Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Processos de Markov via o adjunto formal dos operadores de Feller

Adalto Speroto

Orientador: Fábio Júlio Valentim

Vitória, Agosto de 2012

.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de propriedades espectrais de uma classe de operadores de segunda ordem, os adjuntos formais dos operadores diferenciais generalizados de Feller. Em particular, deduzir que estes operadores são geradores de semigrupos de contração fortemente contínuos e, consequentemente, caracterizando uma correspondente classe de processos de Markov. Como objetivo secundário, estabeleceremos alguns resultados relativos a processos estocásticos com especial atenção aos processos de Markov. Estabeleceremos a conexão de processos de Markov, operadores de semigrupos e geradores infinitesimais.

Abstract

The main aim of this work is the study of spectral properties of a class of the second order operators, the formal adjoint of the generalized Feller differential operators . In particular, to deduce that these operators are generators of a strongly continuous contraction semi-group and therefore, to obtain a corresponding class of Markov processes. As a secondary objective, we will establish some results for stochastic processes. We will establish the connection of Markov processes, operators and infinitesimal generators of semi-groups.

Sumário

1. Introdução

O objetivo principal desta dissertação é estudar propriedades espectrais de uma classe de operadores de segunda ordem, os adjuntos formais dos operadores diferenciais generalizados de Feller, introduzidos em [17, 18]. Em particular, deduzir que estes operadores são geradores de semigrupos de contração fortemente contínuos e, consequentemente, caracterizando uma correspondente classe de processos de Markov. A referência mais correlata que estudaremos é a recente publicação de Landim e Franco [19]. Para tanto, e como um objetivo secundário, estabeleceremos alguns resultados relativos a processos estocásticos com especial atenção aos processos de Markov. Seguindo essencialmente o clássico livro de Ethier-Kurtz [4], estabeleceremos a conexão entre processos de Markov, operadores de semigrupos e geradores infinitesimais. Este rico link entre diversas subáreas da análise e probabilidade é rigorosamente justificado por meio da função de transição do processo e o conhecido Teorema de Hille-Yosida.

Na década de 50, Willian Feller publicou dois importantes artigos, [17, 18], onde introduz uma noção mais geral de operadores diferencias que além de ampliar a lista de exemplos de difusões, fornece uma apreciável simplificação da teoria de operadores diferencias de segunda ordem. Ainda nestes trabalhos, Feller identifica o operador adjunto formal deste seu operador generalizado. O operador de Feller é definido como $\frac{d}{dW}\frac{d}{d\rho}$ onde as funções W e ρ são funções estritamente monótonas com a condição adicional de continuidade para a função ρ e o operador que vamos estudar é o adjunto formal de Feller, no caso em que $\rho(x) = x$, o qual é dado pela expressão $\frac{d}{dx}\frac{d}{dW}$. Desde então uma ampla literatura tem se consolidado sobre o assunto. Mais recentemente, alguns resultados tem-se estabelecido conectando o adjunto formal do operador diferencial generalizado de Feller a sistema de partículas interagentes por meio de equações hidrodinâmicas em dimensão 1, conforme [5, 19].

O trabalho se baseou no artigo de Franco e Landim [17] onde o adjunto formal de Feller é utilizado para entender como é o comportamento hidrodinâmico de um processo de exclusão uni-dimendional com condutâncias dada por uma função W que é estritamente crescente (não necessariamente contínua). No caso de W ser descontínua em x_0, um ponto do domínio, ainda assim, o operador adjunto formal de Feller estará bem definido ver equação (35). Mais precisamente, este trabalho mostra que uma versão não-linear das difusões de Feller aparecem naturalmente e que elas podem ser modelo de difusão em sistemas com membranas permeáveis.

Para dar suporte aos conceitos e resultados estabelecidos neste trabalho, utilizamos como referência principal a obra [4]. Neste trabalho exibiremos condições sobre as quais um operador linear dá origem a um processo de Markov. Para chegarmos a este resultado principal iremos dividi-lo em três etapas, a saber:

1. Na primeira parte, fazemos menção a alguns resultados preliminares que vão dar subsídio para conceitos, teoremas, proposições e demonstrações para esta dissertação. Foram colocados vários conceitos de medida e integração e análise funcional que serão utilizados frequentemente nas demonstrações e nos enunciados.
2. Na segunda parte, vamos apresentar alguns resultados sobre processos estocásticos com especial atenção aos processos de Markov. A maioria dos resultados desta seção tem sua demonstração apresentada. Iremos falar sobre o que é um processo estocástico, que será uma ferramenta de grande interesse para descrever a evolução temporal de uma grande classe de sistemas.

   Existem vários tipos de processos estocásticos, porém neste trabalho será apenas abordado de modo introdutório, um tipo de processo estocástico denominado processos Markovianos. Este tipo de processo estocástico fica caracterizado a partir do fato de que a esperança condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente é independente do evento passado e depende somente do estado presente. Em termos informais, um processo estocástico é dito Processo markoviano se o estado futuro depende somente do estado presente. Todo processo de Markov está relacionado a uma função de transição definida a partir da probabilidade condicional, conforme está definido na equação (13). Uma função de transição dá origem a um semigrupo de contração. O semigrupo por sua vez está intimamente ligado a um gerador. Na seção (4.2), vamos conceituar o que é um semigrupo e a seguir, iremos enunciar e demonstrar suas principais propriedades necessárias neste trabalho, estas propriedades, juntamente com os conceitos de semigrupos servirão de base para enunciarmos o teorema Hille-Yosida. Este teorema nos permitirá concluir que o operador $\mathcal{L}_W$ dá origem a um processo de Markov. Para que possamos utilizar o teorema de Hille-Yosida é preciso garantir que o operador $\mathcal{L}_W$ cumpre as hipóteses do teorema de Hille-Yosida, e para isto, iremos apresentar a terceira e última parte deste trabalho.

3. Na terceira seção, vamos definir o operador linear $\mathcal{L}_W$, a seguir iremos citar e demonstrar algumas propriedades relevantes para concluirmos que $\mathcal{L}_W$ vai dar origem a um processo de Markov. Mais precisamente, examinamos em detalhes o operador $(d/dx)(d/dW)$ em $L^2(\mathbb{T})$, onde $\mathbb{T}$ é o toro unidimensional. Nós provamos, no Teorema 1, que $(d/dx)(d/dW)$ definido em um domínio apropriado é não-positivo, auto-adjunto e dissipativo. Em particular, é o gerador infinitesimal de um processo de Markov reversível. Nós também vamos provar que os autovalores de $-(d/dx)(d/dW)$ são enumeráveis e todos eles têm multiplicidade finita, e que os autovetores associados formam um sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{T})$.

2. Notações e Principais Resultados

Nesta seção vamos enunciar os principais resultados estudados nesta dissertação, com um objetivo principal de mostrar o que será feito neste trabalho. Antes de enunciarmos o principal teorema, precisamos de algumas definições.
Fixemos uma função estritamente crescente

$$W : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

contínua à direita com limites à esquerda, periódica no sentido de que

$$W(u+1) - W(u) = W(1) - W(0)$$

para todo $u \in \mathbb{R}$. Para simplificar a notação vamos assumir que W é nula na origem, ou seja, $W(0) = 0$.
Seja $\mathbb{T}$ o toro unidimensional que será identificado pelo quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$. Denotamos por $L^2(\mathbb{T})$ o espaço das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis, tais que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno de $L^2(\mathbb{T})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(u) g(u) du.$$

Denote por $\mathcal{D}_W$ o conjunto das funções f em $L^2(\mathbb{T})$ tais que

$$f(x) = a + bW(x) + \int_{[0,x)} dW(y) \int_0^y \mathfrak{f}(z) dz \tag{2}$$

para alguma função $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{T})$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes condições de periodicidade :

$$a = -bW(1) - \int_{[0,1)} dW(y) \int_0^y \mathfrak{f}(z) dz,$$

$$\int_0^1 \mathfrak{f}(z) dz = 0$$

e

$$\int_{(0,1]} dW(y) \left\{ b + \int_0^y \mathfrak{f}(z) dz \right\} = 0.$$

Considere $\mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ o operador linear definido por:

$$\mathcal{L}_W f = \mathfrak{f} \ .$$

O principal resultado que demonstraremos é

Teorema 1. *O operador $\mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ goza das seguintes propriedades:*

(a) *$\mathcal{D}_W$ é denso em $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$;*
(b) *O operador $\mathbb{I} - \mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ é bijetivo.*
(c) *$\mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ é auto-adjunto e não-positivo:*

$$\langle -\mathcal{L}_W f, f \rangle \ \geq \ 0$$

(d) *$\mathcal{L}_W$ é dissipativo;*

(e) *Os autovalores do operador* $-\mathcal{L}_W$ *formam um conjunto enumerável* $\{\lambda_n : n \geq 0\}$. *Todos os autovalores tem multiplicidade finita,*

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Recordemos que $\mathbb{I}$ é o operador identidade em $L^2(\mathbb{T})$ e um operador linear A, com domínio $\mathcal{D}(A) \subset L$ subespaço de um espaço de Banach L, é dito *dissipativo* se $\|\lambda f - Af\| \geq \lambda \|f\|$ para cada $f \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda \geq 0$. Pelo Teorema de Hille-Yosida e as propriedades listadas no teorema acima, o operador $\mathcal{L}_W$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração fortemente contínuo. Mais detalhes estão na seção 4. Para realizarmos a demonstração do teorema 1, vamos primeiramente considerar o operador $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ definido em (3) e obter, mediante alguns lemas enunciados abaixo, que o operador $\mathcal{L}_W$ é sua extensão auto-adjunta e possui as demais propriedades enunciadas no teorema 1.

Denote por $\mathbb{D}(f)$ o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função f e por $C_W(\mathbb{T})$ o conjunto das funções càdlàg (contínuas à direita com limites à esquerda) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{D}(f) \subset \mathbb{D}(W)$. Denote por $\frac{df}{dW}$ a derivada de f com respeito a função W. Esta noção será mais detalhada na seção (5). Defina $\mathfrak{D}_W$ o conjunto das funções $f \in C_W(\mathbb{T})$ tais que $\frac{df}{dW}(x)$ está bem definida e é diferenciável para todo $x \in \mathbb{T}$, com $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dW}\right)$ pertencente ao conjunto $C_W(\mathbb{T})$. Considere $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ o operador linear definido por:

$$\mathfrak{L}_W f = \frac{d}{dx}\frac{df}{dW}\ . \tag{3}$$

lema 1. *O operador* $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ *cumpre as seguintes propriedades:*

(a) *O conjunto* $\mathfrak{D}_W$ *é denso em* $L^2(\mathbb{T})$.
(b) *O operador* $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ *é simétrico e não-positivo. Mais precisamente,*

$$\langle \mathfrak{L}_W f, g\rangle = -\int_{\mathbb{T}} \frac{dg}{dW}\frac{df}{dW} dW$$

para todo $f,\ g\ \in \mathfrak{D}_W$.
(c) $\mathfrak{L}_W$ *satisfaz a desigualdade de Poincaré: Existe uma constante finita* C_0 *tal que*

$$\|f\|^2 \leq C_0 \langle -\mathfrak{L}_W f, f\rangle + \left(\int_{\mathbb{T}} f(x)dx\right)^2$$

para toda função $f \in \mathfrak{D}_W$.

Vamos agora definir um produto interno em $\mathfrak{D}_W$ denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$, cuja expressão é dada por:

$$\langle f, g\rangle_{1,2} = \langle f, g\rangle + \langle -\mathfrak{L}_W f, g\rangle.$$

Denote por $L^2_W(\mathbb{T})$ o espaço de Hilbert gerado pelas funções contínuas dotadas com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ definido por:

$$\langle f, g\rangle_W = \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)dW(x).$$

A norma associada ao produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ é denotada por $\|\cdot\|_W$. Note que pelo lema anterior tem-se:

$$\langle f,g\rangle_{1,2} = \langle f,g\rangle + \int_{\mathbb{T}} \frac{df}{dW}\frac{dg}{dW}dW = \langle f,g\rangle + \langle\frac{df}{dW},\frac{dg}{dW}\rangle_W.$$

Defina o conjunto $H_2^1(\mathbb{T})$ que é constituído por todas as funções f em $L^2(\mathbb{T})$ tal que existe uma sequência $\{f_n : n\geq 1\}\in\mathfrak{D}_W$ satisfazendo: f_n converge para f em $L^2(\mathbb{T})$ e f_n é de Cauchy para o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$. A sequência $\{f_n\}$ é chamada *admissível* para a função f. Para f, g em $H_2^1(\mathbb{T})$ definimos

$$\langle f,g\rangle_{1,2} \;=\; \lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle_{1,2}\;. \tag{4}$$

Esta definição independe da sequência admissível escolhida, como veremos mais a frente. O conjunto $H_2^1(\mathbb{T})$ dotado com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$ define um espaço real de Hilbert.

Note que uma sequência de Cauchy $\{f_n\}$ para o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ e $\{\frac{df_n}{dW}\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Hilbert $L^2_W(\mathbb{T})$ e portanto, sequências convergentes nos respectivos espaços de Hilbert.

lema 2. *Uma função f em $L^2(\mathbb{T})$ a pertence $H_2^1(\mathbb{T})$ se e somente se existe F em $L^2_W(\mathbb{T})$ e uma constante finita c tal que*

$$\int_{(0,1]} F(y)\,dW(y) \;=\; 0 \quad e \quad f(x) \;=\; c \;+\; \int_{(0,x]} F(y)\,dW(y)$$

Lebesgue quase certamente. Nós denotamos a W-derivada generalizada F de f por df/dW. Para f, g em $H_2^1(\mathbb{T})$,

$$\langle f,g\rangle_{1,2} \;=\; \langle f,g\rangle \;+\; \int_{\mathbb{T}} \frac{df}{dW}\,\frac{dg}{dW}\,dW\;.$$

Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X\subset Y$. Então X é uma *imersão compacta* em Y (notação $X\subset\subset Y$) se qualquer sequência limitada em X possuí uma subsequência convergente em Y.

lema 3. *$H_2^1(\mathbb{T})\subset L^2(\mathbb{T})$ é uma imersão compacta.*

Uma definição equivalente para o domínio $\mathcal{D}_W$ é nós considerarmos ele como sendo o conjunto das funções f em $H_2^1(\mathbb{T})$ tal que existe uma função u em $L^2(\mathbb{T})$ de tal modo que

$$\langle f,g\rangle_{1,2} \;=\; \langle f,g\rangle \;+\; \int \frac{df}{dW}\,\frac{dg}{dW}\,dW \;=\; \langle u,g\rangle \tag{5}$$

para toda função g em $H_2^1(\mathbb{T})$.

lema 4. *O domínio $\mathcal{D}_W$ é constituído por todas as funções f pertencentes $L^2(\mathbb{T})$ tais que*

$$f(x) \;=\; a \;+\; bW(x) \;+\; \int_{(0,x]} W(dy)\int_0^y \mathfrak{f}(z)\,dz$$

para alguma função $\mathfrak{f}$ pertencente $L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\int_0^1 \mathfrak{f}(z)\,dz \;=\; 0\;, \quad \int_{(0,1]} W(dy)\Big\{b+\int_0^y \mathfrak{f}(z)\,dz\Big\} \;=\; 0\;.$$

Além disso, neste caso,

$$-\int \frac{df}{dW}\,\frac{dg}{dW}\,dW \;=\; \langle \mathfrak{f},g\rangle$$

para todo g pertencente $H^1_2(\mathbb{T})$.

3. Resultados Preliminares

Nesta seção vamos enunciar alguns resultados clássicos de análise funcional e teoria da medida. As demonstrações podem ser encontradas em [9],[1],[2] e [14].

3.1. **Espaços de Banach.**

Normas. Seja V um espaço vetorial real. Um norma em V é qualquer aplicação

$$v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$$

definida em V, tal que para todos vetores v e $w \in V$ valem :

(1) $\|v\| \geq 0$ e vale $\|v\| = 0$ se e somente se $v = 0$.

(2) (Desigualdade Triangular) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

(3) $\|rv\| = |r|\|v\|$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial com uma norma fixada. De agora em diante, vamos assumir que X é um espaço vetorial normado.

Convergência em X. Nós dizemos que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge para $u \in X$, e escrevemos

$$u_k \to u$$

se

$$\|u_k - u\| \to 0 \ \textit{quando} \ k \to \infty$$

isto é

$$\lim_{k \to \infty} \|u_k - u\| = 0$$

Critério de Cauchy. Uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é dita de cauchy em X quando para cada $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\|u_k - u_n\| < \epsilon \text{ para quaisquer } k,\ n \geqslant N.$$

Um espaço normado X é dito *completo* quando dada qualquer sequência de cauchy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ em X existe algum $u \in X$ tal que $u_n \to u$. Um espaço normado e completo é chamado de *Espaço de Banach*.

3.2. **Espaços de Hilbert.**

Produto interno. Seja H um espaço linear real. Uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ é dita um produto interno se

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todo u e $v \in H$
2. A aplicação $u \mapsto \langle u, v\rangle$ é linear para todo $v \in H$.
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in H$.
4. $\langle u, u\rangle = 0$ se e somente se $u = 0$.

Todo produto interno da origem a uma norma, a saber:

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } (u \in H). \tag{6}$$

Definição. Um *espaço de Hilbert* é um espaço de Banach dotado com um produto interno, onde a norma é gerada pelo produto interno conforme (6).

Exemplo. O espaço $L^2(\mathbb{T})$ é um espaço de Hilbert com

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}} fgdx$$

3.3. **Espaços reflexivos.** Antes de definirmos um operador limitado, precisamos considerar as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ como sendo as normas dos espaços X e Y, respectivamente. Um operador linear $A : X \to Y$ é dito limitado se

$$\|A\| = sup\{\|Au\|_Y/\|u\|_X;\ \|u\|_X > 0\} < \infty.$$

A seguir, enunciamos algumas definições com o objetivo de definir espaço reflexivo.

1. Um operador linear limitado $u^* : X \to \mathbb{R}$ é dito um funcional linear limitado em X.
2. Seja X um espaço vetorial normado. Denotaremos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por X^*, ele é chamado o *espaço dual de* X. E por

$$X^{**} = (X^*)^*$$

   X^{**} é chamado o *espaço bidual de* X, ou seja, o bidual é o dual de X^*.

As próximas definições fazem menção ao produto interno do espaço dual X^* e a reflexividade em um espaço de Banach.

3. Se $u \in X$, $u^* \in X^*$ nós denotamos pelo número real $u^*(u)$ o par ordenado (u^*, u). O símbolo $(\ ,\ )$ denota o par ordenado de X^* e X.
4. Um espaço de Banach é reflexivo quando $(X^*)^* = X$. Mais precisamente, isto significa que para cada $u^{**} \in (X^*)^*$, existe $u \in X$ tal que $(u^{**}, u^*) = (u^*, u)$ para todo $u^* \in X^*$

Antes de enunciar o teorema do gráfico fechado, vamos fazer a seguinte definição:
Seja $\mathcal{D}(A) \subset X$, um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ é dito *fechado* se para toda sequência $\{u_k\} \subset \mathcal{D}(A)$ satisfazendo $u_k \to u$ e $Au_k \to v$ quando $k \to \infty$, temos $u \in \mathcal{D}(A)$ e $v = Au$.

Teorema 2. ***(Teorema do gráfico fechado)*** *Seja $A : X \to Y$ um operador linear fechado definido entre dois espaços de Banach. Então A é limitado.*

Definições. Sejam $A : X \to X$ um operador linear fechado e $I : X \to X$ o operador identidade.

1. O conjunto resolvente de A é

$$\rho(A) = \{\eta\ \in \mathbb{R} | (A - \eta I) \text{ é injetor e sobrejetor}\} \tag{7}$$

2. O espectro de A é o conjunto

$$\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A)$$

   Se $\eta \in \rho(A)$, o teorema do gráfico fechado implica que a inversa de $(A - \eta I)^{-1} : X \to X$ é um operador linear limitado.

3.4. **A representação de Riesz.** Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Teorema 3. ***(Teorema da Representação de Riesz)*** *H^* pode ser canônicamente identificado com H; mais precisamente, para cada $u^* \in H^*$ existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$u^*(v) = \langle u, v\rangle$$

para todo $v \in H$. A aplicação $u^* \mapsto u$ é um isomorfismo linear de H^* sobre H.

Definições. Sejam H um espaço de Hilbert, com $\mathcal{D}(A) \subset H$ e

$$A : \mathcal{D}(A) \to H$$

uma aplicação que leva $f \mapsto Af$. Então vamos fazer as seguintes definições.

1. A é simétrico se
$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$$
para todo $f, g \in \mathcal{D}(A)$
2. O operador *Adjunto* de $A : \mathcal{D}(A) \to H$ é o operador
$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H \to H$$
tal que
$$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle$$
para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ e $g \in \mathcal{D}(A^*)$, onde $\mathcal{D}(A^*) = \{g \in H | \textit{existe } w \in H \textit{ tal que } \langle Af, g\rangle = \langle f, w\rangle \textit{ para todo } f \in \mathcal{D}(A)\}$
observação. Se A é simétrico então $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ e mais, se $g \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A^*g = Ag$. Dizemos que $A \subset A^*$
3. A é *auto-adjunto* se $A = A^*$

3.5. **Convergência Fraca.** Seja X um espaço real de Banach. Nós dizemos que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *converge fracamente* para u e escrevemos

$$u_k \rightharpoonup u\ ,$$

se

$$(u^*, u_k) \to (u^*, u)$$

para cada funcional linear limitado $u^* \in X^*$.
Observação. É fácil verificar que se $u_k \to u$, então $u_k \rightharpoonup u$. Também é verdade que qualquer sequência fracamente convergente é limitada. Além disso, se $u_k \rightharpoonup u$, então

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|$$

Teorema 4. ***(Compacidade Fraca)*** *Seja X um espaço reflexivo e suponha que a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ e limitada, então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e $u \in X$ tal que*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u$$

Em outras palavras, toda sequência limitada em um espaço reflexivo é uma sequência fracamente pré-compacta.

Em particular, podemos enunciar a proposição:

proposição 1. *Toda sequência limitada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Hilbert contém uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ fracamente convergente.*

3.6. **O espaço L^p.** Para $1 \leq p < \infty$ e Ω um conjunto do $\mathbb{R}^n$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e, identificando funções que são iguais a menos de um conjunto de medida nula, via as classes nesta relação de equivalência, $\|\ \|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$. Mais ainda, $(L^p(\Omega), \| \ \|_p)$, $1 < p < \infty$, é um espaço de Banack reflexivo e separável.
Um conjunto X é dito *separável* se X possui um subconjunto enumerável denso. Seguem os pricipais resultados utilizados dos espaços L^p utilizados nesse trabalho. Designamos por q o *expoente conjugado* de p, isto é, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo a e $b \in \mathbb{R}$ com a e $b > 0$, vale

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A desigualdade acima, conhecida como desigualdade de Young, é usada para demonstrar a desigualdade de Holder.

proposição 2. ***(Desigualdade de Holder)*** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant (\int_\Omega |f(x)|dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 5. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em L^p)*** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$. Suponhamos que*

a. *$f_n(x) \to f(x) q.t.p.$ em Ω;*
b. *existe uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leqslant g(x)$ q.t.p. em Ω. Então $f \in L^p(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_p \to 0$ q.t.p.*

proposição 3. *Para todo a e $b \in \mathbb{R}$, com a e $b > 0$ vale a seguinte desigualdade:*

$$(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2. \tag{8}$$

3.7. **Desigualdade de Schwartz.** Para quaisquer vetores u e v de um espaço com produto interno, temos

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

e a igualdade é válida se e somente se os vetores u e v são linearmente independentes.

3.8. **A Extensão de Friedrichs de um Operador Simétrico.** Uma exposição mais detalhada juntamente com as demonstrações dos resultados enunciados nesta subseção podem ser obtidos no capitulo 5 de [14].
Vamos primeiramente ressaltar que B_E é a *Extensão energética* do operador B e X_E é o *espaço energético* do operador B que consiste precisamente do conjunto dos elementos $u \in X$ que tem a seguinte propriedades:

a. Existe uma sequência $\{u_n\}$ em $D(B)$ tal que $u_n \to u$ em X quando $n \to \infty$.
b. A sequência $\{u_n\}$ é de Cauchy com respeito a norma do espaço energético X_E.

Vale ressaltar que o conjunto X_E é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e que a norma deste espaço é oriunda deste produto interno. Considere a seguinte hipótese:
(H). Seja $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear, simétrico e fortemente monótono em um espaço de Hilbert X. Em particular, isto significa que $D(B)$ é denso em X e existe $c > 0$ tal que

$$\langle Bu, u\rangle \geq c\|u\|^2$$

para todo $u \in D(B)$.

Dizemos que o operador $A : D(A) \subset X \to X$ é a *extensão de Friedrichs* do operador B se vale a seguinte igualdade

$$Au := B_E u \qquad \text{para todo } u \in D(A),$$

onde $D(A) := \{u \in X_E : B_E u \in X\}$

Teorema 6. *Munida com a afirmação* (H), *a extensão de Friedrichs* A *é um operador* $A : D(A) \subset X \to X$ *auto-adjunto, bijetivo e*

$$\langle Au, u\rangle \geq c\|u\|^2 \qquad \textit{para todo } u \in D(A).$$

3.9. **O Problema dos Autovalores.**
(H1). Seja X um espaço de Hilbert separável com $dimX = \infty$ e $B : D(B) \subset X \to X$ operador linear satisfazendo a hipótese (H). Seja ainda

$$A : D(A) \subset X \to X$$

a extensão de Friedrichs de B. Além disso, nós assumiremos que $X_E \subset X$ é uma imersão compacta. Antes de enunciarmos o teorema dos autovalores, consideraremos a equação operador

$$Bu = \mu u + f, \;\; u \in D(A), \;\; \mu \in \mathbb{R}, \quad u \neq 0,$$

juntamente com o seguinte problema generalizado

$$Au = \mu u + f, \;\; u \in D(A), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

Teorema 7. *Assuma* $(H1)$ *e ponha* $f = 0$ *então, as seguinte afirmações são verdadeiras:*

a. *Os autovetores* $\{u_n\}$ *do operador* A*(a extensão de Friedrchs de* B*) formam um sistema ortonormal completo no espaço de Hilbert* X*. Além disso,* $\{u_n\} \in X_E$ *para todo* n*.*
b. *Todos os autovalores* μ_n *do operador tem multiplicidade finita. Além disso, nós temos*

$$0 = \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \cdots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty.$$

4. Alguns Fatos Sobre Processos Estocásticos

Nesta seção estudamos processos de Markov do ponto de vista de geradores e seus correspondentes semigrupos. Primeiramente, enunciamos as definições básicas de um processo de Markov, a sua função de transição, o seu correspondente semigrupo e por último, abordamos o fato de que uma função de transição e uma distribuição inicial determinam unicamente um processo de Markov. Fixe um conjunto Ω. Recorde que uma *σ-álgebra* $\mathcal{F}$ em Ω é uma coleção de subconjuntos de Ω que possui as seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio está em $\mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$, então o mesmo ocorre para o complemento de A;
3. Se $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{F}$, então sua união (enumerável) também está em $\mathcal{F}$.

O Par $(\Omega, \mathcal{F})$ é dito um *espaço mensurável*. Uma medida de *probabilidade (σ-aditiva)* em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função $Pr : \mathcal{F} \to [0,1]$ satisfazendo: $P(\Omega) = 1$ e, para qualquer sequência $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$ de conjuntos disjuntos em $\mathcal{F}$, tem-se que

$$Pr(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n).$$

O terno $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ é dito um *espaço de probabilidade* e os subconjuntos $A \in \mathcal{F}$ são os *eventos*. Vale apenas ressaltar aqui, que um evento é dito *quase certamente* quando ele é válido em todo o espaço Ω a menos de uma conjunto de medida nula. Fixe $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ um espaço de probabilidade e $(E, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Recorde ainda que uma função $Y : \Omega \to E$ é *variável aleatória* se $Y^{-1}(\Gamma) = \{\omega \in \Omega\ ;\ Y(\omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{F}$ para todo $\Gamma \in \mathcal{B}$. Denote por $\mathcal{B}(E)$ o conjunto das funções limitadas borel mensurável definida em $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Definição 1. *Dados $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ e $(E, \mathcal{B})$ e uma família de índices I, um processo estocástico (ou simplesmente um processo) é uma função X definida em $I \times \Omega$ com valores em E:*

$$\begin{aligned} X\ \ :\ \ & I \times \Omega \to E \\ & (t, \omega) \longmapsto X(t, \omega) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

tal que para cada $t \in I$, $X(t, \cdot) := X_t : \Omega \to E$ é uma variável aleatória.

Existem dois casos clássicos para a família de índices I. O primeiro, quando $I = \mathbb{N}$ dizemos que o processo é a tempo *discreto* e o segundo, quando $I = [0, \infty)$ e neste caso dizemos que X é a tempo *contínuo*. Um processo estocástico pode ser visto como um modelo matemático para a ocorrência, em cada momento após um tempo inicial, de um fenômeno aleatório, a aleatoriedade é capturada por meio de um espaço probabilidade. Para cada ponto fixado $\omega \in \Omega$, a função $t \mapsto X_t(\omega);\ t \in I$ é uma realização do processo X associado com ω. Esta trajetória amostral fornece o modelo matemático para um experimento aleatório cujo resultado pode ser observado continuamente no tempo, com $t \in [0, \infty)$. Por exemplo, o número de clientes em uma fila, o movimento de uma partícula sujeito a perturbações aleatórias, o número de chamadas recebidas em uma central telefônica, dentre outros. Vamos considerar nesta dissertação o caso em que $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel e $I = [0, \infty)$, os conjunto dos números reais não-negativos. Ademais, vamos convencionar que um processo estocástico X está determinado se conhecemos todas as suas distribuições conjuntas finitas $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}}$ para qualquer conjunto finito de índices $t_1, t_2, \ldots, t_n\ \in I$. Mais precisamente, os processos X e Y são iguais se

$$Pr(X_{t_1} \in \Gamma_1,\ X_{t_2} \in \Gamma_2, \ldots,\ X_{t_n} \in \Gamma_n) = Pr(Y_{t_1} \in \Gamma_1,\ Y_{t_2} \in \Gamma_2, \ldots,\ Y_{t_n} \in \Gamma_n)$$

Para quaisquer $t_1, t_2, \ldots, t_n\ \in I$ e $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n\ \in \mathcal{B}$. Cabe ressaltar que está não é a única maneira de determinar um processo, veja por exemplo, [7].

Um exemplo muito importante de processo estocásticos é o movimento Browniano. A história deste processo começou com a observação feita por R. Brown em 1827 de que pequenas partículas imersas em um líquido exibem incessantes movimentos irregulares. Em 1905, Einstein explicou estes movimentos postulando que as partículas sob observação estão sujeitas a perpétuas colisões com moléculas do meio circundante.

Seja X_t a variável aleatória que identifica o deslocamento (a partir do seu ponto de partida, ao longo de algum eixo fixo) no tempo t de uma partícula Browniana. O deslocamento $X_t - X_s$ ao longo do intervalo de tempo (s, t) pode ser considerada como a soma de um grande número de pequenos deslocamentos. Essencialmente pelo teorema central do limite é razoável supor que $X_t - X_s$ é normalmente distribuído. Da mesma forma, é razoável supor que a distribuições de $X_t - X_s$ e de $X_{t+h} - X_{s+h}$ são as mesmas, para qualquer $h > 0$, supondo-se que o meio está em equilíbrio. Finalmente, é intuitivo que o deslocamento $X_t - X_s$ deve depender apenas do comprimento $t - s$ e não do tempo em que começar a observação.

O movimento Browniano (também chamado o processo de Wiener) provou ser fundamental no estudo de vários outros tipos de processos estocásticos. Formalmente, este processo tem as seguintes características:

(a) Dada uma sequência $t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n$; então os incrementos $X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são variáveis aleatórias mutuamente independente.(Um processo com esta propriedade é dito *um processo com incrementos independentes*, e expressa o fato que a troca de X_t ao longo de períodos de tempo que não se sobrepõem, são independentes.

(b) A distribuíção de probabilidade de $X_{t_2} - X_{t_1}$, $t_2 > t_1$, depende apenas de $t_2 - t_1$ (e não por exemplo de t_1).

(c) Para t >s, $X_t - X_s$ tem distribuição gaussiana com média zero e variância $B(t-s)$, onde B é uma constante positiva. Isto é, $X_t - X_s \sim N(0, B(t-s))$:

$$Pr\left[X_t - X_s \leq x\right] = \left[2\pi B(t-s)\right]^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x-x_n} exp\left[\frac{-u^2}{2B(t-s)}\right] du.$$

Assuma para cada caminho que X_0=0. Note que EX_t=0, $\sigma^2(X_t) = Bt$, onde B é uma constante positiva fixa. Pode ser provado que, se $t_1 < \cdots < t_n < t$, a distribuição da probabilidade condicional de X_t, dados os valores de $X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$, é dada por

$$Pr[X_t \leqslant x] = [2\pi B(t-t_n)]^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x-x_n} exp\left[\frac{-u^2}{2B(t-t_n)}\right] du.$$

Aqui estaremos interessados em uma classe especial de processos estocásticos, os processos de

Markov. Mas antes precisamos estabelecer alguns conceitos. Uma filtração no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ é uma família $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ onde $\mathcal{F}_t$ é uma σ- álgebra tal que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s} \subset \mathcal{F}$ para todo $t, s \in [0, \infty)$. Se X é um processo estocástico, existe uma maneira simples de obter uma filtração. Basta considerar $\mathcal{F}_t^X$ a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias X_s para $0 \leq s \leq t$ em I:

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma\{X_s\,; s \leq t\}.$$

Recorde que a σ-álgebra gerada por uma variável aleatória Y é $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(\Gamma);\ \Gamma \in \mathcal{B}\}$. A filtração $\{\mathcal{F}_t^X | t \in I\}$ é dita filtração natural do processo X.

Definição 2 (Esperança condicional)**.** *Sejam X e Y variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$. A esperança condicional de X dado $Y = y$, é a esperança da distribuição condicional de X dado que $Y = y$, se esta esperança existir. Ou seja, $E(X|Y = y) = \int x dF_X(x|Y = y)$.*

Definição 3 (Processo de Markov). *Seja* $\{X_t, t \geq 0\}$ *um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ *que toma valores em* E*, e seja* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ *sua filtração natural* $\mathcal{F}$*. Então* X *é um processo de Markov se*

$$Pr\left\{X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X\right\} = Pr\left\{X_{t+s} \in \Gamma | X(t)\right\} \tag{9}$$

para todo $s, t \geq 0$ *e* $\Gamma \in \mathcal{B}$*. Se* $\{\mathcal{G}_t\}$ *é uma filtração com* $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$*;* $t \geq 0$ *então* X *é um processo de Markov com respeito a* $\{\mathcal{G}_t\}$ *se vale (9) com a substituição de* $\mathcal{F}_t^X$ *por* $\mathcal{G}_t$*.*

Note que (9) implica a seguinte igualdade, a esperança condicional de $f \in \mathcal{B}(E)$, limitadas com respeito as σ-álgebras $\mathcal{F}_t^X$ e X_t.

$$E\left[f(X(t+s)) | \mathcal{F}_t^X\right] = E\left[f(X(t+s)) | X_t\right] \tag{10}$$

para todo $s, t \geq 0$ e $f \in \mathcal{B}(E)$. Claramente, se X é um processo de Markov com respeito a filtração $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ e $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$, para todo $t \geq 0$, então X é processo de Markov com respeito a filtração natural $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$. De fato, segue das propriedades de esperança condicional que

$$E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \;=\; E[E[X_{t+s}|\mathcal{G}_t]|\mathcal{F}_t] \;= E[E[X_{t+s}|X_t]|\mathcal{F}_t] \;=\; E[X_{t+s}|X_t].$$

onde a segunda igualdade é obtida usando que X é $\mathcal{G}_t$- Markov.
Um processo de Markov com estados discretos (o parâmetro, em geral o tempo, pode ser discreto ou contínuo) é chamado de *cadeia de Markov.* Processos de Markov representa uma das mais importantes classes de processos estocásticos não somente pela sua aplicabilidade em inúmeras áreas do conhecimento, engenharias, ciências econômicas, sociais e biológicas mas também, pelo sua interação com outras áreas da matemática, por exemplo, com análise funcional, teoria espectral, teoria de operadores. Mais precisamente, todo processo de Markov está relacionado a uma função de transição homogênea no tempo, que dá origem a um semigrupo de contração por intermédio da propriedade de Chapman-Kolmogorov. O semigrupo por sua vez está intimamente ligado a um gerador, que é obtido quando nós tomamos a derivada à direita do semigrupo do ponto t=0. O processo inverso também é válido, ou seja, dado um gerador com boas propriedades nós podemos obter, via o teorema de Hille-Yosida, um semigrupo de contração que da origem a um função de transição e este nós retornará a um processo de Markov. Abaixo vamos estabelecer formalmente cada um desses conceitos com suas principais propriedades e suas relações entre si.

4.1. **Função de transição.** Função de transição é de extrema importância para a compreensão da estrutura de um processo de Markov. Seja $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$ e$A \in \mathcal{B}$, uma função $P(t, x, A)$ é uma *função de transição homogênea no tempo* se satisfaz:

- $P(t, x, \cdot)$ é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ para quaisquer $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$,
- $P(0, x, \cdot) = \delta_x$, a massa unitária em $x \in \mathbb{R}$,
- $P(\cdot, \cdot, A) \in \mathcal{B}(E)$. para qualquer $A \in \mathcal{B}$,
- Vale a propriedade de Chapman-Kolmogorov

$$P(s+t, x, \Gamma) = \int P(s, y, \Gamma).P(t, x, dy), \quad s, t \geq 0, \quad x \in E \;\; \Gamma \in \mathcal{B}(E) \tag{11}$$

O conceito de função de transição não necessita de homogeneidade no tempo, como solicitado acima, sendo necessário neste caso inserir mais um parâmetro associado ao tempo, à função P. Para a conexão com os processos de Markov de interesse neste texto, o caso homogêneo é suficiente. Dado um processo de Markov $X = \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ e uma tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \{Pr_x\})$, onde $\{Pr_x\}_{x\in E}$ é uma família de probabilidades, podemos associar uma função de transição P definindo

$$P(s, x, \Gamma) := Pr_x(X_s \in \Gamma) \tag{12}$$

para todo s $\geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}$ *e* $x \in E$. Esta definição é equivalente a definir

$$P(s, X_t, \Gamma) := Pr\{X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_t^X\} \tag{13}$$

para todo s, t $\geq 0, \Gamma \in \mathcal{B}$. Ou equivalentemente, para $f \in B(E)$

$$(14) \qquad \int f(y)P(s,X_t,dy) \;=\; E\left[f(X(t+s))|\mathcal{F}_t^X\right].$$

Vamos agora justificar que de fato a igualdade (13) dá origem a uma função de transição. Para verificar este fato devemos verificar que:

(1) $P(t,x,\cdot)$ é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ para quaisquer $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$.
De fato, utilizando a definição temos primeiramente que $P(s,X_t,\mathbb{R}) = Pr\{X_{t+s} \in \ \mathbb{R}|\mathcal{F}_t^X\} = 1$ e $P(s,X_t,A) = Pr\{X_{t+s} \in \ A|\mathcal{F}_t^X\} \geqslant 0$ para todo $A \in \mathcal{B}$ pois Pr é uma probabilidade. Restando agora verificar que para quaisquer coleção de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots$ pertencentes a $A \in \mathcal{B}$ vale:

$$P(s,X_t,\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(s,X_t,A_k)$$

De fato, $P(s,X_t,\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = Pr\{X_{t+s} \in \sum_{k=1}^{\infty} A_k|\mathcal{F}_t^X\} = \sum_{k=1}^{\infty} Pr\{X_{t+s} \in A_k|\mathcal{F}_t^X\} = \sum_{k=1}^{\infty} P(s,X_t,A_k)$ e portanto, $P(t,X_t,\cdot)$ é uma medida de probabilidade.

(2) $P(0,x,\cdot) = \delta_x$, a massa unitária em $x \in \mathbb{R}$.
De fato,

$$\begin{aligned} P(0,X_t,\Gamma) &= Pr\{X_t \in \Gamma|\mathcal{F}_t^X\} \\ &= Pr\{X_t \in \Gamma|X_t\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } X_t \in \Gamma \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $P(\cdot,\cdot,A) \in \mathcal{B}(E)$ para qualquer $A \in \mathcal{B}$. De fato, em primeiro lugar, temos que $P(\cdot,\cdot,A)$ é uma função limitada, pois

$$|P(\cdot,\cdot,A)| = P\{X_\cdot \in A|\mathcal{F}_\cdot^X\} \leqslant 1.$$

e por último, por definição de esperança condicional de uma variável aleatória, temos que $P(\cdot,\cdot,A)$ é uma variável aleatória, isto é, uma função mensurável.

(4) Vale a propriedade de Chapman-Kolmogorov

$$P(s+t,x,\Gamma) = \int P(s,y,\Gamma).P(t,x,dy), \quad s,t \geq 0, \quad x \in E, \;\; \Gamma \in B(E)$$

Para justificar este fato observe que

$$\begin{aligned} P(t+s,X(u),\Gamma) &= Pr\{X(u+t+s) \in \Gamma|\mathcal{F}_u^X\} \\ &= E[Pr\{X(u+t+s) \in \Gamma|\mathcal{F}_{u+t}^X\}|\mathcal{F}_u^X] \\ &= E[P(s,X(u+t),\Gamma)|\mathcal{F}_u^X] \\ &= \int P(s,y,\Gamma)P(t,X(u),dy) \;\text{ para todo }\; s,\; t,\; u \geq 0 \;\; e \;\; \Gamma \in \mathcal{B}(E). \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é por (13), a segunda e a terceira vem das propriedades de esperança condicional. Isto conclui a justificativa que a igualdade (13) dá origem a uma função de transição. A próxima proposição estabelece a recíproca, antes de enunciá-la, precisamos de uma definição. A medida de probabilidade ν sobre o espaço mensurável $(E,\mathcal{B})$ definida por $\nu\,(\Gamma)$=$P\{X_0 \in \Gamma\}$ é chamada *distribuição inicial* do processo X.

proposição 4. *Uma função de transição P e uma distribuição inicial ν determinam de modo único as distribuições finito dimensionais de um processo de Markov X.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4, capítulo 4].

4.2. **Semigrupos e geradores infinitesimais.** Os operadores de semigrupos proporcionam uma ferramenta primária no estudo de processos de Markov. Nesta subseção, vamos desenvolver a formalização básica para o seu estudo e os resultados que precisamos para enunciar o teorema de Hille-Yosida, que caracterizam os operadores que são geradores de semigrupos fortemente contínuos.

Um operador linear A (possivelmente ilimitado) em L é uma aplicação linear cujo domínio $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço de L e cuja imagem $Im(A)$ está contida em L. O gráfico de A é dado por

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\} \subset L \times L. \tag{15}$$

Uma família $\{T(t), t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados em um espaços de Banach L com $T(t) : L \to L$ é chamado de *semigrupo* se

$$T(0) = I$$

e

$$T(s+t) = T(s).T(t)$$

Para todo $s,\ t \geq 0$.

Um semigrupo $T(t)$ em L é dito *fortemente contínuo* se

$$\lim_{t \to 0} T(t)f \ = \ f$$

para cada $f \in L$; um semigrupo é dito *de contração* se

$$\|T(t)\| \leq 1$$

para todo t$\geq$ 0.

Exemplo. Vamos ver um exemplo de um semigrupo de contração dado um operador linear limitado B em L , definimos

$$e^{tB} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}(tB)^K \qquad t \geq 0. \tag{16}$$

Segue da limitação do operador B que a série acima converge e o operador resultante e^{tB} é limitado. De fato,

$$\|e^{tB}\| \leq \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} t^K \|B\|^K \leq \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} \|B\|^K = e^{\|tB\|}, \ \ t \geq 0. \tag{17}$$

Mais ainda, visto que série converge absolutamente temos, para todo $s, t \geq 0$, que

$$e^{(t+s)B} = e^{sB} e^{tB}.$$

Obtemos que $\{e^{tB}\}$ com $t \in \mathbb{R}$ é um semigrupo, que pode ser facilmente visto ser fortemente contínuo. Cabe ressaltar que no caso de um operador B ser ilimitado a expressão em série de (16) pode não convergir e portanto a justificativa (17) não serve para garantir que a existência de um semigrupo de contração, pois a exponencial pode não estar bem definida. Neste trabalho vamos abordar o fato de que toda função de transição P está intimamente ligada a um semigrupo T. De fato para cada função $f \in B(E)$ e $t \geq 0$, definimos

$$T(t)f(x) \equiv \int f(y)P\,(t, x, dy)\,. \tag{18}$$

Usando que $P(0, x, \cdot) = \delta_x$, a massa unitária em $x \in \mathbb{R}$ e, a propriedade de Chapman-Kolmorov, equação (11), temos que a família de operadores $\{T(t);\ \ t \geq 0\}$ definem um semigrupo em $B(E)$. Esta definição faz uma ligação entre processo de Markov e semigrupo. Vamos agora apresentar algumas propriedades gerais de semigrupos.

proposição 5. *Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo fortemente contínuo em L. Então existe uma constante $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Primeiramente observe que existe uma constante $M \geq 1$ e $t_0 > 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq M$$

para $0 \leq t \leq t_0$. Caso não existisse, nós poderíamos encontrar uma sequência $\{t_n\}$ de números positivos tendendo a zero tal que

$$\|T(t_n)\| \to \infty$$

então pelo princípio da limitação uniforme implicaria que

$$sup_n \|T(t_n)f\| = \infty$$

para algum $f \in L$, contradizendo a propriedade da continuidade forte. Agora seja

$$\omega = t_0^{-1} log M$$

Dado $t \geq 0$, escrevendo $t = kt_0 + s$, onde k é um inteiro não negativo $0 \leq s < t_0$; então

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(s)T(t_0)^k\| \\ &\leq MM^k \\ &\leq MM^{t/t_o} \\ &= Me^{\omega t}. \end{aligned}$$

□

corolário 1. *Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo fortemente contínuo em L. Então para cada $f \in L, t \to T(t)f$ é uma função contínua de $[0, \infty)$em L.*

Demonstração. Seja $f \in L$. Pela proposição (5) se $t \geq 0$ e $h \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \|T(t+h)f - T(t)f\| &= \|T(t)[T(h)f - f]\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)f - f\|. \end{aligned}$$

e se $0 \leq h \leq t$, então

$$\begin{aligned} \|T(t+h)f - T(t)f\| &= \|T(t-h)[T(h)f - f]\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)f - f\|. \end{aligned}$$

□

Note que $L \times L$ é um espaço de Banach com as operações de adição e multiplicação por escalar com a norma $\|\,(f, g)\,\| = \|f\| + \|g\|$. Um operador A é fechado se $\mathcal{G}\,(A)$ é um subespaço fechado de $L \times L$. Em termos de sequências, dizemos que um operador linear é fechado se dada uma sequência $u_k \in \mathcal{D}\,(A)$ $(k = 1, \cdots)$ e $u_k \to u$, $Au_k \to v$ quando $k \to \infty$, então $u \in \mathcal{D}\,(A)$, $v = Au$.

O *gerador infinitesimal* de um semigrupo $\{T(t)\}$ em L é um operador linear A definido por

$$Af = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t}. \tag{19}$$

Isto é, Af é a derivada no tempo $t = 0$ do semigrupo $T(t)$.
O domínio $\mathcal{D}(A)$ do operador A é um subespaço constituído pelas funções $f \in L$ tais que o limite (19) existe.

Seja I um intervalo fechado em $(-\infty, \infty)$, denote por $C_L^j(I)$, para $j = 0, 1$, o espaço das funções $u : I \to L$ contínuas quando $j = 0$ e de classe C^1, quando j=1.

lema 5. (a) *Se $u \in C_L(I)$ e $\int_I \|u(t)\|dt < \infty$, então u é integrável em I e*

$$\| \int_I u(t)dt \| \leqslant \int_I \|u(t)\|dt. \tag{20}$$

Em particular, se I e o intervalo finito $[a, b]$, então toda função em $C_L(I)$ é integrável em I.

(b) *Seja B um operador linear fechado em L. Suponha que $u \in C_L(I)$, $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ para todo $t \in I$, $Bu \in C_L(I)$, e com u e Bu integráveis em I. Então $\int_I u(t)dt \in \mathcal{D}(B)$ e*

$$B(\int_I u(t)dt) = \int_I Bu(t)dt. \tag{21}$$

(c) *Se $u \in C_L^1[a, b]$, então*

$$\int_a^b \frac{d}{dt}u(t)dt = u(b) - u(a). \tag{22}$$

proposição 6. *Seja $\{T(t)\}$ um semigrupo fortemente contínuo em L com um gerador A .*

a) *Se $f \in L$ e $t \geq 0$, então $\int_0^t T(s)fds \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$T(t)f - f = A\int_0^t T(s)fds \in \mathcal{D}(A) \tag{23}$$

b) *Se $f \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$, então $T(s)f \in \mathcal{D}(A)$e*

$$\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f = T(t)Af. \tag{24}$$

c) *Se $f \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0$, então*

$$T(t)f - f = \int_0^t AT(s)fds = \int_0^t T(s)Afds \tag{25}$$

Demonstração. (a) Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[T(h)-I]\int_0^t T(s)fds &= \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)f - T(s)f]ds \\
&= \frac{1}{h}\left\{\int_h^{t+h} T(s)fds - \int_0^t T(s)fds\right\} \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)fds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)fds
\end{aligned}$$

Para todo $h > 0$, e quando $h \to 0$ o lado direito de (26) converge para $T(t)f - f$. Lembrando que $\int_0^t T(s)fds \in \mathcal{D}(A)$.
(b) Uma vez que

$$\frac{1}{h}[T(t+h)f - T(t)f] = A_h T(t)f = T(t)A_h f$$

para todo $h > 0$, onde $A_h = h^{-1}[T(h) - I]$, segue que $T(t)f \in \mathcal{D}(A)$ e $(\frac{d}{dt})^+ T(t)f = T(t)Af$. Assim, é suficiente checar que

$$(\frac{d}{dt})^- T(t)f = T(t)Af$$

(tomando $t > 0$). Mas, isto segue da identidade

$$(26) \qquad \frac{1}{-h}[T(t-h)f - T(t)] - T(t)Af = T(t-h)[A_h - A]f + [T(t-h) - T(t)]Af,$$

Válido para todo $0 < h \leq t$
(c)Isto é uma consequência de (b) e da letra c do lema(5).

□

corolário 2. *Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t)\}$ em L, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em L e A é um operador fechado.*

Demonstração. Desde que

$$\lim_{t\to 0+} t^{-1}\int_0^t T(s)fds = f$$

para uma função $f \in L$, a proposição (26) implica que $\mathcal{D}(A)$ é denso em L. Para mostrar que A é um operador fechado, seja $f_n \subset \mathcal{D}(A)$ satisfazendo $f_n \to f$ com $Af_n \to g$. Então

$$T(t)f_n - f = \int_0^t T(s)Af_n\, ds$$

para cada $t > 0$, então, fazendo $n \to \infty$, nós encontramos que

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)Ag\, ds.$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$ nós concluímos que $f \in \mathcal{D}(A)$ e $Af = g$. □

Vamos utilizar o teorema de Hille-Yosida para obter um semigrupo de contração fortemente contínuo em L a partir de um operador em L que cumpre as hipóteses deste teorema. Seja A um operador linear fechado em L. Se para algum número λ , $\lambda - A \equiv \lambda\mathbb{I} - A$ é injetivo e $Im(\lambda - A) = L$, e $(\lambda - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em L , então λ é dito pertencer ao conjunto $\rho(A)$ *chamado resolvente de* A e $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ é chamado o resolvente de A (em λ). Como uma curiosidade, iremos apresentar a próxima proposição que irá expressar o resolvente de A em termos de uma integral.

proposição 7. *Seja* $\{T(t)\}$ *um semigrupo de contração fortemente contínuo em* L *tendo* A *como gerador.*
Então $(0{,}\infty) \subset \rho(A)$ *e*

$$(\lambda - A)^{-1}g = \int_0^t e^{-\lambda t} T(t) g dt \tag{27}$$

Neste momento estamos prontos para enunciar o teorema de Hille-Yosida .

Teorema 8. *(Teorema de Hille-Yosida) Um operador linear* A *em* L *é o gerador de um semigrupo de contração fortemente contínuo em* L *se e somente se:*

a) $\mathcal{D}(A)$ *é denso em* L *.*

b) A *é dissipativo.(isto é, para todo* $\lambda > 0$ *vale a desigualdade:* $\|(\lambda \mathbb{I} - A)f\| \geq \|\lambda f\|$*).*

c) $Im(\lambda - A) = L$ *para algum* $\lambda > 0$*.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrado em [4, capítulo 1].

5. O OPERADOR $\mathcal{L}_W$

Neste capítulo vamos obter um gerador de um semigrupo de contração fortemente contínuo a partir de uma função estritamente crescente W. Antes de explorarmos o operador diferencial, recordemos algumas propriedades de funções monótonas.

proposição 8. *Seja f uma função monótona. Então para cada ponto x do domínio de f existem os limites laterais à direita e à esquerda de x, isto é, existem $f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ e $f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$.*

Demonstração. como f é uma função monótona, o conjunto $V_\delta(x)^+ = \{f(t) \in X | t{-}x < \delta\}$, para um $\delta > 0$ qualquer é limitado inferiormente. E como todo conjunto limitado inferiormente possui um ínfimo, denote por $f(x^+) = inf_{\delta>0} V_\delta(x^+) > -\infty$. Resta agora verificar que $f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ e para isso fixemos uma sequência $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, com $t_n \to x$, vamos mostrar que $f(t_n) \to f(x^+)$. De fato, como $\{f(t_n)\}$ é uma sequência monótona, limitada inferiormente ela é convergente e vale que $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x^+)$. Analogamente, verifica-se que $f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$.

□

Exemplo 1. *Seja x_0 um número real arbitrário, e defina a função f como segue:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para} \leqslant x_0 - 1; \\ 1 - \frac{1}{n} & \textit{para } x_0 - \frac{1}{n} \leqslant x < x_0 - \frac{1}{n+1}; \\ 1 & \textit{para } x \geqslant x_0. \end{cases}$$

O ponto x_0 é um ponto de acumulação dos pontos de salto $\{x_0 - \frac{1}{n},\ n \geqslant 1\}$, porém f é contíñnua em x_0.

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, vamos introduzir a notação que será utilizada através deste trabalho. Seja t um número real qualquer, pomos:

$$\delta_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geqslant t; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nós chamamos a função δ_t ponto de massa em t. O próximo exemplo mostra que o conjunto dos pontos de salto de uma função crescente pode ser denso. Na verdade o conjunto dos números racionais mostra o que pode ser obtido por qualquer outro conjunto enumerável.

Exemplo 2. *Sejam $\{a_n, n \geqslant 1\}$ uma enumeração do conjunto dos números racionais e $\{b_n, n \geqslant 1\}$ um conjunto de números positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Por exemplo, nós podemos tomar $b_n = 2^{-n}$. Considere agora,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{a_n}(x). \tag{28}$$

Desde que $0 \leqslant \delta_{a_n}(x) \leqslant 1$ para todo n e x, a série em (28) é absolutamente e uniformemente convergente. Como cada δ_{a_n}, é crescente, segue que se $x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\delta_{a_n}(x_2) - \delta_{a_n}(x_1)] \geqslant 0$. Assim f é crescente. Como nós temos convergência uniforme, podemos então deduzir que para cada x

$$f(x^+) - f(x^-) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n[\delta_{a_n}(x^+) - \delta_{a_n}(x^-)]. \tag{29}$$

Porém para cada n, o número do colchete acima é 0 ou 1, de acordo com $x \neq a_n$ ou $x = a_n$. Assim se x é diferente de todo a_n, cada termo do lado direito de (29) se anula; por outro lado, se $x = a_k$, dizemos então que um termo, exatamente o que corresponde a $n = k$, não anula e ainda produz o valor de b_k para toda a série. Isso prova que a função f tem saltos em cada ponto racional e em nenhum outro lugar.

Para complementarmos sobre as possíveis descontinuidades de uma função monótona, iremos apresentar o seguinte resultado.

proposição 9. *O conjunto de descontinuidades de uma função monótona é enumerável.*

Demonstração. Vamos provar este resultado utilizando um argumento topológico de uma aplicabilidade geral. Utilizando o fato de que as descontinuidades de uma função monótona são do tipo salto, para cada ponto de salto x vamos considerar o aberto intervalo $I_x = (f(x^-), f(x^+))$. Se z é um outro ponto de salto e $x < z$, podemos então dizer que existe um ponto y tal que $x < y < z$. Daí, pela monotonicidade temos $f(x^+) < f(y) < f(z^-)$. Daqui resulta que os dois intervalos I_x e I_z são disjuntos, embora possam encostar um sobre outro, se $f(x^+) = f(z^-)$. Assim, pode associar-se com o conjunto de pontos de salto no domínio da função f a um determinado conjunto de pares de intervalos abertos disjuntos. Agora toda a coleção é necessariamente enumerável, uma vez que cada intervalo contém um número racional, de modo que a escolha de intervalos está um-para-um em correspondência com um determinado subconjunto de números racionais e este último é enumerável. Por conseguinte, o conjunto de descontinuidades é também enumerável, uma vez que estão em correspondência um-para-um com o conjunto de intervalos associados a ele. □

Retornemos ao proposito inicial de obter o operador diferencial associado a uma função W. Fixemos uma função estritamente crescente

$$W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

contínua à direita com limites à esquerda, periódica no sentido de que

$$W(u + 1) - W(u) = W(1) - W(0)$$

para todo u $\in \mathbb{R}$. Para simplificar a notação vamos assumir que W é nula na origem, ou seja, $W(0) = 0$.

Denotemos por $\mathbb{T}$ o toro de uma dimensão identificado pelo intervalo $[0, 1)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno do espaço $L^2(\mathbb{T})$ (espaço de Hilbert) e por $\| \cdot \|$ sua norma.
Seja $\mathbb{D}(f)$ o conjunto dos pontos de descontinuidades de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Denote por $C_W(\mathbb{T})$ o conjunto das funções càdlàg(funções contínuas à direita com limites à esquerda) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tais que $\mathbb{D}(f) \subset \mathbb{D}(W)$. $C_W(\mathbb{T})$ está provido com a norma usual do sup,

$$\|f\|_\infty = sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|.$$

Esta definição faz sentido pelo seguinte lema.

lema 6. *Todas as funções em $C_W(\mathbb{T})$ são limitadas.*

Demonstração. De fato, é fácil provar que para cada função $f \in C_W(\mathbb{T})$ fixada e $\epsilon > 0$, existe $n \geq 1$ e $0 \leq z_1 < z_2 < z_3 < \cdots < z_n < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \text{ para todo } z_k \leq x, y < z_{k+1},\ 1 \leq k \leq n, \quad \text{onde } z_{n+1} = z_1.$$

Para ver este resultado, observe que para cada função f fixada em $C_W(\mathbb{T})$ existe o $lim_{z\to x^-} f(z)$ e pelo fato de f ser contínua à direita em x temos que existe $lim_{z\to x^+} = f(x)$ e portanto, fixado $\epsilon > 0$ e um ponto x tal que f seja contínua, existe δ_x tal que para todo $z \in I_x$ vale

$$|f(z) - lim_{y\to x^-} f(y)| < \epsilon$$

onde $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$.

Como a função f tem descontinuidades enumeráveis segue que apesar de ser tomado apenas os pontos de continuidade da função, ainda assim, temos uma cobertura para o toro. Assim temos,

$$\mathbb{T} = \bigcup_{x\in\mathbb{T}} I_x.$$

Pela compacidade do $\mathbb{T}$ temos uma subcobertura finita do toro

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k=1}^{n} I_{x_k}.$$

Dado $x_{k-1} \leq y_1 < y_2 < x_k$, temos dois casos a considerar:

caso 1 Se $y_1, y_2 \in I_{x_k}$.
Neste caso, vale $|f(y_i) - lim_{x\to x_{k^-}} f(y)| < \epsilon \quad i = 1,2$ e daí, segue pela desigualdade triangular que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq 2\epsilon.$$

caso 2 Se $y_1 \in I_{x_{k-1}}$ e $y_2 \in I_{x_k}$.
Seja $z \in I_{x_{k-1}} \bigcap I_{x_k}$, o ponto z tem existência garantida pela conexidade do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, como o ponto z pertence a interseção segue que

$$|f(y_1) - f(z)| < 2\epsilon \ \ e \ \ |f(y_2) - f(z)| < 2\epsilon$$

e daí pela desigualdade triangular temos que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq 4\epsilon.$$

O que conclui o resultado.

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ \epsilon \text{ para todo } z_k \leq x, y < z_{k+1},\ 1 \leq k \leq n. \tag{30}$$

□

Definamos a derivada generalizada $\dfrac{df}{dW}$ de uma função f como:

$$\frac{df}{dW}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{W(x+\epsilon) - W(x)}, \tag{31}$$

Quando o limite acima existe e é finito. Denotemos por $\mathfrak{D}_W$ o conjunto das funções $f \in C_W(\mathbb{T})$ que $\frac{df}{dW}(x)$ está bem definida e é diferenciável, com $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dW}\right)$ pertencendo ao conjunto $C_W(\mathbb{T})$

Definição 4. *Seja $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to C_W(\mathbb{T})$ operador linear definido por:*

$$\mathfrak{L}_W f = \frac{d}{dx}\frac{df}{dW} f = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dW}\right)$$

Dada uma função contínua à direita f e uma função contínua h temos que,

$$\frac{df}{dW}(x) = h(x)$$

para todo $x \in \mathbb{T}$ se e somente se

$$f(b) - f(a) = \int_{(a,b]} h(y) dW(y) \tag{32}$$

para todo $a < b$. Uma demonstração deste fato pode ser obtida em [3], Lema 0.9 do apêndice.

Segue da equação (32) que a função h tem integral nula, ou seja, $\int_{\mathbb{T}} h(y)dW = 0$, pelo fato de que f(0)=f(1).
Esta observação juntamente com a definição do operador $\mathfrak{L}_W f$ nos diz que o conjunto $\mathfrak{D}_W$ é o conjunto de todas as funções f pertencentes a $C_W(\mathbb{T})$ tal que

$$f(x) = a + bW(x) + \int_{(0,x]} dW(y) \int_0^y g(z)dz \tag{33}$$

Para alguma função g em $C_W(\mathbb{R})$ e dois números reais a e b tal que

$$bW(1) + \int_{\mathbb{T}} W(dy) \int_0^y g(z)dz = 0, \int_{\mathbb{T}} g(z)dz = 0. \tag{34}$$

Vamos examinar agora alguns casos particulares para a função monótona W.

1. Se $W(x)$ é suave então $\frac{df}{dW}(x)$, onde existe, é o quociente de derivadas$\frac{f'(x)}{W'(x)}$.
   De fato,
$$\begin{aligned} \frac{df}{dW}(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{W(x+\epsilon)-W(x)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}}{\frac{W(x+\epsilon)-W(x)}{\epsilon}} \\ &= \frac{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}}{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{W(x+\epsilon)-W(x)}{\epsilon}} \\ &= \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dW}{dx}}. \end{aligned}$$
2. Se a função W tem um salto em x_0 e existe $\frac{df}{dW}(x_0)$. Então $\frac{df}{dW}(x_0)$ é o quociente entre os saltos de f e W em x_0. E esta afirmação pode ser justificada da seguinte maneira: como f e W são funções càdlàg(funções contínuas à direita com limites à esquerda) obtemos a existência dos limites:
$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x+\epsilon) - f(x) = \textit{Salto de } f$$
   e
$$\lim_{\epsilon\to 0} W(x+\epsilon) - W(x) = \textit{Salto de } W$$
   Agora, utilizando o fato de que o limite do quociente é igual ao quociente dos limites, temos o seguinte resultado:
$$\frac{df}{dW}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{W(x+\epsilon)-W(x)} \tag{35}$$
$$= \frac{\lim_{\epsilon\to 0} f(x+\epsilon)-f(x)}{\lim_{\epsilon\to 0} W(x+\epsilon)-W(x)} \tag{36}$$
$$= \frac{\textit{Salto de } f}{\textit{Salto de } W}. \tag{37}$$
3. Se $W(x) = x$ então temos que
$$\mathfrak{L}_W f = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df^2}{d^2x}$$
   ou seja, $\mathfrak{L}_W f$ é o laplaciano.

Vamos iniciar as demonstrações dos resultados apresentados na seção notações e resultados.

lema 1. *O operador $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ cumpre as seguintes propriedades:*

(a) *O conjunto $\mathfrak{D}_W$ é denso em $L^2(\mathbb{T})$.*
(b) *O operador $\mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ é simétrico e não-positivo. Mais precisamente,*

$$\langle \mathfrak{L}_W f, g \rangle = - \int_{\mathbb{T}} \frac{dg}{dW} \frac{df}{dW} dW$$

para todo $f,\ g\ \in \mathfrak{D}_W$.
(c) *$\mathfrak{L}_W$ satisfaz a desigualdade de Poincaré: Existe uma constante finita C_0 tal que*

$$\|f\|^2 \le C_0 \langle -\mathfrak{L}_W f, f \rangle + \left(\int_{\mathbb{T}} f(x) dx \right)^2$$

para toda função $f \in \mathfrak{D}_W$.

Demonstração. Uma vez que o conjunto das funções contínuas é denso em $L^2(\mathbb{T})$, provar (a) é suficiente mostrar que para cada função contínua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, existe g em $\mathfrak{D}_W$ de modo que $\|f - g\| \le \epsilon$. Fixemos portanto uma função contínua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(y) - f(x)| \le \epsilon$$

para todo $x, y \in \mathbb{T}$ desde que

$$|x - y| \le \delta.$$

Escolha um inteiro $n \ge \delta^{-1}$ e considere a função $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) \ = \ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f([j+1]/n) - f(j/n)}{W([j+1]/n) - W(j/n)} \mathbf{1}\{(j/n, (j+1)/n]\}(x) \ ,$$

seja $\mathbf{1}\{A\}$ a função indicadora do conjunto A. Consideremos $G : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = f(0) + \int_{(0,x]} g(y) W(dy).$$

Por definição de g, $G(j/n) = f(j/n)$ para $0 \le j < n$. Desta maneira, por nossa escolha do n e pela definição de G, para $j/n \le x \le (j+1)/n$,

$$\big|G(x) - f(x)\big| \ \le \ \big|G(x) - G(j/n)\big| \ + \ \big|f(x) - f(j/n)\big| \ \le \ 2\epsilon \ .$$

de modo que $\|G - f\|_\infty \le 2\epsilon$ onde $\|\cdot\|_\infty$ representa a norma do sup. Observe que

$$\int_{(0,1]} g \, dW \ = \ 0 \ . \tag{38}$$

Resta mostrar que a função G pode ser aproximada em $L^2(\mathbb{T})$ por funções no domínio $\mathfrak{D}_W$. Note que nós éramos livres para escolher o conjunto $\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n\}$ contanto que a distância entre dois pontos consecutivos fosse delimitada por δ. Podemos portanto, assumir, sem perda de generalidade, que W é contínua nestes pontos. Denotemos por $\{H_k : k \ge 1\}$ uma sequência de funções suáveis $H_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ absolutamente limitada por $\|g\|_\infty$ e tal que

$$\lim_k H_k(x) = g(x)$$

para $xn \notin \mathbb{Z}$. Pelo teorema da convergência dominada, veja em (5)

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{T}} \big|H_k(y) - g(y)\big| \, dW(y) \ = \ 0 \ . \tag{39}$$

Seja $\{F_k : k \geq 1\}$ a sequência de funções $F_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} F_k(x) \;&=\; f(0) \;+\; \int_{(0,x]} \Big\{ b_k + \int_0^y H_k'(z)\, dz \Big\} W(dy) = \\ &=\; f(0) \;+\; b_k\, W(x) \;+\; \int_{(0,x]} W(dy) \int_0^y H_k'(z)\, dz \;, \end{aligned}$$

onde $b_k = H_k(0) - W(1)^{-1} \int_{(0,1]} H_k(y)\, dW(y)$. Por (38), (39), F_k converge na topologia uniforme para G. Por outro lado, vimos em (33) que pela nossa escolha de b_k, F_k pertence a $\mathfrak{D}_W$ para cada $k \geq 1$ porque H_k', é contínua e pertence à $C_W(\mathbb{T})$. Isto conclui a prova de (a). Para provar (b), fixemos duas funções f, g em $\mathfrak{D}_W$ e seja

$$F = df/dW.$$

F é diferenciável com derivada em $C_W(\mathbb{T})$. Fixemos $\epsilon > 0$ e denotemos por $\{z_1, \dots, z_n\}$ o conjunto finito dado por (30) para alguma função g. Adicionando pontos extras se necessário, Nós podemos assumir que

$$\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{z_k \leq x, y \leq z_{k+1}} |F(y) - F(x)| \leq \epsilon$$

pelo fato de F ser contínua. Decompondo a integral sobre $\mathbb{T}$ nos intervalos $[z_k, z_{k+1}]$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{L}_W f, g \rangle \;&=\; \int_{\mathbb{T}} \frac{dF}{dx}(x)\, g(x)\, dx \\ &=\; \sum_{k=1}^{n} g(z_k) \{ F(z_{k+1}) - F(z_k) \} \;\pm\; \epsilon \Big\| \frac{dF}{dx} \Big\|_\infty \;. \end{aligned}$$

Trocando a ordem do somatório no último termo, tendo em vista (32), obtemos então que a soma anterior é igual a

$$-\sum_{k=1}^{n} \{ g(z_k) - g(z_{k-1}) \} F(z_k) \;=\; -\sum_{k=1}^{n} F(z_k) \int_{(z_{k-1}, z_k]} \frac{dg}{dW}(x)\, dW(x) \;.$$

Lembre-se que dg/dW é contínua e que

$$|F(x) - F(z_k)| \leq \epsilon$$

para $z_{k-1} \leq x \leq z_k$. A soma anterior é assim igual a

$$-\int_{\mathbb{T}} F(x) \frac{dg}{dW}(x)\, dW(x) \;+\; \epsilon \Big\| \frac{dg}{dW} \Big\|_\infty [W(1) - W(0)] \;.$$

Isto demonstra a identidade a partir da qual segue que $\mathfrak{L}_W$ é simétrico e não-positivo. Para provar a desigualdade de Poincaré, fixemos uma função f em $\mathfrak{D}_W$ e observe que por (32)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x)^2\, dx \;-\; \Big(\int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx \Big)^2 \;&=\; \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} [f(x) - f(y)]\, dy \Big)^2 dx \\ &=\; \int_{\mathbb{T}} dx \Big(\int_{\mathbb{T}} dy \int_{(y,x]} \frac{df}{dW}(z)\, dW(z) \Big)^2 \;. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}dy\int_{[x,y)}\frac{df}{dz}(z)dW(z)\right)^2dx &= \int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}dy\int_{\mathbb{T}}\frac{df}{dW}(z)1_{[x,y)}dW(y)\right)^2dx\\ &\leq \int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}\|\frac{df}{dW}\|_W.[W(1)-W(0)]dy\right)^2dx\\ &\leq (W(1)-W(0))\|\frac{df}{dW}\|_W^2\end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é por (3.7). Basta considerar agora $C_0 = W(1) - W(0)$. $\square$

Recorde que nos denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$ o produto interno em $\mathfrak{D}_W$ por:

$$\langle f,g\rangle_{1,2} = \langle f,g\rangle + \langle -\mathcal{L}_W f,g\rangle = \langle f,g\rangle + \int_{\mathbb{T}}\frac{df}{dW}\frac{dg}{dW}dW.$$

Seja $H_2^1(\mathbb{T})$ o conjunto de todas as funções f em $L^2(\mathbb{T})$ tal que existe uma sequência $\{f_n : n \geq 1\} \in \mathfrak{D}_W$ tal que f_n converge para f em $L^2(\mathbb{T})$ e f_n é de Cauchy para o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$. A sequência $\{f_n\}$ é chamada admissível para a função f. Para f , g em $H_2^1(\mathbb{T})$, nós definimos:

$$\langle f,g\rangle_{1,2} \;=\; \lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle_{1,2}\ ,$$

Antes de demonstrarmos o Lema 2 vamos mostrar que esta definição esta livre de ambiguidades.

5.1. **independência da sequência admissível.** Vamos mostrar que a definição do produto interno feita em (4) está bem definida. De fato, fixado um operador linear, fortemente monótono, $B = \mathbb{I} - \mathfrak{L}_W : \mathfrak{D}_W \subset L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, o limite

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle_{1,2}$$

existe e não depende das sequências escolhidas. Iremos fazer esta demonstração em três etapas, a saber:

Etapa 1. Seja $\{u_n\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência admissível para $u = 0$. Queremos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{1,2} = 0$$

como podemos ver, vale a seguinte desigualdade

$$||\|u_n\|_{1,2} - \|u_m\|_{1,2}| \leq \|u_n - u_m\|_{1,2} \tag{40}$$

e $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy com respeito a $\|\cdot\|_{1,2}$, a sequência $\{\|u_n\|_{1,2}\}_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Então o limite

$$\lambda := \lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{1,2}$$

existe. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}\langle u_n|u_m\rangle_{1,2} - \langle u_r|u_r\rangle_{1,2}| &= |\langle u_n - u_r|u_m\rangle_{1,2} + \langle u_r|u_m - u_r\rangle_{1,2}|\\ &\leq \|u_n - u_r\|_{1,2}\|u_m\|_{1,2} + \|u_r\|_{1,2}\|u_m - u_r\|_{1,2} < \epsilon \qquad (41)\end{aligned}$$

para todo n, m, $r \geq n_0(\epsilon)$. Desde que $u_n \to 0$ em $L^2(\mathbb{T})$, nós temos que

$$\langle u_n,u_m\rangle_{1,2} = \langle u_n, Bu_m\rangle \to 0$$

quando $n \to \infty$. Fazendo $n \to \infty$ e $n \to \infty$ em $r \to \infty$ em (41) para m fixo, nós temos

$$|\lambda^2| \leq \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Portanto, $\lambda = 0$.

Etapa 2. Seja $u \in H_2^1(\mathbb{T})$, veja em (3.8). Escolha uma sequência admissível (u_n) para u. Por (40) , $(\|u_n\|)$ é de Cauchy. Defina

$$\|u_n\|_{1,2} := \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,2}.$$

Seja v_n outra sequência admissível para u. Queremos mostrar que

$$\|u\|_{1,2} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2}.$$

De fato, desde que a sequência $(u_n - v_n)$ seja admissível para $w = 0$, obtemos que

$$|\|u_n\|_{1,2} - \|v_n\|_{1,2}| \leq \|u_n - v_n\|_{1,2} \to 0 \ \textit{quando} \ n \to \infty,$$

pelo etapa 1.

Etapa 3. Para cada $u_n,\ v_n \in \mathfrak{D}_W$ temos a identidade

$$\langle u_n, v_n\rangle_{1,2} = 4^{-1}(|u_n + v_n\|_{1,2}^2 - \|u_n - v_n\|_{1,2}^2).$$

Seja $\{u_n\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{v_n\}_{k=1}^{\infty}$ sequências admissíveis para para $u, v \in H_2^1((T)$. Então, a sequência $\{u_n \pm v_n\}_{k=1}^{\infty}$ é admissível para $u \pm v$. Pelo item 2., o limite

$$\langle u|v\rangle_{1,2} := \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_{1,2} \tag{42}$$

existe e não depende da escolha das sequências admissíveis.

Onde $\{f_n\}\, e\, \{g_n\}$ são sequências admissíveis para $f\ e\ g$, respectivamente.

lema 2. *Uma função f em $L^2(\mathbb{T})$ pertence $H_2^1(\mathbb{T})$ se e somente se existe F em $L_W^2(\mathbb{T})$ e uma constante finita c tal que*

$$\int_{(0,1]} F(y)\, dW(y) \ = \ 0 \quad e \quad f(x) \ = \ c \ + \ \int_{(0,x]} F(y)\, dW(y)$$

Lebesgue quase certamente. Nós denotamos a W-derivada generalizada F de f por df/dW. Para $f,\ g$ em $H_2^1(\mathbb{T})$,

$$\langle f, g\rangle_{1,2} \ = \ \langle f, g\rangle \ + \ \int_{\mathbb{T}} \frac{df}{dW}\, \frac{dg}{dW}\, dW\ .$$

Demonstração. Recorde que o conjunto $H_2^1(\mathbb{T})$ dotado com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$ define um espaço real de Hilbert. Além disso, definimos por $L_W^2(\mathbb{T})$ o espaço de Hilbert gerado pelas funções contínuas dotadas com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ definido por:

$$\langle f, g\rangle_W = \int_{\mathbb{T}} f(x)g(x)W(x).$$

A norma associada ao produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ é denotada por $\|\cdot\|_W$.

Fixemos uma função f em $H_2^1(\mathbb{T})$. Por definição, existe uma sequência $\{f_n : n \geq 1\}$ pertencente a $\mathfrak{D}_W$ que converge para f em $L^2(\mathbb{T})$ e que é de Cauchy em $H_2^1(\mathbb{T})$. Em particular, $\{df_n/dW\}$ é de Cauchy em $L_W^2(\mathbb{T})$. De fato,

$$\|f_m - f_n\|_{1,2} \ \ = \ \ \|f_m - f_n\| + \|\frac{df_m}{dW} - \frac{df_n}{dW}\|_W$$

tem-se que,

$$\|f_m - f_n\|_{1,2} < \epsilon$$

para um $\epsilon > 0$ qualquer e todo n suficientemente grande, então o mesmo ocorre com

$$\|\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\|_W.$$

e portanto,

$$\|\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\|_W < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande. E portanto, $\{df_n/dW\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2_W(\mathbb{T})$. Como $L^2_W(\mathbb{T})$ é um espaço de Hilbert tem-se que $\{df_n/dW\}$ converge para uma função G no conjunto $L^2_W(\mathbb{T})$. Por (34),

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{df_n}{dW}\, dW \ = f_n(1) - f_n(0) = 0$$

Pois $\frac{df_n}{dW}$ é uma primitiva de f_n para todo $n \geq 1$ de modo que

$$\int_{(0,1]} G\, dW = 0.$$

Seja

$$g(x) = \int_{(0,x]} G(y) dW(y).$$

Verifica-se facilmente que $\mathbf{1}\{(x,y]\}$ pertence ao conjunto $L^2_W(\mathbb{T})$, para todo x, y em $\mathbb{T}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} 1(0,x](y)^2 dW(y) &= \int_0^x 1 dW(y) \\
&= W(x) - W(0) \\
&\leqslant W(1) - W(0) = C_0.
\end{aligned}$$

Agora, se $x \leq y$, utilizando o fato anterior, temos que:

$$g(y) - g(x) \ = \ \int_{(x,y]} G\, dW \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_{(x,y]} \frac{df_n}{dW}\, dW \ = \ \lim_{n\to\infty} \{f_n(y) - f_n(x)\}\ .$$

Afirmamos que $\int_{\mathbb{T}} \{f_n(y) - f_n(x)\} dx$ converge para

$$\int_{\mathbb{T}} \{g(y) - g(x)\} dx$$

para todo y in $\mathbb{T}$. De fato, primeiramente , para cada y fixo $f_n(y) - f_n(x)$ converge para

$$g(y) - g(x).$$

e por último, pela desigualdade de Schwarz, veja em (3.7)

$$[f_n(y) - f_n(x)]^2 \ \leq \ [W(1) - W(0) \int_{\mathbb{T}} \Big(\frac{df_n}{dW}\Big)^2 dW \ \leq \ C_0$$

para alguma constante finita C_0. Podemos verificar a afirmação anterior através dos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
[f_n(y) - f_n(x)]^2 &= (\int_{(x,y]} \frac{df_n}{dW} dW)^2 \\
&= (\int_{\mathbb{T}} 1_(x,y] \frac{df_n}{dW} dW)^2 \\
&\leq [(\int_{\mathbb{T}} 1(x,y] dW)^{\frac{1}{2}}.(\int_{\mathbb{T}} (\frac{df_n}{dW})^2 dW)^{\frac{1}{2}}]^2 \\
&= [(W(y) - W(x)). \int_{\mathbb{T}} (\frac{df_n}{dW})^2 dW] \\
&\leq [W(1) - W(0)] \int_{\mathbb{T}} |\frac{df_n}{dW}|^2 dW \\
&\leq C_0.
\end{aligned}$$

pois $\{\frac{df_n}{dW}\}$ pertence a $L^2_W(\mathbb{T})$ e W é uma função limitada. Basta aplicar o teorema da convergência dominada para concluir o lema.

Como $\{f_n\}$ converge para f em $L^2(\mathbb{T})$ e $\int_{\mathbb{T}} f_n(x)\, dx$ converge para $\int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx$ segue da desigualdade de Schwarz que g pertence ao conjunto $L^2(\mathbb{T})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} g(x)^2 dx &= \int_{\mathbb{T}} (\int_{(0,x]} G(y) dW(y))^2 \\
&= \int_{\mathbb{T}} (\int_{\mathbb{T}} 1_(0,x] G(y) dW(y))^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} [W(1) - W(0)] \|G\|_W)^2 dx \\
&\leq [W(1) - W(0)] \|G\|_W^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

pois G pertence a $L^2_W(\mathbb{T})$, de modo que

$$\int_{\mathbb{T}} g(x) dx$$

é finita. Portanto, para todo y em $\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(y) &= \lim_{n\to\infty} \Big\{ f_n(y) - \int_{\mathbb{T}} f_n(x)\, dx \Big\} \; + \; \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx \\
&= g(y) - \int_{\mathbb{T}} g(x)\, dx \; + \; \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx \; .
\end{aligned}$$

Assim $\{f_n\}$ converge pontualmente para a função acima. Como $\{f_n\}$ também converge para f em $L^2(\mathbb{T})$, nós deduzimos que $f = c + g$ quase certamente em $L^2(\mathbb{T})$ para

$$c = \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx - \int_{\mathbb{T}} g(x)\, dx$$

provando a primeira afirmação do lema. A reciproca é mais simples. Seja

$$f = c + \int_{(0,x]} F(y)\, dW(y)$$

para alguma F em $L^2_W(\mathbb{T})$ de tal modo que

$$\int_{(0,1]} F(y)\, dW(y) = 0.$$

Existe uma sequência $\{g_n : n \geq 1\}$ de funções suáveis convergindo para F em $L^2_W(\mathbb{T})$ e de tal modo que

$$\int_{(0,1]} g_n(y)\, dW(y) = 0.$$

Considere a sequência

$$f_n(x) = c + \int_{(0,x]} dW(y)\{g_n(0) + \int_0^y g_n'(z)dz\}.$$

Para cada $n \geq 1$, com $\{f_n\}$ em $\mathfrak{D}_W$ pois g_n' é contínua. A desigualdade de Schwarz, veja em (3.7), mostra que $\{f_n\}$ converge para f em $L^2(\mathbb{T})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}}(f_n(x) - f(x))^2 dx &= \{\int_{\mathbb{T}}[c + \int_{(0,x]} dW(y)\{g_n(0) + \int_0^y g_n'(z)dz\} - \{c + \int_{(0,x]} F(y)\, dW(y))]^2 dx\} \\
&= \int_{\mathbb{T}}[\int_{(0,x]}\{g_n(y) - F(y)\}dW(y)]^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{T}}[\int_{\mathbb{T}} 1(0,x](y)\{g_n(y) - F(y)\}dW(y)]^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{T}}(W(x) - W(0))\|g_n(y) - F(y)\|_W^2 dx \\
&\leqslant (W(1) - W(0))\|g_n - F\|_W^2.
\end{aligned}$$

e assim, concluímos que, realmente, $\{f_n\}$ converge para f pois $\{g_n\}$ converge para F em $L^2_W(\mathbb{T})$. Finalmente, $\{f_n : n \geq 1\}$ é uma sequência de Cauchy para o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,2}$ pois $\{df_n/dW\} = \{g_n\}$ converge para F em $L^2_W(\mathbb{T})$. De fato,

$$\|f_n - f_m\|_{1,2} = \|f_n - f_m\|_{L^2} + \|\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\|_W$$

como nós sabemos que $\|f_n - f_m\|_{L^2}$ converge para 0, e portanto é uma sequência de Cauchy. Resta então verificar que $\|\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\|_W$ é uma sequência de Cauchy. Então calculando

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\right)^2 dW &= \int_{\mathbb{T}}[g_n - g_m](y)^2 dW \\
&\leq [W(1) - W(0)]\|g_n - g_m\|_W
\end{aligned}$$

e como $\{g_n\}$ é uma sequência de Cauchy , temos que

$$\|\frac{df_n}{dW} - \frac{df_m}{dW}\|_W$$

também é uma sequência de Cauchy. Observe que nós apenas provamos que a sequência $\{f_n : n \geq 1\}$ é admissível para f. Fixemos agora f, g em $H^1_2(\mathbb{T})$ e recorde que nós denotamos por df/dW, dg/dW a W-derivada generalizada de f, g, respectivamente. Denotemos por $\{f_n : n \geq 1\}$, $\{g_n : n \geq 1\}$ a sequência admissível construida no parágrafo anterior para f e g, respectivamente.

Por definição,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{1,2} &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{1,2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \langle f_n, g_n\rangle \;+\; \int_{\mathbb{T}} \frac{df_n}{dW}\,\frac{dg_n}{dW}\,dW \right\}.\end{aligned}$$

Desde que f_n (resp. g_n) converge para f (resp. g) em $L^2(\mathbb{T})$. E pelo fato de que df_n/dW (resp. dg_n/dW) converge para df/dW (resp. dg/dW) em $L^2_W(\mathbb{T})$, a expressão anterior é igual a

$$\langle f, g\rangle \;+\; \int_{\mathbb{T}} \frac{df}{dW}\,\frac{dg}{dW}\,dW\,.$$

E isto conclui a demonstração do lema. $\square$

lema 3. *$H^1_2(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ é uma imersão compacta.*

Demonstração. Considere uma sequência $\{u_n : n \geq 1\}$ limitada em $H^1_2(\mathbb{T})$. Nós precisamos provar a existência de uma subsequência $\{u_{n_k} : k \geq 1\}$ que converge em $L^2(\mathbb{T})$. Como $\mathfrak{D}_W$ é denso em $H^1_2(\mathbb{T})$, para cada $n \geq 1$, existe v_n em $\mathfrak{D}_W$ de modo que

$$\|u_n - v_n\|_{1,2} \leq n^{-1}.$$

Nós podemos portando assumir que u_n pertence é $\mathfrak{D}_W$. Pelo lema anterior,

$$u_n(x) = c_n + \int_{(0,x]} U_n(y)\,dW(y)$$

para algum U_n em $L^2_W(\mathbb{T})$ de modo que

$$\int_{(0,1]} U_n(y)\,dW(y) = 0.$$

Além disso,

$$\|U_n\|_W \leq \|u_n\|_{1,2}.$$

A sequência $\{U_n\}$ é portanto limitada em $L^2_W(\mathbb{T})$. Também, pela desigualdade de Schwarz, a sequência $\int_{(0,x]} U_n(y)dW(y)$ é limitada em $L^2(\mathbb{T})$. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\int_{(0,x]} U_n(y)dW(y)\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}} 1(0,x](y)U_n(y)dW(y)\right| \\ &\leqslant \|1(0,x](y)\|\|U_n(y)\| \\ &\leqslant [W(1) - W(0)]\|U_n(y)\| \\ &\leqslant C_0.\end{aligned}$$

Como

$$c_n = u_n(x) - \int_{(0,x]} U_n(y)dW(y)$$

e como as duas sequências de funções do lado direito são limitadas em $L^2(\mathbb{T})$, a sequência de números reais $\{c_n\}$ também é limitada. Como $\{U_n\}$ é limitada em $L^2_W(\mathbb{T})$ e $\{c_n\}$ é limitada em

$\mathbb{R}$, então existe uma subsequência $\{n_k\}$ tal que c_{n_k} converge e U_{n_k} converge fracamente em $L^2_W(\mathbb{T})$ para um limite que denotamos por U. Como as constantes pertencem a $L^2_W(\mathbb{T})$,

$$\int_{(0,1]} U(y)\, dW(y) = \lim_k \int_{(0,1]} U_{n_k}(y)\, dW(y) = 0.$$

Além disso, para todo x em $\mathbb{T}$, tem-se que $\mathbf{1}\{(0,x]\}$ pertence a $L^2_W(\mathbb{T})$. E, portanto, vale o resultado. E assim,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(x) &= \lim_{k\to\infty} \Big\{ c_{n_k} + \int_{(0,x]} U_{n_k}(y) dW(y) \Big\} \\ &= c + \int_{(0,x]} U(y) dW(y) \ ,\end{aligned}$$

se c destaca como o limite da sequência c_{n_k}. Assim, a sequência u_{n_k} converge pontualmente para

$$u(x) = c + \int_{(0,x]} U(y) dW(y).$$

Uma vez que, por schwartz $u_{n_k}(x)^2$ é limitada por

$$2c^2_{n_k} + 2[W(1) - W(0)]\, \|U_{n_k}\|^2_W$$

conforme a proposição (8). Pelo teorema da convergência dominada em (5), u_{n_k} converge para u em $L^2(\mathbb{T})$. Note que u pertence a $H^1_2(\mathbb{T})$. De fato, pois u se escreve como

$$u(x) = c + \int_{(0,x]} U(y) dW(y)$$

e daí pelo lema (2), u pertence a $H^1_2(\mathbb{T})$. □

Recorde que $\mathcal{D}_W$ é o conjunto das funções f em $H^1_2(\mathbb{T})$ tal que existe u em $L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\langle f, g\rangle_{1,2} \;=\; \langle f, g\rangle \;+\; \int \frac{df}{dW}\, \frac{dg}{dW}\, dW \;=\; \langle u, g\rangle$$

para todo g em $H^1_2(\mathbb{T})$. Pelo lema 2 (b), $\mathfrak{D}_W \subset \mathcal{D}_W$ e, por definição, $\mathcal{D}_W \subset H^1_2(\mathbb{T})$. A função u está unicamente determindada pois, pelo lema (2) (a), $H^1_2(\mathbb{T}) \supset \mathfrak{D}_W$ é denso em $L^2(\mathbb{T})$. Pela definição de $H^1_2(\mathbb{T})$ é por (4), é suficiente checar (5) para funções g em $\mathfrak{D}_W$.

lema 4. *O domínio $\mathcal{D}_W$ é constituído por todas as funções f pertencentes $L^2(\mathbb{T})$ tais que*

$$f(x) \;=\; a \;+\; bW(x) \;+\; \int_{(0,x]} W(dy) \int_0^y \mathfrak{f}(z)\, dz$$

para alguma função $\mathfrak{f}$ pertencente $L^2(\mathbb{T})$ tal que

$$\int_0^1 \mathfrak{f}(z)\, dz \;=\; 0\ , \quad \int_{(0,1]} W(dy) \Big\{ b + \int_0^y \mathfrak{f}(z)\, dz \Big\} \;=\; 0\ .$$

Além disso, neste caso,

$$-\int \frac{df}{dW}\, \frac{dg}{dW}\, dW \;=\; \langle \mathfrak{f}, g\rangle$$

para todo g pertencente $H^1_2(\mathbb{T})$.

Demonstração. Vamos primeiramente demonstrar que qualquer função f em $L^2(\mathbb{T})$ com a propriedade citada nas afirmações do lema pertence a $\mathcal{D}_W$. Fixe essa função e vamos considerar uma sequência $\{\mathfrak{f}_n : n \geq 1\}$ de funções suáveis $\mathfrak{f}_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ que converge para $\mathfrak{f}$ em $L^2(\mathbb{T})$ e tal que

$$\int_0^1 \mathfrak{f}_n(z)\,dz = 0$$

Seja

$$f_n(x) \;=\; a \;+\; \int_{(0,x]} W(dy)\Big\{b_n \;+\; \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz\Big\}\;,$$

Onde b_n é escolhido de modo que

$$\int_{(0,1]} W(dy)\{b_n + \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz\} = 0$$

Por (33) temos que f_n pertence a $\mathfrak{D}_W$ para cada $n \geq 1$. Quando $n \uparrow \infty$, b_n converge para b. De fato, como b_n é escolhido de modo que

$$\int_{(0,1]} W(dy)\{b_n + \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz\} = 0$$

e então nós temos que

$$b_n[W(1) - W(0)] + \int_{(0,1]} \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz = 0$$

e como $\mathfrak{f}_n(z)$ converge para $\mathfrak{f}(z)$ segue que $\int_{(0,1]} \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz$ converge para $\int_{(0,1]} \int_0^y \mathfrak{f}(z)\,dz$ e daí, b_n converge para b. Vamos agora verificar que f_n converge para f. De fato,

$$\int_{\mathbb{T}} (f_n(z) - f(z))^2\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \bigg(a \;+\; \int_{(0,x]} W(dy)\Big\{b_n \;+\; \int_0^y \mathfrak{f}_n(z)\,dz\Big\}\;] - [\;a \;+\; bW(x) \;+\; \int_{(0,x]} W(dy) \int_0^y \mathfrak{f}(z)\,dz] \bigg)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}} \bigg(\int_{(0,x]} W(dy)\{[b_n - b] + [\int_0^y \mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)dy]\} \bigg)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} 2\{\int_{(0,x]} [b_n - b] W(dy)\}^2 dx + \int_{\mathbb{T}} 2\{\int_{(0,x]} W(dy) \int_0^y \mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)\,dz]\}^2 dx.
\end{aligned}$$

e daí, organizando a primeira parcela, chegamos ao seguinte resultado

$$\int_{\mathbb{T}} 2\{\int_{(0,x]} [b_n - b] W(dy)\}^2 dx \leq 2[W(1) - W(0)][b_n - b]^2$$

e portanto temos uma sequência de Cauchy. Já na segunda parcela, utilizando a desigualdade de Schwartz, vem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} 2\{\int_{(0,x]} W(dy)[\int_0^y \mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)\,dz]\}^2 dx &= 2\int_{\mathbb{T}} \{\int_{(0,x]} W(dy)[\int_0^y \mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)\,dz]\}^2 dx \\
&\leq 2[W(1) - W(0)] \|\mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

e como $\{\mathfrak{f}_n\}$ converge para $\mathfrak{f}$ em $L^2(\mathbb{T})$. Resta agora verificar que $\{f_n\}$ é de Cauchy para a norma $\|\cdot\|_{1,2}$. De fato, como

$$\|f_m - f_n\|_{1,2} = \|f_m - f_n\|_{L^2} + \|\frac{df_m}{dW} - \frac{df_n}{dW}\|_W$$

e $\{\mathfrak{f}_n\}$ converge para $\mathfrak{f}$ em $L^2(\mathbb{T})$ resta apenas verificar que

$$\|\frac{df_m}{dW} - \frac{df_n}{dW}\|_W$$

é uma sequência de Cauchy. E assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} (\frac{df_m}{dW} - \frac{df_n}{dW})^2 dW &= \int_{\mathbb{T}} \{[b_m + \int_0^y f_m(z)dz] - [b_n + \int_0^y f_n(z)dz]\}^2 dW(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} 2[b_m - b_n]^2 W(dy) + \int_{\mathbb{T}} 2[\int_0^y \mathfrak{f}_n(z) - \mathfrak{f}(z)dy]^2 W(dy)
\end{aligned}$$

e daí como $\{b_n\}$ é uma sequência de Cauchy e $\{\mathfrak{f}_n\}$ converge para $\mathfrak{f}$ obtemos que

$$\|\frac{df_m}{dW} - \frac{df_n}{dW}\|_W$$

é uma sequência de Cauchy e consequentemente concluímos que $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Assim f pertence a $H_2^1(\mathbb{T})$ e $\{f_n\}$ é uma sequência admissível para f. Dada uma função g em $\mathfrak{D}_W$. Afirmamos que

$$\langle f, g\rangle_{1,2} \ = \ \langle f, g\rangle \ - \ \langle \mathfrak{f}, g\rangle \ .$$

De fato ,como g pertence a $\mathfrak{D}_W$, por (4),

$$\langle f, g\rangle_{1,2} = \lim_n \langle f_n, g\rangle_{1,2}$$

porque a sequência $\{g_n : n \geq 1\}$ constante igual a g é admissível para g. Por definição o produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_{1,2}$ e desde que

$$\mathfrak{L}_W f_n = \mathfrak{f}_n$$

então vale a igualdade

$$\langle f_n, g\rangle_{1,2} = \langle f_n, g\rangle + \langle -\mathfrak{L}_W f_n, g\rangle = \langle f_n, g\rangle + \langle -\mathfrak{f}_n, g\rangle$$

Como f_n e $\mathfrak{f}_n$ converge em $L^2(\mathbb{T})$ para f e $\mathfrak{f}$, respectivamente, isto prova a afirmações feita . Em particular, (5) mantém com

$$u = f - \mathfrak{f}$$

e assim provamos que f pertence a $\mathcal{D}_W$ e é a identidade afirmada. Reciprocamente, suponha que f pertence a $\mathcal{D}_W$ e satisfaz (5) para alguma função u em $L^2(\mathbb{T})$. Assim, existe v (igual a $f - u$) em $L^2(\mathbb{T})$ de modo que

$$-\int \frac{df}{dW} \frac{dg}{dW} \, dW \ = \ \langle v, g\rangle \tag{43}$$

para todo g em $\mathfrak{D}_W$. Fazendo $g = 1$ nesta equação nós obtemos o seguinte resultado

$$\int_0^1 v(x)\,dx = \int_0^1 v(x).1dx = \langle v, 1\rangle = -\int \frac{df}{dW} \frac{d1}{dW} \, dW = -\int \frac{df}{dW} \, 0 \, dW = 0$$

Como f pertence a $H_2^1(\mathbb{T})$, pelo lema 2,

$$f(x) = c + \int_{(0,x]} F(y) dW(y)$$

para alguma função F em $L_W^2(\mathbb{T})$ de modo que

$$\int_{(0,1]} F(y) dW(y) = 0.$$

Para provar o lema nós precisamos mostrar que

$$F(y) \;=\; b \;+\; \int_0^y \mathfrak{f}(z)\,dz$$

para cada constante finita b e alguma função $\mathfrak{f}$ em $L^2(\mathbb{T})$ de modo que

$$\int_0^1 \mathfrak{f}(z)\,dz = 0.$$

Fixemos uma função g em $\mathfrak{D}_W$ de modo que

$$g(x) \;=\; a \;+\; \int_{(0,x]} G(y)\,dW(y)$$

Para alguma função contínua $G : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ de tal modo que

$$\int_0^1 G(y)\,dW(y) = 0.$$

Uma vez que a integral de v (resp. G) com respeito a medida de lebesgue(resp. A medida dW) se anula, trocando a ordem de integração, nós obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v(x)\,g(x)\,dx \quad &= \quad \int_0^1 v(x)\left[a + \int_{(0,x]} G(y)dW(y)\right]dx \\
&= \quad a\int_0^1 v(x)dx + \int_0^1 v(x)\left[\int_{(0,x]} G(y)dW(y)\right]dx \\
&= \quad 0 + \int_0^1 v(x)\left[\int_0^1 G(y).1_{(0,x]}(y)dW(y)\right]dx \\
&= \quad \int_0^1 G(y)\left[\int_0^1 v(x).1(0,x](y)dx\right]dW(y) \\
&= \quad -\int_{(0,1]} G(y)\left[\int_0^1 v(x)1_{(0,y](x)}\,dx\;\right]dW(y) + \int_{(0,1]} G(y)\left(\int_0^1 v(x)\,dx\;\right)dW(y) \\
&= \quad -\int_{(0,1]} G(y)\int_0^y v(x)\,dx\;dW(y) + 0 \\
&= \quad -\int_{(0,1]} G(y)\left(\int_0^y v(x)\,dx\right)dW(y)
\end{aligned}$$

onde a passagem da quarta para a quinta igualdade se justifica pelo fato de que

$$1_{(0,x]}(y) = -1_{(0,y]}(x) + 1$$

para todo $x, y \in (0,1]$. Portanto, tendo em vista (43),

$$\int_{(0,1]} G(y)\int_0^y v(x)\,dx\;dW(y) \;=\; \int_{(0,1]} G(y)\,F(y)\,dW(y)$$

para alguma função g em $\mathfrak{D}_W$. A prova do lema 1 (a) mostra que o conjunto

$$\{dg/dW : g \in \mathfrak{D}_W\}$$

é denso em

$$L^2_{W,0} = \{H \in L^2_W(\mathbb{T}) : \int H dW = 0\}.$$

Em particular,

$$F(y) = c + \int_0^y v(x)\, dx$$

para alguma constante finita c. E assim concluímos a demonstração do lema. $\square$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1

Finalmente, estamos com a ferramentas preparadas para demonstrar o teorema (1). Lembre-se que denotamos por $\mathbb{I}$ a identidade em $L^2(\mathbb{T})$. Pelo Lema (1), o operador simétrico $(\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W) : \mathfrak{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, é fortemente monótono. De fato, $\langle(\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W)f, f\rangle = \langle \mathbb{I}f, f\rangle + \langle \mathbb{I}f, -\mathfrak{L}_W f\rangle \ \geq \ \langle f, f\rangle$ onde a última desigualdade se estabebelece pelo fato de $\langle f, -\mathfrak{L}_W f\rangle \ \geq 0$ e portanto vale:

$$\langle(\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W)f, f\rangle \ \geq \ \langle f, f\rangle$$

para toda f em $\mathfrak{D}_W$. Denotemos por $\mathcal{A}_1 : \mathcal{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ a sua extensão Friedrichs, definida como

$$\mathcal{A}_1 f = u$$

onde u é a função em $L^2(\mathbb{T})$ dada por (5). Pelo teorema (6) $\mathcal{A}_1$ é bijetivo e auto-adjunto e

$$\langle \mathcal{A}_1 f, f\rangle \ \geq \ \langle f, f\rangle \tag{44}$$

para todo f em $\mathcal{D}_W$. Note-se que a extensão de Friedrichs de um operador fortemente monótono $(\lambda\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W)$, $\lambda > 0$, é

$$\mathcal{A}_\lambda = (\lambda - 1)\mathbb{I} + \mathcal{A}_1 : \mathcal{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T}).$$

Definimos $\mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ por $\mathcal{L}_W = \mathbb{I} - \mathcal{A}_1$. Tendo em vista (5), $\mathcal{L}_W f = u$ se e somente se

$$-\int \frac{df}{dW}\,\frac{dg}{dW}\, dW \ = \ \langle u, g\rangle$$

para todo g em $H_2^1(\mathbb{T})$. Em particular, pelo lema 3 (b) $\mathcal{L}_W f = \mathfrak{L}_W f$ para todo f em $\mathfrak{D}_W$. Além disso, se uma função f em $\mathcal{D}_W$ está representada como no lema 3, $\mathcal{L}_W f = \mathfrak{f}$. Esta identidade juntamente com a identificação do espaço $\mathcal{D}_W$ fornece a definição alternativa do operador $\mathcal{L}_W$ apresentado pouco antes da declaração do Teorema (1) e que pode ser visto em (3).

Demonstração do Teorema 1. Decorre do lema 1 (a) que o domínio $\mathcal{D}_W$ é denso em $L^2(\mathbb{T})$ porque $\mathfrak{D}_W \subset \mathcal{D}_W$, isto prova (a). Pela definição,

$$\mathbb{I} - \mathcal{L}_W = \mathcal{A}_1 : \mathcal{D}_W \to \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$$

que foi mostrado para ser bijetivo. E daí segue a prova de (b). A propriedade de ser auto-adjunto do operador $\mathcal{L}_W : \mathcal{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$ resulta da definição de $\mathcal{A}_1$ e da definição de $\mathcal{L}_W$ como $\mathbb{I} - \mathcal{A}_1$. Além disso, segue de (44) que obtemos

$$\langle -\mathcal{L}_W f, f\rangle \geq 0$$

para todo f em $\mathcal{D}_W$. Para provar (d), fixemos uma função g em $\mathcal{D}_W$, $\lambda > 0$ e seja

$$f = (\lambda\mathbb{I} - \mathcal{L}_W)g.$$

Tomando o produto escalar com respeito a g em ambos os lados desta equação, obtém-se que

$$\lambda\langle g, g\rangle \ + \ \langle -\mathcal{L}_W g, g\rangle \ = \ \langle g, f\rangle \ \leq \ \langle g, g\rangle^{1/2}\,\langle f, f\rangle^{1/2}\ .$$

Como $\langle -\mathcal{L}_W g, g\rangle \geq 0$, podemos escrever:

$$\lambda\langle g, g\rangle \ \leq \langle g, g\rangle^{1/2} \langle f, f\rangle^{1/2} \ .$$

E daí, dividindo a desigualdade por $\langle g, g\rangle^{1/2}$, obtemos:

$$\lambda\langle g, g\rangle^{1/2} \leq \ \langle f, f\rangle^{1/2} \ .$$

Agora substituindo f por sua expressão em função de g, temos:

$$\|\lambda g\| \leq \|f\| = \|(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{L}_W)g\|.$$

Nós já vimos que o operador

$$(\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W) : \mathfrak{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$$

é simétrico e fortemente monótono.

Pelo lema (3), a imersão

$$H_2^1(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$$

é compacta. Portanto, pelo teorema (7), a extensão de Friedrichs de $(\mathbb{I} - \mathfrak{L}_W)$, foi denotada por $\mathcal{A}_1 : \mathcal{D}_W \to L^2(\mathbb{T})$, satisfaz as afirmações (e) e (f) com $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, $\lambda_n \uparrow \infty$. Em particular, operador $-\mathcal{L}_W = \mathcal{A}_1 - \mathbb{I}$ tem as mesmas propriedades com $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, $\lambda_n \uparrow \infty$. De fato, se $\lambda u = (\mathbb{I} - \mathcal{L}_W)(u) = \mathcal{D}_W(u)$ logo temos que $u - \mathcal{L}_W(u) = \lambda u$ e daí vem: $-\mathcal{L}_W(u) = -u + \lambda u = (\lambda - 1)u$, isto mostra que $(\lambda - 1)$ é um autovalor de $-\mathcal{L}_W$. E dai, utilizando o fato de que

$$1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

são autovalores de $\mathbb{I} - \mathcal{L}_W$, nós obtemos que $-\mathcal{L}_W$ tem as mesmas propriedades com $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, $\lambda_n \uparrow \infty$. $\lambda_n \uparrow \infty$, e então, (e) e (f) estão em vigor. Segue também do Teorema(7) que f_n pertence a $H_2^1(\mathbb{T})$ para todo n. □

Considerações Finais

Agora estamos prontos para fazer os últimos comentários. Ressaltamos que o Teorema 1 é a ferramenta que nos dá condições para podermos utilizar o teorema de Hille-Yosida e assim obter um semigrupo de contração fortemente contínuo. De posse de um semigrupo com estas características utilizamos a função de transição associada ao semigrupo e então obtermos um processo de Markov.

O processo de Markov obtido a partir do gerador $\mathcal{L}_W$ modela difusão de partículas em um ambiente com presença de membranas. Tais membranas são originadas das descontinuidades da função W, veja por exemplo, [19, 20].

Um exemplo simples e interessante é quando consideramos a função $W(x) = x$. Neste caso não temos descontinuidades e consequentemente a difusão é em um ambiente sem membranas. Em particular, o operador $\mathcal{L}_W$ neste caso é o laplaciano Δ é o processo de Markov associado é o conhecido *movimento Browniano*. Assim, a classe de geradores obtidos no Teorema 1 são, em particular, generalizações do movimento Browniano.

Referências

[1] Adams,R.A.Sobolev Spaces.New York:Academic Press, 1975.

[2] Brezis, H.:Analise Fonctionnelle. Masson(1983).

[3] E. B. Dynkin, *Markov processes.* Volume II. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 122. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[4] S. Ethier, T. Kurtz. *Markov processes characterization and convergence.*Wiley, New Jersey, (1986).

[5] A. Faggionato, M. Jara, C. Landim, *Hydrodynamic behavior of one dimensional subdiffusive exclusion processes with random conductances.* arXiv:0709.0306 . To appear in Probab. Th. Rel. Fields (2008).

[6] U. Freiberg *Analytical properties of measure geometric Krein-Feller-operators on the real line* Math. Nachr. **260** 34 − 47, (2003).

[7] I. Karatzas, S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Second Edition, Springer, 1991.

[8] C. Kipnis, C. Landim, *Scaling limits of interacting particle systems.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 320. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] I. Carlos, *introdução à medida e integração /Carlos Isnard.* 2.ed. Rio de Janeiro :IMPA, 2009.

[10] J.-U. Löbus, *Generalized second order differential operators.* Math. Nachr. **152**, 229-245 (1991).

[11] J.-U. Löbus, *Construction and generators of one-dimensional quasi-diffusions with applications to selfaffine diffusions and Brownian motion on the Cantor set.* Stoch. and Stoch. Rep. **42**, 93–114, (1993).

[12] L.C.Evans, *Partial Diferential Equation.* American Mathematical Society. Volume 19. August, 1997, Berkeley.

[13] P. Mandl, *Analytical treatment of one-dimensional Markov processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 151. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[14] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics.*. Applied Mathematical Sciences, 108. Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] K.L.Chung , *A Course in Probability Theory.*.A Harcourt SCience Technology Company , 108. Academic Press, Stanford University , 2001.

[16] Kavian, O. Introduction à la thèorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques. Paris: Springer-Verlag, 1993.

[17] W. Feller. *On Second Order Differential Operators.* Annals of Mathematics, 61,n.1, 90-105, (1955).

[18] W. Feller. *Generalized second order differential operators and their lateral conditions.* Illinois J. Math. Vol. 1,4, 459-504, (1957).

[19] T. Franco, C. Landim. *Hydrodynamic limit of gradient exclusion processes with conductances.* Archive for Rational Mechanics and Analysis (Print). 195, 2. 409-439 (2010).

[20] Valentim, J. Fábio. *Scaling limits: d-dimensional models with conductances, velocity, reservatories and random environment.2010.102f.* Tese de doutorado. IMPA. Rio de Janeiro. Disponível em: $http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_C/2011/126.html$.