

TESE DE DOUTORADO

Buracos Negros Fantasmas

Manuel Eleuterio Rodrigues

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória

Abril de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Buracos Negros Fantasma

Manuel Eleuterio Rodrigues

Banca Examinadora:

Dr. Júlio César Fabris

Dr. Patricio Anibal Letelier

Dr. Flávio Gimenes Alvarenga

Dr. Olivier Piguet

Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello

Suplentes:

Dr. Glauber Tadaiesky Marques

Dr. Winfried Ernst Wilhelm Zimdahl

Tese de Doutorado

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

Vitória

2010

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele eu nunca poderia ter concluído este trabalho.
- Agradeço aos meus pais por me darem a oportunidade de uma boa educação, a minha esposa Glaise por ter compreendido as dificuldades ao longo do trabalho, aos meus irmãos, por sempre me incentivarem nos estudos.
- Agradeço aos professores Júlio Fabris e Gérard Clément por terem me aceitado para trabalharmos juntos.
- Agradeço ao CNPq pela bolsa de estudos.
- Agradeço a todos os professores e amigos que de forma direta e indireta me ajudaram.

Abstract

We obtain the general solution of the Einstein-(anti) Maxwell-(anti) Dilaton (EMD) theory for a static, spherically symmetric spacetime in four dimensions. In the phantom (anti) cases, we obtain new solutions with non-degenerate horizon and make the analysis of their causal structures. The causal structures of some solutions are exotics, some of them can not be described in two-dimensional usual Penrose diagrams. We obtain also, using the method of Sigma model, new stationary solutions with axial symmetry, for Einstein-anti-Maxwell-Dilaton ($E\bar{M}D$) and Einstein-anti-Maxwell-Dilaton-Axion ($E\bar{M}DA$) theory. We analyse the causal structure of these new solutions.

Resumo

Obtemos a solução geral da teoria Einstein-(anti)Maxwell-(anti)Dilaton (EMD) para uma métrica estática e esfericamente simétrica. Nos casos fantasmas (anti), obtemos novas soluções com horizonte não degenerado e fazemos a análise da estrutura causal das mesmas. As estruturas causais de algumas soluções são exóticas, a ponto de algumas delas não poderem ser descritas em diagramas de Penrose bidimensionais usuais. Obtemos também, utilizando o método do modelo Sigma, novas soluções estacionárias, com simetria axial, da teoria Einstein-anti-Maxwell-Dilaton ($E\bar{M}D$), e da teoria Einstein-anti-Maxwell-Dilaton-Àxion ($E\bar{M}DA$). Analisamos as estruturas causais dessas novas soluções.

Sumário

Introdução	6
1 Buracos Negros	8
1.1 Definições Preliminares	8
1.2 Desenvolvimento Histórico	13
1.3 Estrutura Causal	16
2 Modelo Sigma Acoplado à Gravitação	23
2.1 O Modelo	23
2.2 As soluções de Rasheed e Kerr-Sen	30
2.2.1 Solução de Rasheed para teoria EMD	30
2.2.2 Solução de Sen para a teoria EMDA	33
3 Buracos Negros Fantasma Carregados	35
3.1 As Equações de Campo	35
3.2 Soluções Esfericamente Simétricas	38
3.3 Novas soluções	43
3.3.1 Solução cosh	44
3.3.2 Solução Linear	47
3.3.3 Solução sinh	49

3.3.4	Solução $a = 0$	51
3.3.5	Solução \sin	51
3.4	Análise das geodésicas e construção dos diagramas de Penrose	52
3.4.1	Solução \cosh	52
3.4.2	Solução Linear	57
3.4.3	Solução \sinh	58
3.4.4	Solução $a = 0$	62
3.4.5	Solução \sin	63
4	Modelo Sigma Fantasma	69
4.1	Solução Estática	69
4.2	Solução com Rotação	72
4.2.1	Análise da Estrutura Causal	75
4.3	Modelo Sigma da Teoria $E\bar{M}DA$	79
4.3.1	Análise da Estrutura Causal	83
	Conclusão	86
	A Redução Dimensional	88

Introdução

A Relatividade Geral (RG) de Einstein é uma teoria consolidada, comprovadamente útil para a descrição dos fenômenos relacionados à gravitação. As várias teorias que surgiram como um aperfeiçoamento ou como generalização da RG, também trouxeram grandes avanços ao conhecimento científico. A primeira solução, relacionada à gravitação, das chamadas equações de Einstein, que regem a RG, foi uma solução singular do espaço-tempo. Assim, o próprio Einstein, juntamente com Rosen, por causa da pressão da comunidade científica, ao criticarem a RG por haver, na época, somente esta solução singular, utilizou um artifício não físico, com o intuito de obter uma nova solução não singular. Ele foi o primeiro a considerar o termo de interação do campo de Maxwell com a gravitação, com o sinal invertido, dando origem assim aos campos fantasmas e aos buracos de minhoca [1].

Em modelos de teoria de cordas, é comum encontrarmos um sistema específico, o que contém na ação o termo que gera a RG, acoplada com um campo escalar, chamado dilaton, e mais um acoplamento do dilaton com o campo de Maxwell. Essa teoria, a baixas energias e em 4D, é comumente chamada de Einstein-Maxwell-Dilaton (EMD). O estudo e obtenção de soluções dessa teoria começou com o artigo de Gibbons-Maeda [2]. Depois deles, muitos outros se interessaram em vários aspectos dessa teoria, como por exemplo a supersimetria [3]. Os primeiros que usaram esta teoria para obter soluções estacionárias, com simetria axial, foram Frolov et al [4], e no caso de Kaluza-Klein, Horne-Horowitz [5]. Muitos outros interesses foram surgindo e diferentes abordagens e métodos igualmente. Na teoria Einstein-Maxwell-Dilaton-Àxion (EMDA), o primeiro a obter uma generalização da solução de Kerr, pelo método das simetrias das equações, foi Sen [6].

Assim, temos muitas outras soluções, tanto da teoria EMD, quanto da EMDA.

Assim como foi dito anteriormente, sobre Einstein e Rosen, muitas outras situações na Física violam as chamadas condições de energia da RG [1, 8]. Como mencionado, os buracos de minhoca em geral, inicialmente formulados por Einstein e Rosen [7], violam tais condições de energia. Outros exemplo que podemos citar aqui são: efeito Casimir (normal e topológico) [1]; vácuo espremido [9]; evaporação de buracos negros [1]; cosmologia inflacionária [1], com Universo em expansão acelerada [11] e fluidos fantasmas o permeando [12, 13]; quantização do campo escalar massivo livre [10]; espelhos acelerados [14]; algumas teorias de campos com interação [15]; partícula de Dirac massiva na presença de um buraco negro de Kerr [16]. Dessa forma, nós também tivemos o interesse de abordar e analisar modificações das teorias EMD e EMDA, nos seus casos fantasmas Einstein-(anti)Maxwell-(anti)Dilaton ($E\bar{M}D$, $EM\bar{D}$ ou $E\bar{M}\bar{D}$) e Einstein-(anti)Maxwell-Dilaton-Axion ($E\bar{M}DA$), as quais podem violar certas condições de energia da RG.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo fazemos as definições necessárias à compreensão da RG, apresentamos um pouco do desenvolvimento histórico, e concluimos com a análise da estrutura causal do espaço-tempo de Reissner-Nordström. No segundo capítulo, fazemos a construção do modelo Sigma e uma breve apresentação das soluções de Rasheed e Kerr-Sen, como base de comparação das soluções do quarto capítulo. No terceiro capítulo, obtemos a solução geral para a teoria Einstein-(anti)Maxwell-(anti)Dilaton com simetria esférica e concluimos com a análise das estruturas causais das mesmas. No quarto capítulo, construimos o modelo Sigma Fantasma para a solução cosh e obtemos uma nova solução estacionária da teoria, depois analisamos sua estrutura causal. Ainda neste capítulo, obtemos também uma nova solução estacionária para a teoria $E\bar{M}DA$, concluindo com a análise de sua estrutura causal.

Capítulo 1

Buracos Negros

Nesse capítulo nós apresentamos algumas definições matemáticas básicas para a construção do entendimento da teoria da Relatividade Geral de Einstein. Continuamos com um pequeno resumo do desenvolvimento histórico da teoria, e terminamos com a apresentação de uma metodologia simples para a análise da estrutura causal do espaço-tempo.

1.1 Definições Preliminares

A Mecânica newtoniana e o Eletromagnetismo clássico de Maxwell são teorias, formuladas de tal forma, que dependem dos referenciais nos quais se observam seus fenômenos, como os referenciais inerciais por exemplo. Entretanto, a teoria da Relatividade Geral (RG) foi formulada no intuito de conter todas as possibilidades de observadores ou referenciais físicos, inerciais ou não. Com isso, deveria explicar as relações entre tais observadores, sem que houvesse mudança na forma das leis físicas, pois deveria haver uma invariância na forma das leis físicas para cada referencial adotado. Como a observação é relativa entre cada observador, então, Einstein construiu a RG [17, 18] como uma teoria geométrica que depende dos campos de matéria físicos associados ao sistema. Vamos começar definindo alguns elementos importantes nesta teoria.

Na Matemática [19, 21, 20, 22, 8, 23], um conceito básico é o de continuidade. E para estabelecer consistentemente este conceito, devemos definir a estrutura matemática mais simples onde ele aparece, essa estrutura é o espaço topológico. Dado um conjunto

arbitrário M e um conjunto finito ou infinito \mathcal{T} de subconjuntos $U_i \subset M$, dizemos que o par (M, \mathcal{T}) é um espaço topológico se as seguintes relações são satisfeitas:

1. \mathcal{T} contém tanto o conjunto vazio ϕ como o próprio M .
2. Qualquer união finita ou infinita dos conjuntos U_i pertence a \mathcal{T} .
3. Qualquer interseção finita dos conjuntos U_i pertence a \mathcal{T} .

Usualmente chamamos o próprio M de espaço topológico. Os U_i são chamados conjuntos abertos e \mathcal{T} é dita a topologia de M . Existem sempre duas topologias óbvias para qualquer conjunto M : a topologia discreta, na qual \mathcal{T} é tomado como sendo o conjunto de todos os subconjuntos de M , e a topologia trivial, na qual $\mathcal{T} = \{\phi; M\}$. Um conjunto F é definido fechado se o seu complemento $C = M - F$ é aberto.

O espaço M é chamado métrico quando podemos definir uma função $g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

1. $g(x, y) = g(y, x)$,
2. $g(x, y) > 0$ e $g(x, x) = 0$,
3. $g(x, y) + g(y, z) \geq g(x, z)$,

onde $x, y, z \in M$. Assim, definimos facilmente uma topologia para os espaços métricos através das chamadas bolas abertas:

$$U_r(x) = \{y \in M, g(x, y) < r\}, \quad (1.1)$$

onde r é o raio em torno do centro x . Uma topologia métrica é o conjunto de todas as bolas abertas de M e suas possíveis uniões.

Definimos a imagem inversa $f^{-1}(V)$ de uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$, entre dois espaços topológicos, como sendo o conjunto $U \subset M_1$ que é levado em $V \subset M_2$ pela aplicação f . Finalmente, dizemos que a aplicação f é contínua, se dado um aberto $V \subset M_2$, $f^{-1}(V)$ é um aberto $U \subset M_1$.

Podemos agora definir uma aplicação chamada homeomorfismo, como sendo a aplicação contínua $f : M_1 \rightarrow M_2$ em que existe uma aplicação inversa e contínua, então M_1 e M_2 são ditos homeomorfos. Definimos uma carta como o par (U, f) ¹, para U aberto em M .

Agora podemos conceituar o que é uma variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável M é um espaço topológico que satisfaz as seguintes propriedades:

1. M é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , para $m < \infty$. Logo, para cada aberto U de M existe um homeomorfismo f que mapeia localmente em um aberto V de \mathbb{R}^m , e dizemos que a dimensão de M é m .
2. Para duas cartas (f_1, U_1) e (f_2, U_2) , onde $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, as aplicações $f_2 \circ f_1^{-1}$ e $f_1 \circ f_2^{-1}$, de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m , são contínuas e diferenciáveis em todas as ordens. Essas aplicações são chamadas de funções de transição e são as responsáveis pela mudança de coordenadas² nos pontos de $U_1 \cap U_2$.

Com a estrutura das variedades diferenciáveis podemos definir alguns objetos geométricos importantes para a obtenção e análise das soluções advindas da RG de Einstein. Como não é nosso objetivo fazer definições formais destes objetos, vamos procurar defini-los sem minuciosidade.

Podemos entender como uma possível definição da métrica de uma variedade diferenciável riemanniana, a medida do comprimento entre dois pontos da variedade. Este objeto pode também medir normas de vetores (ou co-vetores)³ do espaço tangente (ou co-tangente) à variedade. E ainda pode ser o objeto responsável pela relação entre as componentes dos elementos dos espaços tangente e co-tangente. A expressão mais usual para a definição da métrica é dada por:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

¹Em geral esse par é apenas local, ou seja, a aplicação f não é um homeomorfismo em todo M .

²Quando essas aplicações e suas inversas são contínuas e suas derivadas de ordem arbitrária existem e também são contínuas, as chamamos de difeomorfismos.

³Tensores em geral.

onde, no caso em que a dimensão é igual a 4, $\mu, \nu = 0, \dots, 3$. O dS^2 é conhecido em geometria clássica como a primeira forma quadrática, ou primeira forma fundamental [24]. Usualmente é mais conhecido por elemento de linha, ou, em um abuso de linguagem, métrica.

Para uma variedade métrica diferenciável, a conexão afim é definida em termos das componentes da métrica, por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma} [\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}] . \quad (1.3)$$

Uma definição necessária para se ter uma derivação condizente com esta estrutura geométrica invariante por transformação de coordenadas, é a chamada derivada covariante. Vamos defini-la para um vetor, de forma a se transformar como um tensor:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}V^{\sigma} . \quad (1.4)$$

onde V^{ν} são as componentes do vetor.

Uma variedade riemanniana é definida como sendo uma variedade diferenciável que possui as seguintes propriedades:

1. A derivada covariante da métrica é zero, $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$.
2. A conexão é simétrica, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$.

Uma variedade diferenciável é a generalização do usual espaço plano euclidiano. Podemos ter uma noção até de estruturas espaciais curvas. O objeto geométrico que representa a curvatura da variedade é o tensor de Riemann. Quando ele é nulo, a variedade é dita plana, como em Euclides. Mas quando suas componentes não são nulas, a variedade é dita curva. O exemplo mais usual é o da superfície bidimensional da esfera S^2 , onde existem componentes não nulas do tensor de Riemann. As componentes do tensor de Riemann são definidas, em termos das conexões, por

$$R^{\sigma}_{\gamma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} + \Gamma^{\delta}_{\gamma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\delta\mu} - \Gamma^{\delta}_{\gamma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\delta\nu} . \quad (1.5)$$

Através da contração de dois índices das componentes do tensor de Riemann, podemos definir o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} , \quad (1.6)$$

podemos ainda definir o escalar de curvatura:

$$R = R^{\sigma}{}_{\sigma} , \quad (1.7)$$

pela contração dos índices do tensor de Ricci.

Com esses objetos geométricos podemos definir dois outros: o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R , \quad (1.8)$$

e o escalar de Kretschmman⁴

$$\mathcal{K} = 4K_1^2 + 8K_2^2 + 8K_3^2 + 4K_4^2 , \quad (1.9)$$

onde

$$K_1 = R^{01}{}_{01} , K_2 = R^{02}{}_{02} , K_3 = R^{12}{}_{12} , K_4 = R^{23}{}_{23} .$$

O tensor de Einstein será usado para a formulação da teoria, conectando a geometria diferencial, com a matéria contida na variedade. A estrutura de variedade riemanniana definida acima é usualmente chamada de espaço-tempo. O sistema físico é formado pela junção do espaço-tempo e a matéria contida nele.

Agora, vamos introduzir o princípio de mínima ação. Toda ação é uma integração da densidade lagrangeana do sistema físico, portanto um funcional. Se minimizarmos a ação, ou seja, igualarmos a zero a variação funcional da mesma, teremos diretamente as equações de movimento do sistema físico. Começamos pela ação de Einstein-Hilbert:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} R , \quad (1.10)$$

⁴Objeto geométrico que evidenciará a existência de singularidades (regiões do espaço-tempo onde as geodésicas terminam) em nossas variedades.

onde g é o determinante da métrica. Seguindo a mecânica clássica, visto que a conservação da energia e as leis da entropia continuam valendo aqui, temos que se minimizarmos a ação, ou seja, $\delta S = 0$, teremos as equações de movimento para cada campo físico. Então, fazendo a variação funcional⁵, em relação à métrica do espaço-tempo, da ação de Einstein-Hilbert somada a um termo de ação da matéria, temos as equações de movimento

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} , \quad (1.11)$$

onde k é uma constante e as equações são conhecidas como equações de Einstein. As equações de movimento para os campos de matéria são obtidas pela variação funcional da ação total em relação aos campos.

Na próxima seção, veremos um pouco do desenvolvimento histórico dessa teoria.

1.2 Desenvolvimento Histórico

Como a descrição da teoria da gravitação pela RG é extremamente complicada, pois as equações de campo são equações diferenciais não-lineares e acopladas, então Einstein achou que encontrar uma solução exata para estas equações era uma tarefa quase impossível. Mas, surpreendentemente, em 1916, Schwarzschild [25, 26] obtém uma solução exata das equações de Einstein no vácuo, considerando uma métrica com simetria esférica e estática:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (1.12)$$

onde M é a massa e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é o elemento de ângulo sólido. Esta solução, posteriormente analisada por vários autores nos anos seguintes⁶, mostra uma singularidade em $r = 0$, coberta por um horizonte geométrico⁷, onde nem a luz pode escapar, e uma singularidade de coordenadas [28, 29] em $r_S = 2M$ (horizonte de eventos), chamada de

⁵Em capítulos posteriores faremos em detalhes esta variação, por isso a omitiremos aqui.

⁶Os quais são Flamm (1916), Weyl (1917), Eddington (1924) [27], Lemaître (1933), Einstein e Rose (1935), Synge (1950), Finkelstein (1958), Fronsdal (1959), Kruskal (1960), Szekeres (1960), Novikov (1963-64).

⁷Região que separa a estrutura causal do espaço-tempo, e uma consequência direta é que $g_{00}(r_H) = 0$.

raio de Schwarzschild. Pelo teorema de Birkhoff⁸ [30, 31], sabemos que esta é a única solução esfericamente simétrica e estática das equações de Einstein no vácuo. Em 1935, Einstein e Rose, no intuito de burlar soluções singulares, demonstram a formulação dos buracos de minhocas. Em 1939, Tolman-Oppenheimer-Volkoff [32, 33] mostram que é possível existir estrelas de nêutrons.

Em 1916 Reissner [34], e independentemente Nordström em 1918 [35], encontram uma solução exata das equações de Einstein acopladas com o campo de Maxwell, para a métrica esfericamente simétrica e estática:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.13)$$

onde q é a carga elétrica do buraco negro. Esta solução apresenta dois horizontes geométricos em $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - q^2}$, onde r_+ é o horizonte de eventos e r_- é o horizonte interno. Novamente estes horizontes não passam de singularidades de coordenadas, mas existe uma singularidade em $r = 0$.

Em 1963, Kerr [36], obteve uma solução das equações de Einstein no vácuo, para a métrica com simetria axial e estacionária:

$$\begin{cases} dS^2 = \frac{f_0^2}{\Sigma_0} (dt - \omega_0 d\phi)^2 - \frac{\Sigma_0}{f_0^2} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ \Delta_0 = r^2 - 2M_K r + a_0^2, \quad \Sigma_0 = r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta, \\ f_0^2 = r^2 - 2M_K r + a_0^2 \cos^2 \theta, \quad \omega_0 = -\frac{a_0}{f_0^2} 2M_K r \sin^2 \theta, \end{cases} \quad (1.14)$$

onde M_K é a massa e a_0 o parâmetro ligado ao momento angular orbital. Observamos que se fizermos $a_0 = 0$ em (1.14), recaímos na solução de Schwarzschild, logo, a solução de Kerr é uma generalização de (1.12). Esta solução apresenta dois horizontes de Killing⁹ [23] em $r_{\pm} = M_K^2 \pm \sqrt{M_K^2 - a_0^2}$, para $\Delta_0(r_{\pm}) = 0$. A singularidade está na região onde $\Sigma_0 = 0$ [112], que para $\cos \theta = 0$, fica em $r = 0$. Aqui aparece uma nova região do espaço-tempo

⁸Todas as soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein são independentes do tempo numa região em que não há matéria e (ou) energia.

⁹Região onde existe uma hiper-superfície nula, em que os campos de Killing também são nulos. No caso de Kerr temos os campos de Killing (campos que satisfazem a equação $\mathcal{L}_{\zeta} g_{\mu\nu} = 0$, onde \mathcal{L}_{ζ} é a derivada de Lie na direção ζ) dados por $\chi^{\alpha} = \zeta^{\alpha} + \Omega_H \psi^{\alpha}$, onde ζ^{α} e ψ^{α} são as componentes dos vetores de Killing das simetrias temporal e axial, e Ω_H a velocidade angular.

chamada ergo-esfera, onde $f_0^2 = 0$, e qualquer partícula massiva deve, obrigatoriamente, ter uma velocidade angular de rotação orbital diferente de zero. A generalização desta solução foi feita em 1965 por Newman et al [38] para uma métrica axial estacionária com campo de Maxwell acoplado.

Na década de 60, houve muita especulação em torno dessas soluções, principalmente com os trabalhos iniciados por Tolman-Oppenheimer-Volkoff [32, 33]. A formação de uma estrutura bizarra do espaço-tempo, com uma singularidade encoberta por um horizonte de eventos, foi muito analisada pelo processo de colapso gravitacional de estruturas conhecidas.

A história sobre a utilização do termo buraco negro é relatada, por especialistas, como segue. Em 1967, John A. Wheeler, através de uma carta de convite a um colega, utiliza pela primeira vez o termo buraco negro [39, 40] para estas estruturas, que foi usado, posteriormente, por muitos outros pesquisadores. Hoje a nomenclatura usual é esta.

Na década de 70, muitos outros avanços foram obtidos, por exemplo: o teorema sem cabelo¹⁰ de Bekenstein [41, 42, 43, 44], os teoremas de singularidade¹¹ por Hawking e Ellis [8], a termodinâmica de buracos negros¹².

Muitas outras soluções de buracos negros surgiram, como as assintoticamente não-planas, como o de Schwarzschild-de Sitter e outras mais complicadas como o buraco negro topológico de Kerr-Newman-Taub-NUT-AdS [48]. Outras soluções de buracos negros surgiram de novos métodos de obtenção, por meio das simetrias das equações, como por exemplo: o de Ernst [49], o de Maison [50] e o de espalhamento inverso [51]. Os de integração direta das equações podem ser listados em [52]. Todas as soluções mais conhecidas citadas acima são as únicas possíveis, isso é estabelecido pelos teoremas de unicidade das soluções [53].

¹⁰Os buracos negros advindos da teoria de Einstein só possuem, exteriormente, campos escalares. Isso implica que os únicos parâmetros físicos que um buraco negro pode possuir, em geral, são sua massa, sua carga e seu momento angular orbital.

¹¹Que estabelecem as condições para uma variedade diferenciável não possuir singularidades.

¹²Termodinâmica Clássica, por Bekenstein, Smarr, Carter, Hawking, Bardeen, resumida em [45], e semi-clássica por Hawking, Bekenstein, Unruh, etc..., ver Birrel e Dives [47].

As evidências indiretas que são cogitadas como advindas de buracos negros reais no universo, ainda são poucas: a emissão de raio-X pelos supostos discos de acreção de buracos negros [55, 54, 39], e os efeitos em lentes gravitacionais [56, 57, 58].

Terminamos esta seção citando algumas das várias generalizações de buracos negros: os quasi-buracos negros [59], os anéis negros [60], os buracos negros multidimensionais [61], as membranas negras [63], os buracos negros topologicamente massivos [62], os buracos negros acústicos [64].

Na próxima seção, veremos a estrutura causal das soluções de buracos negros, focando a de Reissner-Nordström.

1.3 Estrutura Causal

O espaço-tempo físico da RG é matematicamente uma variedade pseudo-riemanniana¹³ diferenciável, globalmente hiperbólica¹⁴ que possui somente geodésicas extensíveis (o parâmetro afim geodésico assume todos os valores reais), exceto nas regiões que possuem singularidades, que devem, obrigatoriamente, ser cobertas por horizontes geométricos. Assim, como não se pode ver geodésicas que acabam em algum ponto no mundo físico real, pois seria como se algo deixasse de existir num determinado instante, temos que fazer a análise, sempre que obtemos uma nova solução das equações de Einstein, da estrutura causal do espaço-tempo, para determinar se são física ou não.

A metodologia da década de 70, usada para determinar se o espaço-tempo é globalmente hiperbólico, é completamente abrangente [8, 23] e não encaixa-se em nosso objetivo aqui. Então, vamos seguir uma metodologia alternativa, mas equivalente¹⁵, para estruturas simples como as que veremos.

¹³A condição de espaço métrico é generalizada para métrica que não é positivo-definida.

¹⁴Defini-se variedade globalmente hiperbólica como toda variedade diferenciável que pode ser folhiada localmente em $\mathbb{R} \times \Sigma$ (exceto nas singularidades), onde Σ é uma hipersuperfície de Cauchy, ou seja, uma hipersuperfície por onde passam todas as curvas causais, definindo assim uma direção passada e futura.

¹⁵Estruturas topologicamente mais complexas, não podem ser analisadas por esse método, necessitando, assim, dos teoremas de singularidade.

Vamos considerar como exemplo a solução de Reissner-Nordström (1.13), pois possui dois horizontes geométricos e servirá para a formulação da metodologia. O procedimento consiste em averiguar todos os pontos, ou regiões do espaço-tempo, que apresentem degenerescência ou singularidade aparente na métrica, ou nos escalares geométricos definidos em (1.7) e (1.9). Para isso, faremos a análise das geodésicas, pela equação das geodésicas, e da própria métrica, quando houver simetria esférica.

Começamos definindo a equação das geodésicas. A densidade lagrangeana, para um espaço-tempo com simetria axial e estacionário, é definida como¹⁶

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left[g_{00}\dot{t}^2 + 2g_{03}\dot{t}\dot{\phi} + g_{11}\dot{r}^2 + g_{22}\dot{\theta}^2 + g_{33}\dot{\phi}^2\right] = \epsilon, \quad (1.15)$$

onde $\epsilon = -1$ para geodésicas tipo-espaço, $\epsilon = 0$ para geodésicas tipo-nula e $\epsilon = 1$ para geodésicas tipo-tempo. Definindo os momentos canonicamente conjugados às coordenadas t e ϕ como¹⁷

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = g_{00}\dot{t} + g_{03}\dot{\phi} = E, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = g_{03}\dot{t} + g_{33}\dot{\phi} = L, \quad (1.16)$$

podemos substituí-los em (1.15) para obter

$$\dot{r}^2 + g^{11}g_{22}\dot{\theta}^2 = g^{11}\epsilon - \left[\frac{g^{11}}{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2}\right] [g_{33}E^2 + g_{00}L^2 - 2g_{03}LE]. \quad (1.17)$$

Esta é a chamada equação das geodésicas, pois depende de qual tipo de geodésica se trata, as quais são determinadas pelo parâmetro ϵ . No caso de Reissner-Nordström, a métrica é diagonal, logo $g_{03} = 0$. Tomando geodésicas no plano equatorial $\theta = \pi/2$, e substituindo as componentes da métrica (1.13) em (1.17), temos:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (1.18)$$

¹⁶Defini-se usualmente esta quantidade, fazendo a extremização do parâmetro geodésico afim, entre dois pontos. Existem outras formas de definir esta quantidade, mas que mostram-se equivalentes. Nossa escolha é feita no intuito de abreviar enormemente os cálculos.

¹⁷No caso da métrica possuir simetria axial e ser estacionária, ela não depende do tempo e da coordenada ϕ , logo, podemos ver que os momentos canonicamente associados a essas coordenadas são conservados. Então E e L são constantes de movimento.

Como obtivemos a equação das geodésicas para o caso de Reissner-Nordström (RN), guardemos este resultado. O segundo passo para o procedimento consiste em parametrizar a métrica em coordenadas adequadas. Como RN possui simetria esférica, então, para qualquer solução com esta simetria, parametrizaremos a métrica de tal forma que seja conformalmente minkowskiana e a coordenada radial seja proporcional ao parâmetro geodésico afim próximo ao horizonte de eventos. Assim, qualquer solução esfericamente simétrica deve ficar na forma:

$$dS^2 = H(x) [dt^2 - dy^2 - F(x)d\Omega^2] , \quad (1.19)$$

onde

$$H(x) = g_{00}(x) , \quad dy = \pm \sqrt{-g^{00}(x)g_{11}(x)}dx , \quad F(x) = -g^{00}(x)g_{22}(x) , \quad (1.20)$$

e x é uma coordenada radial proporcional ao parâmetro geodésico afim próximo ao horizonte de eventos.

Para a solução de RN, pela equação (1.18), vemos que se $r \rightarrow r_+$, temos $r \sim s$, com s sendo o parâmetro geodésico afim. Então, podemos parametrizar a solução de RN na forma (1.19), onde:

$$H(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) , \quad dy = \pm \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr , \quad F(r) = \frac{r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)} \quad (1.21)$$

Agora, vamos analisar os pontos que apresentam problemas diretamente na métrica, lembrando que somente para este caso em particular, pois poderia haver outros pontos que apresentassem problemas nos escalares geométricos. A primeira região é a chamada infinito futuro. Se fizermos o limite $r \rightarrow +\infty$ em (1.18) e (2.4), temos $ds \propto \pm dr$, o que nos mostra a extensividade do parâmetro geodésico afim, e $H \rightarrow 1, y, F \rightarrow \infty$, o que nos caracteriza um infinito futuro. Como neste limite temos que o elemento de linha de RN fica sendo

$$dS^2 \sim [dt^2 - dy^2 - y^2 d\Omega^2] , \quad (1.22)$$

logo, a parte do diagrama de Penrose¹⁸ [8, 23] que representa o infinito futuro da solução de RN é idêntica a de Minkowski para esta região, conforme mostra a Figura 1(b). A outra região que analisaremos é a do horizonte de eventos $r = r_+$. Fazendo o limite $r \rightarrow r_+$ ($q \neq M$), pela direita, em (1.18) e (2.4), temos $ds \propto \pm dr$, o que reflete a analiticidade e regularidade do horizonte, e $H \rightarrow 0, y, F \rightarrow \infty$, o que caracteriza um horizonte. Vemos aqui que a diferença entre o infinito futuro e o horizonte de eventos, é que H vai a zero neste caso, mostrando o caráter de região conformalmente nula. Esta, separa a estrutura causal do espaço-tempo em antes deste horizonte e depois dele. Geodésicas podem atravessá-lo, mas as causais, tipo-tempo e nulas, não retornam. Assim, a representação no diagrama de Penrose dessa região é idêntica, mas invertida, ao infinito futuro do caso de Minkowski, como mostra a Figura 1.1(a). Então, juntamos as partes das representações do infinito futuro e do horizonte de eventos, dando assim um losango. Nesta região, as geodésicas tipo-tempo estão distribuídas como mostra a Figura 1.2(b), as tipo-nula como retas de 45 graus, e as tipo-espaço na Figura 1.2(a).

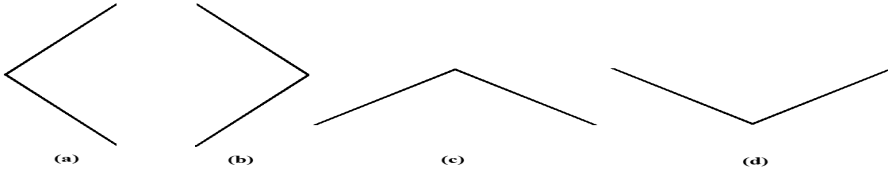


Figura 1.1: Partes gráficas correspondentes a regiões conformes.

Na região $r_- < r < r_+$, a componente g_{00} da métrica muda de sinal¹⁹, ou seja, os vetores de Killing tipo-tempo, passam a ser tipo-espaço²⁰, logo, as geodésicas tipo-tempo

¹⁸O diagrama que representa em uma figura plana (2D) a estrutura causal conforme do espaço-tempo, delimitando as regiões do infinito passado e futuro em uma representação compacta. Este diagrama nos mostra diretamente as singularidades, caso haja, do espaço-tempo.

¹⁹Isto está relacionado a paridade do horizonte. Como neste caso temos um horizonte ímpar, existe uma mudança de sinal, mas quando houver um horizonte par, como no caso RN extremo, não haverá mudança no sinal da métrica.

²⁰Como vimos na seção de definições, a métrica determina a norma de um vetor. Para o vetor de Killing ζ (satisfaz a equação de Killing $\mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} = 0$, onde \mathcal{L}_ζ é a derivada de Lie na direção de ζ), temos

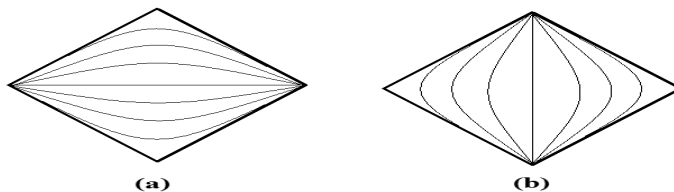


Figura 1.2: Geodésicas na estrutura conforme.

e espaço trocam a distribuição mostrada na Figura 1.2a e 1.2b. Fazendo o limite $r \rightarrow r_+$, pela esquerda, temos o mesmo resultado anterior, mas a representação desta parte no diagrama de Penrose, devido a mudança de sinal de g_{00} , fica sendo a da Figura 1.1d. Fazendo o limite $r \rightarrow r_-$, pela direita, temos $ds \propto \pm dr$, o que reflete a analiticidade e regularidade do horizonte interno $r = r_-$, e $H \rightarrow 0, y, F \rightarrow \infty$, o que caracteriza novamente um horizonte. Como as geodésicas tipo-espaço e tempo mudaram entre si, a representação deste horizonte interno é dada pela Figura 1.1c. Juntando os resultados dos dois limites, temos novamente um losango, mas com geodésicas tipo-tempo na Figura 1.2a e espaço na Figura 1.2b. Esta outra região que compõe a estrutura causal do espaço-tempo deve ser colada, para que haja continuidade na solução, a anterior, formando assim a Figura 1.3a.

Na região $0 < r < r_-$, a componente g_{00} da métrica, volta a mudar de sinal. Aqui temos novamente um horizonte ímpar. Fazendo o limite $r \rightarrow r_-$, pela esquerda, temos o mesmo resultado anterior, mas a representação é dada pela Figura 1.1b. Fazendo o limite $r \rightarrow 0$, pela direita, temos a seguinte estrutura

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{ef}, \quad (1.23)$$

onde V_{ef} é o potencial efetivo. Neste limite $V_{ef} \rightarrow +\infty$, logo $\dot{r}^2 \rightarrow -\infty$, o que caracteriza uma singularidade. Nesta região as geodésicas param e a estrutura causal termina. Como $H \rightarrow +\infty, F \rightarrow 0$ e $y \rightarrow \mp\infty$, temos uma singularidade tipo-espaço²¹ que representamos

que se $\zeta^\mu \zeta_\mu = 1$, ele é tipo-tempo, se $\zeta^\mu \zeta_\mu = 0$, ele é tipo-nulo, se $\zeta^\mu \zeta_\mu = -1$, ele é tipo-espaço.

²¹A determinação do tipo de singularidade é feita pela análise dos valores de $H(x)$, $F(x)$ e y . Quando H, F e y divergem para infinito, a singularidade depende da distribuição das geodésicas, mas é sempre

por uma reta duplicada. Unindo os dois limites desta região, temos um triângulo, conforme a Figura 1.3b. Esta figura também deve ser colada com as regiões anteriores, para que haja continuidade na solução, logo, a representação é mostrada na Figura 1.3c.

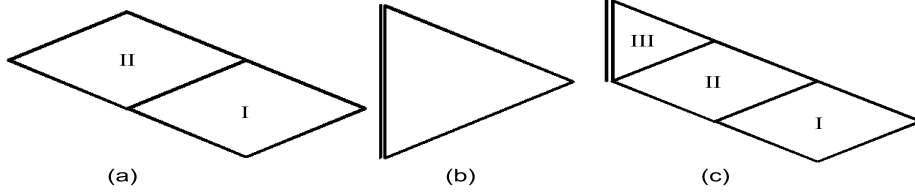


Figura 1.3: Partes gráficas correspondentes a regiões conformes.

Como devemos impor a continuidade da solução em todos os horizontes, temos que colar infinitas regiões uma nas outras. Quando isso é feito, estamos na realidade fazendo a extensão analítica máxima do espaço-tempo de RN, assim, aparecem infinitas regiões, as quais são meras cópias das originais, e infinitas singularidades. Na Figura 1.3c, as duas partes de cima do losango da região II são representações do horizonte interno r_- . Quando passamos para região $0 < r < r_-$, podemos passar pela parte esquerda da região II, para a região III, ou pela parte direita, para uma cópia III' da região III. Fazendo o mesmo em todos os horizontes, finalmente, o diagrama de Penrose para o buraco negro de RN é dado pela Figura 1.4, onde os pontos significam continuação indeterminada da figura.

Este método de construção do diagrama de Penrose, o qual nos possibilita a análise da estrutura causal do espaço-tempo, será usado para o estudo das novas soluções obtidas neste trabalho. Para uma exposição mais detalhada da estrutura causal de um espaço-tempo veja [8, 23, 65, 66].

representada por uma reta duplicada, no nosso caso. Se as geodésicas tipo-tempo distribuem-se como na Figura 1.2a, a singularidade é tipo-tempo, se pela Figura 1.2b, tipo-espaço. Quando y diverge ao infinito e H vai a zero, então a singularidade é tipo-luz.

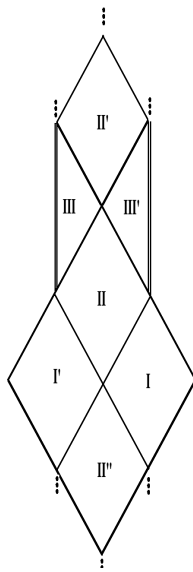


Figura 1.4: Partes gráficas correspondentes a regiões conformes.

Capítulo 2

Modelo Sigma Acoplado à Gravitação

Começamos o capítulo com a apresentação do modelo Sigma para a teoria Einstein-Maxwell-Dilaton, após descrevemos brevemente o mecanismo para a obtenção das soluções de Rasheed e de Kerr-Sen.

2.1 O Modelo

Historicamente, o modelo Sigma foi introduzido por Schwinger [67], e usado em teoria de campos por Gell-Mann e Levy [68] para descrever os píons. No início, o modelo foi introduzido em quatro dimensões e utilizado para descrever a fenomenologia da corrente axial parcialmente conservada; não tinha inicialmente caráter geométrico. Mas, um dos fracassos do modelo foi a previsão da partícula σ , a qual nunca foi observada. Ainda, para completar seu abandono por alguns anos, o modelo não é renormalizável [69]. Alguns anos mais tarde, volta-se a atenção para a primeira generalização proposta por Eichenherr [70] em 1978 onde o CP^{N-1} é proposto como grupo de simetria. No início da década de 80, demonstra-se que os modelos Sigma, com estruturas diferentes do original, são renormalizáveis [71], e estes voltam ao cenário, dentro do contexto de álgebras de correntes e bosonização não-abeliana onde neste momento o termo de Wess-Zumino é agregado ao modelo Sigma por Witten [72, 73]. Em 1984-85, o modelo de Wess-Zumino é supersimetrizado [74] e seus aspectos começam a ser estudados [75].

No caso em que o modelo Sigma é acoplado à gravitação, que é o nosso interesse aqui,

a primeira aplicação formal, como estrutura algébrica bem definida, foi implementada por Maison [50] em 1979. Esse método de obtenção, iniciado por Maison, de novas soluções das equações de Einstein utilizando suas simetrias, ou, de igual modo, as simetrias do espaço alvo¹, foi largamente estudado e estabelecido como consistente [76, 77, 78, 79, 80, 81]. Um pequeno resumo pode ser visto em [82].

Introduzimos a teoria chamada Einstein-Maxwell-Dilaton (EMD), pela ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [\mathcal{R} - 2\eta_1 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \eta_2 e^{2\lambda\varphi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] , \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo gera a teoria de Einstein, o segundo é o acoplamento do campo escalar com a gravitação e o terceiro é um termo de interação entre o campo escalar e o de Maxwell, acoplados à gravitação. Os parâmetros η_1 e η_2 assumem valores ± 1 , e $\lambda \in \mathbb{R}$. O tensor de Maxwell é definido por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ sendo o quadri-potencial.

Esta ação pode ser proveniente das ações efetivas da teoria de cordas a baixa energia, por uma redução dimensional, fixando o parâmetro λ . Os parâmetros η_1 e η_2 determinam o sinal em relação ao termo de gravitação. Então, quando $\eta_1 = \eta_2 = +1$, a teoria é a usual EMD. Quando $\eta_1 = -1, \eta_2 = +1$, chamamos a teoria de Einstein-Maxwell-anti-Dilaton ($EM\bar{D}$), quando $\eta_1 = +1, \eta_2 = -1$, chamamos a teoria de Einstein-anti-Maxwell-Dilaton ($E\bar{M}D$), e quando $\eta_1 = \eta_2 = -1$, chamamos a teoria de Einstein-anti-Maxwell-anti-Dilaton ($E\bar{M}\bar{D}$).

A teoria $EM\bar{D}$ é constituída pelo termo de gravitação, mais o termo do campo de Maxwell e o termo de um campo escalar com o sinal oposto ao normal, o que implica em uma energia cinética negativa para este campo. Chamamos normalmente este campo escalar de fantasma, devido a sua natureza exótica não apresentar representação de partícula elementar conhecida hoje. A teoria $E\bar{M}D$ é constituída pelo termo de gravitação, mais o termo do campo dilatônico e o termo de um campo de spin 1 com o sinal oposto ao de Maxwell. Chamamos normalmente este campo de spin 1 de fantasma. Já a teoria $E\bar{M}\bar{D}$, é constituída pelo termo de gravitação, mais o termo de um campo escalar fantasma e um termo de um campo fantasma de spin 1.

¹Espaço-tempo onde as coordenadas são os diferentes graus de liberdade do sistema físico.

Vamos começar pela construção do modelo Sigma para o caso da teoria Einstein-(anti) Maxwell-Dilaton², que nos servirá de base para construção de outras teorias. O modelo Sigma da teoria EMD é advindo de uma redução dimensional da ação de Einstein-Hilbert no vácuo, em 5D. Essa redução dimensional é feita no apêndice A, o que resulta em uma nova métrica reduzida a 4D. A teoria é então dada pela ação (2.1), com $\eta_1 = 1$ e $\lambda = \sqrt{3}$.

Para que o modelo Sigma seja implementado, é necessário definirmos primeiramente quando podemos ter esse modelo.

Definindo:

1. O espaço-tempo como uma variedade diferenciável pseudo-riemanniana M , com métrica ${}^{(5)}g_{\mu\nu}$, com 5 dimensões e coordenadas x^β .
2. O espaço alvo como uma variedade diferenciável N , com métrica G_{AB} , com n dimensões e coordenadas Φ^A .

Para uma imersão³ de N em M em que existe um mapa harmônico $\Phi(x^\beta)$, então o sistema admite um modelo Sigma. A ação deste modelo é dada por

$$S = \int d^5x \sqrt{|{}^{(5)}g|} {}^{(5)}g^{\mu\nu} G_{AB} \partial_\mu \Phi^A \partial_\nu \Phi^B . \quad (2.2)$$

Esta ação é invariante por transformações gerais das coordenadas Φ^A de N . Uma possível transformação é a infinitesimal isométrica $\Phi'^A = \Phi^A + \zeta^A$, onde ζ^A são as componentes do vetor de Killing do espaço alvo N . Um dos principais interesses em estudar as simetrias geradas pelas transformações infinitesimais é que as transformações finitas, advindas das infinitesimais, podem gerar novas soluções das equações de Einstein, a partir de uma solução já conhecida. Em particular, as teorias de Einstein, Einstein-Maxwell (EM), EMD e Einstein-Maxwell-Dilaton-Áxion (EMDA) admitem este modelo [49, 83, 84, 85, 86, 87].

²O (anti) na frente do Maxwell significa que generalizamos a construção do modelo Sigma para o caso em que o campo de Maxwell pode ser tomado com uma contribuição de densidade de energia negativa, invertendo assim o sinal usual do acoplamento com a gravidade.

³Um mapeamento $f : N \rightarrow M$, localmente bijetor e inversível.

O modelo Sigma acoplado à gravitação é advindo da redução dimensional da variedade em 5D para 3D. A redução dimensional é feita da seguinte forma. Para uma métrica em 5D com simetria estacionária em duas coordenadas x^4 e x^5 , existem dois vetores de Killing $\zeta_{(4)}$ e $\zeta_{(5)}$ que comutam na álgebra de Lie do espaço tangente⁴ à variedade. Com o auxílio do projetor

$$\Pi_{AB} = {}^{(5)}g_{AB} - \lambda^{ab}\zeta_{(a)A}\zeta_{(b)B}, \quad (2.3)$$

onde $A, B = 1, \dots, 5$, $a, b = 4, 5$, $\lambda^{ab} = {}^{(5)}g_{AB}\zeta_{(a)}^A\zeta_{(b)}^B$, e os $\zeta_{(a)A}$ são as componentes dos vetores de Killing, podemos definir a métrica no espaço-tempo em 3D como sendo

$$dS_{(3)}^2 = \Pi_{AB}dx^A dx^B. \quad (2.4)$$

Fazendo as componentes dos vetores de Killing como $\zeta_{(4)}^A = \delta_4^A$ e $\zeta_{(5)}^B = \delta_5^B$ ⁵, temos

$$\begin{cases} {}^{(5)}g_{ab} = \lambda_{ab}, & {}^{(5)}g_{ai} = \zeta_{(a)i}, & \Pi_{Aa} = 0, \\ dS_{(3)}^2 = {}^{(3)}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Podemos então definir 3-vetores no espaço em 3D, cujas componentes covariantes são dadas por $V_i^{(a)} = \lambda^{ab}\zeta_{(b)i}$, e parametrizar a métrica em 5D por

$$\begin{cases} {}^{(5)}g_{ab} = \lambda_{ab}, & {}^{(5)}g_{ia} = \lambda_{ab}V_i^{(b)}, & {}^{(5)}g_{ij} = {}^{(3)}\bar{g}_{ij} + \lambda_{ab}V_i^{(a)}V_j^{(b)}, \\ {}^{(5)}g^{ij} = {}^{(3)}\bar{g}^{ij}, & {}^{(5)}g^{ia} = -{}^{(3)}\bar{g}^{ij}V_j^{(a)}, & {}^{(5)}g^{ab} = \lambda^{ab} + {}^{(3)}\bar{g}^{ij} + V_i^{(a)}V_j^{(b)}, \end{cases} \quad (2.6)$$

ou, por uma transformação conforme ${}^{(3)}\bar{g}_{ij} = \tau^{-1}{}^{(3)}h_{ij}(x^k)$, onde $\tau = |\det[\lambda_{ab}]|$ e ${}^{(3)}h_{ij}$ é a nova métrica em 3D, a métrica em 5D fica sendo

$$dS_{(5)}^2 = \lambda_{ab}(x^k) [dx^a + V_i^a(x^k)dx^i] [dx^b + V_j^b(x^k)dx^j] + \tau^{-1} {}^{(3)}h_{ij}(x^k)dx^i dx^j. \quad (2.7)$$

⁴Espaço onde são definidos os vetores de uma variedade diferenciável.

⁵Escolhendo um sistema de coordenadas particular.

A conexão (1.3) em 5D fica sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} (5)\Gamma^a_{bc} = -\frac{1}{2}\tau V_i^{(a)} \partial^i \lambda_{ab} \ , \quad (5)\Gamma^i_{ab} = \frac{1}{2}\tau \partial^i \lambda_{ab} \ , \\ (5)\Gamma^a_{bj} = -\frac{1}{2}\tau \lambda_{bc} h^{ik} V_i^{(a)} F_{kj}^{(c)} - \frac{1}{2}\tau V_i^{(a)} V_j^{(c)} \partial^i \lambda_{bc} + \frac{1}{2} (\lambda^{-1} \partial_j \lambda)_b^a \ , \\ (5)\Gamma^i_{ja} = \frac{1}{2}\tau V_j^{(b)} \partial^i \lambda_{ab} - \frac{1}{2}\tau \lambda_{ab} F_j^{(b)i} \ , \\ (5)\Gamma^i_{jk} = (3)\Gamma^i_{jk} - \frac{1}{2}\tau^{-1} (\delta_j^i \partial_k \tau + \delta_k^i \partial_j \tau - h_{ik} \partial^i \tau) + \frac{1}{2}\tau V_k^{(a)} V_j^{(b)} \partial^i \lambda_{ab} + \ , \\ \quad -\frac{1}{2}\tau^{-1} (V_k^{(a)} F_j^{(b)i} + V_j^{(a)} F_k^{(b)i}) \ , \\ (5)\Gamma^a_{kj} = \frac{1}{2} \left((3)\nabla_k V_j^{(a)} + (3)\nabla_j V_k^{(a)} \right) + \frac{1}{2} (V_j^{(c)} \partial_k \lambda_{bc} + V_k^{(c)} \partial_j \lambda_{bc}) \ , \\ \quad + \frac{1}{2}\tau^{-1} V_n^{(a)} (\delta_j^n \partial_k \tau + \delta_k^n \partial_j \tau - h_{jk} \partial^n \tau) \ , \\ \quad -\frac{1}{2}\tau^{-1} h^{in} V_n^{(a)} (\lambda_{cb} V_j^{(c)} F_{ik}^{(b)} + \lambda_{cb} V_k^{(c)} F_{ij}^{(b)} + V_j^{(c)} V_k^{(b)} \partial_i \lambda_{cb}) \ , \end{array} \right. \quad (2.8)$$

onde $(3)\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{in} (\partial_j h_{nk} + \partial_k h_{nj} - \partial_n h_{jk})$ e $F_{ij}^{(a)} = \partial_i V_j^{(a)} - \partial_j V_i^{(a)}$. Introduzindo as quantidades $\omega_{(a)A} = \epsilon_{ABCDE} \zeta_{(4)}^B \zeta_{(5)}^C (5)\nabla^D \zeta_{(a)}^E$, onde $\epsilon_{12345} = -\sqrt{|(5)g|}$, e lembrando que $\zeta_{(a)}^A = \delta_a^A$, temos $\omega_{(a)i} = \epsilon_{ijk} (5)\nabla^k \zeta_{(a)}^j$, $\omega_{(a)b} = 0$ e então

$$\omega_{(a)i} = -\tau h^{-\frac{1}{2}} \lambda_{ab} h_{in} \epsilon^{nj k} \partial_k V_j^{(b)} \ , \quad (2.9)$$

com $h = -\det [h_{ij}]$. Os $\omega_{(a)i}$ são duais aos 3-vetores $V_j^{(b)}$, logo, esta relação é chamada de equação de dualidade.

Fazendo a variação funcional da ação (2.2) em relação a métrica em 5D, temos as equações de movimento $(5)R_{AB} = 0$. Separando as equações em termos 3D e dos campos, como

$$\left\{ \begin{array}{l} (3)R_{ij} = \frac{1}{4} Tr(\lambda^{-1} \partial_i \lambda \lambda^{-1} \partial_j \lambda) + \frac{1}{4} \tau^{-2} \partial_i \tau \partial_j \tau - \frac{1}{2} \tau^{-1} \omega_{(a)i} \lambda^{ab} \omega_{(b)j} \ , \\ (3)\nabla_i \partial^i \lambda_{ab} = (\partial_i \lambda \lambda^{-1} \partial^i \lambda)_{ab} + \tau^{-1} h^{ij} \omega_{(a)i} \omega_{(b)j} \ , \\ (3)\nabla_i \omega_{(a)j} - (3)\nabla_j \omega_{(a)i} = 0 \ , \end{array} \right. \quad (2.10)$$

com o auxílio da redefinição $\omega_{(a)i} = \partial_i \omega_a$, onde $a = 4, 5$, podemos reescrever as equações de uma forma matricial. Definindo a matriz de Maison

$$\chi = \begin{bmatrix} \lambda_{44} + \tau^{-1} \omega_4^2 & \lambda_{45} + \tau^{-1} \omega_4 \omega_5 & \tau^{-1} \omega_4 \ , \\ \lambda_{54} + \tau^{-1} \omega_4 \omega_5 & \lambda_{55} + \tau^{-1} \omega_5^2 & \tau^{-1} \omega_5 \ , \\ \tau^{-1} \omega_4 & \tau^{-1} \omega_5 & \tau^{-1} \end{bmatrix} \ , \quad (2.11)$$

as equações de movimento (2.10) ficam sendo

$$\begin{cases} {}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{4}Tr[\chi^{-1}\partial_i\chi\chi^{-1}\partial_j\chi], \\ {}^{(3)}\nabla_i(\chi^{-1}\partial^i\chi) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Essas equações podem ser provenientes de uma ação em 3D, chamada ação do modelo Sigma acoplado à gravitação

$$S_\sigma = \int d^3x\sqrt{h} \left[{}^{(3)}R - \frac{1}{4}Tr(\chi^{-1}\partial_i\chi\chi^{-1}\partial^i\chi) \right] = \int d^3x\sqrt{h}h^{ij} [{}^{(3)}R_{ij} - G_{AB}\partial_i\Phi^A\partial_j\Phi^B], \quad (2.13)$$

onde os Φ^A são campos e G_{AB} é a métrica do espaço alvo. Logo, o elemento de linha desse espaço é dado por

$$dl^2 = G_{AB}d\Phi^A d\Phi^B = \frac{1}{4}Tr(\chi^{-1}d\chi)^2. \quad (2.14)$$

Tanto a ação (2.13) quanto a métrica (2.14) são invariantes por transformações de matrizes unitárias e simétricas. Então, devido esse espaço ter a propriedade $\nabla_A R^A_{BCD} = 0$, o espaço alvo é dito um espaço simétrico.

Como uma transformação unitária

$$\chi \rightarrow \bar{\chi} = P^T \chi P, \quad P \in SL(3, \mathbb{R}), \quad (2.15)$$

deixa invariante as equações de movimento (2.12), logo, as duas soluções representadas pelas matrizes χ e $\bar{\chi}$, possuem a mesma métrica 3D h_{ij} , pois ${}^{(3)}\bar{R}_{ij} = {}^{(3)}R_{ij}$. Assim, podemos formular um método de obtenção de novas soluções através de soluções conhecidas. Quando obtemos uma nova solução carregada e estática, a qual tenha a mesma métrica 3D da solução de Schwarzschild, podemos determinar a matriz de transformação P , em (2.15), que relaciona a nova solução com a antiga conhecida. Isso significa que existe uma forma de transformar uma solução neutra, sem carga, das equações de Einstein, para uma outra carregada. Com isso, podemos transformar, com a mesma matriz P , a solução de Kerr, que é descarregada, para uma nova solução carregada estacionária. Pela conclusão anterior, essa nova solução terá a mesma métrica 3D da de Kerr.

Para o caso particular⁶ em que os campos Φ^A em (2.13) dependem unicamente do potencial $\sigma(x^\beta)$, ou seja, $\Phi \equiv \Phi[\sigma(x^\beta)]$, podemos sempre escolher o potencial σ harmônico, isto é, $\Delta\sigma = 0$. Isso se prova da seguinte forma. Se fizermos a variação funcional da ação (2.13), em relação aos campos Φ^A , temos [76]

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\sqrt{h} h^{ij} G_{AB} \partial_j \Phi^B \right) &= 0, \\ \frac{d\Phi^A}{d\sigma} {}^{(3)}\nabla_i \partial^i \sigma + \left(\frac{d^2\Phi^A}{d\sigma^2} + \Gamma^A_{BC} \frac{d\Phi^B}{d\sigma} \frac{d\Phi^C}{d\sigma} \right) \partial_i \sigma \partial^i \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como a liberdade de transformações gerais de coordenadas x^β se traduz em transformações gerais para o potencial σ , podemos escolher um referencial em que

$$\frac{d^2\Phi^A}{d\sigma^2} + \Gamma^A_{BC}(\Phi^D) \frac{d\Phi^B}{d\sigma} \frac{d\Phi^C}{d\sigma} = 0, \quad (2.17)$$

e de (2.16), teremos $\Delta\sigma = 0$. A equação (2.17) nos mostra que podemos interpretar a escolha do potencial harmônico como um movimento geodésico no espaço alvo, em que o parâmetro geodésico é o potencial σ .

Dessa forma, as equações (2.12) podem ser reescritas como

$$\begin{cases} {}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{4} Tr \left(\chi^{-1} \frac{d\chi}{d\sigma} \right)^2 \partial_i \sigma \partial_j \sigma, \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\chi^{-1} \frac{d\chi}{d\sigma} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

A segunda equação pode ser integrada facilmente, e com uma parametrização adequada [89], resulta em

$$\begin{cases} \chi = \eta e^{N\sigma}; N = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} x-a & b \\ -\eta_2 b & a \end{bmatrix} \\ x = Tr[M]; y = \det[M] = \eta_2 b^2 + ax - a^2 \\ \eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [\lambda_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta_2 \end{bmatrix} e^{M\sigma}, \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $\eta_2 = 1$ para o caso EMD e $\eta_2 = -1$ para o caso $\overline{\text{EMD}}$. Com essa parametrização da matriz de Maison, as equações de movimento e o elemento de linha do espaço alvo, ficam

⁶Veja generalização para dois potenciais em [88].

sendo

$$\begin{cases} {}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{4}Tr(N^2) \partial_i \sigma \partial_j \sigma , \\ \Delta \sigma = 0 , \\ dl^2 = \frac{1}{4}Tr(N^2) d\sigma^2 , \end{cases} \quad (2.20)$$

onde, pelas simetrias de χ , temos $Tr[N] = 0$ e $N^T = \eta N \eta$.

As soluções, para o espaço-tempo normal, com $Tr[N^2] > 0$ [90] são singulares e caracterizam os buracos negros; as soluções com $Tr[N^2] = 0$ [91] são regulares e caracterizam as multicentro; e as com $Tr[N^2] < 0$ [92, 93] são regulares e caracterizam os buracos de minhoca. Quando $Tr[N^2] = 0$, a métrica h_{ij} é plana, pois o tensor de Ricci é nulo por (2.20). Como em 3D podemos escrever o tensor de Riemann em termos de combinação linear do de Ricci, o tensor de Riemann se anula também, sendo o espaço 3D plano. Assim, uma possível solução para o potencial harmônico é

$$\sigma(r) = \sum_i \frac{c_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} . \quad (2.21)$$

Na próxima seção, faremos uma breve apresentação das soluções de Rasheed e Kerr-Sen.

2.2 As soluções de Rasheed e Kerr-Sen

2.2.1 Solução de Rasheed para teoria EMD

Utilizando o método de obtenção de novas soluções pelo modelo Sigma, Rasheed [94] constrói uma solução geral⁷ para a teoria EMD, com $\eta_1 = 1, \lambda = \sqrt{3}$ (Kaluza-Klein). Como não é nosso intuito a explicitação do formalismo completo nesta seção, vamos somente expor os passos básicos de como Rasheed procedeu. A solução de Kerr imersa em 5D é dada por:

$$\begin{cases} dS_{(5)}^2 = (dx^5)^2 + \frac{f_0^2}{\Sigma_0} (dt - \omega_0 d\phi)^2 - \frac{\Sigma_0}{f_0^2} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ \Delta_0 = r^2 - 2M_K r + a_0^2 ; \quad \Sigma_0 = r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta \\ f_0^2 = r^2 - 2M_K r + a_0^2 \cos^2 \theta ; \quad \omega_0 = -\frac{a_0}{f_0^2} 2M_K r \sin^2 \theta . \end{cases} \quad (2.22)$$

⁷Considerando simetria axial e acoplamento dos campos de Maxwell e dilaton.

Usando a equação de dualidade (2.9), com $\omega_{(a)i} = \partial_i \omega_a$, obtemos a matriz de Maison (2.11), para a solução de Kerr imersa em 5D:

$$\chi_K = \frac{1}{f_0^2} \begin{bmatrix} (r - 2M_K)^2 + a_0^2 \cos^2 \theta & 0 & -a_0 2M_K \cos \theta \\ 0 & f_0^2 & 0 \\ -a_0 2M_K \cos \theta & 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Agora, fazendo uma transformação $P = P_1 P_2 P_3$ em Kerr, pertencente ao grupo $SO(1, 2)$ ⁸, contendo dois boosts P_1 e P_2 , e uma rotação P_3 , chega-se a uma nova solução carregada eletricamente, magneticamente, com carga escalar⁹ e momento angular. As matrizes de transformação são dadas por

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \beta & \sinh \beta \\ 0 & \sinh \beta & \cosh \beta \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

onde os ângulos satisfazem a relação $\tan 2\gamma = \tanh \alpha \sinh \beta$, que vem do vínculo para a forma assintótica da matriz de Maison. Fazendo a transformação (2.15) na matriz da solução de Kerr, e usando novamente a equação de dualidade (2.9) para obtermos os campos e a métrica, com a definição da matriz de Maison, e fazendo uma translação $r \rightarrow r + M_K - M$, onde M é a massa da nova solução; a equação (A.11) nos fornece a solução de Rasheed

$$dS_{(4)}^2 = \frac{f}{\sqrt{AB}} (dt + \omega_3 d\phi)^2 - \frac{\sqrt{AB}}{f} \left[\frac{f}{\Delta} dr^2 + f d\theta^2 + \Delta \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.25)$$

⁸Esse grupo é o subgrupo de $SL(3, \mathbb{R})$ apropriado para manter a solução assintoticamente minkowskiana na teoria EMD.

⁹Ainda existem generalizações com carga de NUT (Newman, Tamburini e Unti [95, 96]) [97].

onde

$$\left\{ \begin{array}{l}
A = \left(r - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2P^2\Sigma}{(\Sigma - M\sqrt{3})} + a_0^2 \cos^2 \theta + \frac{2JPQ \cos \theta}{\left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - Q^2}, \\
B = \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{2Q^2\Sigma}{(\Sigma + M\sqrt{3})} + a_0^2 \cos^2 \theta - \frac{2JPQ \cos \theta}{\left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - P^2}, \\
\omega_3 = \frac{2J \sin^2 \theta}{f^2} \left[r - M + \frac{(M^2 + \Sigma^2 - P^2 - Q^2)\left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)}{\left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - Q^2} \right], \\
f = r^2 - 2Mr + P^2 + Q^2 - \Sigma^2 + a_0^2 \cos^2 \theta, \\
\Delta = r^2 - 2Mr + P^2 + Q^2 - \Sigma^2 + a_0^2, \\
2A_\mu dx^\mu = \frac{C}{B} dt + \left(\omega_5 + \frac{C}{B} \omega_3\right) d\phi, \\
C = 2Q \left(r - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2PJ \cos \theta \left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)}{\left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - P^2}, \\
\omega_5 = \frac{2P\Delta}{f^2} \cos \theta - \frac{2QJ \sin^2 \theta \left[r \left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right) + M \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} + \Sigma^2 - P^2 - Q^2 \right]}{f^2 \left[\left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - Q^2 \right]}.
\end{array} \right. \quad (2.26)$$

Os parâmetros físicos são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l}
M = M_K \frac{(1 + \cosh^2 \alpha \cosh^2 \beta) \cosh \alpha}{2\sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta}}, \\
\Sigma = M_K \frac{\sqrt{3}(1 - \cosh^2 \beta + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta) \cosh \alpha}{2\sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta}}, \\
Q = M_K \sinh \alpha \sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta}, \quad P = M_K \frac{\sinh \beta \cosh \beta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta}}, \\
J = a_0 M_K \cosh \beta \sqrt{1 + \sinh^2 \alpha \cosh^2 \beta},
\end{array} \right. \quad (2.27)$$

onde Σ é a carga escalar, P e Q são as cargas magnética e elétrica, J o momento angular orbital.

Da equação (2.27), podemos escrever as seguintes relações

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{Q^2}{\Sigma + M\sqrt{3}} + \frac{P^2}{\Sigma - M\sqrt{3}} = \frac{2\Sigma}{3}, \\
M_K^2 = M^2 + \Sigma^2 - P^2 - Q^2, \\
J^2 = a^2 \frac{\left[\left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - Q^2 \right] \left[\left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 - P^2 \right]}{M^2 + \Sigma^2 - P^2 - Q^2}.
\end{array} \right. \quad (2.28)$$

No caso particular em que $P = 0$ (teoria EMD), caso que compararemos posteriormente com uma nova solução obtida neste trabalho, pela resolução da equação de Killing, para o espaço alvo, temos dez vetores de Killing. Esses vetores satisfazem regras de comutação em que as constantes de estrutura formam a algebra $sl(3, \mathbb{R})$ [86], o que nos revela o espaço simétrico $SL(3, \mathbb{R})/SO(1, 2)$ como espaço alvo [79].

2.2.2 Solução de Sen para a teoria EMDA

A teoria Einstein-(anti)Maxwell-Dilaton-Áxion (EMDA ou $E\bar{M}DA$, $\lambda = 1$) é descrita pela ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{\|g\|} \left[R - 2\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} e^{4\varphi} \partial_\mu \kappa \partial^\mu \kappa + \eta_2 e^{-2\varphi} F^2 + \kappa F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right], \quad (2.29)$$

onde o primeiro termo gera a gravitação, o segundo é de interação do campo escalar com a gravitação, o terceiro é de interação entre os campos escalar e áxion (κ) com a gravitação, o quarto é a interação entre os campos de Maxwell e escalar com a gravitação e finalmente o quinto, é a interação entre os campos de Maxwell e áxion com a gravitação. A teoria é dita EMDA para $\eta_2 = 1$ e $E\bar{M}DA$ para $\eta_2 = -1$.

Parametrizando a métrica em 4D por

$$dS^2 = f(dt - \omega_i dx^i)(dt - \omega_j dx^j) + f^{-1} h_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad (2.30)$$

a construção do modelo Sigma para essa teoria, realizada em [87], é semelhante a da EMD, mas agora usamos os campos escalares elétrico v e magnético u , definidos como:

$$F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i v, \quad \kappa \tilde{F}^{ij} - e^{-2\varphi} F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2h}} \epsilon^{ijk} \partial_k u, \quad (2.31)$$

onde h é o determinante da métrica 3D, e um novo campo gravitacional χ , definido por

$$\partial_i \chi = - \left[\frac{f}{\sqrt{h}} h_{in} \epsilon^{nj k} \partial_j \omega_k + v \partial_i u - u \partial_i v \right] \quad (2.32)$$

onde ω_k é definido em (2.30).

A ação do modelo Sigma acoplado à gravitação é dada por

$$S_\sigma = \int d^3x \sqrt{h} \left[{}^{(3)}R - \frac{1}{4} Tr(M^{-1} \partial_i M M^{-1} \partial^i M) \right] = \int d^3x \sqrt{h} h^{ij} [{}^{(3)}R_{ij} - G_{AB} \partial_i \Phi^A \partial_j \Phi^B], \quad (2.33)$$

onde $\Phi^A \equiv (f, \chi, v, u, \varphi, \kappa)$ e M pode ser parametrizada por

$$M = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}Q \\ QP^{-1} & P + QP^{-1}Q \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$P = -\eta_2 e^{-2\varphi} \begin{bmatrix} v^2 - \eta_2 f e^{2\varphi} & v \\ v & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} vw - \chi & w \\ w & -\kappa \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

onde $w = u - \kappa v$.

O espaço simétrico para a teoria EMDA é o $Sp(4, \mathbb{R})/U(1, 1)$, e para a teoria $E\bar{M}DA$ é o $Sp(4, \mathbb{R})/U(2)$ [79].

Utilizando o mesmo procedimento da seção anterior¹⁰, Sen [6] obteve uma solução, conhecida como Kerr-Sen, para a teoria EMDA. Essa solução, quando expressa em termos do campo de áxion κ , fazendo $\partial_\mu \kappa = \frac{1}{3}e^{-4\varphi}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\nu\alpha\beta}$, fica sendo:

$$dS^2 = f(dt - \omega_3 d\phi)^2 - f^{-1} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.36)$$

$$f = \frac{r[r - 2(M + D)] + a_0^2 \cos^2 \theta}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad f_0^2 = r[r - 2(M + D)] + a_0^2 \cos^2 \theta, \quad (2.37)$$

$$\Delta_0 = r[r - 2(M + D)] + a_0^2, \quad v = \frac{\sqrt{2}qr}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad u = \frac{a_0 \cos \theta}{r}v, \quad (2.38)$$

$$e^{2\varphi} = \frac{r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad \kappa = \frac{2Da_0 \cos \theta}{r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad \omega_3 = -2J \sin^2 \theta \frac{r}{f_0^2}, \quad (2.39)$$

$$J = a_0 M, \quad M = M_{(K)} \cosh^2 \alpha, \quad q = \frac{2}{\sqrt{2}} M_{(K)} \sinh \alpha \cosh \alpha, \quad (2.40)$$

$$D = -M_{(K)} \sinh^2 \alpha, \quad (2.41)$$

onde $M_{(K)}$ é a massa do buraco negro de Kerr e α é o parâmetro do grupo de simetria.

Faremos a generalização da teoria EMDA, para a teoria $E\bar{M}DA$, que é a versão fantasma de EMDA, no capítulo 4.

¹⁰Faremos em detalhes para a solução fantasma obtida neste trabalho.

Capítulo 3

Buracos Negros Fantasmas Carregados

Iniciamos esse capítulo com a obtenção das equações de movimento da teoria Einstein-(anti)Maxwell-(anti)Dilaton, apresentando uma solução geral das mesmas para uma métrica esfericamente simétrica e estática. Após detalhamos quais classes de soluções são regulares e analíticas, prosseguindo com a análise de suas estruturas causais.

3.1 As Equações de Campo

Nesta seção vamos descrever a física de um sistema gravitacional acoplado, ou interagindo, a um campo escalar e ao campo eletromagnético de Maxwell. Este sistema é conhecido por Einstein-Maxwell-Dilaton (EMD).

A ação da teoria EMD é dada por:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [\mathcal{R} - 2\eta_1 g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \eta_2 e^{2\lambda\varphi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] , \quad (3.1)$$

como descrita na seção 2.1.

Para descrevermos a física destas teorias contidas na ação (3.1), devemos obter as equações de movimento provenientes desta ação. Fazendo a variação funcional da ação (3.1) em relação ao quadri-potencial A_α , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta A_\alpha(x')} &= \eta_2 \int dx^4 \sqrt{-g} e^{2\lambda\varphi} \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x')} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) (F^{\mu\nu}) \\
&= 2\eta_2 \int dx^4 \sqrt{-g} e^{2\lambda\varphi} [\nabla_\mu \delta^4(x-x') \delta_\nu^\alpha - \nabla_\nu \delta^4(x-x') \delta_\mu^\alpha] (F^{\mu\nu}) \\
&= 4\eta_2 \int dx^4 \{ \nabla_\mu [\sqrt{-g} e^{2\lambda\varphi} \delta^4(x-x') F^{\mu\alpha}] - \delta^4(x-x') \nabla_\mu [\sqrt{-g} e^{-2\lambda\varphi} F^{\mu\alpha}] \} \\
&= -4\eta_2 \sqrt{-g'} \nabla'_\mu [e^{2\lambda\varphi(x')} F'^{\mu\alpha}] = 0. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Fazendo a variação funcional da ação (3.1), em relação ao campo escalar φ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \varphi(x')} &= \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ -2\eta_1 g^{\mu\nu} \left(\nabla_\mu \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')} \nabla_\nu \varphi + \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')} \right) + \eta_2 F^2 \frac{\delta e^{2\lambda\varphi(x)}}{\delta\varphi(x')} \right\} \\
&= \int dx^4 \left\{ \nabla_\mu [-4\eta_1 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta^4(x-x') \nabla_\nu \varphi] + 4\eta_1 \sqrt{-g} \delta^4(x-x') \square \varphi + \right. \\
&\quad \left. + (2\eta_2 \lambda) \sqrt{-g} e^{2\lambda\varphi} F^2 \delta^4(x-x') \right\} \\
&= 4\eta_1 \sqrt{-g'} \left[\square' \varphi(x') + \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2 \lambda e^{2\lambda\varphi(x')} F'^2 \right] = 0. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Fazendo a variação funcional da ação (3.1) em relação a métrica $g_{\alpha\beta}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} &= \int dx^4 \left\{ \mathcal{R} \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g_{\alpha\beta}} \right. \\
&\quad \left. - 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left(g^{\mu\nu} \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} \frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} \right) \right. \\
&\quad \left. + \eta_2 e^{2\lambda\varphi} \left[F^2 \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\gamma} \left(g^{\nu\gamma} \frac{\delta g^{\mu\sigma}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + g^{\mu\sigma} \frac{\delta g^{\nu\gamma}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} &= \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g_{\alpha\beta}} + \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \mathcal{R} + \sqrt{-g} (-g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) R_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left[g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} (-g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \eta_2 e^{2\lambda\varphi} \left[F^2 \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\gamma} (-1) (g^{\nu\gamma} g^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha} g^{\gamma\beta}) \right] \right\} \delta^4(x-x') \\
&= \int dx^4 \delta^4(x-x') \sqrt{-g} \left\{ - \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) - 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2\eta_2 e^{2\lambda\varphi} \left(\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^2 - F^{\alpha\mu} F^\beta{}_\mu \right) \right\}
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-g})^{-1} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} &= - \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) - 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \right) \\
&\quad + 2\eta_2 e^{2\lambda\varphi} \left(\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^2 - F^{\alpha\mu} F^\beta{}_\mu \right). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Utilizando o princípio de mínima ação¹, igualamos (3.4) a zero, depois de substituirmos o escalar de curvatura, obtemos

$$R_{\mu\nu} = 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + 2\eta_2 e^{2\epsilon\lambda\varphi} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 - F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} \right). \tag{3.5}$$

Tomando o traço de (3.5) obtemos o escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = 2\eta_1 g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi. \tag{3.6}$$

Colecionando as equações de campo, temos

$$\begin{cases} \nabla_\mu [e^{2\lambda\varphi(x)} F^{\mu\alpha}] = 0, \\ \square\varphi(x) + \frac{1}{2}\eta_1\eta_2\lambda e^{2\lambda\varphi(x)} F^2 = 0, \\ R_{\mu\nu} = 2\eta_1 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + 2\eta_2 e^{2\epsilon\lambda\varphi} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 - F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} \right). \end{cases} \tag{3.7}$$

Na próxima seção, vamos obter novas soluções dessas equações, para uma métrica esféricamente simétrica e estática.

¹Princípio físico que impõe $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$, onde Φ é qualquer campo físico [113].

3.2 Soluções Esfericamente Simétricas

Podemos parametrizar a geometria do espaço-tempo como um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático. Então, o elemento de linha do espaço-tempo fica sendo

$$dS^2 = e^{2\gamma(u)} dt^2 - e^{2\alpha(u)} du^2 - e^{2\beta(u)} d\Omega^2 . \quad (3.8)$$

Usando a métrica (3.8), calculamos as componentes não nulas da conexão

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = \gamma' , \\ \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00} = \gamma' e^{2(\gamma-\alpha)} , \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{11} = \alpha' , \\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\beta' e^{2(\beta-\alpha)} , \\ \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{33} = -\beta' e^{2(\beta-\alpha)} , \\ \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \beta' , \\ \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{33} = -\sin \theta \cos \theta , \\ \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2} g^{33} \partial_1 g_{33} = \beta' , \\ \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2} g^{33} \partial_2 g_{33} = \cot \theta . \end{aligned}$$

Com as componentes não nulas da conexão, calculamos as componentes não nulas do

tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R^0_{101} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^0_{01} + \Gamma^\sigma_{11} \Gamma^0_{\sigma 0} - \Gamma^\sigma_{10} \Gamma^0_{\sigma 1} \\ &= -[\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha')] , \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} R^0_{202} &= \partial_0 \Gamma^0_{22} - \partial_2 \Gamma^0_{02} + \Gamma^\sigma_{22} \Gamma^0_{\sigma 0} - \Gamma^\sigma_{20} \Gamma^0_{\sigma 2} \\ &= -\gamma' \beta' e^{2(\beta-\alpha)} , \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} R^0_{303} &= -\sin^2 \theta \gamma' \beta' e^{2(\beta-\alpha)} , \\ R^1_{212} &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{12} + \Gamma^\sigma_{22} \Gamma^1_{\sigma 1} - \Gamma^\sigma_{21} \Gamma^1_{\sigma 2} \\ &= -e^{2(\beta-\alpha)} [\beta'' + \beta'(\beta' - \alpha')] , \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} R^1_{313} &= -\sin^2 \theta e^{2(\beta-\alpha)} [\beta'' + \beta'(\beta' - \alpha')] , \\ R^2_{323} &= \partial_2 \Gamma^2_{33} - \partial_3 \Gamma^2_{23} + \Gamma^\sigma_{33} \Gamma^2_{\sigma 2} - \Gamma^\sigma_{23} \Gamma^2_{\sigma 3} \\ &= \sin^2 \theta [1 - (\beta')^2 e^{2(\beta-\alpha)}] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Contraindo as componentes do tensor de Riemann, obtemos as componentes nulas do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} \\ &= g_{00} g^{11} R^0_{101} + g_{00} g^{22} R^0_{202} + g_{00} g^{33} R^0_{303} \\ &= e^{2(\gamma-\alpha)} [\gamma'' + \gamma'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')] , \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} \\ &= R^0_{101} + g_{11} g^{22} R^1_{212} + g_{11} g^{33} R^1_{313} \\ &= -[\gamma'' + 2\beta'' + \gamma'(\gamma' - \alpha') + 2\beta'(\beta' - \alpha')] , \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} \\ &= R^0_{202} + R^1_{212} + g_{22} g^{33} R^2_{323} \\ &= 1 - e^{2(\beta-\alpha)} [\beta'' + \beta'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')] , \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} .$$

Para a métrica (3.8), o escalar de Kretschmman (1.9), fica sendo

$$K_1 = g^{11} R^0_{101} = e^{-2\alpha} [\gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha')] = e^{-(\gamma+\alpha)} (\gamma' e^{\gamma-\alpha})' , \quad (3.16)$$

$$K_2 = g^{22} R^0_{202} = \gamma' \beta' e^{-2\alpha} , \quad (3.17)$$

$$K_3 = g^{22} R^1_{212} = e^{-(\alpha+\beta)} (\beta' e^{\beta-\alpha})' , \quad (3.18)$$

$$K_4 = g^{33} R^2_{323} = (\beta')^2 e^{-2\alpha} - e^{-2\beta} . \quad (3.19)$$

A função α da métrica (3.8), pode ser mudada em outra função através de uma transformação da coordenada radial u . Levando em conta a liberdade de escolha de um sistema de coordenadas, escolhemos o sistema de coordenadas harmônicas

$$\alpha = 2\beta + \gamma . \quad (3.20)$$

Assumindo que o tensor de Maxwell seja puramente elétrico (o caso puramente magnético pode ser obtido pela transformação de dualidade $\varphi \rightarrow -\varphi$, $F \rightarrow e^{-2\lambda\varphi} * F$), a equação (3.2) fica sendo

$$\partial_1 [e^{2\lambda\varphi} F^{10}] + [\Gamma^0_{0\alpha} + \Gamma^1_{1\alpha} + \Gamma^2_{2\alpha} + \Gamma^3_{3\alpha}] [e^{2\lambda\varphi} F^{\alpha 0}] = 0$$

$$\partial_1 [e^{2\lambda\varphi} F^{10}] + [\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}] [e^{2\lambda\varphi} F^{10}] = 0 ,$$

que utilizando a métrica (3.8), obtemos

$$F^{10}(u) = q e^{-2(\lambda\varphi+2\beta+\gamma)} \quad (F^2 = -2q^2 e^{-4\beta-4\lambda\varphi}) , \quad (3.21)$$

com q uma constante de integração real.

Considerando o sistema de coordenadas (3.20), substituindo as componentes (3.13)-(3.15) do tensor de Ricci em (3.5) e a equação (3.21) em (3.3), temos

$$\varphi'' = -\eta_1 \eta_2 \lambda q^2 e^{2\omega} , \quad (3.22)$$

$$\gamma'' = \eta_2 q^2 e^{2\omega} , \quad (3.23)$$

$$\beta'' = e^{2J} - \eta_2 q^2 e^{2\omega} , \quad (3.24)$$

com

$$\omega = \gamma - \lambda\varphi , \quad J = \gamma + \beta , \quad (3.25)$$

e a equação de vínculo

$$\beta'^2 + 2\beta'\gamma' - \eta_1\varphi'^2 = e^{2J} - \eta_2q^2e^{2\omega}. \quad (3.26)$$

Fazendo combinações lineares entre as equações (3.22)-(3.24) e integrando parcialmente, temos:

$$\varphi(u) = -\eta_1\lambda\gamma(u) + \varphi_1u + \varphi_0, \quad (3.27)$$

$$\omega'^2 - Qe^{2\omega} = a^2, \quad (3.28)$$

$$J'^2 - e^{2J} = b^2, \quad (3.29)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = (1 \pm \eta_1\lambda^2), \quad Q = \eta_2\lambda_+q^2, \quad (3.30)$$

e as constantes de integração $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$. A equação (3.28) pode ser integrada da seguinte forma

$$\int \frac{d\omega}{\sqrt{a^2 + Qe^{2\omega}}} = (u - u_0), \quad (3.31)$$

cujas soluções, podemos obter como se segue. Para $a, Q \in \mathbb{R}^+$, fazendo as transformações $z = e^\omega$, após $y = \sqrt{\frac{|Q|}{a^2}}z$ e após $\sinh \theta = y$, temos que (3.31) torna-se:

$$\int \frac{d\theta}{\sinh \theta} = a(u - u_0) \Rightarrow e^{-\omega} = \sqrt{|Q|} a^{-1} \sinh[a(u - u_0)].$$

Podemos, de forma similar, obter a solução geral da equação (3.28)

$$\omega(u) = \begin{cases} -\ln \left| \sqrt{|Q|} a^{-1} \cosh[a(u - u_0)] \right| & (a \in \mathbb{R}^+, Q \in \mathbb{R}^-), \\ a(u - u_0) & (a \in \mathbb{R}^+, Q = 0), \\ -\ln \left| \sqrt{Q} a^{-1} \sinh[a(u - u_0)] \right| & (a \in \mathbb{R}^+, Q \in \mathbb{R}^+), \\ -\ln \left| \sqrt{Q} (u - u_0) \right| & (a = 0, Q \in \mathbb{R}^+), \\ -\ln \left| \sqrt{Q} \bar{a}^{-1} \sin[\bar{a}(u - u_0)] \right| & (a = i\bar{a}, \bar{a}, Q \in \mathbb{R}^+), \end{cases} \quad (3.32)$$

onde u_0 é uma constante real. Consideramos aqui somente os valores positivos de a (ou \bar{a}), pois as soluções (3.32) possuem simetria na inversão do sinal de a (ou \bar{a}).

Resolvemos da mesma forma a equação (3.29), o que resulta em

$$J(u) = \begin{cases} -\ln |b^{-1} \sinh[b(u - u_1)]| & (b \in \mathbb{R}^+), \\ -\ln |u - u_1| & (b = 0), \\ -\ln |\bar{b}^{-1} \sin[\bar{b}(u - u_1)]| & (b = i\bar{b}; \bar{b} \in \mathbb{R}^+) \end{cases} \quad (3.33)$$

onde u_1 é uma constante real. Desta forma, temos a solução geral para a ação (3.1) com a métrica (3.8) e $\lambda_+ \neq 0$

$$\begin{cases} dS^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} du^2 - e^{2\beta} d\Omega^2, \\ \alpha(u) = 2J(u) - \gamma(u), \\ \beta(u) = J(u) - \gamma(u), \\ \gamma(u) = \lambda_+^{-1}(\omega(u) + \lambda\varphi_1 u + \lambda\varphi_0), \\ \varphi(u) = \lambda_+^{-1}(-\eta_1 \lambda \omega(u) + \varphi_1 u + \varphi_0), \\ F = -q e^{2\omega(u)} du \wedge dt, \end{cases} \quad (3.34)$$

e as constantes de integração, que obedecem a equação de vínculo (3.26), estão relacionadas por

$$\lambda_+ b^2 = a^2 + \eta_1 \varphi_1^2. \quad (3.35)$$

A solução (3.34) depende de 7 parâmetros reais ($a, b, q, u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1$). Podemos fixar algumas destas constantes impondo condições necessárias à obtenção de soluções regulares e analíticas.

Fazendo o limite $u \rightarrow u_1$ na função J , em (3.33), temos que $J \rightarrow \infty$. Isso significa que u_1 representa o infinito espacial do espaço-tempo. Temos então duas possíveis soluções, as quais são disjuntas, dependendo do sinal de $(u - u_1)$. Mas a métrica (3.8) é invariante pela transformação $(u - u_1) \rightarrow -(u - u_1)$, que leva de uma solução a outra. Podemos então escolher qualquer um dos intervalos positivo ou negativo de $(u - u_1)$. Fixando

$$u < u_1, \quad (3.36)$$

podemos usar então outra simetria da métrica (3.8), a qual é invariante por translação de u , o que implica que podemos escolher, sem perda de generalidade, o infinito espacial $u_1 = 0$, logo $u < 0$.

Impondo-se que o espaço-tempo é assintoticamente minkowskiano², fixamos uma das constantes livres da solução. Impondo que o campo escalar φ anula-se no infinito espacial, fixamos outra constante livre. Depois impondo a analiticidade das soluções, fixamos ainda outra constante livre. No final, levando em conta a relação entre as constantes pela equação de vínculo (3.35), obtemos soluções que dependem de duas constantes livres (massa e carga), e dos parâmetros de acoplamento da ação (3.1).

As soluções da métrica (3.34) com $\eta_1 = \eta_2 = 1$ (soluções EMD normais), foram obtidas anteriormente por vários autores diferentes (ver [98] e suas referências). As soluções fantasmas, com horizonte não degenerado, foram obtidas por Gibbons e Rasheed [99]. As soluções com $\lambda_+ = 0$, serão obtidas posteriormente. As soluções fantasmas com horizonte degenerado, são novas soluções obtidas neste trabalho e publicadas na referência [100].

3.3 Novas soluções

Nesta seção vamos analisar as novas soluções que encontramos para a ação (3.1). Temos 15 classes de soluções diferentes provenientes da combinação de (3.32) com (3.33). As duas primeiras soluções de (3.32) são necessariamente fantasmas ($\eta_1 = -1$ e/ou $\eta_2 = -1$). As outras soluções podem ser normais ($\eta_1 = \eta_2 = 1$), ou fantasmas ($\eta_1 = \eta_2 = -1$, $\lambda^2 > 1$ ou $\eta_1 = -\eta_2 = -1$, $\lambda^2 < 1$). Para o caso normal, a função $J(u)$ é dada somente pela primeira solução em (3.33). Isto é devido a seguinte condição: se $b = i\bar{b}$ (\bar{b} real)³ o vínculo em (3.35) pode ser escrito como

$$a^2 + \bar{b}^2 = -\eta_1(\varphi_1^2 + \lambda^2\bar{b}^2), \quad (3.37)$$

implicando em $\eta_1 = -1$ (casos anti-dilaton). Nesta seção, discutiremos as novas soluções de buracos negros fantasmas, classificando-as pelo tipo proveniente da função $\omega(u)$ em (3.32).

²No limite em que a coordenada radial atinge o valor do infinito espacial, a métrica do espaço-tempo torna-se proporcional à de Minkowski.

³Incluindo o caso $b = 0$.

3.3.1 Solução cosh

A solução cosh possui uma infinidade de possibilidades, de acordo com a escolha dos parâmetros livres e constantes de acoplamento da teoria. Então, selecionaremos somente as soluções de buracos negros regulares e analíticos.

A função $e^{2\gamma}$ da métrica (3.34), pode anular-se, para esta solução, somente quando $u \rightarrow -\infty$, o que corresponde ao horizonte de eventos⁴ do espaço-tempo. Se escolhermos a terceira solução de (3.33), teremos uma métrica que assume somente valores finitos, impossibilitando assim de haver um horizonte neste caso. Tomando a segunda solução de (3.33), podemos reescrevê-la como:

$$dS^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{-2\gamma} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (r = -1/u), \quad (3.38)$$

mostrando-nos que o horizonte $u \rightarrow -\infty$ ($r = 0$) é singular. Temos então que a única solução de (3.33) que leva a buracos negros é a primeira.

Para estudar o comportamento da métrica próximo ao horizonte, será-nos útil fazer uma transformação na coordenada radial, para uma outra proporcional, próximo ao horizonte, ao parâmetro geodésico afim. Definindo a Lagrangeana do movimento geodésico como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (3.39)$$

obtemos a equação das geodésicas no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$e^{4J} \dot{u}^2 = E^2 - e^{2\gamma} [\epsilon + L^2 e^{-2\beta}], \quad (3.40)$$

onde E é o momento conjugado em relação ao tempo (energia), L é o momento conjugado ao ângulo azimutal (momento angular), e $\epsilon = 1$ indica geodésicas tipo-tempo, $\epsilon = 0$ geodésicas nulas e $\epsilon = -1$ indicando geodésicas tipo-espaço. Esta equação, no horizonte de eventos, torna-se

$$ds \sim e^{2J} du \sim b^2 e^{2bu} du. \quad (3.41)$$

⁴Como a métrica é invariante pela inversão do sinal da coordenada radial u , poderíamos ter escolhido $u \rightarrow +\infty$ como o horizonte de eventos, para $u > 0$.

Isto nos sugere fazer a transformação de coordenada

$$x = e^{2b(u-u_0)}, \quad (3.42)$$

a qual, pela equação (3.41), é claramente proporcional ao parâmetro geodésico afim, como pretendíamos. Escolhendo a primeira solução de (3.33), o elemento de linha (3.34), com essa transformação, fica sendo

$$dS^2 = \frac{cx^n}{(1+x^m)^{2/\lambda_+}} dt^2 - \frac{4b^2 x_1 x^{1-n} (1+x^m)^{2/\lambda_+}}{c(x-x_1)^2} \left[\frac{x_1 dx^2}{x(x-x_1)^2} + d\Omega^2 \right], \quad (3.43)$$

onde $x < x_1$, concordando com (3.36), e $x_1 = e^{-2bu_0}$, $c > 0$ é uma constante que pode ser fixada impondo que o espaço-tempo seja assintoticamente minkowskiano, e

$$m = \frac{a}{b}, \quad n = \frac{m(1 + \lambda\bar{\varphi}_1)}{\lambda_+} \quad (3.44)$$

($\bar{\varphi}_1 = \varphi_1/a$). Este espaço-tempo é assintoticamente plano, com infinito espacial em $x = x_1$ ($u = 0$) e o horizonte de eventos em $x = 0$ ($u \rightarrow -\infty$). Esta métrica só é analítica, próximo ao horizonte ($x \rightarrow 0$), se m e n forem inteiros positivos⁵ [101, 102]. O número n é o grau de degenerescência do horizonte de eventos e m aparece devido a analiticidade da métrica.

Com a definição de n e a equação de vínculo (3.35), podemos reescrever

$$\begin{cases} 1 + \lambda\bar{\varphi}_1 = \lambda_+ \frac{n}{m}, \\ 1 + \eta_1 \bar{\varphi}_1^2 = \frac{\lambda_+}{m^2}. \end{cases} \quad (3.45)$$

A primeira equação nos fornece a relação entre a constante de integração $\bar{\varphi}_1$ e os números inteiros m e n . Substituindo esta relação na segunda equação de (3.45), obtemos a seguinte relação entre m e n

$$m = n \pm \lambda \sqrt{\eta_1(1-n^2)}. \quad (3.46)$$

⁵Note que como o horizonte encontra-se no valor que divide valores positivos e negativos da coordenada x , quando entramos no horizonte, temos valores negativos para x . Isto caracteriza uma extensão analítica da métrica. Necessitamos assim de expoentes inteiros e positivos de x , para que tenhamos analiticidade e regularidade no horizonte.

Esta relação dependerá do grau de degenerescência do horizonte. Se $n = 1$ (horizonte não degenerado), então temos necessariamente $m = 1$; isto ocorre para qualquer valor real de λ (para todo η_1 e η_2 tal que $\eta_2\lambda_+ < 0$). Se $n \geq 2$ (horizonte degenerado), que somente é possível para o caso anti-dilaton $\eta_1 = -1$, a relação (3.46) nos fornece um valor quantizado, em termos dos números inteiros m e n , para a constante de acoplamento λ

$$\lambda^2 = \frac{(m-n)^2}{n^2-1}, \quad (3.47)$$

tal que $\lambda^2 < 1$ ($\eta_2 = -1$) se $1 \leq m \leq 2n-1$, e $\lambda^2 > 1$ ($\eta_2 = +1$) se $m \geq 2n$. Notamos que para o caso normal $\eta_1 = +1$ as relações (3.45), para $\lambda = 0$, nos fornecem $m = n = 1$ e $\bar{\varphi}_1 = 0$, o que nos leva a solução de Reissner-Nordström. Isto é o famoso teorema que diz que buracos negros não possuem cabelos, comentado no primeiro capítulo, o qual não tem validade para os casos fantasmas.

Para colocarmos a solução cosh em uma forma mais familiar, utilizamos a seguinte transformação de coordenadas [98],

$$u = \frac{1}{(r_+ - r_-)} \ln \left(\frac{f_+}{f_-} \right), \quad f_{\pm} = 1 - \frac{r_{\pm}}{r}, \quad (3.48)$$

com

$$r_{\pm} = \pm \frac{2a}{1 + e^{\mp 2au_0}} \quad (r_+ - r_- = 2a). \quad (3.49)$$

A coordenada x definida em (3.42) está relacionada com r por

$$x^m = -\frac{r_- f_+}{r_+ f_-}. \quad (3.50)$$

Para o caso não degenerado ($m = n = 1$), a solução assume a forma

$$dS^2 = f_+ f_-^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} dt^2 - f_+^{-1} f_-^{-\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} dr^2 - r^2 f_-^{1-\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} d\Omega^2, \quad (3.51)$$

$$F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt, \quad e^{-2\lambda\varphi} = f_-^{1-\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \quad (3.52)$$

onde escolhemos a constante $\varphi_0 = \omega(0) = 0$ em (3.34), para que tenhamos um elemento de linha assintoticamente minkowskiano. Os parâmetros físicos, massa e carga elétrica, da solução, são dados por

$$M = \frac{1}{2} \left(r_+ + \frac{\lambda_-}{\lambda_+} r_- \right), \quad q = \pm \sqrt{\frac{r_+ r_-}{\eta_2 \lambda_+}}. \quad (3.53)$$

Estes parâmetros físicos podem ser obtidos pela análise assintótica da solução: a massa pela componente g_{00} da métrica, onde $g_{00}(r \rightarrow +\infty) \approx 1 - \frac{2M}{r}$, e a carga diretamente da expressão do tensor de Maxwell F em (3.34). A solução (3.53) tem a mesma forma que as soluções de GM e GHS [99, 103], obtidas anteriormente. A única diferença é que temos aqui $r_+ > 0$ mas $r_- < 0$, modificando, em alguns casos, a estrutura causal do espaço-tempo, como veremos adiante.

Esta solução foi primeiramente obtida, como uma continuação analítica do caso normal, por Gibbons e Rasheed nos casos ($\eta_2 = -1, \eta_1 = +1$) e $\eta_1 = -1$ com $\eta_2 = +1$ (para $a^2 > 1$ na referência [99]) ou $\eta_2 = -1$ ($a^2 < 1$), e depois foi generalizada para buracos negros multidimensionais (no caso anti-dilaton $\eta_1 = -1$ com $\eta_2 = +1$) por Gao e Zhang [104], e para membranas multidimensionais por Grojean et al [105].

Uma das novas soluções que obtivemos neste trabalho é o caso de horizonte degenerado ($\eta_1 = -1$ e $n \geq 2$) da solução cosh. Fazendo a transformação (3.48) em (3.34), escolhendo cosh em (3.32) e a primeira solução em (3.33), temos

$$dS^2 = g_+^n g_-^{\nu-n} dt^2 - \frac{(r_+ - r_-)^2 g_+^{1-n} g_-^{1+n-\nu}}{m^2 (g_+ - g_-)^2} \times \\ \times \left[\frac{(r_+ - r_-)^2 (g_+ g_-)^{1-2m}}{m^2 r^4 (g_+ - g_-)^2} dr^2 + d\Omega^2 \right], \quad (3.54)$$

$$F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt, \quad e^{-2\lambda\varphi} = g_+^{m-n} g_-^{n+\nu}, \quad (3.55)$$

onde $g_{\pm} = f_{\pm}^{1/m}$, e

$$\nu = \frac{2m}{\lambda_+} = \frac{2m(1-n^2)}{(m-n)^2 + 1 - n^2}. \quad (3.56)$$

Os parâmetros físicos massa e carga elétrica da solução, são dados por

$$M = \frac{1}{2m} [nr_+ + (\nu - n)r_-], \quad q = \pm \sqrt{\frac{r_+ r_-}{\eta_2 \lambda_+}}. \quad (3.57)$$

3.3.2 Solução Linear

Analisaremos agora a solução em que $\lambda = \pm 1$ com $\eta_1 = -1$. Neste caso $\lambda_+ = 0$ e obtemos a segunda solução para $\omega(u)$ em (3.32), a qual depende linearmente da

coordenada radial u . As soluções de $\varphi(u)$ e $\gamma(u)$ em (3.22) e (3.23) são

$$\gamma(u) = \gamma_1 u + \gamma_0 + \frac{q_1}{2} e^{2a(u-u_0)}, \quad (3.58)$$

$$\varphi(u) = \pm[(\gamma_1 - a)u + (\gamma_0 + au_0) + \frac{q_1}{2} e^{2a(u-u_0)}], \quad (3.59)$$

onde γ_0 e γ_1 são constantes de integração, e $q_1 = \eta_2 q^2 / 2a^2$. Escolhendo a solução sinh em (3.33), pois não existe solução de buraco negro nos outros casos, e fazendo a transformação de coordenadas (3.42), obtemos o seguinte elemento de linha,

$$dS^2 = cx^n \exp[q_1 x^m] dt^2 - \frac{4b^2 x_1 x^{1-n}}{c(x-x_1)^2} \exp[-q_1 x^m] \left[\frac{x_1 dx^2}{x(x-x_1)^2} + d\Omega^2 \right], \quad (3.60)$$

onde novamente $x_1 = e^{-2bu_0}$, $c > 0$, e os expoentes m e n são dados por

$$m = \frac{a}{b}, \quad n = \frac{\gamma_1}{b}. \quad (3.61)$$

Como no caso da solução cosh, a solução linear é uma solução assintoticamente plana, com infinito espacial em $x = x_1$, e horizonte de eventos em $x = 0$. Novamente, para que a métrica seja analítica, devemos ter os números m e n inteiros positivos. Estes números não são independentes, pois a equação de vínculo (3.35) nos fornece

$$b^2 - a(2\gamma_1 - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad m(2n - m) = 1. \quad (3.62)$$

Esta equação é justamente a equação (3.47) para $\lambda^2 = 1$, cuja única solução para números inteiros é $m = n = 1$ ($a = b = \gamma_1$). Fazendo a transformação $x = x_1 f_+$, onde $f_+ = 1 - r_+/r$, $r_+ = 2a$, recuperamos a solução discutida por Gibbons e Rasheed [99] e por Gao e Zhang [104]:

$$dS^2 = f_+ \exp[q_1(f_+ - 1)] dt^2 - \exp[-q_1(f_+ - 1)] \left(\frac{dr^2}{f_+} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.63)$$

$$F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt, \quad e^{-2\lambda\varphi} = \exp[-q_1(f_+ - 1)], \quad (3.64)$$

onde

$$M = \frac{1 + q_1}{2} r_+, \quad q = \pm r_+ \sqrt{\frac{\eta_2 q_1}{2}}. \quad (3.65)$$

No caso em que $\eta_2 = -1, q^2 = 2a^2$, temos um buraco negro carregado de massa identicamente nula. No caso em que $\eta_2 = -1, q^2 > 2a^2$, temos um buraco negro carregado com massa negativa, violando assim algumas condições de energia.

3.3.3 Solução sinh

A solução sinh em (3.32), nos leva a uma grande gama de soluções de buracos negros fantasmas, com $\eta_1 = -1$ (as soluções em que $\eta_1 = 1, Q > 0$ implicam em $\eta_2 = 1$, as quais levam a buracos negros dilatônicos, obtidas anteriormente). Temos duas possibilidades para o horizonte de eventos, dependendo do sinal de u_0 . Para $u_0 > 0$ ou $u_0 = 0$, o horizonte encontra-se em $u \rightarrow -\infty$, sendo somente possível ao primeiro caso de (3.33). No caso em que a constante de integração u_0 coincide com o infinito espacial ($u = u_0 = 0$), o espaço-tempo é assintoticamente não plano (ANP), como em [106]. Para $u_0 < 0$, o horizonte encontra-se em $u = u_0$ (para $\lambda_+ < 0$), sendo possível nos três casos de (3.33).

Primeiramente consideramos a solução em que $J(u)$ é dada pela primeira função de (3.33). Fazendo a transformação de coordenadas (3.42), obtemos o seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = \frac{cx^n}{|1 - x^m|^{2/\lambda_+}} dt^2 - \frac{4b^2 x_1 x^{1-n} |1 - x^m|^{2/\lambda_+}}{c(x - x_1)^2} \left[\frac{x_1 dx^2}{x(x - x_1)^2} + d\Omega^2 \right], \quad (3.66)$$

onde novamente $x < x_1$ com $x_1 = e^{-2bu_0}$, e $c > 0$. Os números reais m e n , dados por (3.44), estão novamente relacionados por (3.46). Temos três possibilidades, dependendo dos valores de x_1 .

1. Se $x_1 < 1$ ($u_0 > 0$), o horizonte de eventos está em $x = 0$. Como no caso cosh, este horizonte é regular se m e n são inteiros. As considerações em relação às soluções com horizonte degenerado, são idênticas as que seguem a equação (3.46), mas η_2 é substituído por $-\eta_2$ ($\eta_2 \lambda_+$ é positivo no caso sinh). Fazendo a transformação de coordenadas (3.48), com

$$r_{\pm} = \pm \frac{2a}{1 - e^{\mp 2au_0}} \quad (r_+ - r_- = 2a), \quad (3.67)$$

obtemos novamente o caso $m = n = 1$ da métrica (3.51), mas agora temos $0 < r_- < r_+$. Esta solução foi anteriormente obtida em [99]. A diferença entre as soluções dilatônicas é que sempre temos $\eta_1 = -1$, casos fantasmas. No caso de horizonte degenerado ($\eta_1 = -1, n \geq 2$, caso obtido neste trabalho), obtemos a mesma forma funcional de (3.54).

2. No caso intermediário $x_1 = 1$ ($u_0 = 0$), o horizonte de eventos está, como no primeiro caso, em $x = 0$, com m e n inteiros positivos. Entretanto, a solução é agora assintoticamente não plana [106]. Fazendo a transformação de coordenadas $x = f_+$ com $r_+ = 2bc^{-1/2}$ e redefinindo a coordenada tempo, (3.66) torna-se:

$$dS^2 = \frac{f_+^n}{(1 - f_+^m)^{2/\lambda_+}} dt^2 - \frac{(1 - f_+^m)^{2/\lambda_+}}{f_+^n} [dr^2 + r(r - r_+)d\Omega^2]. \quad (3.68)$$

O comportamento assintótico desta solução é

$$dS^2 \sim \left(\frac{r}{r_+}\right)^{2/\lambda_+} dt^2 - \left(\frac{r}{r_+}\right)^{-2/\lambda_+} \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right), \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.69)$$

com $0 < \lambda_+ \leq 1$ para $\eta_2 > 0$, e $\lambda_+ < 0$ para $\eta_2 < 0$.

3. Se $x_1 > 1$ ($u_0 < 0$), então o espaço-tempo é assintoticamente plano, mas o horizonte de eventos está em $x = 1$ ($u = u_0$), com $\lambda_+ < 0$, implicando em $\eta_1 < 0$ e $\eta_2 < 0$, logo $\lambda^2 > 1$. Esta solução é regular se $\lambda_+ = -2/p$, isto é.

$$\lambda^2 = \frac{p+2}{p}, \quad (3.70)$$

com p inteiro positivo (mas m e n não são necessariamente inteiros neste caso).

Esta possibilidade também acontece quando a segunda ou terceira soluções de (3.33) são combinadas com a terceira solução de (3.32) com $u_0 < 0$. Neste caso, a transformação de coordenadas (3.42) leva para uma forma muito complicada da métrica. Uma expressão mais clara para a métrica, no caso $u_0 < 0$, é

$$dS^2 = ch^p dt^2 - c^{-1} h^{-p} e^{2J} (e^{2J} du^2 + d\Omega^2), \quad (3.71)$$

com

$$h(u) = e^{-\lambda\varphi_1 u} \sinh a(u - u_0), \quad (3.72)$$

$$e^{2J(u)} = \frac{b^2}{\sinh^2 bu}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{\bar{b}^2}{\sin^2 \bar{b}u}. \quad (3.73)$$

3.3.4 Solução $a = 0$

Denominamos a quarta solução de (3.32) por $a = 0$. Se $u_0 \geq 0$, o horizonte de eventos está novamente em $u \rightarrow -\infty$, onde $J(u)$ é dada pela primeira ou segunda solução de (3.33). No primeiro caso ($b^2 > 0$), a transformação de coordenadas (3.42), leva a uma métrica similar a (3.66), com $n = (\lambda/\lambda_+)(\varphi_1/b)$ e $m \rightarrow 0$, onde x^m é substituído por um logaritmo, o qual é não analítico. Assim, esta possibilidade não nos leva a um buraco negro regular. No caso $a = b = 0$ (implicando $\varphi_1 = 0$), a transformação de coordenadas $u = -1/r$ leva-nos a seguinte métrica

$$dS^2 = \left(\frac{u_0 r}{1 + u_0 r} \right)^{2/\lambda_+} dt^2 - \left(\frac{u_0 r}{1 + u_0 r} \right)^{-2/\lambda_+} (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.74)$$

que é analítica se $\lambda_+ = 2/(p+1)$ (p sendo inteiro positivo), implicando em $\eta_2 = 1$, onde o caso fantasma corresponde a $\eta_1 = -1$, logo

$$\lambda^2 = \frac{p-1}{p+1}. \quad (3.75)$$

Notemos que este é um caso particular da relação (3.47) para $m = 1$ e $n = p$.

Por outro lado, se $u_0 < 0$, o horizonte de eventos está em $u = u_0$, e é regular somente quando $\lambda_+ = -2/p$, com p sendo um inteiro positivo. Novamente, isto implica em $\eta_1 = \eta_2 = -1$, e $\lambda^2 > 1$. O vínculo (3.35), neste caso, reduz-se para $b^2 = p\varphi_1^2/2 \geq 0$. A métrica resultante tem a forma (3.71) com a função $h(u)$ dada por

$$h(u) = e^{-\lambda\varphi_1 u} (u - u_0). \quad (3.76)$$

Para $b = 0$ ($\varphi_1 = 0$), a transformação de coordenada $u = -1/r$, leva a uma expressão simples da métrica

$$dS^2 = f_+^p dt^2 - f_+^{-p} (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (3.77)$$

com $r_+ \equiv -1/u_0$.

3.3.5 Solução \sin

No caso da quinta solução de (3.32), a métrica está restrita a assumir valores finitos da coordenada radial u , então não temos um horizonte em $u \rightarrow -\infty$. Novamente, o horizonte

pode somente estar em $u = u_0 < 0$, e é regular se $\lambda_+ = -2/p$ (p sendo inteiro positivo). O vínculo (3.35), neste caso, torna-se

$$\frac{2b^2}{p} = \bar{a}^2 + \varphi_1^2, \quad (3.78)$$

onde temos necessariamente $b^2 > 0$, correspondendo a primeira solução de (3.33) para a função $J(u)$. Então a métrica pode ser escrita como (3.71), com $h(u)$ sendo

$$h(u) = e^{-\lambda\varphi_1 u} |\sin \bar{a}(u - u_0)|, \quad (3.79)$$

$$e^{2J(u)} = \frac{b^2}{\sinh^2 bu}. \quad (3.80)$$

3.4 Análise das geodésicas e construção dos diagramas de Penrose

Faremos a análise, como descrita no primeiro capítulo, das estruturas causais das novas soluções e das soluções fantasmas de Gibbons e Rasheed, as quais não haviam sido feitas anteriormente. Muitos diagramas de Penrose que aparecem não são usuais. Uma primeira referência onde surgem diagramas bizarros é em [107].

3.4.1 Solução cosh

A estrutura causal do espaço-tempo destas novas soluções fantasmas obtidas, podem ser determinadas analisando a equação das geodésicas (3.40), escrevendo em termos da coordenada x definida em (3.42),

$$\frac{4b^2 x_1^2 \dot{x}^2}{(x - x_1)^4} = E^2 - \frac{cx^n}{(1 + x^m)^{2/\lambda_+}} \left[\epsilon + \frac{L^2 cx^{n-1} (x - x_1)^2}{4b^2 x_1 (1 + x^m)^{2/\lambda_+}} \right], \quad (3.81)$$

juntamente com a forma conforme da métrica (3.43)

$$dS^2 = H(x) [dt^2 - dy^2 - F(x)d\Omega^2], \quad (3.82)$$

com

$$dy = \pm \frac{2bx_1}{c} \frac{x^{-n}(1+x^m)^{2/\lambda_+}}{(x-x_1)^2} dx, \quad (3.83)$$

$$H(x) = \frac{cx^n}{(1+x^m)^{2/\lambda_+}}, \quad (3.84)$$

$$F(x) = \frac{4b^2x_1}{c^2} \frac{x^{1-2n}(1+x^m)^{4/\lambda_+}}{(x-x_1)^2}. \quad (3.85)$$

Os vários limites a serem considerados são $x \rightarrow x_1$ (o infinito espacial), $x \rightarrow 0$ (o horizonte de eventos), as possíveis singularidades em $x \rightarrow -1$ e $x \rightarrow -\infty$. No limite $x \rightarrow x_1$, obtemos $y \rightarrow \pm\infty$, com $F(x) = y^2$ e $H = \text{cte}$, mostrando que a métrica (3.82) é assintoticamente minkowskiana. Por outro lado, no limite $x \rightarrow 0$, obtemos $y \rightarrow \pm\infty$ e $H \rightarrow 0$. Isto caracteriza um horizonte, neste caso o horizonte de eventos do buraco negro, como previamente discutido, é regular para os números inteiros n e m .

A análise das outras possíveis singularidades, em $x \rightarrow -1$ ou $x \rightarrow -\infty$, dependem da paridade de m . Vamos sumarizar nos seguintes casos.

1. m sendo par. Neste caso, a métrica (3.82) é regular em $x = -1$, que corresponde para um valor finito de y . Agora, passando para $x \rightarrow -\infty$, as possibilidades dependem dos valores de λ_+ .

- (a) Se $\lambda_+ < 0$, ($\lambda^2 > 1$, que pela condição (3.47) $n < (m^2 + 1)/2m$, isto é, $n \leq m/2$) então $H \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$. Assim, temos um centro, uma singularidade onde as geodésicas param. Se n é ímpar, o diagrama de Penrose é similar ao de Schwarzschild (Fig. 1), mas aqui existe uma inversão do cone de luz, devido a mudança da assinatura da métrica de $(+ - - -) \rightarrow (- + - -)$. Se n é par, o cone de luz bi-dimensional permanece o mesmo, logo o diagrama de Penrose é similar ao de Reissner-Nordström extremo (Fig. 2). Entretanto, a métrica quadri-dimensional, muda a assinatura de $(+ - - -) \rightarrow (+ - ++)$, assim o movimento geodésico neste espaço-tempo é significativamente diferente do caso Reissner-Nordström extremo (veja uma discussão mais detalhada em [101]).

(b) Se $\lambda_+ > 0$ ($n > m/2$), vemos que pela equação (3.47) temos

$$\lambda_+ = 2m/(n+1) - (m-1)^2/(n^2-1) < 2m/(n+1),$$

logo $y \rightarrow \infty$ e $H \rightarrow 0$, correspondendo a um horizonte. Para analisarmos se as geodésicas podem ser continuadas sobre este horizonte, reescrevemos a equação (3.81) em termos da nova coordenada $z = -1/x$,

$$\frac{4b^2 z_1^2 \dot{z}^2}{(z - z_1)^4} = E^2 - \frac{c(-1)^n z^{-n+2m/\lambda_+}}{(1+z^m)^{2/\lambda_+}} \times \left[\epsilon + \frac{L^2 c(-1)^n z^{-n-1+2m/\lambda_+} (z - z_1)^2}{4b^2 z_1 (1+z^m)^{2/\lambda_+}} \right] \quad (3.86)$$

($z_1 = -1/x_1$). Não temos analiticidade em $z = 0$ ($x \rightarrow -\infty$), se não tivermos

$$2m/\lambda_+ = n + p, \quad (3.87)$$

com p um inteiro positivo. Sem esta condição, as geodésicas terminam em $z = 0$ (horizonte singular). Pela condição (3.87), a definição de λ_+ e a relação (3.47), nos fornecem a equação

$$(n+p)(m-n)^2 = (n+p-2m)(n^2-1), \quad (3.88)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & m = n = 1 \quad (p \text{ arbitrário}), \\ \beta) \quad & m = p = 1 \quad (n \text{ arbitrário}). \\ \gamma) \quad & m = n = p \quad (\lambda = 0), \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde as duas primeiras soluções de (3.89), excluem a possibilidade para m par, e a terceira aplica-se somente a $\lambda_+ = 1$. Assim, este caso corresponde genericamente a uma singularidade nula (horizonte singular), levando aos diagramas Fig. 3 se n é ímpar, ou Fig. 4 (com a assinatura $(+ - ++)$ na região II) se n é par.

- (c) No caso $\lambda_+ = 1$ com $m = n = p$ pares (caso Einstein-anti-Maxwell-anti-Dilaton $\lambda = 0, \eta_1 = \eta_2 = -1$), $x \rightarrow -\infty$ é um horizonte regular. A métrica (3.43) é escrita, neste caso, como

$$dS^2 = \frac{cx^n}{(1+x^n)^2} dt^2 - \frac{4b^2 x_1 x^{1-n} (1+x^n)^2}{c(x-x_1)^2} \left[\frac{x_1 dx^2}{x(x-x_1)^2} + d\Omega^2 \right]. \quad (3.90)$$

Esta métrica é invariante pela transformação $x \rightarrow z = 1/x, x_1 \rightarrow z_1 = 1/x_1$, a qual inverte a coordenada e transforma o espaço-tempo com dois horizontes ($x = z = 0$) e dois infinitos espaciais ($x = x_1, z = z_1$). O diagrama de Penrose correspondente está ilustrado na Fig. 5, o qual difere do caso de Kerr, devido os dois horizontes serem degenerados, e a assinatura da métrica na região II é $(+ - ++)$. Este espaço-tempo é geodesicamente completo.

2. m ímpar. Neste caso, existe uma singularidade de coordenadas em $x = -1$. Próximo a esta região, fazendo $x = -1 + z$ com $z \rightarrow 0$, obtemos $H \sim z^{-2/\lambda_+}$ e $y \sim z^{2/\lambda_++1}$, e a equação das geodésicas sendo

$$\frac{4b^2 x_1^2 z^2}{(1+x_1)^4} \simeq E^2 - c' z^{-2/\lambda_+} \left[\epsilon - \frac{L^2 c' (1+x_1)^2}{4b^2 x_1} z^{-2/\lambda_+} \right] \quad (3.91)$$

($c' = (-1)^n c m^{-2/\lambda_+}$). Temos então as seguintes estruturas:

- (a) Para $\lambda_+ < -2$, $H \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$, logo $x = -1$ corresponde a uma singularidade verdadeira, e o diagrama de Penrose é o de Schwarzschild (Fig. 1) para n ímpar e o de Reissner-Nordström extremo (Fig. 2) para n par.
- (b) Para $-2 \leq \lambda_+ < 0$, $H \rightarrow 0$ e $y \rightarrow \infty$, logo $x = -1$ corresponde a um horizonte. Entretanto, devemos ter a condição $-2/\lambda_+ = p$, com p sendo um inteiro positivo, para que o horizonte seja regular, caso contrário, o horizonte será uma singularidade nula. No caso em que a condição não é satisfeita, o diagrama de Penrose correspondente está ilustrado na Fig. 3 se n é ímpar, e na Fig 4, se n é par.

- (c) Para o caso em que $\lambda_+ = -2/p$ ($-2 \leq \lambda_+ < 0$) com p inteiro positivo ($\eta_1 = -1$, $\eta_2 = +1, \lambda^2 = (p+2)/p$), tomando em conta (3.47), nos leva para a equação

$$p(m-n)^2 = (p+2)(n^2-1), \quad (3.92)$$

a qual pode ser resolvida em termos de inteiros em duas subclasses. A primeira é

$$m = n = 1, \quad (3.93)$$

e p um número inteiro positivo arbitrário; neste subcaso, a métrica (3.51) escreve-se de uma forma analítica mais simples

$$dS^2 = f_+ f_-^{-(p+1)} dt^2 - f_+^{-1} f_-^{p+1} dr^2 - r^2 f_-^{p+2} d\Omega^2, \quad (3.94)$$

com horizonte interno em $r = 0 > r_-$. A segunda solução para (3.93) é

$$m = 2n + 1, \quad p = n - 1. \quad (3.95)$$

Em ambos subcasos, as geodésicas podem ser estendidas até $x \rightarrow -\infty$ ($r = r_-$). Neste limite, obtemos $H \sim x^{n+mp} \rightarrow \infty$ e $y \sim x^{-n-mp-1} \rightarrow 0$, correspondendo a uma singularidade. No primeiro subcaso (3.93), a extensão analítica máxima do espaço-tempo está representada em um diagrama (Fig. 6) similar ao de Reissner-Nordström (mas a assinatura da métrica é $(+ - ++)$ na região III) se p é ímpar, ou pelo diagrama Fig. 7 (discutido mais abaixo) se p é par. No segundo subcaso (3.95), a estrutura causal do espaço-tempo está representada na Fig. 7 se n é ímpar (p sendo par), ou pelo diagrama Fig. 8 (com assinatura $(+ - ++)$ na região II) se n é par (p sendo ímpar).

- (d) Finalmente, para $\lambda_+ > 0$, $H \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow 0$, logo $x = -1$ corresponde a uma singularidade. Como no caso (2a), temos o diagrama de Schwarzschild (Fig. 1) para n ímpar e o diagrama de Reissner-Nordström (Fig. 2) para n par.

Observamos que a representação da estrutura causal do espaço-tempo da solução do buraco negro com um horizonte $r = r_+$ (ordem n) degenerado, ou degenerado com paridade ímpar, seguido de um horizonte interno $r = 0$ (ordem p) degenerado ou não, e que

termina em uma singularidade $r = r_-$, não pode ser representada em um diagrama de Penrose bidimensional convencional. Esta impossibilidade é devido a junção inadequada dos horizontes internos com os infinitos espaciais. Outra observação é que o diagrama Fig. 7, representa, de uma forma não usual, a estrutura causal e a topologia global deste espaço-tempo. Tentamos representar aqui a sequência infinita das bordas nulas bifurcadas, as quais são os infinitos espaciais assintoticamente minkowskianos, como linhas retas verticais (tipo-tempo) tracejadas. Cada uma destas linhas, corresponde aos infinitos nulos passado e futuro das duas regiões I contíguas.

3.4.2 Solução Linear

Vamos agora analisar a estrutura causal da solução Linear (3.60) com $m = n = 1$. A equação das geodésicas (3.40), neste caso, torna-se

$$\frac{4b^2x_1^2\dot{x}^2}{(x-x_1)^4} = E^2 - cxe^{q_1x} \left[\epsilon + \frac{L^2c}{4b^2x_1}(x-x_1)^2e^{q_1x} \right], \quad (3.96)$$

e a forma conforme desta métrica é dada por (3.82), com

$$dy = \pm \frac{2bx_1}{c} \frac{e^{-q_1x}}{x(x-x_1)^2} dx. \quad (3.97)$$

Como antes, o limite $x \rightarrow x_1$ corresponde ao infinito espacial, e $x \rightarrow 0$ ao horizonte regular. A análise do limite $x \rightarrow -\infty$ depende do sinal de q_1 .

1. Para $q_1 < 0$ ($\eta_2 = -1$), $y \rightarrow 0$, logo $x = -\infty$ corresponde a uma singularidade, o diagrama de Penrose é o de Schwarzschild (Fig. 1).
2. Para $q_1 > 0$ ($\eta_2 = +1$), $y \rightarrow \pm\infty$, correspondendo a um horizonte. Próximo a este horizonte, a equação das geodésicas (3.40), em termos da variável $z = -1/(x-x_1)$ ($z \rightarrow 0$), escreve-se

$$4b^2x_1^2\dot{z}^2 \simeq E^2 + c'z^{-1}e^{-q_1/z} \left[\epsilon + \frac{L^2c'}{4b^2x_1}z^{-2}e^{-q_1/z} \right] \quad (3.98)$$

($c' = ce^{q_1x_1} > 0$). Quando $z \rightarrow +0$, o potencial efetivo tende a zero, entretanto, quando $z \rightarrow -0$ e $L^2 > 0$ com $\epsilon > 0$ ou $L^2 > 0$, o potencial efetivo tende a infinito.

Logo, as geodésicas radiais tipo-tempo e todas geodésicas não-radiais, terminam neste limite, devido a barreira do potencial efetivo. Temos então que o horizonte aparente $x \rightarrow -\infty$, é, na verdade, uma singularidade nula. O diagrama de Penrose correspondente está representado na Fig. 4 (neste caso a assinatura da região II é $(- + - -)$).

3.4.3 Solução sinh

Como vimos anteriormente, temos três casos, os quais dependem dos valores de u_0 .

1. Para $u_0 > 0$, $J(u)$ é necessariamente dada pela primeira função de (3.33), e a métrica pode ser escrita na forma (3.66), que é assintoticamente minkowskiana no limite $x \rightarrow x_1 < 1$. Para m e n inteiros positivos, a métrica pode ser estendida sobre o horizonte $x = 0$ (de ordem n). Depois temos uma possível singularidade em $x = -1$, onde a análise pode ser feita como no caso do cosh, mas a paridade de m muda neste caso:

(a) m ímpar. Neste caso, $x = -1$ é regular, e as geodésicas estendem-se até $x = -\infty$. A natureza desta singularidade de coordenada depende dos valores de λ_+ .

- i. Para $\lambda_+ < 0$, como no caso do cosh, $x = -\infty$ é uma singularidade. O diagrama de Penrose está representado na Fig. 1 para n ímpar, e na Fig. 2 para n par.
- ii. Para $\lambda_+ > 0$, $x = -\infty$ é genericamente uma singularidade nula. O diagrama de Penrose é dado por Fig. 3 para n ímpar, e Fig. 4 para n par.
- iii. Para $m = n = 1$, $\lambda_+ = 2/(p+1)$ (a primeira solução de (3.87)-(3.88)), com p inteiro positivo, a métrica (3.51) torna-se

$$dS^2 = f_+ f_-^p dt^2 - f_+^{-1} f_-^{-p} dr^2 - r^2 f_-^{-p+1} d\Omega^2. \quad (3.99)$$

Esta métrica tem dois horizontes regulares r_+ ($x = 0$) e r_- ($x = -\infty$) encobrindo a singularidade em $r = 0$. Para p ímpar, o diagrama de Penrose é semelhante ao de Reissner-Nordström (Fig. 6), mas com a assinatura $(+ - - -)$ na região III. Para p par, o diagrama está representado na Fig. 7.

- iv. Para $m = p = 1$, $\lambda_+ = 2/(n + 1)$, a transformação de coordenadas $x = 1/z < 0$, nos leva a

$$dS^2 = \frac{(-1)^{n+1}cz}{(1-z)^{n+1}}dt^2 - \frac{(-1)^{n+1}4b^2z_1(1-z)^{n+1}}{c(z-z_1)^2} \times \left[\frac{z_1dx^2}{z(z-z_1)^2} + d\Omega^2 \right], \quad (3.100)$$

($z_1 = 1/x_1$). Esta métrica pode ser estendida sobre o horizonte $z = 0$ até a singularidade $z = 1$. A estrutura causal do espaço-tempo está representada pelo diagrama de Penrose de Reissner-Nordström (Fig. 6) se n é ímpar, e por Fig. 8 se n é par.

- v. Para $m = n = p$ ($\lambda_+ = 1$, caso Einstein-Maxwell-anti-Dilaton), a métrica

$$dS^2 = \frac{cx^n}{(1-x^n)^2}dt^2 - \frac{4b^2x_1x^{1-n}(1-x^n)^2}{c(x-x_1)^2} \left[\frac{x_1dx^2}{x(x-x_1)^2} + d\Omega^2 \right], \quad (3.101)$$

é invariante pela inversão combinada $x \rightarrow z = 1/x$, $x_1 \rightarrow z_1 = 1/x_1$. A diferença entre o caso Einstein-Maxwell-Dilaton é que agora para $x_1 < 1$ temos o valor correspondente de $z = z_1 > 1$. A coordenada z cresce de $z = -\infty$ (horizonte de eventos) para $z = 0$ (horizonte interno) até atingir a singularidade em $z = 1$. Como n é necessariamente ímpar, o diagrama de Penrose é o de Reissner-Nordström (Fig. 6).

- (b) m par. Neste caso, existe uma singularidade de coordenada em $x = -1$. Fazendo $x = -1 + z$, obtemos que a equação das geodésicas próximo a $z = 0$, possui a mesma forma que (3.91). Assim, a análise deste caso segue idêntica ao caso do cosh, realizado abaixo de (3.91), entretanto, omitimos a possibilidade $\lambda_+ = -2/p$, pois m é necessariamente par. Logo, $x = -1$ é sempre uma verdadeira singularidade, classificada como no caso do cosh, Fig. 1-Fig. 4.

2. Para $u_0 = 0$ (temos novamente somente a primeira solução de (3.33) para $J(u)$), a única diferença na análise é que a métrica (3.68) é assintoticamente não plana (ANP) para $x \rightarrow x_1$. A equação das geodésicas para a forma assintótica da métrica (3.69) é:

$$\dot{r}^2 \sim E^2 - \left(\frac{r}{r_+}\right)^{2/\lambda_+} \left[\epsilon + \left(\frac{r}{r_+}\right)^{2/\lambda_+} \frac{L^2}{r^2} \right]. \quad (3.102)$$

Para $\lambda_+ < 0$, o potencial efetivo tende a zero para $r \rightarrow +\infty$, que está a uma distância geodésica infinita. A coordenada radial conforme y , dada na forma assintótica por $dy \sim (r/r_+)^{-2/\lambda_+} dr$, também tende a infinito, logo a métrica conforme é assintoticamente minkowskiana. A extensão analítica, cruza o horizonte $x = 0$ ($r = r_+$) ocorre como no caso de $u_0 > 0$ e nos leva aos diagramas de Penrose da Fig. 1 para n e m ímpares, ou m par com $\lambda_+ < -2$, Fig. 2 para n par e m ímpar, ou m par com $\lambda_+ < -2$, Fig. 3 para n ímpar e m par com $-2 \leq \lambda_+ < 0$, e Fig. 4 para n e m pares com $-2 \leq \lambda_+ < 0$.

Para $0 < \lambda_+ < 1$, a equação (3.102) nos leva, assintoticamente, a $s \sim r^{1-1/\lambda_+}$, logo as geodésicas terminam no infinito espacial $r \rightarrow +\infty$, que é, conformalmente, uma singularidade tipo-tempo. Esta solução não nos fornece buracos negros. Entretanto, para $\lambda_+ = 1$ ($m = n$), temos assintoticamente $s \sim \ln r$, e as geodésicas são completas, mas o infinito espacial conforme é agora tipo-tempo. A extensão analítica da métrica (3.101) com $x_1 = 1$ ocorre similarmente ao caso onde $u > u_0$. Para $m = n$ ímpar, a métrica é regular em $x = -1$ e é invariante à inversão combinada $x \rightarrow z = 1/x$, o que nos leva a uma extensão sobre os dois horizontes $x = 0$ e $z = 0$ até um novo infinito espacial conforme tipo-tempo (Fig. 9). Este espaço-tempo é geodesicamente completo. Para $m = n$ par, o espaço-tempo possui um único horizonte em $x = 0$, o qual pode ser cruzado até atingir uma singularidade conformalmente tipo-tempo em $x = -1$ (Fig. 10).

3. Para $u_0 < 0$, temos visto que o horizonte de eventos em $u = u_0$ é regular (de ordem p) se $\lambda_+ = -2/p$ (para qualquer m e n reais). As propriedades da métrica dentro do horizonte ($u < u_0$) dependem da solução (3.33) para $J(u)$.

- (a) Primeira solução de (3.33). A forma da métrica (3.66) nos mostra que $x = 0$ ($u \rightarrow -\infty$) é um horizonte, o qual é regular se m e n são inteiros positivos. Como $\lambda_+ = -2/p$, então os números inteiros satisfazem a equação (3.92). Assim, temos três possibilidades:
- i. Para m e n genéricos, $u = -\infty$ é uma singularidade nula. O diagrama de Penrose é dado pela Fig. 3 para p ímpar, e Fig. 4 para p par.
 - ii. Para $m = n = 1$, as geodésicas terminam na singularidade em $x \rightarrow -\infty$. O diagrama de Penrose é dado pela Fig. 6 para p ímpar, e pela Fig. 8 para p par.
 - iii. Para $m = 2n + 1, p = n - 1$, a singularidade está novamente em $x \rightarrow -\infty$. O diagrama de Penrose está representado pela Fig. 7 para p ímpar, e pela Fig. 8 para p par.
- (b) Segunda solução de (3.33). A métrica está representada em (3.71) com $b = 0$ e $\varphi_1 = \pm a$ (que vem de (3.35)), onde

$$h(u) = e^{\mp a \lambda u} \sinh a(u - u_0). \quad (3.103)$$

A equação das geodésicas correspondente a esta métrica é

$$\dot{r}^2 = E^2 - ch^p[\epsilon - L^2 ch^p/r^2], \quad (3.104)$$

com $r = -1/u > 0$. Próximo a singularidade $r = 0$ ($u \rightarrow -\infty$), $h(r) \simeq e^{(1 \pm \lambda)a/r}/2$, então a análise é semelhante ao caso Linear. Tomando em consideração $\lambda^2 > 1$, temos duas possibilidades:

- i. Se $\pm \lambda > 1$, $h(r)$ diverge, levando à uma singularidade tipo-espaço se p é ímpar (Fig. 1), ou uma singularidade tipo-tempo p é par (Fig. 2).
- ii. Se $\pm \lambda < -1$, $h(r)$ desaparece, caracterizando um horizonte. Entretanto, o potencial efetivo em (3.104) diverge para $r \rightarrow -0$ ($h(r) \simeq e^{(1 \mp \lambda)a/|r|}/2$), logo $r = 0$ é uma singularidade nula. O diagrama de Penrose é dado pela Fig. 3 se p é ímpar, e pela Fig. 4 se p é par.

(c) Terceira solução de (3.33). Em (3.71), $e^{2J} = \bar{b}^2 / \sin^2 \bar{b}u$. Assim, a métrica possui uma singularidade aparente em $u = u_{s_k} \equiv k\pi/\bar{b}$ (k inteiro). Fazendo $u = u_{s_k} + z$, a métrica, próximo a $z = 0$, tem a forma assintoticamente plana

$$dS^2 = c' dt^2 - c'^{-1} (z^{-4} dz^2 + z^{-2} d\Omega^2), \quad (3.105)$$

com $c' = ch^p(u_s)$. Assim, no setor genérico $u_{s_k} < u < u_{s_{k+1}}$ da solução, o qual não contém u_0 , temos um espaço-tempo geodesicamente completo, sem horizontes, com duas regiões assintóticas — um buraco de minhoca Lorentziano [108], generalizando o caso de $\lambda = 0$ no buraco de minhoca da teoria Einstein-Maxwell-anti-Dilaton de Bronnikov em [109]. O setor da solução que contém u_0 , o espaço-tempo é geodesicamente completo, possuindo um horizonte de ordem p . O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 11 para p ímpar, e pela Fig. 12 para p par.

3.4.4 Solução $a = 0$

Como havíamos visto, neste caso temos duas soluções:

1. Para $u_0 \geq 0$, $a = b = 0$, a métrica é dada por (3.74) com $\lambda_+ = 2/(p+1)$. Esta métrica tem um horizonte de ordem $(p+1)$ em $r = 0$ ($u \rightarrow -\infty$), e uma singularidade em $r = -1/u_0$. Então, para o caso em que $u_0 > 0$, o diagrama de Penrose é dado pela Fig. 1 se p é par, e pela Fig. 2 se p é ímpar.

Para $u_0 = 0$, (3.74) é substituída pela métrica

$$dS^2 = \left(\frac{r}{r_+}\right)^{p+1} dt^2 - \left(\frac{r}{r_+}\right)^{-(p+1)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (3.106)$$

A métrica bidimensional reduzida é similar aos buracos negros de “primeira-classe” de [102]. O infinito espacial $r \rightarrow \infty$ é conformalmente tipo-tempo. Para p par, as geodésicas cruzam o horizonte ímpar em $r = 0$ e terminam na singularidade $r \rightarrow -\infty$ (Fig 13), a qual é conformalmente tipo-espaço. Para p ímpar, $r \rightarrow -r$ é

uma isometria da métrica (3.106). O espaço-tempo é geodesicamente completo e o diagrama de Penrose é dado pela Fig. 14.

2. Para $u_0 < 0$, a métrica é dada por (3.71), com $h(u)$ dada por (3.76). Esta métrica tem um horizonte de ordem p em $u = u_0$ e uma singularidade de coordenadas em $u \rightarrow -\infty$. Se $b^2 > 0$ ($\varphi_1 \neq 0$), a métrica, escrita em termos da coordenada x , contém um logaritmo não-analítico, logo $u \rightarrow -\infty$ ($x = 0$) é uma verdadeira singularidade. Se $b^2 = 0$, a métrica reduz-se a (3.77), a qual é claramente singular em $u \rightarrow -\infty$ ($r = 0$). Em ambos os casos, o diagrama de Penrose é dado pela Fig. 1 se p é ímpar, e pela Fig. 2 se p é par.

3.4.5 Solução \sin

Como visto anteriormente, a única solução de buracos negros regulares, é possível somente para a primeira solução de (3.33) para a função $J(u)$, e escreve-se como (3.71) com $h(u)$ dada por (3.79). Esta função pode ser reescrita como:

$$h(u) = e^{-\lambda\varphi_1 u} \sin \bar{a}(u - u_s), \quad (3.107)$$

para $u_s < u < 0$, onde $u_s = u_0 + k\pi/\bar{a}$, com $-\pi/\bar{a} < u_s < 0$. Este espaço-tempo é assintoticamente minkowskiano (para $u \rightarrow 0$), apresentando uma série infinita de horizontes regulares $u = u_s$, $u = u_s - \pi/\bar{a}$, $u = u_s - 2\pi/\bar{a}$, \dots , todos de ordem p , separando sucessivas regiões I , II , III , \dots as quais são todas diferentes entre si (por causa das funções não-periódicas $e^{2J(u)}$ e $e^{-\lambda\varphi_1 u}$). Este espaço-tempo é geodesicamente completo. Para p par, as regiões sucessivas tem todas a mesma orientação do cone de luz. Então, o diagrama de Penrose é representado pela Fig. 15. Por outro lado, para p ímpar, a orientação do cone de luz alterna entre as sucessivas regiões, o que possibilita que as geodésicas podem rodar indefinidamente. Neste caso o diagrama de Penrose não pode ser desenhado em duas dimensões.

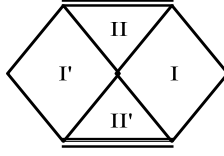


Figura 3.1: Diagrama de Penrose para a solução cosh com n ímpar e m par ($\lambda_+ < 0$) ou m ímpar ($\lambda_+ < -2$ ou $\lambda_+ > 0$); para a solução Linear com $n = m = 1$ e $q_1 < 0$; para a solução sinh com n e m ímpares ($u_0 \geq 0, \lambda_+ < 0$) ou m par ($u_0 \geq 0, \lambda_+ < -2$ ou $u_0 > 0, \lambda_+ > 0$), ou com $b = 0$ ($u_0 < 0, \lambda_+ = -2/p, \pm\lambda > 1$) e p ímpar; e para a solução $a = 0$ com $b = 0$ ($u_0 > 0, \lambda_+ = 2/(p + 1)$) e p par ou com $b^2 \geq 0$ ($u_0 < 0, \lambda_+ = -2/p$) e p ímpar. A singularidade central é representada por uma linha dupla.

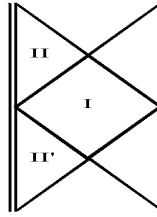


Figura 3.2: Diagrama de Penrose para a solução cosh com n e m pares ($\lambda_+ < 0$) ou m ímpar ($\lambda_+ < -2$ ou $\lambda_+ > 0$); para a solução sinh com n par e m ímpar ($u_0 \geq 0, \lambda_+ < 0$) ou m par ($u_0 \geq 0, \lambda_+ < -2$ ou $u_0 > 0, \lambda_+ > 0$), ou com $b = 0$ ($u_0 < 0, \lambda_+ = -2/p, \pm\lambda > 1$) e p par; e para a solução $a = 0$ com $b = 0$ ($u_0 > 0, \lambda_+ = 2/(p + 1)$) e p ímpar ou com $b^2 \geq 0$ ($u_0 < 0, \lambda_+ = -2/p$) e p par.

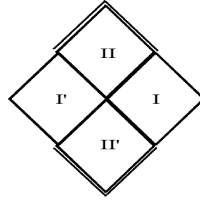


Figura 3.3: Diagrama de Penrose para a solução cosh com n ímpar e m par ($\lambda_+ > 0$) ou m ímpar ($-2 \leq \lambda_+ < 0$); e para a solução sinh com n e m ímpares ($u_0 > 0, \lambda_+ > 0$) ou m par ($u_0 \geq 0, -2 < \lambda_+ < 0$), ou $u_0 < 0$ e $\lambda_+ = -2/p$ com p ímpar ($b^2 > 0$ ou $b = 0$ e $\pm\lambda < -1$).

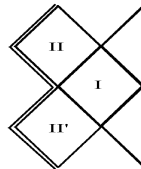


Figura 3.4: Diagrama de Penrose para a solução cosh com n e m pares ($\lambda_+ > 0$) ou m ímpar ($-2 \leq \lambda_+ < 0$); para a solução Linear com $n = m = 1$ e $q_1 > 0$; para a solução sinh com n par e m ímpar ($u_0 > 0, \lambda_+ > 0$) ou m par ($u_0 \geq 0, -2 < \lambda_+ < 0$), ou $u_0 < 0$ e $\lambda_+ = -2/p$ com p par ($b^2 > 0$ ou $b = 0$ e $\pm\lambda < -1$).

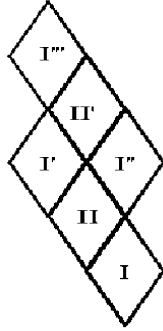


Figura 3.5: Diagrama de Penrose para a solução cosh com $\lambda_+ = 1$, $m = n$ par

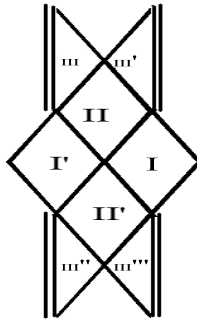


Figura 3.6: Diagrama de Penrose para a solução cosh com $m = n = 1$ e $\lambda_+ = -2/p$ com p ímpar; e para a solução sinh com $u_0 > 0$ e $\lambda_+ = 2/(p+1)$ ($m = n = 1$) com p ímpar ou $\lambda_+ = 2/(n+1)$ ($m = 1$) com n ímpar ou $\lambda_+ = 1$ com $m = n$ ímpar, ou com $u_0 < 0$ ($b^2 > 0$, $m = n = 1$) e $\lambda_+ = -2/p$ com p ímpar.

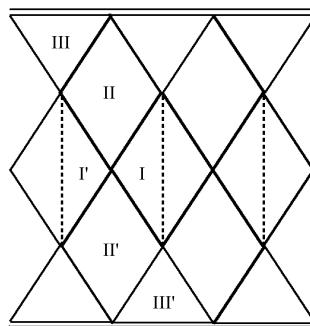


Figura 3.7: Diagrama de Penrose para a solução cosh com $\lambda_+ = -2/p$ e p par ($m = n = 1$ ou $m = 2n + 1$, $p = n - 1$); e para a solução sinh com $u_0 > 0$, $\lambda_+ = 2/(p+1)$ e p par ($m = n = 1$), ou com $u_0 < 0$, $\lambda_+ = -2/p$ ($m = 2n + 1$, $p = n - 1$ ímpares).

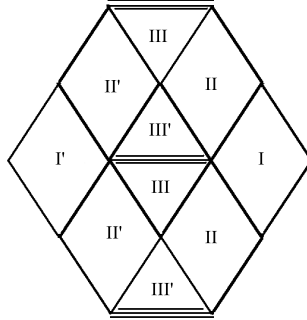


Figura 3.8: Diagrama de Penrose para a solução cosh com $\lambda_+ = -2/p$ e p ímpar ($m = 2n+1, p = n-1$); e para a solução sinh com $u_0 > 0, \lambda_+ = 2/(n+1)$ e n par ($m = 1$), ou com $u_0 < 0, \lambda_+ = -2/p$ e p par ($m = n = 1$ ou $m = 2n+1, p = n-1$).

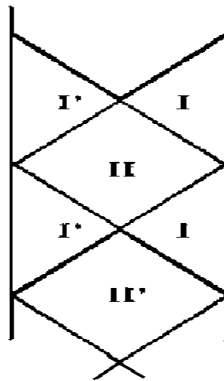


Figura 3.9: Diagrama de Penrose para a solução sinh com $u_0 = 0, \lambda_+ = 1, m = n$ ímpar.

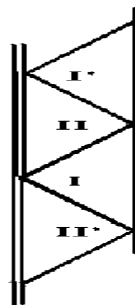


Figura 3.10: Diagrama de Penrose para a solução sinh com $u_0 = 0, \lambda_+ = 1, m = n$ par.

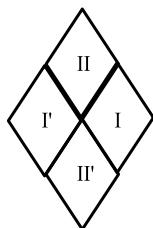


Figura 3.11: Diagrama de Penrose para a solução sinh com $u_0 < 0$ ($b^2 < 0$) e $\lambda_+ = -2/p$, p ímpar.

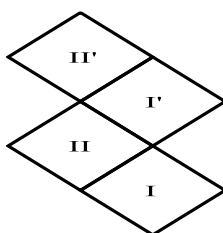


Figura 3.12: Diagrama de Penrose para a solução sinh com $u_0 < 0$ ($b^2 < 0$) e $\lambda_+ = -2/p$, p par.

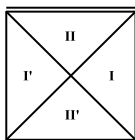


Figura 3.13: Diagrama de Penrose para a solução $a = 0$ ($b = 0, u_0 = 0, \lambda_+ = -2/(p+1)$) com p par.

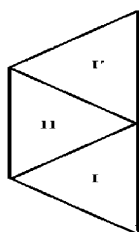


Figura 3.14: Diagrama de Penrose para a solução $a = 0$ ($b = 0, u_0 = 0, \lambda_+ = -2/(p+1)$) com p ímpar.

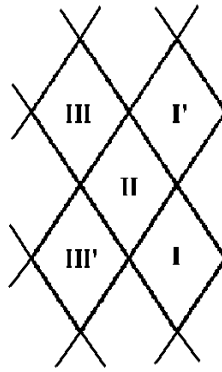


Figura 3.15: Diagrama de Penrose para a solução sin com $\lambda_+ = -2/p$, p par.

Capítulo 4

Modelo Sigma Fantasma

Iniciamos esse capítulo com a formulação do modelo Sigma fantasma para a teoria Einstein-(anti)Maxwell-Dilaton ($E\bar{M}D$), mostrando sua potencialidade pela obtenção da solução cosh, anteriormente apresentada no capítulo 3, no caso de Kaluza-Klein. Prosseguimos com a construção de uma nova solução estacionária, com simetria axial, da teoria $E\bar{M}D$. Apresentamos a análise da estrutura causal dessa solução. Após formulamos o modelo Sigma fantasma para a teoria Einstein-(anti)Maxwell-Dilaton-Áxion, construindo uma nova solução estacionária, com simetria axial, terminando com a análise da estrutura causal dessa solução.

4.1 Solução Estática

Vamos considerar a ação de Einstein-Hilbert no vácuo em 5-dimensões (5D):

$$A_5 = \int \sqrt{-^{(5)}g} \ ^{(5)}\mathcal{R} d^5x . \quad (4.1)$$

Vamos impor que o espaço-tempo possua dois vetores de Killing ∂_4 e ∂_5 (nossa escolha para a assinatura da métrica em 5D é $++--$), e que a coordenada x^5 é cíclica. A ação (4.1) pode então ser decomposta em 4D como¹:

$$A_5 = 2\pi r_5 \int \sqrt{-^{(4)}g} \ [^{(4)}\mathcal{R} - 2 \ ^{(4)}g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \eta_2 e^{-2\sqrt{3}\varphi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] d^4x , \quad (4.2)$$

¹Veja apêndice A.

onde ${}^{(4)}\mathcal{R}$ é o escalar de Ricci no espaço-tempo em 5D, ${}^{(4)}g^{\mu\nu}$ é a inversa da métrica em 4D (fizemos uma transformação conforme na métrica original em 4D), φ é o campo escalar e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de Maxwell, onde A_μ é o quadri-potencial eletromagnético.

Como visto no segundo capítulo, o elemento de linha em 5D pode ser parametrizado em duas formas convenientes:

$$dS_{(5)}^2 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi} {}^{(4)}g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu + e^{-\frac{4}{\sqrt{3}}\varphi} (dx^5 + 2A_\mu dx^\mu)^2 \quad (4.3)$$

$$= \lambda_{ab}(x^k)(dx^a + V_i^a(x^k)dx^i)(dx^b + V_j^b(x^k)dx^j) + \tau^{-1} {}^{(3)}h_{ij}(x^k)dx^i dx^j, \quad (4.4)$$

onde $a, b = 4, 5$; $i, j, k = 1, 2, 3$; $\tau = |\det[\lambda_{ab}]|$, ${}^{(3)}h_{ij}$ é a métrica em 3D (fizemos novamente uma transformação conforme na métrica original em 3D e $V_i^a(x^k)$ são tri-vetores definidos no espaço 3D. Estes vetores satisfazem a relação de dualidade

$$\omega_{a,i} = |h|^{-\frac{1}{2}} \tau h_{il} \lambda_{ab} \epsilon^{jkl} V_{j,k}^b, \quad (4.5)$$

onde ω_a são duais aos V_j^b e $\epsilon^{123} = 1$.

Definindo a matriz de Maison,

$$\chi = \begin{bmatrix} \lambda_{44} + \tau^{-1}\omega_4^2 & \lambda_{45} + \tau^{-1}\omega_4\omega_5 & \tau^{-1}\omega_4 \\ \lambda_{54} + \tau^{-1}\omega_4\omega_5 & \lambda_{55} + \tau^{-1}\omega_5^2 & \tau^{-1}\omega_5 \\ \tau^{-1}\omega_4 & \tau^{-1}\omega_5 & \tau^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

as equações de campo correspondentes a ação (4.1), tornam-se

$$\begin{cases} {}^{(3)}R_{ij} = \frac{1}{4}Tr[\chi^{-1}\partial_i\chi\chi^{-1}\partial_j\chi] \\ {}^{(3)}\nabla_i(\chi^{-1}\partial^i\chi) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Parametrizando a matriz de Maison por [110]

$$\begin{cases} \chi = \eta e^{N\sigma}; N = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} x-a & b \\ -\eta_2 b & a \end{bmatrix} \\ x = Tr[M]; y = \det[M] = \eta_2 b^2 + ax - a^2 \\ \eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta_2 \end{bmatrix} e^{M\sigma}, \end{cases} \quad (4.8)$$

obtemos a seguinte solução, impondo simetria esférica, para as equações (4.7), no caso $\eta_2 = -1$:

$$\begin{aligned}
dS_5^2 &= \left[\frac{1}{q} \left(a - \frac{x}{2} \right) \sinh(q\sigma) + \cosh(q\sigma) \right] e^{\frac{x}{2}\sigma} \times \\
&\quad \left[dx^5 + \frac{b \sinh(q\sigma) dt}{\left(a - \frac{x}{2} \right) \sinh(q\sigma) + q \cosh(q\sigma)} \right]^2 \\
&+ \left[\frac{1}{q} \left(a - \frac{x}{2} \right) \sinh(q\sigma) + \cosh(q\sigma) \right]^{-1} e^{\frac{x}{2}\sigma} dt^2 - \\
&\quad \frac{c_2^2 p^2 e^{-x\sigma}}{\sinh^2(p\sigma)} \left[\frac{p^2 d\sigma^2}{\sinh^2(p\sigma)} + d\Omega_2^2 \right], \tag{4.9}
\end{aligned}$$

onde $p = \frac{c_0 - c_1}{2c_2} = \pm \frac{x}{4} \sqrt{\left(\frac{2q}{x}\right) + 3}$, $q = \sqrt{\frac{x^2}{4} - y}$, $r(\sigma) = \frac{c_1 e^{p\sigma} - c_0 e^{-p\sigma}}{2 \sinh(p\sigma)}$ e $\frac{dr}{d\sigma} = \frac{c_2 p^2}{\sinh^2(p\sigma)}$, c_0, c_1, c_2 são constantes de integração. A solução (4.9), é a solução geral do modelo Sigma para um espaço-tempo no vazio, estático e esfericamente simétrico em 5D.

Podemos fazer uma comparação entre a solução do modelo Sigma e a solução geral, que provém da mesma ação, cosh do terceiro capítulo. Para a solução cosh, podemos escolher os valores particulares dos parâmetros $\lambda = -\sqrt{3}, \eta_1 = -\eta_2 = 1$. Assim, o elemento de linha desta solução pode ser usado na equação (4.4), que torna-se

$$\begin{aligned}
dS_5^2 &= \frac{4\bar{q}}{\bar{a}} \cosh[\bar{a}(k - k_0)] e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_1 k + \varphi_0)} \times \\
&\quad \left[dx^5 - \frac{\bar{a}}{4\bar{q}} (\tanh[\bar{a}(k - k_0)] - \tanh[\bar{a}(k_1 - k_0)]) dt \right]^2 \\
&+ \left(\frac{4\bar{q}}{\bar{a}} \cosh[\bar{a}(k - k_0)] \right)^{-1} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_1 k + \varphi_0)} dt^2 - \\
&\quad \frac{\bar{b}^2 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(\varphi_1 k + \varphi_0)}}{\sinh^2[\bar{b}(k - k_1)]} \left[\frac{\bar{b}^2 dk^2}{\sinh^2[\bar{b}(k - k_1)]} + d\Omega_2^2 \right]. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Comparando (4.9) e (4.10), obtemos as seguintes relações entre os parâmetros das duas soluções:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} = -\frac{2\varphi_1}{\bar{a}\sqrt{3}}; & 4\frac{\bar{q}}{\bar{a}} e^{-\frac{\varphi_0}{\sqrt{3}}} = \cosh^{-1}[\bar{a}(k_1 - k_0)] e^{-\frac{\bar{a}k_1 x}{2q}}; & c_2^2 q b = 4\bar{a}\bar{q}; \\ \frac{p}{q} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}; & \sigma(k) = \frac{\bar{a}}{q}(k - k_1); & q c_2 = 4\bar{q} \cosh[\bar{a}(k_1 - k_0)]. \end{cases} \tag{4.11}$$

Fazendo uma análise assintótica em (4.9), podemos obter as relações destes parâmetros

com os parâmetros físicos massa, cargas escalar e elétrica:

$$\begin{cases} a = \frac{4\Sigma}{c_2\sqrt{3}} ; b = -\frac{2\bar{q}}{c_2} ; x = \frac{2}{c_2} \left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) ; \\ q^2 = \frac{1}{c_2^2} [(M - \sqrt{3}\Sigma)^2 + 4\bar{q}^2] ; p^2 = \frac{1}{c_2^2} [M^2 + \Sigma^2 + \bar{q}^2] . \end{cases} \quad (4.12)$$

Isso prova a consistência da solução obtida pelo modelo Sigma.

4.2 Solução com Rotação

A solução cosh (3.51) do capítulo anterior, para $\eta_1 = -\eta_2 = 1, n = p = 1, \lambda = -\sqrt{3}$, $2a = r_+ - r_-$ é dada por:

$$\begin{cases} dS_{(4)}^2 = f_+ f_-^{-\frac{1}{2}} dt^2 - f_+^{-1} f_-^{\frac{1}{2}} [dr^2 + r^2 f_+ f_- d\Omega_2^2]; \\ A_0 = \frac{\bar{q}}{r} ; e^{\frac{4}{\sqrt{3}}\varphi} = f_- , \end{cases} \quad (4.13)$$

onde fixamos $\varphi_0 = 0$.

Usando (4.4), temos para o elemento de linha (4.13),

$$\begin{aligned} dS_{(5)}^2 &= \left(1 + \frac{r_-}{r}\right) \left[dx^5 - 2\frac{\bar{q}}{r} \left(1 + \frac{r_-}{r}\right)^{-1} dt \right]^2 + \left(1 + \frac{r_-}{r}\right)^{-1} \left[1 - \frac{(r_+ - r_-)}{r} \right] dt^2 + \\ &- \left[1 - \frac{(r_+ - r_-)}{r} \right]^{-1} \{ dr^2 + r[r - (r_+ - r_-)] d\Omega_2^2 \} ; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$A_0 = \frac{\bar{q}}{r} \left(1 + \frac{r_-}{r}\right)^{-1} ; e^{\frac{4}{\sqrt{3}}\varphi} = \left(1 + \frac{r_-}{r}\right)^{-1} ; \quad (4.15)$$

$$M = \frac{1}{2} \left(r_+ - \frac{r_-}{2} \right) ; \bar{q} = -\frac{1}{2} \sqrt{-r_+ r_-} ; \Sigma = -\frac{\sqrt{3}}{4} r_- , \quad (4.16)$$

onde fizemos a translação $r \rightarrow r + r_-$.

A solução de Schwarzschild, imersa em 5D, é dada por:

$$dS_{(5)}^2 = (dx^5)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} [dr^2 + r(r - r_s) d\Omega_2^2] . \quad (4.17)$$

A solução de Schwarzschild e a solução cosh (4.14) têm as seguintes matrizes de Maison:

$$\chi_S = \begin{bmatrix} (1 - \frac{r_s}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{r_s}{r}) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\chi_C = \begin{bmatrix} f_+ & -2\frac{\bar{q}}{r} & 0 \\ -2\frac{\bar{q}}{r} & (1 + \frac{r_-}{r}) & 0 \\ 0 & 0 & [1 - \frac{(r_+ - r_-)}{r}] \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

A solução de Schwarzschild imersa em 5D e a solução cosh tem a mesma métrica 3D reduzida em (4.4). Isto significa que estas soluções são conectadas por uma transformação do grupo $SO(3)^2$. Assim,

$$\chi_C = P_{SC}^T \chi_S P_{SC}; \quad P_{SC} \in SO(3). \quad (4.20)$$

onde

$$P_{SC} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{r_+}{r_+ - r_-}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{-r_-}{r_+ - r_-}}. \quad (4.22)$$

Para o modelo Sigma fantasma ($\eta_2 = -1$, $diag(g_{\mu\nu}) = ++--$) temos $\chi \in SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$ e $P \in SO(3)$ [79].

Agora, podemos construir uma nova solução fantasma com rotação, a partir da solução de Kerr imersa em 5D, da seguinte forma. Assim como as soluções de Schwarzschild e cosh possuem a mesma métrica 3D reduzida e por isso são conectadas por uma transformação do grupo $SO(3)$, existe uma nova solução fantasma com rotação que também possui a mesma métrica 3D reduzida da solução de Kerr imersa em 5D. Esta solução pode ser

²Este grupo é obtido fazendo a análise da forma assintótica da matriz (4.19), que é a identidade 3×3 . Neste caso fantasma, teremos que ter um subgrupo em que a “métrica” seja a identidade, ou seja o grupo $SO(3)$ [79]. Uma observação importante aqui é que na literatura atual, ainda existe uma grande confusão em relação aos espaços simétricos de cada teoria.

obtida fazendo a mesma transformação (4.20) na solução de Kerr imersa em 5D. Depois, extraindo todos os campos necessários para a construção da nova métrica e os campos escalar e de Maxwell, pela relação de dualidade (4.5) e a relação entre as métricas em 5D e 4D (4.3)-(4.4), obtemos a forma final da solução. Esta nova solução será uma generalização estacionária da solução (4.14).

A solução de Kerr imersa em 5D é dada por:

$$\begin{cases} dS_{(5)}^2 = (dx^5)^2 + \frac{f_0^2}{\Sigma_0} (dt - \omega_0 d\phi)^2 - \frac{\Sigma_0}{f_0^2} [\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2] \\ \Delta_0 = r^2 - 2M_K r + a_0^2 ; \quad \Sigma_0 = r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta \\ f_0^2 = r^2 - 2M_K r + a_0^2 \cos^2 \theta ; \quad \omega_0 = -\frac{a_0}{f_0^2} 2M_K r \sin^2 \theta , \end{cases} \quad (4.23)$$

Usando a equação de dualidade (4.5), obtemos a matriz de Maison para a solução de Kerr imersa em 5D:

$$\chi_K = \frac{1}{f_0^2} \begin{bmatrix} (r - 2M_K)^2 + a_0^2 \cos^2 \theta & 0 & -a_0 2M_K \cos \theta \\ 0 & f_0^2 & 0 \\ -a_0 2M_K \cos \theta & 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Fazendo a transformação do grupo $SO(3)$ em (4.24), obtemos:

$$\chi_{KC} = P_{SC}^T \chi_K P_{SC} = \frac{1}{f_0^2} \times \begin{bmatrix} f_0^2 - 2M_K \cos^2 \alpha (r - 2M_K) & 2M_K \sin \alpha \cos \alpha (r - 2M_K) & -a_0 2M_K \cos \alpha \cos \theta \\ 2M_K \sin \alpha \cos \alpha (r - 2M_K) & f_0^2 - 2M_K \sin^2 \alpha (r - 2M_K) & a_0 2M_K \sin \alpha \cos \theta \\ -a_0 2M_K \cos \alpha \cos \theta & a_0 2M_K \sin \alpha \cos \theta & \Sigma_0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Considerando a forma assintótica de (4.25), dada por

$$\chi_{KC}(r \rightarrow +\infty) \sim \begin{bmatrix} 1 - 2 \left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{r} & -2\frac{\bar{q}}{r} & \frac{2J}{r^2} \cos \theta \\ -2\frac{\bar{q}}{r} & 1 - 4\frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{2J}{r^2} \cos \theta & 0 & 1 + 2 \left(M + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde M, \bar{q}, J e Σ são massa, a carga elétrica, o momento angular, e a carga escalar respectivamente. Assim, obtemos os parâmetros físicos da nova solução:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_K}{2} (1 + \cos^2 \alpha) ; \quad \bar{q} = -M_K \sin \alpha \cos \alpha ; \\ J &= -a_0 M_K \cos \alpha ; \quad \Sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} M_K \sin^2 \alpha . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando a definição da matriz de Maison (4.6) e a equação de dualidade (4.5), obtemos as componentes da métrica da nova solução. Fazendo a translação $r \rightarrow r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}$, para compararmos com a solução de Rasheed, obtemos a seguinte métrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_{(5)}^2 = \frac{f_1}{\Sigma_0} \Lambda^2 - 2 \frac{\bar{q}}{\Sigma_0} \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \Lambda \Psi + \frac{f_2}{\Sigma_0} \Psi^2 - \frac{\Sigma_0}{f_0^2} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ \Sigma_0 = \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right)^2 + a_0^2 \cos^2 \theta ; \Delta_0 = r(r - 2M) - (\bar{q}^2 + \Sigma^2) + a_0^2 \\ f_0^2 = r(r - 2M) - (\bar{q}^2 + \Sigma^2) + a_0^2 \cos^2 \theta ; f_1 = \Sigma_0 - \frac{4\Sigma}{\sqrt{3}} \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \\ f_2 = \Sigma_0 - 2 \left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) ; \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}M - \Sigma}{\sqrt{3}M + \Sigma} ; \sin^2 \alpha = \frac{2\Sigma}{\sqrt{3}M + \Sigma} \\ J^2 = \frac{a_0^2}{3} (\sqrt{3}M + \Sigma) (\sqrt{3}M - \Sigma) ; \bar{q}^2 = \frac{2}{3}\Sigma (\sqrt{3}M - \Sigma) ; M_K^2 = M^2 + \bar{q}^2 + \Sigma^2 \\ \Lambda = dx^5 - 2J\bar{q} \frac{\left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right)}{\left(M - \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right)} \frac{\sin^2 \theta}{f_0^2} d\phi ; \Psi = dt - 2J \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sin^2 \theta}{f_0^2} d\phi , \end{array} \right. \quad (4.28)$$

A solução em 4D, usando (4.3), é dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_{(4)}^2 = \frac{f_0^2}{\sqrt{f_1 \Sigma_0}} \Psi^2 - \frac{\sqrt{f_1 \Sigma_0}}{f_0^2} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ A = \frac{\bar{q}}{f_1} \sqrt{\frac{\sqrt{3}M + \Sigma}{\sqrt{3}M - \Sigma}} \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \left[\sqrt{\frac{\sqrt{3}M - \Sigma}{\sqrt{3}M + \Sigma}} dt - a_0 \sin^2 \theta d\phi \right] ; e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi} = \sqrt{\frac{\Sigma_0}{f_1}} \\ M = \frac{1}{2} (r_+ - \frac{r_-}{2}) ; \bar{q} = -\frac{1}{2} \sqrt{-r_+ r_-} ; J = -\frac{a_0}{2} \sqrt{r_+ (r_+ - r_-)} ; \Sigma = -\frac{\sqrt{3}}{4} r_- . \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Esta solução é uma nova solução de buraco negro fantasma estacionário, eletricamente carregado, assintoticamente plano com rotação.

A solução (4.29) é a generalização, como havimos dito, de (4.14): impondo $a_0 = 0$ em (4.29) e fazendo a translação $r \rightarrow r + \sqrt{3}\Sigma$, obtemos novamente (4.14). A solução (4.29) é também a versão fantasma da solução de Rasheed, apresentada no segundo capítulo. Se fizermos $\bar{q}^2 \rightarrow -\bar{q}^2$, $J \rightarrow -J$, $\Sigma \rightarrow -\Sigma$ em (4.29), encontramos a solução de Rasheed (2.25), para $P = 0$ e $\chi \in SL(3, \mathbb{R})/SO(1, 2)$ [79, 94].

4.2.1 Análise da Estrutura Causal

Devido a inversão do sinal do termo de interação com o campo de Maxwell na ação (4.2), é possível obter várias estruturas causais não usuais com os modelos fantasmas [100]. Analisaremos agora a estrutura causal da solução da seção anterior, dada pela equação (4.29). Definindo a função lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (4.30)$$

a equação da geodésica é dada por

$$\dot{r}^2 + g^{11}g_{22}\dot{\theta}^2 = g^{11}\epsilon - \left[\frac{g^{11}}{g_{00}g_{33} - (g_{03})^2} \right] [g_{33}E^2 + g_{00}L^2 - 2g_{03}LE] , \quad (4.31)$$

onde E é a energia, L o momento conjugado ao ângulo azimutal (momento angular), e $\epsilon = 1$ para geodésicas tipo-tempo, $\epsilon = 0$ para geodésicas tipo-luz e $\epsilon = -1$ para geodésicas tipo-espaço.

Para a solução (4.29), a equação da geodésica (4.31) torna-se,

$$\dot{r}^2 + \Delta_0\dot{\theta}^2 = -\frac{\Delta_0}{\sqrt{f_1\Sigma_0}}\epsilon + \frac{\Delta_0}{f_0^2}E^2 - \frac{f_0^2}{f_1\Sigma_0\sin^2\theta} \left[L + \frac{2J}{f_0^2} \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}} \right) \sin^2\theta E \right]^2 . \quad (4.32)$$

Assim como acontece na solução de Kerr, a coordenada radial r é definida para todos os valores reais, incluindo valores positivos e negativos. No limite $r \rightarrow +\infty$, fixando um valor para θ , encontramos $\dot{r} = cte$: logo não temos singularidade no infinito futuro. O espaço-tempo é assintoticamente plano. As geodésicas são regulares ao cruzar a região da ergosfera (onde $f_0 = 0$) e o horizonte de eventos (onde $\Delta_0(r_{\pm}) = 0$), logo existe apenas uma singularidade de coordenadas nestas regiões, sendo uma singularidade aparente na equação da geodésica (4.32).

No limite $r \rightarrow -\frac{\Sigma}{\sqrt{3}}$ (ou $r \rightarrow \sqrt{3}\Sigma$, que são os anéis singulares), a equação (4.32) torna-se:

$$\dot{r}^2 + a_0^2\dot{\theta}^2 = \cos^{-2}\theta \left[E^2 - \epsilon - \frac{L^2}{a_0^2\sin^2\theta} \right] . \quad (4.33)$$

Considerando os valores constantes $\theta = \theta_0 \in (0, \pi/2)$, e $E^2 > \epsilon + \frac{L^2}{a_0^2\sin^2\theta_0}$, a equação (4.33) torna-se:

$$ds = \frac{\pm \cos\theta_0}{\sqrt{E^2 - \epsilon - \frac{L^2}{a_0^2\sin^2\theta_0}}} dr . \quad (4.34)$$

Como a coordenada radial r pode assumir todos os valores reais, o parâmetro geodésico afim s pode assumir qualquer valor real, assim o espaço-tempo é geodesicamente completo. Entretanto, para o valor particular $\theta = \pi/2$, com a equação (4.33), podemos ver que existe uma singularidade nesta região: como no caso da solução de Kerr, existe um anel singular

no plano $z = 0$, dado por $x^2 + y^2 = a_0^2$, em coordenadas cartesianas. Este resultado é advindo de uma simplificação da equação das geodésicas, pois ela apresenta-se não separável, logo, não integrável diretamente. Por isso consideramos planos com valores de θ constante [111].

Este resultado pode ser confirmado seguindo um outro caminho de obtenção das equações de movimento, o formalismo de Hamilton-Jacobi [112, 113, 114, 115]. O problema de que a equação das geodésicas não é separável, surge também no caso de Kerr. Carter [112] soluciona este problema tomando um outro caminho para a obtenção das equações de movimento. Com o formalismo de Hamilton-Jacobi, as equações de movimento de uma partícula teste, mostram-se separáveis, com isso, podemos fazer a análise completa da estrutura causal no caso de Kerr. Como nosso caso é semelhante ao de Kerr, vamos tentar tomar o mesmo caminho de Carter.

A equação de Hamilton-Jacobi, para uma partícula teste neutra, é dada por:

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \\
&= g^{00} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + 2g^{03} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \phi} + g^{11} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + g^{33} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2, \\
&= \left(\frac{g_{33}}{g_{00}g_{33} - g_{03}^2}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{2g_{03}}{g_{00}g_{33} - g_{03}^2}\right) \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \phi} + (g_{11})^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2, \\
&+ (g_{22})^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{g_{00}}{g_{00}g_{33} - g_{03}^2}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

onde S é chamada de ação de Jacobi. Para nosso caso, a métrica é dada por (4.29), logo (4.35) torna-se

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\Sigma_0 f_1 \Delta_0 - 4J^2 \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{\Sigma_0 f_1} f_0^2 \Delta_0}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{4J \left(r + \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\Sigma_0 f_1} \Delta_0}\right) \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \phi}, \\
&- \left(\frac{f_0^2}{\sqrt{\Sigma_0 f_1} \Delta_0 \sin^2 \theta}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\Sigma_0 f_1}} \left[\Delta_0 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right]. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

A ação de Jacobi é uma função do parâmetro geodésico afim e das coordenadas do espaço-tempo. Sabemos que as variáveis onde há simetria são separáveis em S , o que, levando em consideração a assinatura da métrica e as constantes de movimento, temos,

para uma ação separável,

$$S = \frac{1}{2}\epsilon\lambda - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (4.37)$$

onde ϵ, E e L são os mesmo parâmetros definidos em (4.31). Substituindo (4.37) em (4.36), temos que a primeira condição para uma equação de movimento separável é que a função $\sqrt{\Sigma_0 f_1}$ seja separável em r e θ . Como, para $\sigma = \frac{\Sigma}{\sqrt{3}}$,

$$\sqrt{\Sigma_0 f_1} = \sqrt{[(r + \sigma)^2 + a_0^2 \cos^2 \theta] [(r + \sigma)(r - 3\sigma) + a_0^2 \cos^2 \theta]}, \quad (4.38)$$

não é separável, concluímos que a equação (4.36) não é separável também. Por este caminho, não podemos construir a estrutura causal geral. O que podemos fazer é usar a análise do escalar de curvatura, para ver, indiretamente, se existe uma singularidade nos pontos problemáticos da métrica.

O escalar de curvatura (3.6), da teoria EMD com $\lambda = -\sqrt{3}$, é dado por

$${}^{(4)}\mathcal{R} = 2g^{11}\varphi'^2 + 2g^{22}(\partial_\theta\varphi)^2, \quad (4.39)$$

que para a solução (4.29), torna-se

$${}^{(4)}\mathcal{R} = -\frac{6\sigma^2}{(\Sigma_0 f_1)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \Delta_0 [(r + \sigma) - a_0^2 \cos^2 \theta]^2 + 4a_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (r + \sigma)^2 \right\}. \quad (4.40)$$

Em todo o espaço-tempo o escalar é regular, exceto nos zeros de Σ_0 e f_1 . No plano equatorial ($\theta = \pi/2$),

$$\begin{cases} \Sigma_0 = (r + \sigma)^2 \\ f_1 = (r + \sigma)(r - 3\sigma) \\ \Delta_0 = (r - M)^2 - (\sigma + M)^2 + a_0^2. \end{cases} \quad (4.41)$$

Os horizontes de evento e interno são $r_\pm = M \pm \sqrt{(M + \sigma)^2 - a_0^2}$, que, para $a_0^2 < (M + \sigma)^2$, estão limitados por $M < r_+ < 2M + \sigma$ e $-\sigma < r_- < M$; para $a_0^2 = (M + \sigma)^2$, $r_+ = r_- = M$; e para $a_0^2 > (M + \sigma)^2$, $\Delta_0 > 0$ não apresenta horizonte. Como as singularidades estão em $r = 3\sigma$ e $r = -\sigma$, as estruturas regulares terão a restrição $r_+ > 3\sigma$, o que implica em $M > 3\sigma$ para os buracos negros extremos, e $M > \sigma$ para os não extremos.

Podemos agora fazer o limite da coordenada r próximo ao anel singular, ou seja, $r \rightarrow -\sigma, 3\sigma$, pela direita. Neste limite (4.40), fica sendo

$${}^{(4)}\mathcal{R} = -\frac{6\sigma^2}{a_0^4 \cos^6 \theta}. \quad (4.42)$$

Fazendo agora a análise do valor de θ próximo ao plano equatorial, temos claramente uma divergência, pois $\lim_{r \rightarrow -\sigma, 3\sigma} \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} {}^{(4)}\mathcal{R} \rightarrow -\infty$.

Colecionando os resultados particulares da estrutura causal, podemos então dividi-la da seguinte forma:

1. Para $a_0^2 > (M + \sigma)^2$, o espaço-tempo não possui horizonte, pois $\Delta_0 > 0$. O anel singular, em $r = 3\sigma$ (ou $r = -\sigma$), fica descoberto, logo isto caracteriza uma singularidade nua.
2. Para $a_0^2 = (M + \sigma)^2$, o espaço-tempo possui apenas um horizonte em $r_+ = M$, pois $\Delta_0(r = r_+ = M) = 0$. A estrutura causal fica sendo idêntica a Kerr extremo, para $M > 3\sigma$, e uma singularidade nua para $M \leq 3\sigma$.
3. Para $a_0^2 < (M + \sigma)^2$, o espaço-tempo possui dois horizontes em $r_{\pm} = M \pm \sqrt{(M + \sigma)^2 - a_0^2}$, pois $\Delta_0(r = r_{\pm}) = 0$. Os horizontes estão limitados por $M < r_+ < 2M + \sigma$ e $-\sigma < r_- < M$. A estrutura causal do espaço-tempo fica sendo idêntica a de Kerr com dois horizontes para $M > \sigma$ e é uma singularidade nua para $M \leq \sigma$.

4.3 Modelo Sigma da Teoria E \bar{M} DA

Para a solução cosh (3.51) do terceiro capítulo, para $\lambda = -\eta_1 = \eta_2 = -1$; $\lambda_+ = 1 + \lambda^2 = 2$; $\lambda_- = 0$, o elemento de linha, em 4D, é dado por:

$$dS^2 = f_+ dt^2 - f_+^{-1} dr^2 - r^2 f_- d\Omega^2; F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt, \quad (4.43)$$

$$e^{2\varphi} = f_-; q = \sqrt{-\frac{r_+ r_-}{2}}; M = \frac{r_+}{2}; \Sigma = -\frac{r_-}{2}. \quad (4.44)$$

Fazendo a translação $r \rightarrow r + r_-$, obtemos

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{r_-}{r}\right)^{-1} dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{r_-}{r}\right) [dr^2 - r(r - r_s)d\Omega^2] \quad (4.45)$$

$$F = -\frac{q}{r^2} dr \wedge dt; e^{2\varphi} = f_-; q = \sqrt{-\frac{r_+ r_-}{2}}; M = \frac{r_+}{2}; \Sigma = -\frac{r_-}{2}, \quad (4.46)$$

onde $r_s = r_+ - r_-$. O modelo Sigma da teoria EMDA é dado pela ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{\|g\|} \left[R - 2\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} e^{4\varphi} \partial_\mu \kappa \partial^\mu \kappa + e^{-2\varphi} F^2 - \kappa F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right]. \quad (4.47)$$

Parametrizando os campos por

$$dS^2 = f(dt - \omega_i dx^i)(dt - \omega_j dx^j) + f^{-1} h_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad (4.48)$$

$$F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i v, \quad \kappa \tilde{F}^{ij} - e^{-2\varphi} F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2}h} \epsilon^{ijk} \partial_k u, \quad (4.49)$$

$$\tau^i = -\frac{f}{\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} \partial_j \omega_k, \quad \tau_i = \partial_i \chi + v \partial_i u - u \partial_i v, \quad (4.50)$$

onde h_{ij} é a métrica reduzida em 3D e $\omega = u - \kappa v$. Então, podemos escrever a ação (4.47), reduzida a 3D, em termos dos campos, da seguinte forma:

$$S_\sigma = \int d^3x \sqrt{h} h^{ij} [{}^{(3)}R_{ij} - G_{AB} \partial_i \Phi^A \partial_j \Phi^B], \quad \Phi^A = (f, \chi, v, u, \varphi, \kappa). \quad (4.51)$$

Parametrizando a matriz dos campos por

$$M = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}Q \\ QP^{-1} & P + QP^{-1}Q \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$P = e^{-2\varphi} \begin{bmatrix} v^2 + f e^{2\varphi} & v \\ v & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} v\omega - \chi & \omega \\ \omega & -\kappa \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

podemos escrever a ação da teoria EMDA na forma

$$S_\sigma = \int d^3x \sqrt{h} [{}^{(3)}R + \frac{1}{4} Tr(\nabla M \nabla M^{-1})], \quad M \in Sp(4, \mathbb{R})/U(2). \quad (4.54)$$

A ação do modelo Sigma da teoria EMDA é invariante pela ação do grupo $Sp(4, \mathbb{R})$. Podemos então encontrar o modelo Sigma da teoria EMDA da solução cosh (4.45).

Parametrizando esta solução da mesma forma que em (4.48)-(4.50), temos para cosh

$$v = \sqrt{2}\frac{q}{r}(1 + \frac{r_-}{r})^{-1}, f = (1 - \frac{r_s}{r})(1 + \frac{r_-}{r})^{-1}, \kappa = u = \chi = \tau^i = Q = 0, \quad (4.55)$$

$$P_C = \begin{bmatrix} (1 + \frac{r_-}{r})^{-1} (f_s + 2\frac{q^2}{r^2}) & \sqrt{2}\frac{q}{r} \\ \sqrt{2}\frac{q}{r} & (1 + \frac{r_-}{r}) \end{bmatrix}, f_s = 1 - \frac{r_s}{r}. \quad (4.56)$$

A solução (4.45) e a solução de Schwarzschild, são conectadas por uma transformação do grupo $U(2)$, subgrupo de $Sp(4, \mathbb{R})$, da seguinte forma:

$$M_C = U^T M_S U, U = \begin{bmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

onde $\sin \alpha = \sqrt{-\frac{r_-}{r_+ - r_-}}$ e $\cos \alpha = \sqrt{\frac{r_+}{r_+ - r_-}}$. Então, podemos generalizar a solução cosh fazendo a transformação do grupo $U(2)$, na matriz que representa o modelo Sigma da solução de Kerr. A solução de Kerr, parametrizada como em (4.48)-(4.50), é dada por

$$dS_{(K)}^2 = f_K(dt - \omega_K d\phi)^2 - f_K^{-1} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (4.58)$$

$$f_K = \frac{f_0^2}{\Sigma_0}, f_0^2 = r(r - 2M_{(K)}) + a_0^2 \cos^2 \theta, \Sigma_0 = r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta, \quad (4.59)$$

$$\Delta_0 = r(r - 2M_{(K)}) + a_0^2, \omega_K = -\frac{a_0}{f_0^2} 2M_{(K)} r \sin^2 \theta, e^{2\varphi} = 1, \kappa = F = 0 \quad (4.60)$$

Pela equação de dualidade (4.50) e a definição da matriz dos campos (4.52), podemos determinar a matriz dos campos para a solução de Kerr

$$M_K = \begin{bmatrix} f_K^{-1} & 0 & -\chi f_K^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\chi f_K^{-1} & 0 & f_K + \chi^2 f_K^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Fazendo a transformação (4.57) do grupo $U(2)$, obtemos a matriz dos campos para

a nova soluccão cosh com rotaçãõ

$$M_{CK} = U^T M_K U = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_0 - 2M_{(K)} \sin^2 \alpha r & -2M_{(K)} \sin \alpha \cos \alpha r \\ -2M_{(K)} \sin \alpha \cos \alpha r & \Sigma_0 - 2M_{(K)} \cos^2 \alpha r \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -2M_{(K)} \cos^2 \alpha a_0 \cos \theta & 2M_{(K)} \sin \alpha \cos \alpha a_0 \cos \theta \\ 2M_{(K)} \sin \alpha \cos \alpha a_0 \cos \theta & -2M_{(K)} \sin^2 \alpha a_0 \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} m_1 & \Sigma_0^{-1} [2M_{(K)} r f_0^2 - 4M_{(K)}^2 a_0^2 \cos^2 \theta] \\ \Sigma_0^{-1} [2M_{(K)} r f_0^2 - 4M_{(K)}^2 a_0^2 \cos^2 \theta] & m_2 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$m_1 = \Sigma_0^{-1} [f_0^2 (\Sigma_0 - 2M_{(K)} \cos^2 \alpha r) + 4M_{(K)}^2 \cos^2 \alpha a_0^2 \cos^2 \theta], \quad (4.66)$$

$$m_2 = \Sigma_0^{-1} [f_0^2 (\Sigma_0 - 2M_{(K)} \sin^2 \alpha r) + 4M_{(K)}^2 \sin^2 \alpha a_0^2 \cos^2 \theta] \quad (4.67)$$

Entãõ, usando a definiçãõ da matriz dos campos (4.52) e a equaçãõ de dualidade (4.50), obtemos a seguinte soluçãõ cosh com rotaçãõ

$$dS^2 = f(dt - \omega_3 d\phi)^2 - f^{-1} \left[\frac{f_0^2}{\Delta_0} dr^2 + f_0^2 d\theta^2 + \Delta_0 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (4.68)$$

$$f = \frac{r[r - 2(M + D)] + a_0^2 \cos^2 \theta}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad f_0^2 = r[r - 2(M + D)] + a_0^2 \cos^2 \theta, \quad (4.69)$$

$$\Delta_0 = r[r - 2(M + D)] + a_0^2, \quad v = \frac{\sqrt{2}qr}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad u = \frac{a_0 \cos \theta}{r} v, \quad (4.70)$$

$$e^{2\varphi} = \frac{r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta}{r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad \kappa = \frac{2Da_0 \cos \theta}{r^2 + a_0^2 \cos^2 \theta}, \quad \omega_3 = -2J \sin^2 \theta \frac{r}{f_0^2}, \quad (4.71)$$

$$J = a_0 M, \quad M = M_{(K)} \cos^2 \alpha, \quad q = \frac{2}{\sqrt{2}} M_{(K)} \sin \alpha \cos \alpha, \quad D = M_{(K)} \sin^2 \alpha \quad (4.72)$$

Esta é uma soluçãõ estacionária, assintoticamente plana e carregada. A métrica (4.68) é a generalizaçãõ, com rotaçãõ e campo de áxion, da métrica (4.45). Tomando $a_0 = 0$ na soluçãõ (4.68), recuperamos novamente a soluçãõ (4.45). Essa soluçãõ é a versãõ fantasma da soluçãõ de Sen (2.36).

4.3.1 Análise da Estrutura Causal

A equação da geodésica (4.31) para a solução (4.68) é dada por

$$\dot{r}^2 + \Delta_0 \dot{\theta}^2 = -\frac{\Delta_0}{\Sigma_0} \epsilon + \frac{\Delta_0}{f_0^2} E^2 - \frac{f_0^2}{\Sigma_0^2 \sin^2 \theta} \left[L - 2 \frac{r}{f_0^2} \sin^2 \theta E \right]^2, \quad (4.73)$$

onde $\Sigma_0 = r(r - 2D) + a_0^2 \cos^2 \theta$.

Assim como na solução de Kerr, a coordenada radial r toma todos os valores reais. Fazendo o limite $r \rightarrow +\infty$, obtemos a métrica de Minkowski, logo a solução é assintoticamente plana. Novamente a equação da geodésica não é separável, sobrando apenas tentar o formalismo de Hamilton-Jacobi. Procedemos então, de igual modo que o caso anterior. Passamos para o formalismo de Hamilton-Jacobi, e a equação (4.35), para a métrica (4.68), usando (4.37), fica sendo

$$\Delta_0 \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Delta_0} \left\{ [(\Delta_0 + 2Mr)E - a_0 L]^2 - \Delta_0 [\epsilon r(r - 2D) + (L - a_0 E)^2] \right\} = - \left\{ \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + [L^2 \csc^2 \theta - a_0^2 (E^2 - \epsilon)] \cos^2 \theta \right\}, \quad (4.74)$$

onde usamos $(1/\sin^2 \theta)(a_0 \sin^2 \theta E - L) = (L^2 \csc^2 \theta - a_0^2 E^2) \cos^2 \theta + (L - a_0 E)^2$. Definindo as funções

$$\begin{cases} R(r) = [(\Delta_0 + 2Mr)E - a_0 L]^2 - \Delta_0 [\zeta + \epsilon r(r - 2D) + (L - a_0 E)^2] \\ T(\theta) = \zeta - [L^2 \csc^2 \theta - a_0^2 (E^2 - \epsilon)] \cos^2 \theta, \end{cases} \quad (4.75)$$

onde ζ é uma constante de integração, a equação (4.74) é integrável, e a solução para a ação de Jacobi em (4.37) é dada por

$$S = \frac{1}{2} \epsilon \lambda - Et + L\phi + \int \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta_0} dr + \int \sqrt{T(\theta)} d\theta. \quad (4.76)$$

Como o formalismo de Hamilton-Jacobi [112, 113, 114, 115] nos diz que a derivação parcial da ação de Jacobi, em relação as constantes ϵ , E , L e ζ são constantes arbitrárias, que podem ser consideradas zero, temos

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} = 0 \Rightarrow \int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{T}}, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \epsilon} = 0 \Rightarrow \lambda = \int \frac{r(r - 2D)}{\sqrt{R}} dr + a_0^2 \int \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{T}} d\theta. \quad (4.78)$$

Substituindo (4.77) em (4.78), temos

$$d\lambda = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{R}} dr \quad , \quad d\lambda = \frac{\Sigma_0}{\sqrt{T}} d\theta . \quad (4.79)$$

Isso nos mostra que o parâmetro geodésico afim λ é sempre extensível³, exceto quando $\Sigma_0 = 0$, onde temos uma singularidade. Podemos confirmar esse resultado calculando o escalar de curvatura para essa teoria. Na teoria $E\bar{M}DA$, a variação funcional da ação (4.47), em relação a métrica, é dada por

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}e^{4\varphi}\partial_\mu\kappa\partial_\nu\kappa - 2\left(F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right)e^{-2\varphi} . \quad (4.80)$$

Tomando o traço, temos o escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = 2g^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{4}e^{4\varphi}\partial_\mu\kappa\partial_\nu\kappa\right] . \quad (4.81)$$

Para a solução (4.68), o escalar de curvatura (4.81) é

$$\mathcal{R} = -\frac{2D^2}{\Sigma_K\Sigma_0^3}\left\{\Delta_0\left[a_0^2\cos^2\theta + (r^2 - a_0^2\cos^2\theta)^2\right] + a_0^2\sin^2\theta\left[a_0^2\cos^2\theta(4r^2 - 1) + r^2\right]\right\} \quad (4.82)$$

onde $\Sigma_K = r^2 + a_0^2\cos^2\theta$. Podemos ver diretamente que o escalar de curvatura diverge nos zeros das funções Σ_K e Σ_0 . Como, no plano equatorial, o zero de Σ_K é em $r = 0$, e que os de Σ_0 são em $r = 0$ e $r = 2D$, temos que analisar somente os zeros de Σ_0 .

Os horizontes de eventos e interno, para $\Delta_0 = 0$, são dados por $r_\pm = M + D \pm \sqrt{(M + D)^2 - a_0^2}$. Como existe uma singularidade em $r = 2D$, as estruturas regulares devem ter como restrição $r_+ > 2D$. Colecionando os resultados, temos:

1. Para $a_0^2 > (M + D)^2$, o espaço-tempo não possui horizonte, pois $\Delta_0 > 0$. O anel singular, em $r = 2D$ (ou $r = 0$), fica descoberto, logo isto caracteriza uma singularidade nua.
2. Para $a_0^2 = (M + D)^2$, o espaço-tempo possui apenas um horizonte em $r_+ = M + D$, pois $\Delta_0(r = r_+) = 0$. A estrutura causal fica sendo idêntica a Kerr extremo, para $M > D$, e uma singularidade nua para $M \leq D$.

³Assume todos os valores reais.

3. Para $a_0^2 < (M + D)^2$, o espaço-tempo possui dois horizontes em $r_{\pm} = M + D \pm \sqrt{(M + D)^2 - a_0^2}$, pois $\Delta_0(r = r_{\pm}) = 0$. Os horizontes estão limitados por $M + D < r_+ < 2(M + D)$ e $0 < r_- < M + D$. A estrutura causal do espaço-tempo fica sendo idêntica a de Kerr com dois horizontes para $M > D$, e é uma singularidade nua para $M \leq D$.

Conclusão

A motivação de abordar os modelos fantasmas é cada vez mais crescente em nossos dias. Com o intuito meramente matemático, no momento, obtivemos uma classe geral de soluções esfericamente simétrica da teoria $E\bar{M}D$ e analisamos a estrutura causal, muitas vezes exótica, dessas soluções. Isso nos mostrou que mudando o sinal da contribuição do campo escalar ou de Maxwell, aparecem novas possibilidades para construções de soluções regulares e analíticas de buracos negros, como por exemplo os de horizonte degenerado (3.54) para os casos cosh e sinh. No caso sinh fantasma, aparece uma nova solução assintoticamente não plana, mas com horizonte degenerado, fato inédito ao nosso conhecimento. Os casos que nos revelam novidades, bastante apreciáveis, na estrutura causal são as soluções dos diagramas de Penrose das figuras 3.7, 3.8 e 3.15 (cap. 3). Algumas classes de soluções não podem ser representadas em um diagrama bidimensional usual (casos particulares de cosh e sin); e as da figura 3.15, não apresentam cópias das regiões já existentes, mas possuem infinitas regiões distintas no diagrama.

Também, pelo método do modelo Sigma acoplado à gravitação, pudemos obter novas soluções estacionárias, com simetria axial, das teorias $E\bar{M}D$ e $E\bar{M}DA$. Descobrimos ao final que a obtenção das soluções poderia ser feita por uma espécie de continuação analítica, fazendo a transformação $q^2 \rightarrow -q^2$, na carga. Mas isso não poderia ser previsto sem que obtivéssemos essa experiência com esses modelos. Na verdade a formulação do modelo Sigma fantasma é diferente da usual, como vimos. No caso $E\bar{M}D$, por exemplo, o grupo de simetria das equações de Einstein continua sendo o $SL(3, \mathbb{R})$, mas o espaço simétrico muda para $SL(3, \mathbb{R})/SO(3)$. O mesmo acontece com a formulação da teoria fantasma $E\bar{M}DA$. O grupo de simetria $Sp(4, \mathbb{R})$ permanece o mesmo, mas o espaço simétrico

muda para $Sp(4, \mathbb{R})/U(2)$. Entretanto, mesmo com a mudança do sinal de q^2 , a análise da estrutura causal dessas soluções revelou uma grande semelhança com as estruturas anteriormente conhecidas em Kerr.

Esse trabalho nos oferece a abertura para várias outras possibilidades de modificações dos modelos usuais para seus casos fantasmas. Um exemplo é o da teoria Einstein-Maxwell (EM), modificada para $E\bar{M}$. Neste caso, o modelo Sigma usual tem como espaço simétrico $SU(1, 2)/S(U(1, 1) \times U(1))$, que, para o caso fantasma, muda para $SU(2, 1)/S(U(2) \times U(1))$. Dessa forma, obtivemos uma nova solução anti-Kerr-Newmann, partindo de Kerr, semelhante ao caso de [85]. Estamos ainda trabalhando na construção formal dos modelos Sigma fantasmas de várias teorias, onde temos obtido novas soluções. Essa construção formal deverá estabelecer os espaços simétricos de cada modelo, fantasma ou não. Como mencionado em uma nota de rodapé do capítulo 4, ainda existe uma grande confusão na literatura atual a respeito da determinação desses espaços simétricos.

Apêndice A

Redução Dimensional

A redução dimensional [116] da ação de Einstein-Hilbert em 5D no vácuo é feita considerando as seguintes condições:

1. O espaço-tempo de 5D deve ser compacto na quinta dimensão, em que escolhemos a topologia de um círculo S^1 .
2. A métrica do espaço-tempo não depende da quinta dimensão.

Dessa forma, podemos parametrizar a métrica pelo elemento de linha:

$$dS_5^2 = {}^{(5)}g_{AB}(x^\beta)dx^A dx^B = {}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu}(x^\beta)dx^\mu dx^\nu - \eta_2 \Phi^2(x^\beta) (dx^5 + 2A_\beta dx^\beta)^2, \quad (\text{A.1})$$

onde ${}^{(5)}g_{AB}$ é a métrica do espaço-tempo em 5D, ${}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo em 4D, Φ um campo escalar, $\eta_2 = \pm 1$, e A_β é o quadri-potencial eletromagnético ou campo de Maxwell. Os índices são dados por $A, B = 1, \dots, 5$ e $\mu, \nu = 0, \dots, 3$. Pelas componentes da métrica em 5D

$${}^{(5)}g_{55} = -\eta_2 \Phi^2, \quad {}^{(5)}g_{\mu 5} = -2\eta_2 \Phi^2 A_\mu, \quad {}^{(5)}g_{\mu\nu} = {}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu} - 4\eta_2 \Phi^2 A_\mu A_\nu, \quad (\text{A.2})$$

podemos obter suas inversas¹

$${}^{(5)}g^{55} = -\eta_2 \Phi^{-2} + 4A_\mu A^\mu, \quad {}^{(5)}g^{\mu 5} = -2A^\mu, \quad {}^{(5)}g^{\mu\nu} = {}^{(4)}\bar{g}^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

¹Pela relação ${}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}g^{BC} = \delta_A^C$.

Pela definição de conexão (1.3), e através de (A.2) e (A.3), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (5)\Gamma_{55}^5 = -2\eta_2\Phi A^\mu\partial_\mu\Phi, \quad (5)\Gamma_{55}^\mu = \eta_2\Phi\partial^\mu\Phi, \\ (5)\Gamma_{\mu 5}^5 = \Phi^{-1}\partial_\mu\Phi - 4\eta_2A_\mu A^\nu\Phi\partial_\nu\Phi + 2\eta_2\Phi^2A^\nu F_{\mu\nu}, \\ (5)\Gamma_{\mu\nu}^5 = \bar{\nabla}_\mu A_\nu + \bar{\nabla}_\nu A_\mu + A_\nu\Phi^{-1}\partial_\mu\Phi + A_\mu\Phi^{-1}\partial_\nu\Phi + \\ \quad + 4\eta_2A^\alpha[\Phi^2(A_\nu F_{\mu\alpha} + A_\mu F_{\nu\alpha}) - 2A_\mu A_\nu\Phi\partial_\alpha\Phi], \\ (5)\Gamma_{\nu 5}^\mu = -\eta_2(\Phi^2F_\nu{}^\mu - 2A_\nu\Phi\partial^\mu\Phi), \\ (5)\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = {}^{(4)}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - 2\eta_2\Phi^2(A_\nu F_\mu{}^\alpha + A_\mu F_\nu{}^\alpha) + 4\eta_2A_\mu A_\nu\Phi\partial^\alpha\Phi, \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

onde $F_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de Maxwell, e todas as grandezas barradas em cima são referentes à métrica ${}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu}$. Em 5D, as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$\left\{ \begin{array}{l} (5)R_{55} = \eta_2\Phi{}^{(4)}\bar{\nabla}_\mu\partial^\mu\Phi + \Phi^4\bar{F}^2, \\ (5)R^{\mu\nu} = {}^{(4)}\bar{R}^{\mu\nu} - \Phi^{-1}{}^{(4)}\bar{\nabla}_\mu\partial^\mu\Phi + 2\eta_2\Phi^2\bar{F}^2. \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Usando as relações

$$\left\{ \begin{array}{l} (5)R^5{}_5 = {}^{(5)}g_{\mu 5}{}^{(5)}R^{\mu 5} + {}^{(5)}g_{55}{}^{(5)}R^{55}, \\ (5)R^\mu{}_5 = {}^{(5)}g_{\nu 5}{}^{(5)}R^{\mu\nu} + {}^{(5)}g_{55}{}^{(5)}R^{\mu 5}, \\ (5)R_{55} = {}^{(5)}g_{55}{}^{(5)}R^5{}_5 + {}^{(5)}g_{5\mu}{}^{(5)}R^\mu{}_5, \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

na definição de escalar de curvatura em 5D

$$(5)R = {}^{(5)}g_{AB}{}^{(5)}R^{AB} = {}^{(5)}g_{\mu\nu}{}^{(5)}R^{\mu\nu} + ({}^{(5)}g_{55})^{-1}{}^{(5)}R_{55}, \quad (\text{A.7})$$

encontramos

$$(5)R = {}^{(4)}\bar{R} - 2\Phi^{-1}{}^{(4)}\bar{\nabla}_\mu\partial^\mu\Phi + \eta_2\Phi^2\bar{F}^2. \quad (\text{A.8})$$

Como ${}^{(5)}g = \det[{}^{(5)}g_{AB}] = -\eta_2\Phi^2{}^{(4)}\bar{g}$, onde $\bar{g} = \det[{}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu}]$, então, a ação de Einstein-Hilbert em 5D fica sendo

$$\begin{aligned} (5)A &= -\frac{1}{16\pi{}^{(5)}G} \int d^5x \sqrt{|{}^{(5)}g|} (5)R, \\ &= -\frac{2\pi r{}^{(5)}}{16\pi{}^{(5)}G} \int d^4x \sqrt{|{}^{(4)}\bar{g}|} [\Phi{}^{(4)}\bar{R} - 2{}^{(4)}\bar{\nabla}_\mu\partial^\mu\Phi + \eta_2\Phi^3\bar{F}^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde fizemos a integração na coordenada cíclica x^5 .

Fazendo a transformação conforme ${}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu} = \Phi^{-1}g_{\mu\nu}$, e uma mudança de campo escalar $\Phi = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi\right)$, escolhendo ${}^{(5)}G = 2\pi r_{(5)}$, temos que (A.1) e (A.9) ficam sendo

$${}^{(5)}A = {}^{(4)}A = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|{}^{(4)}g|} \left[{}^{(4)}R - 2 {}^{(4)}g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \eta_2 e^{-2\sqrt{3}\varphi} F^2 \right], \quad (\text{A.10})$$

$$dS_{(5)}^2 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \eta_2 e^{-\frac{4}{\sqrt{3}}\varphi} (dx^5 + 2A_\mu dx^\mu)^2. \quad (\text{A.11})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Matt Visser, Lorentzian Wormholes, American Institute of Physics Press, 1995, New York.
- [2] G.W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B **298**, 741 (1988).
- [3] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortin, A. Peet and A. Van Proeyen, Phys. Rev. D **46**:5278-5302,1992; arXiv:hep-th/9205027v1 13 May 1992.
- [4] V. Frolov, A. Zelnikov, and U. Bleyer, Ann. Phys. (Leipzig) **44**, 371 (1987).
- [5] J. H. Horne and G. T. Horowitz, Phys. Rev. D **46**:1340-1346,1992; arXiv:hep-th/9203083v2 3 Apr 1992.
- [6] A. Sen, Phys. Rev. Lett. **69**, 1006-1009 (1992). Ver também: arXiv:hep-th/9210050v1 9 Oct 1992.
- [7] A. Einstein and N. Rose, Phys. Rev. **48**:73-77,1935.
- [8] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, 1984, Inglaterra.
- [9] S. Braunstein, Unpublished, 1987; M. S. Morris and K. S. Thorne, Am. J. Phys. **56**:395-412, 1988.
- [10] H. Epstein, V. Glaser and A. Jaffe, Novo Cimento, **36**:1016-1022, 1965; G. Klinkhammer, Phys. Rev. D, **43**:2542-2548, 1991; U. Yurtsever, Class. Quantum Grav., **7**:L251-L258, 1990.

- [11] A. G. Riess et al, *Astronomical Journal*, vol. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter, *Astrophysical Journal*, vol. **507**, 46 (1999).
- [12] S. Hannestad, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 1938 (2006).
- [13] J. Dunkley et al, *Astrophys. J. Suppl.* **180**:306-329,2009; arXiv: astro-ph/0803.0586.
- [14] P. C. W. Davis and S. A. Fulling, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **356**:237-257, 1977; L. H. Ford and T. A. Roman, *Phys. Rev. D*, **41**:3662-3670, 1990, *Phys. Rev. D*, **48**:776-782, 1993.
- [15] B. Rose, *Class. Quantum Grav.* **3**:975-995, 1986, *Class. Quantum Grav.* **4**:1019-1030, 1987.
- [16] S. M. Wagh and N. Dadhich, *Phys. Rev. D*, **32**:1863-1865,1985.
- [17] A. Einstein, *Zur Allgemeinen Relativitätstheorie*, *Preuss. Akad. Wiss., Sitzber*, 778-786, 1915, Berlin.
- [18] A. Einstein, *Der Feldgleichungen der Gravitation*, *Preuss. Akad. Wiss., Sitzber*, 844-847, 1915, Berlin.
- [19] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP, 1990, Bristol.
- [20] E. Lages Lima, *Elementos de Topologia Geral*, *Ao Livro Tecnico*, 1970, Rio de Janeiro.
- [21] C. Nash e S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, *Academic Press*, 1983, Londres.
- [22] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, *World Scientific*, 1989, Cingapura.
- [23] Robert M. Wald, *General Relativity*, *Univ. of Chicago Press*, 1984, Chicago.

- [24] Gray, A. :The Three Fundamental Forms. 16.6 in Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 380-382, 1997; Texto científico encontrado no endereço: <http://www.mat.uc.pt/picado/geomdif/0405/Apontamentos/sII5.pdf> .
- [25] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Deut. Akad. Wiss., Sitzber, Kl. Math.-Phys. Tech., 189-196, 1916, Berlin.
- [26] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Deut. Akad. Wiss., Sitzber, Kl. Math.-Phys. Tech., 424-434, 1916, Berlin.
- [27] Eddington, A.S., 1924, Nature, **113**, 192.
- [28] M.D. Kruskal, Phys. Rev. 119 (1960) 1743.
- [29] G. Szekeres, Publ. Mat. Debrecen. **7** (1960) 285.
- [30] G.D. Birkhoff, Relativity and Modern Physics (1923), Cambridge, MA : Harvard University Press.
- [31] L. I. Beviláqua, texto científico que se encontra em: <http://www.fma.if.usp.br/~leandro/Birkhoff.pdf> .
- [32] Tolman R C 1939 Phys. Rev. **55**, 364.
- [33] Oppenheimer J. R. and Volkoff G. M., 1939 *ibid.* 55, 374.
- [34] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*. Annalen der Physik **50**: 106120, 1916.
- [35] G. Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam **26**: 12011208, 1918.

- [36] R.P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11** (1963), 237.
- [37] B. Carter, Phys. Rev. **174**, 1559-1571, 1968.
- [38] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash and R. Torrence, J. Math. Phys. **6**, 918-919, 1965.
- [39] V. P. Frolov and I. D. Novikov, Black Holes Physics: Basic Concepts and New Developments, Kingdom of the Netherlands.
- [40] W. Israel, Dark stars : the evolution of an idea in 300 years of gravitation, ed. S.W. Hawking et W. Israel, Cambridge : Cambridge University Press, 1987.
- [41] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **5**, 1239 (1972).
- [42] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. Lett. **28**, 452 (1972).
- [43] J. D. Bekenstein, No Hair: Twenty-five years after, in Proceedings of the Second International Andrei D. Sakharov Conference in Physics, I. M. Dremin and A. M. Semikhatov, eds. (World Scientific, Singapore, 1997).
- [44] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **51**, R6608 - R6611 (1995).
- [45] J.M. Bardeen, B. Carter et S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 161.
- [46] J.D. Bekenstein, Phys. Rev. D **9** (1973) 3292.
- [47] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum fields in curved space, Cambridge University Press, 1982.
- [48] N. Alonso-Alberca, P. Meessen and T. Ortín, Class. Quant. Grav. **17**:2783-2798,2000; arXiv:hep-th/0003071v2 28 Mar 2000.
- [49] F. Ernst, Phys. Rev, **167**, 1175-1178, 1968. Phys. Rev, **168**, 1415-1417 (1968).
- [50] D. Maison, Gen. Rel. Grav. **10** 717 (1979).

- [51] A. Eris, M. Gurses and A. Karasu, *J. Math. Phys.* **25**, 1489-1495 (1984).
- [52] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Oxford University Press, 1992.
- [53] M. Heusler, *Black Holes Uniqueness Theorems*, Cambridge University Press, 1996.
- [54] M. A. Abramowicz, G. Björnsson and J. E. Pringle, *Theory of Black Holes Accretion Discs*, Cambridge University Press, 1998.
- [55] K. S. Thorne, *Astrophysical Journal*, **191**, 507-520 (1974).
- [56] Ernesto F. Eiroaa and Gustavo E. Romero, *Phys. Lett. B*, **663**, 377-381 (2008).
- [57] V. Bozza and L. Mancini, *Astrophysical Journal*, **611**:1045-1053 (2004).
- [58] S. Alexander, L. S. Finn and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **78**, 066005 (2008).
- [59] J. P. S. Lemos and O. Zaslavskii, *Phys. Rev. D* **76**:084030,2007; arXiv:0707.1094v2 [gr-qc] 6 Oct 2007.
- [60] R. Emparan and H. S. Reall, *Class. Quant. Grav.* **23**:R169,2006; arXiv:hep-th/0608012v2 20 Sep 2006.
- [61] C. J. Gao, *Class. Quant. Grav.* **21**:4805-4810,2004; arXiv:gr-qc/0411033v2 10 Nov 2004.
- [62] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982); *Annals of Physics*, NY **140**, 372 (1982).
- [63] G. Clément, D. Gal'tsov and C. Leygnac, *Phys. Rev. D* **71**:084014,2005; arXiv:hep-th/0412321v2 7 Jan 2005.
- [64] M. Novello, M. Visser and E. G. Volovik, *Artificial Black Holes*, World Scientific (2002).
- [65] D. R. Brill, arXiv:gr-qc/9507019v1 7 Jul 1995.

- [66] K. A. Bronnikov, E. Elizalde, S. D. Odintsov, O. B. Zaslavskii, Phys. Rev. D **78**:064049,2008; arXiv:0805.1095v1 [gr-qc] 8 May 2008.
- [67] J. Schwinger, Ann. Phys. **2** (1958) 407.
- [68] M. Gell-Mann e M. Levy, Il Nuovo Cimento. Vol. **XVI**, (1960) 705.
- [69] J. Honerkamp, Nucl. Phys. B **36** (1972) 130.
- [70] H. Eichenherr, Nucl. Phys. B **146** (1978) 215.
- [71] D. Friedan. Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1057.
- [72] E. Witten. Nucl. Phys B **223** (1983) 422.
- [73] E. Witten. Commun. Math. Phys. **92** (1984) 455.
- [74] P. Di Vecchia, et al. Nucl. Phys. B **253** (1985) 701-726. M.C.B. Abdalla and E. Abdalla. Nucl. Phys. B **255** (1985) 392-400.
- [75] B. C. O. Imbiriba, arXiv:hep-th/9906088v1 11 Jun 1999.
- [76] G. Neugebauer et D. Kramer, Ann. der Physik (Leipzig) **24**, 62 (1969).
- [77] P. Breitenlohner et D. Maison, Solutions of Einstein equations : Techniques and Results page 276, C. Hoenselaers and W. Dietz eds., (Springer, Berlin, 1984).
- [78] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, Exact Solutions to Einsteins Field Equations, 2nd edition, (Cambridge, Cambridge University Press, 2003).
- [79] P. Breitenlohner, D. Maison, and G. Gibbons, Commun. Math. Phys. **120**, 295-333 (1988).
- [80] M. Rainer, J. Math. Phys. **40**:5157-5183,1999; arXiv:gr-qc/9812031v2 28 May 1999.
- [81] C. Leygnac, arXiv:gr-qc/0409040v1 9 Sep 2004.

- [82] G. Clément, arXiv:0811.0691v1 [hep-th] 5 Nov 2008.
- [83] W. Israel et G.A. Wilson, J. Math. Phys. 13 (1972) 865.
- [84] W. Kinnersley, J. Math. Phys. 14 (1973) 651.
- [85] G. Clément, Phys. Rev. D **57**:4885-4889,1998; arXiv:gr-qc/9710109v1 23 Oct 1997.
- [86] D.V. Galtsov, A.A. Garcia, and O.V. Kechkin, Class. Quant. Grav. **12**:2887-2903,1995; arXiv:hep-th/9504155v1 28 Apr 1995
- [87] D.V. Galtsov and O.V. Kechkin, Phys. Rev. D **54**:1656-1666,1996; arXiv:hep-th/9507005v1 3 Jul 1995.
- [88] G. Clément and D. Galtsov, Phys. Rev. D **54**:6136-6152,1996; arXiv:hep-th/9607043v2 19 Sep 1996.
- [89] G. Clément, Phys. Lett. A **118** (1986) 11-13.
- [90] P. Dobiach and D. Maison, Gen. Rel. Grav. **14** (1982) 231.
- [91] G. Clément, C. Leygnac, Phys. Rev. D **70**, 084018 (2004).
- [92] G. Clément, Gen. Rel. Grav. **16** (1984) 131.
- [93] G. Clément, Gen. Rel. Grav. **16** (1984) 491.
- [94] D. Rasheed, Nucl. Phys. B **454**:379-401,1995; arXiv:hep-th/9505038v1 6 May 1995.
- [95] A.H. Taub, Annals Math. **53** (1951) 472.
- [96] E.T. Newman, L. Tamburino and T.J. Unti, Journ. Math. Phys. **4** (1963) 915.
- [97] D.V. Galtsov 1 and O.V. Kechkin, Phys. Rev. D **50**:7394-7399,1994; arXiv:hep-th/9407155v1 23 Jul 1994.
- [98] D. Gal'tsov, J.P.S. Lemos and G. Clément, Phys. Rev. D **70**, 024011 (2004).

- [99] G. W. Gibbons and D. A. Rasheed, Nucl. Phys. B **476**, 515 (1996).
- [100] Gérard Clément, Júlio C. Fabris and Manuel E. Rodrigues, Phantom Black Holes in Einstein-Maxwell-Dilaton Theory, Phys. Rev. D **79**:064021,2009; arXiv:0901.4543 [hep-th].
- [101] K.A. Bronnikov, G. Clément, C.P. Constantinidis and J.C. Fabris, Phys. Lett. A **243**, 121 (1998); Grav.&Cosm. **4**, 128 (1998).
- [102] G. Clément and A. Fabbri, Class. Quantum Grav. **16**, 323 (1999).
- [103] D. Garfinkle , G.T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991).
- [104] C.J. Gao and S.N. Zhang, *Phantom black holes*, hep-th/0604114.
- [105] C. Grojean, F. Quevedo, G. Tasinato and I. Zavala, JHEP 0108, 005 (2001).
- [106] G. Clément, C. Leygnac and D. Gal'tsov, Phys. Rev. D **71**, 084014 (2005).
- [107] P. S. Lemos, Paulo M. Sá, Phys. Rev. D **49**:2897-2908,1994, Erratum-ibid.D51:5967-5968,1995; arXiv:gr-qc/9311008v1 5 Nov 1993.
- [108] M.S. Morris and K.S. Thorne, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [109] K. Bronnikov, Acta Phys. Pol. B **4**, 251 (1973).
- [110] M. Azreg-Ainou, G. Clément, C.P. Constantinidis, and J.C. Fabris, Grav. Cosmol. **6**:207-218,2000; arXiv:gr-qc/9911107v1 26 Nov 1999.
- [111] H. Kim, arXiv:gr-qc/0207014v2 3 Jul 2002.
- [112] B. Carter, Phys. Rev. **174**, number 5 (1968).
- [113] N. A. Lemos, Mecânica Analítica, 2 ed., Editora: Livraria da Física, São Paulo (2007).
- [114] M.C. Bertin, B.M. Pimentel, P.J. Pompeia, Rev. Bras. Ensino Fs. vol. **29** no.3, São Paulo (2007).

[115] A. A. Deriglazov¹, e J. G. Filgueiras, em: ftp://ftp2.biblioteca.cbpf.br/pub/apub/2007/mo/mo_zip/mo00207.pdf.

[116] C. Pope, Lectures on Kaluza-Klein, <http://faculty.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf>.