

de cada componente é denotada como  $\rho_{i0}$ , então a densidade total da energia do universo é<sup>4</sup>

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_{i0} a^{-3(1+w_i)}, \quad (2.38)$$

onde foi considerado que  $a_0 = 1$  para o tempo presente<sup>5</sup>. Desta maneira a equação de Friedmann [2.34] pode ser escrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i0} a^{-3(1+w_i)} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.39)$$

O parâmetro de Hubble é definido como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , para estimar a taxa de expansão do universo.

### Parâmetros observacionais

Uma descrição dinâmica do universo exige o conhecimento de pelo menos três parâmetros físicos: o parâmetro de Hubble  $H_0$  que mede a presente taxa de expansão, parâmetro de densidade  $\Omega_i$  que mede a contribuição relativa de cada componente do fluido cósmico e o parâmetro de desaceleração  $q_0$  que mede a variação da taxa de expansão (se o universo acelera ou desacelera), mas  $q_0$  não é um parâmetro independente  $q_0 = q_0(\Omega_{i0})$ . O valor total do parâmetro de densidade é também uma quantidade importante, pois determina se a geometria espacial do universo é fechada, aberta ou plana (16). Aqueles parâmetros são de muita importância para a verificação observacional de um modelo cosmológico.

O parâmetro de Hubble [2.39] se escreve no tempo atual ( $a = a_0 = 1$ ) como

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i0} + \frac{\Lambda}{3} - K. \quad (2.40)$$

É comum expressar o parâmetro de Hubble em unidades de  $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , assim

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.41)$$

onde  $h$  é um parâmetro adimensional, que foi introduzido para diminuir a faixa de incerteza nas medições.

<sup>4</sup>Onde o índice  $i$  nesta dissertação só vai descrever em particular as seguintes componentes (matéria ordinária, radiação, matéria escura fria).

<sup>5</sup>No que segue desta dissertação, vai ser considerado este valor para  $a_0 = 1$ .

Por outro lado, a equação [2.39] pode ser escrita da seguinte forma

$$K = H^2 \left( \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_{i=1}^N \rho_i + \frac{\Lambda}{3H^2} - 1 \right). \quad (2.42)$$

É fácil notar que a curvatura do espaço será dada pelo conteúdo de energia do universo e o valor da constante cosmológica.

Agora para cada componente do universo é conveniente definir a quantidade  $\Omega_i$ , denominado parâmetro de densidade, que é definido como a razão da densidade de energia de uma determinada componente com uma densidade crítica  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad e \quad \Omega_K = -\frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.43)$$

Com o uso destas definições a equação de Friedmann [2.40] se escreve de uma forma mais compacta

$$\sum_{i=1}^N \Omega_i + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (2.44)$$

A equação [2.44] liga a curvatura do universo  $\Omega_K$  ao conteúdo de matéria-energia  $\sum_{i=1}^N \Omega_i$  e à constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ , onde se definimos a quantidade  $\Omega_{tot} = \sum_{i=1}^N \Omega_i + \Omega_\Lambda$ , a expressão [2.44] se escreve como

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.45)$$

Deste jeito conhecendo  $\Omega_{tot}$ , é possível determinar a geometria do universo:

$$\begin{cases} \Omega_{tot} > 1 & \Rightarrow \text{universo fechado (esférico)} \\ \Omega_{tot} < 1 & \Rightarrow \text{universo aberto (hiperbólico)} \\ \Omega_{tot} = 1 & \Rightarrow \text{universo plano} \end{cases}$$

Assim, a equação para a evolução do índice de expansão pode ser escrito como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} a^{-3(1+w_i)} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda, \quad (2.46)$$

onde  $\Omega_{i0} \equiv \frac{\rho_{i0}}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i0}$  é o parâmetro de densidade atual da componente em questão. Escrevendo a última equação em função do redshift  $z$  temos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda. \quad (2.47)$$

Na compreensão da dinâmica da expansão do universo, também é importante definir o parâmetro de desaceleração

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (2.48)$$

que nos dá a informação sobre a mudança temporal da expansão mesma. Agora, para escrever [2.48] em função do fator de escala e o parâmetro de Hubble, é preciso fazer

$$\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt}(aH) = a\frac{dH}{dt} + H\dot{a} = a\frac{dH}{da}\dot{a} + H\dot{a}, \quad (2.49)$$

de [2.49] em [2.48], é encontrado o parâmetro de desaceleração como função do fator de escala

$$q(a) = -1 - \frac{a}{H} \frac{dH}{da}. \quad (2.50)$$

Agora com ajuda da equação [2.15], encontramos o parâmetro de desaceleração em função do redshift

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}, \quad (2.51)$$

que pode servir para qualquer modelo cosmológico proposto.

## 2.5 Modelo padrão

O modelo atualmente tido como padrão, conhecido como  $\Lambda$ CDM (CDM das suas iniciais de Cold Dark Matter), que é dominado por uma constante cosmológica. É aquele para o qual os dados observacionais se apontam. Este modelo é construído no cenário da Relatividade Geral, dirigido pelos dados observacionais atuais. Observações diretas e indiretas constataam a existência de matéria bariônica e radiação. Além disso a análise do espectro de anisotropias da CMB (de suas iniciais em inglês Cosmic Microwave Background), indicam que o universo é espacialmente plano, ou muito aproximadamente plano, ou seja  $\Omega_K \approx 0$ . de forma que o parâmetro de densidade total de matéria e energia deve ser igual a 1 (1).

Observações de dinâmica de galáxias e lentes gravitacionais estimam uma densidade bem maior de matéria nestas estruturas do que a densidade bariônica esperada. Como esse grande excedente não interage com fótons ou qualquer outra partícula, ele é então denominado matéria escura (17).

Baseando-nos em estudos realizados recentemente pela Agência Espacial Europeia, feitos com o telescópio Planck, os quais divulgam valores para os parâmetros de densidade atual de cada componente (1). Segundo esse estudo, a componente de matéria  $\Omega_{m_0}$  corresponde a aproximadamente 31.35% do universo, onde 4.9% corresponde ao percentual de matéria bariônica  $\Omega_{B_0}$  e o resto corresponde à porção de matéria escura<sup>6</sup>. Assim temos que mais da metade de sua composição é de algo totalmente desconhecido, mais exótico que a matéria escura. Esta componente exótica que contribui com o 68.25% de energia do universo é conhecida como energia escura<sup>7</sup>.

No que segue, fazemos uma pequena descrição das componentes do Universo por separado. Para isso usamos a equação [2.37] para os casos seguintes.

## 2.5.1 Radiação

Para a componente de universo que consiste de partículas relativísticas ou radiação, o parâmetro de estado é  $w = 1/3$ , e usando a equação [2.37], obtemos

$$\rho_R = \rho_{R0} a^{-4}. \quad (2.52)$$

Então, substituindo [2.52] em [2.43], a densidade da radiação pode ser escrito como

$$\rho_R = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{R0} a^{-4}. \quad (2.53)$$

Fazendo uma comparação deste resultado com o resultado da seção 2.5.2 podemos ver que a componente de radiação dominou o universo em tempos remotos, porém, uma vez que seu decaimento é mais acentuado, sua contribuição ao valor total  $\Omega_{tot}$  hoje é desprezível. Essa fase de tempo remoto é chamada de era dominada pela radiação. Então para essa era a dependência temporal do fator de escala pode ser determinada com a equação de Friedmann [2.34]

$$a \propto t^{1/2}. \quad (2.54)$$

Pode se verificar que neste caso o universo se encontraria em uma fase de expansão, uma vez que  $\dot{a} \propto t^{-1/2}$  é positivo, porém essa expansão seria desacelerada pois  $\ddot{a} \propto -t^{-3/2}$  é negativo.

<sup>6</sup>Aqui estamos considerando que atualmente a contribuição da radiação é desprezível.

<sup>7</sup>De acordo com a análise dos dados de Supernovas, o universo encontra-se atualmente em expansão acelerada, o que sugere que a energia escura não é predominantemente composto por matéria - caso o fosse, o caráter atrativo desta provocaria a desaceleração da expansão.

## 2.5.2 Matéria

No contexto do modelo  $\Lambda$ CDM a componente de matéria pode ser considerado como a soma de duas componentes: a matéria bariônica e a matéria escura fria. Já que dinamicamente essas componentes podem ser descritas de forma conjunta, uma vez que possuem o mesmo parâmetro de estado  $w = 0$ . Até a descoberta da expansão acelerada do universo acreditava-se que ele era dominado por matéria (modelo Einstein-de Sitter). Neste caso, a evolução temporal para a matéria pode ser obtida através da aplicação de seu parâmetro de estado na equação [2.37]

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \quad \Rightarrow \quad \rho_m = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{m0} a^{-3}, \quad (2.55)$$

onde  $\Omega_{m0} = \Omega_{CDM0} + \Omega_{B0}$ . Além disso, a dependência temporal do fator de escala também pode ser determinada com a equação de Friedmann [2.34]

$$a \propto t^{2/3}. \quad (2.56)$$

Neste caso é fácil verificar que a expansão também se daria de forma desacelerada uma vez que  $\dot{a} \propto t^{-1/3}$  é positivo e  $\ddot{a} \propto -t^{-4/3}$  é negativo.

## 2.5.3 Energia escura

Na atualidade, as observações de supernovas distantes (2), do fundo de microondas (18) e da estrutura em grande escala (19) dão evidência suficiente de que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada. Isto requer a presença da energia escura. O modelo padrão  $\Lambda$ CDM adota a constante cosmológica como a energia escura. Dinamicamente, pode-se absorver a constante cosmológica na equação de Friedmann [2.34] definindo para a energia escura uma densidade de energia constante igual a

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{\Lambda 0}. \quad (2.57)$$

Com um parâmetro de estado  $w = -1$ , então a equação de estado é

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (2.58)$$

onde justamente a pressão negativa seria a responsável da expansão acelerada do universo. Essa equação de estado é a equação de estado do vácuo, e por isso há uma tentativa de associar a energia escura

ao vácuo. Contudo, a constante cosmológica apresenta problemas no regime teórico-observacional (20).

A partir da equação de balanço da energia [2.30] para um universo preenchido apenas por energia escura (modelo de Sitter (21)) reproduz um fluido com densidade de energia constante, que está acordo com [2.57]

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_\Lambda = \text{const.} \quad (2.59)$$

Neste caso, a equação de Friedmann [2.34] resulta numa dependência exponencial do fator de escala com o tempo

$$3H^2 = \Lambda \frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad a(t) \propto e^{Ht}. \quad (2.60)$$

Onde temos que a expansão é acelerada, uma vez que  $\dot{a}$  e  $\ddot{a}$  são todos positivos.

## 2.5.4 Modelo $\Lambda$ CDM plano

O modelo  $\Lambda$ CDM, é aquele que considera o Universo contendo a constante cosmológica e a matéria escura. Agora a partir de [2.39], o fator de escala num universo dominado pela constante cosmológica e a matéria escura com  $K = 0$ , pode ser obtido da seguinte maneira

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 (\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_\Lambda), \quad (2.61)$$

cuja solução é dada por

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left[ \frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} H_0 t \right]. \quad (2.62)$$

A partir da equação [2.61], o parâmetro de Hubble em função do redshift é expresso como

$$H(z) = H_0 \left[ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right]^{1/2} \quad (2.63)$$

onde se satisfaz que  $\Omega_{m0} + \Omega_\Lambda = 1$ . O parâmetro de desaceleração [2.51] pode ser calculado agora

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{2} \left[ \frac{3\Omega_{m0}(1+z)^2}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m0}} \right], \quad (2.64)$$

que para  $z = 0$  medido hoje, o parâmetro de desaceleração se reduz à forma

$$q_0 = \frac{3}{2}\Omega_{m0} - 1. \quad (2.65)$$

Por outro lado, pode ser calculado o redshift para o qual  $q = 0$ , ou seja a transição da fase desacelerada para a fase acelerada, isso pode ser feito, igualando a zero o lado esquerdo da equação [2.64]

$$z_{trans} = \left[ \frac{2(1 - \Omega_{m0})}{\Omega_{m0}} \right]^{1/3} - 1. \quad (2.66)$$

## 2.6 Modelos alternativos de energia escura

Em busca de evitar, ou ao menos amenizar, os problemas do modelo  $\Lambda$ CDM em largas escalas, algumas classes de modelos alternativos de energia escura foram e continuam sendo propostas na literatura [(22), (23)]. Cada uma dessas classes devem, de alguma forma, sugerir uma mudança na formulação da cosmologia padrão (em aspectos dinâmicos ou estruturais). Apresentamos alguns desses modelos mais difundidos na literatura.

### 2.6.1 $x$ -CDM

Este modelo representa uma generalização simples do modelo  $\Lambda$ CDM, no qual a energia escura não é identificada com o vácuo, mas com um fluido dinâmico  $x$  com equação de estado  $p_x = w_x \rho_x$ , na qual o parâmetro  $w_x$  pode assumir qualquer valor negativo diferente de -1, que corresponderia ao caso da constante cosmológica (24).

Usando essa equação de estado na equação de balanço da energia [2.30], encontramos

$$\dot{\rho}_x + 3H(1 + w_x)\rho_x = 0, \quad (2.67)$$

que por sua vez, resulta numa lei de evolução dada por

$$\rho_x = \rho_{x0} a^{-3(1+w_x)}. \quad (2.68)$$

Notamos que este fluido exótico só terá densidade constante caso o parâmetro  $w_x$  seja -1.

## 2.6.2 Quartessência

Como se sabe que a taxa de expansão de nosso universo atual está aumentando, então para tal dinâmica se requer um substrato cósmico com uma pressão negativa. A maioria dos abordagens neste campo contam com uma imagem de duas componentes do meio cósmico que atualmente dominam dinamicamente: energia escura e matéria escura. Neste contexto os modelos de Quartessência são aqueles onde o setor escuro como um todo é descrito por um único fluido dinâmico. Neste caso, a equação de estado do fluido unificado deve tender para  $p = 0$  no limite  $z \rightarrow \infty$  (que corresponde a um universo dominado por matéria), e deve tender para  $p = -\rho$  no limite  $z \rightarrow -1$  (que corresponde a um universo dominado por energia escura). Dois exemplos de quartessência são o gás de Chaplygin generalizado [(25), (26)] e o fluido viscoso (27).

Por exemplo no caso do gás de Chaplygin generalizado, o fluido cósmico é descrito pela equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (2.69)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão do fluido no sistema de referência comóvel, com  $\rho > 0$ .  $A$  e  $\alpha$  são constantes positivas, com  $0 < \alpha \leq 1$ . No contexto de um universo espacialmente plano descrito pela métrica de FLRW, inserimos esta equação de estado na equação de balanço da energia [2.30], e chegamos à expressão para a evolução da densidade de energia

$$\rho = \left[ A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (2.70)$$

onde  $B$  é uma constante de integração positiva.

Com este resultado podemos compreender uma propriedade do gás de Chaplygin generalizado: para pequenos valores do fator de escala a expressão [2.70] é aproximada por

$$\rho \sim a^{-3}, \quad (2.71)$$

o que corresponde a um universo dominado apenas por matéria. Por outro lado, para grandes valores do fator de escala segue que

$$\rho \sim A^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (2.72)$$

o que corresponde a uma densidade constante, a qual age da mesma maneira como uma constante cosmológica, isto corresponde a um universo de de Sitter. Isto nos permite interpretar o modelo do gás de Chaplygin generalizado como "mistura" de matéria escura e energia escura, com o gás exercendo simultaneamente o papel de ambas componentes.

### 2.6.3 Decaimento de vácuo

O modelo com decaimento do vácuo (28), representa uma classe de modelos alternativos ao  $\Lambda$ CDM mais simples, no qual tanto a natureza da energia escura relacionada ao vácuo quanto a estrutura da relatividade geral são mantidas. E contudo, é, proposta uma dependência temporal para a densidade de energia do vácuo em contrapartida ao cenário da constante cosmológica. Um caso particular desta classe de modelos é quando se assume que a densidade da componente de energia escura depende linearmente de  $H$ , da seguinte forma

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \sigma H, \quad (2.73)$$

onde  $\sigma$  é uma constante positiva.

---

# Capítulo 3

## TEORIA DAS PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS

A discussão no capítulo anterior foi baseada no caso em que a matéria em nosso Universo é distribuída homoganeamente. O universo real evidentemente contém estruturas inhomogêneas como galáxias, aglomerados de galáxias, etc. Então o formalismo anterior precisa ser estendido para levar em conta as inhomogeneidades presentes em nosso Universo.

Aqui vamos tentar fazer isso da seguinte maneira: assumimos que, em algum momento no passado (inflação) houveram pequenos desvios da homogeneidades em nosso Universo, esses desvios podem crescer devido a instabilidade gravitacional (uma propriedade natural da gravidade) sobre um período de tempo e, eventualmente formar as estruturas que observamos atualmente; enquanto estas inhomogeneidades são pequenas, seu crescimento pode ser estudado por uma teoria perturbativa de primeira ordem ou teoria de perturbação linear, mas uma vez que os desvios do universo homogêneo tornar-se grandes, a teoria linear falha, e temos que usar técnicas para entender a evolução não linear (29).

Neste capítulo consideramos a teoria de perturbações lineares para estudar a instabilidade gravitacional. A análise completa das instabilidades gravitacionais no âmbito da teoria geral da relatividade é bastante complexa, e sua interpretação física nem sempre é diretamente óbvia.

Por esta razão formularemos a teoria de instabilidade gravitacional em duas etapas. Primeiro consideramos a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana da gravidade, onde os resultados obtidos são aplicáveis somente para a matéria não relativista e em escalas que não excedam o raio de Hubble.

Em seguida, como a análise newtoniana tem limitações, ou seja, falha em escalas maiores que o

raio de Hubble e não considera um fluido relativístico, fazemos uma análise relativista da teoria de perturbação linear para estudar um fluido relativístico em escalas menores e maiores que o raio de Hubble.

### 3.1 Teoria Newtoniana de perturbações cosmológicas

Medições da Radiação Cósmica de Fundo determinam que o Universo foi muito homogêneo e isotrópico na época de recombinação. Hoje, entretanto, o Universo desenvolveu uma estrutura não linear, estrutura que toma a forma de galáxias, aglomerados e super aglomerados de galáxias, etc.

Um profundo estudo do redshift mostra, que quando se promedia sob algumas poucas centenas de Mpc, as inhomogeneidades na distribuição da densidade permanecem pequenas. Uma simples explicação sobre como as estruturas não lineares podem ser desenvolvidas a partir de pequenas perturbações iniciais é baseada no fato da instabilidade gravitacional<sup>1</sup>. Para garantir que pequenas inhomogeneidades iniciais presentes na recombinação produzam estruturas não lineares observadas hoje, nós temos que estudar quão rápido elas crescem em um universo em expansão (21).

Aqui estudaremos a instabilidade gravitacional na teoria Newtoniana da gravidade como limite de aproximação da relatividade geral. Esta teoria só é aplicável a escalas que fiquem dentro do raio de Hubble, onde os efeitos de curvatura de espaço-tempo são desprezíveis. Além disso, aqui podemos analisar apenas as perturbações da densidade da componente não relativista; perturbações na componente relativista em todas as escalas requerem a teoria completa.

Primeiro, encontramos como pequenas inhomogeneidades crescem em um fluido não relativístico que não se expande (teoria de Jeans). Embora a fórmula descrevendo as taxas de instabilidade em um universo que não se expande não são muito realistas, os resultados obtidos nos ajudam a obter um entendimento intuitivo do comportamento das perturbações. Depois consideraremos as perturbações lineares em um universo expandindo.

Em grandes escalas a matéria pode ser descrita em uma aproximação de um fluido perfeito, ou qual significa que em qualquer momento dado de tempo o fluido pode ser completamente caracterizado

---

<sup>1</sup>Instabilidade gravitacional decorre da propriedade atrativa natural da gravidade. Matéria é atraída a regiões de alta densidade amplificando as inhomogeneidades já existentes.

por a distribuição da densidade de energia  $\rho(\vec{x}, t)$ , a entropia por unidade de massa  $S(\vec{x}, t)$  e o vetor de campo de 3-velocidade  $v(\vec{x}, t)$  (21). Essas quantidades satisfazem as equações hidrodinâmicas newtonianas que são a equação de balanço de energia da matéria (ou equação da continuidade), a equação de Euler da matéria (ou equação de conservação do momento não relativista), a equação de conservação da entropia e a equação de Poisson do campo gravitacional<sup>2</sup>.

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^a)_{,a} = 0. \quad (3.1)$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} + (v^b \nabla_b) v_a + \frac{1}{\rho} p_{,a} + \Phi_{,a} = 0. \quad (3.2)$$

Equação de conservação da entropia (desprezando dissipação)

$$\frac{dS(x^a, t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (v^b \nabla_b) S = 0. \quad (3.3)$$

Equação de Poisson que determina o potencial gravitacional

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (3.4)$$

Estas equações hidrodinâmicas, tomadas junto com a equação de estado

$$p = p(\rho, S), \quad (3.5)$$

formam um conjunto completo de 5 equações, que em princípio permitem determinar as 5 funções não conhecidas  $\rho, v, S, \Phi, p$ . Estas equações hidrodinâmicas são não lineares e em geral não é fácil de encontrar suas soluções, sem dúvida para estudar o comportamento das pequenas perturbações ao redor de um fundo homogêneo e isotrópico, é adequado linearizar elas.

### 3.1.1 Teoria de Jeans

A partir das equações que governam a dinâmica de um fluido não relativista auto-gravitante [3.1-3.4], vemos que uma solução simples é uma configuração estática onde a matéria está em repouso ( $\bar{v}^a = 0$ ) e uniformemente distribuída no espaço ( $\bar{\rho} = const, \bar{p} = const$ ), mas esta configuração está em evidente contradição com as equações hidrodinâmicas.

<sup>2</sup>As equações de continuidade e de Euler descritas aqui são as mesmas que foram descritas nas Eqs.[2.30] e [2.31], mas considerando só o caso de um fluido não relativista.

O fato de que a densidade de energia permanece inalterada acontece só se a matéria esta em repouso e a força gravitacional,  $\vec{F} \propto \nabla\phi$  se desvanece. Mas com isso a equação de Poisson  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$  não é satisfeita (30) (embuste de Jeans)<sup>3</sup>.

Considerando perturbações sob esta solução estática onde a partir desta seção vamos denotar por uma barra as quantidades não perturbadas (fundo) e por um chapéu as quantidades perturbadas a primeira ordem como prossegue:

$$\rho(x^a, t) = \bar{\rho} + \hat{\rho}(x^a, t), \quad (3.6)$$

$$v^a(x^a, t) = \hat{v}^a(x^a, t), \quad (3.7)$$

$$\Phi(x^a, t) = \bar{\Phi} + \hat{\Phi}(x^a, t), \quad (3.8)$$

$$S(x^a, t) = \bar{S} + \hat{S}(x^a, t), \quad (3.9)$$

onde as quantidades perturbadas satisfazem  $\hat{\rho} \ll \bar{\rho}$ , etc. A pressão é igual a

$$p(x^a, t) = p(\bar{\rho} + \hat{\rho}, \bar{S} + \hat{S}) = \bar{p} + \hat{p}(x^a, t). \quad (3.10)$$

Na aproximação linear a perturbação  $\hat{p}$  pode ser expressa em termos das perturbações da densidade de energia e da entropia como:

$$p = \bar{p}(\bar{\rho}, \bar{S}) + \hat{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{\rho}}\right)}_{c_s^2} + \hat{S} \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \bar{S}}\right)}_{\sigma} = \bar{p} + \hat{p},$$

então

$$\hat{p} = c_s^2 \hat{\rho} + \sigma \hat{S}, \quad (3.11)$$

onde  $c_s^2$  é a velocidade de som. Para nosso caso de matéria não relativista ( $p \ll \rho$ ) a velocidade de som assim como  $\hat{v}^a$  são muito menores que a velocidade da luz.

Substituindo as equações [3.6-3.9] e [3.11] em [3.1-3.4], e mantendo só termos de primeira ordem nas perturbações, obtemos:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \hat{v}_{,a}^a = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_a}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}} \hat{\rho}_{,a} + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \hat{S}_{,a} + \hat{\Phi}_{,a} = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = 0, \quad (3.14)$$

<sup>3</sup>Esta inconsistência pode, em princípio, ser evitada ao considerar um universo estático, onde a força gravitacional da matéria é compensada por uma força antigravitacional de uma apropriada eleição da constante cosmológica.

$$\Delta\hat{\Phi} = 4\pi G\hat{\rho}. \quad (3.15)$$

Da equação [3.14] se deduz que a perturbação da entropia é uma função das coordenadas espaciais independente do tempo.

Tomando a divergência da equação [3.13] obtemos:

$$\frac{\partial\hat{v}_{a,a}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}}\hat{\rho}_{,a,a} + \frac{\sigma}{\bar{\rho}}\hat{S}_{,a,a} + \hat{\Phi}_{,a,a} = 0, \quad (3.16)$$

usando a equação [3.12] temos

$$\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial t^2} - c_s^2\Delta\hat{\rho} - \sigma\Delta\hat{S} - \bar{\rho}\Delta\hat{\Phi} = 0, \quad (3.17)$$

da equação [3.15]

$$\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial t^2} - c_s^2\Delta\hat{\rho} - 4\pi G\bar{\rho}\hat{\rho} = \sigma\Delta\hat{S}. \quad (3.18)$$

Esta é uma equação linear compacta para  $\hat{\rho}$ , onde a perturbação da entropia serve como uma fonte determinada.

Assumindo que as perturbações da entropia estão ausentes, isto é  $\hat{S} = 0$ , e como os coeficientes da equação [3.18] não dependem das coordenadas espaciais, assim que podemos tomar uma transformada de Fourier para as perturbações da densidade que se propagam tipo onda plana,

$$\hat{\rho}(\vec{x}, t) = \int \hat{\rho}_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (3.19)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda. Aplicando a segunda derivada com respeito do tempo obtemos:

$\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial t^2} = \ddot{\hat{\rho}}_{\vec{k}}(t) \int \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$  e aplicando o laplaciano resulta:  $\Delta\hat{\rho} = -k^2\hat{\rho}_{\vec{k}}(t) \int \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$ . Conhecendo isto, obtemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias independentes para uma dependência do tempo dos coeficientes de Fourier  $\hat{\rho}(t)$ :

$$\ddot{\hat{\rho}}_{\vec{k}}(t) + (k^2c_s^2 - 4\pi G\bar{\rho})\hat{\rho}_{\vec{k}}(t) = 0, \quad (3.20)$$

onde o ponto denota derivada com respeito do tempo e  $k = |\vec{k}|$  é o módulo do vetor de onda.

A equação [3.20] tem duas soluções independentes:

$$\hat{\rho} \propto \exp(\pm i\omega(k)t), \quad (3.21)$$

onde  $\omega$  é a frequência de oscilação. Substituindo a expressão acima na Eq.[3.20], obtemos a relação de dispersão para  $\omega$  e  $k$ :

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}. \quad (3.22)$$

O comportamento destas perturbações, chamadas de adiabáticas, depende crucialmente do sinal na expressão acima, onde definimos o comprimento de onda de Jeans tal que  $\omega(\lambda_J) = 0$ .

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \left( \frac{\pi}{G\bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (3.23)$$

Este comprimento de onda representa o comprimento de onda crítico, acima do qual as perturbações tornam-se gravitacionalmente instáveis.

Conhecendo a forma de  $c_s$  da Eq.[3.23] e além disso tendo em conta que  $k = 2\pi/\lambda$ , a Eq.[3.22] torna-se

$$\omega = \pm (4\pi G \bar{\rho})^{1/2} \left[ \left( \frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.24)$$

Então podemos falar mais especificamente que se em [3.22] temos  $c_s^2 k^2 < 4\pi G \bar{\rho}$  ou de [3.24]  $\lambda > \lambda_J$ , então a frequência angular  $\omega$  será imaginária e a perturbação irá crescer exponencialmente. Por outro lado, caso  $\lambda < \lambda_J$ ,  $\omega$  será real e a perturbação irá oscilar como uma onda acústica. Há uma explicação física simples para o fato da escala  $\lambda_J$  separar os modos de estabilidade gravitacional ( $\lambda < \lambda_J$ ) da instabilidade gravitacional ( $\lambda > \lambda_J$ ). A escala de tempo para o colapso gravitacional é dada por  $\tau_{gra} \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2}$ , que é justamente a escala do tempo dinâmico. Por outro lado, a escala de tempo para a "pressão de resposta", é dada pelo tamanho da perturbação dividido pela velocidade do som:  $\tau_{presso} \sim \lambda/c_s$ . Se  $\tau_{presso}$  exceder ao  $\tau_{gra}$ , o colapso gravitacional da perturbação poderá ocorrer antes que a força da pressão possa responder para restaurar o equilíbrio hidrostático;  $\tau_{presso} \gtrsim \tau_{gra}$  ocorre para  $\lambda \gtrsim c_s/(G\bar{\rho})^{-1/2} \sim \lambda_J$ .

Uma forma alternativa de especificar a escala física apropriada para a instabilidade gravitacional é definir uma escala de massa. Por esta razão, é útil definir a massa de Jeans, que consiste na massa total contida em uma esfera de raio  $R = \lambda_J/2$  através de

$$M_J = \frac{4}{3}\pi \left( \frac{\lambda_J}{2} \right)^2 \bar{\rho}. \quad (3.25)$$

Desse modo a massa de Jeans, ou massa crítica correspondente é reescrita como

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{c_s^3}{\bar{\rho}^{1/2} G^{3/2}}, \quad (3.26)$$

onde perturbações de massa menor que  $M_J$  serão estáveis diante do colapso gravitacional, enquanto que essas de massa maior que  $M_J$  serão instáveis.

### 3.1.2 Mecanismo de Jeans: fluido em expansão

A teoria de Jeans para instabilidade gravitacional, formulada para um Universo estático, não pode ser aplicada num modelo cosmológico em expansão (31). O próximo passo consiste em considerar um mecanismo de Jeans para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, onde a solução simples não estática das Eqs.[3.1], [3.2] e [3.4] descreve um fluido homogêneo e isotrópico expandindo, isto é ( $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ ,  $\bar{p} = \bar{p}(t)$ ). Agora, para estudar o comportamento das pequenas perturbações ao redor de um fundo homogêneo e isotrópico, é apropriado linearizar as perturbações em escalas muito menores que o raio de Hubble. Considerando que umas pequenas inomogeneidades em  $\rho$ ,  $p$ ,  $v^a$  e  $\Phi$ , descritas da seguinte forma

$$\rho(x^a, t) = \bar{\rho}(t) + \hat{\rho}(x^a, t), \quad (3.27)$$

$$p(x^a, t) = \bar{p}(t) + \hat{p}(x^a, t), \quad (3.28)$$

$$v^a(x^a, t) = \bar{v}^a(x^a, t) + \hat{v}^a(x^a, t), \quad (3.29)$$

$$\Phi(x^a, t) = \bar{\Phi}(x^a, t) + \hat{\Phi}(x^a, t), \quad (3.30)$$

podem crescer devido à instabilidade gravitacional, onde  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{v}^a$  e  $\hat{\Phi}$  são variáveis perturbadas a primeira ordem com dependência espacial e temporal. No período de regime linear as quantidades perturbadas são muito menores que suas contrapartes de ordem zero, isto é ( $\hat{\rho} \ll \bar{\rho}$ ). Durante este período os termos de alta ordem, por exemplo os produtos  $\hat{\rho}\hat{v}^a$ , são desprezíveis. Isto significa que diferentes modos perturbativos evoluem independentemente e portanto podem ser tratados separadamente. Também a pressão do fluido é relacionada à densidade de energia via a equação de estado do meio. Por simplicidade vamos a considerar somente fluidos barotrópicos com  $p = p(\rho)$ .

Substituindo as equações [3.27-3.30] em a Eq.[3.1], mantendo apenas termos de primeira ordem e usando  $\dot{\hat{\rho}} + \bar{v}^a_{,a}\hat{\rho} = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\rho}_{,a}\bar{v}^a + \bar{\rho}_{,a}\hat{v}^a + \hat{\rho}\bar{v}^a_{,a} + \bar{\rho}\hat{v}^a_{,a} = 0.$$

Como  $\bar{\rho}$  so depende do tempo então o terceiro termo do lado esquerdo vai embora. Além disso como  $\bar{v}^a_{,a} = 3\frac{\dot{a}}{a} = 3H$  então resulta

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\rho}_{,a}\bar{v}^a + 3\frac{\dot{a}}{a}\hat{\rho} + \bar{\rho}\hat{v}^a_{,a} = 0. \quad (3.31)$$

Substituindo [3.27], [3.28], [3.29] e [3.30] em a Eq.[3.2], e mantendo apenas termos de primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial \hat{v}^a}{\partial t} + (\bar{v}^b \nabla_b) \hat{v}^a + (\hat{v}^b \nabla_b) \bar{v}^a = -\frac{\hat{p}^a}{\bar{\rho}} - \hat{\Phi}^a,$$

considerando que  $(\hat{v}^b \nabla_b) \bar{v}^a = \frac{\dot{a}}{a} \hat{v}^a$ , fica

$$\frac{\partial \hat{v}^a}{\partial t} + (\bar{v}^b \nabla_b) \hat{v}^a + \frac{\dot{a}}{a} \hat{v}^a = -\frac{\hat{p}^a}{\bar{\rho}} - \hat{\Phi}^a. \quad (3.32)$$

Por último, de [3.30] em Eq.[3.4], obtemos

$$\Delta \hat{\Phi} = 4\pi G \hat{\rho}. \quad (3.33)$$

Para um fluido expandindo é conveniente adotar um conjunto de coordenadas comoveis ( $q^a$ ) em lugar das coordenadas físicas ou próprias ( $x^a$ ), que vai relacionar como<sup>4</sup>

$$x^a = a(t)q^a. \quad (3.34)$$

Então usando suas leis de transformação de um sistema de coordenadas  $x^a$  a outro sistema de coordenadas comóvel  $q^a$ , obtemos para a Eq.[3.31], onde a partir de aqui estamos trabalhando em coordenadas comóveis

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\hat{\rho} + \frac{\bar{\rho}}{a}\hat{v}^a{}_{,a} = 0. \quad (3.35)$$

Esta equação descreve a evolução linear das flutuações da densidade. Na análise perturbativa, porém, é vantajoso usar variáveis sem dimensões para as equações de primeira ordem. Aqui definimos a quantidade sem dimensões chamada de contraste de densidade  $\delta = \hat{\rho}/\bar{\rho}$ . Durante o regime linear  $\hat{\rho} \ll \bar{\rho}$  ou que significa  $\delta \ll 1$ . Então introduzindo  $\delta$  na última equação temos

$$\dot{\delta} = -\frac{1}{a}\hat{v}^a{}_{,a}. \quad (3.36)$$

Usando as mesmas transformações na Eq.[3.32], a equação para a perturbação da velocidade fica<sup>5</sup>

$$\frac{\partial \hat{v}^a}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\hat{v}^a + \frac{c_s^2}{a\bar{\rho}}\hat{\rho}^a + \frac{1}{a}\hat{\Phi}^a = 0. \quad (3.37)$$

<sup>4</sup>Cujas transformações são:  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{q}} - \frac{\dot{a}}{a}(\vec{x} \cdot \nabla_{\vec{x}})$  e  $\nabla_{\vec{x}} = \frac{1}{a}\nabla_{\vec{q}}$ .

<sup>5</sup>Perturbações da velocidade se descompõe em modos rotacionais  $\hat{v}_{\perp}^a$ , onde  $\nabla_a \hat{v}_{\perp}^a = 0$ , e modos irrotacionais  $\hat{v}_{\parallel}^a$  com  $\nabla \times \hat{v}_{\parallel}^a = 0$ . Entretanto é só a divergência de  $\hat{v}^a$  (isto é  $\nabla_a \hat{v}^a$ ) que contribui ao evolução do contraste de densidade (ver Eq.[3.36]). Assim, os modos rotacionais não se acoplam com as perturbações de densidade longitudinais que iremos abordar nesta parte.

Além disso para um fluido barotrópico  $p = p(\rho)$  e  $\partial_a \hat{p} = c_s^2 \partial_a \hat{\rho}$ , onde  $c_s^2 = dp/d\rho$  é a velocidade de som adiabática. Finalmente da Eq.[3.33], obtemos a relação

$$\Delta \hat{\Phi} = 4\pi G a^2 \hat{\rho}, \quad (3.38)$$

para a evolução do potencial gravitacional perturbado. Dos resultados [3.36-3.38] determina-se o comportamento das perturbações da densidade completamente. Quando combinamos estes termos chegamos a uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a evolução linear do contraste de densidade. Em particular tomando a derivada de [3.36] e utilizando as Eqs.[3.37] e [3.38] encontra-se a ordem linear

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{a^2} \Delta \delta = -2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} + 4\pi G \bar{\rho} \delta. \quad (3.39)$$

A equação [3.39] é uma equação tipo onda com dois termos extras no lado direito, um devido ao expansão do Universo e o outro devido a gravidade. Por isso, é natural procurar soluções de ondas planas da forma

$$\delta = \sum_k \delta_{\vec{k}}(t) e^{i k_\alpha x^\alpha}, \quad (3.40)$$

onde  $k_\alpha$  é o vetor de onda comóvel e  $k = \sqrt{k_a k^a}$  é o número de onda comóvel associado<sup>6</sup>. A decomposição de Fourier da Eq.[3.39] e usando as relações  $\partial_\alpha \delta = i k_\alpha \delta$ ,  $\partial_\alpha \partial^\alpha \delta = \Delta \delta = -k^2 \delta$ , obtemos

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} - \left( 4\pi G \bar{\rho} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2} \right) \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (3.41)$$

que determina a evolução do k-ésimo modo perturbativo. O segundo termo da equação [3.41] é devido à expansão do Universo e sempre suprime o crescimento de  $\delta_{\vec{k}}$ . O terceiro reflete o conflito entre a pressão de suporte e gravidade. Quando  $4\pi G \bar{\rho} \gg c_s^2 k^2 / a^2$  gravidade domina. Por outro lado, a pressão de suporte domina se  $c_s^2 k^2 / a^2 \gg 4\pi G \bar{\rho}$ . Isso já foi estudado na seção 3.1.1.

- Fluido de muitas componentes:

Até agora neste capítulo temos apenas considerado um fluido com uma só componente. Ao lidar com um meio de múltiplos componentes (por exemplo: bárions, fótons, neutrinos e partículas exóticas), as perturbações na componente não-relativista evoluem de acordo com

$$\frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_i}{dt} - \left[ 4\pi G \bar{\rho} \sum_j \epsilon_j \delta_j - \frac{(c_s^2)_i k^2}{a^2} \delta_i \right] = 0, \quad (3.42)$$

<sup>6</sup>O comprimento de onda comóvel do modo perturbativo é dado por  $l = 2\pi/k$ , enquanto  $\lambda = al$  é o comprimento de onda físico (proprio). Além disso, o número de onda físico é  $n = 2\pi/\lambda$  com  $n = k/a$ . Finalmente, notamos que  $k_\alpha x^\alpha = n_\alpha r^\alpha$ .

onde o índice  $i$  refere-se à componente em questão. A soma é sobre todas as espécies e  $\epsilon_i = \bar{\rho}_i/\bar{\rho}$  fornece uma medida da contribuição de cada componente para a densidade total do fundo  $\bar{\rho} = \sum_i \bar{\rho}_i$ . Note que qualquer distribuição suave de matéria não contribui para os colchetes de acima. No entanto, a densidade não perturbada desta componente contribui para a expansão do fundo. Numa primeira aproximação,  $H$  é determinado pela componente que domina gravitacionalmente, enquanto  $c_s$  é a velocidade de dispersão da espécie perturbada que proporciona o suporte de pressão. A equação [3.42] aplica-se ao  $k$ -ésimo modo perturbativo, onde os índices  $\vec{k}$  já foram omitidos por simplicidade.

Soluções:

Se procura soluções para as equações [3.41] e [3.42] nas três diferentes situações seguintes: (i) Perturbações na componente não-relativista (bariônica ou não) para  $t > t_{eq}$ <sup>7</sup>. (ii) Perturbações na matéria não bariônica para  $t < t_{eq}$ . (iii) Perturbações bariônicas na presença de uma espécie dominante sem colisões (matéria escura) (29).

### Universo perturbado Einstein- de Sitter

Considere-se um Universo dominado por poeira (isto é  $p = 0 = c^2$ ) de FLRW com seções espaciais planas (isto é  $\Omega_T = 1$ ). Este modelo, também conhecido como o Universo de Einstein-de Sitter, fornece uma boa descrição de nosso Universo depois da recombinação. Para ordem zero de [2.56] temos  $a \propto t^{2/3}$ ,  $H = 2/3t$  e  $\bar{\rho} = 1/6\pi Gt^2$ . Perturbando este fundo, nós olhamos para as escalas bem menores que o raio de Hubble onde o tratamento Newtoniano é aplicável. Usando a definição [3.23] e a condição que o comprimento de onda físico satisfaz  $\lambda = al = a\frac{2\pi}{k}$ , na equação [3.41], temos

$$\frac{d^2\delta_{NR}}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_{NR}}{dt} - \left(4\pi G\bar{\rho}_{NR} - \frac{c_s^2 k^2}{a^2}\right)\delta_{NR} = 0. \quad (3.43)$$

De [3.23]

$$c_s = \frac{2\pi}{K_J} \sqrt{\frac{G\bar{\rho}_{NR}}{\pi}} \Rightarrow \frac{c_s^2 k^2}{a^2} = \frac{4\pi G\bar{\rho}_{NR} k^2}{K_J^2 a^2}, \quad (3.44)$$

como  $\lambda = al = a\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} a^2$  e  $K_J^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ . Então, [3.44] fica

$$\frac{c_s^2 k^2}{a^2} = 4\pi G\bar{\rho}_{NR} \left(\frac{\lambda_J^2}{\lambda^2}\right). \quad (3.45)$$

De [3.45] em [3.43]

$$\frac{d^2\delta_{NR}}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_{NR}}{dt} - 4\pi G\bar{\rho}_{NR} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right]\delta_{NR} = 0. \quad (3.46)$$

<sup>7</sup>Onde  $t_{eq}$ , é o tempo onde a densidades de energia da radiação e da matéria são iguais.

Das relações para o fundo  $a \propto t^{2/3}$ ,  $H = 2/3t$  e  $\bar{\rho} = 1/6\pi Gt^2$

$$\frac{d^2\delta_{NR}}{dt^2} + \frac{4}{3t} \frac{d\delta_{NR}}{dt} - \frac{2}{3}t^2 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right] \delta_{NR} = 0. \quad (3.47)$$

Para os modos bem dentro do horizonte, porém ainda maiores que o comprimento de Jeans (isto é quando  $\lambda_J \ll \lambda \ll \lambda_H$ ) e admitindo uma solução do tipo  $\delta_{NR} \propto t^b$ , encontramos

$$b^2 + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2/3, -1. \quad (3.48)$$

Tendo em conta  $t \propto a^{3/2}$ , se tem uma solução que é uma combinação linear de dois modos da forma

$$\delta_{NR} = C_1 a + C_2 a^{-3/2}, \quad (3.49)$$

para a evolução do contraste de densidade. Como esperado, há duas soluções: uma crescente e uma em decaimento. Falando estritamente, depois da igualdade matéria-radiação as perturbações na componente não-relativista (matéria escura) crescem proporcionalmente ao fator de escala  $\delta \propto a \propto t^{2/3}$  (ou seja só o modo crescente é importante<sup>8</sup>). Note que as perturbações dos bárions não podem crescer até que eles estejam desacoplados da radiação (que sempre supomos  $t_{eq} < t_{rec}$ <sup>9</sup>). As partículas de matéria escura, por outro lado, já estão sem colisões e suas flutuações na sua densidade podem crescer imediatamente após da igualdade radiação-matéria. Após a recombinação, perturbações nos bárions também crescem proporcionalmente ao fator de escala.

Em escalas bem abaixo do comprimento de Jeans (isto é  $\lambda \ll \lambda_J$ ), a equação [3.47] admite a solução

$$\delta_{NR} = Dt^{-1/6} e^{\pm i\sqrt{2/3}(\lambda_J/\lambda)\ln t}, \quad (3.50)$$

que descreve uma oscilação amortecida.

## Mistura de radiação e matéria escura

Considere-se um regime dominado pela radiação, ou seja de [2.54],  $a \propto t^{1/2}$  e  $H = 1/2t$ . Em escalas muito menores que o raio de Hubble podemos empregar a teoria Newtoniana para estudar as perturbações na matéria não-relativista. As equações Newtonianas são ainda aplicáveis desde que a

<sup>8</sup>A solução [3.49] mostra a diferença entre a instabilidade de Jeans no regime estático (isto é dentro de uma galáxia) e no Universo em expansão. A expansão retarda o crescimento exponencial do ambiente estático para uma lei de potência para baixo.

<sup>9</sup>Onde,  $t_{rec}$  indica o tempo em que foi dada a recombinação.

expansão é determinada pela componente dominante, que é a radiação. Aplicando a Eq.[3.42] para uma mistura de radiação e matéria escura (são partículas que não colidem) com  $c_s = 0$ , temos

$$\frac{d^2 \delta_{DM}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{DM}}{dt} = 4\pi G \bar{\rho}_{TOTAL} (\epsilon_\gamma \delta_\gamma + \epsilon_{DM} \delta_{DM}) \simeq 4\pi G \bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma, \quad (3.51)$$

já que  $\bar{\rho}_{DM} \ll \bar{\rho}_\gamma \simeq \bar{\rho}_{TOTAL}$  (isto é  $\epsilon_{DM} \ll 1$  enquanto que  $\epsilon_\gamma \simeq 1$ ). Dado que, antes da igualdade radiação-matéria  $H = 1/2t$  e a distribuição dos fótons em pequenas escalas é suave (isto é  $\langle \delta_\gamma \rangle \simeq 0$ ), então a equação acima se reduz

$$\frac{d^2 \delta_{DM}}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\delta_{DM}}{dt} = 0, \quad (3.52)$$

que admite a solução

$$\delta_{DM} = C_1 + C_2 \ln t. \quad (3.53)$$

Assim, na época da radiação as perturbações em pequenas escalas da componente de matéria escura experimentam um crescimento logarítmico, mesmo quando  $\lambda > \lambda_J$ . O estancamento ou congelamento das perturbações na matéria NR antes do equilíbrio é genérico para modelos com um período de rápida expansão dominado por partículas relativistas e é por vezes referido como efeito Meszaros (32).

### Mistura de matéria escura e bárions

Durante o período entre o equilíbrio e a recombinação as perturbações da componente de matéria escura cresce por um fator  $a_{rec}/a_{eq} = T_{eq}/T_{rec} \simeq 21\Omega h^2$ . Ao mesmo tempo, as flutuações bariônicas não sentem nenhum crescimento por causa do forte acoplamento entre fótons e bárions. Depois do desacoplamento, as perturbações na matéria ordinária começam a crescer impulsionadas pelo potencial gravitacional da matéria escura. Para ser mais preciso, considere-se um Universo pós-recombinação, com  $a \propto t^{2/3}$  e  $H = 2/3t$ , dominado pela matéria escura não-bariônica. De [3.49] as perturbações da componente de matéria escura cresce como  $\delta_{DM} = Ca$ , onde  $C$  é uma constante. Para as flutuações da matéria bariônica em escalas maiores que  $\lambda_J$ , a Eq.[3.42] dá

$$\frac{d^2 \delta_B}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_B}{dt} = 4\pi G \bar{\rho}_{total} (\epsilon_{DM} \delta_{DM} + \epsilon_B \delta_B) \simeq 4\pi G \bar{\rho}_{DM} \delta_{DM}, \quad (3.54)$$

já que  $c_s \simeq 0$  para as duas componentes e  $\bar{\rho}_B \ll \bar{\rho}_{DM} \simeq \bar{\rho}_{total}$ . Com isto temos  $4\pi G \bar{\rho}_{DM} \simeq \frac{3}{2} H^2$  e ademais como  $\delta_{DM} a \propto t^{2/3}$ , então temos da equação [3.54]

$$\frac{d^2 \delta_B}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_B}{dt} = \frac{3}{2} H^2 \delta_{DM_0} t^{2/3}, \quad (3.55)$$

onde  $\delta_{DM_0}$  é uma constante (valor inicial), sabendo que  $H = \frac{2}{3t} \Rightarrow H^2 = \frac{4}{9t^2}$ . A equação anterior fica

$$\frac{d^2\delta_B}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_B}{dt} = \frac{2}{3}\delta_{DM_0}t^{-4/3}. \quad (3.56)$$

Fazendo  $Y \equiv \dot{\delta}_B$ , temos

$$\dot{Y} + \frac{4}{3t}Y = \frac{2}{3}\delta_{DM_0}t^{-4/3}. \quad (3.57)$$

Uma equação deste tipo tem solução

$$Y' + P(x)Y = Q \Rightarrow Y = e^{-\int P dx} \left[ \int Q e^{\int P dx} dx + C \right]. \quad (3.58)$$

Usando isto temos que a solução da Eq.[3.57], é

$$Y = \dot{\delta}_B = Dt^{-4/3} + \frac{2}{3}\delta_{DM_0}t^{-1/3}. \quad (3.59)$$

Integrando e só olhando para o modo crescente da perturbação, obtemos a forma de  $\delta_B$

$$\delta_B = \delta_{DM_0}t^{2/3} \left[ 1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \right], \quad (3.60)$$

$$\delta_B = \delta_{DM} \left[ 1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \right]. \quad (3.61)$$

Para  $t = t_0 \Rightarrow \delta_B \approx 0$  e para  $t \gg t_0 \Rightarrow \delta_B \approx \delta_{DM}$ . As flutuações da matéria bariônica rapidamente recuperam o atraso com respeito as perturbações da matéria escura após do desacoplamento. Como alternativa pode-se dizer que os bárions caem nos poços de potencial criados pelas espécies sem colisões.

## 3.2 Teoria relativista de perturbações cosmológicas

Embora a análise newtoniana forneça informações valiosas sobre o comportamento das inhomogeneidades, tem limitações, tal análise perturbativo é só válido em escalas menores que o raio de Hubble. Sabendo que o comprimento de onda adequado de qualquer modo perturbativo será maior do que o horizonte em tempos suficientemente remotos (época da radiação), e em tais escalas efeitos relativísticos gerais tornam-se importantes, então não pode-se usar a teoria newtoniana para estudar perturbações na componente relativista. Por o qual, torna-se claro que um tratamento relativístico geral de perturbações cosmológicas da densidade é fundamental. Mas a interpretação física dos resultados

obtidos é mais difícil em relatividade geral que na teoria newtoniana.

O tratamento relativístico leva em conta as equações de Einstein da Relatividade Geral, que serão expandidas em torno de um Universo de fundo homogêneo e isotrópico. O problema que surge ao expandir as equações de Einstein até primeira ordem de aproximação, é que não existe um sistema coordenadas privilegiado para descrever as perturbações, diferentemente do que acontece num universo homogêneo e isotrópico. Essa liberdade na escolha das coordenadas, ou liberdade de calibre, leva ao aparecimento de modos fictícios nas quantidades perturbadas, que são devidos apenas ao sistema de coordenadas usado.

Para mostrar este problema de calibre vamos considerar um universo homogêneo e isotrópico não perturbado, onde  $\rho(\vec{x}, t) = \rho(t)$ . Em relatividade geral qualquer sistema de coordenadas é permitido, e podemos em princípio usar uma nova coordenada temporal "t'", relacionada à coordenada temporal velha  $t$  via  $t' = t + \hat{t}(\vec{x}, t)$ . Então a densidade de energia  $\rho'(t', \vec{x}) \equiv \rho(t(t', \vec{x}))$  na hipersuperfície  $t' = \text{const}$  depende, em geral sobre as coordenadas espaciais  $\vec{x}$ . Assumindo que  $\hat{t} \ll t$ , temos

$$\rho(t') \simeq \rho(t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{t}, \quad (3.62)$$

$$\rho(t) \simeq \rho(t') - \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{t} \equiv \rho(t') + \hat{\rho}(\vec{x}, t'). \quad (3.63)$$

O primeiro termo no lado direito deve ser interpretado como a densidade de energia de fundo no novo sistema de coordenadas, enquanto que o segundo descreve uma perturbação linear. Esta perturbação é não física e inteiramente devido à escolha do novo tempo "perturbado". Assim, podemos produzir perturbações fictícias simplesmente perturbando as coordenadas. Além disso, podemos "eliminar" uma perturbação real na densidade de energia, escolhendo hipersuperfícies de tempo constante a ser o mesmo que escolher hipersuperfícies de densidade constante: nesse caso  $\hat{\rho} = 0$  apesar da presença de reais inhomogeneidades.

Para resolver os modos de perturbação real e fictícia na Relatividade Geral, é necessário ter um conjunto completo de variáveis. Para ser mais preciso, precisamos tanto de perturbação do campo de matéria, e quanto das perturbações métricas (21). Nesta parte do capítulo vamos a introduzir quantidades invariantes de calibre, que não dependem da escolha particular de coordenadas e têm uma interpretação física clara. Ao final aplicamos o formalismo desenvolvido para estudar o comportamento de perturbações relativistas em alguns casos interessantes. Por simplicidade as fórmulas que consideramos apenas são válidas para um universo plano.

### 3.2.1 Transformação de calibre

O problema de liberdade de calibre pode então ser descrito através de uma transformação de coordenadas, em particular na primeira ordem essa transformação se trata de uma translação infinitesimal

$$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu}. \quad (3.64)$$

Se ilustra como quantidades escalares, vetoriais e tensoriais se transformam através de uma transformação de calibre que está expressa como uma translação infinitesimal do tipo [3.64].

- Escalares: Por definição um escalar é um objeto invariante sob qualquer transformação de coordenadas  $U'(x^{\mu'}) = U(x^{\mu})$ , então através uma transformação infinitesimal de coordenadas [3.64], se transformam como

$$U'(x^{\mu'}) = U'(x^{\mu} - \xi^{\mu}) = U'(x^{\mu}) - \xi^{\lambda} U'(x^{\mu})_{,\lambda} + O(\xi^2) = U(x^{\mu}), \quad (3.65)$$

$$U'(x^{\mu}) = U(x^{\mu}) + \xi^{\lambda} U(x^{\mu})_{,\lambda}. \quad (3.66)$$

A quantidade escalar não é um invariante de calibre<sup>10</sup>.

- Vetores: Um vetor covariante  $V_{\mu'}$  é um objeto cujas transformações de coordenadas se dão via

$$V_{\alpha'}(x^{\mu'}) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\alpha'}} V_{\nu}(x^{\mu}).$$

Particularmente para a translação infinitesimal [3.64], resulta

$$V_{\alpha'}(x^{\mu}) = V_{\alpha}(x^{\mu}) + \xi^{\nu}_{,\alpha} V_{\nu}(x^{\mu}) + \xi^{\lambda} V_{\alpha}(x^{\mu})_{,\lambda}, \quad (3.67)$$

que também pode ser escrito em termos de  $x^{\mu'}$ , como:

$$V_{\alpha'}(x^{\mu'}) = V_{\alpha}(x^{\mu'}) + \xi^{\nu} V_{\alpha}(x^{\mu'})_{,\nu} + \xi^{\nu}_{,\alpha} V_{\nu}(x^{\mu'}). \quad (3.68)$$

É conveniente rescrever os últimos dois termos da equação anterior em termos de suas derivadas covariantes

$$V_{\alpha;\nu} = V_{\alpha,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} V_{\beta} \quad \rightarrow \quad V_{\alpha,\nu} = V_{\alpha;\nu} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} V_{\beta}, \quad (3.69)$$

<sup>10</sup>A linha (') é omitido para os termos que já são de primeira ordem.

$$\xi^{\nu}_{;\alpha} = \xi^{\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \xi^{\beta} \quad \rightarrow \quad \xi^{\nu}_{;\alpha} = \xi^{\nu}_{,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \xi^{\beta}. \quad (3.70)$$

De [3.69] e [3.70] então a equação [3.68] é reescrita como

$$V_{\alpha'}(x^{\mu'}) = V_{\alpha}(x^{\mu}) + \xi^{\nu}_{;\alpha} V_{\nu}(x^{\mu}) + \xi^{\nu} V_{\alpha}(x^{\mu})_{;\nu}. \quad (3.71)$$

- Tensores (ordem 2): Um tensor covariante de ordem dois é um objeto cujas transformações de coordenadas se dão via

$$T_{\mu'\nu'}(x^{\kappa'}) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}} T_{\alpha\beta}(x^{\kappa}),$$

particularmente para a translação infinitesimal de interesse

$$T_{\mu'\nu'}(x^{\kappa}) = T_{\mu\nu}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda}_{;\nu} T_{\mu\lambda}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda}_{;\mu} T_{\lambda\nu}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda} T_{\mu\nu}(x^{\kappa})_{;\lambda}. \quad (3.72)$$

Assim como foi feito para os vetores, é conveniente escrever os últimos três termos usando a definição da derivada covariante, com isso a equação anterior fica

$$T_{\mu'\nu'}(x^{\kappa}) = T_{\mu\nu}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda}_{;\nu} T_{\mu\lambda}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda}_{;\mu} T_{\lambda\nu}(x^{\kappa}) + \xi^{\lambda} T_{\mu\nu}(x^{\kappa})_{;\lambda}. \quad (3.73)$$

**As transformações na densidade de energia:** aqui como a densidade de energia é uma escalar vamos a usar [3.66] para ver como se transforma através uma transformação de coordenadas.

$$\rho'(x^{\mu'}) = \rho(x^{\mu}) + \xi^{\alpha} \rho_{,\alpha},$$

mas como o último termo já é de primeira ordem por  $\xi$  então  $\rho$  deve ser do fundo e só depende do tempo  $\rho = \rho(t)$ , então temos

$$\rho'(x^{\mu'}) = \rho(x^{\mu}) + \xi^0 \dot{\rho}.$$

Agora, separando-as em parte do fundo e perturbado:  $\rho' = \bar{\rho}' + \hat{\rho}'$  e  $\rho = \bar{\rho} + \hat{\rho}$ , fica

$$\bar{\rho}' + \hat{\rho}' = \bar{\rho} + \hat{\rho} + \xi^0 (\bar{\rho} + \hat{\rho}).$$

No fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{\rho}' = \bar{\rho}$

$$\hat{\rho}' = \hat{\rho} + \xi^0 \dot{\hat{\rho}}. \quad (3.74)$$

Dada uma perturbação  $\hat{\rho}$ , é sempre possível escolher uma transformação de coordenadas infinitesimal com um desejável  $\xi^0$ , tão que

$$\xi^0 = -\frac{\hat{\rho}}{\dot{\rho}} \rightarrow \hat{\rho}' = 0. \quad (3.75)$$

Por esta razão acredita se que as perturbações são um resultado das transformações de coordenadas (perturbações fictícias). Se  $\hat{\rho}'$  for um grau de liberdade físico não é possível fazer isso, a física não depende da transformação de sistema de coordenadas.

Similares transformações se aplicam para a pressão  $p$  e o escalar de expansão  $\Theta$ .

**As transformações na quadrivelocidade:** olhando para a componente espacial da quadrivelocidade para o qual usamos a equação [3.68]

$$u_{m'}(x) = u_m(x) + \xi_{,m}^\lambda u_\lambda(x) + \xi^\lambda u_{m(x),\lambda},$$

$$\bar{u}_{m'} + \hat{u}_{m'} = \bar{u}_m + \hat{u}_m + \xi_{,m}^\lambda (\bar{u}_\lambda + \hat{u}_\lambda) + \xi^\lambda (\bar{u}_m + \hat{u}_m)_{,\lambda}. \quad (3.76)$$

No fundo homogêneo e isotrópico se satisfaz  $\bar{u}_{m'} = \bar{u}_m$  e ademais  $\bar{u}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , então em [3.76] e considerando só termos de primeira ordem

$$\hat{u}_{m'} = \hat{u}_m - \xi_{,m}^0. \quad (3.77)$$

É conveniente ainda escrever as componentes espaciais da perturbação da quadrivelocidade como o gradiente tridimensional de uma função escalar<sup>11</sup>  $\hat{u}_m \equiv v_{,m}$ , então

$$v'_{,m} = v_{,m} - \xi_{,m}^0 \rightarrow v' = v - \xi^0. \quad (3.78)$$

Usando [3.78] em [3.74]

$$\hat{\rho}' = \hat{\rho} + \xi^0 \dot{\rho} = \hat{\rho} + (v - v') \dot{\rho},$$

$$\hat{\rho}' + v' \dot{\rho} = \hat{\rho} + v \dot{\rho}. \quad (3.79)$$

A expressão anterior antes (ou depois) da igualdade não muda devido a uma transformação de coordenada, isso é um invariante de calibre. Aqui vamos a definir uma nova quantidade

$$\hat{\rho}^{(c)} = \hat{\rho} + v \dot{\rho}, \quad (3.80)$$

<sup>11</sup>Novamente o termo puramente vetorial é desprezado com a justificativa de que estamos interessados apenas em modos escalares.

onde podemos fazer

$$\hat{\rho}^{(c)'} = \hat{\rho}' + v' \dot{\hat{\rho}},$$

além disso, de [3.78] na equação anterior obtemos

$$\hat{\rho}^{(c)'} = \hat{\rho} + \xi^0 \dot{\hat{\rho}} + (v - \xi^0) \dot{\hat{\rho}} = \hat{\rho} + v \dot{\hat{\rho}} = \hat{\rho}^{(c)},$$

resultando

$$\hat{\rho}^{(c)'} = \hat{\rho}^{(c)}. \quad (3.81)$$

Similarmente construímos outras quantidades  $\hat{p}^c$  e  $\hat{\Theta}^c$ , que são quantidades invariantes de calibre

$$\hat{p}^{(c)} = \hat{p} + v \dot{\hat{p}}, \quad (3.82)$$

$$\hat{\Theta}^{(c)} = \hat{\Theta} + v \dot{\hat{\Theta}}. \quad (3.83)$$

### 3.2.2 Perturbações da métrica

Na teoria da relatividade geral, a geometria desempenha um papel de fato dinâmico. Por isso, para descrever desvios da homogeneidade e isotropia no Universo essas flutuações também devem estar contidas na própria estrutura geométrica do espaço-tempo.

Neste sentido, a métrica deve ser dividida em um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , (métrica de FLRW), e um termo de perturbação  $\hat{g}_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (3.84)$$

O elemento de linha será dado em termos da métrica de FLRW e a métrica perturbada, onde esta última contém somente quantidades escalares, pois elas são induzidas pelas inhomogeneidades nas densidades de energia. Essas perturbações são mais importantes em cosmologia devido a que elas produzem instabilidade gravitacional e podem ser as responsáveis pelo processo de formação de estruturas. Existem também quantidades vetoriais e tensoriais que não vamos considerar neste trabalho pois estamos interessados somente na formação de estruturas.

Tal elemento de linha é

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2a^2 F_{,i} dt dx^i + a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{\alpha\beta} + 2E_{,\alpha\beta}] dx^i dx^j. \quad (3.85)$$

Os elementos do tensor métrico escalar, divididos segundo sua ordem são:

Tensor métrico escalar	
Fundo	Perturbado
$\bar{g}_{00} = -1$	$\hat{g}_{00} = -2\phi$
$\bar{g}_{0i} = \bar{g}_{i0} = 0$	$\hat{g}_{0i} = \hat{g}_{i0} = a^2 F_{,i}$
$\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ji} = a^2 \delta_{ij}$	$\hat{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} = 2a^2(-\psi\delta_{ij} + E_{,ij})$

Tabela 3.1: Elementos do tensor métrico escalar

O tensor métrico deve satisfazer a transformação [3.72], que na primeira ordem resulta em

$$\bar{g}_{\mu'\nu'} + \hat{g}_{\mu'\nu'} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu} + \xi^{\lambda}_{, \nu} \bar{g}_{\mu\lambda}(x) + \xi^{\lambda}_{, \mu} \bar{g}_{\lambda\nu}(x) + \xi^{\lambda} \bar{g}_{\mu\nu}(x)_{, \lambda}.$$

Mas como assumimos no fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{g}_{\mu'\nu'} = \bar{g}_{\mu\nu}$ , então resulta

$$\hat{g}_{\mu'\nu'} = \hat{g}_{\mu\nu} + \xi^{\lambda}_{, \nu} \bar{g}_{\mu\lambda}(x) + \xi^{\lambda}_{, \mu} \bar{g}_{\lambda\nu}(x) + \xi^{\lambda} \bar{g}_{\mu\nu}(x)_{, \lambda}. \quad (3.86)$$

A aplicação das componentes da perturbação da métrica na equação [3.86] explicita o efeito da transformação de calibre para cada uma das quantidades da métrica.

Por exemplo para:  $\mu = \nu = 0$  em [3.86]

$$\hat{g}_{0'0'} = \hat{g}_{00} + \xi^{\lambda}_{, 0} \bar{g}_{0\lambda}(x) + \xi^{\lambda}_{, 0} \bar{g}_{\lambda 0}(x) + \xi^{\lambda} \bar{g}_{00}(x)_{, \lambda}.$$

Usando a tabela anterior fica

$$\phi' = \phi + \xi^0_{, 0}. \quad (3.87)$$

Para  $\mu = m$  e  $\nu = 0$ , temos

$$\hat{g}_{m'0'} = \hat{g}_{m0} + \xi^{\lambda}_{, 0} \bar{g}_{m\lambda}(x) + \xi^{\lambda}_{, m} \bar{g}_{\lambda 0}(x) + \xi^{\lambda} \bar{g}_{m0}(x)_{, \lambda},$$

novamente usando a tabela temos

$$a^2 F'_{,m} = a^2 F_{,m} + \xi^m_{, 0} a^2 - \xi^0_{, m}. \quad (3.88)$$

Na definição da translação infinitesimal em [3.64] é conveniente explicitar a parte temporal e espacial do vetor  $\xi_{\mu}$ . Em geral a parte espacial de um vetor pode ainda ser escrita como a soma de um termo vetorial transversal, com divergente nulo  $\xi_{i\perp}$  e um gradiente de uma função escalar  $\zeta_{,i}$ . Sabe-se que

a formação de estruturas no universo é originada por modos escalares, então neste trabalho o termo transversal será considerado nulo

$$\xi_\mu = (\xi_0, \zeta_i). \quad (3.89)$$

Então de [3.89] temos que

$$\xi^m = \zeta^m.$$

Aplicando o tensor métrico de fundo

$$\begin{aligned} \xi_m &= \bar{g}_{m\nu} \xi^\nu = a^2 \xi^m, \\ \xi^m &= \frac{\xi_m}{a^2} = \frac{\zeta_{,m}}{a^2} = \left( \frac{\zeta}{a^2} \right)_{,m}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

De [3.90] em [3.88]

$$F'_{,m} = F_{,m} + \xi^m_{,0} - \left( \frac{\xi^0}{a^2} \right)_{,m},$$

de [3.90]

$$\begin{aligned} F'_{,m} &= F_{,m} + \left[ \left( \frac{\zeta}{a^2} \right)_{,0} \right]_{,m} - \left( \frac{\xi^0}{a^2} \right)_{,m}, \\ F' &= F + (\zeta a^{-2})_{,0} - \xi^0 a^{-2}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Para  $\mu = m$  e  $\nu = n$ , em [3.86], temos

$$\hat{g}_{m'n'} = \hat{g}_{mn} + \xi_{,n}^\lambda \bar{g}_{m\lambda} + \xi_{,m}^\lambda \bar{g}_{\lambda n} + \xi^\lambda \bar{g}_{mn,\lambda}, \quad (3.92)$$

mas para  $m \neq n$  em [3.92] e usando [3.90]

$$\begin{aligned} E'_{,mn} &= E_{,mn} + \left( \frac{\zeta}{a^2} \right)_{,mn}, \\ E' &= E + \frac{\zeta}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

E para  $m = n$  em [3.92]

$$\begin{aligned} -2a^2 \psi' + 2a^2 E'_{,mm} &= -2a^2 \psi + 2a^2 E_{,mm} + \xi_{,n}^\lambda \bar{g}_{n\lambda} + \xi_{,n}^\lambda \bar{g}_{\lambda n} + \xi^\lambda \bar{g}_{mm,\lambda}, \\ -2a^2 \psi' + 2a^2 E'_{,mm} &= -2a^2 \psi + 2a^2 E_{,mm} + 2\xi_{,n}^n a^2 + 2a\dot{a}\xi^0, \end{aligned} \quad (3.94)$$

usando [3.93] em [3.94]

$$-2a^2\psi' + 2a^2 \left[ E_{,mm} + \left( \frac{\zeta}{a^2} \right)_{,mm} \right] = -2a^2\psi + 2a^2 E_{,mm} + 2\xi_{,n}^n a^2 + 2a\dot{a}\xi^0,$$

$$\psi' = \psi - \xi^0 H. \quad (3.95)$$

Assim, só  $\xi^0$  e  $\zeta$  contribuem para as transformações das perturbações escalares e para uma escolha apropriada podemos fazer com que qualquer das quatro funções  $\phi, \psi, B, E$  desapareça. As mais simples combinações lineares invariantes de calibre destas funções, que estendem ao espaço bidimensional das perturbações físicas, são as seguintes, substituindo [3.93] em [3.91], obtemos

$$\xi^0 = a^2(F - F' + \dot{E}' - \dot{E}), \quad (3.96)$$

de [3.96] em [3.87]

$$\Phi = \phi' + [a^2(F' - \dot{E}')] = \phi + [a^2(F - \dot{E})], \quad (3.97)$$

e de [3.96] em [3.95]

$$\Psi = \psi' + a\dot{a}(\dot{E}' - F') = \psi + a\dot{a}(\dot{E} - F). \quad (3.98)$$

Aqui  $\Phi$  e  $\Psi$  definidos em [3.97] e [3.98] são chamadas de potenciais de Bardeen. Essas quantidades são invariantes sob transformações de calibre. Se  $\Phi$  e  $\Psi$  desaparecem em um sistema de coordenadas particular, elas não ser nulas em qualquer outro sistema de coordenadas. Isto significa que nós podemos imediatamente distinguir inhomogeneidades físicas de perturbações fictícias.

### 3.2.3 Calibre comóvel

Antes de fixar de fato o calibre comóvel deve-se olhar para a quadrivelocidade  $u^\mu$ . Analogamente ao que foi feito com a métrica pode-se pensar que desvios da homogeneidade e isotrópia do universo provocam flutuações também na quadrivelocidade, de modo que ela pode ser escrita como a soma de um termo de fundo  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , com uma perturbação de ordem um  $\hat{u}^\mu$

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu. \quad (3.99)$$

Em geral, a quadrivelocidade é um vetor ortonormal  $u_\mu u^\mu = -1$ . Utilizando a equação anterior, desprezando termos com ordem superior à primeira ordem obtém-se

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= -1, \\ (\bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu)(\bar{u}^\mu + \hat{u}^\mu) &= -1, \\ \hat{u}^0 &= \hat{u}_0. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Além disso, a relação para levantar ou abaixar índices também pode ser expressa em termos da métrica total

$$\begin{aligned} u_\mu &= g_{\mu\nu} u^\nu, \\ \bar{u}_\mu + \hat{u}_\mu &= (\bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu})(\bar{u}^\nu + \hat{u}^\nu), \\ \hat{u}_\mu &= \bar{g}_{\mu\nu} \hat{u}^\nu + \hat{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\nu. \end{aligned} \tag{3.101}$$

A equação anterior fornece os seguintes vínculos para as componentes da perturbação da quadrivelocidade

$$\hat{u}_0 = -\hat{u}^0 + \hat{g}_{00} \Rightarrow \hat{u}_0 = \hat{u}^0 = \frac{1}{2} \hat{g}_{00} = -\phi. \tag{3.102}$$

$$\hat{u}_m = a^2 \delta_{m\nu} \hat{u}^\nu + \hat{g}_{m0} \Rightarrow \hat{u}_m = a^2 \hat{u}^m + a^2 F_{,m}. \tag{3.103}$$

Com ajuda da relação  $\hat{u}_{m'} \equiv v_{,m}$  e usando a equação [3.78], o calibre comóvel é fixado através das escolhas  $v' = v^{(c)} = 0$  e  $F' = F^{(c)} = 0$ . Então o termo  $\xi^0$  fica determinado através da equação [3.77].

$$\xi^0 = v, \tag{3.104}$$

enquanto  $\zeta$  pode ser determinado pela equação da condição imposta pela transformação de calibre do parâmetro F em [3.91]

$$(\zeta a^{-2})_{,0} = v a^{-2} - F. \tag{3.105}$$

Aplicando a equação [3.104] na transformação [3.77] conclui-se que um observador neste referencial não será capaz de ver as perturbações das componentes espaciais da quadrivelocidade. Então, os termos  $\phi^{(c)}$ ,  $E^{(c)}$ ,  $\psi^{(c)}$ , no calibre comóvel, podem ser determinados a partir das informações expressas na tabela [3.1]

$$\begin{aligned} \phi^{(c)} &= \phi + \xi_0^0, \\ \phi^{(c)} &= \phi + v_0, \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned}
E^{(c)} &= E + \zeta a^{-2}, \\
E_{,0}^{(c)} &= E_{,0} + (\zeta a^{-2})_{,0}, \\
E_{,0}^{(c)} &= E_{,0} + \nu a^{-2} - F,
\end{aligned} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}
\psi^{(c)} &= \psi - \xi^0 H, \\
\psi^{(c)} &= \psi - \nu H.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Para a perturbação de uma quantidade escalar cujo termo associado ao fundo homogêneo e isotrópico só depende do tempo  $s(t, x^i) = \bar{s}(t) + \hat{s}(t, x^i)$ , é possível definir uma quantidade invariante de calibre (33)

$$\hat{s}^{(c)} = \hat{s} + \xi^0 \bar{s}_0. \tag{3.109}$$

A formulação de uma teoria perturbativa em termos desta quantidade invariante de calibre é justificada no calibre comóvel ( $\xi^0 = \nu = 0$ ), pois neste caso a quantidade acima adquire significado físico.

### 3.2.4 Teoria perturbativa em termos de quantidades invariantes de calibre

O formalismo padrão na literatura da teoria das perturbações no cenário relativístico consiste em inserir perturbações nas grandezas dinamicamente importantes e então resolver as equações de Einstein para determinar a sua evolução. Neste trabalho será utilizada uma forma análoga do ponto de vista físico, na qual as perturbações serão inseridas na equação do balanço de energia, na equação do balanço do momento e na equação de Raychaudhuri [(34), (35), (36), (37), (38), (39)].

Será desenvolvida um análise perturbativa para um fluido conservativo que será posteriormente aplicada ao Universo como um todo. Neste ponto, além da métrica [3.84] e da quadrivelocidade (calibre comóvel) [3.99] a densidade de energia  $\rho$ , a pressão  $p$  e o escalar de expansão  $\Theta$  também deverão ser expressas como em [3.27], [3.28] e [3.30] respectivamente.

O princípio cosmológico permite estabelecer que no fundo homogêneo e isotrópico  $\bar{g}_{\mu\nu}$  seja dada pela métrica de FLRW, a quadrivelocidade seja  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  e que a densidade  $\bar{\rho}$ , pressão  $\bar{p}$  e o escalar de expansão  $\bar{\Theta}$  não possuam dependência espacial. Em particular, a densidade e a pressão devem satisfazer

$$\rho = \Sigma_i \rho_i.$$

$$p = \Sigma_i p_i,$$

na qual o índice  $i$  representa as possíveis componentes do universo.

A quantidade de interesse que vai descrever as estruturas no Universo é denominada contraste de densidade, que foi definida anteriormente, e é dada pela razão entre a perturbação de densidade de energia e seu valor no fundo homogêneo e isotrópico

$$\delta = \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (3.110)$$

O balanço de energia de um fluido perfeito pode ser escrito no nível perturbativo, onde cada uma das quantidades dinâmicas [2.30], deve ser escrita como a soma de um termo que descreve o fundo homogêneo e isotrópico e um termo perturbativo de primeira ordem.

$$\begin{aligned} (\bar{\rho} + \hat{\rho})_{,v}(\bar{u}^v + \hat{u}^v) + (\bar{\Theta} + \hat{\Theta})[(\bar{\rho} + \hat{\rho}) + (\bar{p} + \hat{p})] &= 0, \\ \dot{\hat{\rho}} + \dot{\hat{\rho}}\hat{u}^0 + \bar{\Theta}(\hat{\rho} + \hat{p}) + \hat{\Theta}(\bar{\rho} + \bar{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Da definição de contraste de densidade [3.110], temos

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{\hat{\rho}}\bar{\rho} - \hat{\rho}\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}^2} \rightarrow \dot{\hat{\rho}} = \dot{\delta}\bar{\rho} + \hat{\rho}\dot{\delta}, \quad (3.112)$$

de [3.112] em [3.111]

$$\dot{\delta} + \delta\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + \frac{\dot{\hat{\rho}}}{\bar{\rho}}\hat{u}^0 + \bar{\Theta}\left(\delta + \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}}\right) + \hat{\Theta}\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right). \quad (3.113)$$

Neste ponto pode ser introduzida para a densidade, pressão, e escalar de expansão uma descrição invariante de calibre da forma [3.80], [3.82] e [3.83]

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(c)} &= \hat{\rho} + v\dot{\hat{\rho}}, \\ \hat{p}^{(c)} &= \hat{p} + v\dot{\hat{p}}, \\ \hat{\Theta}^{(c)} &= \hat{\Theta} + v\dot{\hat{\Theta}}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Ainda que esse desenvolvimento não utilize explicitamente a métrica, as quantidades dinâmicas  $\hat{\rho}^c$ ,  $\hat{p}^c$  e  $\hat{\Theta}^c$ , devem ser escritas no calibre comóvel, onde assumem o fato de densidade, pressão e escalar de expansão.

Em particular, dividindo a relação para  $\hat{\rho}^c$  por  $\bar{\rho}$ , obtém-se uma relação de calibre para o contraste de densidade

$$\delta^{(c)} = \delta + v\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \rightarrow \dot{\delta}^{(c)} = \dot{\delta} + \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\right)v + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\dot{v}. \quad (3.115)$$

Dessa forma utilizando  $u^0 = u_0 = -\phi$ , [3.114] e [3.115], a equação [3.113] pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta^{(c)} - \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\right) v - \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}}\right) \dot{v} + \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \left(\delta^{(c)} - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} v\right) - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \phi + \hat{\Theta}^{(c)} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right) - \dot{\Theta} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right) v \\ + \Theta \left(\delta^{(c)} - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} v\right) + \Theta \left(\frac{\hat{p}^{(c)} - \dot{\bar{p}} v}{\bar{\rho}}\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.116)$$

O próximo passo é olhar para as componentes espaciais da equação do balanço do momento [2.31] no nível perturbativo, com limite na primeira ordem

$$(\bar{\rho} + \bar{p}) \hat{u}_m = -(h_m^\gamma p_{,\gamma})^\wedge. \quad (3.117)$$

Para uma análise mais cuidadosa vamos olhar separadamente a perturbação da derivada total da quadrivelocidade

$$\begin{aligned} \hat{u}_m = (u_{m;\nu} u^\nu)^\wedge = (u_{m;\nu})^\wedge \bar{u}^\nu + \bar{u}_{m;\nu} \hat{u}^\nu = (u_{m,0} - \Gamma_{m0}^\alpha u_\alpha)^\wedge + (u_{m,\nu} - \Gamma_{m\nu}^\alpha u_\alpha) \hat{u}^\nu, \\ \hat{u}_m = \hat{u}_m + \hat{\Gamma}_{m0}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \hat{u}_m + \frac{\dot{a}}{a} \bar{g}_{mn} \hat{u}^n. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Agora como

$$\begin{aligned} u^m = g^{m\nu} u_\nu \quad \rightarrow \quad \hat{u}^m = \hat{g}^{m\nu} \bar{u}_\nu + \bar{g}^{m\nu} \hat{u}_\nu, \\ \rightarrow \bar{g}_{am} u^m = -\bar{g}_{am} \hat{g}^{m0} + \hat{u}_a, \end{aligned} \quad (3.119)$$

também

$$\Gamma_{m0}^0 = \frac{1}{2} g^{0\mu} (g_{\mu m,0} + g_{\mu 0,m} - g_{m0,\mu}). \quad (3.120)$$

Perturbando a primeira ordem

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{m0}^0 = \frac{1}{2} \hat{g}^{0\mu} (\bar{g}_{\mu m,0}) + \frac{1}{2} \bar{g}^{0\mu} (g_{\mu m,0} + g_{\mu 0,m} - g_{m0,\mu})^\wedge, \\ \hat{\Gamma}_{m0}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \bar{g}_{\mu m} \hat{g}^{0\mu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,m}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

De [3.119] e [3.121] em [3.118], obtemos

$$\hat{u}_m = \hat{u}_m - \frac{1}{2} \hat{g}_{00,m}. \quad (3.122)$$

Além disso, de [3.117] achamos

$$(h_m^\gamma p_{,\gamma})^\wedge = [(g_m^\gamma + u^\gamma u_m) p_{,\gamma}]^\wedge = [p_{,m} + u_m \dot{p}]^\wedge,$$

$$(h_m^\gamma p_{,\gamma})^\wedge = \hat{p}_{,m} + \dot{p} \hat{u}_m. \quad (3.123)$$

Considerando que  $\hat{u}_m = v_{,m}$

$$(h_m^\gamma p_{,\gamma})^\wedge = \hat{p}_{,m} + \dot{p} v_{,m} = (\hat{p} + v\dot{p})_{,m} = \hat{p}_{,m}^{(c)}, \quad (3.124)$$

de [3.122], [3.124] e considerando  $\hat{g}_{00} = -2\phi$  em [3.117], obtém-se, com o limite na primeira ordem, o balanço do momento no nível perturbativo

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho} + \bar{p}}. \quad (3.125)$$

Com a consideração de que o termo  $\frac{\dot{\hat{p}}}{\bar{\rho}}$  pode ser escrito como  $\frac{\dot{\hat{p}}}{\bar{\rho}} = -\bar{\Theta} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)$ , de modo que a conservação da energia e do momento no nível perturbativo podem ser descritas pela combinação das equações [3.116] e [3.125]

$$\dot{\delta}^{(c)} - \bar{\Theta} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \delta^{(c)} + \hat{\Theta}^{(c)} \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right). \quad (3.126)$$

Para determinar a perturbação do escalar de expansão deve-se utilizar a equação de Raychaudhuri, que no caso sem cisalhamento e vorticidade é dada por (ver apêndice B)

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}_{;\alpha}^\alpha + 4\pi G(\rho + 3p) = 0. \quad (3.127)$$

No entanto, antes de inserir perturbações na equação [3.127] é conveniente reescrevê-la segundo o balanço do momento [2.31]

$$\dot{u}^\mu = g^{\mu\nu} \dot{u}_\nu = -g^{\mu\nu} \left( \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right), \quad (3.128)$$

$$\dot{u}_{;\mu}^\mu = \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right) \right]_{;\mu} = -g^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right)_{;\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \frac{h_\gamma^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right], \quad (3.129)$$

de forma que a equação de Raychaudhuri [3.127] possa então ser reescrita como

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + g^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{h_\nu^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right)_{;\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \frac{h_\gamma^\lambda p_{,\lambda}}{\rho + p} \right] + 4\pi G(\rho + 3p) = 0. \quad (3.130)$$

No nível perturbativo a equação anterior assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \hat{\Theta} - \dot{\Theta}\phi + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\hat{\Theta} + g^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{\hat{p}_{,\nu} + \hat{u}_\nu \dot{\hat{p}} + \delta_\nu^0 \phi \dot{\hat{p}} - \delta_\nu^0 \hat{p}_{,0}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right)_{;\mu} \right. \\ & \left. - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left( \frac{\hat{p}_{,\gamma} + \hat{u}_\gamma \dot{\hat{p}} + \delta_\gamma^0 \phi \dot{\hat{p}} - \delta_\gamma^0 \hat{p}_{,0}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \right] \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left( \frac{\delta_\gamma^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\lambda \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \end{aligned}$$

$$+ \bar{g}^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{\delta_\gamma^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\gamma \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right)_{,\mu} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \left( \frac{\delta_\gamma^\lambda \bar{p}_{,\lambda} + \bar{u}^\lambda \bar{u}_\gamma \bar{p}_{,\lambda}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right) \right] + 4\pi G(\hat{\rho} + 3\hat{p}) = 0. \quad (3.131)$$

Os últimos três termos que multiplicam a métrica  $\bar{g}^{\mu\nu}$  contêm o balanço do momento no fundo homogêneo e isotrópico, que deve-se anular. Além disso, uma vez que a métrica de FLRW é diagonal, podemos escrever

$$\dot{\hat{\Theta}} - \dot{\hat{\Theta}}\phi + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\dot{\hat{\Theta}} + \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} + 4\pi G(\bar{\rho}\delta + 3\hat{p}) = 0. \quad (3.132)$$

Neste ponto introduz-se as variáveis dinâmicas invariantes de calibre [3.114]

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + 4\pi G(\bar{\rho}\delta^{(c)} + 3\hat{p}^{(c)}) + \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} - \ddot{\Theta}v - \dot{\hat{\Theta}}(\dot{v} + \phi) \\ - \frac{2}{3}\bar{\Theta}\dot{\hat{\Theta}}v - 4\pi G(\dot{\bar{\rho}} + 3\dot{\bar{p}})v = 0. \end{aligned} \quad (3.133)$$

O escalar de expansão no fundo homogêneo e isotrópico pode ser obtido através do balanço da energia [2.30], enquanto suas derivadas temporais são obtidas da equação  $\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3H}\dot{\bar{\rho}}$

$$\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + \frac{2}{3}\bar{\Theta}\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} + 4\pi G\bar{\rho}\delta^{(c)} + \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} = 0. \quad (3.134)$$

Isolando a perturbação do escalar de expansão  $\hat{\Theta}^{(c)}$  na equação da conservação da energia e do momento [3.126] pode-se obter sua derivada temporal a partir da equação anterior

$$\hat{\Theta}^{(c)} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)} \left( \delta^{(c)} - \bar{\Theta} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \delta^{(c)} \right), \quad (3.135)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}^{(c)} = \frac{2}{3}\bar{\Theta} \frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)} \left( \dot{\delta}^{(c)} - \bar{\Theta} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \dot{\delta}^{(c)} \right) - 4\pi G\bar{\rho}\delta^{(c)} - \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{a^3(\bar{\rho} + \bar{p})}. \quad (3.136)$$

Por fim, deve-se diferenciar a equação da conservação da energia e do momento [3.126] com respeito ao tempo e então inserir os resultados anteriores junto as equações [2.30], [2.34] e [2.36]

$$\ddot{\delta}^{(c)} + \dot{\delta}^{(c)} H \left( 2 - 6\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) + \delta^{(c)} H^2 \left( -\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{9}{2}\frac{\bar{p}^2}{\bar{\rho}^2} + 9\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = \frac{\Delta\hat{p}^{(c)}}{\bar{\rho}a^2}. \quad (3.137)$$

É comum representar a escala temporal em função do fator de escala  $a(t)$ . Mudando a variável

$$\delta^{(c)} = \delta^{(c)'} aH, \quad (3.138)$$

$$\ddot{\delta}^{(c)} = (\delta^{(c)'} aH)' aH = a^2 H^2 \left[ \delta^{(c)''} + \frac{\delta^{(c)'}}{a} \left( 1 + \frac{aH'}{H} \right) \right], \quad (3.139)$$

onde a linha indica derivação com respeito ao fator de escala. A derivada do parâmetro de Hubble  $H'$  pode ser determinada a partir de  $\dot{H}$

$$\dot{H} = H' a H = -4\pi G(\bar{\rho} + \bar{p}) \rightarrow 1 + \frac{aH'}{H} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3\bar{p}}{\bar{\rho}} \right). \quad (3.140)$$

Além disso, por estarmos interessados na evolução temporal do contraste de densidade é conveniente escrevê-lo no espaço de Fourier

$$\delta^{(c)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\vec{k}}^{(c)}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (3.141)$$

de forma que a equação final, já no espaço dos momentos, para as perturbações cosmológicas é

$$\delta_{\vec{k}}^{(c)''} + \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)'}}{a} \left( \frac{3}{2} - \frac{15\bar{p}}{2\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)}}{a^2} \left( -\frac{3}{2} - 12\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{9\bar{p}^2}{2\bar{\rho}^2} + 9\frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{\hat{p}^{(c)} |\vec{k}|^2}{\rho a^4 H^2}. \quad (3.142)$$

Considerando que  $w = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ <sup>12</sup>,  $k = |\vec{k}|$  é o número de onda comovel e para uma perturbação adiabática temos  $c_s^2 = \frac{\dot{\bar{p}}}{\dot{\bar{\rho}}} = \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{\rho}}$ , então a equação anterior fica

$$\delta_{\vec{k}}^{(c)''} + \frac{3}{2} (1 - 5w + 2c_s^2) \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)'}}{a} - \frac{3}{2} \left( 1 + 8w - 3w^2 - 6c_s^2 - \frac{2k^2 c_s^2}{3a^2 H^2} \right) \frac{\delta_{\vec{k}}^{(c)}}{a^2} = 0. \quad (3.143)$$

Vamos agora procurar soluções para as equações de perturbação relativistas para complementar os resultados newtonianos da seção anterior. Os casos a serem considerados são: (i) Crescimento das perturbações na componente dominante não-relativista após o equilíbrio<sup>13</sup>, quando o comprimento de onda da perturbação é maior que o raio de Hubble. (ii) Crescimento das perturbações na componente dominante relativista antes da igualdade matéria-radiação, quando o comprimento de onda da perturbação esta dentro como fora do raio de Hubble (29).

A mesma análise foi feita em Ref.(40) para obter uma equação do tipo [3.143], mas neste caso foi incluída os efeitos de uma constante cosmológica positiva.

<sup>12</sup>Onde  $w$ , é o parâmetro da equação de estado do fluido total.

<sup>13</sup>Equilíbrio representa no momento no qual a densidade de energia da matéria é a mesma que a densidade da radiação.

## Universo perturbado Einstein-de Sitter

A análise Newtoniano é válida para os modos bem dentro do raio de Hubble. Em escalas fora de  $\lambda_H$ , porém, é preciso envolver a relatividade geral mesmo se tratando matéria não relativista. Para poeira sem pressão  $w = 0 = c_s^2$  na equação [3.143]. Este modelo é conhecido como Universo Einstein-de Sitter, e fornece uma boa descrição de nosso Universo depois da recombinação

$$\delta''_{NR} + \frac{3}{2a}\delta'_{NR} - \frac{3}{2a^2} \left[ 1 - \frac{2k^2 c_s^2}{3a^2 H^2} \right] \delta_{NR} = 0, \quad (3.144)$$

onde omitimos o  $(c)$  e o número de onda pela simplicidade. Aqui o termo  $\left(\frac{k^2 c_s^2}{a^2 H^2}\right)$  deve ser mantido na equação, se queremos discutir o efeito da pressão de suporte. Essas soluções têm soluções bastante simples. Para os modos situados fora do raio de Hubble  $\lambda \gg \lambda_H$  e  $\frac{k^2 c_s^2}{a^2 H^2} \ll 1$ . Nestas escalas a equação acima reduz-se a

$$\delta''_{NR} + \frac{3}{2a}\delta'_{NR} - \frac{3}{2a^2}\delta_{NR} = 0. \quad (3.145)$$

Resolvendo com um Ansatz:  $\delta_{NR} \propto a^b$

$$\delta_{NR} \propto a^b, \quad \delta'_{NR} \propto b a^{b-1}, \quad \delta''_{NR} \propto b(b-1)a^{b-2}, \quad (3.146)$$

de [3.146] em [3.145]

$$2b^2 + b - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 1, -\frac{3}{2}, \quad (3.147)$$

temos uma solução que é uma combinação linear dos dois modos da forma

$$\delta_{NR} = C_1 a + C_2 a^{-3/2}, \quad (3.148)$$

para a evolução do contraste de densidade. Onde recuperamos o resultado obtido em [3.49].

## Era dominada pela radiação

Antes da igualdade radiação-matéria, a radiação dominou a densidade de energia do Universo e  $w = \frac{1}{3} = c_s^2$ . Durante este periodo a equação [3.143] fica

$$\delta''_{\gamma} - \frac{2}{a^2} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right] \delta_{\gamma} = 0. \quad (3.149)$$

Agora do elemento de linha para um fotón

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 dr^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r = \int \frac{c}{a} dt,$$

definimos o horizonte de partículas  $l_h = ar$

$$l_h = a \int \frac{c}{a} dt,$$

mas definindo o tempo conforme  $cdt = ad\eta$ , a equação anterior fica

$$l_h = a\eta. \quad (3.150)$$

Conhecendo o comprimento de onda comovel:  $l = \frac{2\pi}{k}$  e comprimento de onda físico:  $\lambda = al = a\frac{2\pi}{k} \rightarrow \lambda \propto \frac{a}{k}$ . Aqui definimos uma nova quantidade  $k\eta = \frac{k}{a}a\eta$ , onde usando o anterior temos

$$k\eta \propto \frac{l_h}{\lambda} = \frac{\text{horizonte de partículas}}{\text{comprimento de onda da perturbação}}. \quad (3.151)$$

De [3.149] achamos as seguintes relações

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{k}{a} \frac{da}{dk\eta} \frac{1}{a} = \frac{k}{a} \frac{a'}{a}, \quad (3.152)$$

$$\delta'_\gamma = \frac{d\delta_\gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{da} = k \frac{d\delta_\gamma}{dk\eta} \frac{1}{ka'} = \frac{1}{a'} \delta'_\gamma, \quad (3.153)$$

da mesma forma obtemos

$$\delta''_\gamma = -\frac{a''}{a'^2} \frac{\delta'_\gamma}{a'} + \frac{1}{a'^2} \delta''_\gamma, \quad (3.154)$$

onde ' em [3.152], [3.153] e [3.154] representa a derivada com respeito a  $k\eta$ .

De [3.152], [3.153] e [3.154] em [3.149], resulta

$$\delta''_\gamma - \left[ 2 \left( \frac{a'}{a} \right)' - \frac{1}{3} \right] \delta_\gamma = 0. \quad (3.155)$$

Como sempre  $a \propto \eta$  ou  $a = c\eta$ , então

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dk\eta} = \frac{1}{c\eta} \frac{dc\eta}{dk\eta} = \frac{1}{k\eta}. \quad (3.156)$$

De [3.156] em [3.155]

$$\delta_\gamma'' - \left[ \frac{2}{(k\eta)^2} - \frac{1}{3} \right] \delta_\gamma = 0. \quad (3.157)$$

- Em grandes escalas, quando  $\lambda \gg l_h \rightarrow k\eta \ll 1$  em [3.157]

$$\delta_\gamma'' - \frac{2}{(k\eta)^2} \delta_\gamma = 0. \quad (3.158)$$

Seja uma solução

$$\delta_\gamma \propto (k\eta)^b, \quad \delta_\gamma' \propto b(k\eta)^{b-1}, \quad \delta_\gamma'' \propto b(b-1)(k\eta)^{b-2}, \quad (3.159)$$

usando [3.159] em [3.158]

$$b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow b = 2, -1, \quad (3.160)$$

com uma solução de lei de potência da forma

$$\delta_\gamma = C_1 a^2 + C_2 a^{-1}, \quad (3.161)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Aqui, antes da igualdade matéria-radiação as perturbações em grandes escalas no fluido radiativo crescem como  $\delta_\gamma \propto a^2$ . Notar que a Eq.[3.158] também governa a evolução da componente não-relativista (bárions ou não), uma vez que não incorpora os efeitos da pressão. Portanto, a solução [3.161] também é aplicável aos bárions e a matéria sem colisões.

- Em escalas dentro do horizonte (pequenas escalas), com  $\lambda \ll l_h \rightarrow k\eta \gg 1$  a equação [3.157] torna-se

$$\delta_\gamma'' + \frac{1}{3} \delta_\gamma = 0, \quad (3.162)$$

e admite a solução oscilatória

$$\delta_\gamma \propto e^{\pm i \frac{\sqrt{3}}{3} k\eta}. \quad (3.163)$$

Assim, na era de radiação flutuações em pequenas escalas na componente relativista oscilam como as ondas de som. Como resultado,  $\langle \delta_\gamma \rangle \simeq 0$  em escalas bem abaixo do horizonte. Em outras palavras, o fluido radiativo deverá ter uma distribuição suave em pequenas escalas.

Note-se que na era de radiação a transição do modo crescente para os modos de oscilação ocorrem em  $\lambda \sim l_h$ , o que implica que, antes da igualdade radiação-matéria o papel do comprimento de Jeans é desempenhado pelo horizonte.

### 3.2.5 Sistema de duas componentes interagindo

Nesta parte em particular, iremos analisar sobre um modelo que tem duas componentes: matéria escura (subíndice M) e energia escura (subíndice X), que interagem via uma interação não gravitacional<sup>14</sup>. Esta seção será utilizada quando cobrirmos o análise perturbativo do modelo scaling.

Considerando um sistema de duas componentes que é caracterizado por um tensor de energia momentum total

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (3.164)$$

onde  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$  e  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ . A quantidade  $u^\mu$  denota a quadrivelocidade total do substrato cósmico. A dinâmica do fluido total é dada por os balanços

$$-u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = \rho_{,\sigma} u^\sigma + \Theta(\rho + p) = 0 \quad (3.165)$$

e

$$h^\sigma_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = (\rho + p) \dot{u}^\sigma + p_{,\mu} h^{\sigma\mu} = 0. \quad (3.166)$$

Agora vamos assumir uma divisão de  $T_{\mu\nu}$  em uma componente de matéria escura e uma componente de energia escura,

$$T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_X^{\mu\nu}, \quad (3.167)$$

com ( $A = M, X$ )

$$T_A^{\mu\nu} = \rho_A u_A^\mu u_A^\nu + p_A h_A^{\mu\nu}, \quad h_A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u_A^\mu u_A^\nu. \quad (3.168)$$

Uma interação entre as componentes pode ser covariantemente caracterizada por

$$T_M^{\mu\nu}_{;\nu} = Q^\mu, \quad T_X^{\mu\nu}_{;\nu} = -Q^\mu. \quad (3.169)$$

Então, as equações de balanço de energia separadas são

$$-u_{M\mu} T_M^{\mu\nu}_{;\nu} = \rho_{M,\sigma} u_M^\sigma + \Theta_M(\rho_M + p_M) = -u_{M\sigma} Q^\sigma \quad (3.170)$$

e

$$-u_{X\mu} T_X^{\mu\nu}_{;\nu} = \rho_{X,\sigma} u_X^\sigma + \Theta_X(\rho_X + p_X) = u_{X\sigma} Q^\sigma. \quad (3.171)$$

<sup>14</sup>Para nosso estudo nos seguintes capítulos, temos um um modelo fenomenológico, onde estabelecemos que a interação de ambas componentes é do tipo não gravitacional, mas não aprofundamos no tipo de interação.

Em geral, cada componente tem sua própria quadrivelocidade, com  $g_{\mu\nu}u_A^\mu u_A^\nu = -1$ . As quantidades  $\Theta_A$  são definidas como  $\Theta_A = u_{A;\sigma}^\sigma$ .

Por outro lado, temos os balanços do momento

$$h_{M\mu}^\alpha T_M^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho_M + p_M) \dot{u}_M^\sigma + p_{M,\mu} h_M^{\sigma\mu} = h_{M\mu}^\sigma Q^\mu \quad (3.172)$$

e

$$h_{X\mu}^\sigma T_X^{\mu\nu}{}_{;\nu} = (\rho_X + p_X) \dot{u}_X^\sigma + p_{X,\mu} h_X^{\sigma\mu} = -h_{X\mu}^\sigma Q^\mu, \quad (3.173)$$

onde  $\dot{u}_A^\sigma \equiv u_{A;\lambda}^\sigma u_A^\lambda$ . O termo fonte  $Q^\mu$  é a transferência de energia-momento entre a matéria escura e a energia escura. Este último pode ser decomposto, como uma parte proporcional e outra perpendicular ao quadrivelocidade total de acordo com

$$Q^\mu = u^\mu Q + \bar{Q}^\mu, \quad (3.174)$$

onde  $Q = -u_\mu Q^\mu$  e  $\bar{Q}^\mu = h_{\sigma\mu}^\mu Q^\sigma$ , com  $u_\mu \bar{Q}^\mu = 0$ . A seção 4.1 da Ref.(33), mostra que o termo de interação é dado por

$$Q^\mu = (Q, \vec{0}). \quad (3.175)$$

---

# Capítulo 4

## MODELO SCALING

### 4.1 Introdução

Nosso Universo parece ser feito de cerca de dois terços de algo que é agora chamado de energia escura e de um terço de principalmente matéria escura. Usualmente, estas componentes são consideradas como componentes independentes do substrato cósmico. Dado que não conhecemos a natureza da energia escura, nem da matéria escura, não se pode excluir que existe uma interação entre eles. Tal situação é ainda mais geral em comparação com o caso sem interação.

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar a dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico de um modelo no qual a matéria escura e energia escura interagem de tal forma que a razão das densidade de energia de ambas componentes obedece uma lei de potência no fator de escala. Vamos explorar as consequências de tal interação para o problema de coincidência.

Vários aspectos da dinâmica do fundo deste modelo foram estudados até agora e foram confrontados com os dados observacionais [(8), (9), (10), (41), (42), (43)]. Neste capítulo se volta a estudar a dinâmica do fundo deste modelo, a partir de varias amostras de Supernovas do tipo Ia, e assim colocamos restrições observacionais sobre os parâmetros  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  deste modelo.

## 4.2 O problema da coincidência cósmica

No modelo  $\Lambda$ CDM, a matéria escura e a energia escura decaem com a expansão em taxas diferentes, ou seja utilizando as equações [2.55] e [2.57] vemos

$$\frac{\rho_M}{\rho_\Lambda} = \frac{\Omega_{M_0}}{\Omega_{\Lambda_0}} a^{-3}, \quad (4.1)$$

onde segundo os dados observacionais (1), esta razão é de fato da ordem 1 para o Universo atual. No entanto, a dependência do fator de escala indica que este fato só foi alcançado para valores do fator de escala próximos ao atual.

Então, surge a questão: "Porque as densidades de energia da matéria escura e a energia escura são da mesma ordem hoje?". Em outras palavras, "De onde a relação  $(\rho_M/\rho_X)_0 = O(1)$  vem?". Este é, em essência o "Problema da Coincidência"(44), onde lembramos que o subíndice zero significa valores no presente.

O problema de coincidência pode ser aliviado admitindo-se uma interação entre a matéria escura e a energia escura. Neste caso a interação tem que ser a adequada de tal forma que a razão das densidades das componentes escuras obedeça a relação introduzida por Dalal (8) (o qual foi a motivação de nosso trabalho) e que para o fundo homogêneo e isotrópico pode ser escrita como

$$r = \frac{\rho_M}{\rho_X} = r_0 a^{-\xi}, \quad (4.2)$$

onde  $a$  é o fator de escala da métrica de Robertson-Walker,  $r_0$  é o valor presente da razão entre as densidades de energia e  $\xi$  é um parâmetro constante.

Aqui  $\xi$  é considerado como uma nova variável, a qual indica a severidade do problema de coincidência. Para uma equação de estado  $p_X = -\rho_X$  da componente de energia escura, um valor de  $\xi = 3$  equivale ao modelo  $\Lambda$ CDM. Um valor de  $\xi = 0$  representa uma razão estacionária  $\rho_M/\rho_X = const.$  Assim, qualquer solução com um parâmetro escalando de  $0 < \xi < 3$  torna o problema de coincidência menos severo.

### 4.3 Dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico

Em geral podemos considerar un Universo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), tal que sua densidade de energia total consiste de radiação, matéria bariônica, matéria escura com pressão desprezível e energia escura

$$\rho = \rho_R + \rho_B + \rho_M + \rho_X. \quad (4.3)$$

As correspondentes pressões são

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R, \quad p_B \ll \rho_B, \quad p_M \ll \rho_M, \quad p_X = \omega\rho_X. \quad (4.4)$$

Da equação [2.30], e considerando que só temos uma interação no setor escuro, as componentes de radiação e matéria bariônica se conservam separadamente, com isto, as equações de balanço para essas componentes são

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = 0, \quad (4.5)$$

$$\dot{\rho}_B + 3H\rho_B = 0. \quad (4.6)$$

As componentes de matéria escura (M) e energia escura (X) são supostas a compartilhar um acoplamento de modo que suas densidades de energia obedecem os balanços dadas pelas equações [3.170] e [3.171], as quais para o fundo homogêneo e isotrópico e considerando [3.175], se reduzem a

$$\dot{\rho}_M + 3H\rho_M = Q, \quad (4.7)$$

e

$$\dot{\rho}_X + 3H(1 + \omega)\rho_X = -Q, \quad (4.8)$$

respectivamente, onde  $\omega \equiv \frac{p_X}{\rho_X}$  é o parâmetro da equação de estado da energia escura e  $Q$  é o valor de fundo do termo geral de fonte, o qual mede a força de interação.

Da equação [4.5] a radiação evolui com o fator de escala como

$$\rho_R = \rho_{R_0} a^{-4}, \quad (4.9)$$

e da equação [4.6] a matéria bariônica evolui com o fator de escala como

$$\rho_B = \rho_{B_0} a^{-3}. \quad (4.10)$$

Nós estamos interessados em soluções com o comportamento de escala para as duas componentes escuras dada por [4.2]. Então, combinando o ansatz  $r = r_0 a^{-\xi} \Rightarrow \dot{r} = -\xi H r$  com os balanços [4.7] e [4.8] produzimos

$$\frac{Q}{3H\rho_M} = -\left(\frac{\xi}{3} + \omega\right) \frac{\rho_X}{\rho} = -\frac{\frac{\xi}{3} + \omega}{1+r} = -\frac{\frac{\xi}{3} + \omega}{r_0 a^{-\xi} + 1}, \quad (4.11)$$

ou, em termos do redshift,

$$\frac{Q}{3H\rho_M} = -\frac{\frac{\xi}{3} + \omega}{1 + r_0 (1+z)^\xi}. \quad (4.12)$$

Estas relações determinam a interação que é necessária para gerar a dinâmica com  $r = r_0 a^{-\xi}$ . Neste modelo fenomenológico, a cosmologia padrão sem interação entre energia escura e matéria escura é caracterizado por  $\xi + 3\omega = 0$ , correspondendo a  $Q = 0$ , assim  $\xi + 3\omega \neq 0$ , onde  $Q \neq 0$ , denota uma cosmologia não-padrão.

Além disso,  $\xi + 3\omega > 0$  corresponde a  $Q < 0$ , indicando que a energia é transferida de matéria escura para energia escura. Por outro lado,  $\xi + 3\omega < 0$  corresponde a  $Q > 0$ , onde se tem que a energia é transferida de energia escura para matéria escura.

Para um  $\omega = cte$  e substituindo [4.11] em [4.7] obtemos que a densidade de energia da matéria é

$$\rho_M = \rho_{M_0} a^{-3} \left( \frac{r_0 + a^\xi}{r_0 + 1} \right)^{-1 - \frac{3\omega}{\xi}}. \quad (4.13)$$

Usando a relação do fator de escala com o redshift [2.15], a equação anterior pode ser escrita como

$$\rho_M = \rho_{M_0} [1+z]^{3(1+\omega)+\xi} \left[ \frac{1+r_0(1+z)^\xi}{1+r} \right]^{-1 - \frac{3\omega}{\xi}}. \quad (4.14)$$

Agora como

$$\frac{\rho_M}{\rho_X} = r_0 a^{-\xi} \Rightarrow \rho_X = \frac{\rho_M}{r_0 a^{-\xi}},$$

e usando [4.13], temos a expressão para a densidade da energia escura

$$\rho_X = \frac{\rho_{M_0}}{r_0} a^{-3} a^\xi \left( \frac{a^\xi + r_0}{1+r_0} \right)^{-\left(1 + \frac{3\omega}{\xi}\right)}. \quad (4.15)$$

De [4.13] e [4.15], obtemos a soma a densidades de energia da matéria escura e da energia escura

$$\rho_M + \rho_X = \rho_{M_0} \frac{1+r_0}{r_0} a^{-3(1+\omega)} \left( \frac{1+r_0 a^{-\xi}}{1+r_0} \right)^{-\frac{3\omega}{\xi}}. \quad (4.16)$$

Com a evolução das componentes dadas pelas equações [4.9], [4.10] e [4.16], e restringindo-nos a um universo com seções espacialmente planas a equação de Friedmann pode ser escrita como (45)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2 \left[ \Omega_{M_0} \frac{1+r_0}{r_0} a^{-3(1+\omega)} \left( \frac{1+r_0 a^{-\xi}}{1+r_0} \right)^{-\frac{3\omega}{\xi}} + \Omega_{B_0} a^{-3} + \Omega_{R_0} a^{-4} \right], \quad (4.17)$$

onde temos introduzido os parâmetros de densidade sem dimensões:  $\Omega_{M_0} = \frac{\rho_{M_0}}{\rho_{c_0}}$ ,  $\Omega_{X_0} = \frac{\rho_{X_0}}{\rho_{c_0}}$ ,  $\Omega_{B_0} = \frac{\rho_{B_0}}{\rho_{c_0}}$  e  $\Omega_{R_0} = \frac{\rho_{R_0}}{\rho_{c_0}}$ , onde  $\rho_{c_0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  é a densidade crítica hoje.

Para nosso trabalho, nós vamos considerar só duas componentes, que atualmente são dinamicamente as mais relevantes: matéria escura e energia escura, as quais estão interagindo, assim que negligenciaremos tanto a componente bariônica como a radiação. Com isso temos agora  $\Omega_{M_0} + \Omega_{X_0} = 1$ , então a taxa de Hubble ficaria

$$H = H_0 a^{-\frac{3}{2}(1+\omega)} \left( \frac{1+r_0 a^{-\xi}}{1+r_0} \right)^{-\frac{3\omega}{2\xi}}, \quad (4.18)$$

ou em termos do redshift

$$H = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \left( \frac{1+r_0(1+z)^\xi}{1+r_0} \right)^{-\frac{3\omega}{2\xi}}. \quad (4.19)$$

Considerando  $r_0 = \frac{\Omega_{M_0}}{\Omega_{X_0}}$ , o parâmetro de Hubble pode ser reescrito como

$$H^2 = H_0^2 a^{-3} (\Omega_{M_0} + (1 - \Omega_{M_0}) a^\xi)^{-\frac{3\omega}{\xi}}. \quad (4.20)$$

Na figura [4.1] ilustramos a situação em relação ao problema da coincidência, onde nós comparamos o comportamento de  $\Omega_M = 8\pi G \rho_M / (3H^2)$  e  $\Omega_x = 8\pi G \rho_x / (3H^2)$  para o modelo  $\Lambda$ CDM e nosso modelo scaling, onde usamos os valores dos parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  da tabela [4.5]<sup>1</sup> usando a amostra Union 2.1, e também para o modelo de interação estudado na Ref.(9) com a mesma forma para o parâmetro de Hubble que nosso modelo, mas neste último foram utilizados os dados de Supernovas da amostra Constitution (397 dados de supernovas do tipo Ia), para o qual obtiveram os seguintes valores para os parâmetros:  $\Omega_{M_0} = 0.29$ ,  $\omega = -1.01$  e  $\xi = 3.16^2$ . A figura [4.1] mostra que quando nosso modelo é testado com a amostra Union 2.1 (fixando  $\omega = -1$ ) é indistinguível do modelo  $\Lambda$ CDM (testado com a mesma amostra), já que a igualdade de ambas componentes ocorre quase no mesmo

<sup>1</sup>Até aqui temos calculado a expressão para o parâmetro de Hubble que depende de  $\Omega_{M_0}$ ,  $\omega$ ,  $\xi$  e  $h$ , mas para a simplicidade da análise do nível perturbativo fixamos  $\omega = -1$ , então para fazer um análise conjunto da parte de teste com Supernovas do nível de fundo com a parte perturbativa temos que fixar  $\omega = -1$  também no parâmetro de Hubble, pelo qual só ficamos com três parâmetros  $\Omega_{M_0}$ ,  $\xi$  e  $h$ .

<sup>2</sup>Temos que ter em conta que aqueles valores para os parâmetros foram obtidos quando se fez um análise do modelo só com dados de Supernovas da amostra Constitution (397 dados de supernovas do tipo Ia).

tempo para nosso modelo e o modelo  $\Lambda$ CDM. Mas quando comparado ao modelo estudado na Ref.(9) (testado com a amostra Constitution), a igualdade de ambas componentes ocorre mais cedo no tempo.

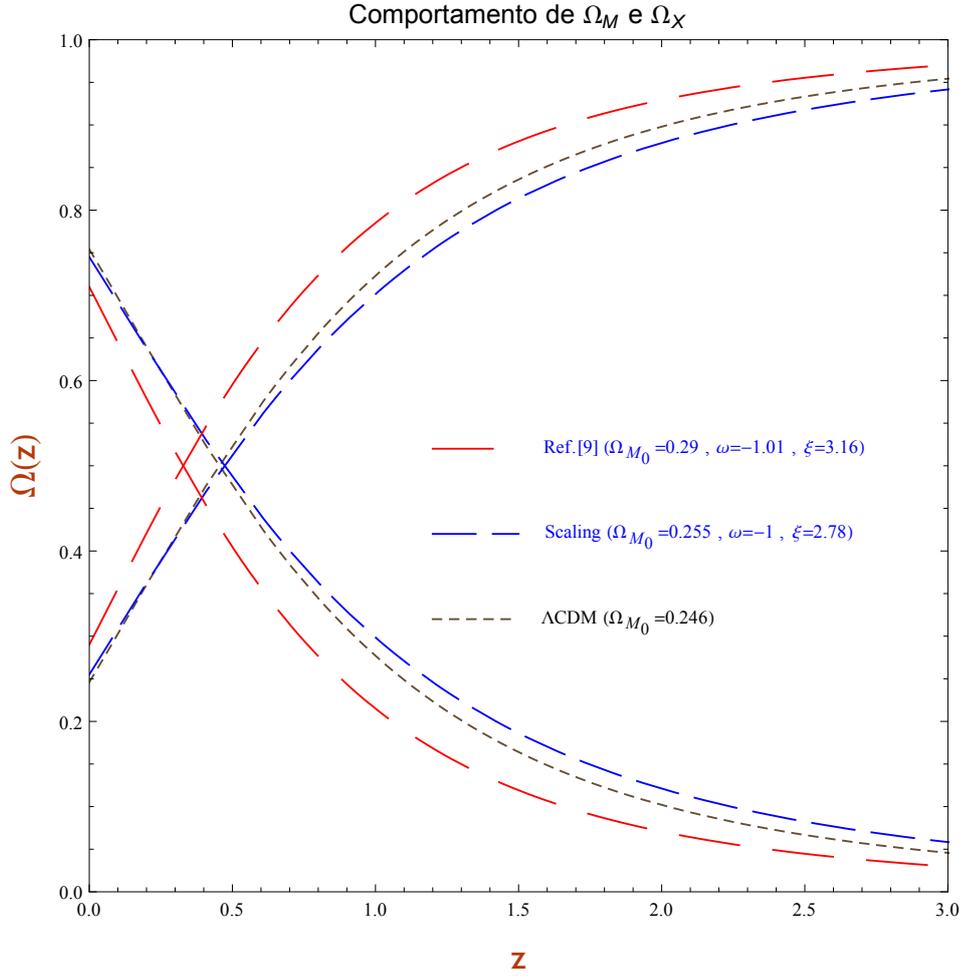


Figura 4.1: Dependência do redshift das contribuições fracionárias  $\Omega_M = 8\pi G\rho_M/(3H^2)$  e  $\Omega_X = 8\pi G\rho_X/(3H^2)$ , para os modelos scaling e  $\Lambda$ CDM (testados com os dados da amostra Union 2.1), e Ref.(9) (testado com os dados de 397 supernovas da amostra Constitution).

Via a seguinte relação

$$a \frac{H'}{H} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega}{r_0 a^{-\xi} + 1}, \quad (4.21)$$

onde  $H' = \frac{dH}{da}$ , o parâmetro de desaceleração definido em [2.50] fica

$$q(a) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\omega}{r_0 a^{-\xi} + 1}, \quad (4.22)$$

onde está última equação pode ser escrita como

$$q(z) = -1 + \frac{3\Omega_{M_0}(1+z)^\xi + 3(1-\Omega_{M_0})(\omega+1)}{2[\Omega_{M_0}(1+z)^\xi + (1-\Omega_{M_0})]}, \quad (4.23)$$

e para  $z = 0$  obtemos o fator de desaceleração hoje em termos dos parâmetros de densidade e equação

de estado

$$q_0 = -1 + \frac{3\Omega_{M_0} + 3(1 - \Omega_{M_0})(\omega + 1)}{2}. \quad (4.24)$$

Esta última expressão é independente do valor obtido para  $\xi$ .

Na figura [4.2], apresentamos o parâmetro de desaceleração  $q(z)$  restringido ao conjunto de parâmetros obtido para o modelo  $\Lambda$ CDM e nosso modelo scaling testados com a amostra Union 2.1 e também para o mesmo modelo estudado na Ref.(9), mas este último testado com a amostra Constitution. A região sombreada mostra a dispersão em  $1\sigma$  de nível de confiança do parâmetro de desaceleração para nosso modelo. Além disso as curvas para o parâmetro de desaceleração do  $\Lambda$ CDM e Ref.(9) ficam dentro de  $1\sigma$  de nível de confiança de nosso modelo.

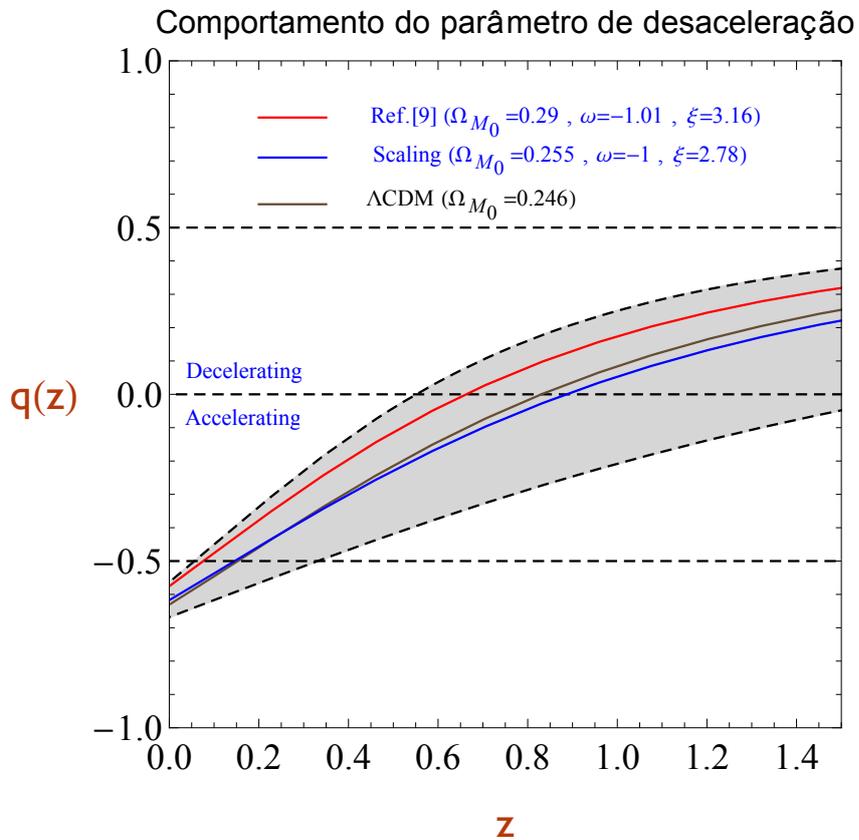


Figura 4.2: Parâmetro de desaceleração para os modelos scaling,  $\Lambda$ CDM (testados com os dados da amostra Union 2.1) e Ref.(9) (testado com os dados de 397 supernovas da amostra Constitution).

Para o caso especial  $p_X = -\rho_X$  em [3.171], temos (no fundo)

$$T_X^{ik} = -\rho_X g^{ik} \quad \text{e} \quad \dot{\rho}_X = -Q, \quad (4.25)$$

equivalente a um termo cosmológico decaindo (33).

## 4.4 A análise de Supernovas Ia

As supernovas do tipo IA são objetos luminosos com um brilho extremamente conhecido, intenso e uniforme, o que permite que sejam usadas como velas padrão. Atualmente, sua importância para a cosmologia é de grande valor tanto que levou ao prêmio Nobel (46), podendo ser utilizada para a seleção de parâmetros e modelos cosmológicos [(10), (33), (36), (47)].

Em geral, para um objeto luminoso, cujo fluxo de radiação emitida  $f$  é conhecido, define-se a magnitude bolométrica aparente da seguinte forma

$$m = -2.5 \log(f) + C, \quad (4.26)$$

onde  $C$  é uma constante que determina a escala de medida da magnitude aparente. A relação anterior pode ser descrita usando a definição da distância de luminosidade [2.17]

$$m = -2.5 \log\left(\frac{L}{4\pi d_L^2}\right) + C. \quad (4.27)$$

Dessa forma, utilizando o desenvolvimento anterior define-se como a magnitude bolométrica absoluta o valor da magnitude aparente caso a distância do objeto até o observador fosse de  $10pc$

$$M = -2.5 \log\left[\frac{L}{4\pi(10pc)^2}\right] + C. \quad (4.28)$$

Observacionalmente é conveniente introduzir o módulo de distância teórico, dado pela diferença entre as magnitudes bolométricas aparente e absoluta. Explicitando a diferença entre as equações [4.27] e [4.28], temos

$$\mu^{teo} = 5 \log\left(\frac{d_L}{10pc}\right). \quad (4.29)$$

Como temos interesse no estudo em escalas cosmológicas, e considerando que  $10pc = 10^{-5}Mpc$ , temos:

$$\mu^{teo} = 5 \log\left(\frac{d_L}{10^{-5}Mpc}\right) = 5 \log\left(\frac{d_L}{1Mpc}\right) + 25. \quad (4.30)$$

Para um universo plano ( $k=0$ ), temos que a distância de luminosidade<sup>3</sup> é

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (4.31)$$

<sup>3</sup>A pesar que estamos trabalhando com  $c = 1$ , temos que colocar o valor de  $c$  na distância de luminosidade para quando o modelo seja testado com amostras de Supernovas, se trabalhe nas unidades corretas.

onde  $E \equiv \frac{H}{H_0}$ .

De [4.31] em [4.30], temos:

$$\mu^{teo} = 5 \log \left( (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) + 5 \log \left( \frac{cH_0^{-1}}{1Mpc} \right) + 25, \quad (4.32)$$

com:  $c = 3 \times 10^5 km s^{-1}$  e  $H_0 = 100 h \frac{km s^{-1}}{Mpc}$ , onde  $h$  é uma quantidade adimensional, então:  $cH_0^{-1} = 3000 \frac{Mpc}{h}$ .

Em [4.32]

$$\mu^{teo} = 5 \log \left( (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) + 5 \log \left( \frac{3000}{h} \right) + 25, \quad (4.33)$$

$$\mu^{teo} = 5 \log \left( (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) + 42.38 - 5 \log(h). \quad (4.34)$$

Para nosso caso, por exemplo, temos 3 parâmetros livres  $\Omega_{M_0}$ ,  $\xi$  e  $h$  (fixando  $\omega = -1$ ) e queremos estudar a distribuição de probabilidades de apenas 2 deles  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$ , sem preocupar-nos com o terceiro, reduzindo o tempo computacional.

Um caso típico na cosmologia é a marginalização sobre o parâmetro  $h$  quando estudamos dados de supernovas. Já que este parâmetro é fixado nos tipos de calibradores que usaremos, pelo qual quando o conjunto de parâmetros que melhor ajusta o modelo aos dados é obtido,  $h$  vai tender ao valor fixado pelos calibradores.

Aqui descrevemos uma forma de ter uma marginalização sobre  $h$ , a qual pode também ser encontrada em [(10), (48)].

$$\mu^{teo} = \underbrace{42.38 - 5 \log(h)}_{\mu_0} + \underbrace{5 \log \left[ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]}_{\bar{\mu}^{teo}}, \quad (4.35)$$

$$\mu^{teo} = \mu_0 + \bar{\mu}^{teo}. \quad (4.36)$$

O método para encontrar o melhor ajuste é feito construindo uma função  $\chi^2$  dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \mu_i^{teo})^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.37)$$

De [4.36] em [4.37], temos

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}_i^{teo} - \mu_0)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}_i^{teo})^2 - 2\mu_0(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}_i^{teo}) + \mu_0^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.38)$$

Aqui vamos definir as seguintes quantidades

$$A = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}_i^{teo})^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.39)$$

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}_i^{teo})}{\sigma_i^2}, \quad (4.40)$$

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (4.41)$$

De [4.39], [4.40] e [4.41] em [4.38], resultando

$$\chi^2 = A - 2\mu_0 B + C\mu_0^2. \quad (4.42)$$

Considerando a equação [4.42], e fazendo igual a zero a derivada com respeito a  $\mu_0$ , já que  $\mu_0$  contém a quantidade adimensional  $h$  da constante de Hubble  $H_0$

$$\frac{d\chi^2}{d\mu_0} = -2B + 2C\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_0 = \frac{B}{C}. \quad (4.43)$$

De [4.43] em [4.42]

$$\bar{\chi}^2 = A - \frac{B^2}{C}. \quad (4.44)$$

Então o teste com Supernovas será feito utilizando dados de módulos de distância das amostras definidas abaixo. A partir dos dados observacionais será aplicada a estatística Bayesiana para a seleção de parâmetros a partir de uma função definida em [4.44]

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\mu_i^{obs} - \bar{\mu}^{teo}(z_i)]^2}{\sigma_{SNi}^2} - \frac{\left[ \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i^{obs} - \bar{\mu}^{teo}(z_i))}{\sigma_{SNi}^2} \right]^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{SNi}^2}}, \quad (4.45)$$

onde  $\bar{\mu}^{teo}$  é definido na equação [4.35] como

$$\bar{\mu}^{teo} = 5 \log \left[ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (4.46)$$

Em cada amostra deve estar contido, para cada uma de suas  $N$  Supernovas, os seguintes dados: seu módulo de distância  $\mu^{obs}$ , o erro em sua medida  $\sigma_{SNi}$ , e seu parâmetro de desvio para o vermelho  $z_i$ . Desta forma, com os valores de  $z_i$ , o módulo de distância previsto teoricamente pode ser obtido através de [4.46].

Neste caso, uma vez que o número de dados é extenso, a análise estatística permite que seja inferido quais são os valores preferidos para os parâmetros cosmológicos através da minimização da função  $\chi^2_{SN}$  (49). Após um processo de marginalização, será feita ainda uma análise da função de verossimilhança para encontrar o valor individual de melhor ajuste para cada parâmetro, a qual é definida mediante a função densidade de probabilidade, conhecida como PDF (da suas iniciais em inglês Probability Density Function)

$$P = A \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right), \quad (4.47)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização.

Nesta seção colocamos restrições observacionais sobre os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  deste modelo. Em (9), a expressão de  $H$  dado por [4.18] tinha sido investigado usando o conjunto de dados do Constitution (397 dados de supernovas do tipo Ia)<sup>4</sup>. Agora, neste trabalho usamos as seguintes amostras, que contém dados de supernovas: *a*) SDSS, *b*) Constitution e *c*) Union 2.1.

No entanto, as medidas reais de luminosidade não contemplam todo o espectro eletromagnético, o que faz com que seja necessário uma calibração dos dados observacionais.

Neste trabalho serão utilizados dados calibrados com dois calibradores comuns na literatura: Multi-color Light Curve Shapes (MLCS2k2) (50) e Spectral Adaptive Lightcurve Template (SALT II) [(51), (52)].

### 4.3.1 SDSS

O primeiro conjunto de dados a ser considerado é o resultado do projeto Sloan Digital Sky Survey (SDSS) que tem catalogados 288 dados até o ano 2008. A análise desta amostra será feita utilizando dois ajustadores de curva de luz para testar diferenças sistemáticas, aqueles ajustadores ou calibradores são MLCS2k2 e SALT II.

**MLCS2k2:** A figura [4.3] ilustra os dados da amostra SDSS calibrados com o filtro MLCS2k2 confrontados com a previsão teórica do módulo de distância obtido através da equação [4.46] com os valores de melhor ajuste para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  dados na tabela [4.1].

Seguindo a Ref.(53), a análise estatística para a seleção de parâmetros deve incluir um erro sistemático  $\sigma_{sist} = 0,16$  para os dados de módulos de distância da amostra. A minimização

<sup>4</sup>No trabalho (9) colocam restrições observacionais sobre os parâmetros  $(\Omega_{M_0}, \omega, \xi)$ . Em nosso caso também estudamos a teoria perturbativa relativista deste modelo, onde fixamos  $\omega = -1$ , então para fazer um análise conjunto do nível de fundo com o nível perturbativo relativista, necessariamente temos que fixar neste capítulo  $\omega = -1$  para o fundo homogêneo e isotrópico.

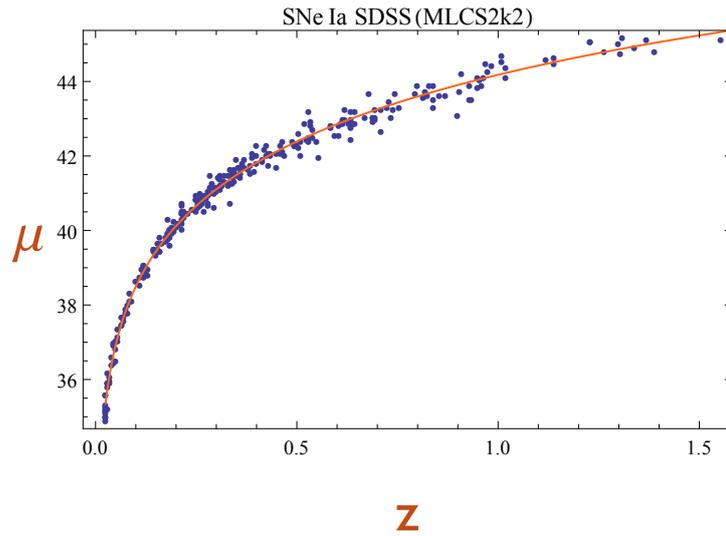


Figura 4.3: Dados da amostra SDSS calibrados com MLCS2k2

da quantidade [4.45] com os dados da amostra SDSS (MLCS2k2), nos dão os seguintes valores para os parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que melhor se ajustam aos dados de Supernovas do SDSS com o filtro MLCS2k2  $\Omega_{M_0} = 0.393^{+0.0407+0.0840+0.1300}_{-0.0383-0.0744-0.1082}$  e  $\xi = 3.12^{+0.7678+1.6453+2.6752}_{-0.6886-1.3218-1.9191}$ .

A figura [4.4] mostra o plano  $\xi - \Omega_{M_0}$ , com níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  os valores para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  que melhor se ajustam aos dados.

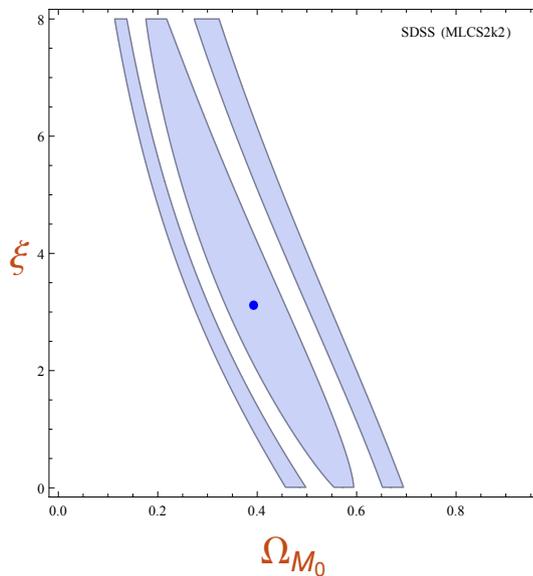


Figura 4.4: Curvas de contorno a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para Supernovas do SDSS(MLCS2k2)

Utilizando o processo de marginalização aliado à equação [4.47], pode-se ainda inferir qual é o valor preferido para cada um dos parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  individualmente. Os valores preferidos encontrados para o modelo são  $\Omega_{M_0} = 0.362$  e  $\xi = 3.06$ , e estão ilustrados graficamente na figura [4.5].

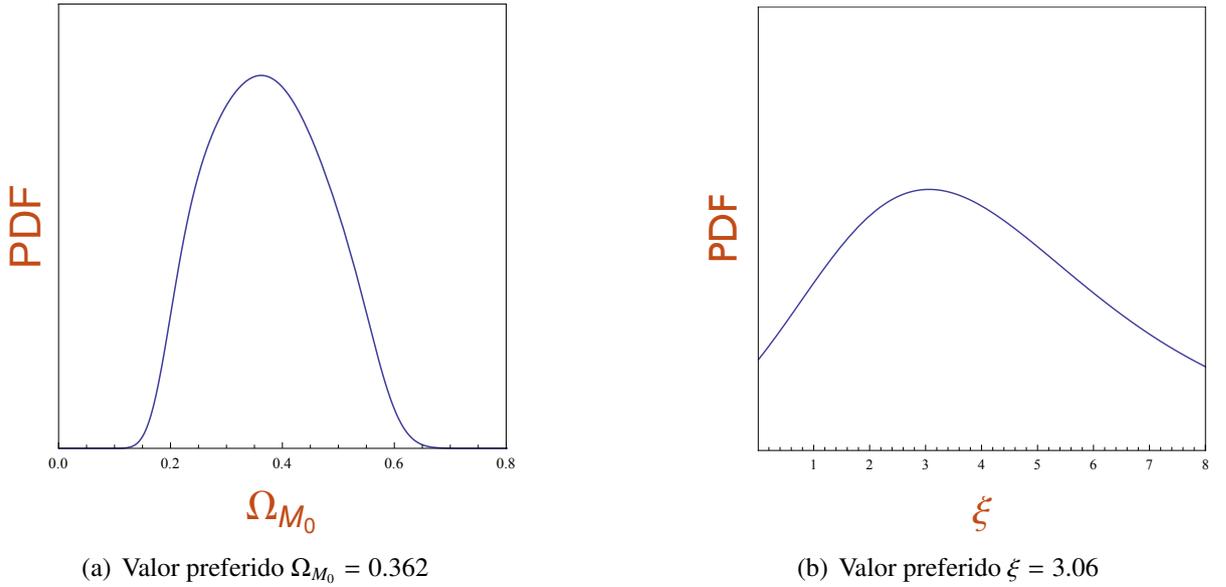


Figura 4.5: **Figura esquerda:** Valor preferido de  $\Omega_{M_0}$  para amostra SDSS(MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de  $\xi$  para amostra SDSS(MLCS2k2).

Nós calculamos os valores para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $h$  do modelo  $\Lambda$ CDM com a mesma amostra SDSS (MLCS2k2), e estabelecemos uma comparação com os resultados obtidos para os parâmetros do modelo scaling na tabela [4.1], onde também se mostra os resultados para a função  $\chi^2_\nu$ , denominada  $\chi^2$  reduzido, a qual é definida como a razão entre o valor mínimo da função  $\chi^2_{min}$  pelo número de graus de liberdade  $\nu$ :  $\chi^2_\nu = \chi^2_{min}/\nu$ , onde o número de graus de liberdade do modelo é definido como a diferença entre o número de dados observacionais utilizados e o número de parâmetros livres do modelo.

SNIa SDSS (MLCS2k2)				
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$h$	$\xi$	$\chi^2_\nu$
$\Lambda$ CDM	$0.399^{+0.0232}_{-0.0226}$	$0.639^{+0.0037}_{-0.0037}$	3	0.839
SCALING	$0.393^{+0.0407}_{-0.0383}$		$3.12^{+0.7678}_{-0.6886}$	0.839

Tabela 4.1: Resultados da análise com Supernovas do SDSS (MLCS2k2) para os modelos  $\Lambda$ CDM e scaling

**SALT II:** Agora vamos continuar com a mesma amostra de Supernovas, mas agora os dados estão calibrados com o filtro SALT II. A figura [4.6] ilustra os dados da amostra SDSS calibrados com o filtro SALT II, os quais foram confrontados com o módulo de distância através da equação [4.46], utilizando justamente os melhores valores dos parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  que ajustam bem o modelo com os dados, os quais são dados na tabela [4.2].

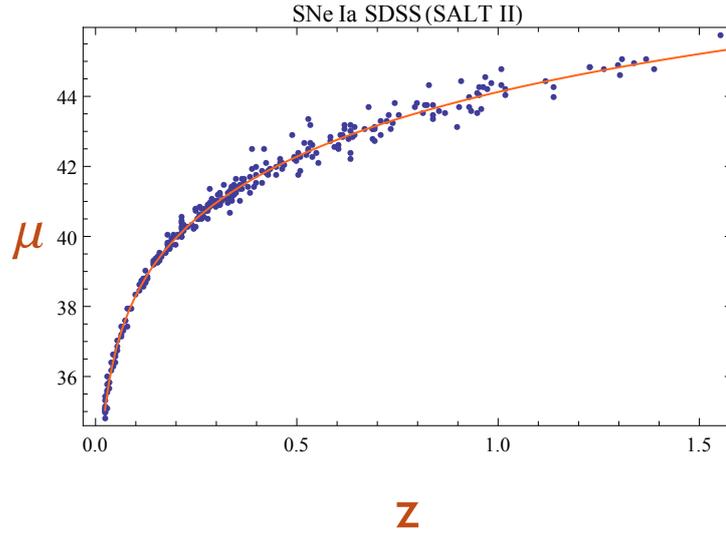


Figura 4.6: Dados da amostra SDSS calibrados com SALT II

Seguindo a Ref.(53), agora neste tipo de filtro vamos incluir um erro sistemático  $\sigma_{sist} = 0,14$  para a análise estatística para os dados de módulos de distância da amostra. A minimização de [4.45] com os dados da amostra SDSS (SALT II), dão os seguintes valores para os parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que melhor se ajustam aos dados de Supernovas do SDSS com o filtro SALT II  $\Omega_{M_0} = 0.243^{+0.0305+0.0633+0.0983}_{-0.0285-0.0550-0.0780}$  e  $\xi = 3.64^{+0.6539+1.3569+2.1262}_{-0.6196-1.2190-1.8128}$ . A figura [4.7] mostra o plano  $\xi - \Omega_{M_0}$ , com níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  os valores para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  que melhor se ajustam aos dados.

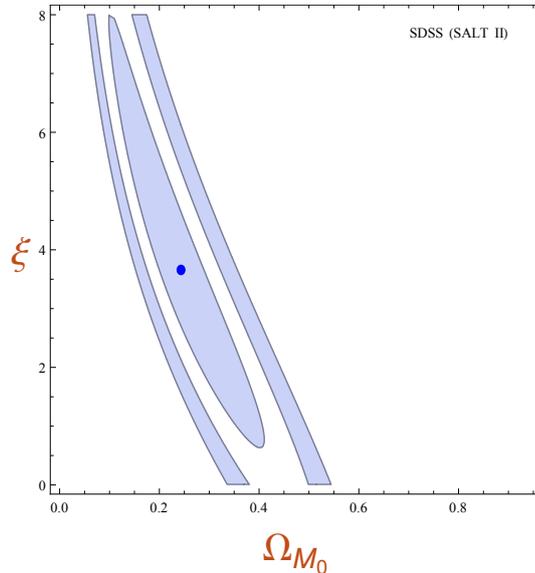


Figura 4.7: Curvas de contorno a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para Supernovas do SDSS(SALT II)

Utilizando o processo de marginalização novamente encontramos os valores preferidos para os parâmetros  $\Omega_{M_0} = 0.230$  e  $\xi = 3.29$ , que são mostrados na figura [4.8].

Apresentamos a tabela [4.2] onde estão os resultados obtidos para os parâmetros quando o

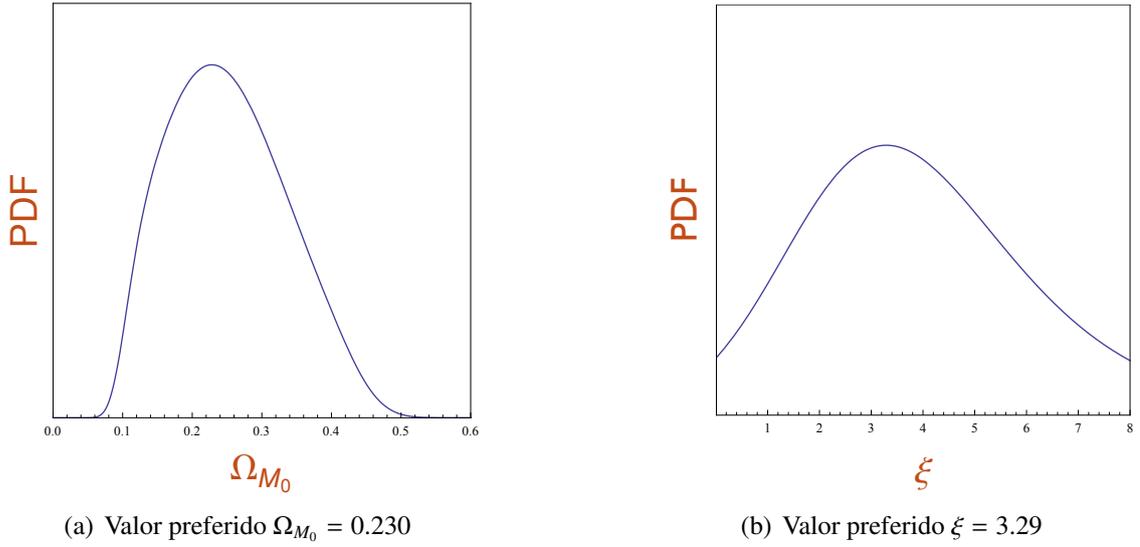


Figura 4.8: **Figura esquerda:** Valor preferido de  $\Omega_{M_0}$  para amostra SDSS(SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de  $\xi$  para amostra SDSS(SALT II).

modelo  $\Lambda$ CDM e o modelo scaling são testados com os dados de Supernovas da amostra SDSS(SALTII).

SNIa SDSS (SALT II)				
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$h$	$\xi$	$\chi^2_v$
$\Lambda$ CDM	$0.273^{+0.0193}_{-0.0188}$	$0.702^{+0.0039}_{-0.0039}$	3	0.862
SCALING	$0.243^{+0.0305}_{-0.0285}$		$3.64^{+0.6539}_{-0.6196}$	0.862

Tabela 4.2: Resultados da análise com Supernovas do SDSS (SALT II) para os modelos  $\Lambda$ CDM e scaling

### 4.3.2 Constitution

Continuamos fazendo uso dos dados de Supernovas para testar nosso modelo scaling e o modelo  $\Lambda$ CDM, mas agora utilizamos a amostra Constitution, onde utilizaremos os seguintes dois ajustadores de curva de luz MLCS2k2 e SALT II, e assim ter os dados calibrados.

**MLCS2k2:** Aqui temos que os dados de Supernovas da amostra Constitution os quais estão calibrados com o ajustador MLCS2k2, que se encontra na referência (54)<sup>5</sup>. A figura [4.9] ilustra os dados da amostra Constitution calibrados com o ajustador MLCS2k2, confrontados com

<sup>5</sup>Para esta amostra temos 372 dados de supernovas, os quais estão contidos na tabela MLCS17 da referência (54) que correspondem a  $R_v = 1, 7$ .

o módulo de distância através da equação [4.46] com os valores que se obtiveram para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  que melhor ajustam o modelo scaling com os dados, os quais são dados na tabela [4.3].

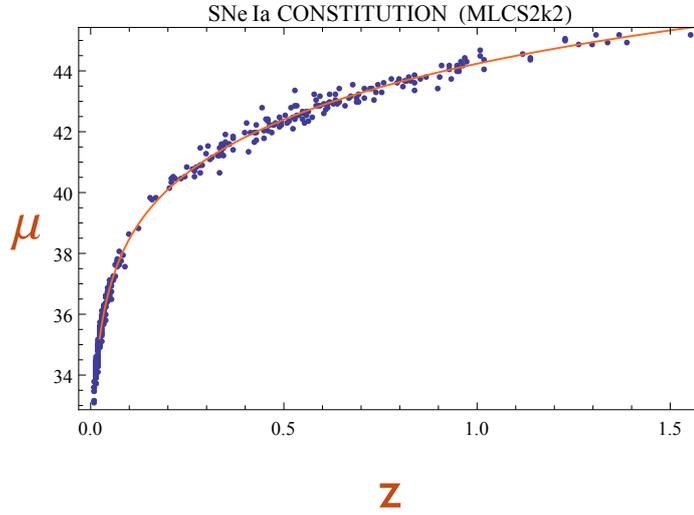


Figura 4.9: Dados da amostra Constitution calibrados com MLCS2k2

Seguindo a referência (54), a análise estatística tendo em conta esta amostra inclui um erro sistemático  $\sigma_{sist} = 0,078$  para os dados de módulos de distância da amostra. A minimização da equação [4.45] para poder encontrar o conjunto de parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que melhor ajustam o modelo scaling aos dados da amostra Constitution (MLCS2k2)

$$\text{s\~{a}o } \Omega_{M_0} = 0.357^{+0.0274+0.0558+0.0850}_{-0.0265-0.0522-0.0771} \text{ e } \xi = 2.30^{+0.5336+1.1004+1.7111}_{-0.5102-1.0061-1.4968}.$$

A figura [4.10] mostra as curvas de contorno com níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$ .

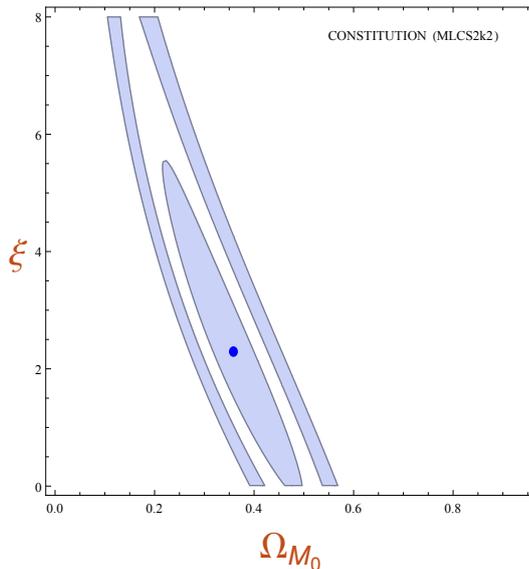


Figura 4.10: Curvas de contorno a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para Supernovas do Constitution(MLCS2k2)

Utilizando o processo de marginalização para uma análise individual dos parâmetros, mostra que para ter um melhor ajuste de nosso modelo com os dados os parâmetros tem que ser  $\Omega_{M_0} = 0.348$  e  $\xi = 2.214$ , e estão ilustrados na figura [4.11].

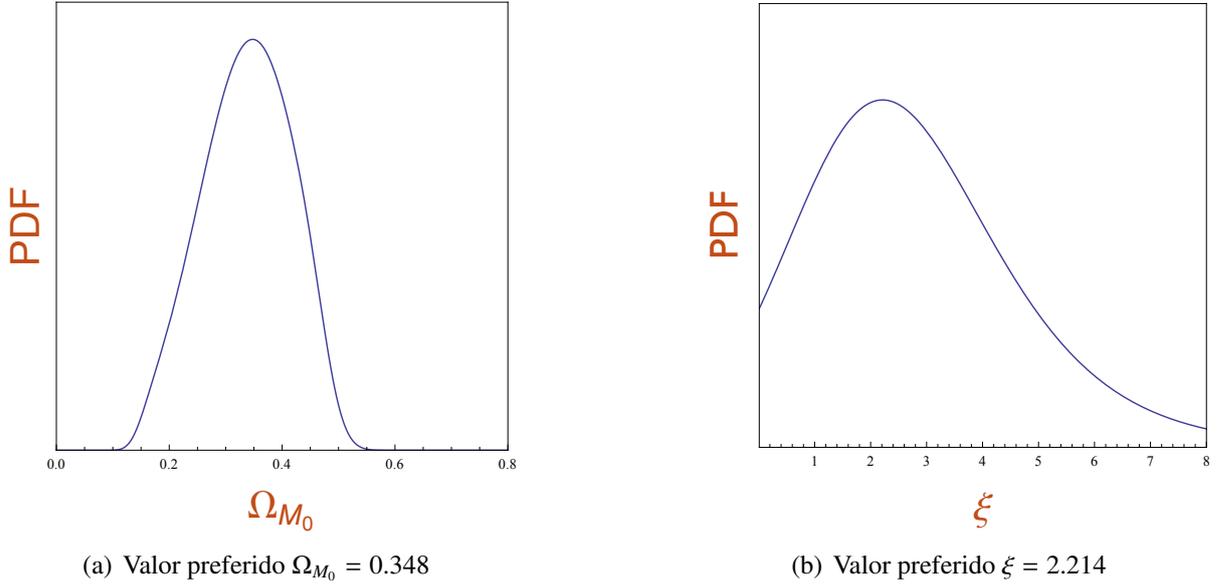


Figura 4.11: **Figura esquerda:** Valor preferido de  $\Omega_{M_0}$  para amostra CONTITUTION(MLCS2k2). **Figura direita:** Valor preferido de  $\xi$  para amostra Constitution(MLCS2k2).

Da mesma forma que fizemos com as amostras anteriores, achamos os parâmetros dos modelos  $\Lambda$ CDM e scaling, neste caso testados com a amostra Constitution (MLCS2k2), os quais são apresentados na tabela [4.3].

SNIa Constitution (MLCS2k2)				
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$h$	$\xi$	$\chi^2_v$
$\Lambda$ CDM	$0.323^{+0.0207}_{-0.0201}$	$0.650^{+0.0033}_{-0.0033}$	3	0.924
SCALING	$0.357^{+0.0274}_{-0.0265}$		$2.30^{+0.5336}_{-0.5102}$	0.924

Tabela 4.3: Resultados da análise com Supernovas do Constitution (MLCS2k2) para os modelos  $\Lambda$ CDM e scaling

**SALTII:** Agora aqui temos a mesma amostra Constitution, mas neste caso os dados estão calibrados com SALT II, os quais se encontram em (54) <sup>6</sup>. A figura [4.12] ilustra os dados da amostra Constitution cujos dados foram calibrados com SALT II, confrontados com o modulo de distância, onde usamos os valores que se obtiveram para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  dados na tabela [4.4] que melhor ajustam o modelo scaling com os dados.

<sup>6</sup>Neste caso, a amostra temos 351 dados calibrados com SALT II.

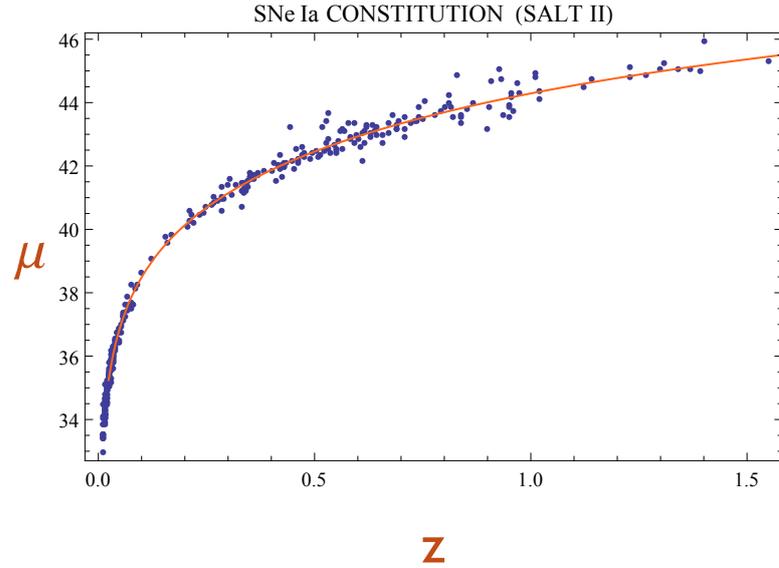


Figura 4.12: Dados da amostra Constitution calibrados com SALT II

Neste caso, temos em conta um erro sistemático igual a  $\sigma_{sist} = 0,158$  para os dados de módulos de distância da amostra. Aqui procedemos a minimizar a quantidade [4.45] para assim encontrar o conjunto de parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que melhor ajustam o modelo scaling com os dados de Constitution (SALT II), os valores são  $\Omega_{M_0} = 0.230^{+0.0303+0.0628+0.0977}_{-0.0382-0.0543-0.0785}$  e  $\xi = 4.16^{+0.7586+1.5842+2.4990}_{-0.7103-1.3902-2.0582}$ . A figura [4.13] mostra as curvas de contorno com níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$ .

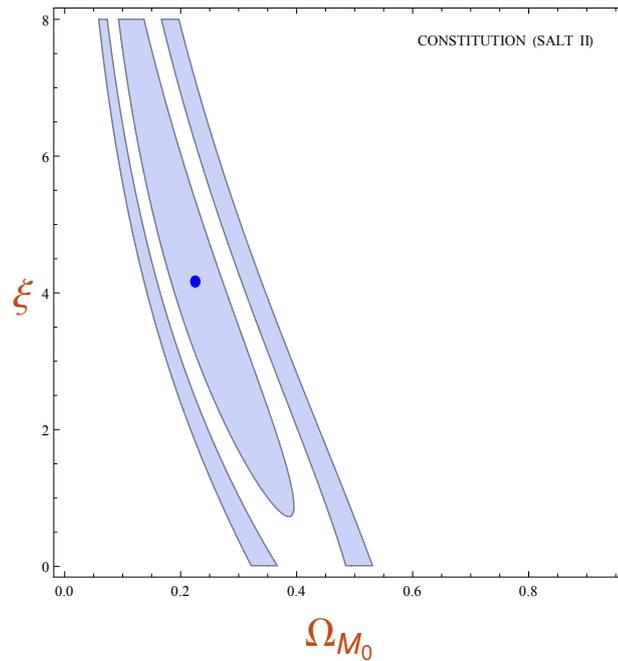


Figura 4.13: Curvas de contorno a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para Supernovas do Constitution(SALT II)

Fazendo um análise individual para cada parâmetro mediante a marginalização encontramos que a amostra Constitution (SALT II) prediz que os valores individuais de melhor ajuste para o modelo scaling são  $\Omega_{M_0} = 0.204$  e  $\xi = 3.71$ , e estão ilustrados na figura [4.14].

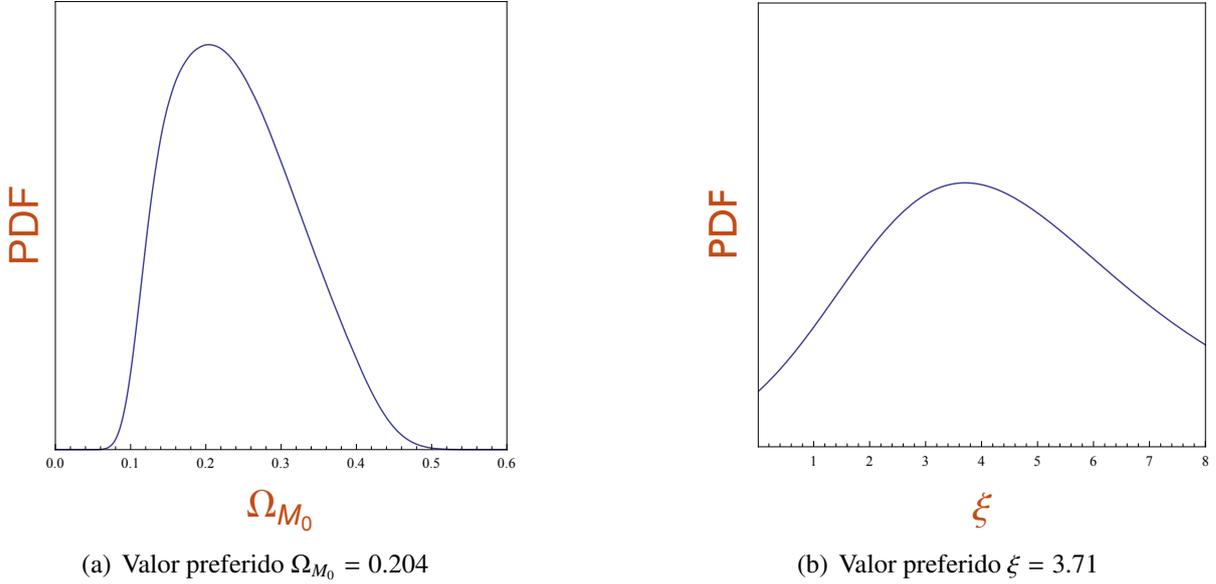


Figura 4.14: **Figura esquerda:** Valor preferido de  $\Omega_{M_0}$  para amostra CONTITUTION(SALT II). **Figura direita:** Valor preferido de  $\xi$  para amostra Constitution(SALT II).

A tabela [4.4] mostra os resultados da quantidade de cada parâmetro usando os dados de Supernovas da amostra Constitution (SALT II) para o modelo scaling e o modelo  $\Lambda$ CDM.

SNIa Constitution (SALT II)				
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$h$	$\xi$	$\chi^2_\nu$
$\Lambda$ CDM	$0.274^{+0.0239}_{-0.0231}$	$0.649^{+0.0044}_{-0.0043}$	3	0.666
SCALING	$0.230^{+0.0303}_{-0.0382}$		$4.16^{+0.7586}_{-0.7103}$	0.665

Tabela 4.4: Resultados da análise com Supernovas do Constitution (SALT II) para os modelos  $\Lambda$ CDM e scaling

### 4.3.3 UNION 2.1

Finalizamos usando o conjunto de dados de Supernovas da amostra Union 2.1 que contém 580 dados (55), os quais estão calibrados com o ajustador SALT II.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>A amostra Union 2.1 contém 580 dados calibrados com o ajustador SALT II e podem ser encontrados na página do projeto Supernova Cosmology Project obtido do ano 2011, <http://supernova.lbl.gov/>, e é uma atualização das amostras Union (56) e Union 2 (57)

A figura [4.15] ilustra os dados da amostra Union 2.1 calibrados com o ajustador SALT II, confrontados com o módulo de distância onde usamos os valores dos parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  dados na tabela [4.5] que melhor ajustam o modelo scaling com os dados segundo a amostra Union 2.1.

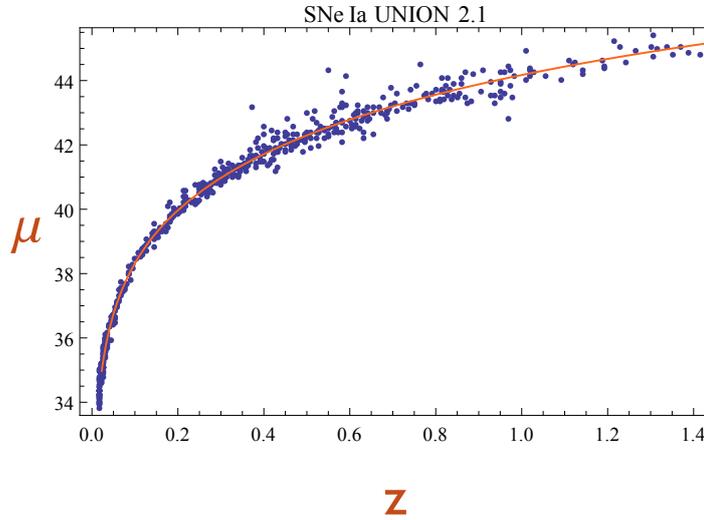


Figura 4.15: Dados da amostra UNION 2.1.

Neste conjunto de dados, as medidas de módulo de distância para cada Supernova contém seu próprio erro sistemático, que estão dados na mesma página do projeto. Minimizando a equação [4.45], obtemos o conjunto de parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que melhor ajustam o modelo scaling aos dados desta amostra, os quais são  $\Omega_{M_0} = 0.255^{+0.0357+0.0733+0.1130}_{-0.0388-0.0658-0.0960}$  e  $\xi = 2.78^{+0.8272+1.7044+2.6616}_{-0.8066-1.6269-2.5054}$ .

A figura [4.16] mostra as curvas de contorno com níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  para os parâmetros  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$ .

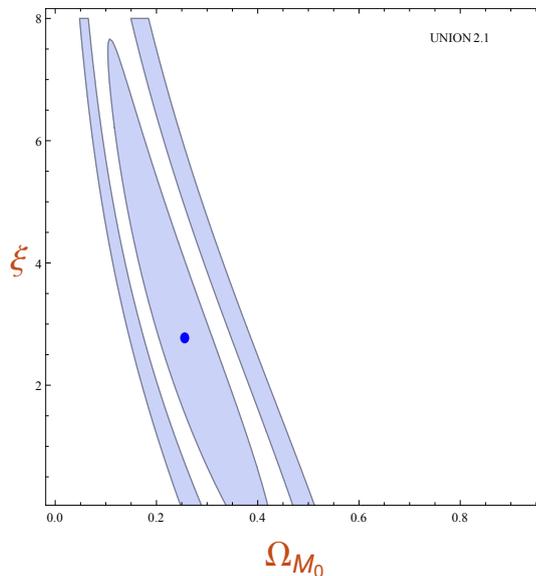


Figura 4.16: Curvas de contorno a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para Supernovas do UNION 2.1

Utilizando o processo de marginalização para assim obter os valores individuais dos parâmetros que melhor ajustam nosso modelo com os dados, onde os valores de eles são  $\Omega_{M_0} = 0.244$  e  $\xi = 2.377$ , e estão ilustrados na figura [4.17].

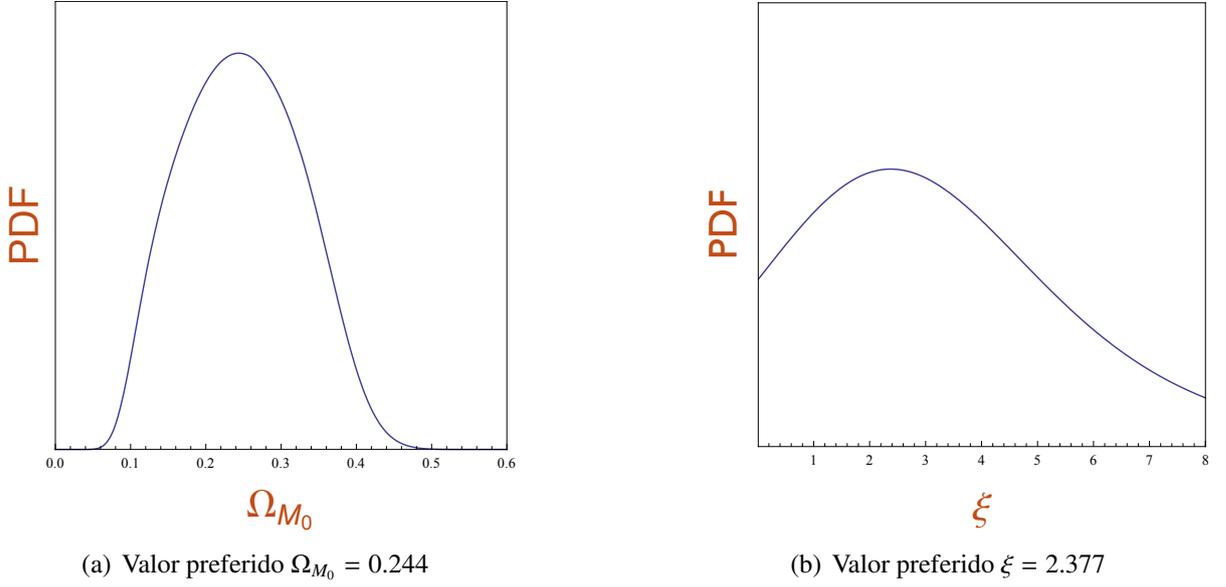


Figura 4.17: **Figura esquerda:** Valor preferido de  $\Omega_{M_0}$  para amostra UNION 2.1. **Figura direita:** Valor preferido de  $\xi$  para amostra UNION 2.1.

A tabela [4.5] contém os resultados do análise do teste do modelos scaling e  $\Lambda$ CDM com os dados da amostra Union 2.1.

SNIa UNION 2.1				
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$h$	$\xi$	$\chi^2_\nu$
$\Lambda$ CDM	$0.246^{+0.0278}_{-0.0267}$	$0.701^{+0.0041}_{-0.0040}$	3	0.370
SCALING	$0.255^{+0.0357}_{-0.0338}$		$2.78^{+0.8272}_{-0.8066}$	0.370

Tabela 4.5: Resultados da análise com Supernovas do UNION 2.1 para os modelos  $\Lambda$ CDM e scaling

# Capítulo 5

## FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS NO MODELO SCALING

Aqui pretendemos complementar o estudo de nosso modelo para um análise no nível perturbativo, tanto para um análise Newtoniano como um análise Relativista.

### 5.1 As Perturbações Newtonianas

Nós estamos interessados na dinâmica da perturbações da matéria com comprimentos de onda menor do que o tamanho do horizonte. Sob esta condição o tratamento Newtoniano é justificado.

Para um sistema de duas componentes a equação [3.35] é modificada por um termo fonte que descreve o acoplamento com a componente de energia escura.

$$\dot{\hat{\rho}}_M + \hat{\Theta}\bar{\rho}_M + \bar{\Theta}\hat{\rho}_M = \hat{Q}. \quad (5.1)$$

Em termos da perturbação fracionária  $\delta_m \equiv \frac{\hat{\rho}_m}{\bar{\rho}_m}$  a equação de balanço de energia perturbada [5.1] da componente de matéria toma a forma

$$\dot{\delta}_M + \hat{\Theta} = \frac{1}{\bar{\rho}_M} (\hat{Q} - \bar{Q}\delta_M) = \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)^\wedge. \quad (5.2)$$

Esta equação tem exatamente a mesma estrutura que sua contraparte na Relatividade Geral para  $(\omega = -1)$  [5.69] se todas as quantidades perturbadas são substituídas pelas correspondentes variáveis invariantes do calibre adaptadas ao gauge comóvel e as perturbações da pressão são desprezíveis. Devido ao fato de que o modelo Newtoniano não especifica o  $\hat{Q}$ , podemos escrever, por simplicidade,

$\hat{Q} = \beta \bar{Q} \delta_M$  onde  $\beta$  é uma constante que quantifica a relevância deste termo, então a equação [5.2] pode ser escrita como

$$\delta_M + \hat{\Theta} = -(1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \delta_M. \quad (5.3)$$

Derivando com respeito ao tempo

$$\ddot{\delta}_M + \dot{\hat{\Theta}} = -(1 - \beta) \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' \delta_M - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \dot{\delta}_M. \quad (5.4)$$

Agora, o termo de interação introduzido no balanço da energia não afeta a equação de Euler. Isso ocorre, pois supomos que as partículas produzidas devido ao seu decaimento possuem a mesma velocidade do fluido total, caso contrario um termo adicional deve ser incluído<sup>1</sup> (58). O caso mais geral vai ser considerado na seção 5.2, onde além de um acoplamento via troca de energia, também será considerado uma troca de momento.

Então, a equação de Euler perturbada em primeira ordem para a componente de matéria sem pressão é dada pela equação [3.2]<sup>2</sup>

$$\dot{\hat{\Theta}} + \frac{2}{3} \bar{\Theta} \hat{\Theta} + \Delta \hat{\phi} = 0. \quad (5.5)$$

De [5.5] em [5.4], temos

$$\ddot{\delta}_M - \frac{2}{3} \bar{\Theta} \hat{\Theta} - \Delta \hat{\phi} = -(1 - \beta) \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' \delta_M - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \dot{\delta}_M, \quad (5.6)$$

mas de [5.3] utilizando  $\hat{\Theta}$  e substituindo em [5.6], obtemos

$$\ddot{\delta}_M - \frac{2}{3} \bar{\Theta} \left[ -\delta_M - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \delta_M \right] - \Delta \hat{\phi} = -(1 - \beta) \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' \delta_M - (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \dot{\delta}_M,$$

que pode ser reagrupada como

$$\ddot{\delta}_M + H \left[ 2 + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H} \right] \dot{\delta}_M + (1 - \beta) \left[ \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' + 2H \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right] \delta_M - \Delta \hat{\phi} = 0. \quad (5.7)$$

A equação [5.7] mostra a influência da interação sobre a dinâmica perturbativa. Os coeficientes de ambos  $\delta$  e  $\dot{\delta}$  dependem do parâmetro de interação  $Q$  explicitamente. Para o caso em que  $\beta = 1$ , onde a interação não afeta a dinâmica perturbativa, o índice de Hubble é determinado essencialmente pela

<sup>1</sup>A criação de partículas modifica a equação de Euler [3.2] da seguinte forma :  $\frac{\partial v_a}{\partial t} + (v^b \nabla_b) v^a = -\Phi_{,a} + \frac{Q}{\bar{\rho}_M} (V^a - v^a)$ , onde considera-se que as partículas foram criadas com velocidade  $V^a$  (59). Então se assumimos que as partículas criadas tem a mesma velocidade como as já existentes  $V^a = v^a$ , então a equação de Euler não se modifica.

<sup>2</sup>A equação [3.2] pode ser escrita como uma equação do tipo Raychaudhuri  $\dot{\hat{\Theta}} + \frac{1}{3} \hat{\Theta}^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) = -\left( \frac{p_a}{\rho} \right)'_{,a} - \Delta \phi$  onde para o fundo homogêneo e isotrópico ou a perturbação em primeira ordem temos  $\sigma = 0$  (cisalhamento) e  $\omega = 0$  (vorticidade) e para o caso da matéria escura  $p = 0$ .

interação de acordo a equação [4.18].

A equação de Poisson [3.4] perturbada em primeira ordem, para um sistema de duas componentes é escrita como

$$\Delta\hat{\phi} = 4\pi G(\hat{\rho}_M + \hat{\rho}_X). \quad (5.8)$$

Em termos da perturbações fracionais para ambas componentes a equação anterior fica

$$\Delta\hat{\phi} = 4\pi G(\bar{\rho}_M\delta_M + \bar{\rho}_X\delta_X). \quad (5.9)$$

Introduzindo coordenadas comóveis  $q^a$  por  $x^a = aq^a$ , e procurando soluções  $\hat{\phi} \propto \exp(ik_a q^a)$ , onde  $k^a$  é o vetor de onda comóvel. Com isso a equação de Poisson [5.9] no espaço- $k$  torna-se

$$-\frac{k^2}{a^2}\hat{\phi} = 4\pi G\rho\left(\frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}}\delta_M + \frac{\bar{\rho}_X}{\bar{\rho}}\delta_X\right). \quad (5.10)$$

Considerando a equação de Friedmann para um Universo plano, a Eq.[5.10] fica

$$-\frac{k^2}{a^2}\hat{\phi} = \frac{3}{2}H^2\left(\frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}}\delta_M + \frac{\bar{\rho}_X}{\bar{\rho}}\delta_X\right). \quad (5.11)$$

Em muitos estudos sobre o crescimento das perturbações da matéria, as perturbações de energia escura são desprezados em escalas que são relevantes para a formação de estruturas. Isso corresponde fazer  $\delta_X = 0$  em [5.11], que seria justificado estritamente só com uma constante cosmológica (60). Negligenciar  $\delta_X$ , completamente, corresponde a uma equação fechada para  $\delta_M$ . Nos modelos dinâmicos de energia escura, como no presente caso, fazer  $\delta_X = 0$  seria incorreto dado o acoplamento entre as duas componentes de energia no nível do fundo (é dizer Eqs. [4.7-4.8]). Parece, portanto, razoável incluir um acoplamento, pelo menos aproximadamente, também no nível perturbativo. Desprezar esta influência poderia resultar num entendimento errado dos dados observacionais. Por outro lado, para modelos específicos, o acoplamento pode ser mostrado desprezível nas pequenas escalas. Pesquisas anteriores, que contavam com uma relação de proporcionalidade  $\delta_X = \alpha\delta_M$ , onde  $\alpha$  é uma constante [(36), (61)], mostraram ser compatíveis com as observações apenas para  $|\alpha| \ll 1$ . No entanto, há indícios de uma dependência da escala na relação entre  $\delta_X$  e  $\delta_M$ . Com base nesse resultado, nós generalizamos o ansatz anterior para

$$\delta_X = \frac{\alpha}{1 + \eta\frac{k^2}{a^2 H^2}}\delta_M, \quad (5.12)$$

onde  $\alpha$  é uma constante que descreve a influência das perturbações da energia escura.

Como

$$\lambda \propto \frac{a}{k}, \quad (5.13)$$

então para pequenas escalas (comprimento de onda  $\lambda$  muito pequeno), temos que  $k$  é muito grande

$$\Rightarrow \frac{k^2}{a^2 H^2} \gg 1 \Rightarrow \delta_X \ll \delta_M. \quad (5.14)$$

Enquanto que para grandes escalas (comprimento de onda  $\lambda$  muito grande), temos que  $k$  é muito pequeno e temos

$$\Rightarrow \frac{k^2}{a^2 H^2} \approx 1 \Rightarrow \delta_X \approx \frac{\alpha}{1 + \eta} \delta_M, \quad (5.15)$$

que justamente é o limite de aplicabilidade da aproximação Newtoniana. Em [5.11] usando  $\frac{\bar{\rho}_X}{\bar{\rho}} = 1 - \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}}$

$$-\frac{k^2}{a^2} \hat{\phi} = \frac{3}{2} H^2 K \delta_M, \quad (5.16)$$

onde

$$K = \left( 1 - \frac{\alpha}{1 + \eta \frac{k^2}{a^2 H^2}} \right) \frac{\bar{\rho}_M}{\bar{\rho}} + \frac{\alpha}{1 + \eta \frac{k^2}{a^2 H^2}}. \quad (5.17)$$

Calculamos as perturbações da matéria escura que, pelo parâmetro  $\alpha$ , são acoplados as flutuações da energia escura. Então de [5.17] em [5.7]

$$\ddot{\delta}_M + H \left[ 2 + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H} \right] \dot{\delta}_M + \left[ (1 - \beta) \left[ \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' + 2H \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right] - \frac{3}{2} H^2 K \right] \delta_M = 0. \quad (5.18)$$

Tomando a derivada de [4.11], considerando  $\omega = cte$ , temos

$$\left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' = \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \left[ \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{r}}{1+r} \right]. \quad (5.19)$$

Com ajuda da equação de aceleração  $\dot{H} = -4\pi G[\bar{\rho}_M + (1 + \omega)\bar{\rho}_X]$  encontramos

$$\frac{\dot{H}}{H} = -\frac{3H}{2} \left[ \frac{r}{1+r} + \frac{1+\omega}{1+r} \right]. \quad (5.20)$$

Da relação  $\dot{r} = -\xi Hr$ , temos

$$\frac{\dot{r}}{1+r} = -3H \frac{\xi}{3} \frac{r}{1+r}. \quad (5.21)$$

De [5.20-5.21] em [5.19]

$$\left( \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} \right)' + 2H \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M} = 3HL \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M}, \quad (5.22)$$

onde

$$L = \frac{2}{3} + \frac{r\left(\frac{\xi}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(1 + \omega)}{1 + r}. \quad (5.23)$$

Com isto [5.18] fica

$$\ddot{\delta}_M + H \left[ 2 + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H} \right] \dot{\delta}_M - \frac{3}{2} H^2 \left[ K - 2(1 - \beta) L \frac{\bar{Q}}{H \bar{\rho}_M} \right] \delta_M = 0. \quad (5.24)$$

Esta equação reduz-se a equação [16] da Ref.(58), no caso em que a componente de energia escura é descrita por um termo cosmológico dependente do tempo, ou seja,  $Q = -\dot{\rho}_X$  e além disso  $\alpha = 0$  (não temos flutuações na energia escura),  $\beta = 0$  (sem perturbação do termo de interação).

Com  $\frac{3}{2} H^2 = 4\pi G \rho_M \frac{1+r}{r}$  a equação [5.24] pode ser escrita como

$$\ddot{\delta}_M + H \left[ 2 + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H} \right] \dot{\delta}_M - 4\pi G_{eff} \bar{\rho}_M \delta_M = 0, \quad (5.25)$$

com uma constante gravitacional efetiva

$$G_{eff} = \gamma(a) \frac{1+r}{r} G, \quad (5.26)$$

e

$$\gamma(a) = K - 2(1 - \beta) L \frac{\bar{Q}}{H \bar{\rho}_M}. \quad (5.27)$$

Nota-se que a interação também entra explicitamente no fator de "atrito" em adição a sua influência sobre o índice de Hubble. Este termo adicional no fator que multiplica  $\dot{\delta}_M$  na [5.25] desaparece só para  $\beta = 1$ .

Fazendo uma mudança para  $a$  como variável independente

$$\dot{\delta}_M = \delta'_M a H \quad e \quad \ddot{\delta}_M = a^2 H^2 \left[ \delta''_M - \frac{1}{2} \left( 1 + 3 \frac{\omega}{1+r} \right) \frac{\delta'_M}{a} \right], \quad (5.28)$$

de [5.28] em [5.25]

$$a^2 H^2 \left[ \delta''_M - \frac{1}{2} \left( 1 + 3 \frac{\omega}{1+r} \right) \frac{\delta'_M}{a} \right] + H \left[ 2 + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H} \right] \delta'_M a H - 4\pi G \gamma \bar{\rho}_M \delta_M = 0.$$

Definindo  $\mu(a)$

$$\mu(a) = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{1+r} \right) + (1 - \beta) \frac{\bar{Q}}{\bar{\rho}_M H}, \quad (5.29)$$

obtemos a equação final para as perturbações da matéria

$$\delta_M'' + \mu(a) \frac{\delta_M'}{a} - \frac{3}{2} \gamma(a) \frac{\delta_M}{a^2} = 0. \quad (5.30)$$

A equação [5.30] é a equação central para as perturbações Newtonianas.

Para o caso sem interação  $Q = 0$ , sem flutuações na energia escura  $\alpha = 0$ , com  $\omega = -1$  e com as definições seguintes

$$r = \frac{\bar{\Omega}_M}{1 - \bar{\Omega}_M}, \quad \bar{\Omega}_M = \frac{8\pi G \bar{\rho}_M}{3H^2}, \quad \bar{\Omega}_{M_0} = \frac{8\pi G \bar{\rho}_{M_0}}{3H_0^2}, \quad \bar{\Omega}_X = \frac{8\pi G \bar{\rho}_X}{3H^2}, \quad (5.31)$$

temos

$$\mu(a) = 3 \left( 1 - \frac{\bar{\Omega}_M}{2} \right) = 3 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3}}{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3} + \bar{\Omega}_X} \right), \quad (5.32)$$

e

$$\gamma(a) = \bar{\Omega}_M = \frac{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3}}{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3} + \bar{\Omega}_X}. \quad (5.33)$$

Com [5.32] e [5.33] a equação [5.30] consistentemente se reduz à equação para as perturbações da matéria escura do modelo  $\Lambda$ CDM (36).

$$\delta_M'' + 3 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3}}{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3} + \bar{\Omega}_X} \right) \frac{\delta_M'}{a} - \frac{3}{2} \left( \frac{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3}}{\bar{\Omega}_{M_0} a^{-3} + \bar{\Omega}_X} \right) \frac{\delta_M}{a^2} = 0. \quad (5.34)$$

No caso de só uma componente, ou seja  $\bar{\Omega}_X = 0$ , se recupera  $\mu = \frac{3}{2}$  e  $\gamma = 1$ , que caracteriza as perturbações em um universo de Einstein-de Sitter.

$$\delta_M'' + \frac{3}{2a} \delta_M' - \frac{3}{2a^2} \delta_M = 0. \quad (5.35)$$

Analisamos o crescimento das perturbações da matéria escura  $\delta_M$  para diferentes valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\eta$ , onde o primeiro termo de correção (o parâmetro  $\alpha$ ) descreve o acoplamento direto às flutuações de energia escura [5.12], o segundo termo de correção (o parâmetro  $\beta$ ) informa as modificações devido a magnitude da perturbação  $\hat{Q}$  e  $\eta$  estabelece uma dependência da escala.

A Fig.[5.1] mostra a dependência do crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de  $\alpha$  quando fixamos  $\beta = 0$  (não há perturbação no termo de interação),  $\eta = 0$  (não há dependência da escala na relação de  $\delta_X$  e  $\delta_M$ ) e usando os valores dos parâmetros da tabela [4.1]<sup>3</sup>. Observamos que para o crescimento de  $\delta_M$  similar ao modelo  $\Lambda$ CDM temos que  $\alpha \rightarrow 0$ . Ou seja não temos perturbação da componente de energia escura.

<sup>3</sup>De aqui em diante, todos os testes para estudar o crescimento da perturbação da matéria escura  $\delta_M$  no nível perturbativo Newtoniano serão feitos usando a tabela [4.1] onde se fixo  $\omega = -1$ .

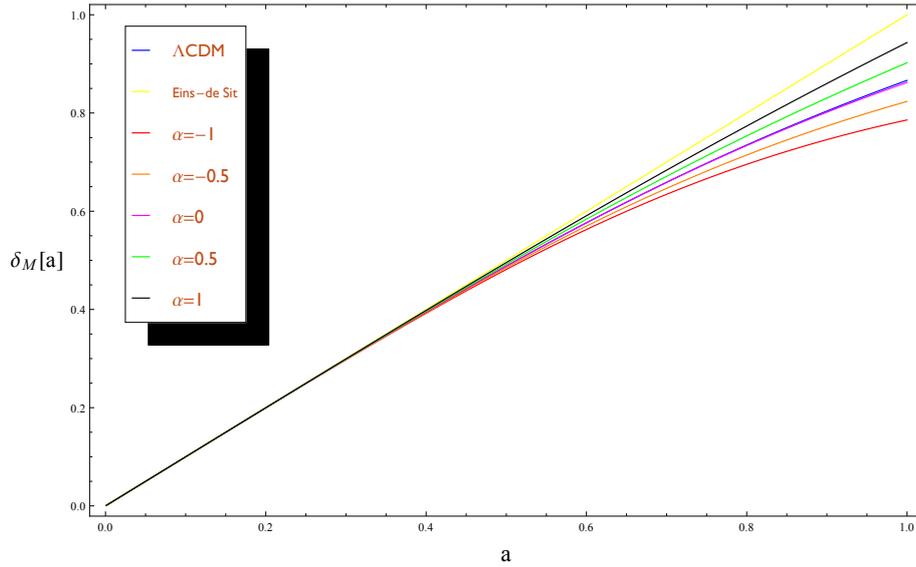


Figura 5.1: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\alpha$  fixando  $\beta = 0$  e  $\eta = 0$ .

Analisando o mesmo caso anterior, com  $\eta = 1$  (temos dependência da escala) e diferentes valores de  $k$ :  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$ , obtemos a Fig.[5.2], onde para escalas cada vez menor ( $k$  maiores, e  $\delta_X$  vai se aproximando a zero), o crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de  $\alpha$  vão aproximando ao crescimento de  $\delta_M$  para o modelo  $\Lambda$ CDM, com exceção de  $\alpha = 0$  onde logicamente não temos uma dependência da escala.

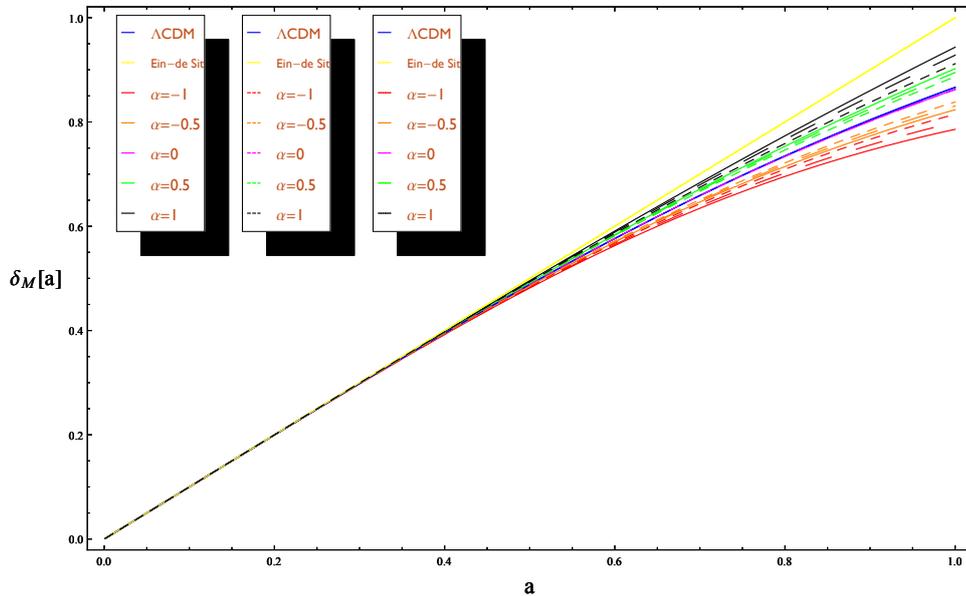


Figura 5.2: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\alpha$  fixando  $\beta = 0$  e  $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$  respectivamente.

Fixando  $\beta = 1$  (a interação não afeta a dinâmica perturbativa, mas se afeta ao fundo homogêneo e isotrópico),  $\eta = 0$  (sem dependência na escala), o crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de

$\alpha$  é mostrado na figura [5.3], onde um valor de  $\alpha \approx 0.5$  faz o crescimento de  $\delta_M$  se aproxima ao crescimento de  $\delta_M$  para o modelo  $\Lambda$ CDM.

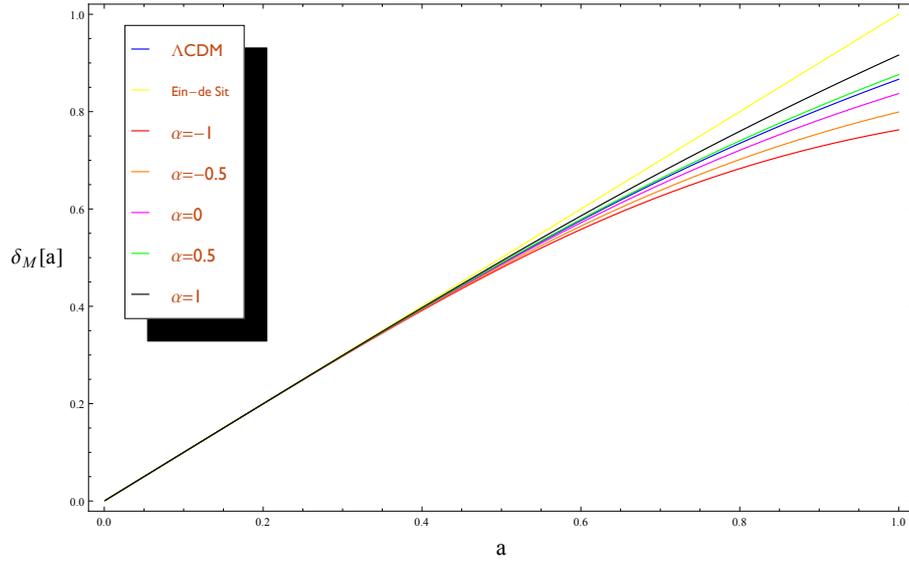


Figura 5.3: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\alpha$  fixando  $\beta = 1$  e  $\eta = 0$ .

Para  $\beta = 1$  e  $\eta = 1$ , com  $k = 1, k = 30$  e  $k = 50$ , a Fig.[5.4] mostra o crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de  $\alpha$ , onde a medida que o  $k$  aumenta (escala diminui), a curva para  $\alpha = 0.5$  fica primeiro mais perto do  $\Lambda$ CDM que para os outros valores de  $\alpha$ , e a curva para  $\alpha = 0$  não muda devido a que não tem dependência da escala.

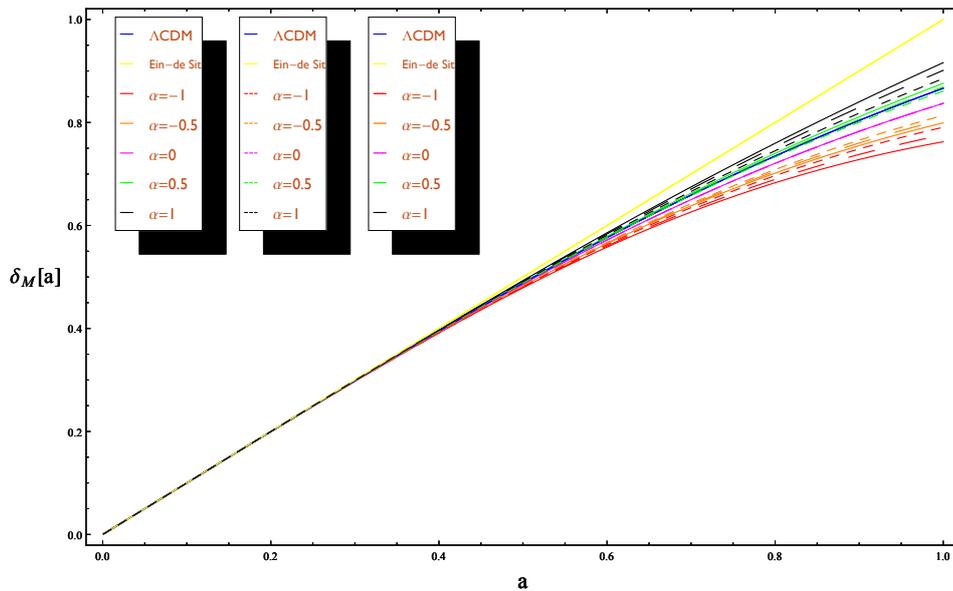


Figura 5.4: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\alpha$  fixando  $\beta = 1$  e  $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a  $k = 1, k = 30$  e  $k = 50$  respectivamente.

Na Fig.[5.5] fixamos  $\alpha = 0$  (com  $\delta_X = 0$ ) e mostramos o crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de

$\beta$ , onde o  $\delta_M$  fica semelhante ao do modelo  $\Lambda$ CDM para  $\beta$  próximo de zero, isto é quando não temos perturbação no termo de interação.

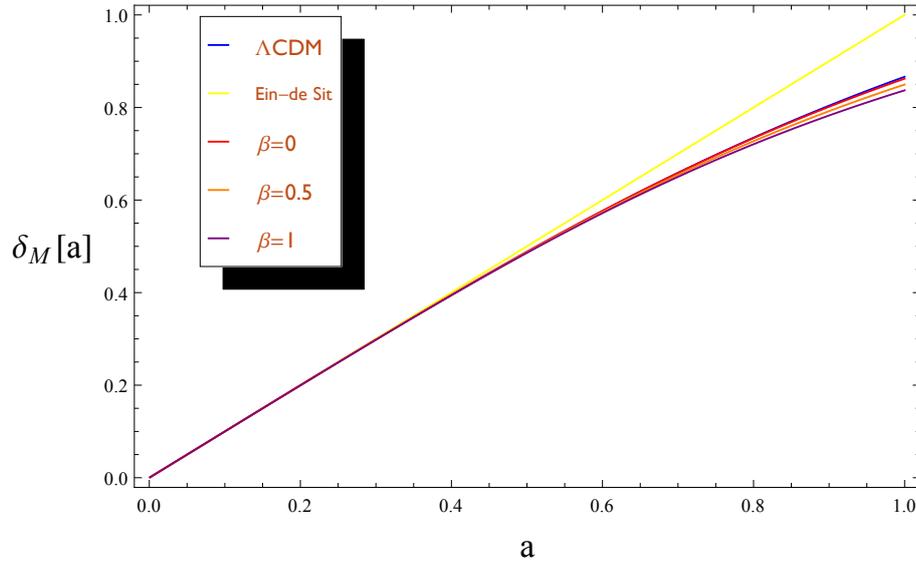


Figura 5.5: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\beta$  fixando  $\alpha = 0$  e  $\eta = 0$ .

O crescimento de  $\delta_M$  para  $\alpha = 1$  (um  $\delta_X$  proporcional ao  $\delta_M$ ),  $\eta = 0$  (sem dependência na escala) e diferentes valores de  $\beta$  na Fig.[5.6], mostram que a medida que  $\beta$  cresce  $\delta_M$  do modelo Scaling vai se aproximando ao crescimento de  $\delta_M$  do modelo  $\Lambda$ CDM.

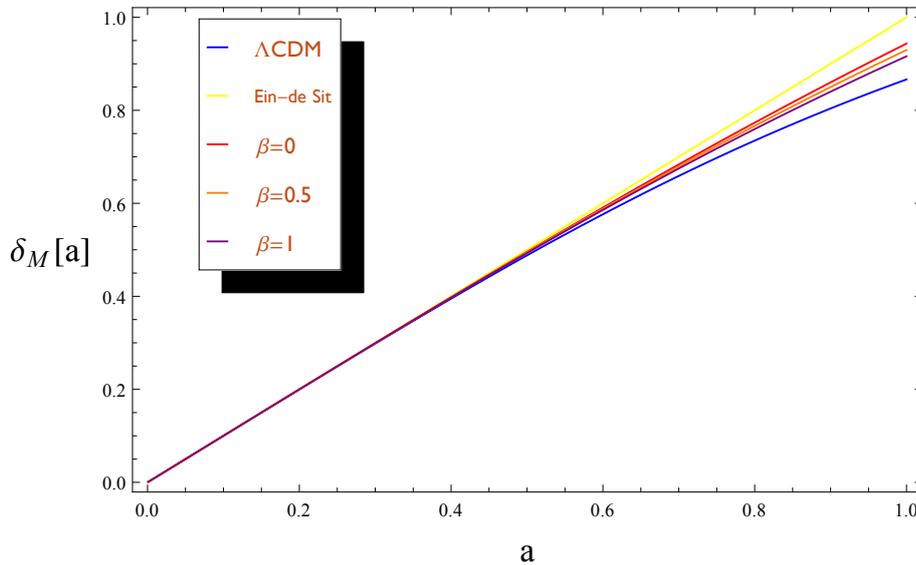


Figura 5.6: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\beta$  fixando  $\alpha = 1$  e  $\eta = 0$ .

Para o caso em que  $\alpha = 1$ ,  $\eta = 1$  e s seguintes valores para  $k$ :  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$  o crescimento de  $\delta_M$  para diferentes valores de  $\beta$  é apresentado na Fig.[5.7], onde a medida que  $\beta$  cresce e a escala aumenta,  $\delta_M$  fica semelhante ao do modelo  $\Lambda$ CDM.

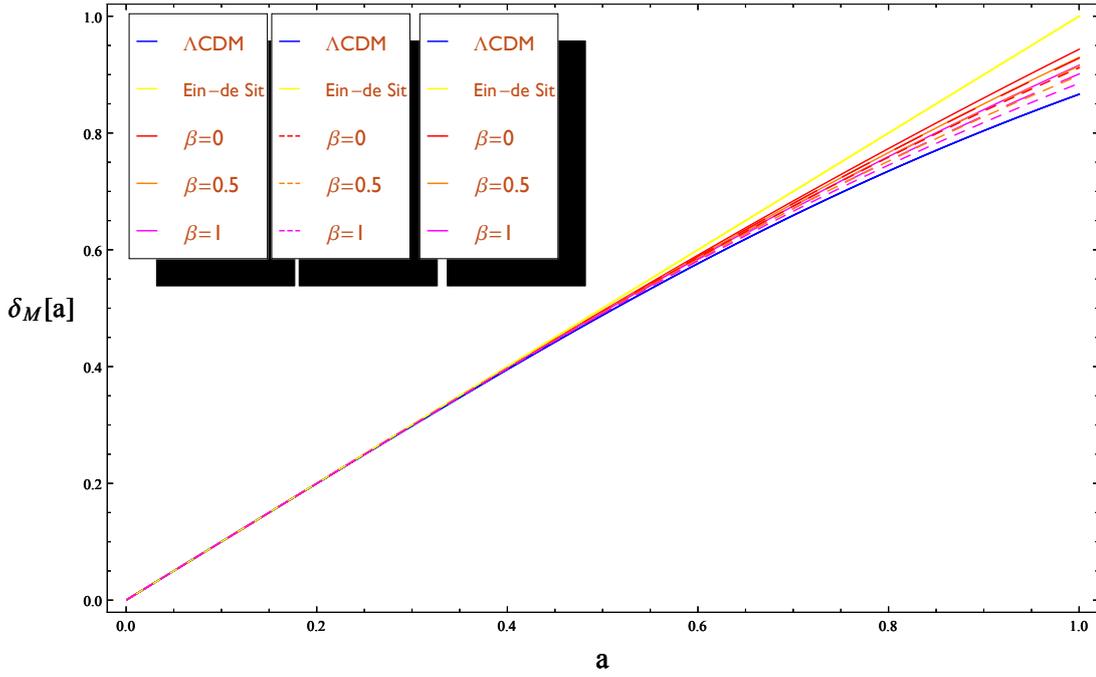


Figura 5.7: Comportamento do crescimento das perturbações da densidade de matéria  $\delta_M$  como função do fator de escala  $a$  para diferentes valores de  $\beta$  fixando  $\alpha = 1$  e  $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$  respectivamente.

Em geral, a constante gravitacional efetiva  $G_{eff}$  difere de  $G$  devido ao termo de interação. Por exemplo para  $\beta = 1$ , o segundo termo na equação [5.27] desaparece: uma interação na qual opera somente no fundo na equação [5.17] modifica a "constante" gravitacional efetiva na equação [5.26].

A "constante" gravitacional efetiva  $G_{eff}$  aproxima a  $G$  na fase inicial dominada por matéria  $a \ll 1$  ( $r \gg 1$ ) devido a que nesta fase o termo de interação é desprezível [4.11], a equação [5.17] fica  $K = 1$  e portanto na equação [5.26] temos  $G_{eff} = G$ .

A Fig.[5.8] mostra o comportamento da razão  $G_{eff}/G$  como função do fator de escala para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , pode ser apreciado no limite assintótico  $G_{eff}/G = 1$  no passado e que para valores de  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$  a razão  $G_{eff}/G = 1$  para qualquer valor de  $a$ .

A Fig.[5.9] apresenta a variação da razão  $G_{eff}/G$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com valores de  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$ , onde mostra que só para  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$  independente da escala a razão  $G_{eff}/G = 1$ , além disso a razão  $G_{eff}/G$  com  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  não tem dependência com a escala e que as outras demais combinações de  $\alpha$  e  $\beta$  mudam com a escala.

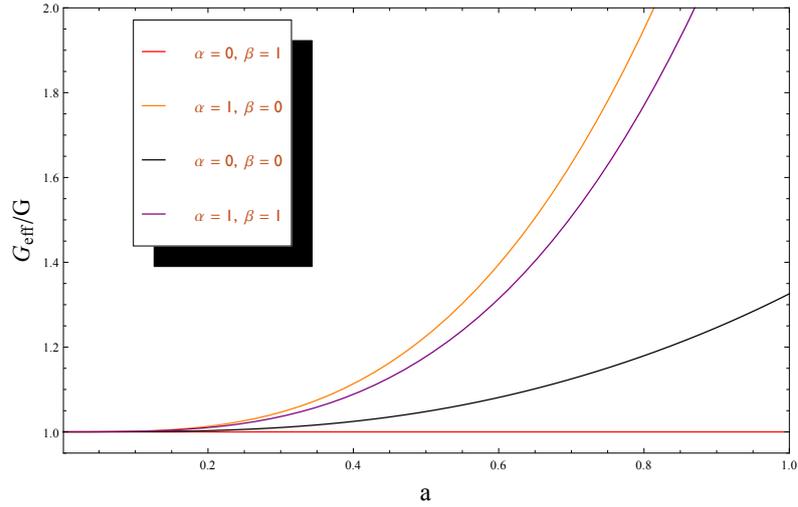


Figura 5.8: A razão  $G_{eff}/G$  como função do fator de escala para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  fixando  $\eta = 0$ .

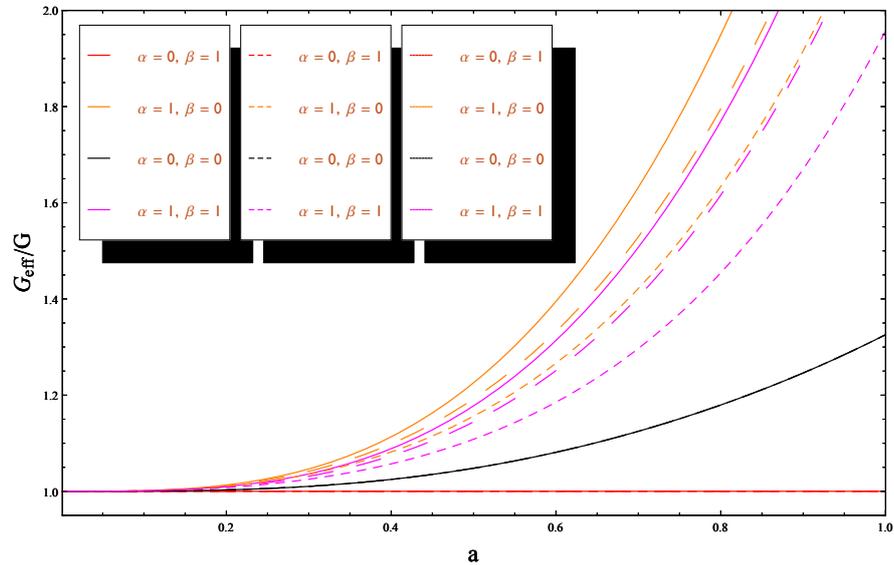


Figura 5.9: A razão  $G_{eff}/G$  como função do fator de escala para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  fixando  $\eta = 1$ , onde as três tabelas correspondem a  $k = 1$ ,  $k = 30$ , e  $k = 50$  respectivamente.

## 5.2 As Perturbações relativistas

Começamos esta seção com a introdução de um escala de comprimento  $l$  (62). A qual satisfaz a seguinte relação

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\Theta \quad \text{com} \quad \dot{l} = l_{,\sigma}u^{\sigma}. \quad (5.36)$$

Nosso objetivo é considerar uma dinâmica para o qual a razão das densidades de energia da matéria escura e a energia escura,  $r = \frac{\rho_M}{\rho_X}$  se comporte como uma lei de potência da escala de comprimento  $l$ , da forma

$$r = \frac{\rho_M}{\rho_X} = r_0 l^{-\xi}. \quad (5.37)$$

A equação anterior é uma generalização que nós propomos considerando como referência o ansatz [4.2] proposto por Dalal *et al.* (8). A equação anterior é válida tanto no fundo como no nível perturbativo.

No fundo homogêneo e isotrópico, temos  $\Theta = 3H = 3\frac{\dot{a}}{a}$ , para o qual da equação [5.36] se tem que,  $l$  torna-se o fator de escala  $a$ , e usando isto na equação [5.37], nós recuperamos [4.2].

Usando [5.36], a evolução no tempo da razão  $r$  definida na equação [5.37], resulta

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\xi}{3}\Theta. \quad (5.38)$$

A equação [5.38] vai ser fundamental em nosso estudo da teoria da dinâmica perturbativa no modelo scaling.

Para o fundo homogêneo e isotrópico podemos considerar que as quadriveloctades de cada uma das componentes do Universo são as mesmas, ou seja, assumimos  $u_M^\sigma = u_X^\sigma = u^{\sigma 4}$ , entretanto no nível perturbativo se faz necessária uma diferença entre essas quadriveloctades.

Podemos encontrar que a perturbação das quadriveloctades de cada uma das componentes devem satisfazer as relações expressas em [3.102] e [3.103]

$$\hat{u}_0 = \hat{u}^0 = \hat{u}_M^0 = \hat{u}_X^0 = \frac{1}{2}\hat{g}_{00} = -\phi, \quad (5.39)$$

$$a^2\hat{u}_A^a + a^2F_{,a} = \hat{u}_{Aa} \equiv v_{A,a}. \quad (5.40)$$

De [5.38],  $\dot{r}$  esta expressa como

$$\dot{r} = \left(\frac{\rho_M}{\rho_X}\right)^{\cdot} = \frac{\rho_M}{\rho_X} \left(\frac{\dot{\rho}_M}{\rho_M} - \frac{\dot{\rho}_X}{\rho_X}\right), \quad (5.41)$$

onde  $\dot{\rho}_M = \rho_{M,\mu}u^\mu$  e  $\dot{\rho}_X = \rho_{X,\mu}u^\mu$ , são escritas em termos da quadriveloctade do fluido total.

Para avaliar a relação [5.38] em primeira ordem, temos primeiramente que considerar os balanços de energia [3.170] e [3.171]. Lembrando que no fundo as quadriveloctades dos fluidos são iguais, as

---

<sup>4</sup>Por simplicidade se assume que as quadriveloctades de cada componente e do fluido total no fundo homogêneo e isotrópico são iguais, mas em geral podem ser diferentes (modelos chamados de "Tilted Fluid"(63)).

perturbações a primeira ordem das expressões  $\rho_{M,\sigma}u_M^\sigma$  e  $\rho_{X,\sigma}u_X^\sigma$  são

$$(\rho_{M,\sigma}u_M^\sigma)^\wedge = \hat{\rho}_{M,\sigma}u_M^\sigma + \rho_{M,\sigma}\hat{u}_M^\sigma = \hat{\rho}_M + \dot{\rho}_M\hat{u}^0, \quad (5.42)$$

e

$$(\rho_{X,\sigma}u_X^\sigma)^\wedge = \hat{\rho}_{X,\sigma}u_X^\sigma + \rho_{X,\sigma}\hat{u}_X^\sigma = \hat{\rho}_X + \dot{\rho}_X\hat{u}^0, \quad (5.43)$$

respectivamente. Isto implica que, até primeira ordem, se satisfaz as seguintes relações

$$\rho_{M,\sigma}u_M^\sigma = \rho_{M,\sigma}u^\sigma, \quad \rho_{X,\sigma}u_X^\sigma = \rho_{X,\sigma}u^\sigma. \quad (5.44)$$

Usando os balanços da energia [3.170-3.171] e as relações anteriores dadas na equação [5.44], a equação [5.38] pode ser escrita como

$$\frac{\xi}{3}\Theta = \Theta_M + \frac{u_{M\sigma}Q^\sigma}{\rho_M} + \left[ -\Theta_X(1 + \omega) + \frac{u_{X\sigma}Q^\sigma}{\rho_X} \right], \quad (5.45)$$

a qual é válida até primeira ordem. Para o fundo homogêneo e isotrópico temos que:  $\Theta_M = \Theta_X = \Theta$  e  $u_{M\sigma}Q^\sigma = u_{X\sigma}Q^\sigma = u_\sigma Q^\sigma = -Q$ , com o qual em [5.45], recuperamos [4.11].

Um resultado importante que pode ser obtido é a perturbação do escalar de expansão, introduzido na equação  $\Theta = u_{;\mu}^\mu$ , onde usando a tabela [3.1], encontramos a seguinte relação

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{a^2} (\Delta v + \Delta \chi) - 3\dot{\psi} - 3H\phi, \quad (5.46)$$

onde

$$\chi \equiv a^2 (\dot{E} - F). \quad (5.47)$$

De modo semelhante a [5.46] se tem

$$\hat{\Theta}_M = \frac{1}{a^2} (\Delta v_M + \Delta \chi) - 3\dot{\psi} - 3H\phi, \quad \hat{\Theta}_X = \frac{1}{a^2} (\Delta v_X + \Delta \chi) - 3\dot{\psi} - 3H\phi. \quad (5.48)$$

Daqui resulta que

$$\hat{\Theta}_M - \hat{\Theta} = \frac{1}{a^2} (\Delta v_M - \Delta v), \quad \hat{\Theta}_X - \hat{\Theta} = \frac{1}{a^2} (\Delta v_X - \Delta v). \quad (5.49)$$

De acordo com a estrutura de um fluido perfeito, tanto o tensor energia momento total [3.164] e os

tensores de energia momento das componentes em [3.168], e com as quadravelocidades das componentes iguais no fundo, temos que a perturbação a primeira ordem da densidade de energia e da pressão satisfazem  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_M + \hat{\rho}_X$  e  $\hat{p} = \hat{p}_M + \hat{p}_X = \hat{p}_X$ , respectivamente. Usando isto obtemos a seguinte relação

$$\hat{T}_a^0 = \hat{T}_{Ma}^0 + \hat{T}_{Xa}^0 \quad \Rightarrow \quad (\rho + p) \hat{u}_a = \rho_M \hat{u}_{Ma} + (\rho_X + p_X) \hat{u}_{Xa} . \quad (5.50)$$

Usando a definição de potenciais de velocidade [3.78] na equação [5.50], pode se obter as seguintes relações

$$v_M - v = (1 + \omega) \frac{\rho_X}{\rho + p} (v_M - v_X) , \quad v_X - v = -\frac{\rho_M}{\rho + p} (v_M - v_X) . \quad (5.51)$$

Para  $p_X = -\rho_X$  no fundo, segue-se a partir da equação [5.50] o resultado seguinte

$$p_X = -\rho_X \quad \Rightarrow \quad \rho + p = \rho_M \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{Ma} = \hat{u}_a \quad \Rightarrow \quad v_M = v . \quad (5.52)$$

Uma vez que a componente  $M$  é suposta para descrever a matéria, é evidente, a partir de [5.50], que a perturbação da velocidade da matéria  $\hat{u}_{Ma}$  coincide com a perturbação da velocidade total  $\hat{u}_a$ . Com  $u_M^n = u^n$  até primeira ordem, o balanço de energia em [3.170] (correta até primeira ordem) pode ser escrita como<sup>5</sup>

$$\rho_{M,\sigma} u^\sigma = -\Theta \rho_M - u_\sigma Q^\sigma . \quad (5.53)$$

Por outro lado, o balanço de energia total [3.165] é

$$\rho_{,\sigma} u^\sigma = -\Theta (\rho + p) . \quad (5.54)$$

Para a diferença, segue-se que

$$\dot{\rho} - \dot{\rho}_M \equiv (\rho - \rho_M)_{,\sigma} u^\sigma = u_\sigma Q^\sigma . \quad (5.55)$$

Uma vez que, pelo menos até ordem linear,  $\rho - \rho_M = \rho_X$ , a equação [5.55] é equivalente (até primeira ordem) para

$$\dot{\rho}_X \equiv \rho_{X,\sigma} u^\sigma = u_\sigma Q^\sigma . \quad (5.56)$$

Na ordem zero recuperamos [4.25]. A equação a primeira ordem é

$$\hat{\rho}_X + \dot{\rho}_X \hat{u}^0 = (u_\sigma Q^\sigma)^\wedge . \quad (5.57)$$

<sup>5</sup>A partir de aqui nesta seção é utilizado  $\omega = -1$ .

Observe que [5.57] resulta de uma combinação da conservação da energia total e do balanço de energia da matéria. Ele tem que ser consistente com o balanço da energia escura [3.171]. Em primeira ordem, o último torna-se

$$\dot{\hat{\rho}}_X + \hat{\rho}_X \hat{u}^0 = (u_{X\sigma} Q^\sigma)^\wedge . \quad (5.58)$$

Isto significa que de [5.57] e [5.58] se deduz

$$(u_{X\sigma} Q^\sigma)^\wedge = (u_\sigma Q^\sigma)^\wedge , \quad (5.59)$$

ou seja, as projeções de  $Q^\sigma$  ao longo de  $u_{X\sigma}$  e ao longo de  $u_\sigma$  coincidem. Explicitamente,

$$(u_\sigma Q^\sigma)^\wedge = (u_\sigma u^\sigma Q)^\wedge = -\hat{Q} . \quad (5.60)$$

Sob as condições [5.59] e [5.60] a relação [5.45] se torna

$$\frac{\xi}{3} \hat{\Theta} = \hat{\Theta}_M - \hat{Q} \frac{\rho}{\rho_M \rho_X} - Q \left( \frac{\rho}{\rho_M \rho_X} \right)^\wedge . \quad (5.61)$$

Resolvendo para  $\hat{Q}$ , onde é utilizada a equação [4.11], obtemos

$$\hat{Q} = - \left( \frac{\xi}{3} - 1 \right) \frac{\rho_M \rho_X}{\rho} \Theta \left[ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta} + \frac{\hat{\rho}_M}{\rho_M} + \frac{\hat{\rho}_X}{\rho_X} - \frac{\hat{\rho}}{\rho} \right] . \quad (5.62)$$

Usando a expressão [3.110] para introduzir os contrastes de densidade do fluido total  $\delta = \frac{\hat{\rho}}{\rho}$  e da matéria escura  $\delta_X = \frac{\hat{\rho}_X}{\rho_X}$ , e além disso, usando a seguinte relação  $\hat{\rho}_X = \hat{\rho} - \hat{\rho}_M$ , temos

$$\frac{\hat{\rho}_M}{\rho_M} + \frac{\hat{\rho}_X}{\rho_X} - \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \delta_M (1 - r) + r\delta . \quad (5.63)$$

Considerando [5.63], a expressão para  $\hat{Q}$  [5.62], fica

$$\hat{Q} = - \left( \frac{\xi}{3} - 1 \right) \frac{\rho_M}{1+r} \Theta \left[ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta} + \delta_M (1 - r) + r\delta \right] = Q \left[ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta} + \delta_M (1 - r) + r\delta \right] . \quad (5.64)$$

Nas equações sempre aparece a combinação  $\hat{Q} - Q\delta_M$ . Para esta combinação, encontramos

$$\hat{Q} - Q\delta_M = Q \left[ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta} - r(\delta_M - \delta) \right] . \quad (5.65)$$

De [5.65], podemos definir a perturbação da razão do termo de interação e a densidade da matéria escura

$$\left(\frac{\widehat{Q}}{\rho_M}\right) = \frac{Q}{\rho_M} \left[ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta} - r(\delta_M - \delta) \right]. \quad (5.66)$$

Com o termo fonte perturbado explicitamente conhecido, podemos estabelecer agora o conjunto básico de equações de perturbação.

O Universo como um todo é um sistema isolado, e por isso toda a análise desenvolvida na seção 3.2 para a evolução de perturbações na densidade de energia deve ser válida para o fluido total. Aqui vamos a reescrever as equações de conservação da energia e do momento para o fluido total, já que elas são necessárias para fazer o análise perturbativo de nosso modelo.

Apresentamos, logo de introduzir o contraste de densidade  $\delta = \frac{\hat{\rho}}{\rho}$ , a equação de conservação da energia do fluido total no nível perturbativo [3.113], é

$$\delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\hat{u}^0 + \hat{\Theta} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) + \Theta \left(\delta + \frac{\hat{p}}{\rho}\right) = 0. \quad (5.67)$$

Também usando as equações [3.122] e [3.123] em [3.117], encontra-se a conservação do momento do fluido total no nível perturbativo

$$\dot{v}_{,a} + \phi_{,a} = -\frac{1}{\rho_M} [\hat{p}_{X,a} + \dot{p}_X v_{,a}] \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \phi = -\frac{1}{\rho_M} [\hat{p}_X + \dot{p}_X v]. \quad (5.68)$$

A partir da equação do balanço de energia da matéria [3.170], e usando as equações [5.52], [5.60] e a definição do contraste de densidade para a matéria escura, obtemos.

$$\delta_M - \phi \left(-3H + \frac{Q}{\rho_M}\right) + \hat{\Theta} = \left(\frac{Q}{\rho_M}\right)^{\hat{}}. \quad (5.69)$$

Da mesma forma que em [3.114], é conveniente agora introduzir quantidades invariantes de calibre para descrever a dinâmica perturbativa

$$\delta^{(c)} = \delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho}v, \quad \delta_M^{(c)} = \delta_M + \frac{\dot{\rho}_M}{\rho_M}v, \quad \delta_X^{(c)} = \delta_X + \frac{\dot{\rho}_X}{\rho_X}v, \quad \hat{p}_X^{(c)} = \hat{p}_X + \dot{p}_X v \quad (5.70)$$

bem como

$$\hat{\Theta}^{(c)} = \hat{\Theta} + \hat{\Theta}v, \quad \text{e} \quad \hat{Q}^{(c)} = \hat{Q} + \hat{Q}v, \quad (5.71)$$

onde o índice  $c$  significa comóvel. Todas as grandezas têm o seu significado físico em hipersuperfícies comóvel  $v = 0$ . Já que no calibre comóvel assumem de fato o papel de densidade, pressão, escalar de

expansão, etc.

Agora, introduzindo as quantidades invariantes de calibre definidas em [5.70] e [5.71], a combinação da conservação de energia [5.67] e conservação de momento [5.68] do fluido total no nível perturbativo, é escrita como

$$\dot{\delta}^{(c)} - \Theta \frac{p}{\rho} \delta^{(c)} + \hat{\Theta}^{(c)} \left( 1 + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (5.72)$$

Além disso, usando a equação de Raychaudhuri perturbada definida em [3.134], a equação anterior vai ser escrita no espaço dos momentos, onde a partir de agora os índices  $\vec{k}$  já foram omitidos, como

$$\delta^{(c)'''} + \left[ \frac{3}{2} - \frac{15}{2} \frac{p}{\rho} + 3 \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \right] \frac{\delta^{(c)'}}{a} - \left[ \frac{3}{2} + 12 \frac{p}{\rho} - \frac{9}{2} \frac{p^2}{\rho^2} - 9 \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \right] \frac{\delta^{(c)}}{a^2} + \frac{k^2}{a^2 H^2} \frac{\hat{p}^{(c)}}{\rho a^2} = 0 \quad (5.73)$$

onde esta equação descreve as perturbações do Universo como um todo [(34), (38)].

Agora usando a definição de [5.70] em [5.68], com  $\hat{p}_X^{(c)} = c_s^2 \hat{\rho}_X^{(c)}$ , onde  $c_s$  é a velocidade do som no sistema em repouso  $v = 0$ , segue-se que

$$\dot{v} + \phi = -\frac{\hat{p}_X^{(c)}}{\rho_M} = -c_s^2 \frac{\hat{\rho}_X^{(c)}}{\rho_M} = -c_s^2 \frac{\rho_X}{\rho_M} \delta_X^{(c)}. \quad (5.74)$$

Também usando as relações definidas em [5.70-5.71] e a conservação do momento do fluido total [5.68], a equação [5.69] toma a forma

$$\dot{\delta}_M^{(c)} + \hat{\Theta}^{(c)} + \frac{\dot{\rho}_M}{\rho_M} \frac{\hat{p}_X^c}{\rho_M} = \left( \widehat{\frac{Q}{\rho_M}} \right)^{(c)}. \quad (5.75)$$

A partir da definição  $\hat{p}_X^{(c)} = c_s^2 \hat{\rho}_X^{(c)}$ , a equação anterior pode ser reescrita como

$$\dot{\delta}_M^{(c)} + \hat{\Theta}^{(c)} + c_s^2 \frac{\dot{\rho}_M}{\rho_M} \frac{\rho_X}{\rho_M} \delta_X^{(c)} = \left( \widehat{\frac{Q}{\rho_M}} \right)^{(c)}. \quad (5.76)$$

O termo do lado direito vai ser calculado usando as relações [5.70-5.71] em [5.66], resultando

$$\left( \widehat{\frac{Q}{\rho_M}} \right)^{(c)} = \frac{\hat{Q}^{(c)}}{\rho_M} - \frac{Q}{\rho_M} \delta_M^{(c)} = \frac{Q}{\rho_M} \left[ \frac{\hat{\Theta}^{(c)}}{\Theta} - r \left( \delta_M^{(c)} - \delta^{(c)} \right) \right]. \quad (5.77)$$

Sabendo que até primeira ordem se satisfaz  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_M + \hat{\rho}_X$ , então com ajuda de [5.70], é válido o

seguinte  $\hat{\rho}_X^{(c)} = \hat{\rho}^{(c)} - \hat{\rho}_M^{(c)}$ , com o qual obtemos a seguinte relação

$$\frac{\hat{p}_X^{(c)}}{\rho_M} = c_s^2 \frac{(\hat{\rho}^{(c)} - \hat{\rho}_M^{(c)})}{\rho_M} = c_s^2 (D^{(c)} - \delta_M^{(c)}), \quad (5.78)$$

onde foi introduzido a seguinte definição

$$D^{(c)} = \frac{\rho}{\rho_M} \delta^{(c)} = \frac{1+r}{r} \delta^{(c)} \quad \Leftrightarrow \quad \delta^{(c)} = \frac{r}{1+r} D^{(c)}. \quad (5.79)$$

Para a derivada encontramos

$$\dot{\delta}^{(c)} = \frac{r}{1+r} \left[ \dot{D}^{(c)} + \frac{\dot{r}}{r} \frac{D^{(c)}}{1+r} \right]. \quad (5.80)$$

Então podemos olhar que via [5.78] a dinâmica de  $\delta^{(c)}$  é acoplada a uma perturbação relativa da densidade definida como  $D^{(c)} - \delta_M^{(c)}$ .

Para descrever a dinâmica de  $D^{(c)} - \delta_M^{(c)}$  nós acoplamos as equações [5.72] e [5.75], resultando

$$(D^{(c)} - \delta_M^{(c)})' + \frac{Q}{\rho_M} D^{(c)} - \frac{\dot{\rho}_M \hat{p}_X^{(c)}}{\rho_M \rho_M} = -\left(\frac{Q}{\rho_M}\right)^{(c)}. \quad (5.81)$$

Isolando  $\hat{\Theta}^{(c)}$  da equação [5.72] e usando a equação [5.80], obtemos

$$\hat{\Theta}^{(c)} = -\dot{D}^{(c)} - \frac{1 - \frac{\xi}{3}}{1+r} \Theta D^{(c)}. \quad (5.82)$$

De [5.82], a equação [5.77], resulta

$$\left(\frac{Q}{\rho_M}\right)^{(c)} = -\frac{Q}{\Theta \rho_M} \left[ \dot{D}^{(c)} + \left(\frac{Q}{\rho_M} + \Theta \frac{r}{1+r}\right) D^{(c)} - \Theta r (D^{(c)} - \delta_M^{(c)}) \right]. \quad (5.83)$$

Além disso, de [5.83] em [5.81], se obtém

$$(D^{(c)} - \delta_M^{(c)})' + \frac{Q}{\rho_M} D^{(c)} + \left(\Theta - \frac{Q}{\rho_M}\right) \frac{\hat{p}_X^{(c)}}{\rho_M} = \frac{Q}{\Theta \rho_M} \left[ \dot{D}^{(c)} + \left(\frac{Q}{\rho_M} + \Theta \frac{r}{1+r}\right) D^{(c)} - \Theta r (D^{(c)} - \delta_M^{(c)}) \right]. \quad (5.84)$$

Através dos passos

$$\Theta - \frac{Q}{\rho_M} = \Theta \frac{\frac{\xi}{3} + r}{1+r}, \quad (5.85)$$

e

$$\frac{Q}{\rho_M} - \frac{Q}{\Theta \rho_M} \frac{Q}{\rho_M} - \frac{Q}{\rho_M} \frac{r}{1+r} = \frac{\xi}{3} \frac{1}{1+r} \frac{Q}{\rho_M}, \quad (5.86)$$

encontramos, que a Eq.[5.84], pode ser escrita como

$$\left(D^{(c)} - \delta_M^{(c)}\right)' + \frac{Q}{\rho_M} r \left(D^{(c)} - \delta_M^{(c)}\right) + \Theta \frac{\frac{\xi}{3} + r}{1+r} c_s^2 \left(D^{(c)} - \delta_M^{(c)}\right) = \frac{Q}{\Theta \rho_M} \dot{D}^{(c)} - \frac{\xi}{3} \frac{1}{1+r} \frac{Q}{\rho_M} D^{(c)}. \quad (5.87)$$

Definindo a quantidade  $S_M^{(c)}$ , como

$$S_M^{(c)} \equiv D^{(c)} - \delta_M^{(c)} = \frac{1+r}{r} \delta^{(c)} - \delta_M^{(c)}. \quad (5.88)$$

A partir da definição anterior de  $S_M^{(c)}$ , conclui-se a seguinte equação para a derivada temporal da densidade relativa

$$\dot{S}_M^{(c)} + \left[ \frac{Q}{\rho_M} r + \Theta \frac{\frac{\xi}{3} + r}{1+r} c_s^2 \right] S_M^{(c)} = \frac{Q}{\Theta \rho_M} \dot{D}^{(c)} - \frac{\xi}{3} \frac{1}{1+r} \frac{Q}{\rho_M} D^{(c)}, \quad (5.89)$$

ou, mais explicitamente,

$$\dot{S}_M^{(c)} + \frac{\Theta}{1+r} \left[ \left( \frac{\xi}{3} + r \right) c_s^2 - r \left( \frac{\xi}{3} - 1 \right) \right] S_M^{(c)} = \frac{1 - \frac{\xi}{3}}{1+r} \left[ \dot{D}^{(c)} - \frac{\xi}{3} \frac{1}{1+r} \Theta D^{(c)} \right]. \quad (5.90)$$

E usando [5.80], a equação [5.90], fica

$$\dot{S}_M^{(c)} + \frac{\Theta}{1+r} \left[ \left( \frac{\xi}{3} + r \right) c_s^2 - r \left( \frac{\xi}{3} - 1 \right) \right] S_M^{(c)} = \frac{1 - \frac{\xi}{3}}{r} \delta^{(c)}. \quad (5.91)$$

Neste ponto é conveniente colocar a dependência temporal da equação acima em termos do fator de escala. Esta mudança de variável é definida como segue

$$\delta^{(c)} = a \frac{\Theta}{3} \delta^{(c)'} \quad \text{e} \quad \dot{S}_M^{(c)} = a \frac{\Theta}{3} S_M^{(c)'}. \quad (5.92)$$

Que aplicados na Eq.[5.91], resulta

$$S_M^{(c)'} + \frac{3}{1+r} \left[ \left( \frac{\xi}{3} + r \right) c_s^2 - r \left( \frac{\xi}{3} - 1 \right) \right] \frac{S_M^{(c)}}{a} = \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) \frac{\delta^{(c)'}}{r}. \quad (5.93)$$

A equação [5.93] representa a equação diferencial de primeira ordem para a perturbação relativa da densidade de energia.

Usando a relação  $\hat{p}_X^{(c)} = c_s^2 \hat{\rho}_X^{(c)}$  no último termo da equação [5.73], temos  $\hat{p}_X^{(c)} = c_s^2 \rho_M S_M^{(c)}$ . Com o

qual a equação [5.73], se torna

$$\delta^{(c)'''} + \left[ \frac{3}{2} - \frac{15}{2} \frac{p}{\rho} + 3 \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \right] \frac{\delta^{(c)'}}{a} - \left[ \frac{3}{2} + 12 \frac{p}{\rho} - \frac{9}{2} \frac{p^2}{\rho^2} - 9 \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \right] \frac{\delta^{(c)}}{a^2} + \frac{k^2}{a^2 H^2} c_s^2 \frac{r}{1+r} \frac{S_M^{(c)}}{a^2} = 0. \quad (5.94)$$

A equação [5.93] é acoplada com a equação [5.73] para  $\delta^{(c)}$ .

O conjunto [5.93] e [5.94] para  $S_M^{(c)}$  e  $\delta^{(c)}$ , respectivamente, descreve a inteira dinâmica perturbativa do sistema.

Se as perturbações da pressão da energia escura são desprezíveis ( $c_s^2 \approx 0$ ), a equação para  $\delta^{(c)}$  desacopla daquela para  $S_M^{(c)}$ . Como as equações [5.93] e [5.94] são válidas para  $\omega = -1$ , temos  $p = -\rho_X$  e  $\dot{p} = -\dot{\rho}_X = Q$ . Daqui resulta que

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\rho_X}{\rho} = -\frac{1}{1+r}, \quad \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = -\frac{Q}{3H\rho_M} = \frac{\frac{\xi}{3} - 1}{1+r}, \quad (5.95)$$

com  $r = r_0 a^{-\xi}$ . A taxa de Hubble é explicitamente dada por [4.18] (ou [4.19]) com  $\omega = -1$ , ou seja pela expressão seguinte,

$$H = H_0 a^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{r_0 + a^\xi}{r_0 + 1} \right)^{\frac{3}{2\xi}}. \quad (5.96)$$

Da equação [5.95], se tem que o parâmetro da equação de estado total se aproxima a zero em grandes redshifts ( $r \gg 1$ ). A velocidade do som adiabática é positiva para  $\xi > 3$  e é negativa para  $\xi < 3$ . Para  $\xi = 3$  se recupera de forma consistente o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = Q = 0$ .

De acordo com [5.88] as perturbações da matéria  $\delta_M^{(c)}$  são então obtidas como a combinação

$$\delta_M^{(c)} = \frac{1+r}{r} \delta^{(c)} - S_M^{(c)}. \quad (5.97)$$

A quantidade de interesse agora é  $\delta_M^{(c)}$  que é dada por  $\delta^{(c)}$  e  $S_M^{(c)}$  em [5.97], onde  $\delta^{(c)}$  e  $S_M^{(c)}$  são soluções do sistema acoplado [5.94] e [5.93], respectivamente. Todos os coeficientes são dados explicitamente em [5.95] com  $r = r_0 a^{-\xi}$  e [5.96].

Para avaliar o conjunto [5.93] e [5.94], devemos considerar o seu comportamento no limite em grandes redshifts. Desde que  $r \gg 1$  para  $a \ll 1$  temos

$$\frac{p}{\rho} \ll 1, \quad \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \ll 1, \quad a^2 H^2 \gg H_0^2 \quad (a \ll 1). \quad (5.98)$$

Sob esta condição a Eq. [5.94] se reduz a

$$\delta^{(c)'''} + \frac{3}{2} \frac{\delta^{(c)'}}{a} - \frac{3}{2} \frac{\delta^{(c)}}{a^2} = 0 \quad (a \ll 1), \quad (5.99)$$

que coincide com a equação correspondente para o universo de Einstein-de Sitter.

As soluções de [5.99] são

$$\delta^{(c)}(a \ll 1) = c_1 a + c_2 a^{-3/2}, \quad (5.100)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração.

Para  $a \ll 1$  a equação [5.93] também desacopla e se reduz a

$$S_M^{(c)'} + (3 - \xi + 3c_s^2) \frac{S_M^{(c)}}{a} = 0 \quad (a \ll 1), \quad (5.101)$$

e tem a solução

$$S_M^{(c)} \propto a^{-(3-\xi+3c_s^2)} \quad (a \ll 1), \quad (5.102)$$

que é constante exatamente apenas no limite  $\Lambda$ CDM com  $\xi = 3$  e  $c_s^2 = 0$ . Ela decai para  $\xi < 3(1 + c_s^2)$ .

A fim de escolher condições iniciais apropriadas, usamos o fato que em tempos primitivos, ou seja, para fatores de escala pequenos  $a \ll 1$ , a equação [5.94], assintoticamente tem a forma do modelo Einstein-de Sitter [5.99], o qual coincide com a equação correspondente ao modelo  $\Lambda$ CDM nesse período.

Também para  $a \ll 1$ , a equação [5.93] se reduz a [5.101], a qual tem solução que decai para a condição  $\xi < 3(1 + c_s^2)$ .

Usando estas duas condições para as equações [5.94] e [5.93], a equação para as perturbações da matéria em  $a \ll 1$  [5.97], fica

$$\delta_M^{(c)} \approx \delta^{(c)} \quad (a \ll 1). \quad (5.103)$$

A equação [5.103], nos permite relacionar nosso modelo ao modelo  $\Lambda$ CDM em tempos remotos. Vamos a usar o fato que o espectro de potência da matéria para o modelo  $\Lambda$ CDM está bem ajustada pela função de transferência BBKS (64). Integrando o modelo  $\Lambda$ CDM para trás a partir de hoje a um passado distante, digamos  $z = 1100$ , obtém-se a forma da função de transferência naquele momento. O espectro obtido deste modo é então utilizado como condição inicial para nosso modelo. Este procedimento é semelhante ao descrito com mais detalhes nas referências [(58), (65)].

### Análise estatística

Para estimar os parâmetros livres do nosso modelo realizamos uma análise Bayesiana e construímos as funções de distribuição de probabilidade correspondentes. O espectro de potência de matéria é

definido por

$$P_k = |\delta_{M,k}|^2, \quad (5.104)$$

onde  $\delta_{M,k}$  é a componente de Fourier do contraste de densidade  $\delta_M$ . O resultado da previsão teórica para o espectro de potência será confrontado com os dados da estrutura em larga escala (LSS-Large Structure Scale) dos projetos 2dFGRS (66) e SDSS DR7 (67). Então o acordo entre a previsão teórica e observações é avaliado através da minimização da quantidade  $\chi_{LSS}^2$ , similar ao que feito anteriormente para o fundo homogêneo e isotrópico.

$$\chi_{LSS}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[P(k)_i^{obs} - P(k_i | \theta)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.105)$$

onde a soma é de todos os  $N$  dados de cada programa, as quantidades  $P(k)_i^{obs}$  e  $P(k_i | \theta)$  são o espectro de potência observado e teórico do  $i$ -ésimo dado com  $\theta$  a quantidade de parâmetros livres e  $\sigma$  o respetivo erro da medição. Com ajuda de  $\chi_{LSS}^2$ , se construi a função densidade de probabilidade (PDF).

$$P = B e^{-\frac{\chi_{LSS}^2}{2}}, \quad (5.106)$$

onde  $B$  é uma constante de normalização.

Agora, para testar o nosso modelo contra os dados do espectro de potência observado, consideraremos a situação a seguir. Como esperamos soluções realistas para  $C_s^2 \ll 1$ , então fixamos a velocidade de som<sup>6</sup> a  $C_s^2 = 10^{-4}$  e também consideramos  $H_0 = 72$  e, com isso, só temos  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  como parâmetros livres. Isto nos proporciona informações sobre os valores dos parâmetros  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  que melhor ajustam o modelo scaling aos dados da estrutura em larga escala de ambos projetos.

## Programa 2dFGRS

O programa 2dF Galaxy Redshift Survey, contém 39 conjuntos de dados observacionais, correspondentes ao estudo de 221414 galáxias. Estes dados tem suas incertezas expressas nas barras de erros calculadas a  $1\sigma$ .

Primeiramente construímos o espectro de potência teórico  $P_k$ , a partir do contraste de densidade da matéria escura  $\delta_M$ , o qual foi achado a partir da equação [5.97], onde nesta última se tem que  $\delta^c$  e  $S_M^c$  são soluções do sistema acoplado [5.94] e [5.93], respectivamente.

<sup>6</sup>Nesta situação, fizemos um teste construindo o espectro de potência teórico, para o qual, fixamos os valores de  $\Omega_{M_0}$  e  $\xi$  deixando a  $C_s^2$  livre, então, observamos que valores muito pequenos de  $C_s^2$  ( $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ) estão em boa concordância com os dados da estrutura em larga escala dos projetos 2dFGRS e SDSS DR7.

Assim que temos os valores de  $P_k$ , construímos a função  $\chi^2_{LSS}$ , tendo em conta os dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS. Por último minimizamos a função  $\chi^2_{LSS}$ , para assim obter os valores dos parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$  e  $2\sigma$  dados na tabela [5.1] que melhor ajustam o modelo scaling a os dados do LSS.

Projeto 2dFGRS			
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$\xi$	$\chi^2_v$
SCALING	$0.367^{+0.0454+0.0986}_{-0.0394-0.0741}$	$2.69^{+1.0436+3.0303}_{-2.0290-2.2653}$	0.011

Tabela 5.1: Resultados da análise com dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS para o modelo scaling.

A partir da equação [5.106] construímos a respectiva Função densidade de probabilidade (PDF) para cada parâmetro. Nesta caso nós fixamos um dos valores dos parâmetros para obter o PDF do outro parâmetro<sup>7</sup>.

O PDF para  $\Omega_{M_0}$  é mostrado na figura [5.10(a)], a qual mostra um valor preferido de  $\Omega_{M_0} = 0.367$ . A figura [5.10(b)] mostra o PDF para  $\xi$ , o qual mostra que existe uma região com alta probabilidade para  $\xi$ , em torno de  $\xi = 2.694$ .

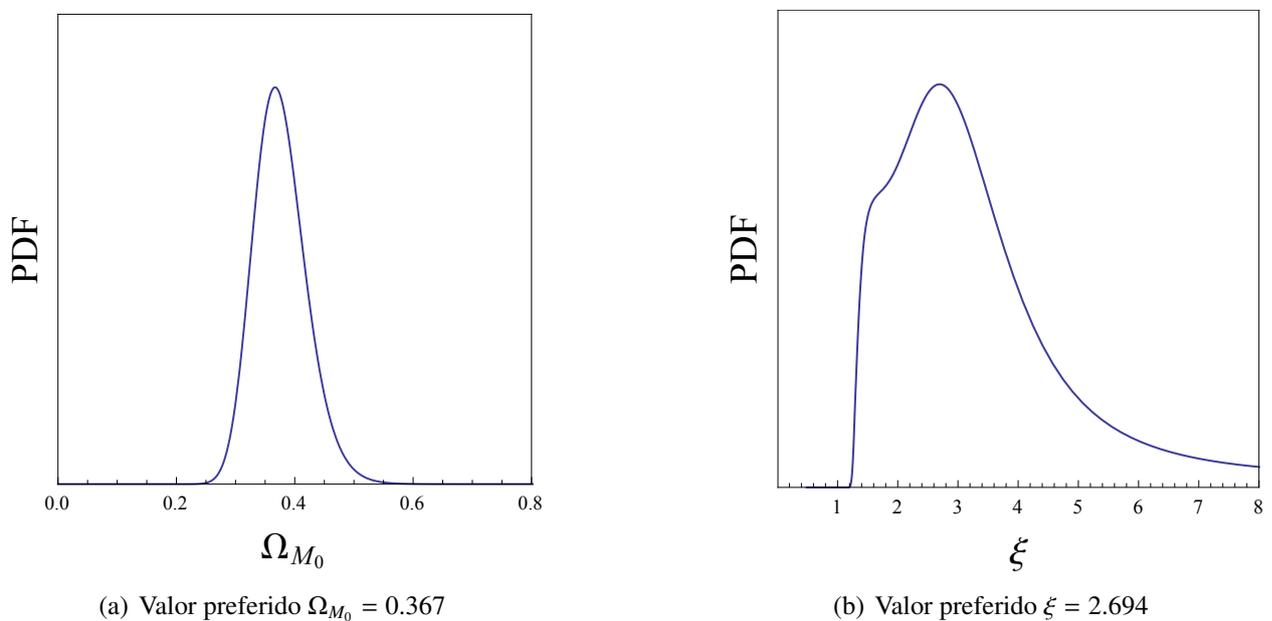


Figura 5.10: **Figura esquerda:** PDF unidimensional para o parâmetro de densidade da matéria escura  $\Omega_{M_0}$  resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS. **Figura direita:** PDF unidimensional para  $\xi$  resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS.

<sup>7</sup>Esta análise não é o correto, porque para achar o PDF associado a um parâmetro, temos que integrar a expressão [5.106] sobre o outro parâmetro. Mas, este análise nos da uma ideia do PDF para cada parâmetro.

A figura [5.11] mostra o espectro de potência da matéria para vários valores de  $\xi$  ao redor de seu valor preferido. Neste caso fixamos  $\Omega_{M_0} = 0.367$  e usamos o número de onda normalizado para o valor de  $k = 0.185h\text{Mpc}^{-1}$ .

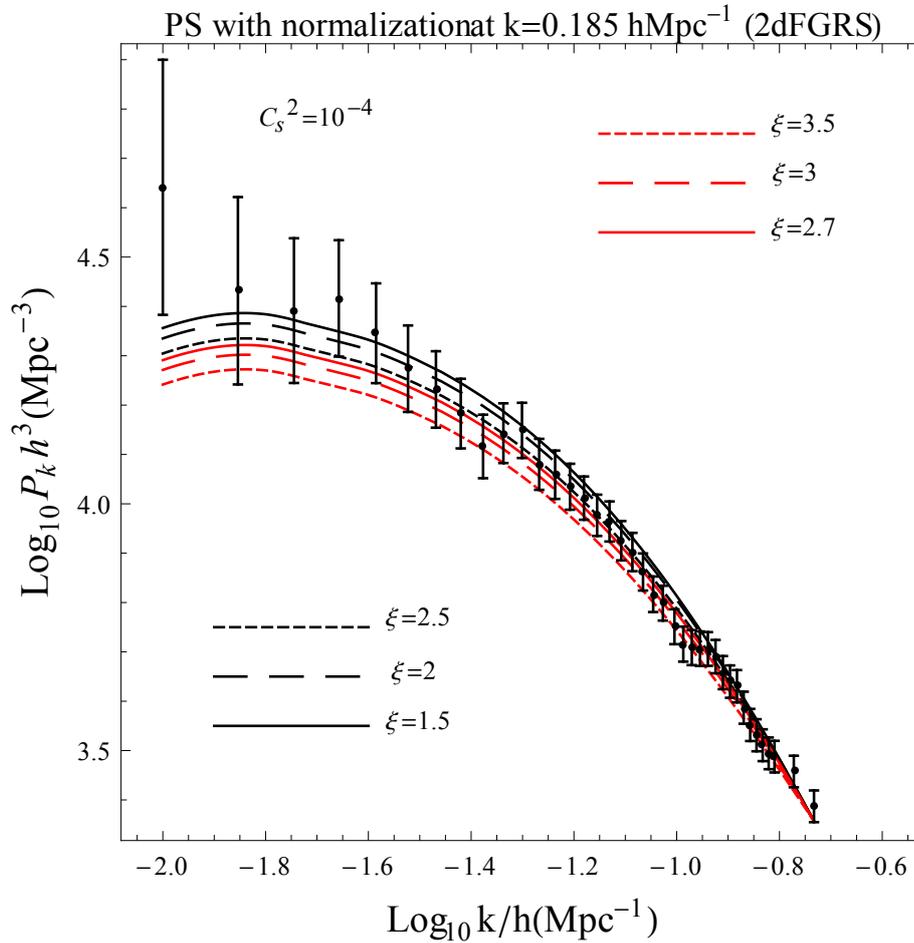


Figura 5.11: Espectro de potência (PS) da matéria previsto para o modelo scaling normalizado em  $k = 0.185h\text{Mpc}^{-1}$  para diferentes valores de  $\xi$  confrontado com os dados da estrutura em larga escala do programa 2dFGRS.

### Programa SDSS DR7

O SDSS DR7 corresponde as siglas de Sloan Digital Sky Survey Data Release 7, o qual também corresponde a um estudo do redshift de galáxias. Este projeto contém 41 conjunto de dados correspondentes ao estudo de galaxias.

Fazendo o mesmo processo do caso anterior, encontramos que os valores dos parâmetros com seus respectivos erros a  $1\sigma$  e  $2\sigma$  dados na tabela [5.2], são os que melhor ajustam o modelo scaling aos dados do LSS do programa SDSS DR7.

Aplicando o mesmo procedimento feito no projeto anterior, encontramos a partir da equação [5.106] que o PDF para  $\Omega_{M_0}$ , o qual é mostrado na figura [5.12(a)], da um valor preferido de  $\Omega_{M_0} = 0.285$ .

Projeto SDSS DR7			
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$\xi$	$\chi^2_\nu$
SCALING	$0.285^{+0.0256+0.0547}_{-0.0227-0.0430}$	$3.04^{+0.7387+1.6374}_{-1.6655-2.3742}$	0.016

Tabela 5.2: Resultados da análise com dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7 para o modelo scaling.

Além disso, a figura [5.12(b)] mostra o PDF para  $\xi$ , o qual mostra que existem três regiões com alta probabilidade para  $\xi$ , um deles com um pico pronunciado em torno de  $\xi = 1.407$ , outro aproximadamente da mesma altura em  $\xi = 1.782$  e o último também da mesma altura em  $\xi = 3.044$ .

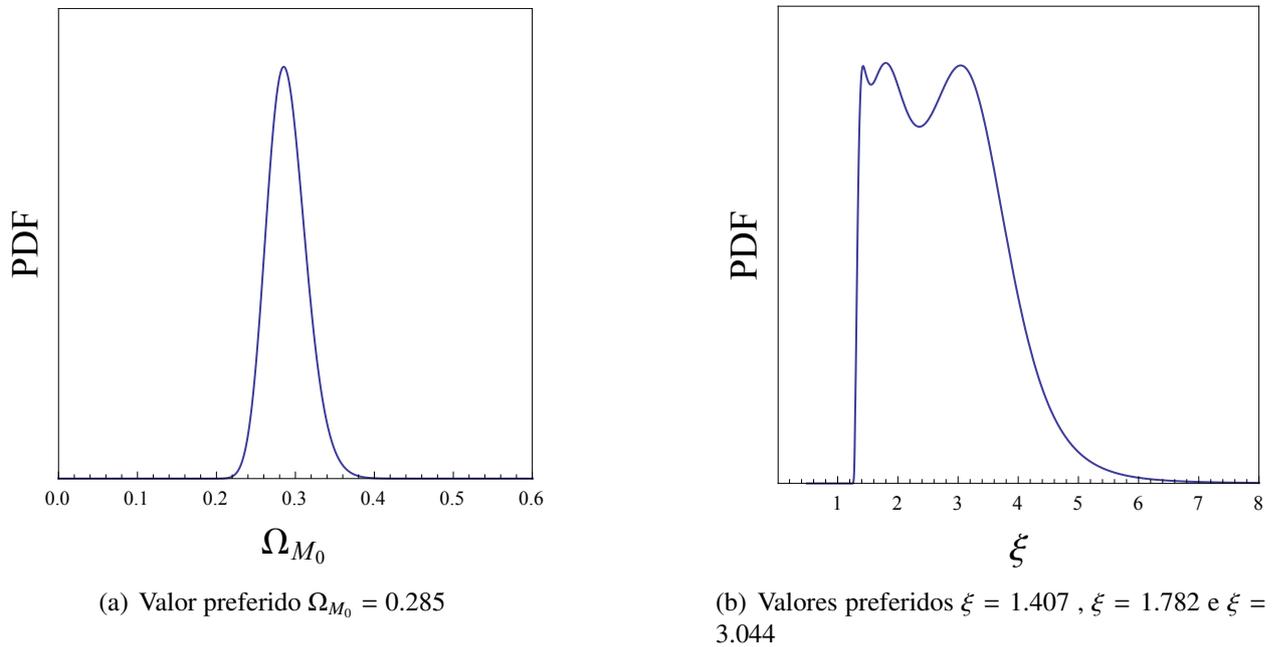


Figura 5.12: **Figura esquerda:** PDF unidimensional para o parâmetro de densidade da matéria escura  $\Omega_{M_0}$  resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7. **Figura direita:** PDF unidimensional para  $\xi$  resultante dos dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7.

O espectro de potência da matéria para vários valores de  $\xi$  ao redor de seus valores preferidos é mostrado na figura [5.13]. Neste caso também se fixo  $\Omega_{M_0} = 0.285$  e usamos o número de onda normalizado para o valor de  $k = 0.185hMpc^{-1}$ .

### Análise conjunta: SNe IA Union 2.1 + SDSS DR7

Com o fim de aliviar a degenerescência entre as regiões de alta probabilidade da figura [5.12(b)], fazemos um análise conjunto, ou seja juntamos o resultado do programa SDSS DR7 e o análise feita no fundo homogêneo e isotrópico usando dados de Supernovas.

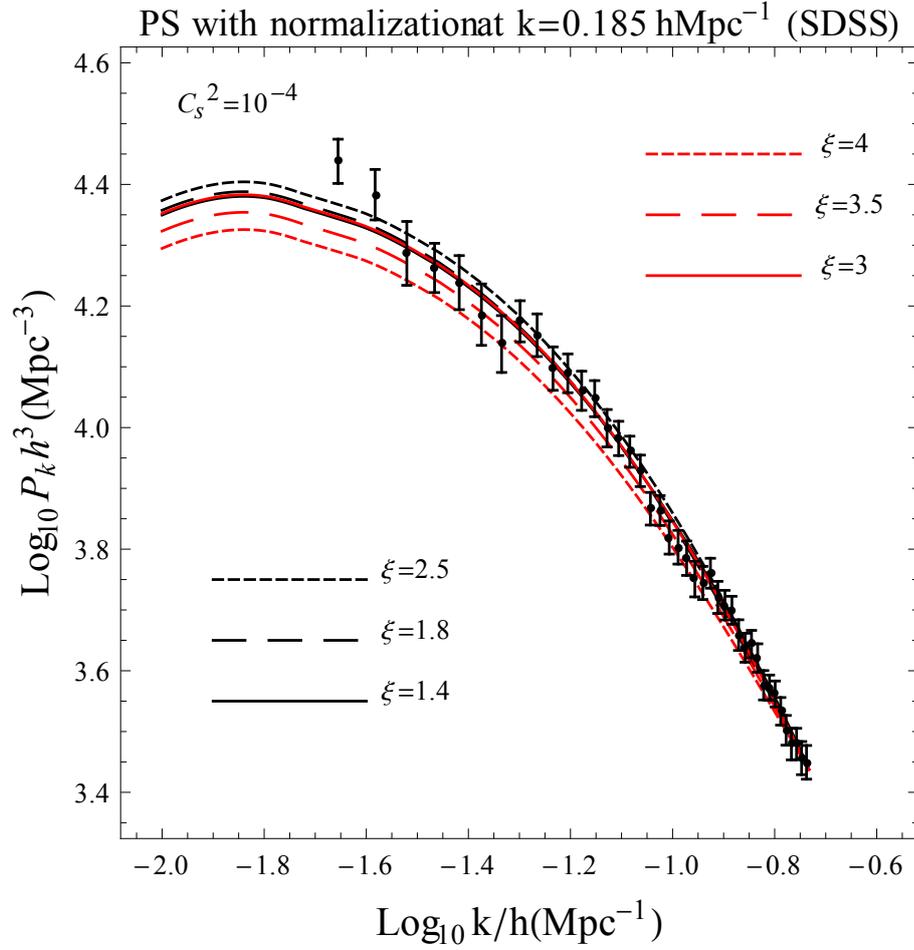


Figura 5.13: Espectro de potência (PS) da matéria previsto para o modelo scaling normalizado em  $k = 0.185 h Mpc^{-1}$  para diferentes valores de  $\xi$  confrontado com os dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7.

Nesta situação a função  $\chi_{TOTAL}^2$  é definida como

$$\chi_{TOTAL}^2 = \chi_{SNIa}^2 + \chi_{SDSS}^2. \quad (5.107)$$

O resultado obtido através da combinação das equações [4.45] (amostra Union 2.1) e [5.105] (programa SDSS DR7) é apresentado a seguir.

O resultado da minimização da função  $\chi_{TOTAL}^2$  na equação [5.107], é sumarizado na tabela [5.3], onde apresentamos os valores dos parâmetros com seus respectivos erros a  $2\sigma$  e  $3\sigma$ .

O resultado do análise conjunta é mostrado em azul na figura [5.14], onde também é apresentada a superposição das curvas de contorno dos testes mencionados.

SNe IA Union 2.1+SDSS DR7			
Modelo	$\Omega_{M_0}$	$\xi$	$\chi^2_\nu$
SCALING	$0.286^{+0.0079+0.0119}_{-0.0076-0.0113}$	$3.006^{+0.2381+0.3533}_{-0.9550-1.3998}$	0.386

Tabela 5.3: Resultados da análise conjunta com dados da estrutura em larga escala do programa SDSS DR7 e dados de Supernovas da amostra Union 2.1 para o modelo scaling.

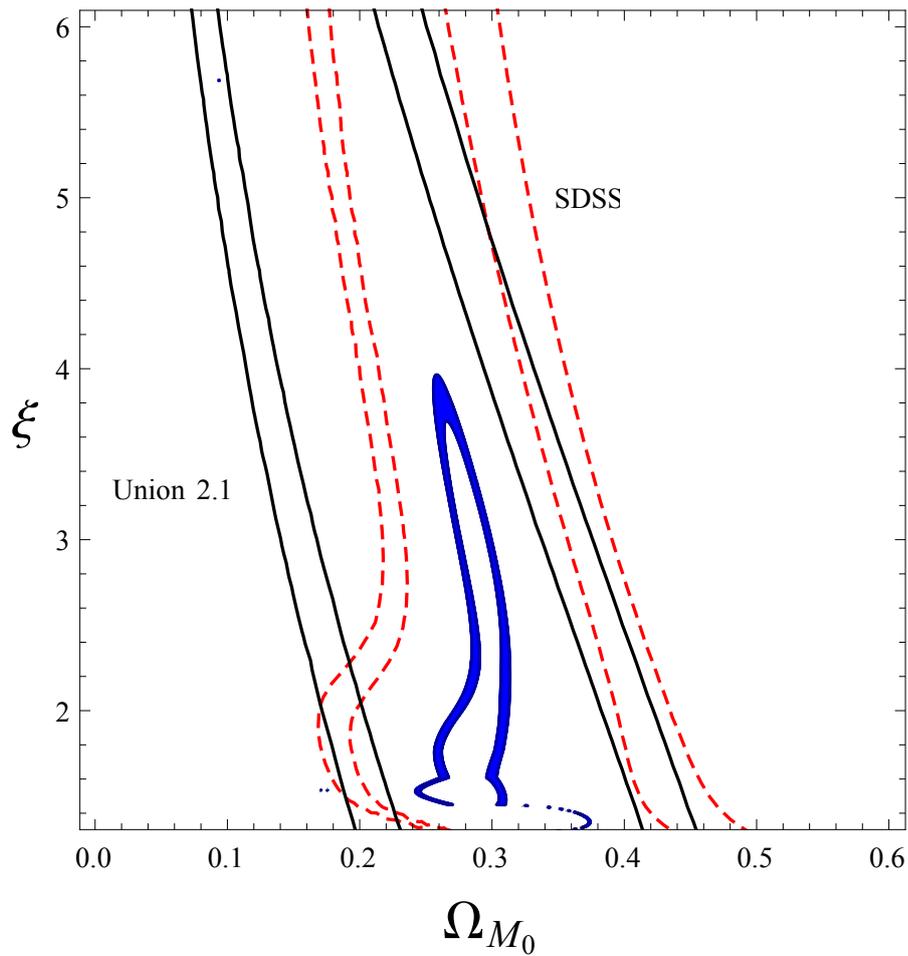


Figura 5.14: Curvas de contorno a  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de níveis de confiança de  $(\Omega_{M_0}, \xi)$  para o análise conjunta.

# Capítulo 6

## CONCLUSÕES

Com a intenção de quantificar e possivelmente suavizar o problema de coincidência, Dalal et al. (8) introduziram um parâmetro fenomenológico  $\xi$  que determina a dinâmica da razão das densidades da matéria escura e energia escura. Para  $\xi = 3$  e  $\omega = -1$  o modelo  $\Lambda$ CDM é recuperado.

Cada combinação  $\omega + \xi/3 \neq 0$  corresponde a uma interação não gravitacional entre matéria escura e energia escura. Cada valor  $\xi < 3$ , segundo (8), faz o problema de coincidência menos grave.

Este modelo recebeu atenção considerável na literatura e foi testado com observações de dados de Supernovas do tipo Ia (397 dados de supernovas da amostra Constitution), espectro de anisotropia da radiação cósmica de fundo (CMB) e Oscilações Acústicas Bariônicas [(9), (45)].

No entanto, na forma original e nos trabalhos até agora publicados, este modelo é restrito para a dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico.

Aqui estabelecemos uma generalização que também permite o estudo da dinâmica das perturbações.

Num primeiro passo nós atualizamos testes da dinâmica do fundo na base dos dados de SNIa (considerando as amostras: SDSS, Constitution e Union 2.1). Para os dados da amostra SDSS encontramos que o resultado depende do calibrador (MLCS2k2 e SALTII), mas ambos calibradores preferem valores  $\xi > 3$ . Para a amostra Constitution temos que usando o calibrador MLCS2k2 valores  $\xi < 3$  são preferidos. Mas com o calibrador SALTII temos valores preferidos  $\xi > 3$ . Finalmente para o caso da amostra Union 2.1 temos que aqueles dados preferem um  $\xi < 3$ .

No segundo passo consideramos uma análise simplificada da dinâmica das perturbações num contexto

Newtoniano. Aqui encontramos uma equação central para as perturbações da densidade de matéria, a qual depende de um parâmetro  $\beta$  que relaciona o termo de interação do fundo e perturbado, o parâmetro  $\alpha$  que relaciona as perturbações da matéria escura e da energia escura, mas neste último caso temos um parâmetro  $\eta$ , o qual dá uma dependência com a escala  $k$ . Analizamos esta equação central assumindo diferentes valores para  $\alpha$  e  $\beta$  e fixando  $\eta = 0$  (sem dependência da escala) e  $\eta = 1$  (com dependência da escala). Usamos  $k = 1$ ,  $k = 30$  e  $k = 50$  para verificar como a escala afeta o gráfico de  $\delta_M$ . Aqui justamente vemos que a medida que aumentamos o valor de  $k$  temos que  $\delta_M$  é mais sensível, o qual é algo que era esperado porque a medida que  $k$  é cada vez maior, as escalas são menores, onde o análise newtoniano é aplicável. Além disso observamos que a razão  $G_{eff}/G$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , vai para 1 e também muda com a escala. Por outro lado para o caso sem interação e sem flutuações na componente de energia escura, nossa equação central para as perturbações é reduzida à equação para as perturbações da matéria escura no modelo  $\Lambda$ CDM. Assim mesmo considerando só um modelo com matéria escura, a equação se reduz a uma equação para as perturbações da matéria escura no modelo Einstein-de Sitter.

Na parte principal da tese estabelecemos uma teoria de perturbações lineares, plenamente relativista e invariante de calibre.

Obtemos as perturbações fracionárias da matéria como uma combinação das soluções de um sistema de duas equações acopladas.

Calculamos nesta base o espectro de potência da matéria que foi confrontado com os dados dos catálogos 2dFGRS e SDSS DR7.

Estudamos a dependência do espectro de potência com relação ao parâmetro  $\xi$ , onde fixamos o valor de  $\Omega_{M_0}$  de acordo com seu valor preferido pelos dados. Encontramos que para o caso do projeto SDSS DR7 existe uma degenerescência no parâmetro  $\xi$ , ou seja, vamos ter três valores para o parâmetro  $\xi$  que ajustam melhor o modelo a os dados de aquele projeto.

Para aliviar essa degenerescência fazemos uma análise conjunta, no qual é considerado a amostra de dados de Supernovas Union 2.1 e os dados de estrutura em larga escala do programa SDSS DR7. Aqui observamos que a níveis de confiança de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  ainda permanece uma degenerescência para o parâmetro  $\xi$ .

Tanto as análises bayesianas separadas dos programas 2dFGRS e SDSS DR7 como as análises conjunta do programa SDSS DR7 incluindo os resultados da amostra Union2.1 do fundo são compatíveis

com o modelo  $\Lambda$ CDM.

A amostra Union2.1 para o fundo prefere valores  $\xi < 3$ . A amostra 2dFGRS para as perturbações preferem valores  $\xi < 3$ , mas com grande degenerescência, e a amostra SDSS DR7, para as perturbações, preferem  $\xi > 3$ , também com ampla degenerescência. Para a análise conjunta temos valores preferidos para  $\xi > 3$ .

Consequentemente, não existe nenhuma indicação clara para uma aliviação do problema da coincidência dentro do modelo tipo scaling.

Um estudo mais detalhado, considerando  $C_s^2$  como parâmetro livre, seria necessário para entender melhor o modelo scaling.

Na Ref.(9), pode concluir-se que uma análise considerando só os testes com Supernovas do tipo IA (amostra Constitution que contém 397 dados de Supernovas) e oscilações acústicas bariônicas não impõem restrições rigorosas sobre  $\xi$ , mas a inclusão dos dados da posição do primeiro pico do espectro de anisotropia da radiação cósmica de fundo reduz significativamente a região permitida deste parâmetro. Isto implica que testes em altos redshifts podem ser capazes de dar uma restrição mais forte para o parâmetro  $\xi$ .

Então, considerando a análise feita na Ref.(9), uma próxima análise mais completa no fundo homogêneo e isotrópico para nosso trabalho, pode ser feita se foram considerados os testes com oscilações acústicas bariônicas (BAO) e posição do primeiro pico da CMB, além do testes com as diferentes amostras de dados Supernovas do tipo IA. Mas neste caso o parâmetro de Hubble a ser usado será dado pela expressão [4.17].

Além disso, pode ser feito uma análise conjunta mais completo, ou seja, tendo em conta o fundo homogêneo e isotrópico, onde serão consideradas as diferentes amostras de Supernovas do tipo Ia (SDSS, Constitution e Union 2.1), assim como os testes com oscilações acústicas bariônicas e posição do primeiro pico da CMB. Logo poderá ser feito um análise conjunta do nível de fundo com o nível perturbativo, onde neste último serão considerados os dados da estrutura em larga escala do projeto SDSS DR7.

## Apêndice **A**

# AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

O desenvolvimento formal que leva às equações de campo de Einstein pode ser feito através de uma formulação Lagrangeana. Daí, tradicionalmente, inicia-se os procedimentos com uma ação apropriada a fim de extrair as equações de campo que constituem a teoria em questão. No caso da gravitação de Einstein, a ação adotada é a de Einstein-Hilbert. Em adição a tal ação gravitacional, temos a ação para a matéria, de maneira que a ação total é

$$S = S_{EH} + S_M. \quad (\text{A.1})$$

Agora, consideramos uma região espaço-temporal 4-dimensional limitada  $\Omega$  onde os campos de interesse são definidos, e reescrevemos  $S$  em termos das densidades Lagrangeanas individuais

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} L_M \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\kappa$  é uma constante,  $\sqrt{-g} d^4x$  é o elemento invariante de volume e  $L_M$  é a densidade Lagrangeana da matéria. A continuação calculamos a variação e deduzimos as equações de campo de Einstein com o requerimento de que  $\delta S = 0$  para variações arbitrárias da métrica.

Primeiramente, iremos efetuar as variações na ação de Einstein-Hilbert, ou seja, no primeiro termo da expressão [A.2], temos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} \right) d^4x. \quad (\text{A.3})$$

Para calcular  $\delta R_{\mu\nu}$ , primeiramente achamos  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , para o qual consideramos o seguinte

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (\text{A.4})$$

Então a variação de  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  é

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [(\delta g_{\mu\sigma})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\sigma})_{,\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\sigma}]. \quad (\text{A.5})$$

Considerando  $g^{\lambda\sigma}g_{\sigma\rho} = \delta_{\rho}^{\lambda} \implies \delta g^{\lambda\sigma} = -g^{\lambda\kappa}g^{\sigma\rho}\delta g_{\kappa\rho}$ , com o qual a equação [A.5], fica

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -g^{\lambda\kappa}\delta g_{\kappa\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [(\delta g_{\mu\sigma})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\sigma})_{,\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\sigma}]. \quad (\text{A.6})$$

Além disso, conhecendo

$$(\delta g_{\mu\sigma})_{,\nu} = (\delta g_{\mu\sigma})_{,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\delta g_{\rho\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}\delta g_{\rho\mu}. \quad (\text{A.7})$$

De [A.7], encontramos a seguinte relação

$$(\delta g_{\mu\sigma})_{,\nu} + (\delta g_{\nu\sigma})_{,\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\sigma} = (\delta g_{\mu\sigma})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\sigma})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\sigma} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\delta g_{\rho\sigma}. \quad (\text{A.8})$$

De [A.8] em [A.6], resulta

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [(\delta g_{\mu\sigma})_{;\nu} + (\delta g_{\nu\sigma})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\sigma}]. \quad (\text{A.9})$$

A última equação mostra que  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  é um tensor, em virtude disso podemos escrever a derivada covariante como

$$(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\kappa} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{,\kappa} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\kappa}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\kappa}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (\text{A.10})$$

Contraindo os índices  $\nu$  e  $\lambda$ , trocando  $\kappa$  por  $\lambda$  e restando as duas expressões obtidas temos

$$\begin{aligned} (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\kappa} - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{;\lambda} &= (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{,\kappa} - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{,\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\kappa}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \\ &+ \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Agora como

$$R_{\mu\kappa} = \Gamma_{\mu\kappa,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\kappa}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\kappa\rho}^{\lambda}. \quad (\text{A.12})$$

A variação do tensor de Ricci  $R_{\mu\kappa}$  em termos das conexões é dada por

$$\delta R_{\mu\kappa} = (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\kappa} + \delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\rho}\delta\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\kappa\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\kappa\rho}^{\lambda}. \quad (\text{A.13})$$

Comparando [A.11] com [A.13]

$$\delta R_{\mu\kappa} = (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\kappa}, \quad (\text{A.14})$$

onde a última expressão é conhecida como a identidade de Palatini. De [A.14], podemos ter

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left[ (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Como  $g^{\mu\nu}_{;k} = 0$ , a equação [A.15], pode ser escrita como

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[ (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Trocando  $\nu$  por  $\lambda$  no segundo termo do lado direito de [A.16], temos

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_{\lambda} \underbrace{\left[ g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} \right]}_{W^{\lambda}}, \quad (\text{A.17})$$

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_{\lambda} W^{\lambda}. \quad (\text{A.18})$$

Considerando a expressão [A.18] na primeira integral da expressão [A.3], obtemos

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int_{\Omega} (\nabla_{\lambda} W^{\lambda}) \sqrt{-g}d^4x. \quad (\text{A.19})$$

Por o teorema de Gauss covariante, a equação [A.19], fica

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int_{\partial\Omega} W^{\lambda} \sqrt{-g}d^3x, \quad (\text{A.20})$$

onde esta integral só contribui na fronteira, e como  $\delta g_{\mu\nu} = 0$  na fronteira  $\partial\Omega$ , então esta integral de superfície se anula na fronteira e não contribui a expressão [A.3].

Agora, a variação  $\delta\sqrt{-g}$  é dada pela seguinte propriedade

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.21})$$

A partir de isso, considerando [A.21] em [A.3], obtemos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.22})$$

Consideramos, a seguir, a variação da ação para a matéria de [A.2]

$$\delta S = \int_{\Omega} \delta(L_M \sqrt{-g}) d^4x. \quad (\text{A.23})$$

A variação de aquele argumento é dado por

$$\delta(L_M \sqrt{-g}) = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}. \quad (\text{A.24})$$

A equação [A.24] é escrita dessa forma porque a Lagrangiana  $L_M$  em geral depende da métrica e suas derivadas.

Agora definindo

$$V^{\lambda} = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.25})$$

A divergência ordinária (não covariante de  $V$ ) é

$$V^{\lambda}_{,\lambda} = \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}. \quad (\text{A.26})$$

De [A.26] em [A.24], obtemos

$$\delta(L_M \sqrt{-g}) = \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + V^{\lambda}_{,\lambda}. \quad (\text{A.27})$$

Assim pelo teorema de Gauss, a integral do último termo do lado direito da expressão [A.27] não contribui na fronteira, pelo fato que a variação na fronteira é desprezível, então fica

$$\delta S_M = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right)_{,\lambda} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.28})$$

Definindo o tensor energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}L_M)}{\partial g^{\mu\lambda}} \right)_{,\lambda} \right]. \quad (\text{A.29})$$

Com isto a equação [A.28], resulta

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.30})$$

Aplicando o princípio da mínima ação em [A.1], temos

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_M = 0. \quad (\text{A.31})$$

Usando [A.22] e [A.30] em [A.31]

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \quad (\text{A.32})$$

Para variações arbitrárias de  $(\delta g^{\mu\nu})$ , finalmente obtemos as equações de Campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.33})$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento, como já foi definido, e a constante  $\kappa$  será determinada sobre o requerimento de que as equações de campo se reduzam às leis de Newton no limite de campo fraco, obtendo  $\kappa = 8\pi G$ .

As equações dadas em [A.33], representam quantitativamente o efeito da gravitação.

A geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria-energia. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , na sua forma mais geral, possui dez componentes independentes, o que proporciona um número de dez equações diferenciais parciais de segunda ordem (não lineares) para a solução de potenciais gravitacionais  $g_{\mu\nu}$ .

# Apêndice B

## EQUAÇÃO DE RAYCHAUDHURI

Vamos a considerar em toda generalidade o que acontece com uma congruência (coleção) de partículas tendo uma quadrivelocidade  $u^\alpha$  que caem sob sua própria gravidade. Nós sabemos do movimento do fluido que isto pode sofrer os seguintes efeitos:

- Expansão ou contração so volume a qual é dado pela divergência de  $u^\alpha$ , definido como  $\Theta = u^\alpha_{;\alpha}$ .
- Cisalhamento, distorção em forma, sem alteração do volume, é dada por um tensor simétrico, que é traço livre e ortogonal a  $u^\alpha$ , definido por

$$\sigma_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} + \dot{u}_{(\alpha}u_{\beta)} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta, \quad (\text{B.1})$$

onde  $u_{(\alpha;\beta)} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha})$  e  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta$ .

- Rotação ou vorticidade, rotação sem mudança na forma, dada por um tensor antisimétrico ortogonal ao  $u^\alpha$ ,

$$\omega_{\alpha\beta} = u_{[\alpha;\beta]} + \dot{u}_{[\alpha}u_{\beta]}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $u_{[\alpha;\beta]} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\beta} - u_{\beta;\alpha})$ .

- Aceleração devido à força não-gravitacional como a gradiente de pressão, é um vetor definido por  $\dot{u}_\alpha = u_{\alpha;\beta}u^\beta$  o qual é ortogonal a  $u^\alpha$ .

Considerando a seguinte relação

$$u_{;\beta;\gamma}^{\alpha} - u_{;\gamma;\beta}^{\alpha} = R_{\gamma\beta}^{\alpha} u^{\gamma} \quad (\text{B.3})$$

contraído  $\beta = \alpha$

$$u_{;\alpha\gamma}^{\alpha} - u_{;\gamma\alpha}^{\alpha} = R_{\gamma\alpha}^{\alpha} u^{\gamma} = -R_{\gamma\alpha\gamma}^{\alpha} u^{\gamma} = -R_{\gamma\gamma} u^{\gamma} \quad (\text{B.4})$$

multiplicando por  $u^{\beta}$  e fazendo a contração  $\gamma = \beta$

$$u_{;\alpha\beta}^{\alpha} u^{\beta} - u_{;\beta\alpha}^{\alpha} u^{\beta} = -R_{\gamma\beta} u^{\gamma} u^{\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Do primeiro termo do lado esquerdo da equação [B.5], temos

$$u_{;\alpha\beta}^{\alpha} u^{\beta} = \left( u_{;\alpha}^{\alpha} \right)_{;\beta} u^{\beta} = \Theta_{;\beta} u^{\beta} = \Theta_{;\beta} u^{\beta} = \Theta_{;0} u^0 = \dot{\Theta}. \quad (\text{B.6})$$

Para o segundo termo do lado esquerdo da equação [B.5]

$$u_{;\beta\alpha}^{\alpha} u^{\beta} = \underbrace{\left( u_{;\beta}^{\alpha} u^{\beta} \right)_{;\alpha}}_{\dot{u}^{\alpha}} - u_{;\beta}^{\alpha} u_{;\alpha}^{\beta} = \dot{u}_{;\alpha}^{\alpha} - u_{;\beta}^{\alpha} u_{;\alpha}^{\beta} = \dot{u}_{;\alpha}^{\alpha} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} u_{\mu;\beta} u_{\nu;\alpha}. \quad (\text{B.7})$$

Agora das expressões dadas em [B.1] e [B.2], obtemos

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\beta} - \dot{u}_{\alpha} u_{\beta}. \quad (\text{B.8})$$

Usando [B.8] em o último termo de [B.7], temos

$$u_{;\beta\alpha}^{\alpha} u^{\beta} = \dot{u}_{;\alpha}^{\alpha} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \left( \omega_{\mu\beta} + \sigma_{\mu\beta} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\beta} - \dot{u}_{\mu} u_{\beta} \right) \left( \omega_{\nu\alpha} + \sigma_{\nu\alpha} + \frac{1}{3} \Theta h_{\nu\alpha} - \dot{u}_{\nu} u_{\alpha} \right). \quad (\text{B.9})$$

como

$$\underbrace{\omega^{\nu\alpha}}_{\text{antisimetrico}} \sigma_{\nu\alpha} = - \underbrace{\omega^{\alpha\nu}}_{\alpha \rightarrow \nu} \sigma_{\nu\alpha} = - \omega^{\nu\alpha} \underbrace{\sigma_{\alpha\nu}}_{\text{simetrico}} = - \omega^{\nu\alpha} \sigma_{\nu\alpha} \Rightarrow \omega^{\nu\alpha} \sigma_{\nu\alpha} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Também de [B.2]

$$\omega_{\alpha\beta}u^\beta = \frac{1}{2}(\underbrace{u_{\alpha;\beta}u^\beta}_{\dot{u}_\alpha} - \underbrace{u_{\beta;\alpha}u^\beta}_0 + \underbrace{\dot{u}_\alpha}_{-1} \underbrace{u_\beta u^\beta}_{-1} - \underbrace{\dot{u}_\beta}_{\underbrace{u_{\beta;\rho}u^\rho}} u^\beta u_\alpha) \Rightarrow \omega_{\alpha\beta}u^\beta = 0. \quad (\text{B.11})$$

$$\underbrace{u^\rho u_{\beta;\rho}u^\beta}_0$$

De igual forma de [B.1]

$$\sigma_{\alpha\beta}u^\beta = \frac{1}{2}(\underbrace{u_{\alpha;\beta}u^\beta}_{\dot{u}_\alpha} + \underbrace{u_{\beta;\alpha}u^\beta}_0 + \underbrace{\dot{u}_\alpha}_{-1} \underbrace{u_\beta u^\beta}_{-1} + \underbrace{\dot{u}_\beta}_0 u^\beta u_\alpha) - \frac{1}{3}\Theta \underbrace{h_{\alpha\beta}u^\beta}_0 \Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}u^\beta = 0. \quad (\text{B.12})$$

considerando [B.10-B.12] em [B.9], resulta

$$u_{;\beta\alpha}^\alpha u^\beta = \dot{u}_{;\alpha}^\alpha - (-\omega^{v\alpha}\omega_{v\alpha} - \underbrace{\omega^{v\alpha}\sigma_{v\alpha}}_0 + \frac{1}{3}\Theta \underbrace{h^{\beta\mu}\omega_{\mu\beta}}_0 - g^{\beta\nu}\dot{u}_\nu \underbrace{\omega_{\beta\mu}u^\mu}_0 + \underbrace{\sigma^{v\alpha}\omega_{v\alpha}}_0$$

$$+ \sigma^{\mu\beta}\sigma_{\mu\beta} + \frac{1}{3}\Theta \sigma_{\mu\beta}h^{\mu\beta} + g^{\beta\nu}\dot{u}_\nu \underbrace{\sigma_{\beta\mu}u^\mu}_0 - \frac{1}{3}\Theta \underbrace{h^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\nu}}_0 + \frac{1}{3}\Theta \sigma_{v\alpha}h^{v\alpha}$$

$$+ \frac{1}{9}\Theta^2 \underbrace{h_{\mu\beta}h^{\mu\beta}}_3 + \frac{1}{3}\Theta g^{\beta\nu}\dot{u}_\nu \underbrace{h_{\beta\mu}u^\beta}_0 - g^{\alpha\mu}\dot{u}_\alpha \underbrace{\omega_{\alpha\nu}u^\nu}_0 + g^{\alpha\mu}\dot{u}_\alpha \underbrace{\sigma_{\alpha\nu}u^\nu}_0$$

$$+ \frac{1}{3}\Theta g^{\alpha\mu}\dot{u}_\alpha \underbrace{h_{\alpha\nu}u^\nu}_0 + g^{\alpha\mu}u_\alpha \dot{u}_\mu \underbrace{u^\nu u_{\nu;\rho}u^\rho}_0), \quad (\text{B.13})$$

$$u_{;\beta\alpha}^\alpha u^\beta = \dot{u}_{;\alpha}^\alpha + \omega^{v\alpha}\omega_{v\alpha} - \sigma^{\mu\beta}\sigma_{\mu\beta} - \frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{3}\Theta \sigma_{\mu\beta}h^{\mu\beta} - \frac{1}{3}\Theta \sigma_{v\alpha}h^{v\alpha}. \quad (\text{B.14})$$

Agora, usando [B.1] calculamos

$$\sigma_{\mu\beta}h^{\mu\beta} = \frac{1}{2}(u_{\mu;\beta} + u_{\beta;\mu} + \dot{u}_\mu u_\beta + \dot{u}_\beta u_\mu)(g^{\mu\beta} + u^\mu u^\beta) - \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\beta}h^{\mu\beta}, \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_{\mu\beta}h^{\mu\beta} = \frac{1}{2}(\underbrace{u_{;\beta}^\beta}_\Theta + \underbrace{u_{;\mu}^\mu}_\Theta + \dot{u}_\mu u^\mu + \dot{u}_\beta u^\beta + \underbrace{u_{\mu;\beta}u^\mu u^\beta}_0 + \underbrace{u_{\beta;\mu}u^\beta u^\mu}_0$$

$$+ \dot{u}_\mu \underbrace{u_\beta u^\beta}_{-1} u^\mu + \dot{u}_\beta \underbrace{u_\mu u^\mu}_{-1} u^\beta - \frac{1}{3} \Theta \underbrace{h_{\mu\beta} h^{\mu\beta}}_3, \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_{\mu\beta} h^{\mu\beta} = \frac{1}{2} (2\Theta + \dot{u}_\mu u^\mu + \dot{u}_\beta u^\beta - \dot{u}_\mu u^\mu - \dot{u}_\beta u^\beta) - \Theta \Rightarrow \sigma_{\mu\beta} h^{\mu\beta} = 0. \quad (\text{B.17})$$

Usando [B.17] em [B.14]

$$u_{;\beta\alpha}^\alpha u^\beta = \dot{u}_{;\alpha}^\alpha + \omega^{v\alpha} \omega_{v\alpha} - \sigma^{\mu\beta} \sigma_{\mu\beta} - \frac{1}{3} \Theta^2. \quad (\text{B.18})$$

Tendo em conta que

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{v\alpha} \omega_{v\alpha} \quad e \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\beta} \sigma_{\mu\beta}. \quad (\text{B.19})$$

De [B.19] em [B.18] fica

$$u_{;\beta\alpha}^\alpha u^\beta = \dot{u}_{;\alpha}^\alpha + 2(\omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3} \Theta^2. \quad (\text{B.20})$$

De [B.6] e [B.20] em [B.5], obtemos

$$\dot{\Theta} - \dot{u}_{;\alpha}^\alpha - 2(\omega^2 + \sigma^2) + \frac{1}{3} \Theta^2 = -R_{v\beta} u^\nu u^\beta. \quad (\text{B.21})$$

Das equações de campo de Einstein

$$R_{v\beta} = 8\pi G \left( T_{v\beta} - \frac{1}{2} g_{v\beta} T \right). \quad (\text{B.22})$$

Para um fluido perfeito temos

$$T_{v\beta} = \rho u_\nu u_\beta + h_{v\beta} p. \quad (\text{B.23})$$

De [B.23] calculamos

$$T = g^{v\beta} T_{v\beta} = \rho \underbrace{u^\nu u_\nu}_{-1} + p \underbrace{h^\nu_\nu}_3 \Rightarrow T = -\rho + 3p. \quad (\text{B.24})$$

De [B.23] e [B.24] em [B.22]

$$R_{v\beta} = 8\pi G \left( \rho u_\nu u_\beta + h_{v\beta} p + \frac{1}{2} g_{v\beta} \rho - \frac{3}{2} g_{v\beta} p \right), \quad (\text{B.25})$$

$$R_{\nu\beta}u^\nu u^\beta = 8\pi G(\rho \underbrace{u_\nu u^\nu}_{-1} \underbrace{u_\beta u^\beta}_{-1} + \underbrace{h_{\nu\beta}u^\nu u^\beta}_0 p + \frac{1}{2} \underbrace{u^\nu u_\nu}_{-1} \rho - \frac{3}{2} \underbrace{u^\nu u_\nu}_{-1} p), \quad (\text{B.26})$$

$$\Rightarrow R_{\nu\beta}u^\nu u^\beta = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (\text{B.27})$$

De [B.27] em [B.21], resulta

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - 2(\omega^2 + \sigma^2) - \dot{u}^\alpha_{;\alpha} + 4\pi G(\rho + 3p) = 0, \quad (\text{B.28})$$

onde a última expressão é conhecida como a equação de Raychaudhuri.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] N. Aghanim et al. [Planck Collaboration: P. A. R. Ade], arXiv:1303.5076 (2013).
- [2] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201]; S. J. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004); P. Astier et al., *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006). 1, 14.
- [3] D. N. Spergel., et al. 2003, *ApJS*, 148, 175.
- [4] D. J. Eisenstein., et al. 2005, *ApJ*, 633, 560.
- [5] G. Caldera-Cabral, R. Maartens and B. Malte Schaefer., *JCAP* 07 (2009) 0027, arXiv:0905.0492.
- [6] G. Caldera-Cabral, R. Maartens and L. Arturo Ureña-López., *Phys. Rev. D* **79**, 063518 (2009).
- [7] F. Arévalo, A. Paula Bacalhau and W. Zimdahl., *Quantum Grav.* **29** 235001 (2012), arXiv:1112.5095.
- [8] N. Dalal, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 141302, 2001.
- [9] Y. Chen, Z. Zong-Hong, J. S. Alcaniz and Y. Gong., *Astrophys. J.* **711**: 439-444 , 2010.
- [10] D. R. Castro, H. Velten, W. Zimdahl, *JCAP.*, 6, 24 (2012), arXiv:1201.0850.
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, 1972).
- [12] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003).
- [13] A. A. Penzias and R. R. Wilson, *Astrophys. J.*, **142**, 419, (1965).
- [14] J. C. Mather et al, *Astrophys. J.*, **512**, 511 (1999).

- 
- [15] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Benjamin Cummings, 2003).
- [16] J. Ademir Sales de Lima, *REVISTA USP*, São Paulo, n.62, p. 134-147.
- [17] P. J. E. Peebles, *The Large-scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980).
- [18] E. Komatsu et al., *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy probe (WMAP) Observations: Cosmological interpretation*, *ApJ*. **192**, 18 (2011).
- [19] W. J. Percival et al., *Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the SDSS and 2dFGRS*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **381**, 1053-1066 (2007).
- [20] S. Weinberg., *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989).
- [21] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [22] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa., *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006), arXiv:hep-th/0603057.
- [23] W. Zimdahl., arXiv:1204.5892, (2012).
- [24] M. S. Turner., arXiv:astro-ph/0108103, (2001).
- [25] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier., *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001), arXiv:gr-qc/0103004.
- [26] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, W. Zimdahl., *Phys. Lett. B* **727**, 37 (2013), arXiv:1306.0917.
- [27] R. Colistete Jr, J. C. Fabris, J. Tossa e W. Zimdahl., *Phys. Rev. D* **76**, 103516 (2007).
- [28] H. A. Borges, S. Carneiro., *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1385 (2005), arXiv:gr-qc/0503037.
- [29] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, Cambridge University Press, 1993.
- [30] C. G. Tsagas., arXiv: astro-ph/02011405.
- [31] E. M. Lifshitz., *On the gravitational instability of the expanding universe*. *Sov. Phys. JETP* **10**, 116-122 (1946).
- [32] P. Mészáros, *Astron. Astrophys.* **37**, 225 (1974).
- [33] R. F. vom Marttens, *Perturbações bariônicas no modelo com decaimento do vácuo*, Tese de Mestrado, UFES, (2013).

- 
- [34] R. F. vom Marttens, W. S. Hipólito-Ricaldi, W. Zimdahl., arxiv:1403.0427.
- [35] W. Zimdahl, H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and W. S. Hipólito-Ricaldi., JCAP 1104 (2011) 028, arXiv:1009.0672.
- [36] C. Z. Vargas, W. S. Hipólito-Ricaldi, W. Zimdahl., JCAP, 4, 32 (2012), arXiv:1112.5337.
- [37] W. S. Hipólito-Ricaldi, H. E. S. Velten and W. Zimdahl., JCAP 0906 (2009) 016.
- [38] S. del Campo, J. C. Fabris, R. Herrera and W. Zimdahl., Phys. Rev. D **87**, 123002 (2013), arXiv:1403.1103.
- [39] W. S. Hipólito, H. E. S. Velten and W. Zimdahl., Phys. Rev. D **82**, 063507 (2010), arXiv:1007.0675.
- [40] A. Vale and J. P. S. Lemos., arXiv:astro-ph/0101500.
- [41] W. Zimdahl, D. Pavon, L. P. Chimento and A. S. Jakubi., arXiv:astro-ph/0404122.
- [42] W. Zimdahl, D. Pavón and L. P. Chimento., Phys. Lett. B **521**:133-138, 2001.
- [43] W. Zimdahl. and D. Pavón., Gen. Rel. Grav. **35**, 413-422, 2003.
- [44] P. J. Steinhardt, in "Critical Problems in Physics", edited by V.L. Fitch and Dr.R. Marlow (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1997).
- [45] D. Pavón, S. Sen, W. Zimdahl., JCAP 0405 (2004) 009, arXiv:astro-ph/0402067.
- [46] A. V. Filippenko., arXiv:astro-ph/0410609.
- [47] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges e J. S. Alcaniz., Phys. Rev. D, **74**, 023532 (2006), arXiv:astro-ph/0605607.
- [48] H. Wei., Phys. Lett. B **691** (2010) 173-182, arXiv:1004.0492.
- [49] P. Gregory, Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Science: A Comparative Approach with Mathematica Support, Cambridge University Press, (2010).
- [50] A. G. Riess, W. H. Press e R. P. Kirshner., Astrophys. J., **473**, 88 (1996).
- [51] J. Guy et al., Astron. Astrophys., **443**, 781 (2005).
- [52] J. Guy et al., Astron. Astrophys., **466**, 11 (2007).
- [53] J. Sollerman et al., Astrophys. J., **703**, 1374 (2009).

- 
- [54] M. Hicken et. al., *Astrophys. J.*, **700**, 1097 (2009).
- [55] N. Suzuki et al., *Astrophys. J.*, **746**, 85 (2012).
- [56] M. Kowalski et al., *Astrophys. J.*, **686**, 749 (2008).
- [57] R. Amanullah et al., *Astrophys. J.*, **716**, 712 (2010).
- [58] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and C. Pigozzo., *Phys. Rev. D* **77**, 043513 (2008).
- [59] R. C. Arcuri and I. Waga., *Phys. Rev. D*, **50**, 2928 (1994).
- [60] P. Chan-Gyung, H. Jai-chan, L. Jee-heon, and H. Noh., *Phys. Rev. Lett.* **103**, 151303 (2009).
- [61] I. Durán, D. Pavón and W. Zimdahl., *JCAP* 1007(2010) 018.
- [62] F. R. George Ellis., *Gen. Rel. Grav.* **41**, 581-660, (2009).
- [63] A. R. King, G. F. R. Ellis., *Commun. math. Phys.* **31**, 209-242 (1973).
- [64] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser and A. S. Szalay., *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986); J. Martin, A. Riazuelo and M. Sakellariadou., *Phys. Rev. D* **61**, 083518 (2000).
- [65] J. C. Fabris, I. L. Shapiro and J. Solá., *JCAP* 0702, (2007) 016.
- [66] S. Cole et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005).
- [67] B. A. Reid et al., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **404**, 60 (2010).