Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear

por

Maico Felipe Silva Ribeiro

Sob orientação da

Prof. Dra. Magda Soares Xavier

Vitória, novembro de 2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Ribeiro, Maico Felipe Silva, 1983-

R484e Existência de solução para uma equação de Schrödinger quasilinear / Maico Felipe Silva Ribeiro. – 2010.

70 f.

Orientadora: Magda Soares Xavier.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Schrodinger, Equação de. 2. Sobolev, Espaço de. 3. Teorema do Passo da Montanha. 3. I. Xavier, Magda Soares. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Existência de solução para uma equação de Schödinger quasilinear

por

Maico Felipe Silva Ribeiro[1]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Vitória, 26 de Novembro de 2010

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Magda Soares Xavier - UFES (Orientadora)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - UnB

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB

[1] O Autor foi bolsista da Fapes durante a elaboração deste trabalho.

“Os números governam o mundo.”
Platão

Agradecimentos

A Deus;

Aos Meus Pais;

A Juliana;

A Professora Magda Soares Xavier;

Aos membros externos da Banca examinadora, Professor Elves Alves de Barros e Silva e Professor Marcelo Fernandes Furtado;

Aos amigos do mestrado;

A família Franco e a família Trigo;

A Fapes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução para os casos autônomo e não-autônomo de uma equação de Schrödinger quasilinear estacionária. Esses resultados foram demonstrados por Colin e Jeanjean. Ao se utilizar uma mudança de variáveis, a equação quasilinear é reduzida a uma equação semilinear, cujo funcional associado está bem definido no espaço de Sobolev usual $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. A existência de solução para o caso autônomo é obtida como consequência de um resultado de Berestycki e Lions. No caso não-autônomo, mostra-se que o funcional associado possui a geometria do passo da montanha. Usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de compacidade, obtém-se uma sequência de Cerami no nível minimax fracamente convergente para uma solução v_0. Na prova de que v_0 é não trivial, a principal ferramenta é um resultado de concentração-compacidade devido a Lions.

Abstract

In this paper we study the existence of solution of a quasilinear stationary Schrödinger equation in the autonomous and nonautonomous cases. These results were demonstrated by Colin and Jeanjean. Applying a change of variables, the quasilinear equation is reduced to a semilinear one, whose associated functional is well defined in the usual Sobolev space $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. The existence of solution for the autonomous case is obtained as a consequence of a result due to Berestycki and Lions. In the nonautonomous case, we show that the associated functional satisfies the mountain pass geometric hypotheses. Using a version of Mountain Pass Theorem without the compactness condition, we obtain a Cerami sequence in the minimax level weakly convergent to a solution v_0. In the proof that v_0 is nontrivial, the main tool is a concentration-compactness result due to Lions.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos equações da forma

$$-\Delta u-\left(\Delta u^{2}\right)u=g\left(x,u\right),\ x\in\ \mathbb{R}^{N}, \tag{P}$$

onde $N\geq 3$, nos casos autônomo e não-autônomo.

Equações da forma (P) estão relacionadas com as equações de Schrödinger quasilineares da forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\Delta\psi+W(x)\psi-h\left(|\psi|^{2}\right)\psi-\kappa\left[\Delta\rho\left(|\psi|^{2}\right)\right]\rho'\left(|\psi|^{2}\right)\psi, \tag{S}$$

onde $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N}\longrightarrow\mathbb{C}$, $W:\mathbb{R}^{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ é um potencial dado, κ é uma constante positiva e $\rho,\ h:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}$ são funções convenientemente escolhidas. Essas equações aparecem, mais naturalmente, em problemas da Física-Matemática e modelam diversos fenômenos físicos correspondentes aos vários tipos de ρ. Por exemplo, conforme citado em [20, 22], o caso $\rho\left(s\right)=s$ foi usado por Kurihura em [14] na obtenção da membrana do superfluido em Física dos Plasmas (veja também [15]). No caso $\rho\left(s\right)=\left(1+s\right)^{1/2}$, a equação (S) modela a canalização de um laser ultra-curto de alta potência na matéria (veja [27]). A equação (S) também aparece na Teoria Ferromagnética e dos Magnons de Heisenberg [16], em Mecânica Quântica Dissipativa [11] e em Teoria da Matéria Condensada [21].

Aqui, nosso interesse é na existência de soluções do tipo ondas estacionárias, isto é, soluções do tipo

$$\psi\left(t,x\right)=e^{-iEt}u\left(x\right),$$

onde $E\in\mathbb{R}$ e u é uma função real. Observamos que no caso $\rho\left(s\right)=s$ e $\kappa=1$, tal ψ é solução de (S) se, e somente se, u é solução da equação (P) com $g\left(x,u\right)=h\left(u^{2}\right)u-\left(W\left(x\right)-E\right)u$.

Recentes estudos matemáticos [19, 20, 24] se concentraram na existência de soluções para equações do tipo (P). Mais precisamente, Poppenberg, Schmitt e Wang [24] e Liu e Wang [19] provaram a existência de uma solução positiva para a equação (P) com $g(x,u) = \lambda |u|^{p-1} u - V(x) u$, onde V é um potencial dado, λ é um multiplicador de Lagrange desconhecido e $3 \leq p < 2(2^*) - 1$, com $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Eles estabeleceram uma solução para potenciais positivos usando um argumento de minimização com vínculo. Liu, Wang e Wang [20], por uma mudança de variáveis, reduziram o problema quasilinear para um semilinear e provaram a existência de uma solução positiva para cada $\lambda > 0$ em um espaço de Orlicz via Teorema do Passo da Montanha. Em [5], Colin e Jeanjean também fizeram uso dessa mudança de variável para reduzir a equação (P) a uma semilinear, porém trabalhando no espaço de Sobolev usual $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, dando uma prova mais simples para os resultados de [20].

Conforme observado em [7, 20], o número $2(2^*)$, com $N \geq 3$, se comporta como um expoente crítico para a equação

$$-\Delta u + V(x)u - (\Delta u^2)\, u = |u|^{p-1} u, \ \ x \in \mathbb{R}^N. \qquad (\widetilde{P})$$

Mais precisamente, usando uma identidade variacional dada em Pucci e Serrin [25], podemos mostrar (veja Capítulo 3) que, se $p \geq 2(2^*) - 1$ e V é de classe C^1 com $\nabla V(x) \cdot x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a equação $(\widetilde{P})$ não possui solução positiva $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $u^2 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Equações envolvendo o expoente $2(2^*) - 1$ foram estudadas por [22, 7, 28], seguindo a mesma técnica de mudança de variáveis introduzida por Liu, Wang e Wang em [20]. Trabalhando no mesmo espaço de Orlicz utilizado em [20], Moameni [22] obteve solução não negativa para a equação

$$-\varepsilon \Delta u + V(x)\, u - \varepsilon k \left(\Delta u^2\right) u = \mu |u|^{p-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

no caso $p = 2(2^*) - 1$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, supondo que o potencial V é radialmente simétrico e satisfaz algumas condições geométricas. Em [7], do Ó, Miyagaki e Soares estudaram a equação $(\widetilde{P})$ no caso $p = 2(2^*) - 1$, adicionando ao lado direito de $(\widetilde{P})$ um termo $|u|^{q-1} u$ com $3 < q < 2(2^*) - 1$. Em [29, 28], Silva e Vieira estudaram uma classe de equações

$$-\Delta u + V(x)u - \left(\Delta u^2\right) u = h(x,u)$$

em $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, onde V é uma perturbação de uma função periódica no infinito e h é assintoticamente periódica no infinito, nos casos subcrítico [29] e crítico [28], generalizando resultados anteriores.

Neste trabalho estudamos a existência de soluções de (P) demonstrados por Colin e Jeanjean em [5].

Inicialmente estudamos o problema (P) no caso autônomo,

$$-\Delta u - (\Delta u^2)\, u = g\,(u)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{P_A}$$

admitindo que o termo não linear g satisfaz

(g_0) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $g\,(s) = 0$ para todo $s \leq 0$;

(g_1) $-\infty < \liminf\limits_{s \to 0^+} \dfrac{g\,(s)}{s} \leq \limsup\limits_{s \to 0^+} \dfrac{g\,(s)}{s} = -\nu < 0$;

(g_2) $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{|g\,(s)|}{s^{2(2^*)-1}} = 0$;

(g_3) existe $\xi_0 > 0$ tal que $G\,(\xi_0) > 0$, onde $G\,(s) = \displaystyle\int_0^s g\,(t)\ dt.$

Observamos que um exemplo de função g satisfazendo $(g_0) - (g_3)$ é $g\,(s) = s^3 - \nu s$ para $s > 0$ e $g\,(s) = 0$ para $s \leq 0$, onde $\nu > 0$. É de verificação imediata que tal g satisfaz $(g_0)\,,\,(g_1)\,,\,(g_3)$ e também $(g_2)\,,$ uma vez que $2\,(2^*) - 1 = \dfrac{3N+2}{N-2} > 3.$

Após mudança de variáveis, o problema (P_A) é reduzido a um problema da forma

$$-\Delta v = k\,(v)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{M_A}$$

e a existência de solução de (P_A) segue quase que diretamente de um resultado de Berestycki e Lions em [2].

Teorema A *Suponha que valham* $(g_0) - (g_3)\,.$ Então a equação (P_A) admite uma solução $u_0 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $u_0 > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$;

(ii) u_0 *tem simetria radial, isto é,* $u_0\,(x) = u_0\,(r)$ *com* $r = |x|$ e u_0 *é decrescente com respeito a* r;

(iii) $u_0 \in C^2\left(\mathbb{R}^N\right)$;

(iv) u_0 e suas derivadas parciais até segunda ordem tem decaimento exponencial no infinito, ou seja, para todo multiíndice α com $|\alpha| \leq 2$, existem C, $\delta > 0$ tais que

$$|D^{\alpha} u_0 (x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Nosso objetivo principal é estudar a existência de solução da equação não autônoma

$$-\Delta u + V(x)u - (\Delta u^2)\, u = h(u), \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{P_{NA}}$$

que é da forma (P) com $g(x, u) = h(u) - V(x)\, u$.

Admitimos que as funções $V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, que $h(s) = 0$ para todo $s \leq 0$ e também

(V_1) a função $V : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente positiva, isto é, existe uma constante $V_0 > 0$ tal que

$$0 < V_0 \leq V(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_2) existe uma constante $V_\infty > 0$ tal que

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty \ \text{ e } V(x) \leq V_\infty, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

onde a última desigualdade é estrita em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de medida positiva;

(h_0) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{h(s)}{s} = 0;$

(h_1) existem $3 < p < 2(2^*) - 1$ e $C > 0$ tais que

$$|h(s)| \leq C(1 + |s|^p), \text{ para todo } s \in \mathbb{R};$$

(h_2) existe $\mu \geq 4$ tal que, para todo $s > 0$,

$$0 < \mu H(s) \leq h(s)\, s, \quad \text{onde } H(s) = \int_0^s h(t)\, dt.$$

Observamos que um exemplo de função h satisfazendo (h_0), (h_1) e (h_2) com $\mu = 4$ é $h(s) = s^p$ para $s > 0$ e $h(s) = 0$ para $s \leq 0$, com $3 < p < 2(2^*) - 1$.

O teorema a seguir contém o principal resultado deste trabalho.

Teorema B *Suponha que valham (V_1), (V_2), (h_0) e uma das seguintes condições:*

(i) $N \geq 3$, (h_1) e (h_2) *são satisfeitas com* $3 < p < 2\,(2^*) - 1$ e $\mu > 4$;

(ii) $N = 3$, (h_1) e (h_2) *são satisfeitas com* $3 < p \leq 5$ *e* $\mu = 4$;

(iii) $N \geq 4$, (h_1) e (h_2) *são satisfeitas com* $3 < p < \dfrac{3N+4}{N}$ *e* $\mu = 4$.

Então (P_{NA}) *possui uma solução positiva.*

Seguindo a estratégia desenvolvida em [4, 20], Colin e Jeanjean fizeram uso de uma mudança de variáveis a fim de reduzir a equação (P_{NA}) para uma semilinear cujo funcional associado está bem definido no espaço de Sobolev usual $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ e satisfaz a geometria do passo da montanha. Para obter um ponto crítico a principal dificuldade é a falta de compacidade do tipo Palais-Smale uma vez que o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$. Utilizando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de compacidade, é obtida uma sequência de Cerami no nível minimax fracamente convergente para uma solução v_0. Na prova de que v_0 é não trivial, a principal ferramenta é um resultado de concentração-compacidade devido a Lions.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1 reunimos alguns conceitos e resultados preliminares que serão utilizados nos demais capítulos. No Capítulo 2, definimos a mudança de variáveis, apresentamos algumas de suas propriedades e obtemos a equação semilinear correspondente a (P). No Capítulo 3 demonstramos um resultado de não existência de solução para a equação $(\widetilde{P})$ quando $p \geq 2\,(2^*) - 1$ e no Capítulo 4 apresentamos as demonstrações dos Teoremas A e B.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo reunimos alguns conceitos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho. Começamos estabelecendo algumas notações.

Escrevemos $C, C_0, C_1, C_2, ...$ para denotar constantes positivas possivelmente diferentes. Em um espaço vetorial normado E, denotamos por $B_R(p)$ a bola aberta com centro $p \in E$ e raio $R > 0$ e por $\partial B_R(p)$ a fronteira dessa bola. Quando p for a origem, usamos as notações mais simples B_R e ∂B_R.

Para $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que $\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$, dotado da norma

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Escrevemos $V \subset\subset \Omega$ quando V está fortemente contido em Ω, isto é, quando $\overline{V} \subset \Omega$ é compacto. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u|_V \in L^p(V)$ para todo $V \subset\subset \Omega$.

O suporte de $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ é o conjunto $supp\ \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. Designamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω.

Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ é chamado um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Denotamos o operador derivada parcial $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$ por D^α.

Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $i \in \{1, ..., N\}$. A $i - \acute{e}sima$ derivada fraca de u, quando existe, é uma função $g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega g_i \, \varphi \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u \, dx, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nesse caso, denotamos g_i por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Observamos que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Denotamos por $H^1(\Omega)$ o espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ cujas derivadas fracas $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$.

Para $u \in H^1(\Omega)$ denotamos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

O espaço $H^1(\Omega)$ dotado do produto interno

$$(u, v) \doteq \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \ dx,$$

com norma correspondente

$$\|u\| = \left[\int_\Omega \left(|u|^2 + |\nabla u|^2 \right) \ dx \right]^{1/2},$$

é um espaço de Hilbert reflexivo e separável.

Recordamos que, se $(E, \|.\|_E) \subset (F, \|.\|_F)$ são dois espaços de Banach, então dizemos que E está imerso continuamente em F, e escrevemos $E \hookrightarrow F$, quando o operador $id : E \to F$, dado por $id(x) = x$, é um operador linear e contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$ para todo $u \in E$. Se além disso, cada sequência limitada em E possui uma subsequência convergente na norma de F dizemos que a imersão é compacta.

No que segue, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. As demonstrações dos resultados a seguir podem ser encontradas, por exemplo, em [3].

Teorema 1.1 (Sobolev, Gagliardo, Niremberg) *Existe uma constante* $C = C(N)$ *tal que*

$$\|u\|_{2^*} \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \text{para todo } u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Consequentemente, $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ *continuamente.*