UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

IVANI FRANCISCA DOS SANTOS

REALIDADE AMPLIADA APLICADA AO ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA COM ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

SÃO MATEUS
2024

IVANI FRANCISCA DOS SANTOS

REALIDADE AMPLIADA APLICADA AO ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA COM ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB) do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo, na etapa de qualificação da pesquisa, como requisito para obtenção de título de Mestre em Ensino na Educação Básica. Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella**.**

SÃO MATEUS
2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

S237r

Santos, Ivani Francisca dos, 1968-
REALIDADE AMPLIADA APLICADA AO ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS : UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA COM ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO / Ivani Francisca dos Santos. - 2024.
210 f. : il.

Orientador: Dr. Lúcio Souza Fassarella.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Realidade Aumentada. 2. Tecnologias Digitais. 3. Geometria Espacial. 4. Aprendizagem Matemática. I. Fassarella, Dr. Lúcio Souza. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37

IVANI FRANCISCA DOS SANTOS

REALIDADE AMPLIADA APLICADA AO ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA DESENVOLVIDA COM ALUNOS DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 11 de março de 2024.

COMISSÃO EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
LUCIO SOUZA FASSARELLA
Data: 11/03/2024 16:19:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Dr(a). Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador(a)

Documento assinado digitalmente
ANDRESSA CESANA
Data: 11/03/2024 17:09:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Dr(a). Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo

Documento assinado digitalmente
ADELINO CANDIDO PIMENTA
Data: 15/03/2024 10:36:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof(a). Dr(a). Adelino Cândido Pimenta
Instituto Federal de Goiás

AGRADECIMENTOS

Sou imensamente grata a Deus por me guiar em toda jornada acadêmica e por me amparar nos momentos mais difíceis do curso, me levantando quando eu caí e pensei não ser capaz de conseguir chegar ao final da jornada.

Agradeço a minha família por suportar minhas angústias, trazendo alento para minha alma quando as lágrimas caiam e o desespero me consumia, e foram muitas as vezes que chorei, briguei, gritei e me desesperei. A vocês, amados meus, todo amor e toda honra.

Agradeço ao meu orientador Lúcio Souza Fassarella por acreditar na minha proposta de pesquisa e por me incentivar sempre, sendo mais um amigo do que um orientador. Agradeço pelas broncas, pois sem elas não haveria crescimento. Agradeço as contribuições com o suporte material tão necessário para que essa dissertação ganhasse corpo. Agradeço por ser paciente, pois nos meus momentos de desespero suas palavras eram pura calmaria, enfim, obrigada Dr. Lúcio Souza Fassarella por suas orientações.

Agradeço ao Elton Douglas Silva por acreditar que meu sonho poderia ser realizado, por sempre me incentivar e por sempre perguntar: “como vai o mestrado, escreveu mais um pouco da dissertação?”.

Sou grata aos professores do programa Dra. Andreia, Dra. Maria Alayde, Dra. Rita, Dr. Valdinei e Dra. Isabel, que com muito amor prepararam aulas maravilhosas e ricas em conhecimento.

Agradeço ao corpo docente da EEEFM Antônio dos Santos Neves por me acolher e me dar o suporte necessário para o desenvolvimento do objeto desta pesquisa.

Agradeço a cada aluno que aceitou participar da pesquisa, pois juntos passamos por momentos inesquecíveis.

Elton Douglas Silva, amigo muito especial.
Maria da Cruz Santos e Antônio Francisco (*in memoriam*), meus pais.
Graciele, Brunella e Aline, filhas que amo.

"Não temas, porque Eu sou contigo; não te assombres, porque Eu sou teu Deus;

Eu te fortaleço, e te ajudo, e te sustento com a minha destra fiel".

Isaías: 41:10

RESUMO

No contexto da pesquisa, analisam-se os desafios da aplicação da tecnologia de Realidade Aumentada como ferramenta para auxiliar no ensino e aprendizagem de sólidos geométricos. A problemática surgiu da análise dos resultados na avaliação do PAEBES TRI, especificamente no descritor 43 (D43). A questão central é: "Quais são as contribuições da Realidade Aumentada como recurso didático no processo de ensino de Geometria Espacial?". O objetivo geral é verificar se o uso da realidade aumentada facilita o entendimento do cálculo de volume de poliedros regulares em atividades didáticas. Para alcançar esse objetivo, definimos objetivos específicos: verificar as dificuldades dos alunos nas atividades com realidade aumentada; avaliar a compreensão do conceito de volume em atividades com o uso da Geometria RA; analisar o ponto de vista dos alunos sobre a RA no ensino de geometria espacial; e verificar se a RA contribui para a identificação dos elementos geométricos dos principais sólidos. A pesquisa é qualitativa, básica e exploratória, realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Antônio dos Santos Neves, em Boa Esperança, Espírito Santo, com a participação de 35 alunos da 2ª série do Ensino Médio no turno matutino. A coleta de dados envolveu observação simples, aplicação de dois questionários e uma sequência didática. No primeiro questionário o objetivo era investigar os conhecimentos prévios dos alunos sobre geometria plana e espacial. Na Sequência Didática (SD) foi utilizado o aplicativo Geometria RA (GeometriAR) como recurso auxiliar para o ensino e aprendizagem de geometria espacial. O segundo questionário avaliou o uso do aplicativo sob a perspectiva dos alunos, administrado ao término da sequência didática. Os resultados indicam que os alunos consideram o aplicativo Geometria RA uma ferramenta fácil de utilizar, com impacto positivo no aprendizado. A ferramenta contribuiu positivamente, tornando a geometria mais acessível, atrativa e interessante. Em conclusão, este estudo destaca a Realidade Aumentada como uma ferramenta promissora no contexto educacional, especialmente no ensino de geometria espacial.

Palavras-chave: Realidade Aumentada. Tecnologias Digitais. Geometria Espacial. Aprendizagem Matemática.

ABSTRACT

In the context of the research, the challenges of applying Augmented Reality technology as a tool to assist in the teaching and learning of geometric solids are analyzed. The issue arose from analyzing the results in the PAEBES TRI assessment, specifically Descriptor 43 (D43). The central question is: "What are the contributions of Augmented Reality as a didactic resource in the process of teaching Spatial Geometry?". The overall objective is to verify if the use of augmented reality facilitates the understanding of volume calculation for regular polyhedra in didactic activities. To achieve this, we defined specific objectives: to assess students' difficulties in activities with augmented reality; to evaluate the comprehension of the volume concept in activities using Geometry AR; to analyze students' perspectives on AR in the teaching of spatial geometry; and to verify if AR contributes to identifying the geometric elements of primary solids. The research is qualitative, basic, and exploratory, conducted at the State School of Elementary and High School Antonio dos Santos Neves in Boa Esperança, Espírito Santo, with the participation of 35 students from the 2nd year of high school in the morning shift. Data collection involved simple observation, application of two questionnaires, and a didactic sequence. The first questionnaire investigated students' prior knowledge in plane and spatial geometry, while the didactic sequence used the Geometry AR application (GeometriAR) as an auxiliary resource for teaching and learning spatial geometry. The second questionnaire assessed the use of the application from the students' perspective, administered at the end of the didactic sequence. Results indicate that students find the Geometry AR application easy to use, with a positive impact on learning. The tool contributed positively, making geometry more accessible, attractive, and interesting. In conclusion, this study highlights Augmented Reality as a promising tool in the educational context, especially in the teaching of spatial geometry.

Keywords: Augmented Reality. Digital Technologies. Spatial Geometry. Mathematical Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sou professora de matemática atuante desde 1999, trabalhei em escolas municipais, estaduais e particulares. Desde meu ingresso na educação, acompanhei as mudanças que ocorreram no currículo, nas metodologias de ensino com o advento da internet, no ambiente físico da escola e na forma de avaliar o desempenho educacional do aluno. A avaliação dos conteúdos, antes realizada apenas pelo professor, se tornou uma ferramenta importante para fornecer dados do desempenho escolar dos alunos para instituições governamentais. Dentre essas avaliações temos o Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES), que foi criado, originalmente, no ano 2000. No entanto, foi a partir de 2009 que ganhou formato e periodicidade. O PAEBES[1] aplica anualmente provas para o 5º ano, 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio; tem por objetivo avaliar a qualidade da Educação Básica na rede pública estadual; já o PAEBES TRI, criado em 2015, tem por objetivo contribuir com o planejamento e intervenções pedagógicas no Ensino Médio da rede pública estadual do Espírito Santo[2].

O PAEBES TRI é uma prova aplicada trimestralmente com questões objetivas, que avalia o desempenho dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática, sendo um importante subsídio para a Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo (SEDU), pois serve para (re)orientar o planejamento didático-pedagógico das escolas participantes, a cada trimestre letivo (PAEBES TRI, 2019).

A avaliação diagnóstica do PAEBES TRI produz dados sobre a adesão ao processo avaliativo diagnóstico e sobre o desempenho de estudantes por descritor avaliado (PAEBES TRI, 2019, p. 28). Nos anos analisados, 2016 a 2019, o descritor 43, “D43: Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas” (PAEBESTRI, 2019, p. 23), é apontado como um descritor com menor percentual de acertos. Em 2019, onze superintendências regionais de ensino (SRE) do Espírito Santo obtiveram, no D43, o menor percentual de acertos, se comparados a outros descritores, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados do PAEBES TRI 2019, 2º TRIMESTRE.

[1]https://sedu.es.gov.br/paebes.
[2]https://sedu.es.gov.br/paebes-tri

	Percentual (%)						
SRE	D16	D38	D39	D40	D41	D43	Total
SRE AFONSO CLÁUDIO	39,6	35,6	41,8	31,3	66,4	22,8	39,5
SRE BARRA DE SÃO FRANCISCO	34,5	27,5	33,3	27,1	59,0	22,7	33,7
SRE CACHOEIRO DE ITAPEMIRIM	33,3	30,2	36,0	28,3	59,1	23,8	35,0
SRE CARAPINA	28,7	25,5	29,6	24,3	52,7	22,2	30,3
SRE CARIACICA	25,8	23,0	25,5	23,4	44,8	22,8	27,3
SRE COLATINA	36,1	32,4	39,3	29,6	60,1	21,1	36,4
SRE COMENDADORA JUREMA MORETZ SOHN	30,4	26,6	33,8	26,4	52,7	22,5	31,9
SRE LINHARES	33,5	29,3	34,8	27,8	57,6	21,6	33,9
SRE NOVA VENECIA	33,8	30,4	33,5	29,2	61,1	22,1	34,8
SRE SÃO MATEUS	35,7	30,2	37,6	28,5	63,5	22,8	36,2
SRE VILA VELHA	29,9	27,3	31,0	26,3	56,4	21,3	31,8

Fonte: PAEBES TRI (2019, p. 49) – CAED/UFJF

Os baixos percentuais de acertos referenciados pelo descritor D43 foram um dos incentivos para o desenvolvimento desta pesquisa. Neste sentido, propusemos um trabalho com uso de recursos tecnológicos, especificamente a Realidade Aumentada (RA), ao abordarmos o cálculo de volume dos principais sólidos na geometria espacial.

Atualmente, o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) é uma necessidade em qualquer área, pois são usadas na comunicação, no lazer, no trabalho, nos estudos, entre outras atividades. No ambiente escolar, o uso da tecnologia está cada vez mais presente na prática pedagógica do professor que busca atender às expectativas e anseios dos alunos.

As TICs são abordadas por Moran (2007, 2017) como sendo um meio, um apoio, um instrumento pelo qual a educação vai se transformando e se moldando ao flexibilizar o currículo e multiplicar os espaços, os tempos de aprendizagem e as formas de fazê-lo. Corroborando, Kenski (2003, 2013) dialoga sobre as inovações tecnológicas que impõem novos padrões e dimensões à tarefa de ensinar e de aprender, transformando a escola em um lugar de exploração de culturas, de realização de projetos, de investigação e de debate.

Com base nas obras de Borba e Penteado (2019), Borba, Silva e Gadanidis (2020) e Tajra (2012, 2019), discutimos sobre os projetos governamentais que levaram recursos tecnológicos e internet para as escolas, os quais impactaram em mudanças profundas na educação, modificando a forma como são mediados o ensino e a aprendizagem.

Atualmente, o uso do aparelho celular, com ou sem internet, desde o mais moderno até o mais simples, faz parte do material que o aluno leva para a sala de aula. Esse recurso somado a outras tecnologias, que a escola dispõe, nos motivou a escolher a RA e, em especial o *software* Geometria RA, como recurso didático para tornar o estudo de Geometria Espacial mais dinâmico, rico em detalhes e atrativo para o aluno. Fialho (2018) cita a RA como sendo tecnologia que contribui com o processo de ensino-aprendizagem ao proporcionar uma nova maneira de representar os conteúdos. Corroborando, Tori *et al* (2018, p. 512) mencionam que a realização de atividade práticas por meio de plataformas de RA promovem o "[...] desenvolvimento integrado de habilidades, atitudes e conhecimentos, referentes às diversas áreas gerando um aprendizado significativo e eficaz". Ainda, segundo os autores, uma das vantagens da RA é poder manipular os objetos virtuais tridimensionais – movimentação e rotação – ajudando os alunos que possuem dificuldades de visualizar e compreender imagens espaciais 3D representadas no papel em 2D. Em consonância, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) ressalta a importância do uso das tecnologias ao propor que os estudantes usem as tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Nesse contexto, desenvolvemos uma pesquisa partindo do seguinte questionamento: *Quais são as possíveis contribuições da Realidade Aumentada, utilizada como recurso didático, para o processo de ensino de Geometria Espacial?* Quanto à pesquisa, que tem como objeto de estudo o uso da RA no cálculo do volume dos principais sólidos regulares, especificamente prismas, pirâmides, cilindros e cones, tem por objetivo geral: *Verificar possíveis contribuições do uso da realidade ampliada, aplicada na resolução de atividades didáticas para facilitar o entendimento do cálculo de volume de alguns poliedros regulares.*

Para alcançar o objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Verificar dificuldades dos alunos em atividades envolvendo o uso de realidade ampliada.
- Verificar a compreensão do conceito de volume em atividades apresentadas ou resolvidas com o uso do Geometria RA.

- Avaliar o ponto de vista do aluno sobre o uso da RA para na aprendizagem de geometria espacial.
- Verificar se a RA contribui para a identificação dos elementos geométricos dos principais sólidos.

Para alcançar os objetivos definidos nesta pesquisa, foram aplicados dois questionários: o primeiro com o objetivo de diagnosticar o conhecimento prévio dos alunos sobre o objeto de aprendizagem, que, neste caso, é a geometria espacial; o segundo, para avaliar a usabilidade do aplicativo Geometria RA sob a perspectiva de aprendizagem do aluno. Também aplicamos, entre os questionários, uma Sequência Didática (SD) que fez uso da RA como recurso pedagógico para a resolução de atividades relacionadas à geometria espacial.

Para analisar as produções (especialmente tratamentos e conversões) realizadas pelos alunos nas atividades propostas na SD, recorremos à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (2009; 2011). Com a TRRS, entendemos melhor o raciocínio do aluno ao operar nos registros figurais na geometria espacial. O registro figural, segundo Moram (2015, p. 23), "[…] é utilizado para representar determinadas figuras geométricas que podem ser modificadas de acordo com o que a situação exigir dentro do mesmo sistema". Em consonância, Moran e Franco (2014, p. 5) mencionam que as "[…] figuras podem ser representadas de diversas formas, e o sujeito em interação com essas representações fica suscetível a interpretações". De acordo com Duval (2011), a análise dos registros figurais é intrínseca à maneira de "*ver*" que eles necessitam para que possamos utilizá-los na resolução de problemas.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa exploratória de natureza básica, com *lócus* na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Antônio dos Santos Neves, localizada na zona urbana no município Boa Esperança, Espírito Santo. A coleta de dados ocorreu em 2022 e colaboraram com esta pesquisa 35 alunos da 2ª série do Ensino Médio do turno matutino.

Quanto à revisão de literatura, que embasaram a pesquisa, foram realizados levantamentos nos repositórios acadêmicos do Google Acadêmico, SCIELO, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e portal do CAPES; foram selecionados artigos científicos e dissertações que abordam a realidade aumentada no ensino de geometria espacial.

A estrutura do trabalho começa com a introdução, em seguida a apresentação da fundamentação teórica. Neste segmento, discutimos o papel das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na educação e no ensino da matemática, os princípios fundamentais da Realidade Virtual e Aumentada, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval e o ensino de Geometria Espacial. Em seguida, descrevemos o percurso metodológico, que detalha as etapas da pesquisa, a análise dos dados e as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, abordamos o uso das tecnologias na educação e suas contribuições para o ensino de matemática; discorreremos sobre a Teoria dos Registros das Representações Semióticas e suas implicações para o entendimento da aprendizagem em matemática, assim como, o uso da Realidade Aumentada e suas aplicações para ensino e aprendizagem de geometria espacial.

2.1 CONTRIBUIÇÕES DAS TDIC PARA A EDUCAÇÃO

Ouvimos constantemente dizer "novas tecnologias", mas o que seria uma *nova tecnologia*? Para o homem cultural/social, o termo "novo" está intrinsecamente ligado à aquisição de novos produtos tecnológicos. Para a Ciência da Informação, o "novo" está relacionado à criação/produção de um instrumento mais moderno, mais potente, com um novo design ou até mesmo um software inovador. O "novo" é tudo o que foi criado e produzido depois de um já existente. Segundo Kenski (2003), o critério para a identificação de novas tecnologias pode ser observado pela sua natureza técnica e pelas estratégias de apropriação e de uso. Para exemplificar, basta olharmos para a evolução dos aparelhos de celulares e de televisores, dentre tantos, cito estes por estarem mais presentes no dia a dia das pessoas. A criação de novas tecnologias perpassa pela evolução humana, como escreve Kenski em seu livro *"Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação"*, ao dialogar, no primeiro capítulo, sobre a evolução histórica da tecnológica que ascendeu o mundo para novos recursos em busca de poder. A autora discursa que

> […] o uso do raciocínio tem garantido ao homem um processo crescente de inovações. Os conhecimentos daí derivados, quando colocados em prática, dão origem a diferentes equipamentos, instrumentos, recursos, produtos, processos, ferramentas, enfim, a tecnologias […] (KENSKI, 2003, p.12).

Assim, a sociedade vai se recriando, se inovando e se moldando para acompanhar os avanços tecnológicos que crescem em ritmo acelerado, e, como relata Kenski (2003):

> Na atualidade, o surgimento de um novo tipo de sociedade tecnológica é determinado principalmente pelos avanços das tecnologias digitais de comunicação e informação e pela microeletrônica. Essas novas tecnologias – assim consideradas em relação às tecnologias anteriormente existentes –, quando disseminadas socialmente, alteram as qualificações profissionais e a maneira como as pessoas vivem cotidianamente, trabalham, informam-se e se comunicam com outras pessoas e com todo o mundo (KENSKI, 2003, p.21).

Para Kenski, o surgimento e o desenvolvimento da tecnologia estão ligados à necessidade de sobrevivência e de poder para o homem, "[…] os vínculos entre conhecimento, poder e tecnologias estão presentes em todas as épocas e em todos os tipos de relações sociais" (KENSKI, 2003, p. 14). Quem domina a tecnologia, detém o poder. Quando falamos em "deter o poder" nos referimos às mudanças que as 'novas tecnologias' provocam no comportamento dos sujeitos, da sociedade e do mundo.

> A evolução tecnológica não se restringe apenas aos novos usos de determinados equipamentos e produtos. Ela altera comportamentos. A ampliação e a banalização do uso de determinada tecnologia impõem-se à cultura existente e transformam não apenas o comportamento individual, mas o de todo o grupo social [...] (KENSKI, 2003. p.19).

A esse respeito, Moran (2017) dialoga com Kenski quando argumenta que o mundo digital afeta todos os setores, modificando a forma de nos comunicar, de aprender, de produzir e de vender. Moran (2017) discursa sobre os desafios que são impostos à educação com o uso das tecnologias, pois não basta ter a tecnologia, é preciso saber usá-la. De fato, as tecnologias alteram os comportamentos e o fazer social como um todo, como demonstra Strey, Kapitanski (2011, p. 55 *apud* ARAUJO, VILAÇA, 2016, p.31-32):

> […] O progresso e as inovações tecnológicas provocam mudanças rápidas no modo de vida da sociedade, nas formas de educar e aprender, nas concepções de ensino e nas qualificações. Além de simples mudanças, essa chegada tecnológica tem se caracterizado como um fenômeno que muitas vezes, impõe à sociedade moderna hábitos e comportamentos diferentes, transformando a relação do ser humano com o outro, com o meio ambiente e consigo próprio.

O homem vive do imperativo tecnológico que é um estado no qual a sociedade se submete, humildemente, a cada nova exigência da tecnologia e utiliza, sem questionar, todo novo produto sem ser portador de uma melhora (TARJA, 2012). Dessa relação homem versus tecnologia, surgem os novos sujeitos socialmente moldados pela tecnologia. São esses sujeitos, totalmente tecnológicos, multitarefas, capazes de interagir, estudar e ouvir música ao mesmo tempo, são denominados como geração "Z"[3], que estão inseridos no âmbito escolar. Nesse novo cenário

[3]"Os jovens, que nasceram a partir de 1997, estão entrando ou estão prestes a entrar no mercado de trabalho. Eles são nativos digitais, ou seja, convivem com o universo da internet, mídias sociais e recursos tecnológicos desde o nascimento. Além disso, são multifocais e aprendem de várias maneiras, usando múltiplas fontes e objetos de aprendizagem. Costumam acompanhar os acontecimentos em tempo real, comunicam-se intensamente por meios digitais e estão sempre online. Em termos de comportamento, tendem a se engajar em questões ambientais, sociais e identitárias". Disponível em: https://beieducacao.com.br. Acesso em: 20 /03/2022.

social imposto pela tecnologia, o giz, a lousa, o livro, o aparelho de DVD, o retroprojetor etc., já não satisfazem os anseios educacionais dessa nova geração.

As TICs trouxeram muitas contribuições para a educação, retratadas, entre outras, nas obras Borba e Penteado (2019), Tajra (2012, 2019), Borba, Silva e Gadanidis (2020), mas também 'nutriram' problemas sociais, como escreve Kenski (2003):

> Tememos as invasões de vírus, cada vez mais frequentes, e que podem danificar todo o computador [...]. Não só os vírus afligem os usuários e causam problemas. Por e-mail, diariamente recebemos todos os tipos de correntes, spams, janelas pop-up e demais tipos de ciberlixo que invadem nossas correspondências em doses industriais. Mais perigosas ainda são as invasões de hackers, que atacam, bloqueiam, deformam e roubam informações reservadas de pessoas, empresas e instituições. São verdadeiros ataques terroristas, que bloqueiam os sites mais visitados [...]. (KENSKI, 2003, p 60-61).

Kenski relata que os problemas oriundos das tecnologias digitais atingem igualmente a educação, dentre os quais citamos aqui os "[…] softwares que prometem muito e dão pouco […]" e a "[…] facilidade de encomenda, compra e venda online de trabalhos escolares para todos os níveis de ensino e todas as áreas do conhecimento, o que põe em xeque os valores fundamentais da função da educação […]" (KENSKI, 2003, p. 60-61), além de comprometerem o aprendizado do aluno.

Quanto às contribuições das TICs, Tajra (2012) e Borba, Penteado (2019) discursam sobre o percurso histórico percorrido pelas ações da Política da Informática na Educação no Brasil e descrevem os principais projetos que tiveram grande impacto na educação. Destacamos aqui, dentre as ações, o Projeto Educom – educação com computadores – Lançado em 1983, foi a primeira ação oficial e concreta para levar os computadores até as escolas públicas. As escolas receberam computadores e acesso à internet, e a sua informatização se tornou real, mas o professor não estava preparado para fazer uso do computador como recurso pedagógico. Então, foi implantado o Programa Nacional de Informática na Educação (Proinfo), que visou a formação de Núcleos de Tecnologias Educacionais (NTEs) em todos os estados do país e teve por objetivo a capacitação de professores multiplicadores de formação em informática educacional.

O Proinfo foi impulsionado pelo Governo Federal e teve como proposta introduzir a tecnologia da informação na rede pública de ensino, com a proposta de aproximar a cultura escolar dos avanços que a sociedade já vinha desfrutando (TAJRA, 2012, p. 31). A instalação de computadores, pelo governo brasileiro, nas escolas públicas, teve por objetivo a melhoria da qualidade do ensino nas escolas, garantindo ao aluno o acesso ao conhecimento de uma tecnologia já utilizada pela sociedade moderna.

Quanto aos objetivos do Proinfo, Tajra (2012, p. 32) destaca:

> ● Melhorar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem.
> ● Possibilitar a criação de uma nova ecologia cognitiva nos ambientes escolares mediante incorporação adequada das novas tecnologias de informação pelas escolas.
> ● Propiciar uma educação voltada para o desenvolvimento científico e tecnológico.
> ● Educar para a cidadania global na sociedade tecnologicamente desenvolvida.

A chegada dos computadores nas escolas, junto ao advento da internet, dos Lieds e das salas de multimídias, que são ambientes destinados a esses recursos dentro da escola, também trouxeram a remodelação dos ambientes educacionais. Com o computador, vieram os softwares educacionais que exigiram uma nova postura do professor e um repensar da prática pedagógica. Nesse contexto, o professor passou a ser mediador do conhecimento. No que tange o ensino e a aprendizagem de matemática, são inúmeras as contribuições das TDIC.

2.1.1 A TDIC na educação matemática

Com as constantes evoluções da TDIC, a forma de se comunicar, de pensar, de ensinar, de aprender e de agir, entre os sujeitos, mudou. Na educação, essas mudanças impõem uma nova forma de ensinar e aprender. Nesse sentido, Kenski (2013) relata que as transformações tecnológicas da atualidade impõem novos ritmos e dimensões à tarefa de ensinar e aprender, sendo preciso estar em permanente estado de aprendizagem e adaptação ao novo.

Com novas possibilidades de acessar as informações, as metodologias baseadas apenas com o uso de livros didáticos, lousa e oratórias são desestimulantes para o aluno, não agregando valor sentimental ao objeto educacional estudado. Moran (2017, l. 342), ao discursar sobre "mediação afetiva na relação pedagógica", aponta que o aprender, entre outros, ocorre quando "[…] sentimos prazer no que estudamos e na forma de fazê-lo". Para Kenski (2003):

> Educar para a inovação e a mudança significa planejar e implantar propostas dinâmicas de aprendizagem, em que se possam exercer e desenvolver concepções sócio-históricas da educação – nos aspectos cognitivo, ético, político, científico, cultural, lúdico e estético – em toda a sua plenitude e, assim, garantir a formação de pessoas para o exercício da cidadania e do trabalho com liberdade e criatividade (KENSKI, 2003, p. 79).

Educar para a inovação requer a quebra de velhos paradigmas que assumem práticas educativas estagnadas, que pouco colaboram para uma aprendizagem significativa. Nesse sentido, é preciso "[…] buscar o desenvolvimento de práticas que favoreçam o raciocínio lógico, a autonomia e a criatividade na resolução de problemas contextualizados com as Tecnologias Digitais (TD)" (TEIXEIRA, MUZZATO, 2020, p.7).

A presença das tecnologias é uma realidade no ambiente escolar, e não a usar é negar ao aluno o direito e a possibilidade de inovar a ação de aprender, de se reinventar e de explorar seu potencial em um novo contexto educacional. Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 473) menciona que "[...] é preciso garantir aos jovens, aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos", e pontua como competências e habilidades:

> Utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p. 475).

Os educandos, desde os iniciantes até os concluintes, estão inseridos em uma sociedade que é culturalmente digital, onde as TICs são facilitadoras e auxiliares para desenvolver atividades diárias. Moran (2017), ao redigir o tema "*Para onde estamos caminhando na educação*?", concebe às tecnologias um papel importante na sociedade e na educação ao dizer que:

> Tudo que for previsível será cada vez mais realizado por aplicativos, programas, robôs e o papel fundamental do professor, neste novo contexto, é ser um mediador interessante, competente e confiável entre o que a instituição propõe para cada etapa e o que os alunos esperam, desejam e realizam (MORAN, 2017, l. 70).

A inserção das TDIC no ambiente escolar não é garantia de que o aluno irá ter uma educação de qualidade, pois seu uso desagregado de objetivos educacionais, firmados no plano de aula do professor e consonantes ao conteúdo a ser estudado, pouco ou nada contribuirá para o aprendizado do aluno. Neste sentido, D'ambrósio (1999 apud Silva, 2019, p. 33) nos diz que:

> A matemática e a tecnologia, entendida como convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível.

Educar com e para uso das novas tecnologias exige do professor a quebra da zona de conforto e o confronta a ser um eterno pesquisador, pois os recursos tecnológicos se modernizam constantemente. Consolidando, Kenski (2013) relata que as alterações no universo informacional impõem ao sujeito a necessidade de estar em permanente atualização para acompanhar essas mudanças tecnológicas.

Para Borba, Silva e Gadanidis (2020), o uso das tecnologias móveis, usadas pelos alunos nos momentos de aula, moldam a sala de aula, criam dinâmicas, transformam a inteligência coletiva, as relações de poder e as normas que regem o momento de aula. No entanto, para aplicar os recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem da matemática, o professor precisa antes conhecer a tecnologia e saber como aplicá-la, garantindo assim que o aprendizado ao qual se destina a tecnologia seja efetivado, pois "[...] um problema que poderia ser didático com uma tecnologia não é com outra" (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, p. 24). Quanto ao uso do computador aplicado com fins pedagógicos, o Currículo Básico da Escola Estadual (2010) alerta que antes de usar o computador é preciso entender qual o seu papel e em que sentido ele pode contribuir para a construção do conhecimento, para não fazer do computador apenas uma transferência de ações que já ocorrem por outros meios.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 87-88, grifo nosso), a inserção das tecnologias para subsidiar o ensino e aprendizagem tem dois sentidos: o primeiro considera *"**a matemática para a tecnologia**"*, ou seja, deve-se pensar na formação para capacitar para o uso dos recursos que o computador oferece; e o segundo, que considera *"**a tecnologia para a matemática**",* que faz referência ao uso dos softwares educacionais para representar conceitos matemáticos. Quanto ao uso dos softwares educativos, Silva (2019) disserta que:

> O uso de *softwares*, sejam eles de computador ou aplicativos de dispositivos móveis, pode proporcionar uma análise distinta daquele conteúdo que é exposto na lousa ou numa folha de papel, contribuindo, desta forma, para a formação dos conceitos matemáticos. Estes recursos podem ser usados para a aprendizagem da geometria, […]. (SILVA, 2019, p. 32).

Atualmente são encontrados vários softwares para auxiliar no ensino e na aprendizagem da matemática; em geometria espacial, os softwares proporcionam a visualização de informações que um retroprojetor ou um livro, por exemplo, não é capaz de mostrar. Mas nem sempre foi assim, como escrevem Borda, Silva e Gadanidis (2020) no capítulo I, em sua obra intitulada

"Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática". Os autores discorrem sobre as quatro fases da tecnologia para a educação matemática.

A **primeira fase**, no ano de 1980, ficou caracterizada pelo uso da calculadora simples e científica; pelo acesso aos computadores e expressões como "tecnologias da informação (TI)"; o construcionismo de Papert e o uso pedagógico do software LOGO, estreitaram as relações entre linguagem de programação e pensamento matemático e o surgimento dos laboratórios de informática, advindos de programas como Educom e Proinfo.

A **segunda fase**, com início na metade de 1990, foi marcada pela popularização do acesso ao uso de computadores pessoais; produção dos softwares educacionais; formação continuada de professores em Tecnologia da Informação (TI). Nesta fase, o uso dos softwares voltados às múltiplas representações de funções (como o Winplot, o Fun e o Graphmatica) e de geometria dinâmica (como o Cabri Géomètre e o Geometricks) são manipulados por professores para dinamizar as aulas.

A **terceira fase**, com início por volta de 1999, caracterizou-se pelo advento da internet e a sua utilização como fonte de informações e meio de comunicação entre professores e estudantes; realização de cursos de aperfeiçoamento à distância. Surgem, nessa fase, os termos "tecnologias da informação" e "tecnologias da informação e comunicação" (TIC).

A **quarta fase**, com início em meados de 2004, é marcada pelo advento da internet rápida. Nessa fase, se tornou comum o uso do termo "Tecnologias Digitais" (TD), sendo caracterizada por diversos aspectos, que segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 35-38) são vivenciadas pela matemática atualmente:

> * GeoGebra: Integração entre GD e múltiplas representações de funções; cenários inovadores de investigação matemática.
> * Multimodalidade: Diversificados modos de comunicação passaram a estar presentes no ciberespaço; uso de vídeos na internet; fácil acesso a vídeos em plataformas ou repositórios (YouTube e TED Talks); produção de vídeos com câmeras digitais e softwares de edição com interfaces amigáveis.
> * Novos designs e interatividade: Comunicadores online – telepresença (Skype); ambientes virtuais de aprendizagem (Moodle, ICZ e Second Life); aplicativos online (applets); objetos virtuais de aprendizagem (RIVED).
> *Tecnologias móveis ou portáteis: Celulares inteligentes, tablets, laptops, dentre outros:
> *Comunicação por sms; multifuncionalidade; câmeras digitais, jogos e outros aplicativos; multiconectáveis (USB); interação através do toque em tela; acesso à internet.

> *Performance: Estar online em tempo integral; internet na sala de aula; reorganização de dinâmicas e interações nos ambientes escolares; redes sociais (Facebook); compartilhamento de vídeos (YouTube); a Matemática dos estudantes passa a ir além da sala aula: torna-se pública no ciberespaço; presente em diversos tipos de diálogos e cenários sociais.
> *Performance matemática digital: Uso das artes na comunicação de ideias matemáticas; estudantes e professores como artistas; produção audiovisual e disseminação de vídeos na internet; narrativas multimodais e múltiplas identidades online; surpresas, sentidos, emoções e sensações matemáticas; ambientes multimodais de aprendizagem; novas imagens públicas sobre a Matemática e os matemáticos.

Pensar a matemática a partir das tecnologias é pensar na abrangência e possibilidades de recursos que podem ser aplicados como recursos didáticos na prática do professor; é pensar que o uso das TICs "[…] possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações" (BRASIL, 2018, p. 536); é pensar que a tecnologia não substitui o professor, os conteúdos e sim contribuem para tornar as aulas mais atrativas, inovadoras, interessantes e dinâmicas para o aluno. Segundo Strasser (2012, p. 8-10 *apud* MOURA, 2019, p. 17):

> O uso de ferramentas tais como "aplicativos para celulares smartfones e/ou tabletes pode transformar o processo de aprendizagem em algo criativo, interativo, colaborativo, rápido, que expande o conhecimento, oferece oportunidades autênticas de uso do conteúdo da disciplina, estimula a alfabetização digital, é motivacional, é democrático, faz bem ao meio ambiente, além de ser uma fonte aberta e, em alguns casos, até gratuita de recursos para a aprendizagem.

Borba e Penteado (2019), em seu livro intitulado "Informática e Educação Matemática" discorrem sobre as pesquisas feitas pelo GPIMEM[4], que apontam o uso do computador como uma solução para a desmotivação do aluno, citam as ações governantas que culminaram no surgimento do Educom, Projeto Formar[5], o Proninfe[6] e o Proinfo[7]; todos os projetos de iniciativa de informatização da educação e do ensino. Para Borba e Penteado (2019, p. 16), "o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve usufruir de uma educação que inclua, no mínimo, uma 'alfabetização tecnológica'".

---

[4]GPIMEM – Grupo de pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. (Borba, Penteado, 2019).
[5]Projeto Formar – Iniciativa dentro da Educom (Formar I – 1987, Formar-II, 1989).
[6]Proninfe – Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1989.
[7]Proinfo – Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1997 pela Secretaria de Educação a Distância (Seed/MEC).

Foi a partir das iniciativas governamentais que o ensino foi informatizado e, para o professor de matemática, surgiram novas possibilidades de mediar o ensino de matemática. O uso do software Geogebra, por exemplo, ainda traz grandes contribuições para o ensino da matemática, seu ficheiro é recheado de ícones que possibilitam trabalhar vários conteúdos matemáticos e pode ser trabalhado/aplicado no Ensino Fundamental, Ensino Médio e Curso Superior. Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 46) citam que o software Geogebra "[…] vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático".

O Geogebra é sugestionado como metodologia para o ensino e aprendizagem de matemática pela SEDU[8], nos três trimestres de 2022, e em todas as séries que contemplam o Ensino Médio, ver[9]. Sabemos que outros recursos (softwares matemáticos) estão disponíveis no ciberespaço[10], e para o profissional que não tem o domínio da programação basta apenas pesquisar e escolher o mais adequado para seu trabalho. Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020):

> […] o protagonismo dos recursos tecnológicos baseados na linguagem informática foi adquirindo relevância na aprendizagem matemática por terem um caráter predominantemente "empírico" (experimental e visual), que intensifica a dimensão heurística que envolve a produção de sentidos e conhecimentos matemáticos (BORBA; SILVA; GADANIDIZ, 2020. P. 50).

Com a informatização do ensino, as construções matemáticas se tornaram dinâmicas, os objetos matemáticos passaram a ser representados de forma digital e novos problemas matemáticos surgiram. É nessa perspectiva empirista que buscamos conciliar o uso das TDIC ao ensino e aprendizagem de geometria espacial ao propor, em uma sequência de atividades, o uso da Realidade Aumentada no cálculo do volume dos principais sólidos.

2.2 O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 45):

[8]SEDU – Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo.
[9]https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares2022.
[10]Espaço de integração e articulação de todas as pessoas conectadas com tudo o que existe no espaço digital. (KENSKI, 2003, p. 36).

> O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 e, ao longo dos anos, foi consolidando seu status enquanto uma tecnologia inovadora na educação matemática. Desde seu lançamento, cada vez mais, professores e/ou pesquisadores têm demonstrado interesses didático-pedagógicos e acadêmicos diversificados com relação ao uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem de Matemática.

Ainda, segundo o Instituto de São Paulo (*apud* BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, p.45), o Geogebra é "[…] um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma que atende todos os níveis de ensino e combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação". Como explica Borba, Silva, Gadanidis (2020, p. 45-46), o Geogebra apresenta as seguintes características: "interface amigável, com vários recursos sofisticados; ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB; disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo; software gratuito e de código aberto".

O software Geogebra foi e ainda é muito aplicado em pesquisas que buscam investigar o ensino de matemática, tais como a geometria plana e espacial, as funções de suas construções gráficas. Como escreve Borba, Silva, Gadanidis (2020):

> […] o software **Geogebra** vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático. […] é a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses (BORBA, CARVALHO, GADANIDIS, 2020, p. 46, grifo do autor).

Os recursos disponíveis no software Geogebra podem colaborar para o processo de ensino e aprendizagem da matemática ao possibilitar desenvolver atividades que permitam a investigação, a interação e a testagem, facilitando o processo de construção do conhecimento. Lieban e Müller (2012, p. 49 apud BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, p. 46) argumentam que "[...] através de atividades com o GeoGebra, podemos criar um ambiente mais propício para a aprendizagem de matemática", levando o aluno a ser ativo e coautor do seu ensino/aprendizagem.

As *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (2006, p. 88) já referenciavam "[...] programas que dispunham de réguas e compassos virtuais e com um menu de construção em linguagem clássica da geometria [...]", os quais permitiam aplicar movimento preservando as relações geométricas impostas às figuras; esses softwares foram denominados programas de Geometria Dinâmica (GD).

Entendemos por ‘dinâmico’ toda atividade que envolve o aluno em um enredo não convencional costumeiro de sala de aula, ou seja, que modifica a forma como o ensino e aprendizagem são mediados. Em GD, “[…] o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação” (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, p. 23).

A utilização do Geogebra, segundo Borba, Silva, Gadanidis (2020), aproxima o estudo de conteúdos, que é comumente feito com lápis e papel, à medida que transforma as possibilidades de experimentação, de visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo que aprende.

Faria e Maltempi (2019) evidenciaram que o uso do Geogebra favorece o trabalho intradisciplinar na matemática escolar, ao apresentar uma análise da atividade de “grandezas proporcionais” que objetivou relacionar grandezas proporcionais e não proporcionais com suas representações aritméticas, geométricas e algébricas, ao usar o Geogebra.

O Geogebra não é uma novidade em termos de software (já possuía versões estáveis em 2016), no entanto, sua capacidade de tornar o estudo de conteúdos matemáticos mais palpável, aproximando-se da prática tradicional de aprender com lápis e papel, é uma característica que o torna excepcionalmente popular entre os educadores matemáticos. Ao transformar conceitos abstratos em representações visuais e experimentais para os alunos, o Geogebra torna o processo de aprendizagem mais envolvente e interessante. Como resultado, é amplamente utilizado em salas de aula e laboratórios, contribuindo significativamente para o ensino e aprendizado da matemática.

Atualmente, existem diversas versões do Geogebra disponíveis, incluindo o GeoGebra Graphing Calculator, GeoGebra 3D Grapher, GeoGebra Math Apps, GeoGebra in Exams e GeoGebra Classic for Desktop. No entanto, cabe ao educador selecionar e aplicar essa ferramenta de acordo com as necessidades específicas de seus alunos e o conteúdo a ser abordado. Optamos por utilizar o Geogebra Classic ao ensinar conceitos de geometria espacial, conforme proposto na sequência didática, devido à sua versatilidade, disponibilidade gratuita e capacidade de funcionar em notebooks e PCs desktops, seja por meio de instalação local ou uso online.

2.3 REALIDADE VIRTUAL

O conceito de Realidade Virtual surgiu em 1968 por Ivan Edward Sutherland ao criar o primeiro sistema de Realidade Virtual (RV) com a ajuda de seu aluno Bod Sproull, ao qual chamou de a Espada de Dâmocles. Conforme mostra a figura abaixo, a máquina de Sutherland foi projetada para imergir o espectador em um ambiente 3D simulado (FIALHO, 2018).

Figura 1 – A Espada de Dâmocles

Fonte: Blog de Tori. Disponível em: http://blog.esemd.org

Como demonstrado por Ivan Sutherland em 1968, a RV (Realidade Virtual) é um sistema que imerge o sujeito para um mundo virtual através de instrumentos tecnológicos. Sutherland demonstrou que as sensações, as reações e os movimentos de um observador remoto foram iguais aos que um observador teria se estivesse efetivamente vivendo a real situação. Desde a demonstração de Sutherland em 1968, esses sistemas se modernizaram para trazer ao usuário sensações cada vez mais realísticas dentro do virtual. Atualmente, podemos encontrar "[…] tecnologia que permite o acesso a ambientes sintéticos, imersivos e de alta definição, que conseguem nos transportar para realidades alternativas, a baixo custo" (TORI, HOUNSUELL, KIRNER, 2018, p. 13, 2020, p. 11).

Comumente, o termo virtual e real é contraposto, como se o virtual não existisse, sendo fruto apenas da nossa mente, ou seja, existe apenas na mente não podendo ser materializado, e, ao termo real, como sendo tudo que o nosso sentido pode captar do mundo real, podendo ou não se tornar palpável, visível, sentido etc. No tocante, Tori, Hounsell, Kirner (2018, p. 15) definem **virtual** como sendo "[…] ambientes ou elementos que são sintetizados por meio de dispositivos digitais e que podem ser replicados de forma imaterial" e **real** como sendo "[...] ambientes ou elementos que o usuário considere como sendo pertencentes à sua realidade".

De fato, um ambiente de RV é uma interação homem-máquina que tem por "[...] objetivo tirar do usuário a percepção do mundo real e fazê-lo se sentir apenas no ambiente virtual" (TORI, HOUNSELL, KIRNER, 2018, p. 15). E, como em toda tecnologia de interação, um sistema de RV apresenta dois componentes básicos: o **hardware** – dispositivo de entrada que abrange as variedades de dispositivos com os quais o usuário se comunica com o sistema de RV, como por exemplo, rastreadores, luvas, mouse, teclados 3D, reconhecimento de voz, etc. – e o **software** que "[...] inclui controladores de simulação/animação, ferramentas de autoria, banco de dados de objetos virtuais, funções de interação e interface de entrada e saída" (TORI, HOUNSELL, KIRNER, 2018, p. 21).

Ainda, segundo os autores, com a RV podem-se criar realidades alternativas por meio de tecnologia computacional, possibilitando a simulação de ambientes e sistemas reais e a criação de experiências que são possíveis apenas no ambiente virtual. Corroborando, Kirner e Siscoutto (2007, p. 8) explicam que a RV surge "[...] como uma nova geração de interface, na medida em que, usando representações tridimensionais mais próximas da realidade do usuário, permite romper a barreira da tela, além de possibilitar interações mais naturais".

Segundo Tori e Kirner (2006), a realidade Virtual trabalha com imagens calculadas em tempo real; prioriza a interação com o usuário; exige alta capacidade de processamento; usa técnicas e recursos de renderização de modelos tridimensionais e funciona com dispositivos especiais. A figura 2 mostra o uso de simulador de RV em parques de diversão, o objetivo é fazer com que as sensações do mundo real sejam incorporadas ao ambiente virtual, assim, os participantes usam capacetes de RV e, portanto, não veem nada do mundo real, mas os acontecimentos do ambiente virtual são registrados e sincronizados com os movimentos reais da montanha-russa.

Figura 2 – Simulador de montanha-russa

Fonte: Arquivo do autor.

Os simuladores podem trazer a experiência de viver o real no mundo virtual, em qualquer lugar e por qualquer pessoa.

A figura 3 mostra a aplicação da RV em um cenário ainda mais moderno, onde é possível simular corridas de carro e jogos em vários cenários. Nesta simulação, são utilizados hardwares mais específicos, a cadeira é uma Roto VR equipada com motores de movimento; ela tem seu formato parecido com a cadeira do motorista, tornando a experiência mais realista e, dessa forma, o condutor pode passar pela experiência sem correr os riscos de uma corrida real.

Figura 3 – Roto VR simulador de direção.

Fonte: https://www.rotovr.com/. Acessado em: 20/09/2022.

Como mencionado por Tori, Hounsell, Kirner (2018), o objetivo da RV é tirar o usuário totalmente da percepção real, transportando-o para uma realidade sintética (virtual), enriquecida com elementos do mundo real através de periféricos tecnológicos. O uso de simuladores, como mostra a figura 3, permite ao usuário passar por diversas experiências, sem correr nenhum tipo de risco. Esses simuladores estão cada vez mais modernos e com maior potencial de trazer para o mundo virtual a realidade requerida, fato este que torna a RV um campo fecundo e de grande crescente no ramo industrial.

2.3.1 Definições e características da realidade virtual

A realidade virtual permite ao usuário interagir com cenários imaginários e fictícios, envolvendo objetos estáticos e em movimento, que permitem reproduzir com fidelidade ambientes da vida real, provocando sensações realistas ao usuário. A interação do usuário com o mundo virtual ocorre através de recursos tecnológicos. Assim, as definições dadas para a RV são oriundas dessas duas vertentes: o imaginário e o tecnológico.

Tori, Hounsell, Kirner (2018, p. 18) definem a RV, como sendo uma "[...] 'interface avançada do usuário' para acessar aplicações executadas no computador, tendo como características a visualização de, e movimentação em ambientes tridimensionais em tempo real e a interação com elementos desse ambiente". Em paralelo e seguindo argumentos parecidos, Kirner, Siscoutto (2007, p. 7) a definem como "[…] uma 'interface avançada do usuário' para acessar aplicações executadas no computador, propiciando a visualização, movimentação e interação do usuário, em tempo real, em ambientes tridimensionais gerados por computador."

Outras definições são apresentadas por outros pesquisadores que abordam a tecnologia de RV e RA em suas pesquisas, mas não cabe aqui citar todas as definições, pois elas convergem em conceitos ao definir a RV.

Com base nas definições apresentadas, podemos dizer que na RV o usuário é levado para um mundo imaginário criado por um instrumento tecnológico, tirando-o totalmente a percepção do mundo real, e essa interação pode ser imersiva ou não-imersiva, pois depende do senso de presença do usuário. Quanto às características, Fialho (2018, p. 21-22, grifo do autor) diz que um ambiente de RV deve ser:

- **Sintético**: o ambiente é gerado em tempo real modificando-se conforme a interatividade do usuário.
- **Tridimensional**: o ambiente deve causar no usuário a percepção do espaço 3D.
- **Multissensorial*:*** uso de mais de uma modalidade sensorial para representar o ambiente.
- **Interativo**: O computador por meio de dispositivo de entrada, com sensores acoplados em luvas ou botas, pode modificar em tempo real o ambiente o ambiente virtual em reação às ações do usuário.
- **Realístico**: precisão do ambiente virtual em representa os ambientes e os objetos reais.
- **Imersivo**: uso de capacete, luvas e outros periféricos para fornecer o controle reativo.
- **Com presença**: sentido subjetivo que dá ao usuário a impressão de estar no ambiente virtual.

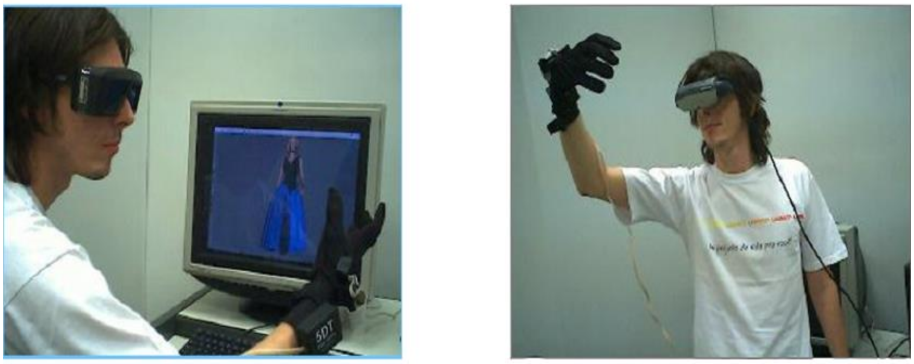
Corroborando, Kirner e Kirner (2011, p. 14-15), ao discorrerem sobre as características da RV destacam a interação em tempo real; a alta capacidade de processamento gráfico, sonoro e háptico processados em tempo real; a atuação do usuário em espaço tridimensional; a utilização de dispositivos especiais e multissensoriais; a adaptação e treinamento para o usuário e o trabalho com informações multissensoriais. Essas características fazem com que a RV seja uma tecnologia com grande potencial de exploração para as empresas, em todos os setores sociais.

2.3.2 Realidade virtual imersiva e não imersiva

A RV pode ser classificada, dependendo do senso de presença do usuário, em imersiva e não-imersiva. Nas interações imersivas, o usuário é transportado para o domínio da aplicação através de dispositivos multissensoriais que capturam seus movimentos e comportamentos e reagem a eles (TORI, KINER, 2006), provocando sensações de estar dentro de um novo mundo. Ampliando a definição, Kirner e Kirner (2011, p. 14) advogam que, na realidade virtual imersiva, o usuário é transportado para o "[…] domínio da aplicação, fazendo com que ele se sinta completamente imerso no mundo virtual, interagindo com seus objetos e sentindo suas reações, através dos dispositivos multissensoriais". Para as interações imersivas, são usados hardwares específicos para cada ambiente planejado, e, em alguns casos, podem ser utilizados capacetes, luvas, controles, óculos etc.

Na RV não imersiva, o usuário é transportado parcialmente para o mundo virtual através de uma janela de um dispositivo eletrônico, mas mantém a sensação do mundo real, algo que não acontece na interação imersiva. Segundo Kirner, Kirner (2011, p. 14), "[…] a realidade virtual implementada no 'modo janela' é denominada não imersiva, enquanto a implementação baseada em capacete HMD (*Head Mounted Display*) ou salas de multiprojeção e em outros dispositivos multissensoriais é denominada imersiva”. Conforme demonstram as figuras abaixo, os usuários utilizam equipamentos de RV não imersivo e RV imersivo.

Figura 4 – Realidade Virtual não-imersiva e imersiva.



a) RV não imersiva com monitor. **b) RV imersiva com capacete HMD**

Fonte: Tori e Kirner (2006, p. 8).

Com a evolução tecnológica, os aparelhos de RV ficaram ainda mais modernos e potentes, possibilitando aplicações cada vez mais realistas e precisas; o usuário passou a usar, além da visão, sensações das mãos (tato) e do corpo (sensação de calor, frio, vento etc.). Mesmo a RV imersiva proporcionando ao usuário um realismo preciso, a RV não imersiva é mais popular por ser mais simples, mais barata e, portanto, mais acessível ao usuário.

Na RV, o sistema de interação usuário/máquina abrange “[...] ***navegação, seleção, manipulação e controle do sistema***” (LAVIOLA *et al*., 2017 apud TORI, HOUNSELL, KIRNER, 2018, p. 29, grifo nosso). Ainda segundo os autores, a ***navegação*** é uma viagem onde ocorre a movimentação mecânica do usuário dentro do mundo virtual; a ***seleção*** se dá pela escolha do objeto a ser manipulado; a ***manipulação*** altera a posição de um objeto através da translação, textura, cor, transparência e característica e o ***controle do sistema*** são comandos emitidos pelo usuário a ser executado pelo sistema. Com amplo potencial de aplicação, a RV possibilita vivenciar qualquer experiência do mundo real, que só é possível dentro da virtualidade, a um custo baixo e sem riscos.

2.3.3 Aplicações da realidade virtual

Atualmente, a RV e a RA são aplicadas em vários cenários sociais, e podemos percebê-las na indústria, na medicina, na engenharia, no marketing, na educação etc. Com o avanço tecnológico, os recursos oriundos das aplicações da RV e da RA tornam a experiência cada vez mais realistas, fato que faz com que esse recurso seja cada vez mais explorado.

- **Aplicações na indústria**

A realidade virtual vem revolucionando o mercado industrial, sendo usada nas mais diversas situações e em diferentes campos industriais. Vale ressaltar que a visualização em 3D de um objeto permite sua análise antes de ser produzido. Dentre as várias aplicações da RV na indústria, Tori, Kirner (2006, p.19) apontam as seguintes: "[…] visualização de protótipos; treinamento; avaliação de fatores ergométricos; simulação de montagem, simulação de dinâmicas de estruturas articuladas; análise de tensões; simulação de processo produtivo; estudo de técnicas de engenharia; planejamento; túnel de vento virtual, etc." A figura 5 apresenta a possibilidade de visualizar as fases de um projeto de arquitetura pelo processo de simulação, como mostra a empresa AECOM (AECOM INSTRUMENTS – Empresa de Tecnologia).

Figura 5 – Uso da RV em simulação de projeto arquitetônico.

Fonte: Marchi, Hashimoto (2020, p.368).

Como mostra a figura, com a RV é possível ver o projeto pronto sem que seja construído, possibilitando assim reajustes e mudanças na estrutura.

- **Aplicações na medicina.**

Atualmente, a RV é muito usada na medicina. A principal vantagem da aplicação consiste em poder "[…] simular procedimentos médicos com a finalidade de treinar novos profissionais"

(MACHADO, 2007, p. 164), como por exemplo, cirurgias mais complexas e invasivas. Na figura 6, temos uma demonstração do uso da RV e a RA aplicada no planejamento e apoio ao cirurgião, no Hospital Alemão Oswaldo Cruz.

Figura 6 – RV aplicada na simulação de cirurgia.

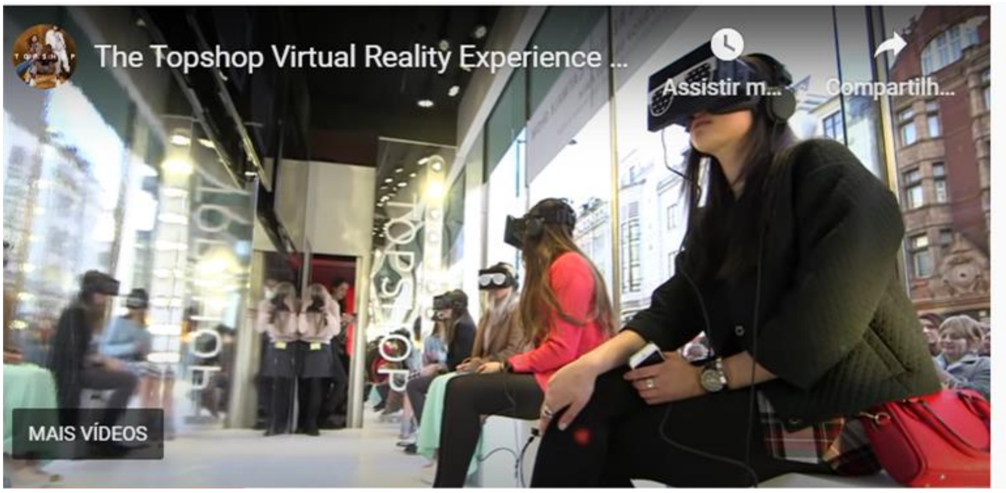
Fonte: https://medicinasa.com.br/oswaldo-cruz-rv/ Acessado em: 20/10/2022.

De acordo com o diretor-executivo de Inovação, Pesquisa e Educação, Kenneth Almeida, o intuito em usar a RV é fornecer maior potencialidade em cirurgias com alta complexidade, trazendo assim mais segurança para o paciente.

- **Aplicações no marketing**

No marketing, a RV é empregada com o objetivo de divulgar, através de experiências realísticas, produtos e serviços que as empresas oferecem. A marca Topshop usou a RA para levar a experiência de estar em um desfile de modas para o público adeptos à moda. A marca usou Headsets (Fones de ouvido) como o Google Cardboard e o Oculus Rift (HDM) para mostrar imagens em 360º capturadas diretamente da primeira fila do evento e dos bastidores. A experiência da Topshop foi premiada como o Projeto do Ano no BT Retail Week Technology Awards 2014.

Figura 7 – Topshop usando a RV em um desfile de moda.



Fonte: https://arquivo.canaltech.com.br/marketing/realidade-virtual. Acessado em: 20/10/2022.

Como mostra a figura 7, o uso da RV em eventos, traz a vantagem de estar no evento, sem necessariamente ter que estar no local do evento.

- **Aplicações na educação**

A RV tem contribuído de maneira significativa nas experiências educativas, ao permitir a exploração, descoberta, observação e construção de novos conhecimentos, oferecendo ao aprendiz a oportunidade de melhorar sua compreensão do objeto de estudo. A figura abaixo apresenta um exemplo do uso da RV no ambiente educacional.

Figura 8 – Crianças interagindo com a RV em sala de aula.

Fonte: Angeloni, 2020.

Angeloni (2020) relata que esse tipo de experiência pode trazer benefícios para a educação uma vez que estimula o estudante a aprender, através de experiências diferenciadas e com uso de tecnologias.

O uso da Realidade Virtual (RV) e da Realidade Aumentada (RA) têm sido amplamente explorados. Artigos abordando a temática podem ser encontrados no site da Sociedade Brasileira de Computação, disponível em https://sol.sbc.org.br/livros/index.php/sbc.

2.4 REALIDADE AUMENTADA

Antes de falar da Realidade Aumentada (RA), faz-se necessário justificar o termo "Realidade Ampliada" usada no título da pesquisa**.** No primeiro momento, pensamos em Realidade Ampliada para referenciar o uso do app Geometria RA, usado como auxiliar nas atividades pedagógicas de geometria espacial. No entanto, ao buscarmos por referenciais com o termo "Realidade Ampliada", os sites nos retornavam pesquisas com o termo "Realidade Aumentada".

No dicionário online DICIO,[11] o termo **"ampliada"** é o mesmo que: "**aumentada,** dilatada, estendida". Assim, decidimos manter o termo "Realidade Ampliada" no título da pesquisa, tendo em vista que não há um erro de conceito entre os termos. Assim, quando nos referirmos à Realidade Aumentada, igualmente, nos referindo à Realidade Ampliada.

O termo Realidade Aumentada, segundo Ribeiro, Guterres e Silveira (2020), surgiu em "[…] 1990, quando o Prof. Thomas Caudell designou como Realidade Aumentada um projeto que estava desenvolvendo de um mostrador digital para aviões, que mesclava gráficos virtuais em uma realidade física, em colaboração com a empresa Boing". Desde então, sua aplicação vem crescendo em vários campos. Com o aumento das pesquisas nesta área, podemos notar que a RA é aplicada na Educação, Arquitetura, Medicina, Logística, Marketing, entre outros.

Para mencionarmos sobres as aplicações da RA, faz-se necessário defini-la. Dentre as definições citadas por Kirner, Tori (2006), Kirner, Siscoutto (2007) e Tori, Hounsell, Kirner (2018), consideramos as três citadas abaixo, mais apropriadas e adequadas para definir a RA:

- "É uma melhoria do mundo real com textos, imagens e objetos virtuais, gerados por computador" (INSLEY, 2003 *apud* KINER, TORI, 2007, p. 32);

[11]DICIO: Dicionário Online de Português. Disponível em https://www.dicio.com.br/

- “É a mistura de mundos reais e virtuais em algum ponto do espectro que conecta ambientes completamente reais a ambientes completamente virtuais” (MILGRAM 1994 *apud* TORI, HOUNSELL, KIRNER, 2018, p. 40).

No entanto, outras definições são mencionadas pelos autores e são igualmente importantes para definir a RA como uma tecnologia que mistura o virtual e o real sem sair do mundo real. Com o mesmo teor de significação, Silva (2019, p. 46) define a RA como sendo “[…] a sobreposição de objetos virtuais (textos, sons, imagens, objetos 3D) num ambiente real em tempo real, gerados por computador e visualizados por meio de um dispositivo tecnológico digital”. Corroborando, Mena (2017 apud MOURA, 2019, p. 18) afirma que a “[…] Realidade Aumentada (RA ou AR, de Augmented Reality, em inglês) é uma tecnologia que ‘mistura’ os mundos real e virtual, onde o usuário pode interagir com o mundo dentro da tela, mesmo estando fora dela”. De acordo com Fialho (2018):

> A Realidade Aumentada, no entanto, não nos leva para mundos alternativos; ela simplesmente “aumenta” nosso estado de presença atual dentro da realidade do cotidiano. É a mistura da realidade virtual e da vida real, […]. Com a RA, os usuários podem interagir por meio de conteúdos virtuais no mundo real e são capazes de distinguir entre os dois. (FIALHO, 2018, p. 11).

No tocante, com base nos autores aqui citados, nós definimos a Realidade Aumentada como sendo: *uma tecnologia que usa dispositivos que podem levar o usuário para um ambiente virtual sem se desprender do ambiente real, interagindo entre os dois mundos ao mesmo tempo, ao sobrepor objetos virtuais em um ambiente real em tempo real.*

Diferente da RV, que transporta o usuário totalmente para o mundo virtual, a RA transporta o virtual para o mundo físico onde o usuário está interagindo. Assim, podemos dizer que um dos “objetivos” da RA, é inserir objetos virtuais no mundo real, criando a ilusão de que todo o cenário é real” (KIRNER, TORI, 2006, p. 35). Para ter essa ilusão, são usados os simuladores que fazem com que objetos virtuais apresentem comportamentos apropriados, como movimentação, colisão, reação, simulação física etc. (KIRNER, TORI, 2006).

Outro objetivo da RA é permitir que o usuário possa “[…] interagir com o mundo e os elementos virtuais, de maneira mais natural e intuitiva sem necessidade de treinamento ou adaptação […]” (HOUNSELL, TORI, KIRNER, 2018, p. 38). Os dispositivos para interação em Realidade Aumentada (RA) são diversos, e sua escolha depende do tipo de exploração em que a RA será aplicada. Portanto, a interação pode ocorrer de duas maneiras distintas: direta, quando o usuário utiliza a mão ou o próprio corpo, e indireta, "[…] quando auxiliada por algum dispositivo de interação" (HOUNSELL, TORI, KIRNER, 2018, p. 38).

De acordo com Kirner e Tori (2006), a RA pode ser classificada em duas categorias distintas:

- **Imersivas**: Nesse tipo de RA, ocorre uma visão direta, onde as imagens do mundo real são visualizadas a olho nu ou trazidas através de vídeos, enquanto os objetos virtuais são gerados por computador e projetados nos olhos, misturando-se ao vídeo do mundo real. Isso permite que o usuário veja o mundo real misturado ao virtual ao direcionar seus olhos diretamente para as posições reais com a cena óptica ou por meio de vídeos.
- **Não imersivas**: Já na categoria não imersiva, a visão é indireta. Nesse caso, as imagens do mundo real e virtual são misturadas em vídeo e apresentadas ao usuário. Aqui, o usuário visualiza o mundo real misturado por meio de dispositivos como monitores ou projetores, que não estão alinhados com as posições reais.

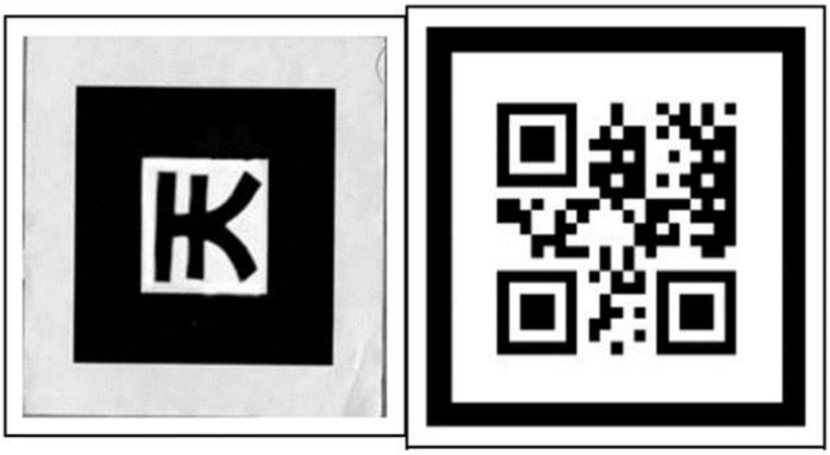
Um dos diferenciais da RA consiste em saber o que é real e o que virtual, já na RV essa distinção não ocorre. Assim, a grande vantagem da RA sobre a RV "[…] reside no fato de que os objetos virtuais podem ser inseridos (por sobreposição) no ambiente físico, permitindo inteirações tangíveis mais fáceis e naturais com o uso de equipamentos de custos mais baixos" (FIALHO, 2018, p. 56). Uma possibilidade de sobreposição de imagem em sistemas de RA, comumente usados por pesquisadores, é feita com o uso de marcadores.

2.4.1 Os Marcadores

Uma forma de sobrepor imagens em um sistema de RA é através do uso de um símbolo gráfico impresso em um cartão marcador. Quando o cartão marcador é capturado por uma câmera, o objeto virtual associado a ele é projetado sobre o cartão e a manipulação do cartão com as mãos movimenta também o objeto virtual projetado sobre o cartão (HOUNSELL, TORI, KIRNER, 2018). De acordo Damasceno et al (2018, p. 191), o tipo de rastreio pode ocorrer por "[…] marcas (marcadores fiduciais, marcadores de coloração, marcadores codificados como os QRCodes) ou sem marcadores (markerless), que usam características do ambiente para posicionar os objetos virtuais projetados no ambiente físico".

Conforme Hounsell, Tori, Kirner (2018), os marcadores fiduciais são cartões que, funcionando como um código de barras 2D, permitem que a câmera capture a imagem e, através da imagem capturada, sobreponha os objetos virtuais sobre os marcadores. Os marcadores podem conter símbolos diversos, como mostra a figura 9.

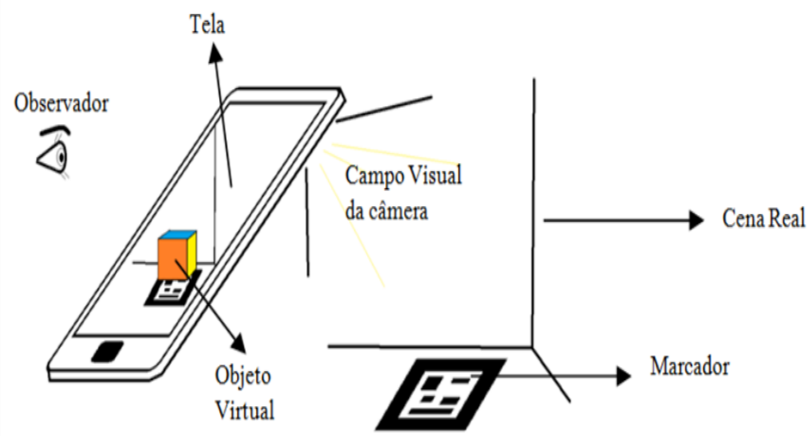
Figura 9 – Exemplos de marcadores fiduciais.



Fonte: Adaptado de Hounsell, Tori e Kirn (2018).

A interação mais usada em RA é com o uso de marcadores, onde o usuário move o objeto livremente, podendo explorá-lo sob vários ângulos, conforme mostra a figura 10 abaixo.

Figura 10 – Funcionamento da RA em Dispositivos Móveis.



Fonte: Macedo, Silva, Buriol (2016, p. 3).

A construção de objetos virtuais e sua interação com o ambiente real são realizados em ferramentas computacionais, como retratam Guimarães, Gnecco, Damazio (2007) em seu artigo intitulado: *Ferramentas para Desenvolvimento de Aplicações de Realidade Virtual e*

Aumentada. Segundo os autores, o desenvolvimento de projetos de RV e RA pode ser realizado usando as mesmas ferramentas.

Como discursam Guimarães, Gnecco, Damazio (2007, p. 123), as ferramentas voltadas para criação dos "[…] objetos virtuais e sua integração ao ambiente real, incluindo alguns comportamentos, como, por exemplo, quando um marcador é detectado, por uma câmara, e um certo objeto é adicionado na cena", em RA, podem ser realizados no:

- ARToolKit: é uma biblioteca gráfica que usa software gratuito criada para desenvolver projetos em RA. Trabalha com código aberto e o usuário pode modificar seu projeto sempre que necessário. A principal interação entre usuário e máquina está na visualização de objetos em 3D e 2D.
- ARToolKitPlus: é um kit de ferramentas que permite desenvolver aplicações eficientes em dispositivo móvel, PDAs[12] e smartphones. Não possui código aberto e é extremamente semelhante ao ARToolkit.

Atualmente a RA pode ser aplicada às mais diversas áreas do conhecimento e, em muitos casos, com vantagens adicionais por poder integrar-se simbioticamente com os ambientes reais (HOUNSELL, TORI, KIRNER, 2018, p. 64). Dentre as vantagens para o uso da RA, Wang *et al.* (2016 *apud* HOUNSELL, TORI, KIRNER, 2018, p. 62, grifo do autor) apontam que:

> - Não é necessário fazer toda **a modelagem do mundo virtual** (o que normalmente demanda esforço manual, aumentando a dificuldade de integração com os sistemas de CAD e, também esforço computacional para a renderização);
> - O usuário pode **agir no real** (usar ferramentas, atuar sobre dispositivos, manipular objetos, se mover em torno do objeto) de forma natural com suas propriedades responsivas - hápticas (de peso/inércia, textura, rigidez), o que dá maior senso de realismo e imersão no mundo enriquecido, trazendo o benefício tanto do real - principalmente a intuitividade - quanto do virtual;
> - Pode-se **explorar** novos elementos (virtuais) e sua interação com o ambiente (real) sem a necessidade de construir ou desenvolver os elementos, economizando tempo e recursos, e;

[12] O termo **PDA** (*Personal Digital Assistant*), também conhecido como **Palmtop**, é um pequeno equipamento com diversas funcionalidades de computador. Apesar da sua pequena dimensão (cerca de A6), os PDAs estão dotados de grande capacidade de processamento, possuindo funções de agenda e de escritório, com a possibilidade de acesso à Internet e de interconexão com computadores e com redes informáticas sem fios. Disponível em: https://knoow.net/ciencinformtelec/informatica/pda-personal-digital-assistant/. Acesso em 14/06/2023.

- Proporciona um ambiente **seguro**, flexível, controlado e intuitivo para experimentar interações físicas.

No entanto, mesmo tendo um grande potencial de aplicação em vários setores, Hounsell, Tori, Kirner (2018, p.64) apontam desvantagens e limitações ao usar a RA:

> As principais desvantagens da RA estão associadas com a forma com que se promove a integração entre os dispositivos com o processamento e a tarefa em questão. Ou seja, não existem soluções prontas de como abordar uma determinada área. Muita pesquisa ainda precisa ser feita para analisar as formas mais intuitivas e naturais desta integração.

Para Hounsell, Tori e Kirner (2018), o emprego da RA ainda requer investigações mais aprofundadas, pois representa uma tecnologia com considerável potencial de crescimento, inovação e exploração. Dessa forma, podemos concluir que a RA se configura como uma área de estudo e aplicação tecnológica em franca expansão, tanto do ponto de vista acadêmico quanto comercial.

2.4.2 Realidade Aumentada no ensino da matemática

Ao abordarmos a tecnologia de Realidade Aumentada na educação, buscamos por aplicações específicas e encontramos uma ampla variedade de estudos científicos que exploraram sua aplicação em contextos matemáticos. Apesar de não ser uma tecnologia nova, sua introdução nas salas de aula do Brasil é considerada inovadora, dado que seu uso neste contexto ainda está em estágio inicial. A RA apresenta diversas vantagens que a tornam atrativa para ser adotada no ambiente educacional. De acordo com Roberto (2012 apud FIALHO, 2019), seu uso proporciona uma melhor compreensão dos conteúdos e estimula a interatividade entre os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

Mendonça e Mustaro (2011, p. 10, grifo nosso) destacam a Realidade Aumentada (RA) como um elemento motivador, capaz de despertar a atenção dos estudantes. Eles também mencionam as vantagens do seu uso, conforme indicado por alguns autores, no contexto educacional:

> · **Integração** de recursos sensoriais para uma experiência de aprendizagem mais realista e atrativa [Sewell et al. 2007];
> · **Visualização de estruturas complexas** (para a compreensão de conceitos abstratos) [Perdomo et al. 2005];
> · **Eliminação do risco/perigo** existente em mundos reais [Stansfield et al. 2000];
> · Aquisição de um ponto de vista distinto [Yee e Bailenson 2006];
> · **Riqueza de possibilidades** (o que inclui interações que podem não ser possíveis no mundo real, como, por exemplo, explorar o mundo em que viveram os dinossauros);

> · **Redução de custos** (em muitos casos um ambiente real exige um investimento maior do que o imersivo);
> · **Aceleração do processo de aprendizagem**;
> · **Desenvolvimento de habilidades** relacionadas aos conhecimentos apresentados no ambiente;
>
> · **Ampliação da retenção dos elementos estudados** (devido ao realismo do ambiente)

Para Mendonça e Mustaro (2011), o uso da RA na educação permite que os estudantes testem suas hipóteses durante o processo de aprendizagem, podendo ser considerada uma estratégia para que não ocorra uma defasagem curricular pela ausência de experimentação laboratorial presencial. Corroborando, Diegmann *et al (*2015 apud FIALHO, 2018, p. 123, grifo do autor) apontam que o uso da RA, na educação, pode proporcionar:

> **Aumento da motivação**: detectado em usuários que se mostram mais ansiosos, interessados e envolvidos com a nova tecnologia experimentada, bem como o ensinar e aprender conteúdos em comparação com métodos tradicionais. […]
> **Aumento da atenção**: Esse benefício foi detectado pelos professores em tarefas com aplicativos da RA em smartfones cujo propósito era aprender algo sobre os colegas da classe. […].
> **Aumento da concentração**: os pesquisadores verificaram que "a integração física em atividades com RA induziu uma concentração mais profunda […]".
>
> **Maior satisfação**: os usuários sentiram maior satisfação em vivenciar o processo de aprendizagem com atividades RA, resolvendo problemas dentro de uma biblioteca com aplicativos da RA do que com auxílio do bibliotecário. […].

Para Fialho, o uso da RA pode potencializar o resultado da aprendizagem ao permitir que o aluno manipule o objeto de aprendizagem, algo que não acontece quando o objeto é apresentado em lousa ou livros. De acordo com Tori *et al* (2018, p. 515), a RA pode "[...] transformar os ambientes educacionais em uma experiência mais eficaz, engajadora, produtiva, prazerosa e interativa para os alunos". Ainda segundo os autores, uma das características mais importante da RA, do ponto de vista pedagógico, é fornecer "[...] um espaço essencialmente centrado no aluno e flexível para proporcionar oportunidades de aprendizagem". Para Tori *et al* (2018), as atividades práticas, realizadas por meio de plataformas de RV ou RA, podem promover o desenvolvimento de habilidades, atitudes e conhecimentos em diversas áreas, gerando um aprendizado significativo e eficaz.

De acordo com Macedo, Silva e Buriol (2016, p. 3), o uso de tecnologia como a RA facilita a compreensão dos conceitos estudados ao possibilitar a interação direta[13] com seus objetos

[13]No artigo de Macedo, Silva e Buriol (2016), a *interação direta* é referenciada pelo uso do aplicativo de RA para visualizar os objetos, ou seja, é o acesso rápido e virtual do objeto através do aplicativo.

representativos, já que o aluno passa a ter mais controle sobre o que está sendo ensinado. De acordo com os autores, “[...] as aplicações de RA possuem a capacidade de usar objetos físicos para manipular as informações virtuais de uma maneira intuitiva […]”. No mesmo sentido, Silva e Vasconcelos (2019, p. 53) delegam que a RA “[…] pode trazer benefícios para a aprendizagem de conteúdos de matemática, especificamente no campo da geometria espacial, visto que essa tecnologia traz em suas características a visualização de objetos tridimensionais […]” e acrescentam que o uso da RA promove um melhor entendimento dos conteúdos estudados. Ainda discorrendo sobre as vantagens do uso da RA para o ensino e aprendizagem, Ribeiro, Guterres e Silveira (2020, p. 45) advogam que:

> [...] a realidade aumentada é uma estratégia que pode propiciar aos alunos o estabelecimento de relações, através de meios digitais pela aproximação da matemática com elementos do cotidiano, explorando todos os seus aspectos práticos pois a RA permite que o usuário manipule objetos virtuais tridimensionais e os introduzam em ambientes reais, gerando experiências significativas aos alunos.

As experiências significativas são descritas por Moran (2017) como aprendizagens que estimulam interesse, motivação, facilitam o processo de aprendizagem e provocam sentimento de prazer no que está sendo estudado e na forma de fazê-lo.

Ao falar da RA na educação, Tori et al (2018) apontam as vantagens em se utilizar sistemas interativos:

> - Ajuda a diminuir a probabilidade de os alunos abandonarem os estudos, pois busca criar novas formas de interação no aprendizado e gera um estímulo para a participação desses alunos nas atividades escolares.
> - Possibilidade de explorar as relações entre tecnologia, aprendizagem, cultura e comunidade dando um enfoque novo à educação, tendo como base uma metodologia participativa que combina fundamentos do construcionismo[14] (Papert, 2008) [15]e do interacionismo[16] (Vygotsky, 1980)[17].
> - Promover o desenvolvimento integrado de habilidades, atitudes e conhecimentos, referentes às diversas áreas gerando um aprendizado significativo e eficaz.

[14]Proposto por Seymour Papert, é ao mesmo tempo uma teoria de aprendizagem baseada nos princípios do Construtivismo de Jean Piaget (conhecimento é adquirido à medida que se pensa e age sobre o objeto maturação + experiência + transmissão social + equilibração) e uma estratégia de trabalho onde cada um se torna responsável por sua aprendizagem à medida que experimenta e constrói algo (Papert, 2008, *apud* Tori *et al*, 2018, p.511).

[15]PAPERT, S. A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática. Revista entreideias: educação, cultura e sociedade, v. 2, n. 12, 2008.

[16] O sócio-interacionismo, proposto por Vygotsky (1980), tem como princípio de que o aprendizado se dá pela mediação, ou seja, pela troca de informações entre as pessoas. (Tori *et al*, 2018, p. 511).

[17] VYGOTSKY, L. S. Mind in society: The development of higher psychological processes. [s.l.] Harvard University Press, 1980.

Segundo Lopes et al (2019, p. 28), a interatividade proporcionada pela RA “acarreta aprimoramento do aprendizado, além de permitir mais engajamento dos estudantes, principalmente quando envolvidos na criação de seus próprios projetos utilizando RA”. Lopes et al (2019) apresentaram em seu artigo uma revisão sistemática para analisar o uso da RA na educação, após analisar os 44 trabalhos os autores apontam que:

> Um dos principais impulsionadores para a utilização da RA na educação é que a maioria dos alunos envolvidos nas pesquisas apresentou um aumento na motivação e no desempenho acadêmico em estudos que promoveram um comparativo com alunos que não utilizaram a tecnologia. (LOPES et al, 2019, p. 28).

Quanto aos limitadores do uso desse recurso, Lopes et al (2019) apontam a dificuldade apresentada pelos professores por não dominarem o uso dos softwares e dos equipamentos para o desenvolvimento das aplicações. Portanto, Tori et al (2018) fazem um alerta para que a RA não seja apenas uma motivação predominada pela novidade, curiosidade ou inovação dos recursos tecnológicos para o aluno.

> Para que uma atividade pedagógica baseada em RV ou RA seja eficaz e possa ser aplicada com êxito, mesmo passada a curiosidade inicial, é importante que o emprego daquela mídia faça sentido, não seja gratuito, e que o conteúdo seja contextualizado. (TORI *et al* 2018, p. 517).

O maior desafio oriundo das tecnologias aplicadas na educação, segundo Tori *et al* (2018), é promover o aprendizado cognitivo e habilidades, por meios de dinâmicas aplicadas que engajem e prendam a atenção do aluno, sendo este um dos desafios do docente, tendo em vista a gama de atrativos possibilitados pelos recursos midiáticos[18].

2.4.3 O App Geometria RA

O app Geometria RA (GeometriAR) foi desenvolvido por Allisson Pierre e pode ser baixado no Google Play, disponível no site[19]. Em dispositivos móveis, o aplicativo pode ser baixado pela Play Store.

O app Geometria RA tem como objetivo auxiliar no ensino e aprendizagem de sólidos geométricos, tais como: prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas. Possui recursos para mostrar os sólidos em 3D, animações de formação do sólido a partir de sua planificação ou sua

---

[18]Como exemplos de recursos midiáticos, podemos citar a televisão, o rádio, a internet, o computador etc.

[19]https://play.google.com/store/apps/details?id=com.AllMake.GeometriaRA&hl=pt_BR&gl=US.

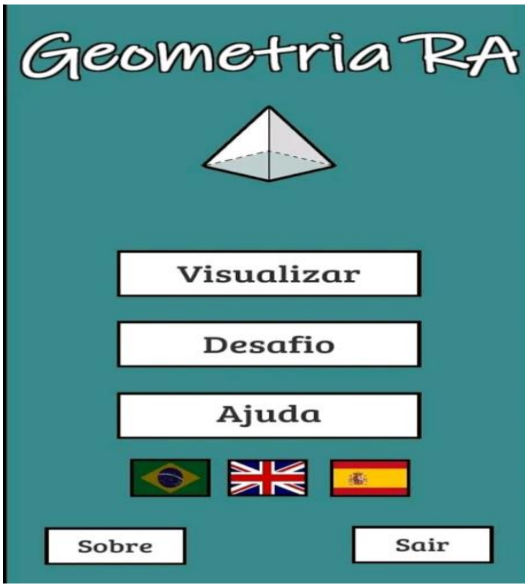
revolução e as fórmulas matemáticas para se calcular área e volume de cada sólido. Faz uso da RA baseada em marcadores[20]. As imagens dos marcadores podem ser baixadas através do link no menu de ajuda dentro do aplicativo e para visualizar os sólidos geométricos, com o app aberto, basta apenas apontar a câmera do celular para a imagem do marcador.

O app tem um teste na versão gratuita, na qual podem ser visualizados oito sólidos:

- Prisma Triangular
- Prisma Quadrangular (Cubo e Paralelepípedo)
- Pirâmide triangular (Tetraedro)
- Pirâmide Quadrangular
- Cilindro
- Cone
- Esfera.

A versão PRO (paga), com um valor monetário apenas simbólico[21], inclui mais dois sólidos, o prisma pentagonal regular e a pirâmide pentagonal regular. O app possui tradução para três idiomas (português, inglês e espanhol) e uma seção de perguntas apresentadas no ícone desafio. A última atualização do app foi em 3 de agosto de 2020.

Figura 11 – Tela inicial do app Geometria RA.



Fonte: Print screen da tela do aplicativo Geometria RA.

[20] Marcadores são cartões que possuem uma imagem que pode ser uma figura ou um símbolo.
[21] Quando foi realizada a coleta de dados, em 2022, o autor do aplicativo Geometria RA cobrava um valor simbólico de R$6,00 para liberar a versão Pro. Atualmente essa versão é encontrada gratuita.

Como mostra a figura, ao abrir o aplicativo, o usuário tem três janelas: a primeira janela permite visualizar os sólidos, fórmulas para cálculo de área, volume e planificação; na segunda, o usuário tem um desafio com questões de múltipla escolha; e a terceira janela apresenta informações de uso do app e um link para baixar os marcadores para visualizar os sólidos.
O aplicativo será usado no ensino da geometria espacial, tema da próxima secção.

2.5 O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Para retratarmos o ensino de geometria no Ensino Básico, recorremos à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018. O documento faz apontamentos que fundamentam a geometria como um conteúdo importante e capaz de desenvolver a capacidade de questionar e analisar, de forma racional e inteligente, o senso criativo e inovador dos alunos; também retrata o ensino de geometria em cada etapa de ensino: Ensino Fundamental e Ensino Médio.
Segundo Fainguelernt (1995, p. 45 *apud* MURARI, 2005. p. 199),

> A geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para o processo de abstração e generalização.
>
> A geometria também ativa as estruturas mentais possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para as das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas áreas da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer, e aprender a pensar.

O autor ressalta a importância da interação do aluno com o objeto estudado buscando o desenvolvimento intelectual do discente. No entanto, levar o aluno a desenvolver as habilidades e competências no campo geométrico não é uma tarefa fácil. Consta na BNCC (BRASIL, 2018, p. 271), que o ensino e aprendizagem de “[…] geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”. Um dos problemas no ensino e aprendizagem de geometria é oriundo do não entendimento desses conceitos. Nesse sentido, Murari (2005) nos diz:

> A Geometria, parte integrante do saber matemático, exige linguagem e procedimentos apropriados para que as suas relações conceituais e sua especificidade quanto às representações simbólicas sejam entendidas. […]. Ela é um ramo da matemática que possui um campo muito fecundo e a maneira como for estudada refletirá no

> desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização do aluno (MURARI, 2005, p. 198).

O autor reforça a importância de se trabalhar a geometria de forma que os conceitos e representações simbólicas sejam entendidos, assimilados e aplicados pelos alunos. De acordo com Brasil (2018, p. 271), quando os conceitos, que caracterizam a geometria plana e a geometria espacial, são assimilados pelos estudantes, eles desenvolvem o pensamento geométrico; "[…] esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes".

Ainda segundo a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 271, grifo nosso), é importante "[…] considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: *as* ***transformações geométricas***, sobretudo as simetrias". Nesse contexto, ressalta-se a importância das ideias matemáticas fundamentais, como a ***construção, representação e interdependência***, no ensino de geometria.

Como representado na BNCC, o estudo da geometria plana e espacial começa no Ensino Fundamental – Anos Iniciais; é nesta etapa que os alunos têm os primeiros contatos com os objetos abstratos da geometria, materializados por registros de representações:

> […] espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartfones), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 272).

A consolidação e ampliação dos estudos geométricos dos Anos Iniciais têm seu contínuo no Ensino Fundamental (EF) – Anos Finais; como descrito pela BNCC (BRASIL, 2018), nesta etapa devem ser realizadas tarefas que analisam e produzem transformações, ampliações e reduções de figuras geométricas planas, identificação de elementos variantes e invariantes de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Assim, nesta etapa, as atividades devem contribuir para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática: o raciocínio hipotético-dedutivo.

Por serem duas etapas importantes para a consolidação dos conceitos básicos da geometria para os estudantes do EF, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 272) mensura que sua abordagem no contexto escolar "[…] não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras". Para desenvolver habilidades requeridas nessas etapas, é de suma importância levar em consideração as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos; criar situações nas quais eles possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos; diversificar atividades possibilitando outros métodos de resolução etc., pois:

> […] a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2018, p. 276).

Assim, espera-se que o aluno alcance o Ensino Médio (EM) com conhecimentos preliminares básicos de geometria; com condições e capacidade para aprofundar esses conhecimentos ou relacioná-los a outros contextos.

Na BNCC de 2018, a área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para o contínuo da aprendizagem, o documento sugere que os estudantes desenvolvem habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas e que desenvolvam um modo próprio de: raciocinar, representar, comunicar e argumentar. Para o desenvolvimento de competências relacionadas a esses modos de pensar. A BNCC (BRASIL, 2018, p. 529-530, grifos do autor) destaca que ao:

> - **Raciocinar**: os estudantes devem ser capazes de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemático;
> - **Representar:** os estudantes devem ser capazes de elaborar registros para evocar um objeto matemático abstratos;
> - **Comunicar**: os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.
> - **Argumentar**: os estudantes devem ser capazes de formular e testar conjecturas, com a apresentação de justificativas.

Para o ensino de geometria espacial, o Currículo Básico da Escola Estadual (2010, p. 116) apresenta como competências/habilidades: “Visualizar a analisar diversas formas geométricas; calcular comprimento, área e volumes e saber aplicar o conhecimento no cotidiano; diante de formas geométricas planas e espaciais, reais ou imaginárias, conhecer suas propriedades, relacionar seus elementos”.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 545) cita as habilidades específicas, que devem ser desenvolvidas pelos sujeitos ao trabalhar a geometria no EM; entre elas encontram-se:

> (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
>
> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

O documento destaca a importância da geometria espacial para o desenvolvimento do pensamento geométrico, da visualização, da argumentação e da resolução de problemas. No entanto, mediar o conhecimento com abordagem para o desenvolvimento dessas habilidades e competências requer, por vezes, a utilização de metodologias diferenciadas que levam o aluno a utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e fazer a conversão entre elas. Nesse sentido, as orientações delegadas no Currículo do Espírito Santo (2022, p. 2) nos orientam que “[…] é essencial, que os estudantes tenham no Ensino Médio, a possibilidade de construírem uma visão mais integrada da Matemática, estabelecendo conexões internas à área e com outras áreas de conhecimento e de sua aplicação à realidade […]”.

A geometria espacial, assim como outros conteúdos matemáticos, deve ser entendida e assimilada para que a articulação entre esses saberes, e outros, sejam potencializados. Assim, o aluno será capaz de construir argumentos concisos ao resolver os problemas matemáticos. A geometria espacial é comumente relacionada a várias formas que vivenciamos no dia a dia, facilmente podemos notá-la em diversos contextos, de modo aproximado: no formato do guarda-roupa temos um prisma de base retangular, no “copo” temos um cilindro, na casquinha de sorvete temos um cone, as caixas possuem formatos que vão de cubo a prismas de variadas bases; está presente em arquiteturas, design, engenharia, ciências naturais e em muitas outras áreas do conhecimento. Mas, comumente, os alunos apresentam dificuldades em classificar, identificar, relacionar essas formas geométricas ao ensino e aprendizagem de geometria no contexto educacional e a outros contextos da ciência.

Um fator que pode justificar essas dificuldades pode estar relacionado à visualização de figuras graficamente produzidas no papel ou reproduzidas pelo professor na lousa; pode ser que essa reprodução não seja suficiente para elucidar todas as informações que a figura requer ver. Assim, o trabalho com o registro figural, como os de dimensão bidimensionais (formas poligonais) e tridimensionais (sólidos geométricos), se torna desafiador para o professor, pois a figura plotada em uma folha omite informações, e ao aluno cabe a tarefa de identificar essas informações e, eventualmente, usá-la para resolver um problema no qual a figura está inserida. Ao calcular o volume de um sólido, por exemplo, o aluno pode apresentar dificuldades em identificar as informações apresentadas na figura geométrica, ou identificar essas informações apresentadas em um enunciado do problema, ou até mesmo de relacionar as informações do enunciado com as informações na figura geométrica.

Como aponta Murari (2005, p. 199) "[…] somos desafiados, diante das modernas propostas curriculares, a ensinar conteúdos de formas alternativas, sempre com uma postura reflexiva diante das nossas práticas". Para o autor, a chegada dos recursos tecnológicos, no ambiente escolar, é uma alternativa para diversificar a prática pedagógica. Para Murari (2005, p. 190), a criação de objetos geométricos por meio de software de geometria dinâmica permite a realização de explorações experimentais e teóricas. Isso facilita a formulação e teste de conjecturas, além de conferir dinamismo às construções por meio de recursos como arrastar, movimentar e animar.

Diante do exposto, conclui-se que a geometria desempenha um papel fundamental no ensino básico, fornecendo bases sólidas para o desenvolvimento de habilidades matemáticas, cognitivas e visuais. A geometria não é apenas uma disciplina, mas uma forma de pensar sobre o espaço e as formas que nos rodeiam, é consolidada como um aspecto significativo da matemática é sua relevância tanto como um campo de estudo em si quanto como uma ferramenta aplicável em diversas áreas. (ALMOULOUD, 2017).

2.6 OS SÓLIDOS

Neste capítulo, apresentamos o estudo dos sólidos, seus elementos, classificação, definições, áreas e volume. A abordagem desses conceitos é necessária, uma vez que são requeridos em diversas atividades matemáticas. Os sólidos são objetos tridimensionais definidos no espaço, são divididos em poliedros e não poliedros. No conjunto de todos os sólidos, abordamos, nesta pesquisa, o estudo do prisma, pirâmide e corpos redondos do tipo cilindro e cone.

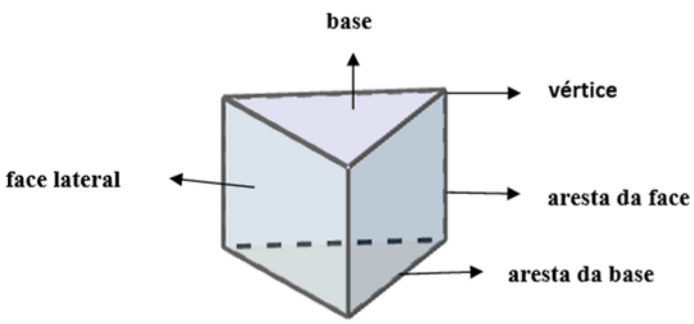
Tomamos como base de referência as obras de Costa et al. (2009)**;** Bonjorno, Junior, Sousa (2020); Dolce e Pompeo (2013) e Souza (2010) para apresentar conceitos, propriedades e fórmulas matemáticas dos principais sólidos geométricos.

Souza (2010), define poliedros como sendo "sólidos limitados por superfície planas poligonais", e cita os principais elementos que caracterizam um poliedro: faces, arestas e vértices.

- Faces são polígonos que delimitam os poliedros, sendo finitas.
- Aresta é a linha de encontro de duas faces. Cada aresta é comum somente a duas faces.
- Vértices são pontos de intersecção de três ou mais arestas.
- Base é o polígono que serve de apoio para o poliedro

A figura abaixo ilustra, de forma elucidativa, os elementos do poliedro do tipo prisma.

Figura 12 – Elementos do poliedro do tipo prisma.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os poliedros são classificados de acordo com o número de faces, como demonstrados na tabela abaixo.

Tabela 2 – Classificação do poliedro quanto ao número de faces.

Número de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
…	…
20	Icosaedro

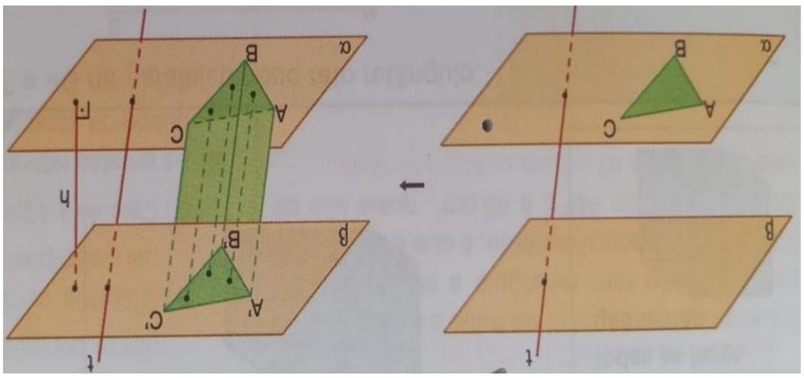
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Como apresentado na tabela, os poliedros são classificados com base no número de faces que possuem e cada um tem características únicas determinadas pelo número e tipo de suas faces. Na próxima seção, abordaremos os poliedros do tipo prisma.

2.6.1 Prisma

Para definirmos um prisma, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β, um polígono convexo contido em α e uma reta t concorrente a esses planos. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a t com uma das extremidades no polígono e a outra em β denomina-se prisma. A figura 13 mostra o prisma com seus elementos.

Figura 13 – Projeção do prisma com seus elementos.



Fonte: Souza (2010, p. 77).

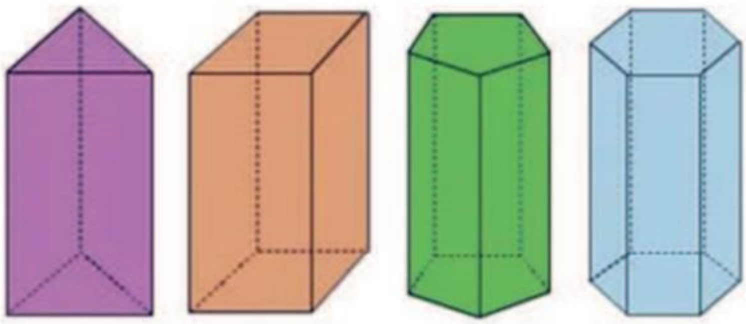
Observando a figura 13, podemos escrever os seguintes elementos de um prisma:

- As bases são regiões poligonais limitadas pelos triângulos ABC e A’B’C’

- Arestas da base: AB, AC, BC, A’B’, A’C’, B’C’.
- Arestas das faces laterais: AA’, BB’, CC’.
- As faces são regiões Poligonais limitadas pelos quadriláteros: ABB’A’, BCC’B’, ACC’A’.
- A distância entre os planos α e β, correspondem à altura (h) do prisma.

Na figura 14 abaixo, é possível observar os diferentes tipos de prismas.

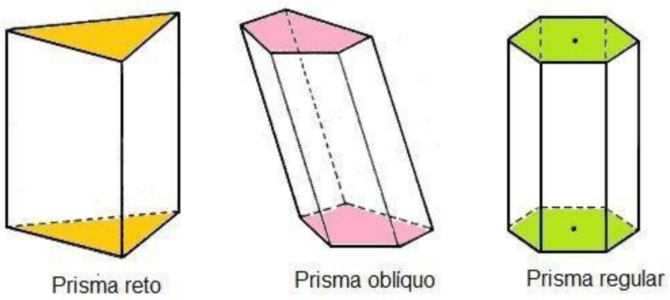
Figura 14 – Alguns exemplos de prismas.



Fonte: Dantas (2018, p.38).

Como representado na próxima figura, os prismas podem ser classificados como reto, oblíquo e regular. Em um prisma reto, as arestas são perpendiculares às bases, e as faces são retângulos; nos prismas oblíquos, as arestas são oblíquas, e a base e as faces são paralelogramos. Os prismas são ditos regulares quando sua base é formada por um polígono regular. A figura 15 mostra um exemplo de prisma reto, oblíquo e regular.

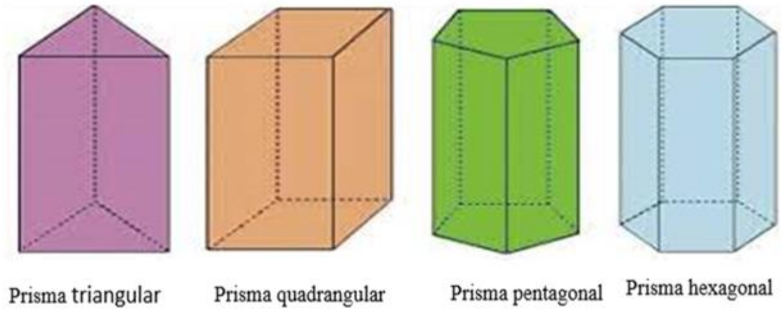
Figura 15 – Exemplo de prisma reto, oblíquo e regular.



Fonte: https://www.infoescola.com/geometria-espacial/prisma.

Os prismas são denominados de acordo com o polígono que compõe sua base. A figura 16 mostra alguns exemplos de classificação do prisma.

Figura 16 – Classificação do prisma pelo polígono da base.



Fonte: https://blogdoenem.com.br.

❖ Áreas da superfície de um prisma.

Em um prisma, consideramos:

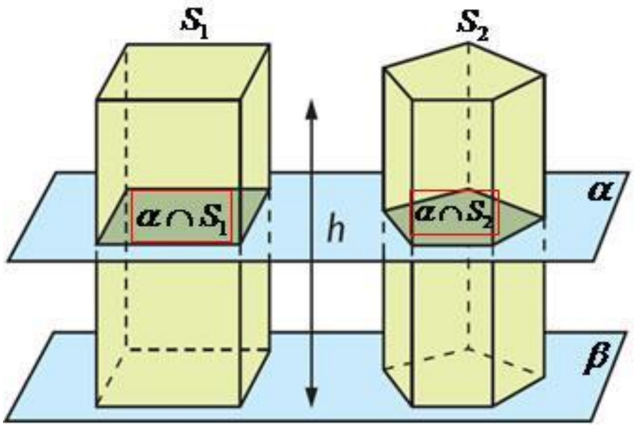
- Superfície lateral: formada pelas faces laterais;
- Área lateral (A_l): é a área da superfície lateral;
- Superfície total (A_t): é formado pelas faces laterais e pelas bases;
- Área total (A_t): é a área total da superfície.

Assim, podemos dizer que a área total de um prisma é dada pela soma da área lateral com duas vezes a área da base ($\mathbf{A_t = A_l + 2.\ A_b}$).

❖ Volume de um prisma

Vamos começar o estudo de volume de um prisma, tomando como verdadeiro o *Princípio de Cavalieri*[22] para a definição de volume de um prisma qualquer.

Figura 17 – Paralelepípedo retângulo S_1 e prisma pentagonal S_2.



Fonte: Dantas (2018, p.38).

[22] O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) (BONJORNO, JÚNIOR, SOUSA, 2020).

Supondo que um plano α paralelo ao plano β seccione os sólidos S_1 e S_2 nas regiões $\alpha \cap S_1$ e $\alpha \cap S_2$ e de tal forma que $A'_{1(\alpha \cap S1)} = A'_{2(\alpha \cap S2)}$ tenham a mesma área, ou seja, $A'_1 = A'_2$. Sendo A'_1 e A'_2 congruentes à área da base de S_1 e S_2, respectivamente. Então, pelo princípio de cavaleire, o volume do paralelepípedo é equivalente ao volume do prisma pentagonal. Ou seja:

$$\textbf{Área } (\alpha \cap S_1) = \textbf{Área } (\alpha \cap S_2) = A_b.$$

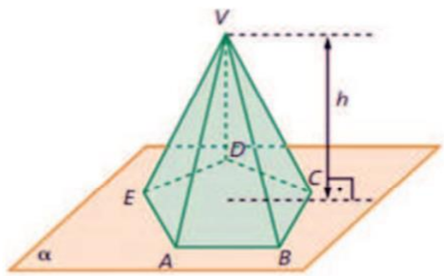
Se cada plano paralelo a β que seccionar os dois sólidos formando figuras de mesma área, então temos S_1 tem o mesmo volume de S_2, ou seja, $V(s_1) = V(s_2)$

Assim, podemos dizer que o volume do prisma é dado por: $\mathbf{V = A_b . h}$

2.6.2 Pirâmides

Para definirmos uma pirâmide, consideramos um plano α, um polígono convexo no plano α e um ponto V fora do plano. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra em um ponto do polígono é denominada pirâmide.

Figura 18 – Elementos de uma pirâmide.



Fonte: Dantas (2018, p.32).

Dada a figura da pirâmide, podemos definir os seguintes elementos:

- A área da base e a região poligonal ABCDE.
- As arestas da base AB, BC, CD, DE, EA.
- As arestas AV, BV, CV, DV, EV, são arestas das faces.
- Os triângulos ΔABV, Δ BCV, ΔCDV, ΔDEV e ΔEAV, são as faces laterais.
- O ponto V é o vértice da pirâmide.
- A altura h é a distância do plano α ao vértice da pirâmide.

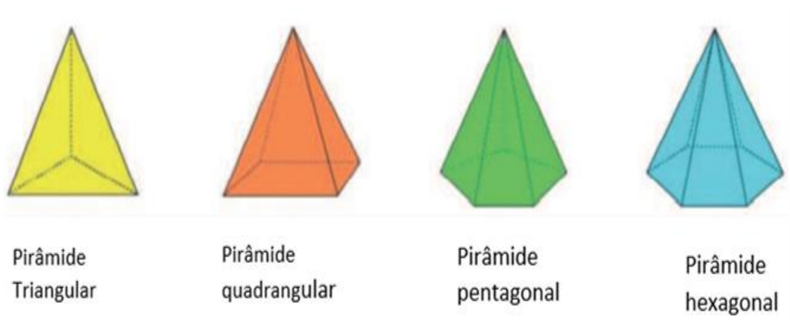
Conforme exemplificado na figura 19, a pirâmide pode ser classifica em reta, oblíqua e regular. A pirâmide é reta quando sua altura é perpendicular a base. Na pirâmide obliqua a altura não coincide com o centro do polígono da base.

Figura 19 – Exemplo de pirâmide reta, oblíqua e regular.

Fonte: https://www.infoescola.com/geometria-espacial/piramide. Acesso em 10/08/2022

A pirâmide também é classificada quanto à natureza do polígono da base. A figura 20 mostra exemplos de classificação da pirâmide pelo polígono da base.

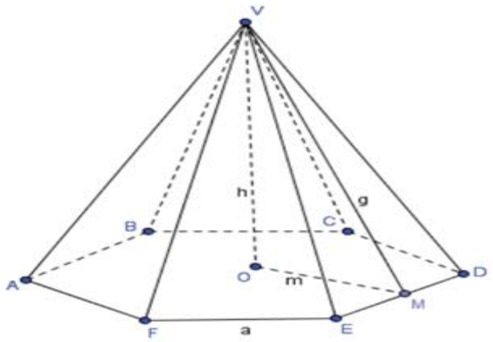
Figura 20 – Classificação da pirâmide pelo polígono da base.



Fonte: https://portal.educacao.go.gov.br/. Acesso em 10/08/2022.

Outros elementos importantes podem ser observados quando estudamos uma pirâmide regular. Dentre eles, temos a apótema da base e da face que são elementos importantes para determinar a área e o volume de algumas pirâmides.

Figura 21 – Pirâmide hexagonal regular com altura, apótema da base e da face.



Fonte: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br. Acesso: 10/08/2022.

Na figura 21, VO é a altura (h), VM é a apótema da face (g) e corresponde à altura do triângulo que formam as faces laterais e OM é a apótema da base (m).
Relação: $(g)^2 = (h)^2 + (m)^2$.

❖ *Área da superfície da pirâmide*

Assim como nos prismas, para a pirâmide, nós temos:

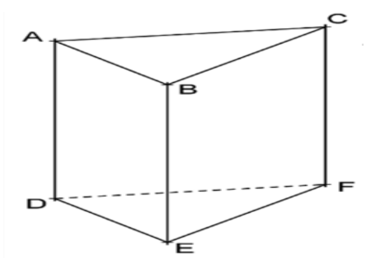
- Área da base (A_b): é a área delimitada pelo polígono da base.
- Área lateral (A_l): é a área determinada pela soma das áreas dos triângulos que formam as faces laterais.
- Área total (A_t): área da base somada com a área lateral.
  Portanto, a área total de uma pirâmide é dada por: A_t (área total) = A_b. (área da base) + A_l (área lateral).

$$\mathbf{A_t = A_b + A_l}$$

❖ *Volume de uma pirâmide*

Considere inicialmente um prisma triangular ABC-DEF, como mostra a figura 22.

Figura 22 – Prisma de base triangular

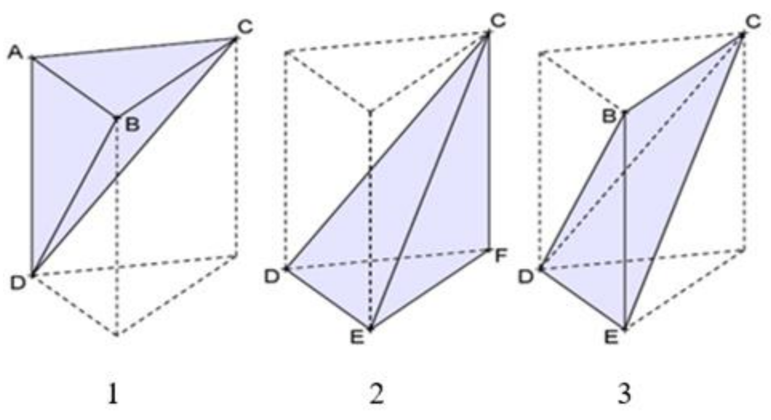


Fonte: Costa et al (2012, p.160).

Ao decompormos esse prisma em três pirâmides triangulares, temos:

- Considerando o triângulo ΔABC como base e D o vértice, obtendo a pirâmide ABCD;
- Considerando o ΔDEF como base da segunda pirâmide, sendo C o vértice.

Figura 23 – Decomposição do prisma em três pirâmides.



Fonte: Costa et al (2012, p. 160**).**

Se a pirâmide 1 têm em comum com a pirâmide 2 a aresta DC. A base ABC é congruente a base DEF, pela definição de prisma, e ainda AD = CF = h.

Logo, as duas pirâmides têm a mesma base e mesma altura, portanto, têm o mesmo volume.

- Considere a pirâmide ABCD, de vértice C;
- Considere a pirâmide DEBC, de vértice C

A pirâmide 1 e a pirâmide 3 têm bases congruentes (ΔABD = ΔBED por LLL) e mesma altura. Logo possuem o mesmo volume.

Então, o prisma ABCDEF ficou dividido em três pirâmides de volumes iguais. Assim, o volume de cada pirâmide é igual a um terço do volume do prisma.

Portanto o volume da pirâmide é dado por: $\mathbf{V_P} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$

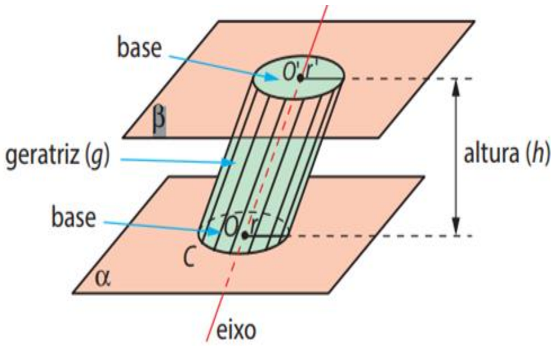
2.6.3 Corpos redondos

Corpos redondos são sólidos geométricos que têm como característica uma superfície curva. São agrupados em cilindro, cone e esfera.

❖ Cilindro

Para definir o cilindro, tomamos dois planos α e β, paralelos e distintos, e um círculo de raio C de raio r com centro em O. Como demonstrado na figura 24.

Figura 24 – Elementos do cilindro.



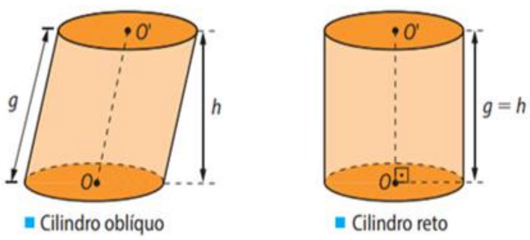
Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

Os elementos do cilindro são:

- Bases: são os círculos de raio r e centros O e O’ situados nos planos paralelos α e β, respectivamente.
- Raio da base (r): é o raio do círculo C.
- Altura (h): é a distância entre os planos paralelos α e β.
- Eixo: é a reta OO’ que contém os centros das bases.
- Geratriz (g): são os segmentos de reta paralelos ao eixo OO’ e cujas extremidades são pontos inscrito nas circunferências das bases.

A classificação do cilindro depende da inclinação da geratriz. Assim, o cilindro pode ser classificado como oblíquo ou reto, como mostra a figura abaixo.

Figura 25 – Exemplo de cilindro oblíquo e reto.

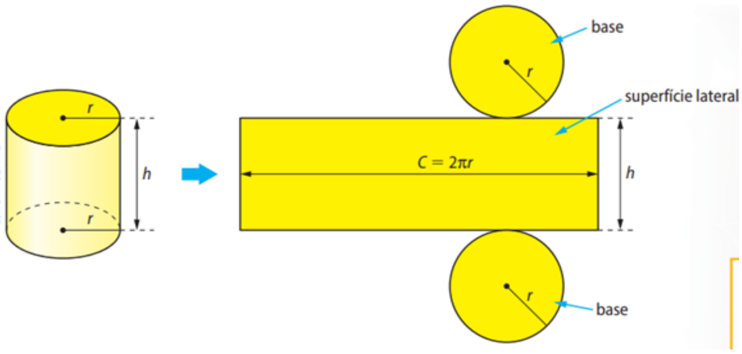


Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

❖ *Área da superfície do cilindro reto*

A área da superfície total de um cilindro é determinada pela soma da área da base mais a área lateral. Na figura 26 temos a ilustração da planificação do cilindro.

Figura 26 – Planificação do cilindro.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

- Área da base (A_b): é a área delimitada pelo círculo que forma a base.
  $\mathbf{A_b = \pi.r^2}$

- Área lateral (A_l): é a área delimitada pela superfície lateral.
  $\mathbf{A_l = 2.\pi.r.h}$

Portanto, a área total de um cilindro é dada por:

A_t (área total) = 2(Área da base (A_b)) + Área lateral (A_l)

$\mathbf{A_t = 2.A_b + A_l}$

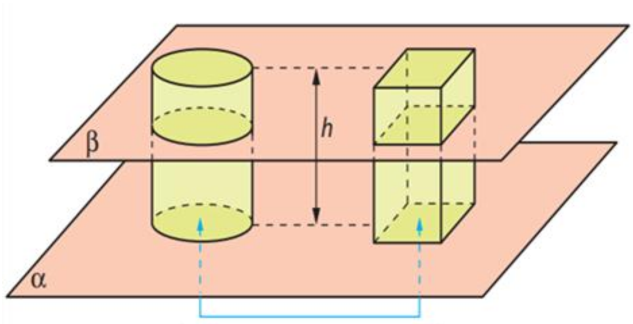
$\mathbf{A_t = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h}$

$\mathbf{A_t = 2.\pi.r.(h + r)}$

❖ *Volume de um cilindro*

Para determinar o volume de um cilindro (V_c), recorremos novamente ao Princípio de Cavalieri. Tomemos dois planos α e β paralelos, um cilindro e um prisma inscritos no plano α. Se o cilindro e o prisma têm a mesma área da base e a mesma altura e forem seccionados por um plano β, paralelo ao plano α, de modo que as secções formem áreas congruentes da base, como mostra a figura 27.

Figura 27 – Princípio de Cavalieri e a fórmula do volume do cilindro.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

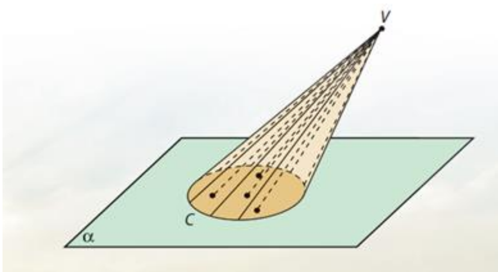
$\mathbf{V_c = V_p}$

Sendo o volume do prisma $\mathbf{V_p = A_b.h}$, portanto o volume do cilindro $\mathbf{V_c = A_b.h}$, como a área da base do cilindro é dada por $\mathbf{A_b = \pi.r^2}$, o volume do cilindro é: $\mathbf{Vc = \pi r^2.h}$

- *Cone*

Para a definição de um cone, tomemos um plano α, um círculo contido no plano α e um ponto V que não pertence o plano α. Chamamos de cone circular, a região limitada pela reunião dos segmentos que parte do vértice à extremidade círculo no plano α.

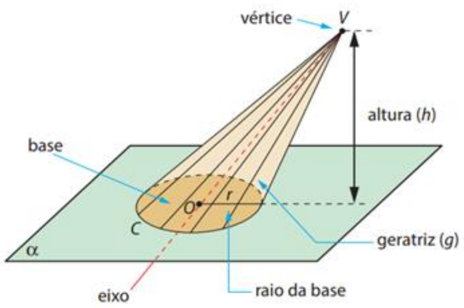
Figura 28 – Representação do cone.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020

Considerando a figura 29 abaixo, destacamos os seguintes elementos:

Figura 29 – Unidades elementares do cone.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020

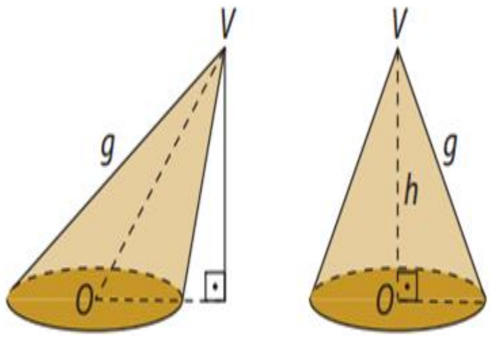
Conforme apresentado na figura, temos:

- Altura (h): é a distância do plano α até o vértice.
- Base: é a região demitida pelo círculo contido no plano α.
- Geratriz (g): é qualquer segmento que parte do vértice V, à extremidade do círculo, no plano α.
- Eixo: é a reta que passa por OV.
- Raio (r) da base: é o segmento que parte do centro do círculo à sua extremidade.
- Vértice: é o ponto V.

Dependendo da inclinação do eixo do cone em relação ao plano da base, o cone pode ser classificado como oblíquo ou reto.

Segundo os autores, "[…] um cone é oblíquo quando seu eixo é oblíquo ao plano da base e é reto quando seu eixo é perpendicular ao plano da base" (BONJORNO, JÚNIOR, SOUZA (2020, p. 119). Na figura 30 temos a ilustração da classificação do cone.

Figura 30 – Classificação do cone quanto a inclinação do eixo.



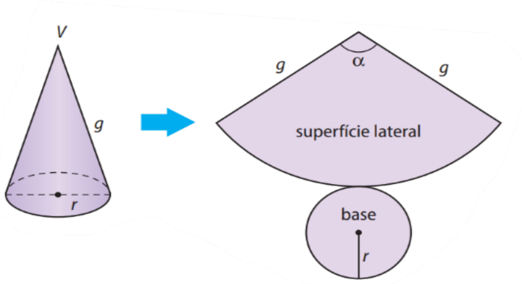
Cone oblíquo Cone reto

Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

❖ *Área da superfície total do cone reto*

A área da superfície total (A_t) de um cone circular reto é determinada pela soma da área da base (A_b), delimitada pela área do círculo, com a área lateral (A_l), delimitada pelo setor circular.

Figura 31 – Planificação do cone reto.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

Como a área lateral (A_l) é um setor circular de raio g, sua área é proporcional ao ângulo central. Como o ângulo central é proporcional ao arco, temos: $\frac{Asetor}{\pi.r^2} = \frac{2\pi g}{2.\pi.r}$

Portanto, $\mathbf{A_{setor}} = \pi.r.g$.

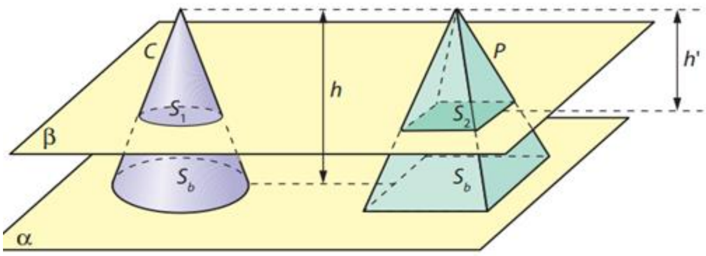
Sendo a área da base (A_b) a área delimitada por um círculo, temos: $\mathbf{A_b} = \pi.r^2$.

Assim, a área total é dada por: $\mathbf{A_t = A_l + A_b}$. $\mathbf{A_t} = (\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2)$

❖ *Volume do cone reto*

Dado um plano α e um plano β paralelo ao plano α, um cone e uma pirâmide de altura h, com áreas s_b contidas no plano α. Como mostra a figura 31.

Figura 32 – Volume do cone pelo princípio de Cavalieri.



Fonte: Bonjorno, Júnior, Souza, 2020.

Seccionando a pirâmide e o cone por um plano β, paralelo ao plano α, tal que a altura h' seja a altura tal que, a área S_1 e S_2 estejam contidas no plano β.

Nas pirâmides, vale a igualdade $\frac{s_2}{s_b} = (\frac{h'}{h})^2$, sendo a relação válida para o cone, temos**:**

$\boldsymbol{\frac{s_1}{s_b} = (\frac{h'}{h})^2}$.

Pelo princípio de Cavalieri, temos: $A_{pirâmide} = A_{cone} \cdot \frac{área\ da\ base\ .\ altura}{3}$.

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot s_b \cdot h \rightarrow V_c = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Cada sólido geométrico tem suas propriedades específicas, além disso, a fórmula do volume e da área da superfície variam para cada tipo de sólido, proporcionando diferentes maneiras de calcular essas medidas. Entender os sólidos geométricos é fundamental em geometria, pois sua aplicação transcende ao ensino escolar, sendo essenciais em outros campos da ciência como por exemplo a arquitetura, engenharia, ciências naturais, contribuindo para a compreensão e modelagem de fenômenos físicos e estruturais do mundo real.

Após o detalhamento do estudo dos sólidos quanto aos elementos, classificação, áreas e volumes, abordamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, segundo Duval.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A matemática é repleta de sinais, figuras, letras, símbolos etc., que estão presentes em atividades a serem usados por alunos ao resolver as atividades matemáticas. A identificação, realizada pelo aluno, para dar uma resposta coerente a um problema matemático, requer a coordenação dos registros de representação semiótica, ou seja, requer que se tenha o reconhecimento do objeto matemático, de suas representações e seu significado dentro do contexto matemático em que está inserido. Um dos pontos observados ao estudar os conteúdos matemáticos é a dificuldade apresentada pelos alunos ao realizar um tratamento ou uma conversão em registro de representação semiótica.

Como aponta Duval[23] (2011), as dificuldades apresentadas pelos alunos, ao realizar atividades matemáticas, estão relacionadas: à resolução de problemas, forma de raciocinar, visualização geométrica e gráfica, falta de transferência do que foi aprendido em novas situações de aprendizagem, assim como a aplicação do conhecimento para a realidade. Como argumenta Duval (2018), essas dificuldades e incompreensões são apresentadas por todos os níveis de ensino ao se resolver problemas, atividade considerada por excelência na aquisição e utilização de conhecimentos matemáticos.

Uma das possibilidades de entender e analisar o pensar inerente à matemática, que é radicalmente diferente de outros domínios das ciências, é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Duval. A TRRS pode ser usada por professores e pesquisadores em Educação Matemática como um suporte que permite analisar o tratamento e a mobilização dos registros na resolução de atividades matemáticas realizadas pelo aluno, assim como as produções dos professores. Duval (2018, p. 2) refere-se a TRRS como "[…] um instrumento que foi elaborado para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática, quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise…) tratados".

[23]Raymond Duval – "Filósofo e psicólogo, desenvolveu estudos em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França (1970-1999). Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Côte d'Opale, França. Autor de várias pesquisas, em sua extensa produção, Duval trata principalmente do funcionamento cognitivo, implicado sobretudo na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem". (MACHADO, 2017)

Os fundamentos que embasam a teoria de Duval se fundamentam nos três modelos de análise de signos[24], considerando a extensão de contribuições e limites de cada um: o de Peirce, elaborado entre os anos 1890 e 1910, desenvolvido nos Estados Unidos; o de Saussure, que teve início em 1916, na Suíça; e os trabalhos de Frege, de 1892 e 1894, na Alemanha.

Os três problemas semióticos norteadores da TRRS são expostos por Duval:

- Peirce: "Como analisar a variedade dos tipos de representações no processo de interpretação de seu sentido?";
- Saussure: "O que constitui uma língua como um sistema comum de sentido, apesar das mudanças e variações resultantes de suas múltiplas utilizações?"
- Frege: "Como explicar o progresso rigoroso e não tautológico do raciocínio matemático?";

Peirce focou sua análise na variedade de tipos de representações no processo de interpretação de sentido; Saussure analisou a estrutura linguística e a relação entre signo e significado, buscando entender como as línguas funcionam como sistemas de comunicação estáveis e, Frege "concentrou-se em resolver o dilema entre a independência que a matemática tem de toda experiência e a experiência sensível necessária para chegar a resultados generalizados (MORAN, 2015, p. 22).

Durval (2011), considerou os três modelos propostos inadequados para responder os propósitos de uma análise da complexidade das aprendizagens matemáticas e reformulou as questões diretrizes que levaram a esses três modelos, assim:

- A questão de Saussure: "(Q3) Quais processos de discriminação permitem reconhecer as unidades de sentido matematicamente pertinentes em uma expressão ou em uma representação semiótica?";
- A questão de Peirce: "(Q4) Em função de quais critérios podemos classificar todos os tipos de representação utilizáveis em matemática e no ensino da matemática?";
- A questão de Frege: "(Q5) quais são os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em matemática?".

Ainda segundo Duval (2011), a análise dos processos de compreensão e incompreensão recorrentes nas aprendizagens matemáticas deve responder a essas três questões.

---

[24]Os signos estabelecem uma relação de referência para designação do objeto, enquanto as representações proporcionam uma relação de causalidade, por estarem no lugar do objeto ou o evocarem. Ambos jamais devem ser confundidos com o próprio objeto (DUVAL, 2011, apud Moran, 2015, p. 21).

Em suma, a TRRS é uma base teórica para o ensino da matemática que visa entender como os estudantes constroem significados matemáticos utilizando conceitos/objetos abstratos ao mobilizar diferentes registros de representação, estando baseada em três princípios:

- A diversidade dos registros.
- A dependência do contexto.
- A conversão entre registros.

A teoria propõe que a aprendizagem matemática ocorre quando os alunos são capazes de transitar entre diferentes formas de representação, tais como símbolos, gráficos, palavras, tabelas etc. de forma ativa e consciente.

Por ser a TRRS um modelo teórico consolidado potencialmente útil para o ensino da matemática, a pesquisadora apoiou-se em suas vertentes para entender como os alunos realizaram os tratamentos e as conversões diante das figuras geométricas, neste caso, as figuras espaciais ao realizar a análise das atividades matemáticas proposta no questionário diagnóstico e da SD.

3.1 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Os diferentes modos de representação semiótica são fundamentais para o desenvolvimento do conhecimento, tanto em nível individual quanto científico e cultural (Duval, 2009). O autor ainda afirma que o estudo dos fenômenos relativos ao conhecimento requer a noção de representação, pois ela está no centro de toda reflexão que concerne o conhecimento. Para Duval (2009, p. 16),

> […] o progresso do conhecimento vem acompanhado sempre de criação e de desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem mais ou menos com o primeiro dentre eles, aquele da língua natural. Assim a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações.

A noção de representação foi introduzida, no que Duval chamou de “três retomadas”, ligadas ao conhecimento cognitivo: a primeira como representação mental, a segunda como representação interna ou computacional e a terceira como representação semiótica.

- As representações **mentais** é todo o conjunto de imagens e conceitos que um indivíduo pode ter sobre um objeto, situação e sobre aquilo que lhe é associado, ou seja, são todas as representações que "[…] permitem uma visão do objeto na ausência de todo o significante perceptível" (DUVAL, 2009, p. 47).

- Representações **computacionais** são todas aquelas "[…] cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem visão do objeto, e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em uma outra" (DUVAL. 2009, p. 47). São essenciais para muitas áreas da inteligência artificial, incluindo sistemas especialistas, processamento de linguagem natural, aprendizado de máquina e robótica e permite a interação homem e máquina.
- As representações **semióticas** são ao mesmo tempo consciente e externa; faz uso de signos e símbolos para representar conceitos e informações; permite a comunicação entre os indivíduos e a transferência de conhecimento; se subdividem em dois tipos de representação: analógicas e não-analógicas[25].

Corroborando, Duval (2012a, p. 269) diz que as representações semióticas "[…] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento". Ainda, segundo o autor, as representações semióticas são consideradas como o meio pelo qual exteriorizamos as representações mentais, com a finalidade de nos comunicarmos, no entanto, deve-se observar que as apresentações semióticas não são opostas às representações mentais, pois, o "[…] desenvolvimento das representações mentais efetua-se como uma interiorização das representações semióticas […]" (DUVAL, 2009, p. 17). O autor ainda reforça que "[…] as representações mentais não podem jamais ser consideradas independentes das representações semióticas".

Duval (2009), baseado nos autores (Le Ny, 1985); (Paivo, 1986); (Larkin et Simon, 1987, P.66)[26], considerou que as três representações podem ocorrer por:

- Oposição consciente/não-consciente: é a oposição entre o que aparece ao sujeito e que ele nota e o que lhe escapa ao conhecimento; as representações conscientes têm o papel

[25]As representações analógicas conservam relações de semelhança entre os elementos do modelo; as não analógicas não conservar relação com o modelo, mas permitem operações ou transformações no modelo (Duval, 2009, p.44).
[26]LE NY, J.F (1985). Comment (se) représenter les représentations, Psychologie Française, 30, 2031-238.
PAIVO, A. Mental Representacions. A dual coding Approach. Oxford: Oxford University Press.
LARKIN, J.H. et Simon, H.A. (1987). Why a Diagram is (sometimes) Worth tem Thousand words. Cognitve Science, 11, 65-99.

fundamental de significação na apreensão conceitual de determinação de objetos recorridos pelos sujeitos e “a passagem não-consciente ao consciente corresponde a um processo de objetivação[27] para o sujeito que toma consciência” (DUVAL, 2009, p. 40 – 41).

- Oposição externa/interna: é a oposição entre o que é visível e observável e o que não o é, para o sujeito; as representações externas preenchem a função de comunicação, objetivação e de tratamento.

Em matemática, enquanto disciplina a ser ensinada e aprendida, os registros de representações semióticas são usados para representar os objetos matemáticos até então existentes em nossa mente (representação mental). De fato, os objetos matemáticos são imateriais e só temos acesso a eles através de suas representações e, as representações dos objetos matemáticos só é possível através dos registros de representações semióticas, ou seja, “[…] o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas” (DUVAL, 2017, l. 266).

Para o autor, é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à aprendizagem em matemática. Portanto, o conhecimento referente a um objeto matemático, por um sujeito, está estreitamente ligado à capacidade em manipular, pelo menos dois registros diferentes que representam o objeto matemático em questão, ou seja, na aprendizagem matemática deve-se distinguir um objeto de sua representação, pois um mesmo objeto matemático pode ter representações diversas, portanto, “[…] não se deve jamais confundir um objeto e sua representação” (DUVAL, 2017, l. 266).

Duval (2011) argumenta que o conhecimento matemático não começa com representações dos conceitos ou dos objetos matemáticos, mas com suas transformações. Na verdade, a compreensão matemática não é limitada à visualização ou descrição de objetos matemáticos, mas está intrinsecamente ligada às mudanças e transformações que ocorrem nesses conceitos ao longo do processo de aprendizagem. O autor esclarece que as transformações são operações semióticas, e um registro é identificado pelas operações semióticas que lhe são inerentes (DUVAL, 2011). Corroborando, Moram (2015, p. 24) menciona que “[…] o entendimento das transformações realizadas nas representações semióticas está estreitamente ligado às funções cognitivas desempenhadas por essas transformações”.

[27]A objetivação corresponde a descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele não suponha saber, mesmo que outras pessoas o tivessem explicado. (DUVAL, 2009. 41).

Duval (2012a) argumenta que o funcionamento cognitivo do pensamento humano está intrinsecamente ligado à presença de uma variedade de registros semióticos. Assim, o autor considerou estabelecer a distinção entre semiose e noesis, definindo **‘semiose’** como apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e **‘noesis’** como a apreensão conceitual de um objeto” Duval (2012a). A esse respeito, Duval (2009, p. 17) alerta que “[…] é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose”, ou seja, não há noesis (conceito) sem semiose (representação).
Para Moran (2015), um sistema semiótico para ser considerado um registro de representação deve permitir algumas atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, neste caso: a formação, o tratamento e a conversão de representações, e, como escreve Duval (2009), para cada uma dessas três atividades, existem regras de funcionamentos.

3.2 FORMAÇÃO

A formação é a primeira atividade cognitiva realizada num registro semiótico particular, seja para exprimir uma representação mental, seja para evocar o objeto real. Como escreve Duval (2009, p. 53), “[…] a formação implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que ‘queremos’ representar.”

Ainda segundo Duval (2009), a formação de uma representação semiótica é o recurso a uma ou mais signos para caracterizar um objeto. No entanto, é importante ressaltar que a formação de representação semiótica “[...] respeita as regras próprias ao sistema empregado, de conformidade, não somente por razões de comunicabilidade, mas para tornar possível a utilização dos meios de tratamentos que oferece o sistema semiótico empregado” (DUVAL, 2009, p. 55).

As regras de conformidade definem um sistema de representação e os tipos de unidades construtivas de todas as representações possíveis num registro (Duval, 2009). Essas regras versam sobre:

- A determinação (estritamente limitada, ou, ao contrário, aberta) de unidades elementares (funcionalmente homogêneas ou heterogêneas…): símbolos, vocabulário.
- As combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior: regras de formação para um sistema formal, gramática para línguas naturais.

- As condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa: regras canônicas próprias a um gênero literário ou a um tipo de produção num registro.

Enfim, as regras de conformidade ajudam na identificação de sentido de uma determinada representação para quem a observa. Ressaltando que o conhecimento, a prática, nessas regras, não implica necessariamente, um meio suficiente para a compreensão completa da representação apresentada ou até mesmo de sua exploração. Segundo Duval (2009) a formação de representações semióticas é, com efeito, mais complexa que a aplicação de regras de conformidade. O autor esclarece que nas representações semióticas a seleção de alguns caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou até mesmo representado, se faz necessária.

3.3 TRATAMENTO NOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Um tratamento é "[…] uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema *semiótico*" (DUVAL, 2009, p. 57), ou seja, é a transformação de uma representação em outra representação dentro de um mesmo registro. Duval (2009) dividiu os tratamentos em dois tipos: os tratamentos quase-instantâneos e os tratamentos intencionais. Os tratamentos quase-instantâneos "[…] são aqueles efetuados antes mesmo de terem sido marcados e produzem as informações e as significações em que um sujeito tem imediatamente consciência" (DUVAL, 2009, p. 50-51); sua particularidade está em serem efetuados simultaneamente e de serem sensíveis ao número de elementos a interagir, além de também serem estreitamente ligados à experiência do aluno em manipular os registros. Já os tratamentos intencionais "[…] *são aqueles que tomam ao menos o tempo de um controle consciente para ser efetuado e que se apoiam exclusivamente sobre os dados provisoriamente remarcados, numa percepção furtiva do objeto"* (Duval, 2009, p. 52, grifo do autor). Sua particularidade está em serem efetuados um após o outro e em serem bastante sensíveis ao número de elementos a interagir. Para Duval (2009), toda a atividade cognitiva humana baseia-se na complementaridade entre esses dois tipos de tratamento. As diferentes performances entre os sujeitos, repousam na diversidade e performance de tratamentos quase-instantâneos dos quais eles dispõem. Para Duval,

> Quanto mais um sujeito possui possibilidade de tratamentos quase-instantâneos num domínio, mais o número de elementos imediatamente integrados e fusionados em uma unidade informacional ('chunk') é grande e mais o nível epistêmico dos objetos que

> ele vê é elevado. Não haveria construção hierárquica de conhecimento possível sem o aumento dos tratamentos quase-instantâneos […]. (DUVAL. 2009, p. 52).

Mesmo os tratamentos quase-instantâneos sendo uma condição para o progresso qualitativo na aprendizagem, eles passam necessariamente pela fase de tratamento intencional. Assim, a função desses dois tratamentos é fornecer a "percepção imediata" da tomada de consciência para que seja possível visualizar as unidades informacionais dos objetos mais complexos ou mais gerais. O tratamento consiste na manipulação e aplicação de conceitos matemáticos, usando registros de representação semiótica. De acordo com Duval (2012a, p. 272, grifo do autor), podem ser considerados exemplos de tratamentos:

> A **paráfrase** e a **inferência** são formas de tratamento em língua natural. O **cálculo** é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A r**econfiguração** é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A **anamorfose**[28] é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.

De forma geral, o tratamento de uma representação semiótica corresponde à sua expansão informacional, de fato, para cada registro de representação semiótico existem regras de tratamento próprio que dependendo da "[…] natureza e seu número varia consideravelmente de um registro a outro: regras de derivação, de coerência temática, associativas de contiguidade e de similitude" (DUVAL, 2012a, p. 272). Essas regras são definidas por Duval (2009, p. 57) "[…] como regras que, uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro de partida". Assim, em uma transformação de tratamento não há mudança de registro e toda a operação matemática ocorre nesse registro.

3.4 CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Converter "[…] é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro de uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro" (DUVAL, 2009, p. 58), conservando a totalidade, ou uma parte somente, do conteúdo da representação inicial. De fato, conversão requer a mudança de registro, logo, converter é sair de um registro inicial (ponto de partida) e representá-lo em um outro registro. Para Duval (2009), a conversão das representações semióticas é tão

[28]Anamorfose é definida por Cumming (1995 *apud* SANTOS, 2020, p. 33) como um processo de distorcer uma imagem de tal modo que é necessário observá-la de uma maneira específica, a fim de reconhecê-la.

fundamental quanto a de formação ou de tratamento para uma atividade matemática, pois a conversão favorece o desenvolvimento da coordenação dos registros de representação.

Duval (2009) explica que a ilustração, tradução, interpretação, codificação etc. são operações que designamos para que uma representação de um registro dado corresponda a uma outra representação num outro registro. Corroborando, Duval (2012a) explica que a ***ilustração*** é a conversão de diferentes expressões linguísticas no registro de uma escrita simbólica; a ***tradução*** é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em representação linguística de outro tipo de língua; a ***interpretação*** é a conversão de um registro em uma linguagem não verbal em uma linguagem verbal; a ***codificação*** é a "[…] transcrição de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente" (Duval, 2012a, p. 272).

Duval (2009, p. 59, grifo nosso) na conversão temos a diferença entre o que Frege chamou de "[…] o ***sentido e a referência*** dos símbolos ou dos signos, ou entre um conteúdo de uma ***representação*** e o que ela ***representa***". Esta distinção separa "[…] com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhida, da referência que depende dos objetos expressos ou representados" (DUVAL, 2012c, p. 99). O autor exemplificou essa diferença ilustrando que: 4/2, (1+1) e √4 são formas escritas que designam um mesmo número e fazem referência a um mesmo objeto, mas não possuem o mesmo significado, uma vez que não são reveladores do mesmo domínio de descrição. Em consonância, Duval (2012c) acrescenta que

> A distinção entre sentido e referência está estreitamente ligada ao princípio de substituição, que é essencial nos procedimentos de cálculo ou de dedução: duas expressões, com a mesma referência, podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou em uma fórmula, sem que o valor da verdade mude (DUVAL, 2012c, p. 99).

Sem a percepção dessas diferenças a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível para o sujeito. Do ponto de vista cognitivo a conversão das representações semióticas é uma das atividades em que os alunos apresentam maior dificuldade. No tocante Duval (2009, p. 18) diz que:

> [...] a passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização de vários sistemas semióticos no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e espontâneo para a maioria dos alunos [...].

Duval (2009) argumenta que as mudanças de registro e a ausência de coordenação entre os diferentes tipos de registro criam uma deficiência para as aprendizagens conceituais. Em atividades matemáticas, os alunos, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que podem ser dadas em sistemas semióticos diferentes, assim, a representação do registro gráfico de uma equação linear em um registro algébrico, pode ser uma tarefa difícil para o aluno, pois exige um custo cognitivo maior que as transformações de tratamento. No entanto, o inverso, ou seja, uma aprendizagem centrada na mudança e na coordenação dos registros de representação, produz bons resultados nas macrotarefas[29] de produção e compreensão.

Antes de falar de conversões congruentes e não-congruentes, faz-se necessário dizer que Duval (2009, 2012a, 2012b e 2012c) chamou de congruência ou não-congruência semântica as expressões a serem substituídas uma pela outra. Segundo Duval (2009), para determinar se duas representações são congruentes é preciso segmentá-las em unidades significantes a fim de colocá-las em correspondência. Portanto, segundo Duval (2009. P. 68-69), para determinar se uma representação é congruente e ocorre de modo espontâneo, três condições devem ser preenchidas:

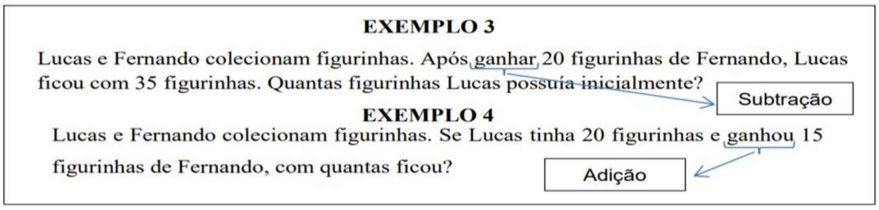
(i) Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constitui: Cada unidade significante simples associa-se a uma unidade significante elementar;
(ii) Univocidade semântica terminal: mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações: cada unidade significante de partida corresponde a uma só unidade significante de chegada;
(iii) Organização das unidades significantes: mesma ordem de correspondência nas duas unidades semânticas.

Esses três critérios permitem determinar a congruência entre duas representações semióticas diferentes e representando, ao menos, parte do conteúdo do registro de partida. Como advoga Duval (2009, p. 69), duas representações são congruentes quando há “[...] correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações”. No entanto, pode ser que não se verifique três, dois ou mesmo um desses critérios. Quando uma conversão não satisfaz um ou mais desses três critérios, dizemos que os sistemas de representações não são congruentes e a passagem de um para o outro não acontece mais de forma imediata e espontânea para o sujeito. Lourenço e Oliveira (2018) analisaram critérios de congruência em quinze problemas

[29]Uma macrotarefa é uma atividade matemática que envolve a coordenação de vários registros de representação semiótica para ser realizada.

com equações do primeiro grau, apresentados em um material didático apostilado, e tecem reflexões a respeito da congruência. A pesquisa de cunho bibliográfica e documental, apontou o baixo índice de conservação da correspondência semântica das unidades de significado e o alto índice de conservação da univocidade semântica terminal nos problemas analisados.

Figura 33 – Exemplos relativos à conservação (ou não) da univocidade semântica terminal.



Fonte: Lourenço e Oliveira (2018, 87).

O exemplo apresentado pela figura 33, mostra que não há conservação da univocidade semântica terminal, uma vez que o verbo “ganhar” apresenta sentido contrário ao que aparecerá na expressão característica.

Duval (2009) explica que as dificuldades criadas pela não-congruência para a conversão das representações não estão somente no fato em ter um dos registros em língua natural, ela é igualmente apresentada entre a escrita algébrica de relações e sua representação gráfica; a escrita numérica de um relatório e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano etc. No entanto, Duval (2012a,) argumenta que não existe nenhuma regra que determine todos os casos de não-congruência entre as representações de dois registros determinados, pois as dificuldades relacionadas à não-congruência são dificuldades conceituais.

Para mostrar a importância da não-congruência na aprendizagem matemática, Duval (2012c) fala de três exemplos comumente usados:

- No primeiro exemplo, o autor aborda a não-congruência semântica entre a representação geométrica da reta e a representação simbólica dos números reais (na escrita decimal, na escrita fracionária, no encaixamento de intervalos etc.). As duas representações se referem ao mesmo objeto – os números reais – porém, como aponta Duval, há uma certa distância na compreensão da passagem de uma na outra.

- No segundo exemplo, o autor retrata a não-congruência semântica ao referenciar o discurso natural na compreensão de enunciados de problemas, ao discursar, entre outros, sobre o problema de proporcionalidade proposto por Koleza (1987)[30].
- No terceiro exemplo, o autor trata da passagem do enunciado de uma relação matemática para a escrita algébrica desta relação. Assim, como escreve o autor, passar de um "[…] enunciado do discurso natural para uma expressão escrita simbolicamente com variáveis, símbolos de relação ou operação, constitui, para muitos alunos, um abismo dificilmente transponível […] (Duval, 2012c, p. 110)".

Segundo a argumentação de Duval (2012c), o problema da congruência ou **não congruência** semântica entre duas apresentações do mesmo objeto está relacionado à distância cognitiva entre elas, independentemente de pertencerem ao mesmo registro. Essa distância cognitiva influencia diretamente a dificuldade na transição ou compreensão entre as apresentações. Nesse contexto, Duval (2009) observa que as dificuldades decorrentes da não congruência na conversão pode ser agravadas pela falta de familiaridade com um dos registros de representação. Ele também ressalta que não basta ao aluno conhecer vários registros isoladamente ou o conteúdo de um registro; é crucial que ele seja capaz de transitar fluidamente entre os diferentes registros associados ao objeto matemático.

> É preciso que um sujeito seja capaz de atingir o estado da coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instância ou ilustra. (DUVAL, 2009, p. 82)

Entre as três atividades cognitivas ligadas à semiose, Duval (2012a) argumenta que somente as duas primeiras – a formação e o tratamento – se sobressaem nas organizações de sequências de aprendizagem ou da construção de questionários de validação. Esse fato pode ser justificado pela falta de coordenação entre os registros de representação semióticos quando requerem uma conversão entre esses registros.

Diante do exposto, podemos identificar que as maiores dificuldades apresentadas pela maioria dos alunos, ao realizar atividades matemáticas, repousa sobre a congruência e não congruência semântica dos registros de representação semióticos ao substituir uma representação por outra. Do mesmo modo, podemos dizer que quando o aluno é capaz de transitar entre esses diferentes

[30]KOLEZA-ADAM, E. Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité. Thèse, Strasbourg, 1987.

tipos de registros de representação semiótica de um mesmo objeto, de forma natural e espontânea, significa que ocorreu a apreensão do conhecimento do objeto, conteúdo ou conceito matemático.

3.5 CLASSIFICAÇÃO DOS REGISTROS

Cada registro semiótico possui características e propriedades próprias, o que permite capturar diferentes aspectos dos objetos matemáticos que estamos representando, então, podemos dizer que eles são diferentes formas de representar os objetos. Os registros de representação possuem conteúdos distintos que são estabelecidos pelo sistema semiótico no qual eles são produzidos (LOURENÇO, OLIVEIRA, 2018). Neste sentido, Duval (2011) reforça que

> […] para considerar um sistema semiótico como um registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. São essas operações criativas que caracterizam um registro, e não as regras de combinações válidas, para um sistema formal, ou de signos utilizáveis, para um código. Assim, cada frase produzida é irredutível às palavras que ela combina. Duas frases podem empregar exatamente as mesmas palavras e não ter o mesmo sentido. Por exemplo: “O gato come o rato” e “O rato come o gato” […] (DUVAL, 2011, p. 83).

Como exemplos de registros, Duval (2011, p. 98) considerou “[…] a língua e as figuras geométricas euclidianas cujas formas podem ser reconhecidas ou construídas materialmente em 3D/3D”. Dentre os registros de representação abordados por Duval, Henrique e Almouloud (2016) citaram quatro, que são predominantes na Educação Matemática, desde a Educação Básica ao Ensino Superior, conforme ilustração dos registros, na figura abaixo.

Figura 34 – Possíveis registros de representação de um objeto matemático.

Fonte: Henrique e Almouloud (2016, p. 468).

Os registros de representação desempenham um papel crucial na compreensão dos conceitos matemáticos, oferecendo uma gama diversificada de estratégias para a resolução de problemas e enriquecendo a compreensão dos estudantes.

Duval (2011) considerou classificar os registros em vez de enumerá-los, o interesse é ao mesmo tempo teórico e metodológico; a classificação teve como base as duas características que permitem definir os registros em: discursivos e não discursivos, dependendo do uso da linguagem verbal; multifuncionais e monofuncionais por possuírem diferentes graus de multifuncionalidade e aplicações na comunicação e no desenvolvimento de conhecimentos matemáticos. Os quatro registros de representação foram resumidos, por Duval (2011) no quadro a seguir.

Quadro 1 – Classificação dos diferentes tipos de registros semióticos.

REGISTROS	**DISCURSIVOS** Linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização de expressões	**NÃO DISCURSIVOS** Apreensão simultânea de uma organização bidimensional
MULTIFUNCIONAIS :Os tratamentos não são algoritmizáveis.	<u>As línguas</u>: três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio). <u>Duas modalidades de produção</u>: oral/escrita.	<u>Icônica</u>: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas, características das partes do objeto. <u>Configuração geométrica</u>: três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações Auxiliares transitórias para as **operações livres ou externas**	
MONOFUNCIONAIS: As transformações de expressões são algoritmizáveis.	As escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais). Uma modalidade de produção: escrita.	Junção entre os pontos ou nós e orientação marcada por flechas. Gráficos cartesianos: operação de zoom, interpolação, mudança de eixos. Esquemas.

Fonte: Duval (2011, p. 118).

Como destaca Duval (2016), tem-se:

> […] dois tipos que podem produzir expressões, ou seja, organizações lineares de unidades (palavras, letras, números, símbolos de relação, etc.) em função de regras sintáticas: as declarações em língua natural e as equações, as fórmulas escritas que combinam letras de variáveis, símbolos de operações e um símbolo relacional. Há, depois, dois tipos de registros que correspondem aos dois tipos de visualização das relações entre conjuntos de elementos: a visualização geométrica e a visualização analítica em sistemas de coordenadas (DUVAL, 2016, p. 12, grifo do autor).

Nos registros discursivos, temos o uso da linguagem verbal, como as palavras e frases, para expressar e comunicar conceitos matemáticos; eles se caracterizam pela utilização da fala ou da escrita como meio de comunicação matemática. Como exemplos de registros discursivos, temos: a explicação verbal de um conceito matemático, a apresentação oral de um problema e sua resolução, a justificação de um teorema por meio da argumentação, a descrição escrita de um objeto matemático. No contexto de sala de aula, os registros discursivos permitem aos professores e estudantes expressar suas ideias, argumentar, justificar seu raciocínio e explicar conceitos matemáticos. Já nos registros não discursivos, temos formas de representação que não fazem uso da linguagem verbal, como por exemplos os gráficos, tabelas, diagramas, símbolos, etc.; os registros não discursivos apresentam informações de maneira mais visual e intuitiva, permitindo aos alunos identificar padrões, relações e características geométricas sem depender da linguagem verbal. Toda "[…] originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (DUVAL, 2017, l. 91).

Segundo Duval (2011, p. 117), os registros monofuncionais "são próprios da matemática", eles têm uma função específica e limitada restringindo-se a sua aplicação; são usados para representar conceitos matemáticos unidirecional, como por exemplo, as fórmulas matemáticas usadas para representar e calcular a área de um trapézio ((A_t = base maior + base menor) x altura/2). Essa expressão é específica para calcular a área do trapézio. Os registros multifuncionais são "[…] utilizados fora da matemática, para as funções de comunicação, de objetivação, e não primeiramente, ou mesmo raramente, para uma função de tratamento" (DUVAL, 2011, p. 117). Como exemplo de registro multifuncional, podemos citar os gráficos e suas múltiplas aplicações em diferentes situações e finalidades.

Os quatro tipos de registros de representação semióticos são complementares para o entendimento da matemática, pois, como aponta Duval (2011, p. 116), a atividade matemática não se limita à utilização de um único registro, ou seja, "[…] ela ultrapassa sempre as produções explícitas no registro que efetuamos os tratamentos", ainda, segundo o autor, não devemos jamais pensar em um único registro, mas em várias representações de um mesmo registro, mesmo que as produções privilegiem um único registro.

A importância em trabalhar com diferentes registros é mencionada na BNCC[31], de 2018,

> A incorporação de diferentes tipos de registros de representação em práticas de ensino, pode facilitar a compreensão e comunicação de conceitos e permitir que os alunos construam significados e maneiras próprias e adequadas de operar sobre os registros. Através da interação entre os diferentes tipos de registros de representação, os sujeitos podem construir modelos mentais mais abrangentes e flexíveis dos objetos matemáticos, facilitando assim a resolução de problemas (BRASIL, 2018, p. 540)

De fato, quando o aluno consegue transitar entre as diversas representações de um mesmo objeto matemático, ele faz a conversão do registro com mais segurança e realiza o tratamento no registro de uma maneira mais econômica e potencializada (DUVAL, 2012a).

Duval (2016) considerou que há uma diferença entre sistema semiótico e registro de representação. Para o autor, a diferença está no fato de que "[…] os sistemas semióticos são utilizados e desenvolvidos para preencher a função de comunicação, enquanto os registros são unicamente utilizados para calcular, deduzir, demonstrar e modelizar" (DUVAL, 2016, p. 14).

Em relação ao ensino de Matemática, podemos sumariar tudo que foi mencionado, afirmando: A incorporação de diferentes tipos de registros de representação em práticas de ensino é essencial para a compreensão e comunicação de conceitos e para permitir que os alunos construam significados e maneiras próprias e adequadas de apreender e manipular objetos matemáticos.

3.6 ASPECTOS SEMIÓTICOS DAS ATIVIDADES ENVOLVENDO GEOMETRIA

A geometria, como conteúdo a ser ensinado nas escolas, apresenta grande originalidade em relação a outros domínios da matemática. Um dos pontos a ser considerado, ao estudar geometria, é o uso constante de figuras apresentadas nas atividades. Segundo Duval (2011, p.

[31]A BNCC, ao abordar os registros de representação, não especifica seu referencial teórico nem faz menção a nenhum pesquisador. No entanto, entendemos que suas afirmações sobre representações estão geralmente de alinhadas com a TRRS.

84), a figura, na geometria, apresenta três características que lhe conferem um poder cognitivo particular: *elas têm um valor intuitivo conforme a expressão familiar – se vê sobre as figuras; elas não exigem nenhuma explicação complementar; elas permitem um reconhecimento quase que imediato dos objetos que elas representam*. Ainda segundo Duval (2011, p. 84), elas permitem "ver" quando estamos resolvendo um problema, demonstrando ou aplicado à geometria à realidade. Como esclarece o autor (2011), a utilização das figuras em geometria depende das duas primeiras características, mas o ensino de geometria privilegia a terceira característica.

No entanto, para fazer uma análise cognitiva das figuras, no que diz respeito à maneira de "***ver***" que elas necessitam para que seja possível sua utilização na resolução de um problema ou mesmo do reconhecimento das propriedades geométricas em uma situação real, Duval (2011, p. 85) nos leva a refletir sobre três questionamentos: Essa maneira de ver é a forma comum de ver as imagens e perceber os objetos reais? Ou é preciso subordiná-la a um conhecimento conceitual de que ela dependerá e que a guiará? Ou, ao contrário, ela depende das operações de reorganizações puramente visuais das figuras que seriam próprias da maneira matemática de ver? Na percepção de Duval, todo o ensino da matemática geométrica é organizado em função das duas primeiras hipóteses, mas é na terceira hipótese que Duval considerou "[...] assumir que as figuras formam um registro de representação semiótica específico" (DUVAL, 2011, p. 85), para Duval, "[…] são essas operações que permitem transformar qualquer figura em outra, com a finalidade de faze aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação" (DUVAL, 2011, p. 85). O autor explica que as figuras podem ser vistas de três maneiras, que descreve como:[32]

i) A maneira ***normal*** de ver: reconhecimento imediato das formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados.

ii) A maneira ***geométrica*** de ver: realizar "a desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista […]"

iii) A maneira ***matemática*** de ver: permite que possamos passar espontaneamente de uma para a outra.

[32]As três maneiras de ver são referenciadas por Duval (2011) nas páginas 85, 86 e 87.

Ainda, segundo Duval, existe um salto cognitivo grande entre na maneira normal e a maneira matemática de ver as figuras, pois na maneira normal de ver uma figura não há a preocupação em variar as unidades figurais para reconhecer outras unidades que não vemos, mas que se tornam mais importantes do que a que vemos. No entanto, apenas ver uma figura não é suficiente para que o aprendizado geométrico se concretize, ou seja, se torne real para o sujeito. Duval (1995 *apud* ALMOULOUD, 2017, l. 1988, grifo do autor) aponta três processos cognitivos que preenchem a função cognitiva necessária ao estudo de geometria:

- *Visualização* é processo pelo qual se faz o reconhecimento das formas e que permite realizar as operações sobre uma figura.
- *Construção* é a execução, por instrumento, do pensamento geométrico que dá forma aos objetos matemáticos (figuras).
- *Raciocínio* é o desenvolvimento do conhecimento que permite a prova e a explicação.

Ao relatar os três processos cognitivos em sua dissertação, Mello (1999, p. 6) explica que as três atividades podem ser realizadas separadamente. Assim, para a autora,

> […] a visualização não depende da construção. E mesmo se a construção conduz a visualização, a construção do processo depende somente da conexão entre propriedades matemáticas e as técnicas de construção. Finalmente, se a visualização é um auxílio intuitivo, às vezes necessária para encontrar a prova, o raciocínio depende exclusivamente do corpo de proposições (definições, axiomas e teoremas).

No entanto, os três processos se entrelaçam sinergicamente e são cognitivamente necessários para a proficiência em geometria. Por outro lado, como escreve Almouloud (2017), a heurística dos problemas de geometria que se referem a um registro, em especial dá lugar a formas de interpretação autônomas. Corroborando, Duval (2012b) afirma que as formas de interpretações podem ser distinguidas nas quatro formas de apreensões: a perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras. Nessa perspectiva, Duval (1995 *apud* ALMOULOUD, 2017, l. 2000) cita que a apreensão:

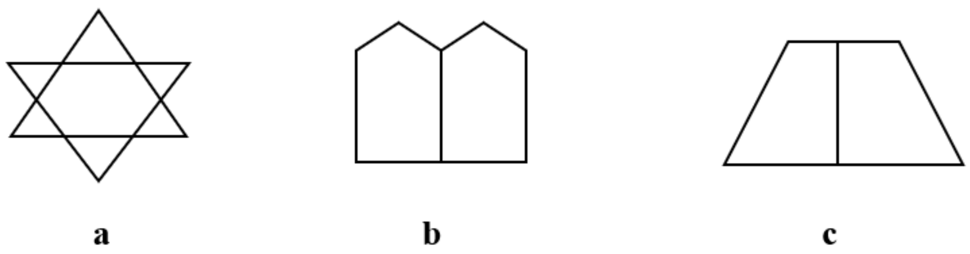
- Sequencial: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
- Perceptiva: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
- Discursiva: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto;

- Operatória: está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Uma figura desenhada, em atividade matemática, é objeto de duas atitudes, geralmente, contrárias: a apreensão perceptiva de formas (imediata e automática) e a apreensão discursiva dos elementos figurais (controlada, tornando possível a aprendizagem). Essas duas apreensões são conflitantes, porque “[...] a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente” (DUVAL, 2012b, p. 120). Assim, na percepção de Duval, os problemas apresentados pela figura geométrica estão na diferença entre a “[...] apreensão perceptiva e a interpretação necessária comandada pelas hipóteses”.

Duval (2012b) explica que a organização perceptiva das figuras é regida pela “lei do fecho” e da continuidade, que versa: “quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo”. A figura 34 mostra um exemplo de diferenças entre apreensões perceptivas das figuras.

Figura 35 – Exemplos de diferentes apreensões perceptivas das figuras.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, baseada em Duval (2012b).

De acordo com a lei do fecho, nas três figuras acima (32a, 32b e 32c), temos:
- Na figura 35a, há superposição de dois triângulos;
- Na figura 35b, uma montagem de duas formas idênticas em que tem um lado comum.
- Na figura 35c um trapézio partido em duas partes.

A lei do fecho permite que as figuras geométricas sejam prontamente reconhecidas facilitando a identificação de padrões e estruturas complexas. Sua importância na percepção de figuras geométricas, está no fato de que ela permite que se organize e complete as formas parciais ou fragmentadas, tornando a percepção visual mais rápida, eficiente e significativa. No entanto, essa lei exclui outras percepções mais simples, impedindo a visualização de outras formas. Por exemplo, na figura 32a, pode-se ver dois polígonos regulares (2 triângulos), no entanto, pela justaposição, pode-se identificar outras formas, neste caso, sete formas poligonais (6 triângulos e 1 hexágono).

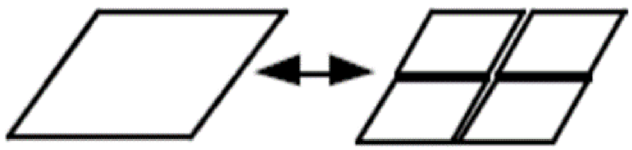
Como descreve Duval (2012b), a maioria dos alunos se apega à apreensão perceptiva e, em alguns casos, não retornam ao enunciado da questão, quando apresentam dificuldade em resolver um exercício em que a figura se apresenta. Neste ponto, Moran (2015, p. 36) delega que "[...] os problemas de geometria exigem uma forma de raciocínio que depende, dentre outros fatores, de uma interpretação de enunciados e de figuras". De fato, quando a figura, por si só, não mostra todas as informações requeridas para resolver um exercício, há de fato a necessidade de um retorno à enunciação de um problema. Neste sentido, Duval (2012b, p. 122) advoga que "[...] diferença entre a interpretação discursiva de uma figura exigida por uma situação geométrica e a apreensão perceptiva, encontra sua origem, em grande parte, nas leis de organização perceptiva".

A ***apreensão operatória*** está relacionada com as possíveis modificações e organizações que uma figura inicial pode sofrer. As modificações que podem ser realizadas nas figuras são classificadas em mereológicas, óticas e de posição.

Modificações mereológicas: é a divisão de uma figura em subfiguras que conservam as características da figura dada, fracionando e reagrupando, mantendo a relação de parte e todo. Segundo Duval (2022, p 19-20), as decomposições mereológicas podem ser:

a) Estritamente homogênea: a decomposição é feita em unidades da mesma forma que a figura de partida.

Figura 36 – modificação estritamente homogênea.



Fonte: Duval (2022, p. 19).

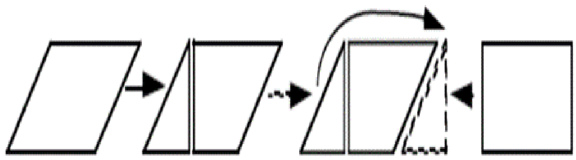
b) Homogênea: a decomposição é feita em unidades figurais diferentes da forma da figura de partida, mas todas da mesma forma.

Figura 37– Exemplo de modificação homogênea.

Fonte: Duval (2022, p. 20).

c) Heterogênea: a decomposição é feita em unidades figurais de formas diferentes entre elas.

Figura 38 – Modificação heterogênea.



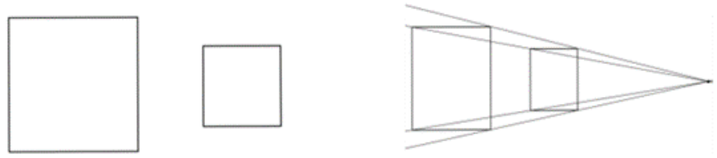
Fonte: Duval (2022, p. 20).

De acordo com Duval (2022), a decomposição mereológica possui uma característica distintiva: ela pode ser realizada de diferentes maneiras, seja **materialmente**, **graficamente** ou simplesmente **visualmente**. Além disso, essa decomposição possibilita a exploração visual de uma figura inicial para identificar as propriedades geométricas relevantes para a resolução de um problema específico.

Modificação ótica: é a transformação de uma figura em outra mantendo a forma e orientações da figura inicial, variando apenas o tamanho. Essa transformação permite a visualização de uma figura como sendo a imagem ampliada ou reduzida da figura original. Além disso, essa deformação possibilita a sobreposição em profundidade de duas figuras semelhantes, alterando o plano em relação ao plano frontal-paralelo, similar à reflexão em um espelho (Moran, 2015), conforme mostra a figura 39, abaixo ilustrada.

Figura 39 – Modificações óticas e situação de homotetia[33] respetivamente.

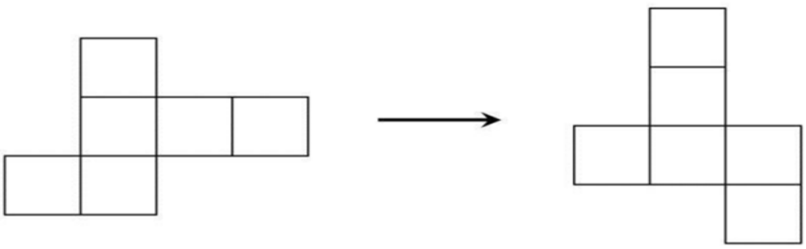
[33]A homotetia é uma das transformações geométricas que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais: a forma e ângulos.



Fonte: Moran (2015, p. 40)

Modificação posicional: é o deslocamento da figura em relação a um ponto de referência em que ela se encontra, preservando o tamanho e a forma da figura de partida. Essas modificações são realizadas graficamente e mentalmente.

Figura 40 – Modificação posicional de uma figura.



Fonte: (Moran, 2015, p. 41).

As quatro apreensões são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento e da compreensão em diferentes áreas do conhecimento e, na geometria, a tomada de consciência das diferentes formas de apreensão da figura é de suma importância para a resolução de atividades geométricas. Para realizar a análise das atividades matemáticas, realizadas pelos discentes, em se tratando de conteúdos geométricos, deve-se considerar as apreensões e a maneira de “ver” retratadas nas obras de Duval.

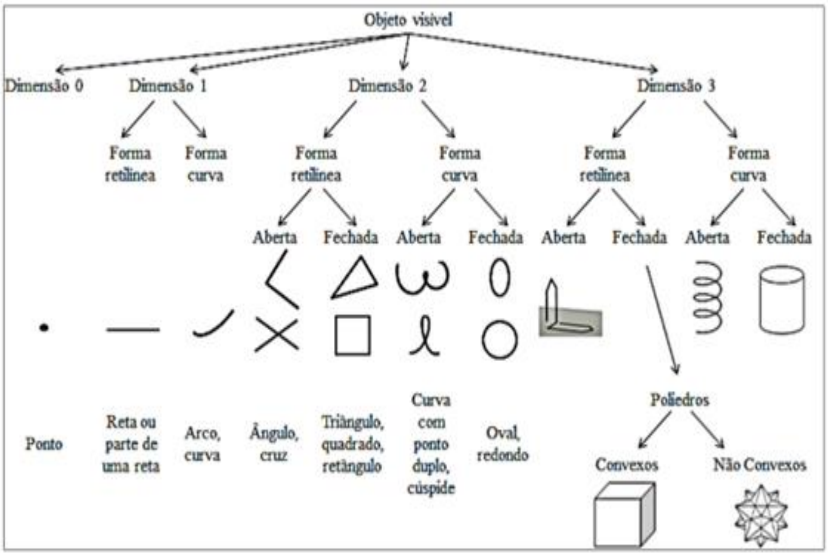
3.7 A FIGURA GEOMÉTRICA NA ATIVIDADE MATEMÁTICA

O registro figural é um dos registros de representação semiótica proposto por Duval que compõe a matemática, sendo particularmente importante quando se trata de visualizar informações e relações matemáticas. Um registro figural é constituído por unidades figurais elementares (ponto, reta, plano) que, articulado ao discurso teórico deste registro, permite diferentes tratamentos figurais.

Um dos desafios da educação matemática é ensinar conceitos imateriais de maneira tangível e compreensiva para o aluno. Nesse contexto, a figura geométrica desempenha um papel crucial, proporcionando uma representação visual que auxilia na assimilação de ideias. De fato, para uma figura geométrica existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer uma exclua a possibilidade de reconhecer as outras (DUVAL, 2011). Assim, “[...] para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada” (DUVAL, 2011, p. 86). No entanto, para ver matematicamente uma figura é preciso considerar e estar atento à dimensão das unidades figurais. Como exemplos de unidades figurais, Duval (2011, p. 86) cita “[...] os cubos, as pirâmides, as esferas (3D) ou os polígonos, os círculos (2D) ou as retas, as curvas (1D) ou, ainda, os pontos (0D)”. Porém, Duval (2011) considera que somente o reconhecimento das unidades dimensionais não são suficientes para analisar essa mudança de olhar. O autor também destaca a importância de diferenciar as representações físicas dessas unidades figurais, como maquetes de cubo (3D/3D), gabaritos (2D/3D), fios estendidos ou um raio de laser (1D/3D).

Como escrevem Scheifer e Brandt (2020, p. 155, grifo da autora), em uma figura geométrica, a característica que se destaca é a *forma,* pois ela é essencial para determinar uma unidade de base representativa e, acrescentam que “[...] o cruzamento desses valores permite definir as **unidades figurais elementares**”. A identificação das unidades figurais elementares de representação (dimensional e qualitativa) são classificadas visualmente, pois, de acordo com Duval (2011, p. 85) “[…] ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados”. Desta forma, podemos dizer que a mudança dimensional de uma figura está no interior do olhar geométrico, como mostra a figura 41.

Figura 41 – Classificação de unidades figurais elementares.



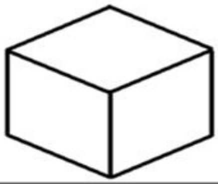
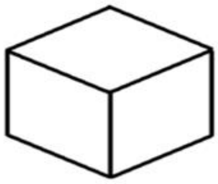
Fonte: Ferner (2019, p. 55).

A figura 41 ilustra a percepção e classificação das unidades dimensionais por meio da visualização das formas apresentadas. Por exemplo, a dimensão 1D pode ser representada por uma semirreta, enquanto a dimensão 3D por sólidos, como um cubo. A diferenciação dessas dimensões é de extrema importância ao lidar com atividades de geometria plana e espacial.

Em matemática, é considerada figura geométrica aquela que pode ser configurada através de unidades figurais de uma dimensão menor que a sua, ou seja, de nD para (n-1)D. As unidades dimensionais possibilitam a construção e a desconstrução dimensional de uma figura. A análise de Duval (2011) revela que a desconstrução dimensional das formas de uma figura geométrica em 2D para 2D possibilita examinar a transformação de uma forma dada em outra de mesma dimensão, mesmo que pareça completamente diferente. Contudo, esse processo de construção ou desconstrução dimensional não se limita aos domínios mentais. É essencial transportá-lo para além da representação mental, abrangendo os domínios da representação semiótica e computacional.

Conforme analisado por Duval (2011) em seu estudo sobre geometria, a manipulação de formas requer o uso da linguagem e da visualização para desmontá-las, seguido pela aplicação de um processo em um terceiro registro para calcular relações numéricas. Assim, para realizar essas reconfigurações com sucesso, é necessário, conforme explicado pelo autor, ter consciência dos diferentes tipos de operações figurais e da capacidade de focalizar diferentes dimensões ao perceber as múltiplas unidades figurais que se mesclam no reconhecimento instantâneo de uma figura, de acordo com representação do quadro abaixo.

Quadro 2 – Diferentes apreensões perceptivas e discursas para uma mesma representação.

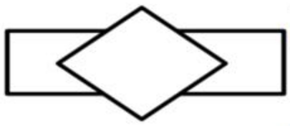
Figura Geométrica		Desconstrução dimensional
Figura	Discurso	
	Poliedro regular formado por seis faces planas quadrangulares, sendo que cada vértice une três faces.	Para conseguir identificar o cubo (3D), precisamos fixar o olhar nas faces (2D) unidas pelas arestas (1D) (3D →2D→1D) E para identificarmos cada face do quadrado (2D) precisamos nos fixar nas retas (1D) que a delimita, e a qual pertence outra face (2D→ 1D)
	Hexágono regular formado pelo conjunto de segmentos consecutivos e não-colineares contidos num mesmo plano e que formam uma figura fechada.	Para identificar o hexágono (2D), precisamos fixar o olhar nos segmentos de reta (1D) que formam o lados do polígono e ignorar, pela conduta de abdução, os três segmentos de reta do interior da figura. (2D→ 1D)

Fonte: Scheifer (2017 apud SCHIFER, BRANDT, 2020, p. 165).

Como apresentado por Scheifer e Brandt (2020, p. 165), é a apreensão discursiva que torna a figura passível de interpretações e entendimento. E a apreensão discursiva ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva e "[...] muitas vezes, uma contrapõe a outra, porém não pode ser dissociada uma da outra". Corroborando, Duval (2012a, p. 289) afirma que "[...] os tratamentos que são reveladores de uma apreensão operatória, querem dizer, os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura".

Outra maneira de "ver" uma figura geométrica, comuns a qualquer imagem, trata-se da decomposição por justaposição e da decomposição por superposição. No quadro 3, a seguir, temos um exemplo que ilustra os dois casos.

Quadro 3 – Maneiras de ver uma figura geométrica.



- Decomposição por **superposição**: 1 losango e 1 retângulo. (2D/2D)

- Decomposição por **justaposição**: 3 formas poligonais 2 pentágonos e 1 losango (2D/2D)

- Ver em unidades **figurais**: 10 segmentos de reta ou 8 retas subjacentes (1D/2D)

Fonte: Scheifer (2017 *apud* SCHEIFER, BRAND, 2020, p. 155).

Para Scheifer e Brand (2020), nas duas primeiras formas de "ver" tem-se a decomposição por superposição, pois a percepção imediata é a de um losango superposto a um retângulo (2D → 2D) e, a decomposição por justaposição, na qual se visualizam três figuras justapostas

(2D→2D), ou seja, um losango e dois pentágonos; a terceira forma de ver exige um salto cognitivo em relação à maneira normal de "ver", pois é feita a desconstrução dimensional da figura e pode ser interpretada de duas formas: uma configuração de figura formada por dez segmentos de reta, ou uma configuração formada por oito retas.

Podemos resumir que, em matemática, quando lidamos com o registro figural, as diferentes maneiras de visualização (normal, matemática e geométrica) desempenham um papel crucial. Conforme apontado por Duval (2011), a principal operação em relação às figuras geométricas não é criá-las, mas sim desmontar dimensionalmente aquelas que foram previamente construídas, seja de forma manual ou por meio de software. A compreensão e o aprendizado da matemática geométrica acontecem quando o aluno é capaz de executar essas operações figurais.

Tendo em vista os aspectos observados a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval e suas implicações no ensino e aprendizagem da matemática, a seguir explicitamos sobre a metodologia que foi utilizada para desenvolver esta pesquisa.

4 DELINEAMENTO METODOLÓGICO

Este capítulo se destina à descrição dos procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. Inicialmente, apresentamos a caracterização do estudo, detalhando os instrumentos utilizados para coletar os dados. Em seguida, discorremos sobre a aplicação de cada instrumento, destacando os métodos empregados para garantir sua eficácia. Por fim, abordamos a seleção das técnicas de análise de dados, delineando os processos utilizados para interpretar e compreender as informações obtidas.

4.1 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Pesquisar faz parte da natureza humana e, mesmo não sendo pesquisadores científicos, comumente, pessoas comuns se deparam em busca de soluções para problemas. No âmbito acadêmico, a pesquisa científica "[…] é realizada quando temos um problema e não temos informação para solucioná-lo" (PRODANOV, FREITAS, 2013, p. 42). Ou seja, a pesquisa "[…] sempre parte de um problema, de uma interrogação, uma situação para a qual o repertório de conhecimento disponível não gera resposta adequada" (PRODANOV, FREITAS, 2013, p. 42), e que buscamos, através de investigações, por uma resposta. Conforme Gil (2002, p. 17), a pesquisa pode ser definida "[…] como o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos". Segundo Gil (2008), o objetivo principal de uma pesquisa científica é descobrir respostas para os problemas através da aplicação de procedimentos científicos.

Dependendo do objetivo a pesquisa, ela pode ser classificada em exploratória, descritiva ou explicativa (GIL, 2002). Quanto ao objetivo, esta pesquisa é classificada como exploratória. Conforme Gil (2008, p. 27), as pesquisas exploratórias têm como principal finalidade "[...] desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores". Para Prodanov e Freitas (2013, p. 51-52), a pesquisa exploratória tem como finalidade "[…] proporcionar mais informações sobre o assunto que será investigado, possibilitando sua definição e seu delineamento e possui planejamento flexível, o que permite o estudo do tema sob diversos ângulos e aspectos".

Quanto à metodologia utilizada, o estudo adota uma abordagem qualitativa. Segundo Godoy (1995, p. 62), a pesquisa qualitativa tem como foco primordial a análise e o estudo do ambiente empírico em seu contexto natural. O autor destaca a importância do contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação em estudo.

Para Godoy (1995), os pesquisadores qualitativos se preocupam mais com o processo, ou seja, busca-se “[…] verificar como determinado fenômeno se manifesta nas atividades, procedimentos e interações diárias”. No que tange às investigações em uma pesquisa qualitativa, Yan (2016, p. 22-25) destaca cinco características que definem uma pesquisa qualitativa. Na visão de Yan, uma pesquisa qualitativa:

> ● […] estuda o significado das vidas das pessoas nas condições em que realmente vivem […].
> ● […] se difere pela sua capacidade de representar as visões e perspectivas dos participantes de um estudo […].
> ● […] abrange condições contextuais – as condições sociais, institucionais e ambientais em que as vidas das pessoas se desenrolam […]
> ● […] não é apenas um diário ou uma narrativa cronológica da vida cotidiana […].
> ● […] procura coletar, integrar e apresentar dados de diversas fontes de evidência como parte de qualquer estudo […].

Yan (2016) também aponta que, em uma pesquisa qualitativa, os dados coletados derivam de quatro atividades fundamentais, sendo estes, a entrevista, a observação, a coleta e exames de materiais e sentimentos. Para o pesquisador qualitativo, essas atividades são essenciais para delinear o corpus da pesquisa, levantar hipótese e construir argumentos.

Quanto à natureza, esta pesquisa pode ser classificada em pesquisa básica. De acordo com Perim (2010, p. 16), a pesquisa básica produz “[…] conhecimentos novos que geram bancos de dados, para posterior aplicação”. Na opinião Casarin e Casarin (2012, p. 30), a pesquisa básica “[…] procura desenvolver o conhecimento científico, sem o compromisso com uma aplicação prática imediata”. Na visão de Prodanov e Freitas (2013, p. 51), a pesquisa básica tem por objetivo “[…] gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais”.

A caracterização desta pesquisa, baseada nessas três qualificações, se justifica por ser o campo de pesquisa uma escola, o objeto de estudo investigativo ser aplicado a estudantes do Ensino Médio e a coleta de dados ser oriunda de observações, aplicação de questionários e uma sequência didática.

4.2 CAMPO DE ESTUDO DA PESQUISA

O campo de estudo da pesquisa é a EEEFM Antônio dos Santos Neves, localizada na Avenida Democrata, nº 845, Centro, Boa Esperança, ES. Atualmente, a escola funciona em três turnos (matutino, vespertino e noturno) e oferece as modalidades de ensino: Ensino Fundamental e Médio, Curso Técnico em Informática e Educação de Jovens e Adultos, sendo este último ofertado no turno vespertino e noturno.

A escola possui dois pisos, no primeiro piso fica a biblioteca, o almoxarifado, o arquivo morto, a sala de supervisão, a sala dos professores, a secretária, o refeitório, a cozinha, o banheiro feminino e masculino para alunos, secretários e professores, uma sala de reuniões, uma sala de aula, uma cantina que está desativada, a sala da coordenação, a sala da diretoria, a sala da supervisão, um pátio recreativo, uma pequena sala para produtos de limpeza e uma pequena sala onde está a Rádio da escola.

No segundo piso estão as 16 salas de aula, uma sala de multimídia, um LIED (laboratório de informática), uma sala de recurso, uma pequena sala para guardar produtos e artefatos usados em apresentações que ocorrem no decorrer do ano letivo e uma sala para produtos de limpeza. Em 2022, a instituição educacional conta com um total de 819 alunos. Dentre eles, 492 estão matriculados no período da manhã, 186 frequentam as aulas à tarde e 141 cursam no período noturno.

O turno matutino abarca uma quantidade maior de alunos por atender alunos que moram na zona rural, assim, neste turno, são oferecidos o Ensino Fundamental, Ensino Médio Regular e Ensino Médio Integrado. No turno vespertino, é ofertado apenas o Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos, segundo segmento. No turno noturno, a oferta é apenas para Educação de Jovens e Adultos (EJA), que abrangem a EJA Multisseriada, EJA segundo segmento e EJA E.M.

4.3 SUJEITOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os sujeitos que participaram desta pesquisa são alunos do Ensino Médio Integrado (EMI) e

Ensino Médio Regular (EMR) de uma escola Estadual. Do total de 35 alunos colaboradores nesta pesquisa, 23 alunos pertencem à 2ª série do EMI e 12 alunos pertencem à 2ª série do EMR, ambos no turno matutino.

Nossa perspectiva, no início da pesquisa, seria aplicar e realizar a coleta de dados em um total de 45 alunos, sendo estes 30 alunos da 2ª série EMI e 15 alunos da 2ª série do EMR; porém 10 alunos decidiram não participar, sendo estes 7alunos do 2ªsérie do EMI e 3alunos da 2ª série do EMR.

A escolha pela turma de 2ª série do EM se justifica por ser uma série que demostrou baixos rendimentos no descritor D43, por estudarem o conteúdo de Geometria Espacial no segundo e terceiro trimestre, como sugerido nas Orientações Curriculares da SEDU 2022[34] e pelo fato do pesquisador ser docente em uma das turmas, 2ªEMI.

Um dos requisitos para o desenvolvimento da pesquisa se refere ao uso do telefone celular com internet, pois necessitávamos que o aplicativo Geometria RA (GeometriaRA) fosse instalado. Entre os 35 alunos que participaram da pesquisa, dois alunos da 2ª série EMI não possuía o aparelho, mas o fato não influenciou no resultado da pesquisa, pois sugerirmos que os trabalhos fossem realizados em dupla. Assim, um grupo ficou com três alunos.

4.4 ETAPAS DA PESQUISA

A pesquisa foi conduzida em quatro etapas essenciais: inicialmente, realizou-se o levantamento dos referenciais teóricos por meio de uma revisão de literatura abrangente. Em seguida, a pesquisa de campo foi realizada, compreendendo observação, aplicação de questionário diagnóstico, implementação de sequência didática e aplicação de questionário de avaliação do objeto de estudo. Posteriormente, os dados foram analisados e processados, culminando na conclusão da pesquisa.

4.4.1 Revisão de literatura.

O levantamento dos referenciais bibliográficos ocorreu no primeiro semestre de 2022 e, com

[34] https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares2022/

mais afinco no mês de janeiro, mas não se restringiu apenas a esse período, pois em outros momentos, posteriores a essa data, novas buscas foram realizadas. Ao buscar por referenciais bibliográficos, navegamos em repositórios do SCIELO, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), portal do CAPES e pelo Google Acadêmico, tendo este último um melhor retorno às buscas.

A primeira pesquisa por referências foi realizada no Google Acadêmico. Foram selecionados dissertações e artigos que abordam a temática "Realidade Aumentada aplicada no ensino de geometria espacial". A primeira busca, realizada no Google acadêmico, retornou mais de 145000 resultados, o que tornava difícil ao pesquisador analisar tantas referências. Assim, outros verbetes foram inseridos: "Realidade Aumentada + geometria espacial + ensino médio", e o retorno também foi demasiadamente grande, tendo um total de 17100 resultados. Como o resultado ainda era inviável de análise à pesquisa proposta, afunilamos, de forma ainda mais específica, a consulta. Delimitando um espaço temporal, de aproximadamente 05 anos, entre 2016 e 2020, obtivemos um retorno de apenas 496 trabalhos. O que, ainda, tornava morosa a análise.

Então, o acréscimo de outro verbete, "volume dos sólidos", ao termo da pesquisa, se fez necessário. Assim, o resultado da consulta retornou 143 trabalhos. Dos quais, após serem submetidos a dois crivos de seleção/exclusão (análise da temática dos títulos e leitura dos resumos), foram selecionados apenas 15.

No repositório do SCIELO, selecionamos 02 artigos e não foram selecionadas dissertações. No repositório da BDTD, foram selecionadas 04 dissertações e 02 artigos, sendo que apenas uma dissertação atende ao propósito desta pesquisa e, replicada no Google Acadêmico. No portal da CAPES foram selecionados 04 artigos, sendo 01 replicado no SCIELO.

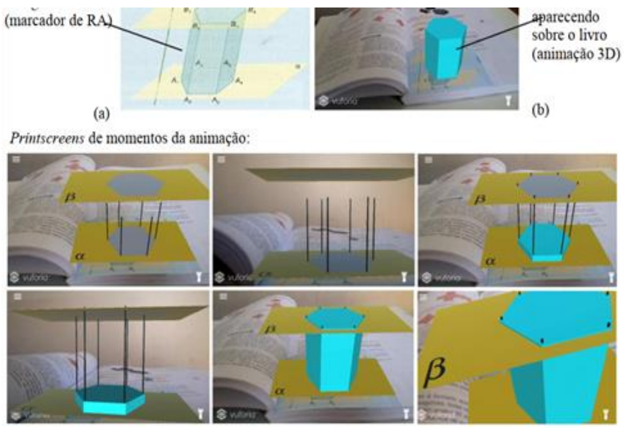
Após a leitura, as dissertações e artigos foram agrupadas seguindo dois critérios de seleção:

- O primeiro contempla trabalhos com abordagem em ***produção de protótipos (softwares) em RA para serem aplicados no estudo da geometria espacial.***
- O segundo contempla trabalhos que fizeram ***uso de softwares já existentes de RA aplicados no ensino da geometria espacial.***

Dentro do primeiro critério, temos as pesquisas de Andrade (2017), Silva (2017), Macedo (2018), Dantas (2018) e Resende (2019). No segundo critério, temos as pesquisas de Ferreira (2018), Silva (2019), Angeloni (2020) e Lima (2021).

Andrade (2017) desenvolveu um aplicativo chamado de RAGeo para dispositivos móveis como um recurso didático com base na tecnologia da Realidade Aumentada. O aplicativo tem como objetivo minimizar as dificuldades dos estudantes no ensino da Geometria Espacial e foi usado com o livro didático de matemática. Ao desenvolver o recurso didático, Andrade (2017) escolheu a biblioteca Vuforia [35]e a IDE Unity3D[36]. Segundo o autor, o *software* de RA incrementa as atividades impressas no livro didático, pois permite a sobreposição de objetos virtuais sobre a figura impressa, trazendo novas informações, permitindo uma melhor visualização, possibilitando a interatividade e despertando o interesse pela exploração e construção do próprio conhecimento. A figura 42 mostra o uso do aplicativo de Dantas (2017) associado ao livro didático.

Figura 42– Uso do app de RA associada ao livro.



Fonte: Andrade (2017, p. 52).

Silva (2017) desenvolveu um aplicativo para dispositivos móveis, com sistema Android, utilizando recursos de Realidade Aumentada. Sua pesquisa teve por objetivo pesquisar "[…] os aspectos relevantes do uso de Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino de matemática, em especial o desenvolvimento e uso de aplicativos educacionais da área de matemática, baseados em dispositivos móveis com recursos de Realidade Aumentada". O

[35] Vuforia é uma plataforma de desenvolvimento de realidade aumentada (RA) que permite aos desenvolvedores criar experiências interativas e imersivas ao sobrepor elementos virtuais em ambientes do mundo real.
[36] A IDE Unity3D, por sua vez, é uma popular ferramenta de desenvolvimento de jogos e aplicativos, amplamente utilizada na criação de conteúdo de realidade aumentada, entre outras aplicações.

aplicativo, denominado ARSolids, possibilita ao usuário interagir com objetos 3D, em especial os sólidos de Platão, por meio da tela do smartfone e através da manipulação e interação com marcadores impressos (SILVA, 2017, p. 44). Assim, o app ARSolids foi usado como suporte no ensino e aprendizagem dos sólidos de Platão. A testagem do aplicativo foi realizada com dois grupos distintos:

- Grupo A: representado por professores da rede básica e futuros professores de matemática de uma universidade paranaense.
- Grupo B: alunos das três séries do Ensino Médio de uma escola da região de Ourinhos/SP.

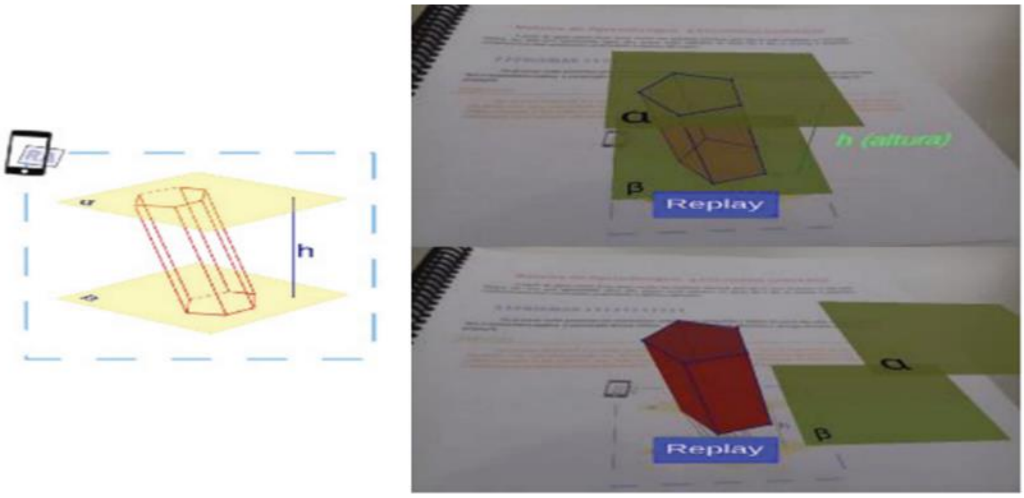
Ao concluir a pesquisa, Silva (2017) evidenciou que a Realidade Aumentada é uma ferramenta "[...] poderosa de tecnologia, que tem um apelo para a interação, promovendo o envolvimento e a chamada imersão do sujeito num ambiente com aditivos virtuais", podendo trazer resultados significativos para o ensino da matemática. O autor ainda acrescenta que para que se tenha aproveitamento significativo dos recursos oferecidos pela RA no campo educacional, é preciso que se invista em programas onde o próprio professor possa criar seus aplicativos, podendo ligar estes recursos de tecnologia com a vivência dos seus alunos.

Macedo (2018), em seu mestrado, desenvolveu um aplicativo que chamou de PolyhedRApp, composto de elementos que integram em sua concepção Polyhedra +RA+App, fazendo referência à palavra poliedro em grego. Ao criar o produto educacional, optou por usar os programas; Inkscape[37], EasyAR[38], Unity5[39], SketchUp[40]. Para a criação dos marcadores, utilizou o Inkscape. Sua pesquisa teve como objetivo investigar a integração da Realidade Aumentada em dispositivos móveis no processo de ensino-aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio. Macedo aplicou seu protótipo em cinco turmas de dois colégios da cidade de Guaratuba, litoral do Paraná. A figura 43 mostra a definição de um prisma usando o aplicativo PolyhedRApp.

---

[37]O Inkscape é um software aberto que permite criação e edição de desenhos vetoriais e manipula imagens (MaCEDO, 2018, p.58).
[38]O EsyAR é uma biblioteca de visão computacional da empresa chinesa VisionStar. É multiplataforma e usa diversos sistemas 3D na criação de cenas em RA (MACEDO, 2018, p.58).
[39]A Unity5 é um programa para desenvolvimento de jogos compatível com a maioria das plataformas existentes, desde computadores a smartfones (MACEDO, 2018, p.58).
[40]O SketchUp é um software de desenho e opera num ambiente 3D (MACEDO, 2018, p.58).

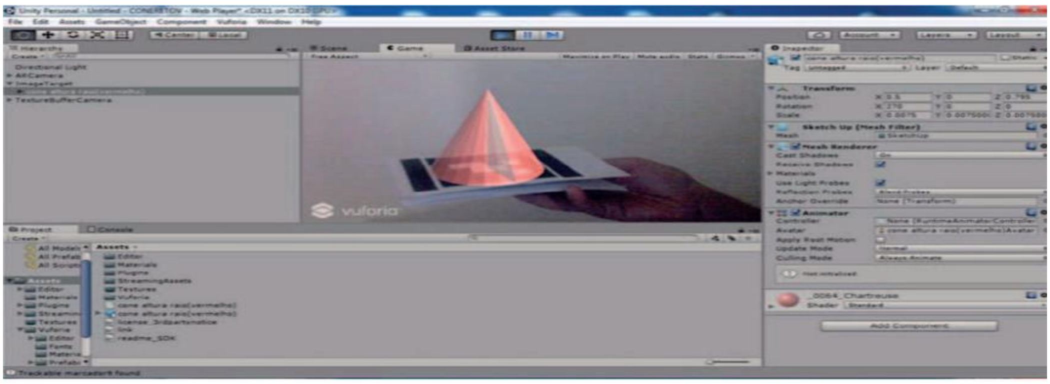
Figura 43 – Visualização de um prisma usando o aplicativo PolyhedRApp.



Fonte**:** Macedo (2018, p. 72).

Dantas (2018), por sua vez, apresentou em sua pesquisa um estudo com o uso da RA como ferramenta para auxiliar no ensino da geometria espacial, para alunos do Ensino Médio de uma escola pública do IFRN, campus de Caicó. Para o desenvolvimento do projeto de RA, foram usados o Unity e o SDK do Vuforia. O aplicativo com fins pedagógicos buscou minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes no entendimento e interpretação da geometria espacial. O projeto foi aplicado em uma turma do 3º ano do curso integrado de informática. Segundo Dantas (218), além do projeto se apresentar como um recurso didático atrativo e um bom auxiliar na aprendizagem de geometria espacial, os alunos mostraram-se motivados, envolvidos e surpresos com o uso da RA.

Figura 44 – Projeto de RA desenvolvido por Dantas.



Fonte: Dantas (2018, p. 58).

Resende (2019) abordou, em sua pesquisa, a utilização de dispositivos móveis na aprendizagem matemática envolvendo atividades fundamentadas no conteúdo de geometria espacial. Para fazer uso do dispositivo móvel, o autor desenvolveu um aplicativo de RA por meio da linguagem de programação C# e do software Unity 3D. Segundo o pesquisador, o algoritmo de programação foi concebido para processar as representações tridimensionais encontradas nos marcadores Vumark. O aplicativo foi desenvolvido para os sistemas operacionais Android e IOS e publicado na loja virtual da Google. A pesquisa de Resende foi aplicada em uma escola particular do município de Porto Alegre – RS com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio e teve como objetivo explorar o mobile learning como um recurso na aprendizagem de geometria espacial com RA. A pesquisa demonstrou que o uso da RA diversifica a forma tradicional de ensinar, promove o engajamento e "contribuiu para um estudo mais autônomo evidenciando o estudante como o objeto central da aprendizagem".

Já Ferreira (2018) fez uso do Geogebra 3D e da RA para ajudar na visualização de elementos tridimensionais geométricos. Seu objeto de estudo fundamenta-se na resolução de exercícios e figuras geométricas cuja compreensão tendem a ser mais complexas quando visualizadas em uma superfície plana, tal como a página de um livro. O estudo de Ferreira (2018) é descritivo e construído a partir de exercícios retirados do material usado na disciplina de Geometria do PROFMAT. Ferreira (2018) concluiu que a RA tem papel importante como facilitadora do processo de ensino-aprendizagem, podendo ser aplicada em exercícios desde nível superior até nível médio, e facilita a visualização da resolução para alunos com dificuldades de abstração.

Silva (2019) fez uso da RA ao usar o aplicativo Geometry-AR, de autoria do licenciado Mario Bermudez, como interface pedagógica para o ensino dos sólidos geométricos do tipo prismas. Sua pesquisa foi aplicada no 2º ano do Ensino Médio de uma Instituição Pública de Ensino, localizada em Aracaju – SE. Silva (2019) fez o uso do software de Realidade Aumentada a partir de dispositivos móveis, com o objetivo de compreender sua utilização na aprendizagem de poliedros do tipo prisma. O resultado da pesquisa de Silva (2019) mostrou que o uso de tecnologia digital, do tipo RA, associada à construção concreta do prisma, contribuiu para que o aprendizado de geometria espacial fosse significativo para o discente.

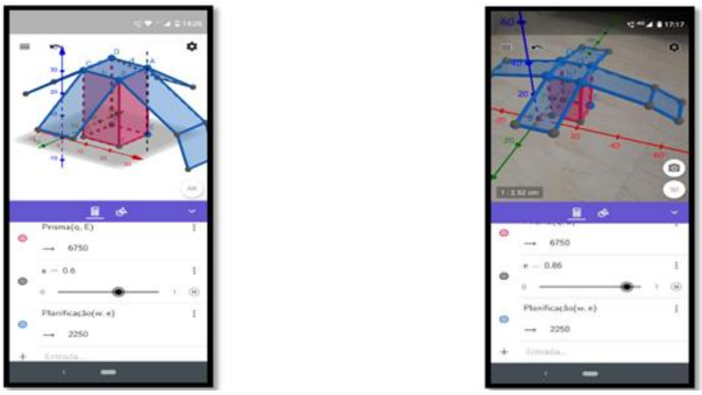
O objeto de estudo da dissertação de Angeloni (2020) foi desenvolvido online, com 30 docentes de diferentes áreas e níveis da educação e buscou ouvir os professores sobre a utilização dos dispositivos eletrônicos em sala de aula. Para Angeloni (2020), o "objetivo da informação aumentada é enriquecer o mundo já existente com informações que podem ser úteis em aplicações revolucionárias na educação”, e para desenvolver sua pesquisa, cujo objetivo é “comparar os principais softwares criados para a implementação de RA disponíveis atualmente para os sistemas operacionais Android e iOS, avaliando qual destes seria o mais adequado para professores estarem introduzirem atividades com RA em suas aulas” (ANGELONI, 2020, p. 20). Foi sugerida a testagem de alguns aplicativos tais como: Augmania™, Augment™, BlippAR™, HP Realidad Aumentada™, UniteAR™, Vuforia View™, Zappar™.

Para a testagem dos diferentes aplicativos de Realidade Aumentada, “[…] foram utilizados um celular iPhone X com sistema operacional iOS versão 14.0.1 e um Samsung J7 Metal com sistema operacional Android versão 8.1.0”. Foram selecionados apenas aplicativos que permitiam aos usuários inserir modelos 3D e informações que desejavam. A Pesquisa de Angeloni (2020) demonstrou que a Augmania™ foi o aplicativo mais apropriado para que professores inserissem a Realidade Aumentada em suas aulas, já que seu website apresenta uma interface simples, sendo possível inserir modelos 3D, textos, áudios, vídeos e outras informações.

Diferente das pesquisas acima citadas, a dissertação de Lima (2021) teve por objetivo apresentar um referencial didático para ser usado por professores do Ensino Médio no ensino e aprendizagem de prismas, por meio da utilização da RA aplicada ao software Geogebra 3D. Para desenvolver seu objeto de estudo, Lima (2021) fez uso de um celular com sistema operacional Android (a partir da versão 5) ou iOS (versão 10.1 para 11, 12, 13 ou 14), um tripé para a fixação do celular, um computador com sistema operacional Windows (versões 7, 8, 8.1 ou 10) ou com MacOS (versões 10.11, 10.12, 10.13, 10.14 ou 10.15), um projetor digital e uma rede Wi-Fi disponível para conexão do celular e do computado.

Lima (2021) apresenta seis atividades desenvolvidas com o uso da RA, sendo elas: a construção de um quadrado, a construção de um prisma, a planificação do prisma, o cálculo da diagonal do prisma, o cálculo do volume e a visualização do Princípio de Cavalieri. Segundo Lima (2021), o uso da RA foi primordial para facilitar a observação, a qual podia ser feita de forma mais detalhada, pois o elemento geométrico pode ser manipulado de muitas formas, dando a impressão de que ele está no mesmo ambiente dos observadores.

Figura 45 – Demonstração do uso da RA no app do Geogebra 3D.



Fonte: Lima (2021, p. 40).

As investigações mencionadas anteriormente compartilham semelhanças com o objeto de estudo desta pesquisa ao explorarem a Realidade Aumentada (RA) como uma ferramenta para melhorar o ensino e aprendizagem da geometria espacial, visando mitigar as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante as atividades. No entanto, nossa abordagem se distingue das demais ao focalizar o uso da RA especificamente no ensino dos principais sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cones e cilindros.

4.4.2 A observação

Segundo Haydt (2004), a observação "[…] é uma técnica que o professor dispõe para melhor conhecer o comportamento de seus alunos". Para Haydt (2004), os dados obtidos pela observação devem ser registrados descrevendo os fatos tal qual eles ocorreram. O registro pode ser em fichas, cadernos de anotações ou anedotários[41]. Como advoga Haydt, pode-se observar o aluno quando ele está realizando uma atividade em sala de aula; quando está participando de trabalho em grupo; durante atividades criadoras; quando faz comentários sobre pessoas, objetos e conteúdos lecionados, entre outros. Segundo Gil (2008, p. 101), a observação tem a vantagem de "[…] facilitar a obtenção de dados sem produzir querelas ou suspeitas nos membros das comunidades, grupos ou instituições que estão sendo estudadas". Dentre as observações descritas por Gil (2008), a observação simples pode ser participante e sistemática. Neste caso, foi realizada a observação simples por ser a mais adequada para esta pesquisa. E, como escreve Gil (2008, p. 103), o registro na observação simples se "[…] faz geralmente mediante diários ou cadernos de notas". O autor ainda explica que "[…] o momento mais adequado para o

[41]Anedotário é um registro escrito que descreve a conduta do aluno, em determinada situação, durante um determinado tempo. (HAYDT, 2004).

registro é, indiscutivelmente, o da própria ocorrência do fenômeno".

Para esse estudo, a observação ocorreu durante todo o período da coleta de dados no campo de pesquisa, neste caso, a escola já supracitada. A pesquisadora fez uso de um caderno, que chamou de diário, para anotações diárias, tais como: falas pertinentes de alunos, acontecimentos previstos e imprevistos quando fez a coleta de dados, registros do dia em que ocorreu cada fase da coleta de dados (aplicação dos questionários e a sequência didática).

4.4.3 Os questionários e a sequência didática

Primeiro questionário

Como advoga Gil (2002, p. 114), entende-se por questionário "[...] um conjunto de questões que são respondidas por escrito pelo pesquisado". De fato, o questionário é um recurso rápido, quando a intenção é a obtenção de informações. Neste sentido, a aplicação do questionário fez-se necessária para obter informações sobre o conhecimento do aluno em relação à geometria espacial. Assim, o primeiro questionário foi aplicado com a função de diagnosticar e sondar os quão familiarizados e desenvolvidos, os alunos estavam com geometria espacial e quais aspectos poderiam ser trabalhados, na SD, para ajudá-los neste desenvolvimento.

Então, podemos dizer que o questionário se aproximou do que Haydt (2004) chamou de avaliação diagnóstica.

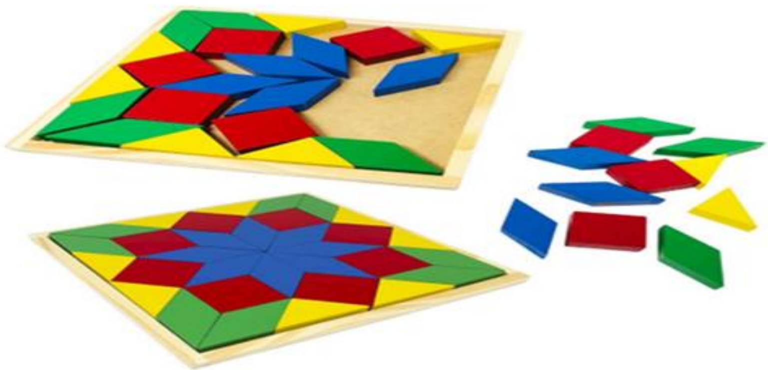
> A avaliação diagnostica é aquela realizada no início de um curso, período letivo ou unidade de ensino, com a intenção de constatar se os alunos apresentam ou não domínio dos pré-requisitos necessários, isto é, se possuem os conhecimentos e habilidades imprescindíveis para as novas aprendizagens. É também utilizada para caracterizar eventuais problemas de aprendizagem e identificar possíveis causas, numa tentativa de saná-los (HAYDT, 2004, p. 17).

A aplicação do primeiro questionário, APÊNDICE A, ocorreu no dia 26 de setembro em uma aula de 50 minutos, em que 35 discentes responderam ao questionário. Antes de iniciar a aplicação do questionário, foi realizado um diálogo informativo quanto aos objetivos, necessidades e implicações futuras dos resultados obtidos, para o desenvolvimento da pesquisa. Visando obter dados mais reais, optou-se por aplicação individual e sem consulta a meios tecnológicos. Não houve incidentes durante a aplicação do questionário.

A primeira questão do questionário visa obter informações sobre conhecimentos de geometria plana e espacial inseridos em outros contextos; e a segunda questão aproxima-se de uma autoavaliação das respostas dadas à primeira questão, ou seja, a segunda questão leva o aluno a pensar, refletir e analisar o seu próprio aprendizado.

Enunciado: *O mosaico é uma arte que envolve a montagem de peças que se encaixam, seguindo um padrão, para formar uma figura abstrata ou representacional. Os mosaicos nos encantam por sua beleza em cores, figuras e sobreposições. Abaixo, temos um mosaico de tabuleiro de peças geométricas. Esse tipo de mosaico nos remete a percepções visuais em 3D depois de montado*.

Figura 46 – Mosaico usado para responder as questões um e dois do questionário diagnóstico.



Fonte:
https://www.google.com/search?q=figuras+de+mosaico+geometrico+com+diversas+figuras.
Acesso: 11/03/2022.

Os resultados (ver seção 5.1) mostram que alguns conceitos básicos de geometria, tanto plana quanto espacial, necessitam de atenção. Dos quais, reconhecer os polígonos e identificar as características que de definem os sólidos (vértice, aresta, faces, base e classificação), solicitadas na questão um e, posterior, descrita pelos alunos na questão dois (ver APÊNDICE A).

De posse das respostas do primeiro questionário, a pesquisadora realizou, entre os dias 27/09/22 e 02/10/2022, a interpretação dos resultados, neste momento, a leitura de cada atividade foi fundamental para prosseguir com a próxima etapa da coleta de dados, a Sequência Didática.

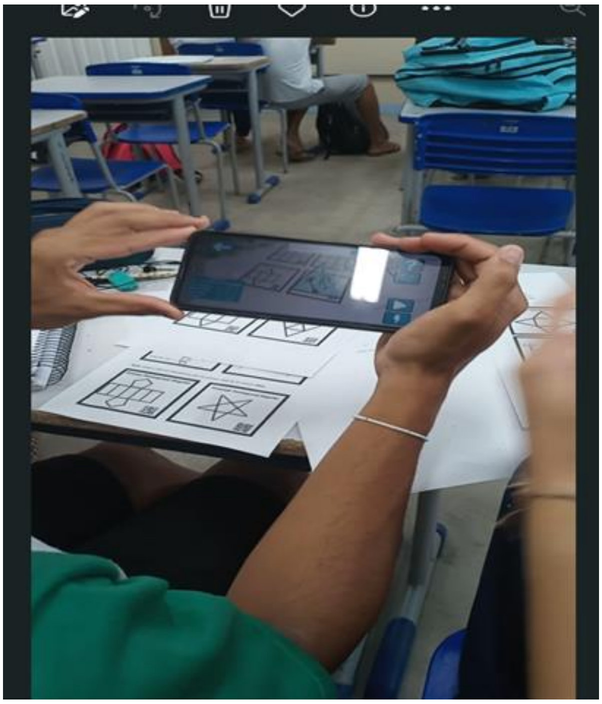
Sequência didática.

A sequência didática é uma metodologia estruturada de atividades pedagógicas, normalmente empregada durante um período limitado, com o objetivo de guiar o desenvolvimento das ações em consonância com os objetivos educacionais. Conforme Zabala (1998, p. 18), a sequência didática "[…] *é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionai*s, *tendo princípios e fins conhecidos pelo professor e pelo aluno"*.

A sequência didática, ver APÊNDICE B, é composta por 06 aulas e sua aplicação junto aos alunos teve início no dia 03/10/2022 e término no 24/10/2022. A seguir, é apresentado uma breve descrição da organização de cada aula.

A primeira aula foi no dia 03/10/2022, e teve duração de 1hora e 40 minutos. A aula foi dividida em dois momentos. No Primeiro momento, aproximadamente 50 minutos, foi utilizado o uso software Geogebra – calculadora3D. Na ocasião, foi feita a explanação de alguns conceitos: vértices, arestas, faces, base e classificação do prisma. No segundo momento, aproximadamente 50 minutos, foi realizada a orientação para os alunos instalassem o aplicativo Geometria RA no celular. Assim, os alunos acessaram a Play Store em seu celular, localizaram o aplicativo e o instalaram. Do total de 35 alunos, 06 não tinham acesso à internet em seus aparelhos. Para resolver o problema, a pesquisadora compartilhou internet do seu smartfone. Em seguida, os alunos exploraram o app Geometria RA e foram esclarecidas algumas dúvidas que surgiram sobre o manuseio do software. Logo após, como demonstrado na figura 47, a pesquisadora entregou os marcadores.

Figura 47 – Aluno explorando o app Geometria RA.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ao concluir a explanação dos conceitos de prismas, foi entregue uma atividade impressa preparada para a aula (atividades 3 do APÊNDICE B). Nesta etapa, os discentes usaram o aplicativo Geometria RA para aprofundar os conhecimentos, pois o contato com o objeto de conhecimento através do celular e do marcador, aproximou o aluno do conteúdo estudado à medida que manipulava o aplicativo.

A segunda aula aconteceu no dia 04 /10/2022 e teve duração de 50 min. Na ocasião, começamos a com um diálogo de aquecimento e reservamos 5 minutos para aquecer a memória relembrando os conceitos estudados na primeira aula. Logo após o aquecimento, foi entregue atividade impressa (atividade 4, 5 e 6 do APÊNDICE B), que contemplava questões selecionadas pela pesquisadora, e uma questão do PAEBES TRI, do ano de 2018. Para a resolução das atividades, os discentes usaram o aplicativo Geometria RA (ver APÊNDICE B, aula 2).

A terceira aula ocorreu no dia 10/10/2022 e teve duração de 1h e 40 min. A aula contemplou o estudo das pirâmides, e, novamente, dividimos a aula em dois momentos. No primeiro momento, aproximadamente 50 minutos, foi realizado a construção do 'sólido pirâmide' usando o Geogebra 3D. Com a construção, foram explorados conceitos de vértices, arestas, faces laterais, base, altura e classificação quanto à base. Também foram apresentadas as equações matemáticas que permitem calcular área e volume da pirâmide. No segundo momento, 50 minutos restantes, os alunos foram orientados que acessassem o aplicativo Geometria RA para visualizar e aprofundar os conhecimentos de pirâmide, já estudados e apresentados no primeiro momento. Em seguida, foi entregue uma atividade impressa (atividade 8 do APÊNDICE B – aula 3).

A quarta aula (11/10/2022) durou 50 minutos e foi destinada à resolução de atividades. Neste momento, reservamos 5 minutos para aquecer a memória, assim, foram relembrados os conceitos, estudados na aula 3, que caracterizam a pirâmide. Após o aquecimento, foi entregue atividade impressa (atividade 9,10 e 11 do APÊNDICE B – aula 4), sendo uma delas do PAEBES TRI de 2016.

No dia 17/10/2022 aconteceu a quinta aula (1h e 40 min.) teve por objetivo estudar os elementos que caracterizam o cilindro. A aula teve dois momentos. No primeiro momento, aproximadamente 50 minutos, foram apresentados os elementos do cilindro através de sua construção no software Geogebra3D. Assim, conceitos de diâmetro, raio, base, altura, equações de volume, área da base e área total foram estudados. No segundo momento, 50 minutos restantes, foi entregue uma folha impressa com atividade (APÊNDICE B, aula 5, atividade 13). Neste momento, os alunos usaram o aplicativo Geometria RA. Com o aplicativo os alunos, além de visualizar a construção do cilindro e sua planificação, de uma forma mais dinâmica, tiveram acesso às equações que determinavam o volume, a área da base e a área lateral e área total do cilindro, facilitando assim a realização dos cálculos.

Na sexta aula e última aula, que aconteceu no dia 24/10/2022 e teve duração de 1h e 40 min., estudamos a construção do cone e suas características. A aula foi dividida em dois momentos. O primeiro momento, aproximadamente 50 minutos, foi destinado à construção do cone com o uso do software Geogebra3D, onde abordamos, além da construção e a planificação do cone, a identificação da altura e a geratriz. Dialogamos sobre a formulação da equação que determina a área e o volume do cone. Em seguida, foi entregue uma folha com atividades (atividade 14 e 15 do APÊNDICE B) e foi orientado aos alunos usarem o aplicativo Geometria RA como suporte para a resolução das atividades. Nessas atividades, também foram inseridas questões do PAEBES TRI de anos anteriores. Foi sugerido aos alunos que, caso não fosse possível terminar a resolução dentro do intervalo de tempo determinado, a conclusão fosse realizada em outro momento, ou seja, extraclasse e posteriormente entregue a pesquisadora.

Após a realização de todas as etapas da SD, foi percebido que o uso do app Geometria RA, como recurso tecnológico nas aulas de matemática, possibilitou maior interação entre o aluno e os objetos matemáticos, à medida que despertou a curiosidade e a motivação para o aprendizado.

Segundo questionário

O segundo questionário (ver APÊNDICE C) foi aplicado no dia 07/11/2022, após a conclusão da sequência didática. Dos 35 alunos colaboradores nesta pesquisa, 32 responderam ao questionário e três não estavam presentes (faltaram a aula). O questionário teve como objetivo avaliar o objeto educacional da pesquisa, ou seja, o uso da RA como ferramenta pedagógica para o ensino e aprendizagem de geometria espacial na perspectiva do aluno. Assim, o questionário foi elaborado com questões fechadas que remetem o sentimento favorável, ou não, a esse recurso. O aluno pode optar por "**Discordo totalmente", "Discordo", "Indiferente", "Concordo"** e **"Concordo totalmente**". O questionário foi aplicado individualmente e pode ser respondido sem interferência, posicionamento ou sugestão de resposta da pesquisadora. O aluno teve liberdade de expressar seus sentimentos sem nenhum constrangimento. Foram respondidas cinco questões que avaliaram a usabilidade do aplicativo Geometria RA no ensino e aprendizagem de geometria espacial. Destaca-se que não ocorreram contratempos, rejeição ou ocorrências que atrapalhassem o desenvolvimento da aula.

4.4.4 Definição das categorias de análise para as atividades

Faz-se saber que, a estruturação da análise da pesquisa considerou dois pontos abordados pela análise de conteúdo de Laurence Bardin (2020): a organização da análise e a categorização. Na organização da análise, realizou-se a leitura minuciosa dos documentos (questionários e SD), definida por Bardin (2020) como leitura flutuante. Nesta etapa, ocorreu o contato com as produções dos alunos, ou seja, a resolução das atividades de geometria descritas na SD e as respostas dos questionários. Após a leitura de todos os documentos (atividades impressas realizadas pelos alunos (as)), reagrupamos os documentos por: i) atividade do questionário diagnóstico; ii) atividades desenvolvidas em cada aula da SD; iii) atividade do segundo questionário. Em seguida, foi realizada a separação dos documentos a serem submetidos à análise, sendo estes: i) todas as questionário diagnóstico; ii) atividades (1,3,4, 11, 14 e 15) da SD; iii) todas as questões do segundo questionário. Como delega Franco (2021), o pesquisador seleciona, dentro do universo de documentos, aqueles que vão fornecer informações relevantes para responder o problema da pesquisa. A esses documentos que são submetidos à análise, Bardin (2020) chama de *corpus*[42] da pesquisa.

A categorização consiste em classificar os elementos seguindo critérios previamente definidos. Sampaio e Lycarião (2021, p. 46) referem-se as categorias como "[...] elementos que nos dão meios para descrever o fenômeno sobre investigação, aumentando e gerando conhecimento". A classificação dos elementos em categorias é descrita por Bardin (2020) como um processo estruturalista que ocorre em duas etapas: (i) Na primeira etapa, faz-se o isolamento os elementos significativos para a pesquisa; (ii) Na segunda etapa, os elementos isolados são repartidos para impor organização as mensagens. Porém, para analisar as produções dos alunos, ou seja, os dados coletados com a SD e o questionário diagnóstico, nós apoiamos na análise cognitiva descrita por Duval (2011). O autor referência dois tipos de análise, a saber: A **análise matemática** das produções em função dos conhecimentos que os alunos devem mobilizar nas atividades e problemas propostos; e a **análise cognitiva** das produções em função dos registros que a resolução dos problemas impõe mobilizar de maneira coordenada, sendo esta utilizada nesta pesquisa. Como aponta Duval (2011, p. 114), a análise cognitiva "[...] é uma ferramenta de observação que permite colocar em evidenciar os fenômenos que não podemos observar apenas por meio de dados gravados na classe", ou seja, é a análise cognitiva das atividades matemáticas que permite a análise das mudanças de registros requeridas, implícita ou explicitamente, para a compreender como ocorre a aprendizagem em matemática.

Para o tratamento, análise e discussões dos dados coletados, através dos instrumentos de coleta de dados, já supracitados, elencamos as categorias de análises baseadas na TRRS de Duval, contemplada, em parte, no capítulo 2.7 desta pesquisa. A definição das categorias foi formulada a partir de pontos principais da TRRS, neste caso, a Geometria. Para analisar os dados coletados, pelos instrumentos de coleta de dados, elencamos três categorias de análise:

- *Tratamento figural na resolução de problemas que envolvem geometria espacial.*

[42] Bardin (2020) define *corpus* como o conjunto de todos os documentos a serem submetidos a análise, depois de terem passados por escolhas, seleções e as regras: exaustividade; representatividade; homogeneidade e pertinência.

Nesta categoria, foi analisado o uso das representações visuais, nos objetos matemáticos em 3D, usados para aprender conceitos de geometria espacial, e como essas representações visuais auxiliam na apreensão e visualização de figuras tridimensionais.

- *Construção e desconstrução dimensional das unidades figurais de uma figura geométrica*.

Nesta categoria, analisamos como os alunos identificam e descrevem os componentes figurais geométricos tridimensionais, aplicando a construção ou desconstrução dimensional requerida em uma atividade de matemática para resolvê-la. Isso implica considerar as características e propriedades que definem uma figura geométrica espacial. Na atividade de construção, é o reconhecimento perceptivo da figura a ser reproduzida que serve de guia e de controle para formulação de hipótese, testar teoremas e conjecturas.

- *As Apreensão das formas percebidas das figuras geométricas*.

Nesta categoria, investigamos como os alunos percebem e interpretam as representações visuais das figuras geométricas tridimensionais. Este foco envolve analisar como os alunos identificam, compreendem e interpretam as características, propriedades e demais elementos presentes nessas figuras. A análise busca entender a capacidade dos alunos em visualizar e assimilar aspectos como arestas, vértices, faces e outras propriedades dessas formas geométricas no espaço tridimensional, avaliando sua habilidade em reconhecer e interpretar corretamente as representações visuais oferecidas.

O emprego das categorias de análise não é rígido em seguir uma ordem predeterminada, mas sim aplicado conforme a natureza e a necessidade de cada atividade analisada. Tais categorias servem como referências flexíveis, podendo ser utilizadas em conjunto, separadamente ou mesmo omitidas, dependendo do contexto específico de cada questão ou atividade avaliada nos questionários diagnósticos e na SD.

Dessa forma, as inferências e conclusões extraídas dessas análises serão resultado de uma abordagem adaptativa, considerando a relevância e a aplicabilidade das categorias de análise em relação aos dados coletados. Essa flexibilidade metodológica permitirá uma compreensão mais abrangente e contextualizada das percepções e habilidades dos alunos no estudo da geometria espacial.

Devido a necessidade de delimitar o material a ser analisado dada sua quantidade em comparação com a limitação do tempo disponível, faz-se saber que foram analisadas seis atividades entre todas que constituem a sequência didática aplicada na pesquisa, sendo que: (i) a primeira fez uso de Geogebra para construção de solido; (ii) a segunda foi elaborada pela pesquisadora; (iii) quatro questões do PAEBES, abordando prisma, pirâmide, cone e cilindro.

Com a seleção das atividades analisadas, avaliamos o uso do aplicativo Geometria RA como ferramenta para auxiliar nas atividades de geometria e foco de investigação da pesquisa.

5 ANÁLISE E DISCUSSÕES DOS DADOS DA PESQUISA

Este capítulo apresenta a análise das atividades desenvolvidas na pesquisa de campo. Está estruturado em quatro tópicos: o primeiro discorre sobre os dados coletados pelo questionário diagnóstico, pelo qual sondamos os conhecimentos prévios e necessários para o estudo dos principais sólidos geométricos; o segundo tópico analisa os dados referentes ao uso da RA como ferramenta para auxiliar na aprendizagem dos principais sólidos geométricos ao longo da sequência didática aplicada; o terceiro tópico analisa o uso da TRRS nas produções dos aluno e o quarto tópico analisa a usabilidade da RA na perspectiva dos estudantes, que participaram da pesquisa, com base no segundo questionário aplicado.

As categorias de análises, já citadas, serão aplicadas para analisar as atividades da(o):

- Questionário diagnóstico da aprendizagem;
- Atividade desenvolvidas na SD;
- Questionário da usabilidade do aplicativo Geometria RA.

A análise da aquisição e da construção do conhecimento, assim como os obstáculos encontrados pelos sujeitos colaboradores da pesquisa, ao se realizarem os tratamentos e as conversões nos registros de representação semiótica, foi respaldada na TRRS de Duval. As categorias, a priori, têm por objetivo analisar como a mudança ou não de registro de representação semiótico, impactam nas respostas das atividades desenvolvidas pelos alunos. Segundo Duval (2009), o aprendizado do aluno, em matemática, vai ser significativo quando ele puder transitar entre os diversos tipos de registros de um determinado conteúdo matemático.

Em cada categoria, os sujeitos colaboradores da pesquisa são identificados pela representação das duas primeiras letras do nome, por exemplo, Antônio (An) e Beatriz (Be); em casos de nome conjugado, como por exemplo: Ana Marta (AnMa) e, em casos de mais de um aluno com o mesmo nome, usasse-a as duas primeiras letras do primeiro nome seguida da primeira letra do primeiro sobrenome, exemplo: Paulo Santos (PaS). Saliento que, os nomes exemplificados não fazem parte a lista de alunos colaboradores desta pesquisa, são nomes fictícios a fim de preservar a identidade dos estudantes.

5.1 QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Neste tópico, analisamos os dados coletados pelo questionário diagnóstico da aprendizagem prévia (APÊNDICE A). O questionário é constituído por duas questões, a primeira tem por objetivo investigar se os alunos têm conhecimento da geometria básica, ou seja, se conseguem reconhecer e nomear formas poligonais e espaciais desvinculadas de unidades de medida, através da percepção visual de um mosaico com peças geométricas; a segunda tem por objetivo identificar possíveis dificuldades apresentadas e apontadas pelos alunos ao responder a primeira questão. Duval (2011, p. 92) nos fala que é preciso propor atividades que excluam a unidade de medida e de cálculo, pois, para aprender a ver uma figura, o aluno deve primeiro aprender a trabalhar sem recorrer a aspectos métricos: "Em primeiro lugar, é preciso propor tarefas em que se exclua toda atividade de medida de cálculo".

Para início das discussões, os discentes responderam a um questionário de sondagem da aprendizagem. A aplicação ocorreu no dia 26 de setembro de 2022, onde dos 35 alunos participantes desta pesquisa, todos responderam ao questionário. Com base na figura apresentada na atividade 1 (ver APÊNDICE A), os discentes foram indagados sobre conhecimentos de geometria plana e espacial.

A primeira atividade do questionário retoma o reconhecimento das unidades dimensionais 0D (ponto), 1D (retas), 2D (polígonos) e 3D (sólidos) e o reconhecimento do registo em língua natural dos registros figurais (triângulo, losango, quadrado, cubo, prisma etc.). O questionário está estruturado de forma que a sequência de itens a serem respondidos, na primeira questão, interligue o conhecimento de geometria plana e espacial, permitindo transitar entre os dois registros figurais. Para responder os itens, os alunos usaram como referência a figura de um mosaico em 3D, conforme APÊNDICE A.

Na questão 1, no item a: O aluno deverá "*identificar três figuras planas apresentadas no mosaico e escrever o nome dessas figuras*".

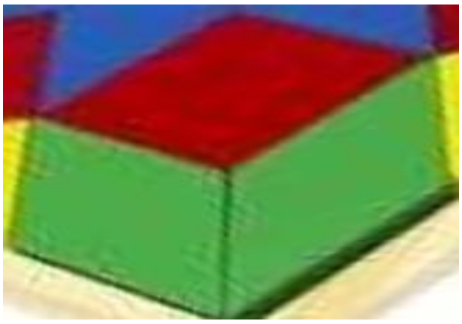
Dos 35 alunos, 24 escreveram como resposta: "triângulo", "losango", "retângulo" ou "quadrado", relacionando as formas geométricas planas, dadas pela percepção visual da figura ao registro em língua natural. No entanto, nove alunos apresentaram, em uma das suas respostas um elemento não condizente com a geometria plana. Dentre estes, sei alunos citaram o paralelepípedo, dois citaram o prisma e um citou a pirâmide. Uma resposta dada por duas alunas (Ma e Sa) despertou a nossa atenção, pois citaram o hexágono como um terceiro elemento; entendemos que as peças individuais não remetem a essa resposta, mas o mosaico completo pode proporcionar essa e outras percepções visuais.

Na questão 1, item b: O aluno deverá identificar "*as figuras geométricas espaciais que são apresentadas, pela ilusão de ótica, quando o mosaico está montado no tabuleiro e escreva o nome de uma figura".*

Pelo levantamento, temos 27 respostas que correspondem ao enunciado da questão, nomeando o sólido por: "paralelepípedo", "prisma" e "cubo". No entanto, os alunos Fa, Al, MaSa, We e Do, e as alunas Ma e Sa escreveram formas poligonais como respostas: "triângulo", "octógono" e "quadrado". O fato pode ser justificado, como escreve Duval (2012b), já que os alunos se apegaram, em sua maioria, à apreensão perceptiva da figura, ou seja, eles leem o enunciado, constroem ou visualizam a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado, fato que pode induzir a um erro na resposta. Um aluno não respondeu à questão.

Na questão 1, item c: *Com relação ao exercício b, e utilizando sua resposta, foi interpelado ao aluno quantas peças do tabuleiro seriam necessárias para construir a figura tridimensional.* Dentre os participantes, 20 alunos indicaram que seriam necessárias seis peças do tabuleiro para compor a estrutura sólida. No entanto, observamos outras respostas. Alunos como Lu, Ta e Ri afirmaram que apenas três peças seriam suficientes. Essa percepção pode ser atribuída à apreensão visual da figura, já que a representação apresenta apenas três peças aparentes. Presumimos, então, que essa resposta decorra da percepção visual em perspectiva de um prisma quadrangular. Bastam três peças (um quadrado e dois losangos justapostos) para criarmos a imagem desse sólido. Quanto ao uso de figuras, Duval (2011, p. 91) nos diz que a figura "[…] é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade". E, como apresenta a Figura 48, nem todas mostram todas as características que a define como um sólido, neste caso o prisma.

Figura 48 – Perspectiva de um sólido quadrangular pela sobreposição de três retângulos.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os retângulos estão sobrepostos de maneira a sugerir profundidade e orientação espacial, contribuindo para a criação da ilusão de um objeto tridimensional. A disposição e proporções dos retângulos na figura também desempenham um papel crucial na interpretação da perspectiva. A abordagem visual, juntamente com considerações sobre sombreamento e outros elementos, pode influenciar significativamente a compreensão do sólido representado

A questão 1, item d, solicita ao aluno que identifique o número de vértices, faces e arestas ao formar a figura geométrica espacial citada na letra c.

Neste item, os alunos Ka, Ca e Na não responderam à questão. Tomemos, por exemplo, a resposta da aluna Rh, a qual respondeu que seriam necessárias seis peças para formar o "prisma". No entanto, ao olhar a figura em 3D, com a apreensão perceptiva induzida pelo mosaico, respondeu que o prisma tem apenas três faces, sete vértices e nove arestas, ou seja, a resposta está condicionada à percepção visual e não ao conhecimento matemático que caracteriza o sólido visto que a aluna omitiu em sua resposta o que a figura não mostrou. Segundo Duval (2011, p. 86), "[…] para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou monitor mude"; portanto, mesmo que a figura não apresente todas as características do sólido que representa, o aluno deverá ser capaz de ver e identificar o que a figura não mostra.

A questão 2, item a: Questiona o aluno sobre a dificuldade, caso haja, em responder as questões. Caso a resposta seja sim, o aluno deveria indicar a questão (a, b, c ou d).

A maior dificuldade apresentada pelos alunos recai sobre a geometria espacial. Os resultados mostram que 24 alunos apontaram os itens c e d, da questão 1, como sendo de difícil realização por não lembrarem o nome do sólido geométrico e os conceitos de vértice, aresta e face, o que pode ter levado a respostas incoerentes. Pontua-se que os erros podem ser oriundos da visualização e não somente do esquecimento do aluno. Para justificar, tomemos como exemplo as respostas do aluno Ri, que escreveu na questão 1 – item b: o cubo; questão 1 – item c: três peças; e questão – 1, item d: oito vértices, 12 arestas e seis faces. Podemos observar, pela resposta dada por Ri no item c, que falta ao aluno o pensamento geométrico completo.

Questão 2: Item b: *Aponte suas dificuldades escrevendo-as na ordem da maior para a menor*. Abaixo, seguem as transcrições[43] das respostas de alguns dos alunos:

> ***Ed****: Foi difícil lembrar o nome das figuras.*
> ***Wi****: Esqueci o que é vértice, arestas e faces.*
> ***Ge****: Às vezes não lembro o que é vértice, face e aresta, ou me confundo, ou esqueço as figuras geométricas.*
> ***Ta****: A minha dificuldade é só memorizar o que são vértice e aresta.*
> Br*: Tive dificuldade em lembrar o que é vértice, face e aresta.*
> ***Ju****: não lembro o nome das figuras geométricas.*
> ***Mo****: A dificuldade que tive foi de lembrar o que é vértice, aresta e face o que elas condizem com a figura.*
> ***Ag****: Não sei o nome das figuras.*
> ***Rh****: Lembrar o nome das figuras; lembrar a definição de vértices, arestas e faces.*

As respostas demonstram que os alunos apresentam dificuldades em expressar conceitos essenciais de geometria espacial, objeto em estudo. Em sua maioria, as dificuldades apresentadas estão relacionadas à maneira de ver figuras e ao desconhecimento de propriedades importantes ligadas à formação de uma figura geométrica. Uma figura, segundo Duval (2011), é identificada pelas propriedades que não vemos e essas propriedades somente podem ser aprendidas por conceitos que estão definidos nos enunciados. Ainda segundo o Duval (2011, p.87), a maneira matemática de "ver" exige que possamos reconhecer as unidades figurais 0D, 1D, 2D, 3D[44] de formação de uma figura.

É importante saber que as respostas, levantadas pela aplicação do primeiro questionário, ocorreram sem a explanação prévia dos conceitos e características que definem os sólidos geométricos, pois conforme apresentado na BNCC (BRASIL, 2018), esses conceitos são introduzidos no Ensino Fundamental. A aplicação do questionário diagnóstico foi de suma importância, pois apontou fragilidades na aprendizagem de geometria plana e espacial, que

---

[43] Optamos em usar a fonte em itálico, ao citar as falas dos alunos.
[44]Unidades figurais usadas em matemática para caracterizar o ponto (0 D), retas e curvas (1D), polígonos (2 D) e figuras tridimensionais (3D).

requerem atenção da pesquisadora, como por exemplo, não lembrar nomes dos sólidos, vértices, arestas, faces etc. Os resultados levantados impactaram no próximo passo da pesquisa – a aplicação da SD – pois para o cálculo do volume pressupõe-se que sejam conhecidos conceitos básicos de geometria plana e o reconhecimento dos principais sólidos geométricos. Buscando minimizar essas fragilidades foi realizada uma aula expositiva abordando vértices, arestas, faces dos sólidos do tipo prisma.

5.2 AS ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

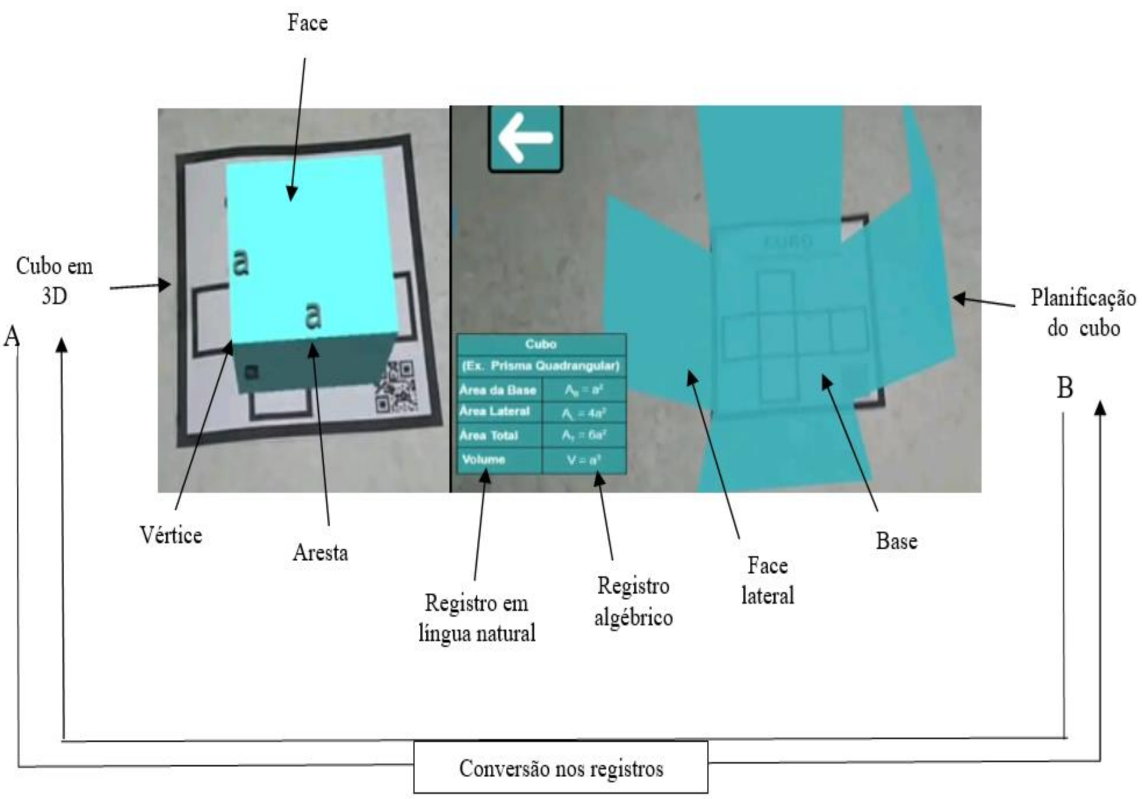
Nesta segunda etapa, analisamos as atividades desenvolvidas pelos sujeitos colaboradores na SD. Cada atividade foi realizada em uma única aula, de 50 ou 100 minutos, e seus planos estão elucidados no APÊNDICE B. Antes de discorrermos sobre as análises das atividades da SD, faz-se necessário justificar que o uso do app Geometria RA, para o ensino de Geometria, contempla alguns registros semióticos, apresentados pela TRRS de Duval, que são comumente utilizados ao se estudar geometria espacial, como demonstrado a seguir.

5.2.1 Os registros semióticos presentes no aplicativo Geometria RA

Como descrito por Duval (2011), temos várias representações para um objeto matemático dentro de sistemas semióticos chamados registros de representação semiótica. Em geometria, essas representações podem ser caracterizadas por registro em língua natural, figural, algébrico, gráfica etc. Ao usar o aplicativo de RA para auxiliar no aprendizado de geometria, os alunos se valem do apelo visual dos registros semióticos, apresentados pelo aplicativo para identificar as características que definem a figura geometria, bem como para fazer a conversão entre esses registros. Duval (2011) explica que as figuras dão lugar a dois tipos de operações: um apoiado diretamente na percepção, não exigindo uma mudança de unidades dimensional, sendo a reconfiguração realizada na mesma unidade dimensional 3D/3D ou 2D/2D e outro que depende da desconstrução dimensional, mas, em ambos os casos, o tratamento exige um apelo à visualização da figura.

Ao usar o app Geometria RA, o aluno faz uso desse apelo visual ao projetar a câmara do celular para os marcadores e visualizar os sólidos em 3D, suas nomenclaturas, fórmulas de áreas, volume e planificação, que são reproduzidas por animação. Quanto aos registros semióticos, podemos destacar registros em língua natural, algébrico e figural, como mostra a figura 49.

Figura 49 – Aspectos semióticos no app Geometria RA.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora com base no app geometria RA.

Como apresentado na Figura, temos os seguintes registros de representação:

i) Registro figural: representação do cubo em 3D e representação da planificação do cubo;

ii) Registros em língua natural: as nomenclaturas usadas para referenciar os objetos matemáticos como o cubo, prisma quadrangular, área da base, área lateral, área total e volume etc.

iii) Registros algébricos: usados para os cálculos **da** $A_{base} = a^2$, $A_{lateral} = 4.\ a^2$, $A_{total} = 6.\ a^2$ **e** $V = a^3$.

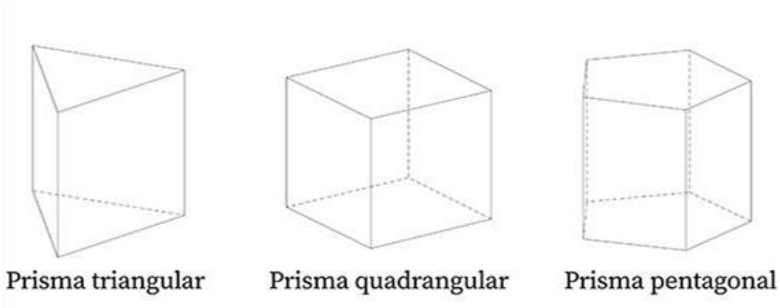
A visualização dos registros, possibilitados pelo aplicativo de RA, favorece a coordenação entre esses registros semióticos, facilitando, assim, os tratamentos e as conversões em atividades de geometria, como por exemplo, a representação do cubo em 3D e sua planificação. Também podemos destacar que a visualização e a interação direta com os sólidos podem ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão mais sólida dos conceitos geométricos, relacionando teoria com a prática de forma dinâmica. Duval (2011) destaca que, ao trabalhar com figuras geométricas, os alunos podem visualizar conceitos como proporções, relações entre as grandezas e transformações, tornando-os mais acessíveis e tangíveis.

5.3 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA SD

Análise da atividade 1: O uso do Geogebra

Na primeira atividade que analisamos, fez-se uso do Geogebra para construção e visualização dos poliedros do tipo prisma. A construção do prisma teve por objetivo introduzir e reforçar conceitos preliminares de aresta, vértice, base, altura e classificação do prisma quanto ao polígono da base, ou seja, descrever as características que definem um prisma. Estas características são solicitadas em atividades de cálculo de área e volume. Para o desenvolvimento da atividade, foi proposto aos alunos que construíssem os prismas apresentados, na figura 50 abaixo, usando o Geogebra3D. Na primeira atividade, 30 alunos estavam presentes e todos realizaram a atividade.

Figura 50 – Prismas a ser construído no Geogebra 3D pelos alunos.



Fonte: https://www.estudopratico.com.br/prismas/. Acesso 03/10/2022.

Para construir os prismas, os alunos seguiram as orientações, dada oralmente pela pesquisadora, como mostra o quadro 4, abaixo. Enquanto a pesquisadora realizada a construção do prisma usando o data show, o aluno realizava a mesma construção, usando o Chromebook. O prisma triangular foi o primeiro sólido a ser construído no Geogebra e, como dito anteriormente, não tivemos a preocupação, inicialmente, em agregar unidades de medida às variáveis aresta e altura e nem a preocupação em criar prismas ditos regulares, pois queríamos que os alunos, antes de usar medidas, fizessem o reconhecimento das unidades figurais mais importantes, como por exemplo, reconhecer e classificar o prisma pelo polígono da base, relacionando essa informação às outras, como por exemplo, a quantidade de faces, arestas e vértices.

Durante o desenvolvimento da atividade, algumas dificuldades foram relatadas pelos alunos que, em sua maioria, estavam relacionadas a pouca familiaridade/experiência com o Geogebra. Dos 30 alunos, 21 relataram conhecer o aplicativo, mas não haviam manipulado em situações de aprendizado, e 9 relataram não conhecer o aplicativo, sendo este experienciado pela primeira vez. Esses dados não são oriundos da aplicação de um questionário, mas da escuta ativa registrada no diário de observação, através de indagações, durante e após a aula.

Por fazer uso de recursos tecnológicos, e apesar de gerar muitas discussões oriundas da pouca familiaridade com o Geogebra, os alunos demonstraram notável interesse em realizar a atividade. Como salienta Moran (2007), o conhecimento é construído por desafios constantes e atividades significativas, que estimulem a curiosidade, a imaginação e a criatividade.

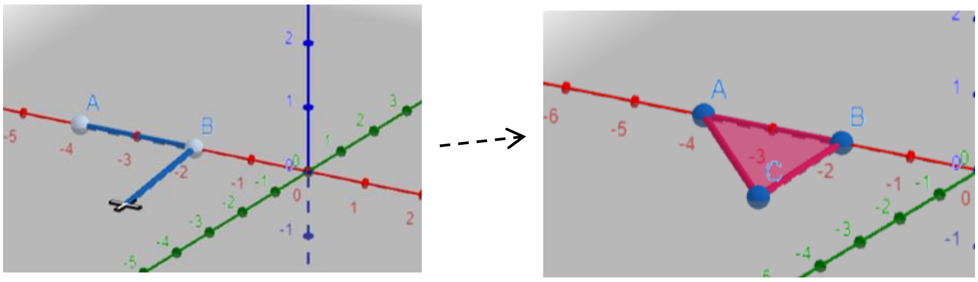
As figuras geométricas, ao serem manipuladas e exploradas em um software, como por exemplo, o Geometria RA e o Geogebra, permitem aos alunos criar conexões entre o que já conhecem e novos conceitos, resultando em uma aprendizagem mais significativa e interessante, uma vez que a compreensão é construída a partir das experiências próprias dos alunos.

Como ressalta Duval (2011), a solução de problemas de geometria no espaço deve permitir que o aluno transite entre unidades visuais em 2D e 3D e a construção dos sólidos no Geogebra pode favorecer essa transição, ao permitir a manipulação das unidades dimensionais, por exemplo, ao construir o sólido a partir da limitação do polígono da base.

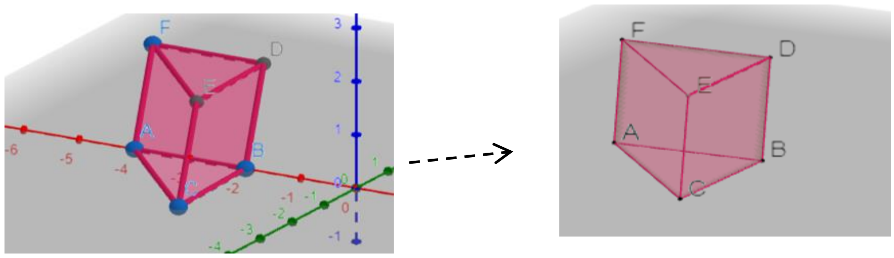
Quadro 4 – Orientação para a construção do prisma no Geogebra 3D.

Orientações iniciais para a construção do prisma:

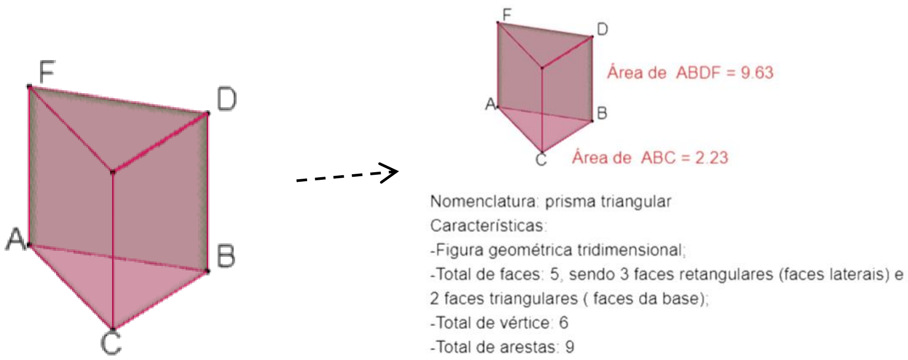
- Abra o Geogebra disponível em: https://www.geogebra.org/3d e refaça os passos:
- clique em <<ferramentas>>,
- ao aparecer ferramentas básicas, clique em <<mais>>,
- deslise a barra até a janela <<sólidos>>,
- em seguida clique em <<prisma>>.
- Após, inicia-se a construção do prisma.



1ª ação: Construir o polígono da base. A construção começa com o ponto A (0D), em seguida arrasta o cursor, para criar o ponto B. A distância entre A e B (AB) é uma das arestas da base (1D). Repete-se a ação para criar o ponto C e forma o polígono da base (2D), neste caso o triangulo ΔABC.



2ª ação: Para representar o prisma a partir do polígono da base, basta arrastar o cursor para cima e será formado o prisma em 3D. Podemos explorar outros recursos, como por exemplo, esconder as coordenadas X,Y e Z, o plano, mudar a cor da figura, aresta, etc.



3ª ação: Escrever as características da figura construída. Na janela de ferramentas básicas, deslize a barra até a janela <<outros>> e clique em ABC (texto), em seguida, clique em qualquer lugar no plano. Vai aparecer a caixa de texto. Comesse a escrever.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Como apresentado no quadro, a apreensão sequencial é explicitamente solicitada na atividade de construção dos sólidos. Ao realizar a construção de uma figura, usando o software Geogebra, o aluno, além da apreensão sequencial, também se vale da apreensão discursiva e perceptiva, pois a figura desenhada é suscetível a duas apreensões: a perceptiva das formas e a discursiva dos elementos figurais (Duval, 2012b).

Em atividades que exige a construção de figuras, como disposto na atividade 1, o objetivo central é a recriação de unidades figurais em 3D a partir das unidades figurais de dimensões menores, geradas automaticamente (DUVAL, 2022). Ou seja, o aluno perfaz a construção a partir da unidade dimensional menor 0D, seguida da unidade dimensional 1D, 2D e 3D.

Dos 30 alunos que participaram da atividade, 23 alunos realizaram a atividade sem recorrer a ajuda extra da pesquisadora. Porém, sete alunos não obtiveram o mesmo desempenho. A maior dificuldade apresentada pelos alunos que não apresentaram um bom desempenho, ao realizar a atividade 1, consistiu em rolar a barra deslizante para visualizar outras ferramentas no Geogebra, executar as orientações solicitadas, tais como, movimentar do sólido, ocultar o plano, as coordenadas, usar a caixa de texto, etc. Notou-se que os alunos que apresentaram tais dificuldades, estavam usando o Geogebra pela primeira vez, fato que pode justificar a pouca habilidade com a ferramenta. A seguir, mencionamos algumas falas dos alunos, após realizar a atividade no aplicativo Geogebra.

> ***Rh****: O Geogebra é bem interessante, mas é um pouco difícil de mexer.*
> ***Ri****: Eu já conheço o Geogebra, nele dá para calcular área e volume.*
> ***Fe****: Tem como trabalhar muita coisa de geometria no Geogebra, mas a gente tem que lembrar como fazer as coisas, por isso a gente tem que praticar mais.*
> ***Na****: O aplicativo é bom, um pouco difícil de usar, mas é interessante*.

A manipulação das ferramentas do Geogebra requer que os alunos reconheçam as operações disponíveis para as representações figurais. Apenas o uso do aplicativo não resulta em melhorias no ensino, se o aluno não dominar sua utilização para seu aprendizado. Esse domínio se reflete na prática da usabilidade. Conforme argumentado por Kenski (2013), a diferença na prática educacional não está apenas no uso das novas tecnologias, mas na forma como se compreendem e exploram as possibilidades oferecidas por essas tecnologias. Ou seja, não basta simplesmente adotar uma ferramenta tecnológica, é fundamental entender como essas ferramentas podem ser aproveitadas para ampliar e enriquecer o processo de ensino e da aprendizagem.

Ao utilizar o Geogebra para construir um prisma, os alunos fizeram uso de diferentes registros de representações (figural, algébrica, numérico) para compreender as relações entre as faces, arestas e vértices dos prismas. No registro figural, representado no Geogebra, realizaram diferentes tratamentos a saber: I) Exploração das variações possíveis do prisma, como alterações nas dimensões (altura, largura, comprimento), número vértices e faces, para entender como essas mudanças afetam suas formas e propriedades geométricas; II) Reduzir, ampliar e girar os prismas, observando-o de diferentes ângulos e perspectivas, entendo melhor suas propriedades espaciais.

Moran (2015) versa que ao usar softwares de geometria, aspectos importantes da figura se tornam mais visíveis, contribuindo desta forma, para a interpretação de figuras e resolução de problemas. A autora conclui que "[...] há melhor visibilidade dos tratamentos figurais quando estes podem ser modificados rapidamente e permitem a reflexão dedutiva sobre suas modificações para solucionar a tarefas" (MORAN, 2015, p. 131).

Ao concluir a Atividade 1, foi observado que 21 alunos demonstraram grande entusiasmo ao utilizar o app Geogebra. A capacidade de manipular, movimentar, construir e visualizar figuras dinamicamente, facilitando tratamentos e conversões, possibilitando a transição entre diferentes registros, parece ter contribuído significativamente para a aceitação do Geogebra. As falas dos alunos versam que o Geogebra:

> ***It***: *é interessante;*
> ***MaF***: *é um tipo de aplicativo que ajudar a ver e brincar com figuras;*
> ***Do:*** *tem várias ferramentas que a gente pode usar sem ter que ficar quebrando a cabeça;*
> ***Hy***: *mostra as figuras de um jeito que dá para entender melhor;*
> ***An***: *a gente pode mexer e ver a figura de um jeito diferente;*
> ***Da***: *não é chato e complicado, é mais como um jogo que ajuda a aprender.*

O uso de softwares também possibilita uma mobilidade, pelo sujeito, de operações com os objetos geométricos. Por exemplo, o "arrastar" de um vértice, a construção de polígonos e poliedros, a visualização de um objeto por várias perspectivas, além de medidas de comprimento e cálculos de área, dentre outras interações.

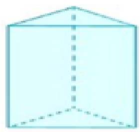
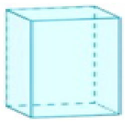
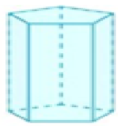
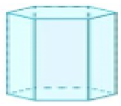
Análise da atividade 3: visualização figural

A terceira atividade teve como objetivo identificar as unidades dimensionais das figurais, bem como as suas desconstruções dimensionais, o que é essencial no trabalho matemático e, descrito por Duval (2011), como uma operação essencial relativa às figuras geométricas. Os tratamentos específicos às figuras geométricas, segundo Duval (2011), dão lugar a dois tipos de operações:

a percepção visual das formas e as desconstruções dimensionais. A segunda operação é explicitamente solicitada na atividade 3 da SD, apresentada no quadro 5.

Quadro 5 – Descrição da atividade 3 a ser realizada pelos alunos.

3 - Preencha a tabela.

Sólido	Nomenclatura	Número de faces laterais	Número de arestas	Número de vértices	Número de bases
					
					
					
					

Fonte: Arquivo da pesquisa.

Ressalta-se que o aluno não necessita de instrumentos para traçar, medir ou desenhar uma figura, para resolver o problema e que este não apresenta unidades de medida. Como escreve Duval (2011, p. 92), para “[...] aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos”.

A atividade 3 requer o uso de, pelo menos, duas apreensões: a perceptiva e a discursiva. A apreensão perceptiva é solicitada quando é requerido do aluno o reconhecimento das unidades figurais, como arestas, faces, vértices, classificação do polígono da base e nome do sólido analisado. Já a apreensão discursiva, fez-se necessária, quando o aluno, guiado pelo enunciado da questão, precisa identificar e escrever, baseados na percepção visual, a quantidade de vértices, arestas, faces e o nome da figura.

A resolução da atividade envolve a compreensão do enunciado, que está escrito em língua natural, acompanhado de quatro figuras representadas em 3D/2D. Prevalece, na resolução, o *olhar botanista*[45] associado à apreensão perceptiva orientada pela apreensão discursiva.

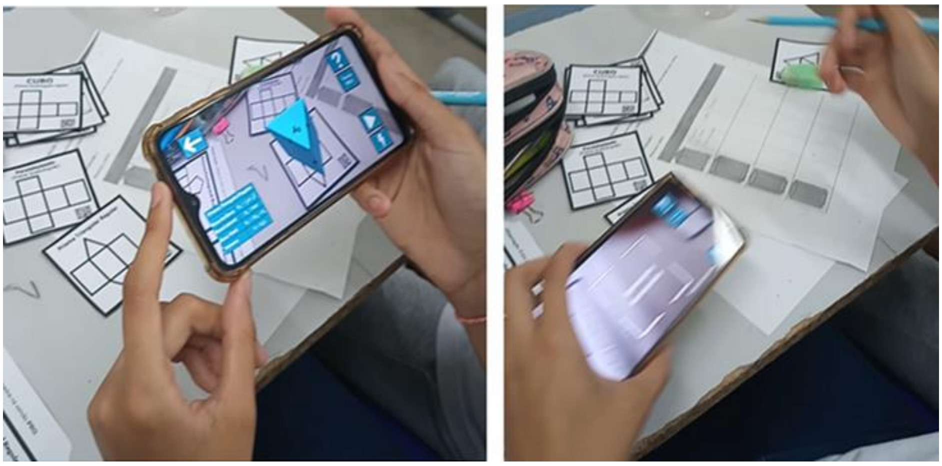
Na primeira parte da atividade, no preenchimento da segunda coluna da tabela, o aluno realiza a conversão do registro figural para o registro em língua natural, classificando/nomeando o prisma pelo polígono da base de dimensão 2D. O prisma regular é uma figura com contornos fechados, contendo bases paralelas e congruente e lados poligonais retangulares também congruentes.

Na resolução da segunda parte, a partir da terceira coluna, são realizadas as desconstruções dimensionais. Nesta etapa, o aluno olha os sólidos, neste caso os prismas, e perfaz a desconstrução que vai de 3D→2D, terceira coluna da tabela, 2D→1D, quarta coluna, e 1D→0D, quinta coluna, pois olha o todo e depois as faces individuais, os segmentos de reta que delimitam as faces individuais e os pontos que delimitam esses segmentos (vértices dos poliedros). Já na sexta coluna da tabela, prevalece a caraterística de paralelismo e congruência entre as formas geométricas, neste caso, as bases dos prismas regulares. Na atividade, temos a hipótese de que é necessário o gesto cognitivo de transitar entre as três dimensões para representar as vistas de um objeto e que o uso do app Geometria RA pode promover a adoção do olhar geométrico, descrito por Duval (2011), como uma operação de desconstrução dimensional imediata das formas em outras que não enxergamos à primeira vista, mas que é mais importante do que a que vemos. Vale ressaltar que a última figura da tabela não é contemplada pelo app Geometria RA e que a atividade foi elaborada pela pesquisadora em atendimento a percepções levantadas no questionário diagnóstico, já citado anteriormente.

A figura 51 mostra o app Geometria RA usado como recurso pedagógico para auxiliar na visualização das figuras em 3D/2D. A projeção do sólido, ao apontar a câmara do celular para o marcador, permite que o aluno explore, através da visualização e animação, outros aspectos do sólido que não são mostrados quando a figura é apresentada em uma folha de papel, pois como afirmado por Duval (2011), em uma figura, o que é dado a "ver" não é o que a figura tem a mostrar.

[45]"O olhar botanista é aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, é um 'olhar qualitativo" (MORETTI, 2013, p. 294).

Figura 51 – Uso do aplicativo Geometria RA na resolução da atividade três da SD.



Fonte: Arquivo da pesquisa**.**

Como apresenta a figura 51, a visualização do sólido, fornecida pelo aplicativo Geometria RA, pode ajudar o aluno a transitar entre os registros semióticos figurais, algébricos e discursivos com menor custo cognitivo. Corroborando, Tori et al (2018, p. 515) revelam que "[…] a manipulação dos objetos virtuais tridimensionais tais como, movimentação e rotação, podem ajudar os alunos que possuem dificuldades de visualizar e compreender imagens espaciais 3D representadas no papel em 2D", mostrando os contornos da figura como se fossem reais.

A atividade não requer um tratamento algébrico, pois, em toda as etapas da resolução, é exigido apenas a contagem das unidades significantes da figura e a desconstrução figural. Também se nota que a conversão é evidenciada apenas na segunda coluna, onde é solicitado a nomenclatura do registro figural, ou seja, a conversão do registro figural para o registro discursivo.

O uso das apreensões perceptiva e discursiva, na atividade 3, foi evidenciada quando os alunos, ao reconhecerem, determinaram, por meio de uma designação, as partes da figura, como por exemplo, o retângulo que forma as faces, os polígonos que formam as bases, a aresta comum a duas faces, o vértice comum a três arestas etc. Mesmo deixando explícito que o objetivo didático nessa atividade é a identificação das unidades significantes da figura, neste caso, os elementos que caracterizam os prismas, pela visualização e, apesar de usarem o app Geometria RA para visualizar e explorar outras características dos sólidos, que não são perceptíveis quando apresentadas em uma folha em 2D, seis alunos não preencheram corretamente a quinta linha da tabela, onde é apresentado a figura de um prisma hexagonal. Como dito anteriormente, esta figura não é contemplada pelo aplicativo Geometria RA e a desconstrução e exploração, realizada pelos alunos, ocorrem totalmente pela percepção visual, ou seja, pela heurística do registro figural. Os sujeitos focaram na visualização, se atentando apenas para a figura.

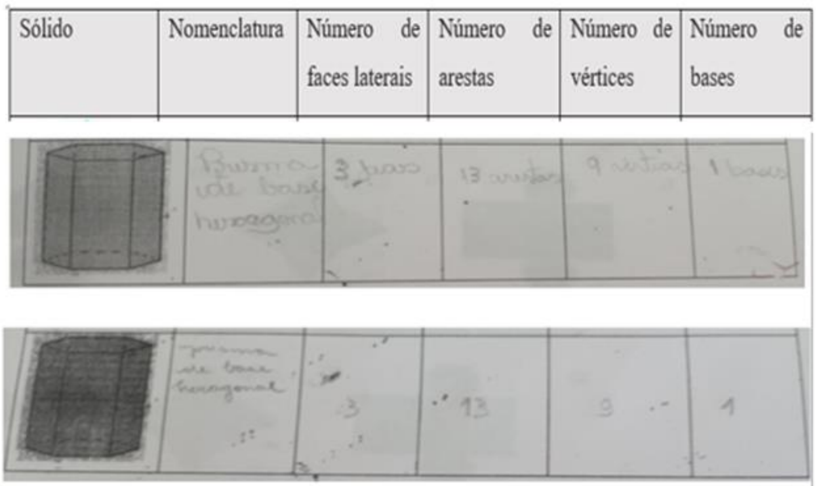
Duval (2022, p. 29-30) argumenta que a desconstrução dimensional das formas “[...] deve ser a etapa intermediária necessária entre o reconhecimento perceptivo imediato das formas e a identificação dos objetos matemáticos correspondentes […]”. O autor enfatiza que essa desconstrução é crucial porque serve como um elo entre a percepção visual imediata das formas e a identificação dos objetos matemáticos que elas representam. Portanto, a desconstrução dimensional das formas, processo central da visualização geométrica, intrínseca à maneira matemática de ver e realizada na mente ou por um instrumento, ocorre na unidade dimensionais maior (3D) para unidades menores (2D, 1D e 0D). Este é o princípio para que a aprendizagem de geometria espacial ocorra.

Tomemos, por exemplo, a resposta apresentada por dois alunos na figura 52.

Figura 52 – Algumas respostas da atividade três da SD

Ge

Fe



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Analisando as respostas, temos a conversão do registro figural para o da língua natural na coluna dois, que é uma conversão congruente, e foi unânime em acertos, o que ocorre apenas na coluna dois. Duval (2011) afirma que a apreensão de um objeto matemático requer que se tenha coordenação entre, pelo menos, dois registros do objeto. O autor é categórico em dizer que a compreensão dos ‘conceitos matemáticos’ se dá pela sinergia dessa coordenação.

No entanto, ao analisarmos as respostas das demais colunas, em que é solicitado ao aluno que indique o número de faces laterais, vértices, arestas e número de bases, não identificamos uma coerência nem pela análise do olhar a figura em 2D, nem no olhar a figura em 3D. Podemos dizer que estamos diante do que Moretti e Brandt (2015, p. 602) chamam de insucesso: “[…] a causa de insucesso em muitos problemas em geometria está na dificuldade de olhar uma figura nas dimensões inferiores ao que é dada”. Evidenciamos que esse fato foi observado em seis alunos.

Segundo Duval (2011), o reconhecimento das unidades dimensionais e a habilidade de realizar a desconstrução dimensional das formas por meio da visualização requerem treinamento, considerando que essa desconstrução se opõe à percepção visual. O autor enfatiza que, em determinadas circunstâncias, os elementos inerentes à apreensão perceptiva podem facilitar essas operações, enquanto em outras situações, ao contrário, podem inibi-las (DUVAL, 2012a).

Em suma, a atividade proposta orienta os alunos no sentido de desenvolver a “**visualização matemática**” das figuras geométricas, promovendo não apenas a compreensão das dimensões e relações espaciais, mas também a habilidade de transitar entre diferentes representações, indo da percepção visual à interpretação analítica. Essa abordagem visa aprimorar não apenas a capacidade de visualização tridimensional, mas também a habilidade de manipular mentalmente as dimensões geométricas, alinhando-se à perspectiva de Duval (2009, 2011, 1012a, 2012b, 2012c) sobre a importância do treinamento e da familiaridade com as representações espaciais para a realização da desconstrução dimensional.

Análise da atividade 4: reconhecimento das unidades métricas no prisma.

A atividade quatro foi realizada por 30 alunos. Nesta atividade, os alunos calcularam o volume do prisma. Como mostrado na figura 53, existe uma complementariedade entre enunciado e figura que deve ser percebida pelo aluno para interpretar o problema. A atividade requer uma série de habilidades cognitivas, dentre elas: desconstrução dimensional de uma figura, realização dos tratamentos no registro figural e discursivo e efetuar a conversão, quando necessária. Como a desconstrução ocorre, em sua maioria, pela percepção, as seguintes apreensões são solicitadas:

i) A apreensão perceptiva solicitada ao fazer o reconhecimento da figura e suas características, como reconhecimento do polígono da base, faces, arestas que são perceptivas ou não ao olhar imediato;

ii) A apreensão discursiva é mobilizada para descrever o processo utilizado para calcular o volume. Isso inclui a explicação passo a passo das operações matemáticas realizadas, a justificativa para a escolha das fórmulas e a relação entre as medidas fornecidas no cruzamento da informação, no registro figural com registro discursivo, necessárias para realizar o cálculo do volume;

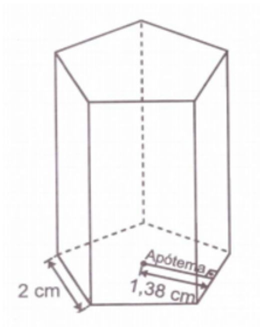
iii) A apreensão operatória é requerida ao fazer modificações na figura, ou seja, quando é necessário dividir a figura em subfiguras para calcular o volume. Há também, neste caso, a utilização da fórmula correta para a área da base, que é essencial para o cálculo do volume.

A desconstrução dimensional das unidades significantes, aplicada na atividade 4, requer uma análise das medidas do prisma. O aluno, ao lidar com a apótema e a altura, fornecidas pelo registro discursivo e figural, deve compreender não apenas as unidades de medida, mas também a sua inter-relação geométrica. Isso envolve a decomposição dos elementos dimensionais do prisma-apótema e altura- e sua aplicação na fórmula do volume. A apótema representa a distância do centro do pentágono até a aresta da base, sendo perpendicular à aresta da base, e a altura perpendicular ao polígono da base. Essas são medidas fundamentais que requerem compreensão para sua utilização correta no cálculo do volume.

A abordagem figurativa exige dos alunos a habilidade de visualizar e manipular as figuras espaciais. Ao lidar com um prisma pentagonal, os alunos são desafiados a compreender não apenas a configuração da base, mas também a disposição tridimensional das faces arestas e vértices. Isso requer uma compreensão espacial avançada, permitindo a manipulação mental do prisma, identificação das relações entre suas partes constituinte e a correlação dessas relações com fórmulas matemáticas pertinentes à determinação do volume. Na figura 53, temos a atividade na qual o aluno realizou tratamento para chegar à solução, neste caso, calcular o volume do prisma.

Figura 53 – Recorte do PAEBRES 2018.

4 - (PAEBES – 2018) Laura comprou uma forma de gelo cujos espaços para colocar a água têm o formato de um prisma pentagonal regular reto cuja medida interna de sua altura é 4 cm. A figura abaixo representa um desses espaços com algumas de suas medidas internas indicadas.



Qual é a quantidade máxima de água que pode ser colocada em cada um desses espaços?

a) 6,90 cm³
b) 9,20 cm³
c) 27,60 cm³
d) 40,00 cm³
e) 53,80 cm³

Fonte: PAEBES, 2018.

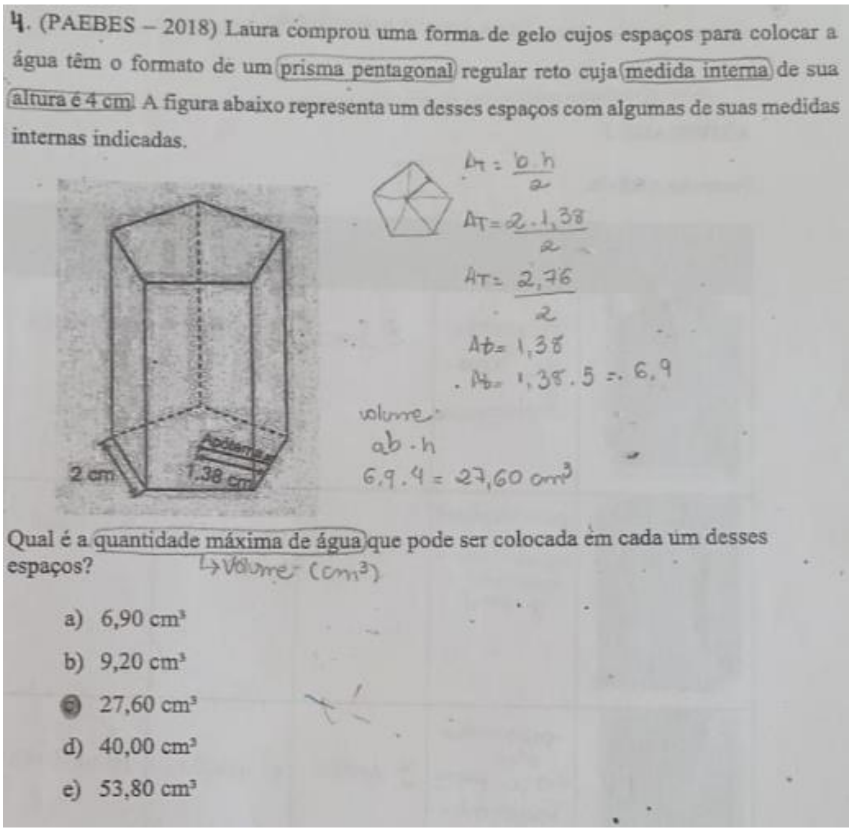
A solução da atividade envolve a compreensão do enunciado, que está escrito em língua natural, acompanhado de uma figura representada em 3D/2D. Prevalece, na resolução, dois olhares que se sobrepõem: o botanista e o inventor[46], associados às apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Pressupõe-se que, para realizar os tratamentos, os alunos realizem a identificação das unidades significantes da figura, a desconstrução dimensional e modificação mereológica.

Segundo Duval (2016), para aprender geometria, os alunos devem aprender a desconstruir dimensionalmente as figuras e aprender a desconfigurar uma figura para configurá-la de uma outra maneira. Para o autor a caracterização dimensional das unidades figurais é o fator que permite compreender como os enunciados se articulam com a visualização matemática. Podemos dizer que esses fatores desvelam a interconexão entre os elementos verbais e as representações visuais, facilitando, assim, a compreensão. Duval (2016, p. 20) fala que quando o aluno se depara com questões em que devem ler o enunciado, "[…] a única tarefa é identificar as expressões que descrevem cada um dos dados necessários para resolver o problema". Esse

[46]O olhar inventor é aquele em que o sujeito, ao operar sobre a figura dada, adiciona traços, modificando a figura para descobrir novos procedimentos para chegar à resolução do problema. Como exemplo desse olhar, podemos citar o corte no paralelogramo, que tem dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos, para representá-lo em um retângulo com quatro ângulos retos medindo 90º cada um.

fato pode é evidenciado nas resoluções das atividades dos alunos, como apresentado na figura 54.

Figura 54 – Recorte da atividade 4 realizada pela aluna Rh.



Fonte: Arquivo da pesquisa.

Como apresenta a figura 54, a apreensão perceptiva foi percebida quando a aluna Rh destaca as informações no registro discursivo. O enunciado é um guia para conduzir as operações que serão realizadas, pois nem sempre pode-se perceber na figura, a heurística para a solução dos problemas. Assim, podemos dizer que esse ato é o primeiro tratamento realizado pela aluna Rh, ou seja, pelos alunos, no registro discursivo. Scheifer (2017, p. 59) evidencia a importância da apreensão perceptiva pois, segundo a autora, "[...] todas as demais apreensões são subordinadas a apreensão perceptiva", sendo um guia para a entrada das demais apreensões.

A apreensão discursiva é evidenciada nas produções dos alunos quando: (i) escolhem a melhor forma de resolver o problema; (ii) interpretam e relacionam as informações no registro discursivo para o registro figural e vice-versa e (iii) representam essas informações no registro algébrico. Para ilustrar esse processo, retomemos o exemplo da aluna Rh, que identificou as informações-chave no registro discursivo e dividiu a solução do problema em etapas distintas:

começou calculando a área do triângulo, prosseguiu determinando a área do pentágono regular e, por fim, calculou o volume do prisma pentagonal. Este exemplo destaca a apreensão discursiva, que, apesar de estar subordinada à compreensão operatória, oferece aos alunos a liberdade de expressar suas próprias formas de pensamento e raciocínio ao resolver problemas.

A apreensão operatória é explicitamente solicitada quando o aluno subdivide a figura, neste caso o prisma pentagonal em 3D, em subfiguras: pentágono, triângulos e retângulo em (2D). Essa subdivisão pode ser realizada por um instrumento, como apresentado pela aluna Rh, que usou o lápis para reproduzir o pentágono (2D), polígono que representa a base do prisma e o subdividiu em cinco triângulos (2D); ou ficar apenas no campo da representação mental. Duval (2012b, p. 125) afirma que uma figura pode ser modificada de várias formas, e, a essa possibilidade de dividir uma figura em várias subfiguras formadas da figura inicial, o autor chama de modificação mereológica, que se faz em função da relação parte e todo, sem alterar suas dimensões e tamanho: "[...] repartir uma figura em subfiguras permite, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas [...]". O cálculo do volume do prisma pentagonal, expresso por ($v = A_{base} . h$), passa pela etapa do cálculo da área da base ($A_{base} = 5. A_{triângulo}$), que requer uma modificação mereológica.

Na figura 54, notamos a utilização de representação auxiliar: o desenho do pentágono e sua subdivisão em triângulos. Essa representação serviu para a dedução da expressão da sua área em termos das informações dadas no problema. Voltando ao desenvolvimento da atividade da aluna Rh, o pentágono foi dividido em cinco triângulos congruentes e isósceles[47], fato evidenciado no registro discursivo representado por "**prisma pentagonal regular reto**", com traços (1D) partindo do centro e se prolongando até o vértice (0D) das bases. Essas ações realizadas pelos alunos são descritas por Duval (2012a) como tratamentos figurais que podem ser aplicadas tanto de forma física quanto mental, nas unidades figurais de uma figura geométrica, com o objetivo de provocar uma alteração na configuração da própria figura quando se busca por uma solução.

[47]Triângulos isósceles são triângulos que possuem dois lados congruentes. Isso significa que dois dos três lados do triângulo têm o mesmo comprimento, enquanto o terceiro lado pode ter um comprimento diferente. Além disso, os ângulos opostos aos lados iguais em um triângulo isósceles também têm medidas iguais.

No entanto, como ressalta Duval (2009), a realização das operações matemáticas não ocorre no campo das representações mentais, ou seja, é necessária uma representação semiótica para evidenciar as operações matemáticas a serem realizadas.

A conversão é evidenciada quando, após os alunos relacionarem “a quantidade máxima de água a ser colocada em cada espaço da forma” com o “volume a ser calculado”, eles representam essa informação com as informações complementares do registro figural na fórmula para o volume com registro algébrico. Como apresentado na figura 54, a aluna Rh fez a conversão, que pode ficar apenas na representação mental, ao escrever **“volume (cm^3)”** logo abaixo de **“a quantidade máxima de água”**, no enunciado da questão 4.

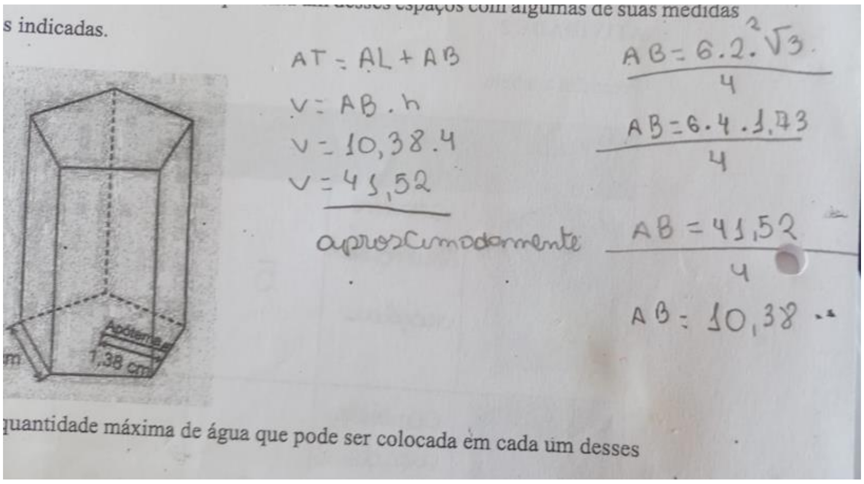
Outra conversão, explicitamente presente nas soluções dos alunos, se configura na passagem do registro figural para o registro algébrico. Ao analisar as produções dos alunos, notamos uma semelhança entre essas conversões: dos 30 alunos que desenvolveram a atividade, 28 fizeram a conversão seguindo, praticamente, os mesmos passos, como apresentado na figura 54, para calcular a quantidade máxima de água colocada em cada espaço da forma:

i) Cálculo da área do triangulo: $\boldsymbol{A_t = \frac{b\,.\,h}{2}}$, substituindo as variáveis b (aresta da base) por 2 e h (apótema) por 1,38;
ii) Cálculo da área do pentágono: para obter a área do pentágono regular, que neste caso é a base do prisma regular, os alunos multiplicaram a área do triângulo por 5: $A_{Pentágono} = 5A_t$;
iii) Cálculo do volume: para chegar ao volume do prisma, os alunos multiplicaram a área do pentágono pela altura do prisma, que neste caso é igual a 4 cm, obtendo, assim, o volume do prisma pentagonal: $V_{prisma} = A_{base.}\, h$.

Notamos que essa forma desmembrada para calcular o volume do prisma pentagonal, evidencia que existe a coordenação, por parte dos alunos, entre os registros em língua natural, figural e algébrico, realizados pelos alunos. Duval (2009) ressalta a importância dessa coordenação para a aprendizagem de matemática, pois é necessário dispor de várias representações do mesmo objeto matemático em diferentes registros para não confundir um objeto com sua representação, sendo esta ação de suma importância para a aprendizagem em matemática.

Porém, notamos que o desenvolvimento apresentado por dois sujeitos se diferenciava dos demais. Conforme ilustrado na figura 55, a falta de coordenação entre os registros criou um obstáculo para alcançar o sucesso na resposta.

Figura 55 – Recorte da atividade 4 realizada pela aluna Me.



Fonte: Arquivo da pesquisa.

Dentre as produções, percebemos que dois sujeitos fizeram uso da expressão que permite calcular a área total da base de triângulos equiláteros: $A_{base} = \frac{n \,.\, l^2 \,.\sqrt{3}}{4}$,. Porém, notam-se alguns equívocos ao se calcular a área da base: o primeiro, está na apreensão perceptiva e operatória pela decomposição mereológica do polígono da base tem-se cinco triângulos isósceles e não seis triângulos equiláteros; o segundo, recai sobre a desconstrução dimensional, que corre na troca da altura do triângulo (apótema = 1,38) pela aresta da base 2cm. Esses fatos demonstram que houve coordenação, porém faltou o reconhecimento do objeto matemático, em consequência, também o reconhecimento de suas representações em outros registros. É importante ressaltar que a aluna não usou uma representação auxiliar da base para desenvolver sua resolução.

Na atividade 4, temos a hipótese de que o uso do aplicativo Geometria RA facilitou a coordenação entre o registro figural, o registro algébrico e o registro em língua natural, pois o aplicativo permite que os alunos transitem entre esses registros, fazendo “[...] incessantes idas e vindas entre um registro discursivo e um registro de visualização” (DUVAL, 2016, p. 17), por exemplo, para alcançar o sucesso na resolução do problema. Esse fato é evidenciado pelas falas dos alunos:

***Ag**: Que legal, as fórmulas estão aqui do lado;*
***Ri**: Dá para ver o prisma certinho.*
***Mi:** Gira para você ver os lados*
***MaS**: Clica do lado para ver a planificação.*

Análise da atividade 11: Reconhecendo as unidades figurais da pirâmide

A atividade 11 foi realizada por 29 alunos e seu objetivo reconhecer as unidades figurais da pirâmide, bem como calcular o volume. Como mostra a Figura 54, apesar do enunciado referenciar o objeto figural por "**pirâmide de base quadrada"**, todas as informações métricas para o desenvolvimento da atividade estão apresentadas no registro figural. De acordo com Duval (2012a), os tratamentos que se concentram exclusivamente na forma figurativa são relevantes, dado seu papel decisivo na aplicação heurística dos elementos figurativos.

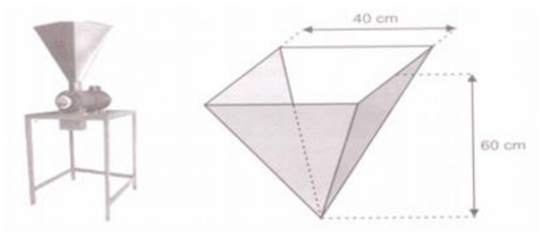
As apreensões perceptiva, discursiva e operatória são essenciais para os tratamentos realizados pelos alunos, uma vez que temos, no registro em língua natural, referências ao registro figural. Além disso, temos uma complementaridade de formas entre as figuras, sendo que do lado esquerdo há a figura do moedor e do lado direito a figura que representa a ampliação do recipiente acoplado ao moedor com as medidas de suas dimensões.

A desconstrução dimensional das unidades significantes se faz pela percepção da figura, neste caso, a pirâmide de base quadrada, onde o aluno realizará a conversão das informações do registro figural para o registro algébrico e, após, os tratamentos. A figura 56 apresenta a atividade que foi aplicada aos alunos.

A compreensão dos diferentes registros de representação é fundamental para os alunos, pois permite uma abordagem mais completa e integrada dos conteúdos. A análise das figuras ressalta a importância da percepção visual e do entendimento das relações entre as formas apresentadas. A atividade proposta visa desenvolver a habilidade dos alunos em transitar entre diferentes registros, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos.

Figura 56 – Atividade 11aplicada aos alunos.

(PAEBES – 2016) Um recipiente acoplado a um moedor tem o formato de uma pirâmide reta de base quadrada cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo.



A capacidade desse recipiente, em centímetros cúbicos, é:

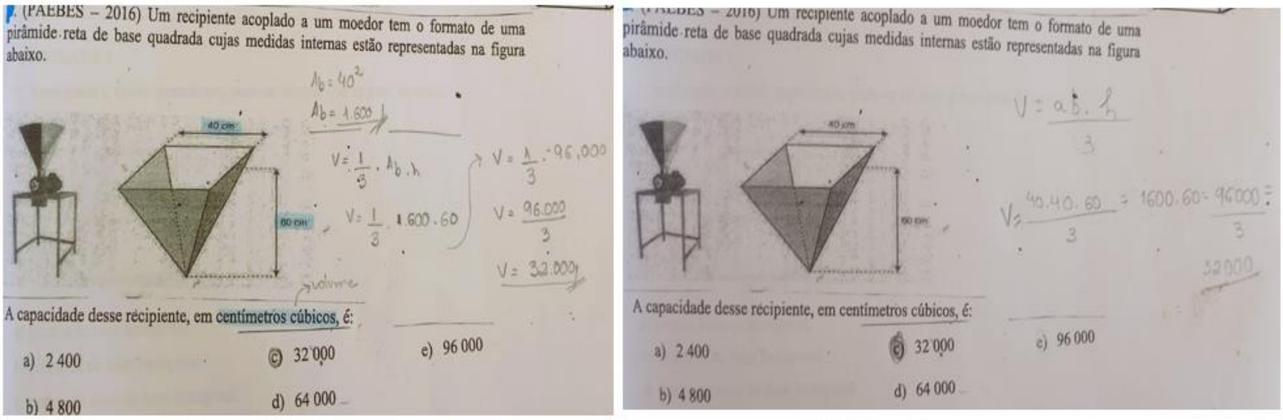
a) 2 400
b) 4 800
c) 32 000
d) 64 000
e) 96 000

Fonte: PAEBES, 2016.

A resolução da atividade envolve a compreensão do enunciado, que está escrito em língua natural, acompanhado de duas figuras representadas em 3D/2D. Prevalece, na resolução, o olhar botanista seguido do olhar inventor. A atividade considera, à primeira vista, duas apreensões: a primeira é a perceptiva, pois a questão contempla uma figura que guia a solução do problema. A segunda é a apreensão discursiva, que se justifica pelos termos **“prisma de base quadrada”, “capacidade desse recipiente”, “centímetros cúbicos”**, além da descrição do enunciado. Uma terceira apreensão é necessária, a apreensão operatória, pois é preciso desconstruir a figura para “ver” as possibilidades de soluções. Nesta atividade, as unidades figurais que se destacam pela percepção imediata é a do prisma de base quadrada (3D), no plano do papel (2D) e a das retas que contornam a figura (1D). O olhar volta-se para os polígonos que formam as faces da pirâmide e, em seguida, para as retas que formam os contornos dos polígonos. Sendo assim, a desconstrução ocorre por 3D → 2D, 3D→1D e 2D → 1D. De acordo com Duval (2016, p. 30-31), ao praticar a desconstrução ou a decomposição de uma figura, torna-se evidente que ela pode referenciar propriedades além daquelas inicialmente consideradas na figura original.

Além de conhecer as características que definem a pirâmide, os alunos precisam conhecer as expressões matemáticas para o cálculo do volume da pirâmide, ou seja, o registro algébrico para realizar os tratamentos e determinar o volume da pirâmide. Na figura 57, temos as resoluções realizadas por duas alunas e, novamente, notamos uma paridade entre as resoluções dos alunos, com exceção da aluna AnC.

Figura 57 – Diferentes tratamentos para a questão 11.



Aluna Rh Aluna AnC

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Como mostra a figura, existe coordenação ao usar os registros algébricos, pois as alunas podem escolher entre uma forma ou outra para calcular o volume da pirâmide. Por exemplo, a aluna Rh optou por usar duas expressões para calcular o volume da pirâmide: primeiro calculou a área da base, polígono quadrado $A_b = l^2$, depois substituiu o resultado na expressão para calcular o volume da pirâmide: $\boldsymbol{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$, fato esse observado em 28 trabalhos. Diferente dos demais, que usaram duas expressões para calcular o volume da pirâmide, a aluna AnC usou apenas uma expressão para calcular o volume da pirâmide, sendo está representada por: $\boldsymbol{V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}$.

Quanto as apreensões, observamos a aplicação da apreensão operatória quando ocorre a modificação da estrutura da pirâmide quadrangular. Essa observação é notável durante a explicação do procedimento para calcular a área da base da pirâmide, assim como para o cálculo do volume, quando os estudantes estabelecem uma relação entre: i) a altura, que é um segmento de reta externa à pirâmide, e um elemento pertencente a ela; ii) a aresta da base com o segmento de reta, paralelo a esta aresta, como sendo um elemento pertencente a base. Neste ponto, concordamos com Duval (2022, p. 11), pois "[…] é a apreensão operatória construída no processo que faz a fecundidade intuitiva das figuras.

Nota-se a presença da apreensão operatória de posição no registro figural que representa a pirâmide, na questão 11, pois a posição da pirâmide não corresponde ao registro figural de uma pirâmide comumente apresentada nas introduções dos livros didáticos. Assim, podemos dizer que uma rotação imaginária é necessária para que a visualização das informações, referentes ao registro figural, como base da pirâmide, aresta da base, vértice, faces etc., seja percebida pelo aluno. De acordo com Duval (2012a, p. 288), na apreensão operatória de posição a figura mantem "[…] o mesmo tamanho e forma, mas com variação de orientação, rotação, translação, [...]".

A apreensão discursiva é notada, quando o aluno, após ler o enunciado, faz relação entre a: i) "**capacidade do recipiente**" com o "**volume da pirâmide**"; ii) **altura** como a **segmento de reta** posicionado ao lado da pirâmide e iii) **aresta da base** com o **lado do quadrado**, com o segmento de reta paralelo a esta aresta. Essa correspondência, entre texto e figura, é referenciada por Duval (2023, p. 50) como sendo "as unidades de sentido no enunciado a serem colocadas em correspondência com as unidades figurais 1D ou 2D", e usa essas informações para calcular a capacidade do recipiente em centímetros cúbicos.

Já a desconstrução dimensional da figura em 3D/2D é explicitamente evidenciada quando, ao identificar as unidades dimensionais elementares 3D, 2D, 1D e 0D, ocorre a representação implícita de 3D→2D, identificação da área da base; 3D →1D, identificação da altura da pirâmide; e 2D→1D, identificação da aresta da base. Aqui, evidenciamos que "[...] a compreensão dos conteúdos só pode ser construída a partir de uma sinergia entre visualização e linguagem. Essas condições cognitivas são de certa forma as condições para aprender a aprender em geometria" (DUVAL, 2022, p. 5).

Nesta atividade, o uso do app geometria RA foi significativo, pois, ao apontar a câmara do celular para o marcador, os alunos visualizaram e exploraram outros aspectos do registro figural que não são perceptíveis quando a figura é apresentada no papel.

Análise da atividade 14: reconhecendo as unidades figurais em copos redondos

A atividade 14 foi realizada por 29 alunos. Teve por objetivo didático reconhecer as características do cone, bem como calcular seu volume. No enunciado da questão, temos a referência do objeto figural: "**cone circular reto"**, porém todas as informações métricas para calcular o volume do cone que, neste caso, como mostra a figura 58, é uma sombrinha de chocolate, está no registro figural.

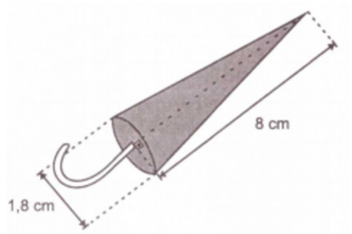
Para o desenvolvimento da atividade, o aluno precisa reconhecer, no registro figural, as unidades dimensionais que corresponde à **altura** e ao **raio** do cone, e relacionar a **quantidade**

mínima de chocolate (registro discursivo) com o **volume do cone** (registro algébrico). O reconhecimento das unidades dimensionais, em um registro figural, ocorre pela apreensão perceptiva e discursiva, pois a figura geométrica, ao ser utilizada em um contexto discursivo, se transforma em um elemento que faz parte de um discurso teórico (DUVAL, 2012b). Esse fato também é evidenciado por Scheifer e Brandt (2020, p. 165), expressando que: “[…] a apreensão discursiva é que torna a figura passível de interpretações e entendimento, e só ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva”.

Para calcular a quantidade mínima de chocolate para produzir uma sombrinha de chocolate, com as medidas apresentadas na figura, o aluno deve realizar a desconstrução dimensional das unidades significantes, ou seja, deve, pela apreensão operatória, indicar as medidas dos elementos: altura, raio, bem como área da base. Na figura 58, temos a imagem da atividade 14 aplicada aos alunos.

Figura 58 – Atividade 14 aplicada aos alunos.

(PAEBES – 2018) Luciana produz sombrinhas maciças de chocolate em formato de um cone circular reto para vender. Na figura abaixo, está representada essa sombrinha, com algumas de suas dimensões indicadas, e, em cinza, a parte maciça de chocolate.



Dado:
$\pi \cong 3$

Qual é a quantidade mínima de chocolate que Luciana utiliza para produzir uma dessas sombrinhas?

a) 6,48 cm³
b) 14,40 cm³
c) 25,90 cm³
d) 7,20 cm³
e) 19,44 cm³

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

A resolução da atividade envolve a compreensão do enunciado, que está escrito em língua natural, acompanhado de uma figura representada em 3D/2D. Prevalece, na resolução, o olhar botanista seguido do olhar inventor.

A atividade contempla, à primeira vista, a perceptiva, pois a questão apresenta a figura do cone que guia a solução do problema, seguida da apreensão discursiva, que se justifica pelos termos

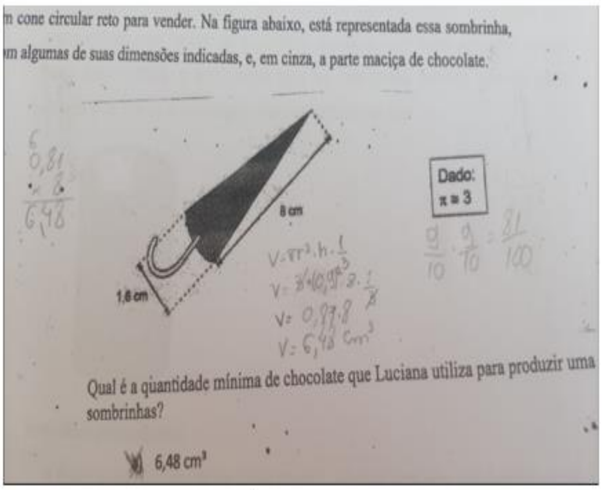
"cone *circular reto", "quantidade mínima de chocolate", "sombrinha maciça no formato de um cone"*, além da descrição global do enunciado. Essas apreensões são necessárias, à primeira vista, pois "[...] em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização para a desconstrução das formas [...]" (DUVAL, 2011, p. 100), em geometria plana e espacial.

A terceira apreensão necessária é a apreensão operatória, pois é preciso "ver" as unidades dimensionais que possibilitam construir a solução. Pela apreensão perceptiva podemos ver um triangulo equilátero inscrito em um retângulo cuja base é 1,8 cm, ou um ou dois triângulos retos cuja base é 0,9 cm. Da mesma forma, podemos ver um cone sendo apoiado nas laterais do retângulo cuja altura é representada pelos pontilhados ligados ao cabo da sombrinha. Para Duval (2011), problemas de geometria situado no espaço, exigem do sujeito um olhar que permita ver as formas (2D) geradas pela intersecção entre um sólido (3D) com um plano específico no espaço.

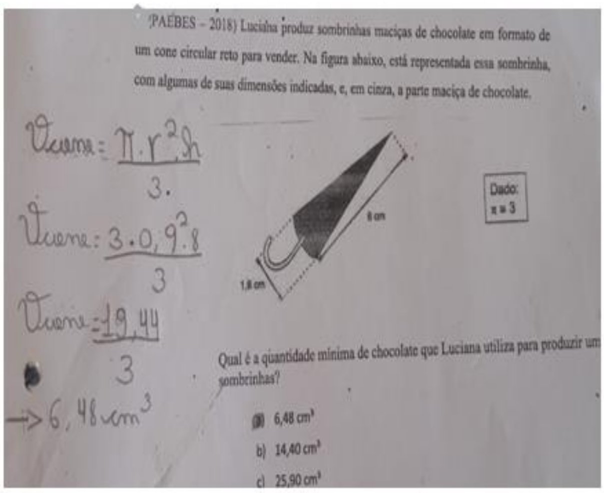
Ao analisar as produções dos alunos, observamos uma predominância no uso da expressão $\boldsymbol{V_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}$ para calcular o volume (quantidade mínima de chocolate) do cone, nas 28 resoluções. Porém, os tratamentos realizados diferem na habilidade em coordenar os registros de apresentação semióticos. Por exemplo, 15 alunos usaram a simplificação de fração, usando corte[48] com um traço no algarismo 3, como o apresentado na atividade do aluno Ri, calculando o volume pela expressão: $\boldsymbol{V_{cone} = r^2 \cdot h}$, porém, apenas na atividade do aluno Ri, observamos registros das operações: multiplicação de frações e multiplicação de números decimais, em um registro discursivo. Duval (2009) advoga que, quando a coordenação dos registros é desenvolvida em um sujeito, ele pode se ater ao tratamento em um só registro, como a aluna Ag e mais 12 alunos fizeram, ou explorar outras formas de tratamento, como apresentado pelo aluno Ri. O autor acrescenta que é a coordenação das representações semióticas que permite ao sujeito ter estratégias heurísticas e conduzir bem os tratamentos escolhidos (DUVAL, 2009).

Figura 59 – Dois exemplos de tratamento para o cálculo do volume do cone.

[48]Os cortes com traços representam que ocorreu uma divisão ou uma simplificação entre dois números em uma fração.



Aluno: Ri



Aluna: Ag

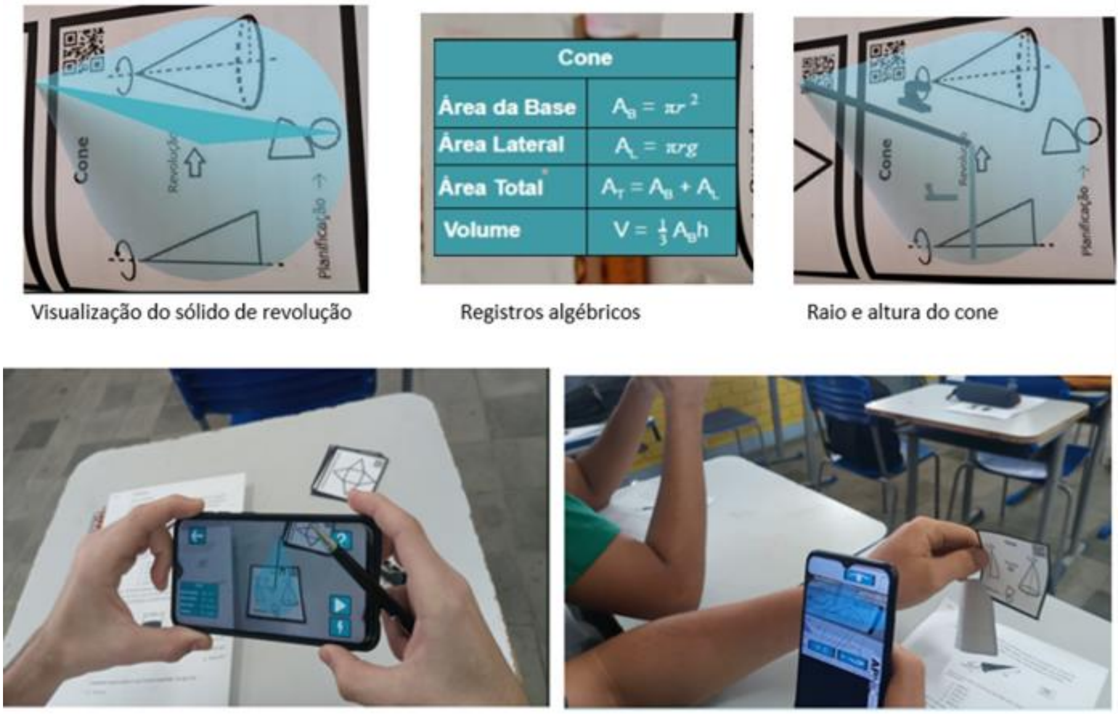
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Segundo Scheifer e Brandt, (2020), a integração entre representações visuais de figuras e o discurso matemático requer uma transição constante entre diferentes dimensões para compreender as partes individuais das figuras. A dimensão 1D, apresentada no registro figural do cone circular reto, na Figura 59, a ser posta em correspondências são: ***altura, diâmetro e raio***. A análise mostrou que todos os alunos identificaram a relação existente entre raio e diâmetro, sendo o diâmetro (d igual ao dobro do raio ($d = 2 \cdot r$) e o raio igual a metade do diâmetro($\boldsymbol{r = \frac{d}{2}}$). Nas produções analisadas, essa correspondência é implícita quando ao calcular o volume do cone, os alunos substituem o raio (r) por **0,9** cm, sendo o diâmetro **(** $d = 1{,}8$). Outra relação notada, ainda dentro da dimensão (1D), é a altura $h = 1{,}8$.

Essas unidades figurais, a serem postas em correspondência, estão explícitas na figura e designadas no enunciado do problema, não ocasionando dificuldades ou conflitos entre a organização perceptiva da figura e a introdução discursiva do problema.

A visualização do cone no app Geometria RA permitiu que os alunos explorassem tanto a forma do cone em 3D quanto sua conversão em planificação e em registro algébrico, conforme mostra a figura 60 abaixo.

Figura 60 – Uso do app Geometria RA na resolução de problemas geométricos.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Segundo Duval (2016), a autonomia intelectual surge da habilidade em coordenar diferentes registros de representação. O uso do aplicativo Geometria RA para visualizar sólidos sob outras perspectivas, além de potencializar essa coordenação, também "amplia os sentidos do usuário para que possam perceber mais informações" (TORI et al., 2018, p. 531) do objeto matemático 3D, apresentado no plano 2D em um papel. Quando aumentamos a percepção visual através da Realidade Aumentada (RA), o aluno pode inspecionar o objeto 3D a partir de uma variedade de perspectivas diferentes, melhorando sua compreensão sobre o objeto a ser estudado.

Ao explorar os conceitos matemáticos de forma virtual, através do aplicativo Geometria RA, os alunos puderam visualizar expressões matemáticas complexas e representações de objetos 3D em 2D usando seus celulares. Isso possibilitou uma experiência única, potencializando a conversão entre as diferentes formas de ver o mesmo conceito. Tal flexibilidade na compreensão não é comum quando os estudantes recorrem apenas a livros ou estão limitados às atividades em uma lousa tradicional.

Na atividade a seguir, onde o enunciado é composto por duas figuras, a potencialidade da conversão entre registros semióticos fica ainda mais evidente.

Análise da Atividade 15

A atividade 15 envolveu a participação de 33 alunos e teve como objetivo educacional a comparação das unidades de medida de volume entre sólidos distintos, especificamente o cone e o cilindro. Esta atividade demandou dos alunos habilidades como:(i) reconhecer as características distintivas dos dois sólidos; (ii) identificar as unidades dimensionais a serem relacionadas e (iii) aplicar a expressão correspondente ao cálculo do volume dos sólidos.

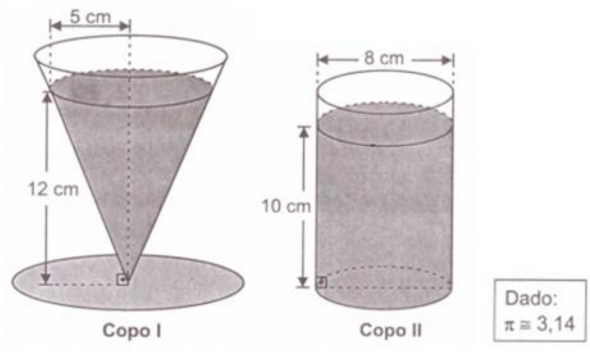
Embora a figura seja acompanhada por orientações sobre a operação a ser realizada, expressa no texto como: **A quantidade de açaí contida no copo II supera a quantidade do copo I**, todas as métricas necessárias para calcular o volume estão detalhadas nos registros figurais. Conforme destacado por Scheifer (2017, p. 58), nos tratamentos figurativos, "[…] uma figura é um importante suporte intuitivo para as atividades em Geometria, pois permite ver muito mais do que diz o enunciado".

Conforme indicado no registro discursivo da atividade 15, além de coordenar os registros algébricos com vistas ao cálculo do volume, espera-se que o aluno estabeleça a associação da palavra **supera** com a operação **de subtração**, uma vez que a questão foca a quantidade de açaí no copo II que é maior do que a quantidade presente no copo I.

Nesta atividade, assim como nas demais, observa-se a presença das apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Através da apreensão perceptiva, identificam-se as unidades figurais elementares dos sólidos; a apreensão discursiva viabiliza a identificação e compreensão das figuras, enquanto a apreensão operatória permite as modificações estruturais. Conforme destaca Duval (2012b), a resolução de problemas de geometria e o desenvolvimento do raciocínio exigido, dependem dessas três apreensões. Na figura 61, temos a atividade 15 que foi aplicada aos alunos.

Figura 61– Atividade 15 aplicada aos alunos.

15) (PAEBES – 2017) Uma lanchonete serve açaí em dois tipos diferentes de copos, sendo um com formato de cone e outro com formato de cilindro, ambos retos. Os copos são preenchidos até determinada altura, conforme está representado no desenho abaixo.



A quantidade de açaí contida no copo II supera a quantidade do copo I em:

a) 125,6 cm³

b) 188,4 cm³

c) 376,8 cm³

d) 439,6 cm³

e) 816,4 cm³

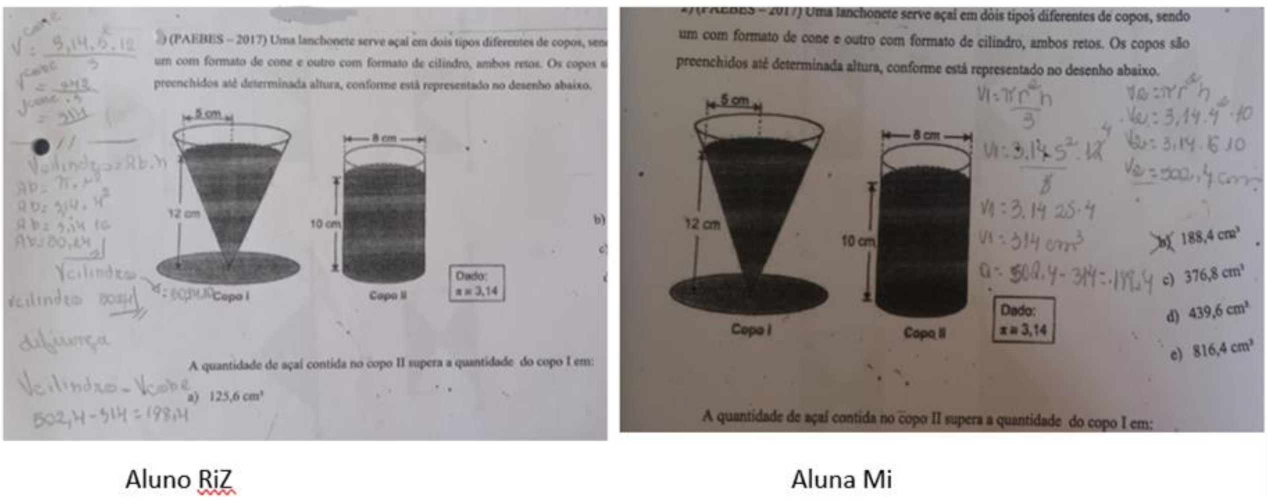
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Prevalece, na resolução, dois olhares: o agrimensor, utilizado na análise de medidas, dimensões e relações entre elementos geométricos, como identificação de arestas, vértices, faces, áreas e volumes; e o construtor[49], ao comparar as medidas dos volumes. Dessa forma, duas apreensões são imediatas: a primeira é a perceptiva, pois a questão contempla duas figuras que são de suma importância para a resolução da questão. A segunda é a apreensão discursiva, que se justifica pelos termos **"formato de cone", "formato de cilindro", "dois tipos de copos diferentes"**, além da descrição global do enunciado. Ainda, uma terceira apreensão é necessária, a apreensão operatória, pois é preciso considerar que as possibilidades de soluções dependem tanto das unidades elementares do cilindro quanto das unidades elementares do cone, sendo estas unidades figurais destacadas pela percepção imediata das figuras, ambas em (3D), no plano do papel (2D). O olhar volta-se para os contornos poligonais das faces dos sólidos e, em seguida, para os contornos redondos que caracterizam e diferem as figuras em cone e cilindro. Assim, a desconstrução ocorre por 3D → 2D, 3D → 1D. Mesmo que a percepção imediata recaia sobre as unidades dimensionais maiores 3D, os tratamentos da situação figural se restringem as unidades figurais menores 2D e 1D.

[49]O olhar construtor é aquele em que o aluno faz uso de instrumentos de medida, também o torna consciente das propriedades geométricas. (SCHEIFER; BRANDT, 2020)

Além de conhecer as características que definem o cone e o cilindro, os alunos precisam conhecer as expressões matemáticas para calcular seu volume para, então, realizar os tratamentos nesses registros, e determinar e comparar esses volumes. Na figura 62 temos as resoluções realizadas pelo aluno MiZ e pela aluna Mi. Observamos que esses dois padrões de resolução foram predominantes nas atividades analisadas.

Figura 62 – Dois padrões de solução predominante na atividade 15 da SD.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Analisando as produções, notamos que os alunos relacionaram a palavra ***supera*** à operação matemática de SUBTRAÇÃO. Em alguns trabalhos, a palavra subtração é referenciada pelo registro da palavra ***diferença*** como apresentado na atividade do aluno RiZ e em mais 11 atividades. Segundo Duval (2011, p. 51, grifo nosso), a ação de "[…] colocar em correspondência é a única operação que permite retirar propriedades, ou ***ter acesso a novos objetos do conhecimento*** [...]", fato evidenciado nas palavras em negrito.

Os alunos empregaram a apreensão operatória ao calcular a quantidade de açaí em cada copo, realizando a desconstrução dimensional das figuras por meio da apreensão perceptiva. Nesta etapa do estudo, os alunos já evidenciavam maior habilidade em coordenar os registros algébricos para o cálculo do volume em cada figura. Dessa forma, a desconstrução dimensional, realizada na representação mental, se revelou implícita na maioria das atividades tal como evidenciado pela aluna Mi e em outras 17 atividades. Observou-se, por exemplo, a ausência da fragmentação[50] da expressão matemática do volume, por esses alunos.

Como mostra a figura 62, a desconstrução dimensional ocorre quando o aluno, ao substituir as variáveis[51], identifica seu valor métrico no registro figural. Por exemplo, a aluna Mi e mais 17 alunos usaram para calcular o volume do cone a expressão $v_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, que é equivalente a expressão $v_{cone} = \frac{A_b \cdot h}{3}$, nota-se que a dimensão 1D (raio = 5cm e altura = 12cm) estão apresentadas na expressão matemática para calcular o volume, por reh . Já a dimensão 2D, área da base do cone, é representada por $\pi \cdot r^2$. E o processo se repete ao determinar o volume do cilindro. De acordo com Duval (2012a), os métodos que evidenciam uma compreensão operacional, isto é, os métodos predominantemente baseados em figuras, desempenham um papel crucial na medida em que são fundamentais para a exploração heurística da forma geométrica.

Na atividade apresentada pelo aluno RiZ e mais 11 alunos, a desconstrução dimensional é explicitada no registro discursivo ao realizarem os cálculos. Observar-se que os alunos desfragmentam a expressão matemática do cilindro e vão detalhando as etapas do cálculo: primeiro escrevem a expressão do volume ($v = A_b \cdot h$; depois a expressão da área da base ($A_b = \pi \cdot r^2$; em seguida, identificam a altura ($h = 10$, só então determinam o volume do cilindro. Observar-se que esse detalhamento não ocorre ao calcular o volume do cone. Nesta atividade, evidenciamos, pelas diferentes formas que os alunos calcularam o volume dos sólidos, a afirmativa de Duval (2011, p. 90), já citada anteriormente de que “a desconstrução dimensional é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação as figuras geométricas”. Ou seja, não existe um caminho ou regra a seguir para desconstruir uma figura, tudo depende da habilidade adquirida pelo aluno em reconhecer as unidades elementares da figura.

Também evidenciamos que a coordenação dos registros é parte fundamental e de suma importância para a aprendizagem em Matemática. Como advoga Moretti (2002, p, 346), “[…]

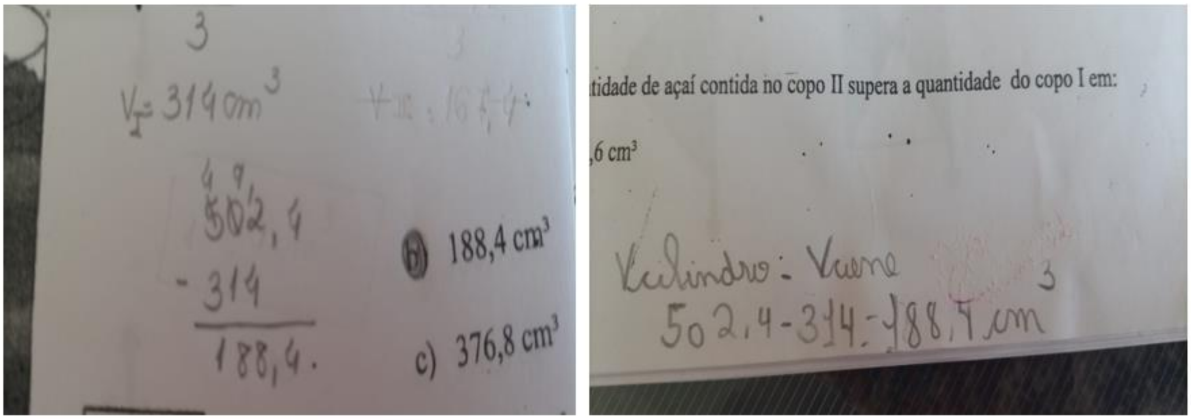
---

[50]Na pesquisa, a **fragmentação** se refere ao uso costumeiro de calcular a área da base separada da expressão que permite calcular o volume.
[51]Na pesquisa, definimos por variáveis as letras que aparecem em uma expressão matemática que serão substituídas por números.

tendo vários registros de representação é possível haver mudança entre eles e estas mudanças poderão ser mais econômicas e potencializadas [...]" dependendo da habilidade do aluno em "[...] efetuar implícita ou explicitamente uma ida e volta constantes entre as transformações de um tipo de representação e a de outro tipo" (DUVAL, 2011, p. 57). E, é no reconhecimento das diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático que a aprendizagem se firma.

Quanto ao cálculo da diferença de açaí entre o copo II e o copo I, o uso da expressão $\boldsymbol{D_{diferença} = V_{cilindro} - V_{cone}}$ foi unanime em 30 resoluções. No entanto, a representação dessa operação ocorreu por meio de dois registros distintos, conforme apresentado na figura 63.

Figura 63 – Dois registros representativos de subtração com números decimais.



Registro 1 Registro 2

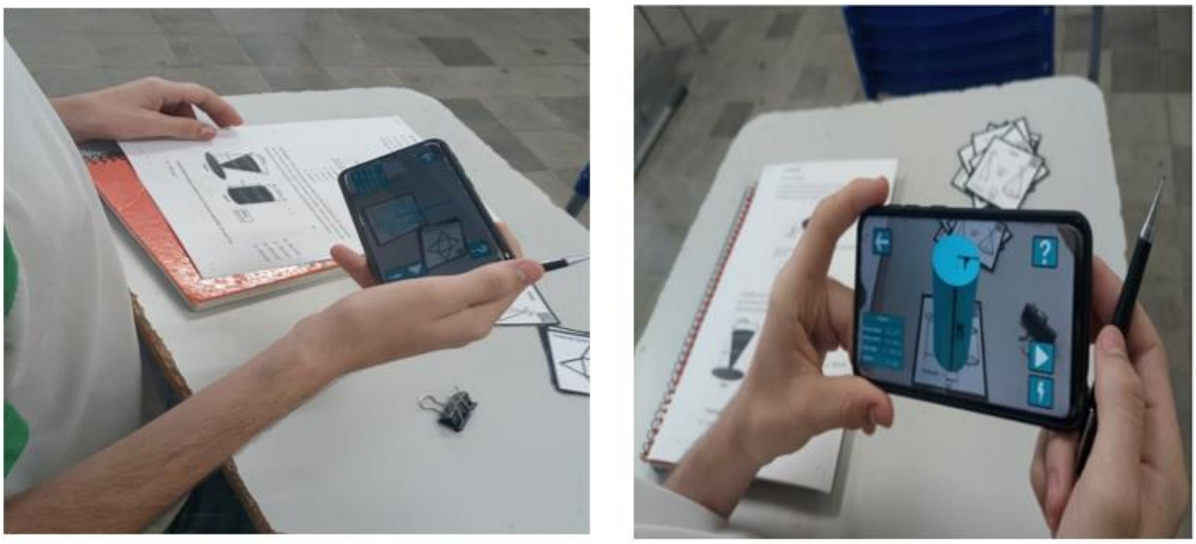
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Conforme apresentado na Figura 63, a representação da subtração ocorreu de maneiras diferentes. No registro 1, tem-se evidenciado o minuendo (502,4), o subtraendo (314) e a diferença (188,4), posicionados na vertical, e traços que representam diferença (-) e igualdade (___). No registro 2, temos o minuendo (502,4), o sinal de subtração (-), o subtraendo (314), o sinal de igualdade (=) e o resto ou diferença (188,4), posicionados na horizontal. Nos dois registros, temos diferentes tratamentos para o mesmo objeto.

A forma de registro 2 aparece em 22 trabalhos, mas é na forma de registro 1, presente em seis atividades, que fica explícito a habilidade de operar com os números decimais, neste caso, a subtração de números decimais. Em duas atividades não foi evidenciado o registro 1 nem o registro 2, houve apenas o cálculo dos volumes e a marcação, com um x na resposta correta.

A atividade 15 apresenta duas figuras, ambas de suma importância para a interpretação do problema e obtenção de uma resposta. O uso do aplicativo Geometria RA pode ter sido fundamental para o sucesso do aluno nesse contexto. A capacidade de visualizar os sólidos em 3D, a compreensão das expressões matemáticas pode ser aprimorada por meio desse aplicativo, conforme demonstrado na figura 64.

Figura 64 – Uso do aplicativo Geometria RA na resolução da atividade 15 da SD, pelo aluno Ri.



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Conforme delega Tori et al., (2018), o uso da RA na educação pode trazer muitos benefícios, dentre eles a possibilidade de manipular objetos tridimensionais virtualmente, incluindo a movimentação e rotação. Na figura 64, a RA está sendo usada na resolução de uma atividade que apresenta no enunciado duas figuras geométricas, o cone e o cilindro. A manipulação desses objetos, como se fossem reais, permitiu, além da exploração de suas características, trocar rapidamente a visualização do objeto matemático e acessar a expressão matemática que permite calcular área da base e volume dos sólidos. “Essa interatividade torna o aluno um elemento ativo no processo educacional [...]” (FIALHO, 201, p. 125), o que os levou a obtermos bons resultados na atividade 15.

Durante a aula, observamos que os alunos manipulavam bastante os marcadores, e a troca ocorria a todo instante, levando o aluno a um custo cognitivo baixo ao resolver o problema. Comprovamos que a RA em sala de aula “[...] pode tornar a aula mais atrativa e, com isso, despertar maior interesse por parte dos alunos, além de aperfeiçoar o aprendizado e as áreas ativas do cérebro essenciais para minimizar a ineficiência dos sistemas tradicionais de ensino" (FIALHO, 2018, p. 117).

Em relação ao emprego da Realidade Aumentada (RA), como ferramenta pedagógica nas aulas de geometria, os alunos responderam a um questionário como objetivo de verificar seu nível de satisfação com a usabilidade do aplicativo Geometria RA para o ensino e aprendizagem dessa disciplina. Os resultados das cinco afirmativas (ver APÊNDICE C) estão expostos na próxima seção.

5.4 USABILIDADE DO APLICATIVO GEOMETRIA RA

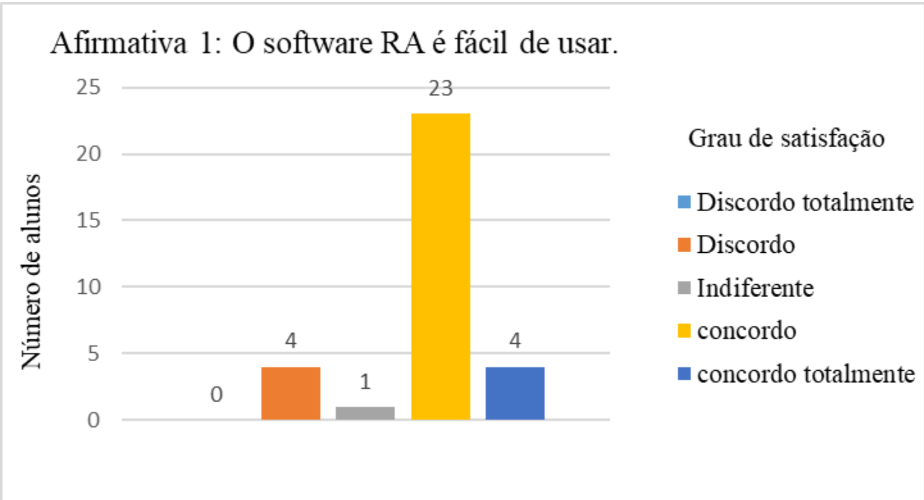
Nesta terceira e última categoria de análise, apresentamos as discussões sobre a usabilidade do app Geometria RA, aplicado como recurso pedagógico na aprendizagem dos principais sólidos geométricos. Como parâmetros de discussões, os alunos colaboradores responderam um questionário (APÊNDICE C) que foi aplicado ao concluir a SD. O Objetivo da aplicação do questionário é avaliar, do ponto de vista do aluno, o uso da RA, em específico, o Geometria RA para o ensino e aprendizagem de geometria espacial. O questionário foi respondido por 32 alunos e não tivemos ocorrências nem interferências durante sua aplicação.

O questionário é composto por cinco afirmações que têm por objetivo avaliar a satisfação dos alunos no uso do aplicativo Geometria RA enquanto recurso tecnológico, bem como sua integração como ferramenta pedagógica nas atividades relacionadas à geometria espacial, e a aceitação do referido aplicativo como um recurso pedagógico para as aulas de geometria. Cada item presente no questionário permite ao aluno expressar seu nível de satisfação, oferecendo as seguintes opções: discordo totalmente (1), discordo (2), indiferente (3), concordo (4) e concordo totalmente (5). Vale ressaltar que a escolha da alternativa "concordo", por exemplo, denota que o aluno está, em linhas gerais, satisfeito com o uso do aplicativo Geometria RA, embora possa haver algumas ressalvas ou considerações a serem feitas.

Após a ordenação das respostas, optou-se por apresentar os resultados por representações gráficas. A representação gráfica é um recurso que permite uma visualização mais intuitiva e rápida das informações, facilitando a identificação de padrões, tendências e destaques nos resultados da pesquisa. Assim, a inclusão de gráficos, na apresentação dos dados desta pesquisa, não apenas enriquece a compreensão dos resultados, mas também torna o processo de análise mais acessível e elucidativo para os leitores, permitindo uma interpretação mais clara e objetiva das informações coletadas.

A primeira afirmativa visa avaliar a usabilidade do software de RA na perspectiva do aluno. Assim, o aluno pode concordar ou não com a facilidade de uso do software RA. O gráfico 1 apresenta os resultados levantados pela afirmativa "***O software RA é fácil de usar***."

Gráfico 1 – Grau de satisfação dos alunos ao usar o software RA.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Ao analisar os dados referentes à afirmação "O software Geometria RA é fácil de usar", observou-se que a maioria dos alunos (27 no total, entre os que concordaram e concordaram totalmente) expressaram um nível de satisfação favorável em relação à facilidade de uso do aplicativo. A possibilidade de visualizar objetos matemáticos em 3D, ao apontar a câmara do celular para o marcador, pode ter contribuído para a aceitação.

Para Hounsell, Tori e Kirner (2018), a maneira natural e intuitiva de interagir com objetos virtuais, no mundo real, sem a necessidade de passar por treinamento, faz da RA um recurso amplamente explorado. Nas pesquisas de Andrade (2017), Silva (2017), Macedo (2018), Dantas (2018) e Resende (2019), por exemplo, após aplicar o projeto de RA, concluem que o uso do software de RA motivou os alunos a aprender, sendo este um propulsor no ensino-aprendizagem de geometria. Fialho (2018) destaca a facilidade de utilização do software de Realidade Aumentada (RA), observando que os alunos demonstraram grande satisfação com as ferramentas de RA empregadas no processo de aprendizagem.

Na pesquisa de Andrade (2017, p. 68), por exemplo, professores e alunos concordaram que o software de RA apresentou “[...] facilidade de uso e que existiu interatividade entre o OA e seu público-alvo [...]”, fato evidenciado também nesta pesquisa ao usarmos o Geometria RA na aprendizagem de geometria espacial.

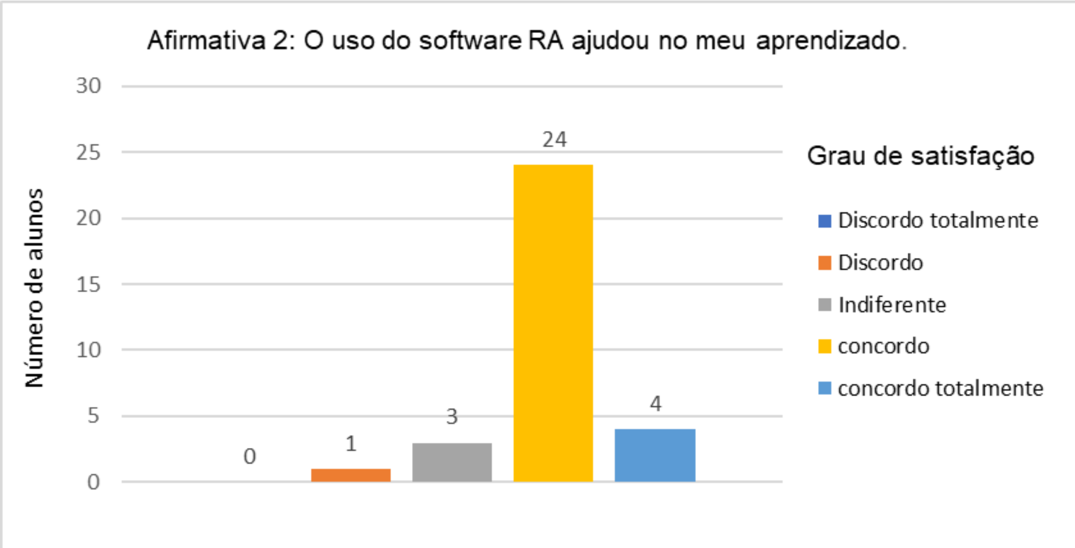
No entanto, é relevante destacar que houve uma parcela significativa de alunos (4 no total) que discordaram dessa afirmação. Embora os resultados apontem que uma maioria teve facilidade no manuseio do aplicativo Geometria RA, não podemos desconsiderar a opinião dos alunos que discordaram. Essas vozes dissidentes tiveram dificuldades ou encontraram desafios no uso do aplicativo em termos de usabilidade, apontando para áreas específicas do software que precisam de melhorias ou de um suporte adicional para garantir uma experiência mais satisfatória para todos os usuários.

Durante o processo, um aluno ficou indiferente em relação à mesma afirmação. A resposta neutra desse aluno sugere uma falta de opinião definitiva sobre a facilidade de uso do aplicativo. Isso pode indicar que, para esse aluno em particular, a experiência com o Geometria RA não foi clara o suficiente para formar uma opinião firme sobre sua usabilidade.

Em suma, podemos inferir que o uso de softwares de RA é bem aceito pela maioria dos alunos, por ser um recurso de fácil uso, não requerendo treinamento nem equipamentos caros, bastando apenas um celular e um marcador, como mostram as pesquisas aqui mencionadas e evidenciadas nesta análise.

A segunda afirmativa visa avaliar o uso do software para o aprendizado do aluno. Nesta afirmativa, os alunos mostraram seu grau ou não de satisfação para a afirmativa sobe: ***O uso do software RA ajudou no meu aprendizado***. O refinamento das respostas está apresentado no gráfico 2.

Gráfico 2 – Grau de satisfação dos alunos ao usar a RA para aprender geometria.



Fonte: Elaborada pela pesquisadora.

Mesmo a análise mostrando diferentes resultados para a afirmativa, observa-se que a maioria dos alunos expressou um grau de concordância com a eficácia do aplicativo no processo de aprendizagem de geometria espacial: 24 alunos concordaram e 4 alunos concordaram totalmente. Essa tendência positiva pode ser interpretada como um indicativo de que a utilização do software RA teve uma contribuição significativa no aprendizado dos alunos. Em trabalhos correlatos, como o de Macedo, Silva e Buriol (2016); Silva e Vasconcelos (2019); Gomes et al. (2019) e Ribeiro, Guterres e Silveira (2020), a receptividade ao uso de dispositivos móveis como recurso pedagógico, juntamente com a Realidade Aumentada (RA), também é notável. Os autores destacam que o aplicativo de RA foi reconhecido, pela maioria dos usuários, como uma ferramenta eficaz na visualização de objetos em 3D, contribuindo positivamente para a aprendizagem.

A concordância dos 28 alunos pode ser interpretada como um indício de que a incorporação da RA no ambiente educacional, no aprendizado de geometria espacial, foi percebida como relevante e eficaz. Possivelmente, eles experienciaram uma maior compreensão dos conteúdos, sentiram mais motivação ou engajamento durante as aulas em que o aplicativo de RA foi utilizado. De acordo com Tori et al. (2018), as experiências vivenciadas com o uso da RA podem ajudar os alunos a entender etapas mais complexas da aprendizagem, como visualizar e interagir com modelos tridimensionais, visualizar fenômenos e eventos invisíveis, entre outros.

Essa aceitação pode servir como um indicativo de que o conteúdo do aplicativo: termos matemáticos, animação de formação dos sólidos geométricos e as imagens em 2D e 3D

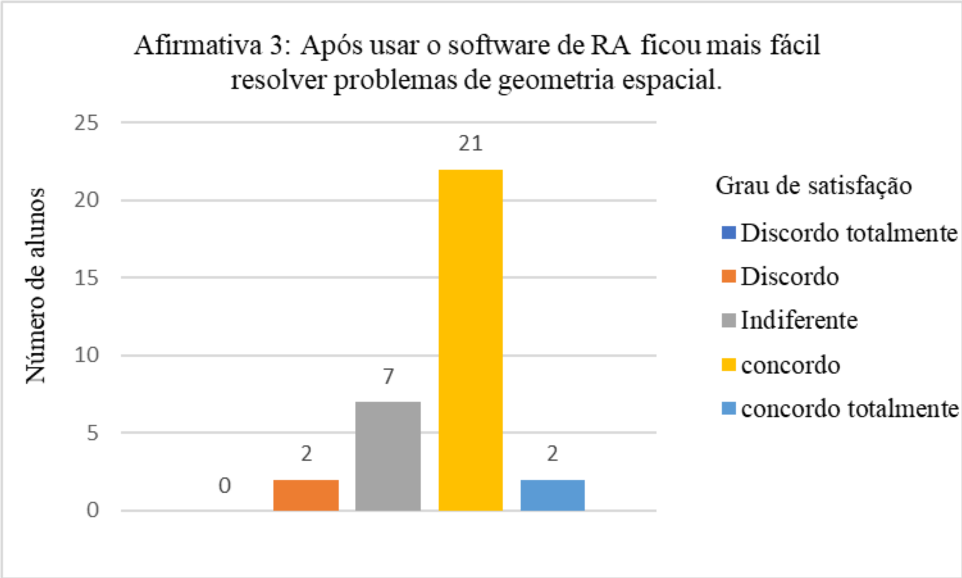
(GOMES *et al.*, 2019) foram adequados, para atender as necessidades educacionais momentâneas, oferecendo uma análise única do conteúdo apresentado no quadro ou em uma folha de papel (SILVA, VASCONCELOS, 2019), auxiliando na construção dos conceitos matemáticos da geometria espacial.

No entanto, é essencial observar que uma parcela minoritária dos alunos apresentou respostas divergentes: um aluno discordou e três alunos ficaram indiferentes. Essas respostas sugerem a existência de percepções distintas entre os estudantes, possivelmente relacionadas à experiência individual de cada um ou a aspectos específicos da implementação do aplicativo no contexto educacional. Os três estudantes (As, Me, Ag) que optaram por se posicionar como indiferentes frente ao uso do aplicativo de RA para a aprendizagem de geometria denotam que o uso do software não foi significativo para o seu aprendizado, mas também não foi totalmente insignificante, podendo ser, apenas, uma forma diferente de abordar o ensino de geometria. Além disso, a escolha em permanecer indiferente pode, em alguns casos, sinalizar uma espera por uma experiência mais substancial ou um alinhamento mais claro entre as metas educacionais e a implementação prática do aplicativo de RA para as aulas de geometria. Também pode refletir uma falta de familiaridade prévia com essas tecnologias.

De forma geral, pode-se dizer que o uso da RA contribuiu significativamente para a aprendizagem dos alunos ao possibilitar que os estudantes percebessem “[...] particularidades visuais que não seriam possíveis por meio de desenhos em perspectiva[...]” (RESENDE, 2019, p. 107), ao abordar tópicos de geometria espacial, por meio da interação direta com elementos virtuais sobrepostos ao ambiente real.

A terceira afirmativa tem por objetivo avaliar se ao usar o software de RA, que neste caso é o app Geometria RA, ficou mais fácil resolver problemas de geometria espacial. Nessa afirmativa, os alunos mostraram seu grau ou não de satisfação para a afirmativa: ***Após usar o software de RA, ficou mais fácil resolver problemas de geometria espacial.*** Os resultados das respostas estão explanados no gráfico abaixo.

Gráfico 3 – Grau de satisfação dos alunos após usar o software de RA.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A avaliação do grau de satisfação dos alunos em relação ao uso da RA para a resolução de problemas de geometria espacial, conforme resultado está expresso no gráfico 3, sugere uma positividade na implementação do software de RA, nesse caso o app Geometria RA, como facilitador em resolução de problemas.

A predominância de respostas afirmativas (concordou e concordou plenamente), totalizando 23 participantes, indica uma percepção favorável da eficácia da RA como ferramenta facilitadora na compreensão e resolução de problemas geométricos tridimensionais. O cenário é apoiado pelo fato de nenhum aluno ter discordado totalmente, sugerindo ausência de objeções substanciais ao uso da tecnologia. Esse fato é evidenciado na pesquisa de Resende (2019, p. 102): “Os estudantes também salientaram a visualização como contribuição e motivação para a aprendizagem de geometria espacial na interação com o aplicativo de RA”. Concordando com afirmativa anterior, a pesquisa de Andrade (2017, p. 65) reitera que, “[...] todos os discentes afirmaram que a tecnologia da RA pode auxiliar o aluno a visualizar de forma mais real os objetos tridimensionais e contribuir com o aprendizado de Geometria Espacial [...]”, na pesquisa de Macedo (2018, p. 84), o autor diz que “ [...] a RA favoreceu aspectos importantes na manutenção de um clima de aprendizagem, potencializando o trabalho colaborativo, as reflexões, o interesse, as interações entre professor – aluno – conteúdo [...]”. e Dantas (2018, p. 71) confirmando assim: “A aplicação da RA ajudou a visualizar e compreender melhor o conteúdo de Geometria Espacial, [...], 97% responderam que sim”. Como indicado, a maioria dos alunos concordou com a afirmação, versando que o uso da RA tornou mais fácil resolver problemas de geometria espacial. A resposta positiva evidencia que “alunos, professores e tecnologias interagindo com o mesmo objetivo geram um movimento revolucionário de descobertas e aprendizados” (KENSKI, 2003, p. 127).

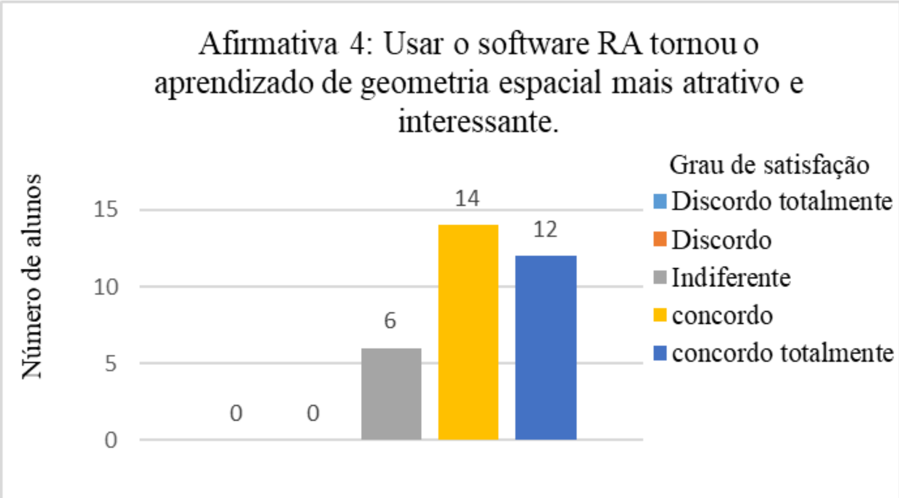
No entanto, os resultados também revelam uma parcela significativa dede sete alunos (Ra, As, Me, Ag, Lu, Ju, Ta) que se mostraram indiferentes à influência do software. Essa indiferença pode ser interpretada de maneiras diversas, desde uma neutralidade em relação à utilidade percebida até uma falta de clareza sobre a os benefícios da RA ou, até mesmo, uma aceitação pragmática da ferramenta sem atribuição de grande relevância específica da RA, no contexto da geometria espacial. Segundo Borda, Silva e Gadanidis (2020), a visualização facilita a criação de conexões entre diferentes representações, sendo fundamental na produção de significados durante o processo de aprendizagem matemática, porém, pode ocorrer que o aluno veja a RA como uma adição, mas não necessariamente como uma mudança fundamental em sua abordagem de aprendizagem, ao visualizar os objetos matemáticos no software de RA.

Na amostra, dois alunos discordaram que *após usar o software de RA ficou mais fácil resolver problemas de geometria espacial*. Denota-se que cada aluno tem um estilo de aprendizado único que deve ser respeitado no processo de aprendizagem. Esses alunos também discordaram que *o software é fácil de usar*, o que evidencia que alguns alunos podem preferir métodos mais tradicionais, podendo a RA não ter se alinhado com suas preferências individuais. A discordância pode ser reflexo dessas preferências individuais. A minoria discordante do uso da RA para o ensino e aprendizagem, também é evidenciada nas pesquisas aqui apresentadas, por exemplo, na pesquisa de Silva (2019), sete por cento dos participantes não consideraram que o uso do aplicativo superou o método tradicional de ensino.

Após analisar os resultados da afirmativa três, considera-se que a análise do grau de satisfação não depende apenas do software empregado para uso pedagógico, mas de fatores individuais, experiências prévias e expectativas. Portanto, a receptividade positiva, aliada à neutralidade e à ausência de discordância total, sugere que a introdução da RA pode ser considerada, em sua maioria, benéfica para a abordagem da geometria espacial, conforme percebida pelos alunos participantes.

A quarta afirmativa tem por objeto avaliar se o uso do software de RA tornou o aprendizado geométrico mais atrativas e interessante para o aluno. Nesta afirmativa os alunos mostraram seu grau ou não de satisfação para a afirmativa: ***Usar o software tornou o aprendizado de geometria espacial mais atrativo e interessante.*** Os resultados das respostas estão apresentados no gráfico abaixo.

Gráfico 4 – Grau de satisfação dos alunos quanto à atratividade do aplicativo de RA para o ensino de geometria.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os resultados apresentados no gráfico revelam uma predominância positiva em relação à adoção do software de RA no contexto educacional, especificamente no ensino de geometria espacial. A maioria dos alunos concordou (14) ou concordou plenamente (12) com a afirmação, indicando uma percepção positiva de que o uso da RA, nesse caso, o Geometria RA, tornou o aprendizado de geometria espacial mais atrativo e interessante. Isso sugere que a maioria dos estudantes apreciou os benefícios percebidos da Realidade Aumentada na abordagem educacional, como tornar o conteúdo mais envolvente, atrativo e interessante. Esse fato é recorrente com algumas vantagens apresentadas pela RA, que segundo Tori et al. (2018), redefine o espaço de aprendizagem, aumenta a percepção visual e a aprendizagem dos objetos estudados, é flexível e centrada no aluno, sendo considerada uma experiência atrativa e prazerosa.

Nesse sentido, Fialho (2018) destaca que os alunos demonstraram maior motivação e satisfação ao vivenciar o processo de aprendizagem por meio do uso da RA. O autor também sugere que o emprego de tecnologias quebra a linearidade da aprendizagem, oferecendo ao aluno a oportunidade de explorar outras formas de aprendizado, fato que o torna interessante e motivador.

No entanto, é relevante ressaltar que seis alunos (Le, Ma, He, Hy, MaB, MaF) se mantiveram indiferentes quanto à afirmativa. A indiferença pode ser interpretada como um reflexo da interação única de cada aluno com o ambiente imersivo; esses fatores individuais influenciam, de maneira distinta, a percepção da utilidade da Realidade Aumentada (RA). Em consonância, no estudo de Silva e Vasconcelos (2019), uma parcela minoritária considerou que o uso do aplicativo de RA não superou as aulas tradicionais, ou seja, não houve diferenças, nem para melhor, nem para pior, com o uso do aplicativo.

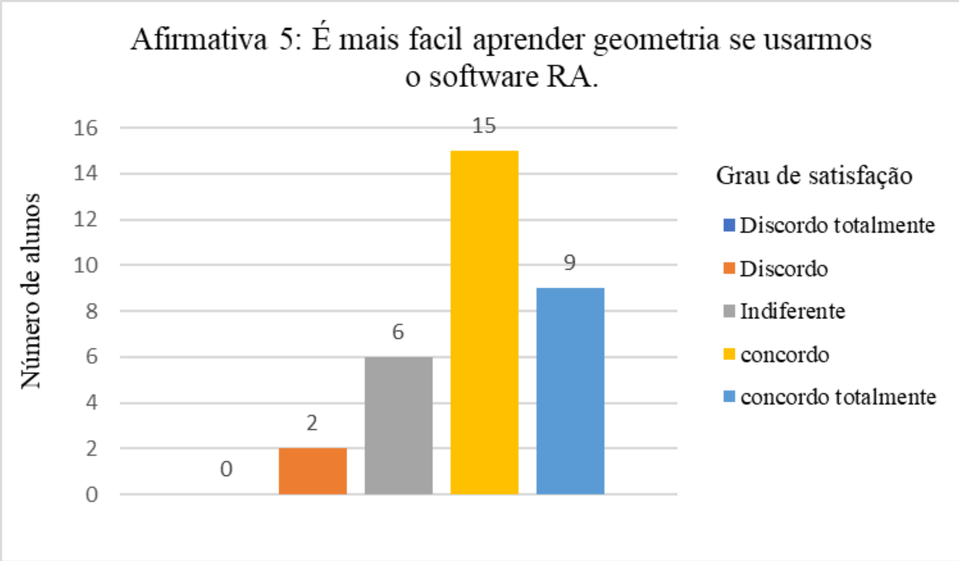
Os resultados indiferentes revelam que "[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional" (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2020, p. 48), pois uma tecnologia, por mais interessante e nova que seja, não alcança uma totalidade de aceitação, sendo necessário implementar novas propostas tecnológicas.

Para essa afirmativa, considera-se que, a elevada concordância reflete não apenas uma aceitação funcional da tecnologia, mas também uma apreciação subjacente dos aspectos qualitativos que a RA incorpora ao processo educacional. Essa análise respalda a noção de que a integração da Realidade Aumentada pode representar uma estratégia eficaz para aguçar o interesse dos alunos e aprimorar a abordagem do ensino de geometria espacial, contribuindo para uma experiência educacional mais rica e envolvente.

Os resultados sugerem que a implementação da RA na educação, especificamente para o ensino de geometria espacial, tem o potencial de gerar uma experiência mais atraente e interessante para a maioria dos alunos.

A quinta e última afirmativa visa avaliar a grau de satisfação dos alunos quanto à potencialidade do software na aprendizagem de geometria. Assim, os alunos apresentaram seu grau ou não de satisfação para a afirmativa: ***É mais fácil aprender geometria se usarmos o software RA***. Os resultados estão expostos no gráfico abaixo.

Gráfico 5 – Grau de satisfação dos alunos em aprender geometria usando o software de RA.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Quanto aos potenciais do software para o aprendizado do aluno em geometria espacial, a maioria dos alunos mostrou concordância. No total de 24 alunos que concordaram, 9 deles concordaram totalmente. Essa positividade sugere que a maioria dos estudantes reconhece que a utilização do software de Realidade Aumentada contribuiu positivamente para o aprendizado de geometria, ou seja, que ficou mais fácil aprender geometria espacial ao usar a RA.

O grau de satisfação também sugere que tecnologias, como a Realidade Aumentada (RA), utilizada como recurso pedagógico na visualização dos elementos dimensionais dos sólidos 3D/2D, traz benefícios para a educação, melhorando o desempenho do aluno. Conforme afirmado por Tajra (2019), o uso de softwares com objetivos educativos deixa os alunos mais motivados e criativos, aprimorando a concentração, aguçando a curiosidade e contribuindo para o desenvolvimento das habilidades de comunicação e estrutura lógica do pensamento. O uso da RA não apenas amplia as possibilidades de interação e visualização no contexto educacional, mas também se destaca por conferir aos alunos um protagonismo mais significativo em seu processo de aprendizagem (FIALHO, 2018).

No entanto, nota-se que seis alunos (Ma, We, Hy, MaB, Do, Le) mostraram-se indiferentes, indicando uma indecisão na percepção dos benefícios da RA para o aprendizado de geometria espacial. Essa ambivalência pode estar relacionada à falta de parâmetros comparativos do app Geometria RA com outras tecnologias de RA; às impressões pessoais de uso do aplicativo para a aprendizagem; à necessidade de uma exposição mais extensa ou até mesmo uma saturação de uso, pois um software utilizado em sala de aula, depois de algum tempo, se torna enfadonho, assim como o uso intensivo da lousa e do giz (BORBA, PENTEADO, 2019). Também deve-se levar em conta que as preferências se diferem de indivíduo para individuo, alguns preferem aprender e examinar figuras estáveis enquanto outros preferem aprender movendo, tocando os objetos matemáticos (FIALHO, 2018).

Durante nossa análise, notamos divergência de opiniões por dois alunos em relação à afirmação proposta. Essa discordância indica que, para esses participantes, a RA não desempenhou um papel facilitador na compreensão da geometria espacial. Tal constatação levanta questões importantes sobre as experiências individuais dos alunos com a tecnologia. Pode ser que os alunos em questão enfrentam dificuldades pessoais que persistem, mesmo com a utilização do aplicativo. Por outro lado, pode sugerir que esses alunos já possuem habilidades geométricas bem desenvolvidas, tornando o uso da RA menos significativo ou sem contribuição para atingir níveis mais avançados de conhecimento.

Ao concluir a análise do segundo questionário, constatou-se que a inserção da RA no ensino e aprendizagem de geometria espacial pode ser considerada uma metodologia eficaz, dado o alto grau de concordância observado entre a maioria dos alunos em relação as cinco afirmativas apresentadas. Vale ressaltar a importância do uso do celular, que desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento das atividades da SD, possibilitando a utilização dinâmica da RA para a visualização e exploração heurística das figuras geométricas inseridas em problemas matemáticos. Conforme apontado por Kenski (2003), a perspectiva do futuro tecnológico na educação está voltada para soluções mais compactas, representadas por dispositivos leves, portáteis e com alta capacidade de processamento.

De acordo com Duval (2012b), o problema das figuras geométricas reside na diferença entre a percepção visual e a interpretação, sendo esta última inevitavelmente influenciada por suposições e hipóteses. É perceptível que o uso da RA pode proporcionar aos alunos uma experiência visual enriquecida, permitindo a exploração tridimensional das figuras geométricas. A sobreposição de informações virtuais pode minimizar lacunas entre a apreensão perceptiva e a interpretação guiada por hipóteses, conforme apresentados nas pesquisas e apresentada neste estudo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve como objetivo investigar se uso da RA presente no software “Geometria RA”, aplicada na resolução de exercícios, de maneira a contribuir para o entendimento do cálculo de volume de alguns poliedros regulares, por meio do desenvolvimento de uma sequência de atividades. Essas atividades foram desenvolvidas com o propósito de engajar os alunos de forma contínua e ativa na construção do pensamento geométrico, ao abordar aspectos como visualização espacial em 3D, desconstrução dimensional, ou seja, abordar as características que definem e classificam os sólidos em prisma, pirâmide e corpos redondos.

As TDIC têm desempenhado um papel cada vez mais significativo na transformação do cenário educacional. A integração dessas tecnologias, no ambiente de aprendizagem, tem proporcionado oportunidades únicas para aprimorar o processo educativo, promovendo uma abordagem mais dinâmica, interativa e acessível. Essas ferramentas tecnológicas oferecem um vasto leque de recursos que vão desde aplicativos interativos, como o Geometria RA, a plataformas de ensino online, permitindo uma personalização do aprendizado e estimulando a colaboração entre alunos e professores em diferentes contextos educacionais. E, a integração dessas tecnologias na educação pode transformar sensitivamente a forma como concebemos o ensino da matemática.

Ao utilizar as TDICs na educação, foi possível criar ambientes de aprendizagem mais inclusivos, onde cada aluno pode aprender de acordo com seu próprio ritmo e estilo. Isso é especialmente valioso para atender às necessidades educacionais que emergem das novas gerações.

Nesse contexto, Kenski (2003; 2013) destaca a influência das tecnologias na forma como aprendemos e ensinamos, ressaltando a necessidade de uma educação que se adapte a esse novo ritmo de informação, onde as tecnologias não são apenas ferramentas, mas elementos que reconfiguram os processos de aprendizagem. No âmbito da matemática, isso se traduz na utilização de recursos digitais, como softwares especializados, aplicativos e ambientes virtuais interativos. Essas ferramentas oferecem simulações e atividades que auxiliam no ensino dos conceitos matemáticos, tornando-os mais acessíveis para os alunos.

No entanto, Moran (2017), por sua vez, aborda a importância da mediação do professor no uso das tecnologias, destacando que o papel do educador vai além de simplesmente utilizar os recursos tecnológicos; é fundamental a mediação ativa para potencializar o aprendizado dos alunos, estimulando a reflexão crítica e a construção do conhecimento. Para ele, as tecnologias devem ser como instrumentos mediadores no processo de aprendizagem, permitindo aos estudantes explorar, experimentar e construir o conhecimento matemático.

Assim, as tecnologias na educação matemática não apenas ampliam o acesso ao conhecimento, mas também transformam a forma como os alunos interagem e constroem ativamente sua compreensão dos conteúdos. Nesse cenário, o uso da RA na educação matemática tem-se destacado como uma ferramenta promissora para o ensino e a aprendizagem de matemática, como mostram as pesquisas cientificas, incluindo as apresentadas nesta pesquisa.

Nesse âmbito, Tori et al. (2018) enfatizam que a RA na educação não apenas cativa a atenção dos alunos, mas também promove uma compreensão mais profunda dos conceitos, estimula a criatividade e a resolução de problemas, criando um ambiente de aprendizado mais dinâmico e inovador, fato evidenciado nesta pesquisa com o uso do app Geometria RA.

A aplicação do app Geometria RA no ensino de geometria espacial representou algo inovador e envolvente para os alunos. A integração dessa ferramenta, nas atividades da SD, ao estudar os principais sólidos geométricos, proporcionou uma experiência imersiva, permitindo que os alunos explorassem e interagissem com objetos tridimensionais de maneira tangível. Assim, essa tecnologia, além de transformar a forma como concebemos os conteúdos de geometria espacial, aproximou os alunos de conceitos antes considerados complexos. Através do app Geometria RA, os estudantes manipularam virtualmente os objetos tridimensionais, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente e prático.

O uso do app Geometria RA também favoreceu a visualização das características que definem os poliedros em prismas, pirâmides e corpos redondos, também facilitou a identificação das unidades dimensionais básicas, como as **dimensões 1D, 2D e 3D**. Duval (2016) ressalta que na aprendizagem de geometria é fundamentada a desconstrução dimensional das figuras, e não em sua construção.

As análises das atividades mostraram que a desconstrução dimensional dos sólidos é uma atividade cognitiva crucial na resolução de problemas geométricos. Não é uma habilidade inata, mas sim um processo que envolve elementos cognitivos e semióticos, que são necessários para compreender e resolver problemas que envolvem figuras geométricas. A aplicação intencional dessa desconstrução pode ser uma estratégia útil no ensino e na aprendizagem, ajudando os estudantes a atribuir significado aos conceitos geométricos e a superar dificuldades ao visualizar elementos em dimensões diferentes das apresentadas inicialmente.

Quanto à visualização, Duval (2011) fala que as três maneiras de "ver" **(geométrica, matemática e normal),** são importantes quando ensinamos ou aprendemos geometria, pois sem a percepção visual das formas e contornos que formam a figura não seria possível resolver os problemas Geométricos. O uso do app Geometria RA não apenas facilita a visualização de elementos da geometria espacial (vértice, face, arestas, área da base, faces laterais, planificação), tão importantes na percepção de Duval, mas também promove uma compreensão mais profunda e intuitiva desses conceitos. Sua capacidade de transformar a matemática em uma experiência concreta e interativa representa um avanço significativo no ensino de geometria, oferecendo uma nova forma de aprendizado que desperta o interesse e facilita a compreensão desses conceitos.

A RA na educação, segundo os estudos, proporciona um ambiente onde elementos do mundo real e informações digitais são sobrepostos, enriquecendo a percepção e a compreensão dos alunos sobre diversos conteúdo. Essa sobreposição de informações virtuais, ao ambiente físico, cria oportunidades de aprendizado mais envolventes, permitindo que os alunos interajam com os conceitos de uma maneira mais prática e visual.

Retomando o objetivo da pesquisa: ***Verificar possíveis contribuições do uso da realidade ampliada, aplicada na resolução de atividades didáticas para facilitar o entendimento do cálculo de volume de alguns poliedros regulares.***

Em nossas análises, evidenciamos que os alunos, em sua maioria, não apenas consideraram o aplicativo Geometria RA como uma ferramenta fácil de utilizar, mas também destacaram seu impacto positivo no processo de aprendizagem. Eles expressaram que essa ferramenta contribuiu positivamente para seu aprendizado, tornando a geometria mais acessível, atrativa e interessante. Ao interagirem com o aplicativo, os alunos perceberam uma melhora na assimilação dos conceitos de geometria espacial, encontrando maior clareza e estímulo na compreensão e aplicação desses conhecimentos.

Retomando o problema de pesquisa: ***Quais são as possíveis contribuições da Realidade Aumentada, utilizado como recurso didático, para o processo de ensino de Geometria Espacial?*** Constatou-se que:

- O uso do app Geometria RA **facilitou a visualização de elementos dimensionais** (vértice, face, arestas, base, faces laterais, planificação), promovendo uma compreensão mais profunda e intuitiva desses conceitos;
- Os alunos, em sua maioria, consideraram o aplicativo Geometria RA como uma ferramenta **fácil de utiliza**r e, destacaram seu **impacto positivo no processo de aprendizagem** de geometria espacial;
- A RA tornou o aprendizado de geometria espacial mais **atrativo, acessível e interessante** para o aluno.

Em suma, os dados coletados durante a pesquisa sugerem que a implementação da Realidade Aumentada, especialmente no ensino de geometria espacial, não apenas facilita o entendimento do cálculo de volume em poliedros regulares, mas também contribui para o aumento da atenção, motivação e satisfação dos alunos, redefinindo assim a abordagem tradicional do processo educacional.

Por fim, espera-se que esta pesquisa possa contribuir com as eventuais pesquisas futuras que, assim como esta, se propõe a investigar como o uso das tecnologias pode contribuir para o ensino e aprendizagem de geometria. Sabe-se que as investigações inerentes à geometria constituem um terreno fecundo para pesquisas científicas, e que não se encerram em propostas unilaterais. Assim, os desdobramentos desse estudo podem servir como ponto de partida para a ampliação do conhecimento e aprofundamento das questões abordadas, incentivando abordagens multidisciplinares e a contínua busca por soluções inovadoras no contexto do ensino e aprendizagem da geometria.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo. Registro de Representação semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara. APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS. Papirus Editora; 1ª edição, 2017. E-book Kindle.

ANDRADE, Vinicius Gouveia de. **O desenvolvimento do aplicativo Ra.Geo: contribuições da realidade aumentada para o ensino de geometria espacial**. 2017. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Tecnologia), Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia. Goiás – Jataí, 2017. Dissertação aprovada em: 01 de dezembro de 2017. Disponível em: https://repositorio.ifg.edu.br/handle/prefix/435.

ANGELONI, Maria Paula Corrêa**. Realidade Aumentada e sua utilização como uma ferramenta de auxílio na Educação**. 2020. 90f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em tecnologias da Informação e Comunicação). Universidade federal de santa Catarina, Araranguá, 2020. Dissertação aprovada 202? disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/222013

ARAUJO, Elaine Vasquez Ferreira de; VILAÇA, Márcio Luiz Corrêa. **Sociedade Conectada**: Tecnologia, Cidadania e Infoinclusão. In: LIVAÇA, Márcio Luiz Corrêa; ARAUJO, Elaine Vasquez Ferreira de (Org.). Tecnologia, Sociedade e Educação na Era Digital. Duque de Caxias, RJ: UNIGRANRIO, 2016. pp. 17-40.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Agosto, 2020.

BONJORNO, José Roberto. JÚNIOR, José Ruy Giovanni. SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. Matemática: Geometria: Ensino Médio. Área do Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias – 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Gogoy**. Informática e Educação Matemática**. 6ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática:** sala de aula e internet em movimento. 3. ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acessado em: 12/11/2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. V.2 – Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acessado em: 12/11/2021.

CASARIN, Helen de Castro Silva; CASARIN, Samuel José. Pesquisa científica: da teoria à prática. Curitiba: Editora Intersaberes, 1ª edição, 2012.

CANS, Alberto; MORETTI, Méricles Thadeu. Desconstrução geométrica**:** gesto intelectual essencial ao ensino e à aprendizagem da geometria**.** In: **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval** -parte 2. Org: MÉRICLES THADEU MORETTI EDUARDO SABEL. Edição GPEEM/UFSC: Florianópolis, 2023, p.153 – 173.

CIDRIM, Luciana; LOPES, Waslon; MADEIRO, Francisco. **Tecnologias e ciências da linguagem:** vertentes e novas aplicações - 1ª ed. Volume 1, São Paulo. Pá de Palavra, 2019.

COSTA, Deise Maria Bertholdi; TEIXEIRA, José Luiz; SIQUEIRA, Paulo Henrique; SOUZA, Luzia Vidal de. **Elementos da geometria plana e espacial**. UFPR, Curitiba - 3ª edição, 2012. Currículo Básico Escola Estadual: Ensino Médio. V.2 - Área de Ciências da Natureza. Secretária de Educação. – Vitória: SEDU, 2010.

D'ÁVILA, Juliana Alves. **Sequência didática como proposta metodológica para a aprendizagem significativa da geometria espacial no ensino médio**. Bagé, 2018.

DAMASCENO, Eduardo Filgueiras *et al.* Metodologias de desenvolvimento. In: TORI, Romero; HOUNSELL, Marcelo da Silva (org.). **Introdução à Realidade Virtual e Aumentada.** Porto Alegre: Editora SBC, 2018.

DANTAS, Elania Hortins. **Uso da realidade aumentada do ensino da geometria espacial.** 2018. 94f. Dissertação (Programa de Pós-graduação profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba, Campinas Grande, 2018. Dissertação aprovada em 26 de outubro de 2018. Disponível em: https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3253.

DISPOSITIVOS DE REALIDADE VIRTUAL. Disponível em: https://www.showmetech.com.br/5-dispositivos-realidade-virtual-mais-que-um-headset/. Acesso em 30/12/2022.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria espacial, posição e métrica. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Abreu Farias e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Editora: Livraria da Física. 1ª Ed. São Paulo, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT:** Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**.** Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in. Acessado em: 12/08/2022.

DUVAl, Raymond**.** Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência**.** Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**: Florianópolis, v.07, n.1, p.97-117, 2012c. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in. Acessado em: 12/08/2022.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 1-78, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in. Acessado em: 12/08/2022.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara. (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 1ª Edição. 2017. E-book Kindle.

DUVAL, Raymond. Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática? Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.13, n.2, p.1-27, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in. Acessado em: 12/08/2022.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos**. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, jan./dez., 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/in>. Acessado em: 12/04/2023.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Tradução: Cleide Ribeiro Mota Arinos; José Luiz Magalhães de Freitas; Méricles Thadeu Moratti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, jan./dez., 2022. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/in. Acessado em: 14/05/2023.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação. *PAEBES TRI – Relatórios*. Coleção 2019. Vitória, 2019. Disponível em: https://institucional.caeddigital.net/projetos/paebes-e-paebes-alfa-es.html. Acessado em: 06/11/2021.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da Educação. *Currículo do Espírito Santo*: Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/documentos/. Acessado em: 18/03/2022.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho; MALTEMPI, Marcus Vinicius. **Intradisciplinaridade Matemática com GeoGebra na Matemática Escolar.** Bolema, Rio Claro (SP). v. 33, n. 63, p. 348-367, abr. 2019.

FERNER, Dienifer da Luz. **Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica:** um estudo com licenciandos em matemática. 2019. 184 f. Dissertação Mestrado) - UFSM- Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, RS, 2019. Dissertação aprovado em 27 de agosto de 2019.Disponivel em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/2081. Acessado em: 20/05/2022.

FERREIRA, Helber dos Santos. **O uso de software e seu impacto no tipo de resolução de exercícios de geometria.** 2018. 66f. Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). UFG -Universidade Federal de Goiás. Jataí-GO, 2018. Dissertação aprovada em :14 de dezembro de 2018.

FIALHO, Arivelto Bustamante. **Realidade virtual e aumentada:** tecnologias para aplicações profissionais. 1ª ed. São Paulo: Erica, 2018.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O papel heurístico de uma figura geométrica: o caso da operação de reconfiguração. **VII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V1.1, p. 5 -13, UFSC, 2006.

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa**. Análise de conteúdo**. 5ª. ed. – Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisas Social**. Editora Atlas, 6ª edição. São Paulo, 2008.

GODOY, Arilda Schmidt: Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas.** São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63 Mar./abr. 1995.

GUIMARÃES, Marcelo de Paiva; GNECCOL, Bruno Barberi; DAMAZIO, Rodrigo**.** Ferramentas para desenvolvimento de aplicações de realidade virtual e aumentada. In: KIRNER, Cláudio; SISCOUTO, Robson (Org.). **Realidade Virtual e Aumentada:** Conceitos, Projeto e Aplicações. Petrópolis: SBC, 2007, p. 108-128.

HAYDT, Regina Célia Cazaux. **Avaliação do processo ensino-aprendizagem**. Editora Ática, 6ª edição, 2004.

HENRIQUE, Afonso; ALMOULOUD Saddo Ag**. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior:** uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. Ciênc. Educ., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?lang=pt&format=pdf. Ok

HOUNSELL, Marcelo da Silva; TORI, Romero; KIRNER, Claudio**.** Realidade aumentada. In: TORI, Romero; HOUNSELL, Marcelo da Silva (org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC, 2018.

KENSKI, Vani Moreira**. Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Papirus Editora; 1ª edição, 2003.

KENSKI, Vani Moreira. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Papirus Editora; 1ª edição, 2013.

KIRNER, Cláudio; KIRNER, Tereza. Evolução e Tendências da Realidade Virtual e da Realidade Aumentada. In: Ribeiro, Marcos Wagner; Zorzal, Ezequiel Roberto (Org.). **Realidade Virtual e Aumentada:** Aplicações e Tendências. Porto Alegre: SBC, 2011, v. 1, p. 8-23. Disponível em: <www.de.ufpb.br/~labteve/publi/2011_svrps.pdf>. Acesso em: 14 mar; 2022.

KIRNER, Cláudio; SISCOUTTO, Robson Augusto. Fundamentos da realidade virtual e aumentada. In: KIRNER, Cláudio; SISCOUTO, Robson (Org.). **Realidade Virtual e Aumentada:** Conceitos, Projeto e Aplicações. Petrópolis: SBC, 2007, p. 2-21. Disponível em: http://de.ufpb.br/~labteve/publi/2007_svrps.pdf. Acesso em: 14 mar. 2022.

KIRNER, Claudio; TORI, Romero. Fundamentos da realidade aumentada. TORI, Romero. KIRNER, Claudio; SISCOUTO, Robson**. Fundamentos e Tecnologia em Realidade Virtual e Aumentada**. Belém- PA. Editora SBC- Sociedade Brasileira de Computação. Porto Alegre, 2006.

LIMA, Rodrigo Malan Loureiro. **O uso da realidade aumentada no ensino de prismas:** um referencial didático para professores do ensino médio.2021. 50f. Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). UNILAB- Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira Redenção, CE, 2021. Dissertação aprovada em: 24/03/2021. Disponível em: https://repositorio.unilab.edu.br/jspui/handle/123456789/2230.

LOPES; Luana Monique Delgado, VIDOTTO; Kajiana Nuernberg Sartor, POZZEBON, Elaine; FERENHOF, Helio Aisenberg. Inovações educacionais com o uso da realidade aumentada: uma revisão sistemática. **EDUR. Educação em Revista**. Belo Horizonte, v.35, 2019. Colocar no formato et al.

LOURENÇO, Édrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo César. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de 1º grau. **EMP-Educação Matemática Pesquisa.** S.P, v.20, n.1, p. 084-109, 2018.

MACEDO, Alex de Cássio. **Ensino e aprendizado de geometria por meio da realidade aumentada em dispositivos móveis:** um estudo de caso em colégios públicos do litoral paranaense. 2018. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2018. Dissertação aprovada em: 07 de agosto de 2018. disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/58857.

MACEDO, Alex de Cassio; SILVA, João Assumpção da; BURIOL, Tiago Martinuzzi. Usando Smartphone e Realidade aumentada para estudar Geometria espacial. CINTED- **Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação** -UFRGS, v. 14, nº 2, dezembro, 2016.

MELLO, Elizabeth Gevarzoni Silva de. **Demonstração:** uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino de Geometria. 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, S.P, 1999. Disponível em: https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/11213. Acessado em: 20/05/2022.

MENDONÇA, Raphael Leal; MUSTARO, Pollyana Notargiacomo. Como tornar aplicações de realidade virtual e aumentada, ambientes virtuais e sistemas de realidade mista mais imersivos.

In: RIBEIRO, Marcos Wagner; ZORZAL, Ezequiel Roberto (Org.). **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências.** Porto Alegre: SBC, 2011, v. 1, p. 96-112. Disponível em: www.de.ufpb.br/~labteve/publi/2011_svrps.pdf. Acesso em: 14 mar; 2022.

MORAN, Jose Manoel. Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias. In: José Manoel Moran, Marcos T. Masetto e Marilda Aparecida Behrens. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógicas**. Papirus Editora. 1ª edição, 2017.

MORAN, José Manoel. **A educação que desejamos novos desafios e como chegar lá**. Papirus Editora. 1ª edição, 2007.

MORAN, M; FRANCO, V. S. As apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em registros figurais de atividades de geometria. **XII EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, 04 a 06 de setembro de 2014. Disponível em: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCAutor/CCA055.PDF

MORAN, Mariana. **As apreensões em geometria:** um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. 2015. 242p. Tese (doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. UEM - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015. disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4522. Acessado em: 20/04/2022.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel dos registros apel dos registros de representação na aprendizagem de matemática temática**. Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 343-362 - Itajaí, set./dez. 2002.

MOURA, Annie Lezan Bittencourt de. Atividades educacionais em realidade aumentada para o protagonismo dos alunos na aprendizagem dos conteúdos educacionais. In: CIDRIM, Luciana; LOPES, Waslon; MADEIRO, Francisco (Org.). **Tecnologias e ciências da linguagem:** vertentes e novas aplicações. 1ª ed. São Paulo: Pá de Palavras, 2019.

MURARI, Claudemir. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de geometria. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (org.). **Educação Matemática: pesquisa em Movimento**. São Paulo, Cortez editora, 2005.

MURARI, Claudemir. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da matemática. **Boletim de Educação Matemática**, vol. 25, núm. 41, 2011, p. 187-21.

NASSER, Ana Cristina**. A pesquisa qualitativ**a: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

PERIM, Messias Yazegy. **Metodologia da pesquisa científica e educacional**. Cachoeiro de Itapemirim, 2010.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de**. Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnica de pesquisa e trabalho acadêmico. Universidade FEEVALE. 2ª ed. Novo Hamburgo - Rio Grande do Sul, 2013. Disponível em:

https://www.feevale.br/Comum/midias/0163c988-1f5d-496f-b118-a6e009a7a2f9/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf.

PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESPÍRITO SANTO – PAEBES. Disponível em: https://sedu.es.gov.br/paebes. Acessado em: 06/11/2021

RESENDE, Bruno. **A aprendizagem da geometria espacial potencializada por meio de um aplicativo de realidade aumentada na perspectiva do mobile learning.** 2019. 149f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática). PUCRS - Pontifícia Universidade Católica do rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019. Dissertação aprovada em: 27 de fevereiro de 2019. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/15326?mode=full. Acesso

RIBERO, Luís Otoni Meireles; GUTERRES, Lisandra Xavier; SILVEIRA, Denise Nascimento. O uso da realidade aumentada com dispositivos móveis na educação matemática como potência na geometria espacial**. Plurais- Revista Multidisciplinar**. Salvador, v. 5, n. 2, p. 40-57, mai./ago. 2020.

SAMPAIO, Rafael Cardoso; LYCARIÃO, Diógenes. **Análise de conteúdo categorial**: manual de aplicação. Brasília: Enap, 2021.

SCHEIIFER, Carine; BRANDT, Celia. Design teórico do pensamento geométrico. In: MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Celia Finck (Orgs.). Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. **REVEMAT/UFSC**. Florianópolis, 2020, p. 150-170.

SILVA, Fernando Oliveira da. **Utilização de dispositivos móveis e recursos de realidade aumentada nas aulas de matemática para elucidação dos sólidos de Platão**. 2017. 102 f. Dissertação (Mestrado). UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Presidente Prudente - S.P. 2017. Aprovada em 201? Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/151423.

SILVA, Roberto Carlos Delmas da. **Realidade aumentada como interface para a aprendizagem de poliedros do tipo prismas.** 2019. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2019. Dissertação aprovada em: 22 de fevereiro de 2019. Dissertação aprovada em: 22 de fevereiro de 2019. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/11163.

SILVA, Roberto Carlos Delmas da; VASCONCELOS, Carlos Alberto. Realidade aumentada como apoio à aprendizagem de poliedros. **Ensino da Matemática em Debate**. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 50-71, 2019.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO. Disponível em: https://sol.sbc.org.br/livros/index.php/sbc. Acessado em 03/11/2022.

SOUSA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação:** novas ferramentas pedagógicas para o professor da atualidade. 8ª ed. São Paulo: Érica Ltda, 2012.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação**: o uso de tecnologias digitais na aplicação das metodologias ativas. 10ª ed. São Paulo: Érica Ltda, 2019.

TAXONOMIA DE BLOOM. Disponível em: https://tutormundi.com/blog/taxonomia-de-bloom/. Acessado em 13/03/2022.

TEXEIRA, Alcinda Souza Muniz; MUSSATO, Solange. Contribuições do software GeoGebra nas aulas com sólidos geométricos de faces planas nos anos iniciais do ensino fundamental. **REAMEC Revista Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, vol. 8, núm. 3, 2020.

TORI, Romero *et al*. Educação. In: TORI, Romero; HOUNSELL, Marcelo da Silva (org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada.** Porto Alegre: Editora SBC, 2018.

TORI, Romero; HOUNSELL, Marcelo da Silva; KIRNER, Claudio. Realidade virtual. In: TORI, Romero; HOUNSELL, Marcelo da Silva (org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: Editora SBC, 2018.

TORI, Romero; KIRNER, Claudio. Fundamentos da realidade virtual. In: Romero Tori; Claudio Kirner; Robson Siscouto. **Fundamentos e Tecnologia em Realidade Virtual e Aumentada.** Belém – PA. Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação. Porto Alegre, 2006. disponível em: https://pcs.usp.br/interlab/wp-content/uploads/sites/21/2018/01/Fundamentos_e_Tecnologia_de_Realidade_Virtual_e_Aumentada-v22-11-06.pdf. Acessado em: 22 de março de 2022.

Yin, Robert K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução: Daniel Bueno. – Porto Alegre: Penso, 2016.

ZABALA, Antoni. **A Prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Primeiro questionário.

QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Turno: Matutino ( ) Vespertino ( ) Noturno ( )

Professor regente: ____

Professor pesquisador: ____

Aluno: ____

Série: __________________ Data: ______ / _________/ _____________

Campo Temático/Tema Gerador: GEOMETRIA ESPACIAL

Objeto de conhecimento: geometria: a visualização e análise das formas poliédricas.

Objetivos e competências da BNCC.

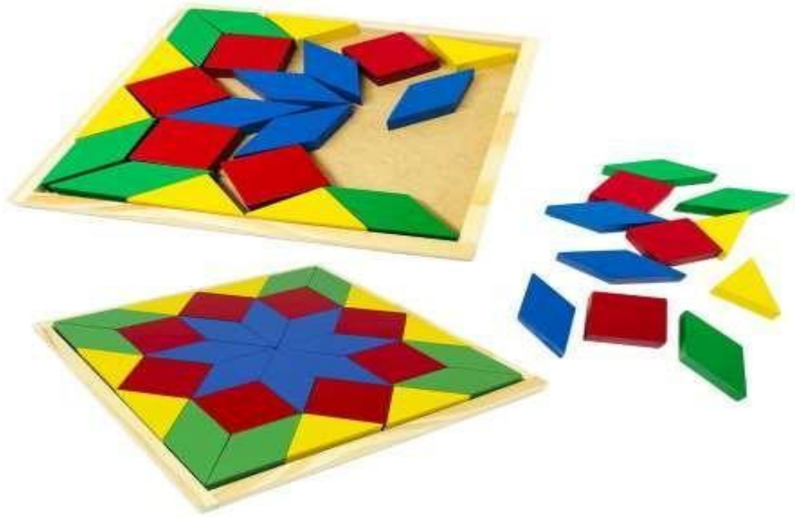
Objetivo: Relacionar os conhecimentos matemáticos com a cultura e as manifestações artísticas.
Competências/habilidades

a) Visualizar e analisar formas diversas e geométricas.
b) Diante de formas geométricas planas e espaciais, reais ou imaginárias, conhecer suas propriedades, relacionar seus elementos.

Objetivo Afetivo: Reconhecer a importância da geometria para a formação humana e a sua contribuição para formar sujeitos críticos e reflexivos.

Objetivo Cognitivo: Entender a relação de formação de figuras tridimensionais, pontuando suas características e propriedades.

Enunciado. O mosaico é uma arte que envolve a montagem de peças que se encaixam, seguindo um padrão, para formar uma figura abstrata ou representacional. Os mosaicos nos encantam por sua beleza em cores, figura e sobreposições. Abaixo temos um mosaico de tabuleiro de peças geométricas. Esse tipo de mosaico nos remete a uma ilusão de percepção depois de montado, pois, nos permite identificar várias figuras planas (2D) e espaciais (3D).



Fonte: https://www.google.com/search?q=figuras+de+mosaico+geometrico+com+diversas+figuras

Questão 1) Com base nas figuras, responda as questões abaixo:

a) Identifique três figuras planas apresentadas no mosaico e escreva o nome dessas figuras.

____

____

b) Identifique as figuras geométricas espaciais que são apresentadas, pela ilusão de ótica, quando o mosaico está montado no tabuleiro e escreva o nome de uma figura.

____

____

c) Com relação ao exercício b e utilizando sua resposta, quantas peças do tabuleiro serão necessárias para construir essa figura tridimensional?

____

____

d) Com relação ao exercício c e utilizando sua resposta, indique o número de vértices, faces e arestas da figura tridimensional formada.

____

____

Questão 2) Recorrendo ao desenvolvimento da atividade 1, responda:

a) Você teve dificuldade em responder as questões? Caso a resposta seja sim, indique a questão (a, b, c ou d).

____

b) Aponte suas dificuldades, escrevendo-as na ordem de maior dificuldade para a de menor dificuldade.

APÊNDICE B – Sequência didática.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática é composta por seis aulas que abordam conteúdos de Geometria Espacial, cálculo da medida de volume dos sólidos e o uso do software Geogebra e da Realidade Ampliada (Geometria RA) como recurso didático.

Escola: EEEFM Antônio dos Santos Neves

Componente Curricular: Matemática

Professor regente: ____

Pesquisador:____

Turma/série: 2ª Série Matutino

Área de conhecimento: Matemática

Descritor D43 – Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.

Objetivo da BNCC

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvam áreas totais e volumes de prisma, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como cálculo do gasto de material para revestimentos ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados) com ou sem o apoio de tecnologias digitais.

Competências/habilidades

- Diante das formas Geométricas planas e espaciais, reais ou imaginárias, conhecer suas propriedades, relacionar seus elementos.
- Visualizar e analisar formas diversas e geométricas.
- Utilizar as novas tecnologias da informação e comunicação.
- Calcular comprimento, áreas e volumes e saber aplicar esse conhecimento no cotidiano.

- **AULA 1**

Tempo Estimado: 1h40min

Conteúdo: Prisma.

Objetivos da aula

- Identificar os elementos que caracterizam os prismas.
- Usar o Geogebra 3D para fazer a construção dos prismas.
- Usar a realidade ampliada para aprofundar conceitos e propriedades dos prismas.

Conceito-chave: prisma regular reto, face, vértice, aresta.

Recursos necessários

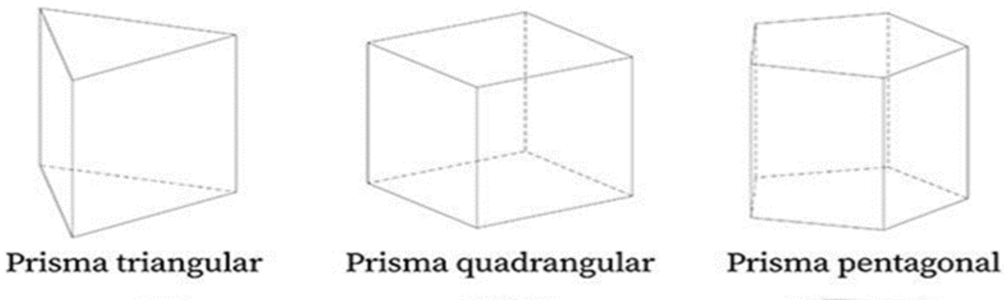
- Chromebook, celular ou qualquer outro recurso tecnológico com aplicativo Geogebra 3D e com o aplicativo Geometria RA.
- Caderno, lápis, caneta, borracha para fazer anotações.

Orientações

* Organizar os alunos em grupo de 4 alunos no ambiente de aprendizagem.
* Usar Chromebook, celular ou outro recurso tecnológico para acessar o Geogebra 3D.
* Apresentar a caixa de ferramentas disponíveis no Geogebra 3D.
* Usar o Geogebra 3D para mostrar a construção dos prismas.
* Orientar os discentes na construção dos prismas no Geogebra 3D.
* Aprofundar, com o Geometria RA, características dos prismas (faces, vértices, arestas, ângulo, altura, planificação).
* Resolver as atividades.

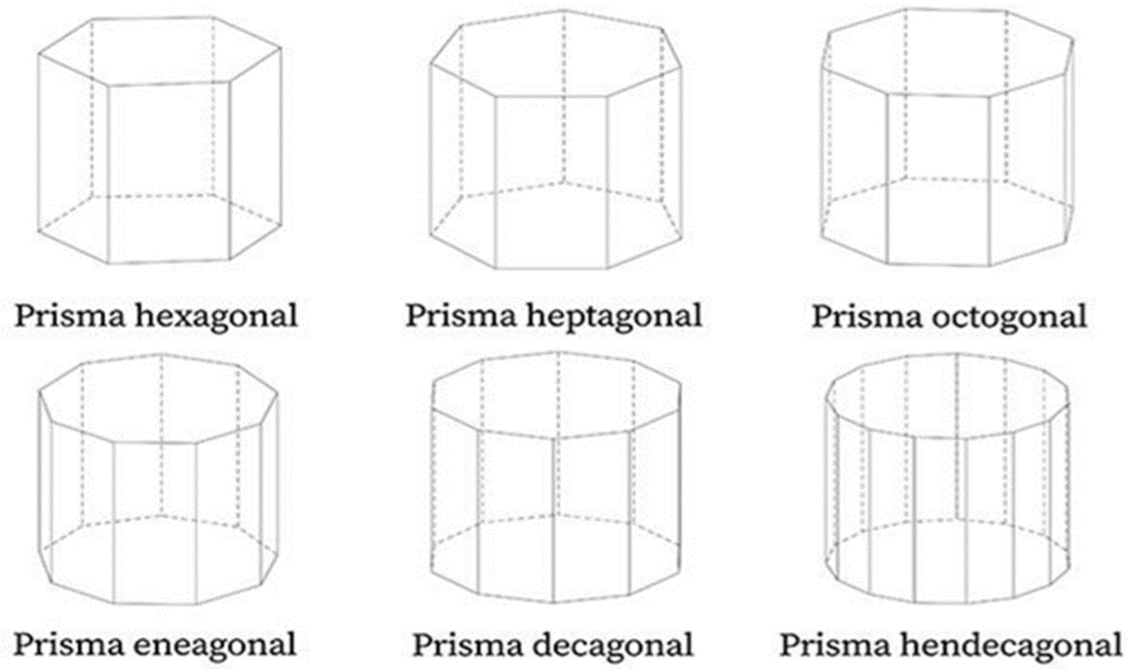
ATIVIDADE 1

Com uso do Geogebra 3D, construir os prismas regulares abaixo.



Fonte: prismaconhecimentocientifico.2022

Observando outros prismas.



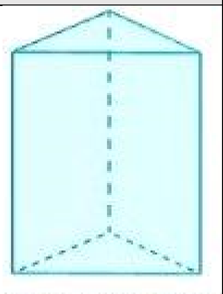
Fonte: prismaconhecimentocientifico.2022

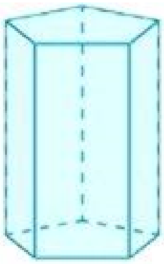
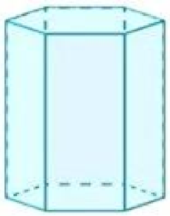
ATIVIDADE 2

Usar o Geometria RA, para identificar e contar elementos nos prismas: Face, arestas, vértices, base, forma espacial e planificação.

ATIVIDADE 3

Preencha a tabela.

Sólido	Nomenclatura	Número de faces laterais	Número de arestas	Número de vértices	Número de bases
					

DESENVOLVIMENTO

- No ambiente de aprendizagem, dividir os alunos e formar grupo com 4 alunos.
- De posse do recurso tecnológico (Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico) com internet, orientar os alunos a fazer o download *do Geogebra disponível em* https://www.geogebra.org/download?lang=pt*.*
- Apresentar as funcionalidades das ferramentas do Geogebra e, em seguida usar o Geogebra 3D para mostrar a construção do prisma sugerido na atividade 1.
- Orientar os alunos na construção dos prismas, destacando conceitos de vértices, arestas, faces e bases bem como a planificação.
- Orientar os alunos a fazer o download do aplicativo Geometria RA no play store.
- Distribuir os marcadores e, com os marcadores visualizar os prismas, neste momento, reforçar os conceitos de faces, arestas, vértices, bases, planificação, ângulo e classificação dos prismas sugerido na atividade 2.
- Entregar a atividade 3 que deverá ser impressa e resolvida individual.

- Resolver a atividade 3.

AVALIAÇÃO

A avaliação é formativa e continuada e dar-se-á durante o desenvolvimento da atividade.

➢ AULA 2

Tempo Estimado: 50 min

Conteúdo: prismas.

Objetivos da aula

- Resolver problemas que apresentam em sua construção os conceitos de prismas.
- Identificar os elementos que caracterizam os prismas.

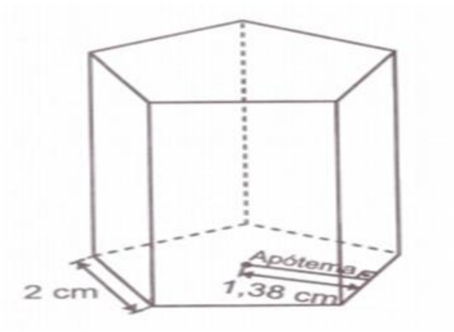
Conceito-chave: prismas, apótema, volume, arestas, vértices, planificação.

Recursos necessários

- Lápis, caneta, borracha para fazer anotações e cálculos.
- Folha de atividade impressa

ATIVIDADES 4

4. (PAEBES – 2018) Laura comprou uma forma de gelo cujos espaços para colocar a água têm o formato de um prisma pentagonal regular reto cuja medida interna de sua altura é 4 cm. A figura abaixo representa um desses espaços com algumas de suas medidas internas indicadas.

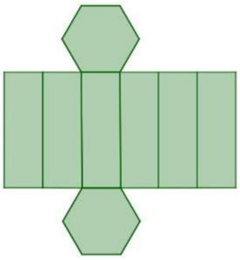


Qual é a quantidade máxima de água que pode ser colocada em cada um desses espaços?

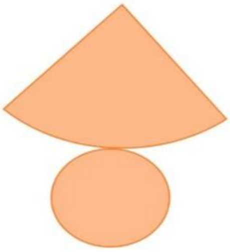
a) 6,90 cm³
b) 9,20 cm³
c) 27,60 cm³
d) 40,00 cm³
e) 53,80 cm³

Atividade 5

5. Ivani inovou sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

I) 

II)

III) 

Das caixas acima, quais das planificações não representam um prisma?

a) I e II
b) I e III
c) II e III
d) I, II e III
e) Nenhuma das anteriores

Atividade 6

6 - O número de faces laterais, arestas e vértices de um prisma quadrangular é:
a) 4, 12, 8
b) 4, 8, 12
c) 12, 4, 8
d)12, 8, 4
e) 8, 4, 12

DESENVOLVIMENTO

- Motivar os alunos para a realização da atividade.
- No ambiente de aprendizagem, informar os discentes da importância de realizar a atividade e esclarecer possíveis dúvidas dos discentes.
- Entregar a atividade 3 impressa que será realiza individual.
- Informar quanto ao uso ou não de ferramentas tecnológicas: calculadoras, celular ou outros recursos tecnológicos.
- Recolher a atividade, corrigir e dar um feedback dos resultados para os alunos.

AVALIAÇÃO

A avaliação dar-se-á através do diálogo com os discentes sobre os acertos e erros.

➢ AULA 3

Tempo Estimado: 1h 40 min

Conteúdo: Pirâmide.

Objetivos da aula

- Identificar os elementos que caracterizam as pirâmides.
- Usar o Geogebra 3D para mostrar a construção das pirâmides.
- Aprofundar os conceitos de pirâmides com o uso do Geometria RA.

Conceito-chave: pirâmides, faces, vértices, arestas, planificação.

Recursos necessários

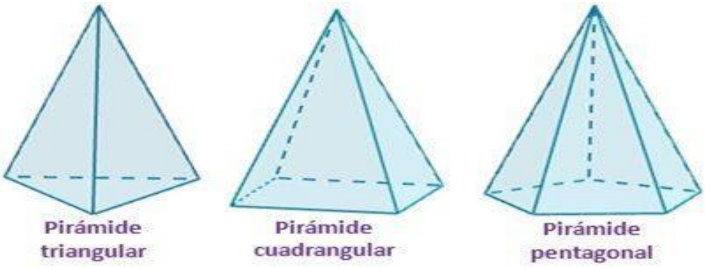
- Chromebook, Celular, tablete ou qualquer outro recurso tecnológico com aplicativo.
- Geogebra 3D e o Geometria RA.
- Folha de atividade impressa.
- Caderno, lápis, caneta, borracha para fazer anotações.

Orientações

* No ambiente de aprendizagem, organizar os alunos em grupo de 4 alunos.
* Usar Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico para acessar o Geogebra 3D.
* Usar o Geogebra 3D para mostrar a construção das pirâmides.
* Orientar os discentes na construção das pirâmides, como uso do Geogebra 3D.
* Aprofundar, com o Geometria RA, conceitos de (faces, vértices, arestas, ângulo, base, planificação) da pirâmide.
* Auxiliar os discentes em caso de dúvidas ou dificuldades.

Atividade 7

Com uso do Geogebra 3D, construir as pirâmides regulares abaixo.

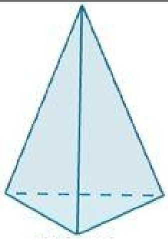
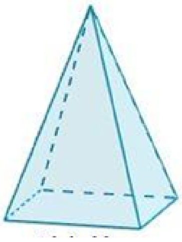
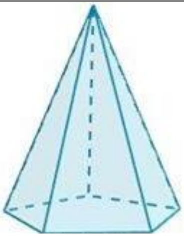
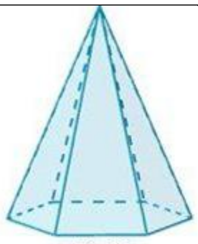


Fonte: pirâmide.pinterest. Acessado em 10/03/2022.

Usar o Geometria RA para reforçar os conceitos da pirâmide: Face, arestas, vértices, ângulos, altura, forma espacial e planificação.

Atividade 8

8- Preencha a tabela.

Sólido	Nomenclatura	Nº de faces lateral	Nº de arestas	Nº de vértice	Nº de bases
					
					
					
					

DESENVOLVIMENTO

- No ambiente de aprendizagem, dividir os alunos e formar grupo com 4 alunos.
- De posse do recurso tecnológico (Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico) com internet, usar o Geogebra 3D para construir as pirâmides proposta na atividade 1**.**

- Orientar os alunos na construção das pirâmides e esclarecer as dúvidas que forem surgindo.
- Distribuir os marcadores e, com os marcadores e o Geometria RA visualizar as pirâmides, neste momento, reforçar os conceitos de faces, arestas, vértices, bases, planificação, altura e ângulo comum, bem como a classificação das pirâmides, proposto na atividade 2.
- Entregar a atividade 3 impressa que deverá ser realizada individual e passar as orientações.

AVALIAÇÃO

A avaliação é formativa e continuada e dar-se-á durante o desenvolvimento da atividade.

- **AULA 4**

Tempo Estimado: 50 min

Conteúdo: Pirâmide.

Objetivos da aula

- Resolver problemas que apresentam em sua construção o conceito de pirâmide.

- Identificar os elementos que caracterizam as pirâmides.

Conceito-chave: pirâmide, faces, vértices, arestas, ângulo comum.

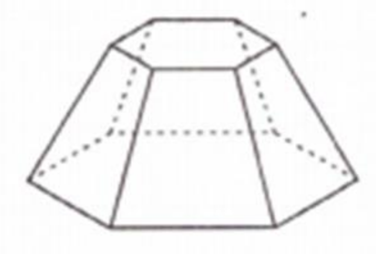
Recursos necessários

- Lápis, caneta, borracha para fazer anotações e cálculos.

- Folha de atividade impressa.

Atividade 9

9. Analisando o sólido geométrico, pode-se afirmar que se trata de um(a)



a) prisma de base hexagonal.

b) pirâmide de base hexagonal.

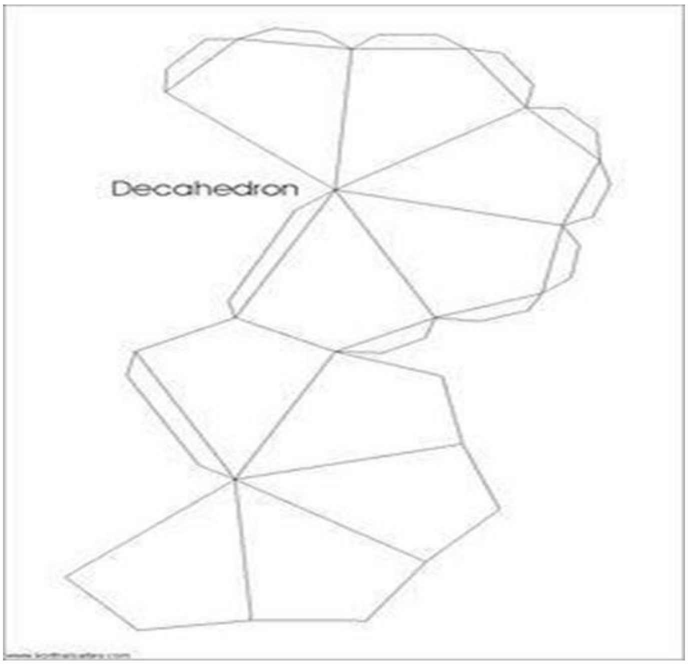
c) tronco de cone de base hexagonal.

d) tronco de pirâmide de base hexagonal.

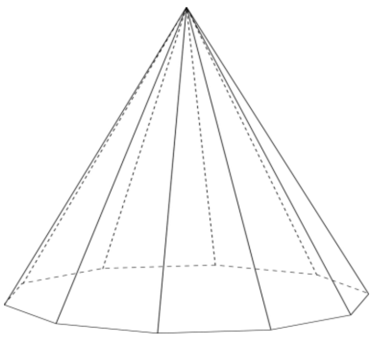
e) paralelogramo de base hexagonal.

Atividade 10

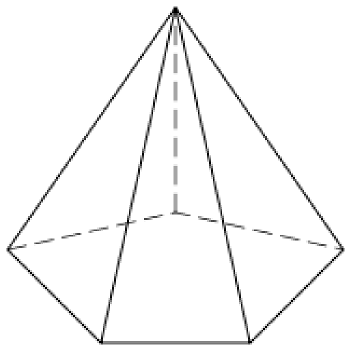
10. A pirâmide formada pela metade da panificação da figura abaixo é:



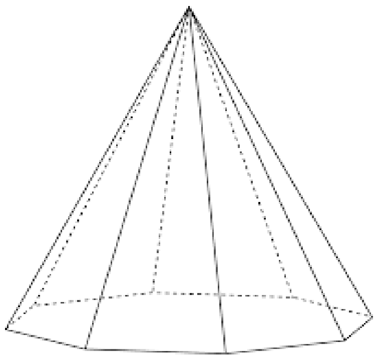
a)



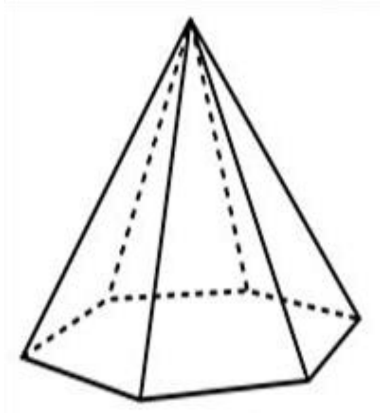
b)



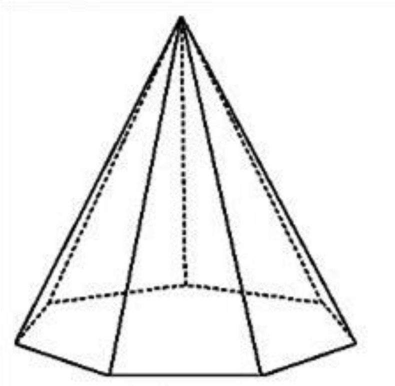
c)



d)

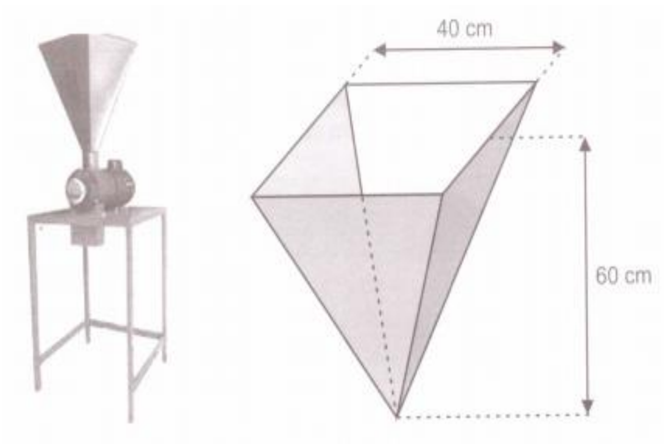


e)



Atividade 11

11- (PAEBES – 2016) Um recipiente acoplado a um moedor tem o formato de uma pirâmide reta de base quadrada cujas medidas internas estão representadas na figura abaixo.



A capacidade desse recipiente, em centímetros cúbicos, é:

a) 2 400

b) 4 800

c) 32 000

d) 64 000

e) 96 000

DESENVOLVIMENTO

- No ambiente de aprendizagem, informar os discentes da importância de estar realizando a atividade e esclarecer possíveis dúvidas dos discentes.
- Imprimir e entregar a atividade 4, que será realiza individual.
- Informar quanto ao uso ou não de ferramentas tecnológicas: calculadora, celular ou outros recursos tecnológicos.
- Recolher a atividade, corrigir e dar um feedback dos resultados para os alunos.

AVALIAÇÃO

A avaliação dar-se-á pelo diálogo, com os alunos, sobre acertos e erros.

- **AULA 5**

Tempo Estimado: 1hora e 40 minutos.

Conteúdo: cilindro.

Objetivos da aula

- Identificar os elementos que caracterizam o cilindro.
- Usar o Geogebra 3D para fazer a construção do cilindro.
- Usar o Geometria RA para aprofundar conceitos de altura, raio, diâmetro do cilindro.
- Resolver problemas, que apresentam, em sua construção, conceitos de cilindro.

Conceito-chave: cilindro, bases, raio, diâmetro, altura, planificação

Recursos necessários

- Chromebook, celular, tablete ou qualquer outro recurso tecnológico com aplicativo Geogebra 3D e Geometria RA.

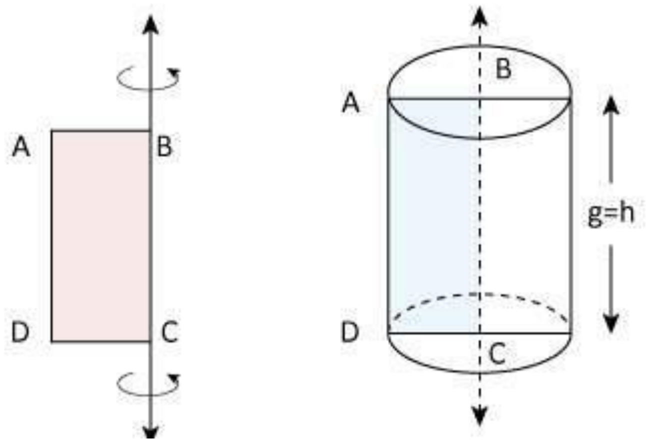
- Caderno, lápis, caneta, borracha para fazer anotações
- Folha de atividade impressa.

Orientações

* No ambiente de aprendizagem, organizar os alunos em grupo de 4 alunos por mesa.
* Usar o Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico para acessar o Geogebra 3D.
* Usar o Geogebra 3D para mostrar a construção do cilindro.
* Orientar os discentes na construção do cilindro no Geogebra 3D.
* Reforçar os conceitos do cilindro com o Geometria RA.
* Auxiliar os discentes no caso de dúvidas ou dificuldades.

Atividade 12

Construir o cilindro usando o Geogebra 3D.



Fonte: cilindro.educamaisbrasil. Acessado em 10/03/2022.

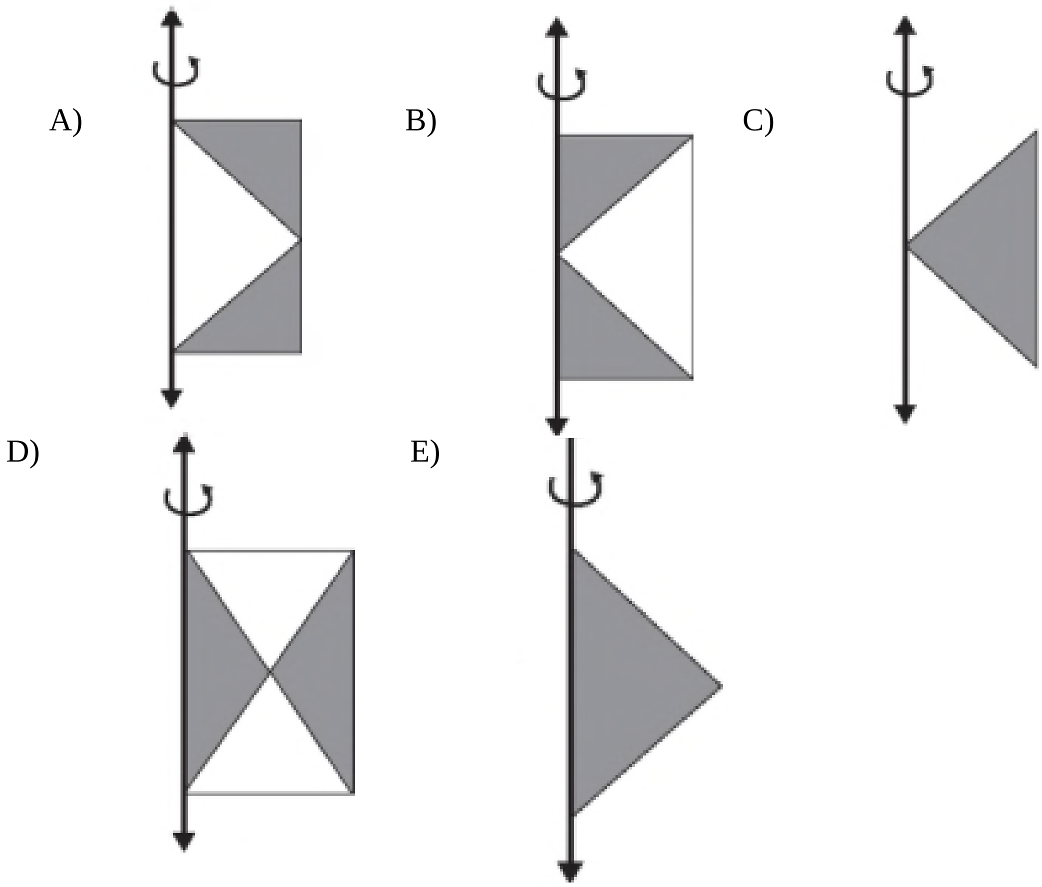
Usar o Geometria RA, para reforçar conceitos do cilindro: forma espacial, planificação, raio, diâmetro e altura.

Atividade 13.

13- A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

Fonte:cilindo.qconcursos. Acessado em 05/03/2022.

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é



DESENVOLVIMENTO

- No ambiente de aprendizagem, dividir os alunos e formar grupo com 4 alunos.
- De posse do recurso tecnológico (Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico) com internet, usar o Geogebra 3D para construir o cilindro proposto na atividade 1.

- Orientar os alunos na construção do cilindro e esclarecer as dúvidas que forem surgindo.
- Distribuir o marcador e, com o marcador visualizar o cilindro, neste momento, reforçar os conceitos de base, raio, diâmetro e altura do cilindro bem como sua planificação proposta na atividade 2.
- Entregar a atividade 3 impressa e orientar quanto ao uso ou não de recursos tecnológicos: calculadora, celular, etc.
- Recolher a atividade, corrigir e dar o feedback dos resultados para os alunos.

AVALIAÇÃO

A avaliação é formativa e continuada e dar-se-á durante o desenvolvimento da atividade e o diálogo, com os alunos, dos acertos e erros.

- **AULA 6**

Tempo Estimado: 1hora e 40 minutos

Conteúdo: Cone

Objetivos da aula

- Identificar os elementos que caracterizam o cone.

- Usar o Geogebra 3D para fazer a construção do cone.

- Usar o Geometria RA para aprofundar conceitos do cone: base, altura, raio, diâmetro, planificação.

- Resolver problemas, que apresentam em sua construção, conceitos de cone.

Conceito-chave: cone, raio, geratriz, diâmetro, base, altura.

Recursos necessários

- Chromebook, celular ou qualquer outro recurso tecnológico com o aplicativo do Geogebra 3D e Geometria RA.

- Atividade impressa.

- Caderno, lápis, caneta, borracha para fazer anotações

Orientações

* no ambiente de aprendizagem, organizar os alunos em grupo de 4 alunos.

* Usar o chromebook, celular ou outro recurso tecnológico para acessar o Geogebra 3D.

* Usar o Geogebra 3D para mostrar a construção do cone.

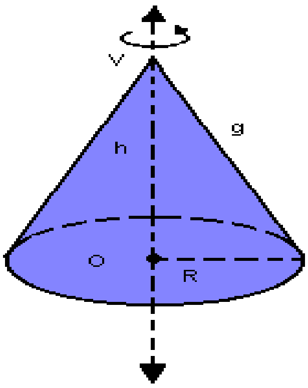
* Orientar os discentes na construção do cone, com o uso do Geogebra 3D.

* Aprofundar os conceitos de base, geratriz, altura, raio, diâmetro, planificação do cone com o Geometria RA.

* Auxiliar os discentes no caso de dúvidas ou dificuldades.

ATIVIDADE 14

Construir o cone no Geogebra 3D.

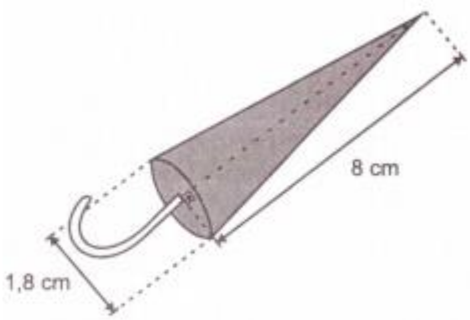


Fonte: cone.somatematica. Acessado em 15/04/2022.

Com o Geometria RA reforçar os conceitos de raio, diâmetro, geratriz, base, altura e a planificação do cone.

ATIVIDADE 14

(PAEBES – 2018) Luciana produz sombrinhas maciças de chocolate em formato de um cone circular reto para vender. Na figura abaixo, está representada essa sombrinha, com algumas de suas dimensões indicadas, e, em cinza, a parte maciça de chocolate.



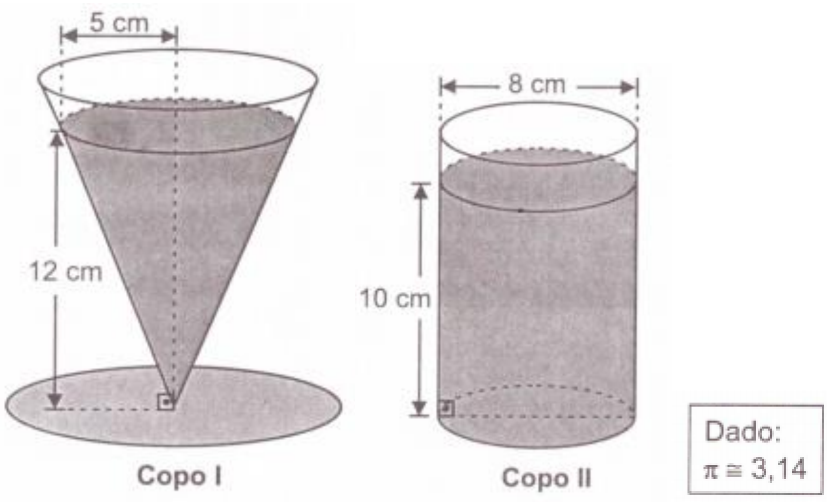
Dado:
$\pi \cong 3$

Qual é a quantidade mínima de chocolate que Luciana utiliza para produzir uma dessas sombrinhas?

a) 6,48 cm³
b) 14,40 cm³
c) 25,90 cm³
d) 7,20 cm³
e) 19,44 cm³

Atividade 15

15-(PAEBES – 2017) Uma lanchonete serve açaí em dois tipos diferentes de copos, sendo um com formato de cone e outro com formato de cilindro, ambos retos. Os copos são preenchidos até determinada altura, conforme está representado no desenho abaixo.



A quantidade de açaí contida no copo II supera a quantidade do copo I em:

a) 125,6 cm³
b) 188,4 cm³
c) 376,8 cm³
d) 439,6 cm³
e) 816,4 cm³

DESENVOLVIMENTO

- No ambiente de aprendizagem, dividir os alunos e formar grupo com 4 alunos.
- De posse do recurso tecnológico (Chromebook, celular, tablete ou outro recurso tecnológico) com internet, usar o Geogebra 3D para construir o cone propostas na atividade 1.
- Orientar os alunos na construção do cone e esclarecer as dúvidas que forem surgindo.

- Distribuir o marcador e, com o marcador visualizar o cilindro no GeometriaRA, neste momento, reforçar os conceitos de base, raio, diâmetro e altura do cone e sua planificação proposta na atividade 2.
- Entregar a atividade 3 impressa e orientar quanto ao uso ou não de recursos tecnológicos: calculadora, celular etc.
- Recolher a atividade, corrigir e dar o feedback dos resultados para os alunos.

AVALIAÇÃO

A avaliação é formativa e continuada e dar-se-á durante o desenvolvimento da atividade e o diálogo, com os alunos, dos acertos e erros.

REFERÊNCIAS

Cilindro reto. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/geometria-espacial. Acesso em: 11 de abr. de 2022.

Cone reto. Disponível em**:** https://www.somatematica.com.br. Acesso em 11: de abr. 2022.

Matemática para concurso. Disponível em:https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/cilindro/questoes?page=2. Acesso em: 11 de abr. de 2022.

PAEBES TRI. Disponível em: https://paebestri.caedufjf.net/. Acesso em: 15 de abril de 2022.

Pirâmide reta. Disponível em https://br.pinterest.com/pin/651333164858871083/. Acesso em: 11 de abr. de 2022.

Prisma reto. Disponível em: https://conhecimentocientifico.com/prismas-geometria. Acesso em: 11 de abr. de 2022

APÊNDICE C – Segundo questionário

QUESTIONÁRIO 2

Prezado aluno (a), para contribuir com as análises do processo de aprendizagem a partir do desenvolvimento das sequências didáticas aplicadas nas aulas de Matemática a qual fez uso do software Geometria RA como um recurso pedagógico para o aprendizado de Geometria Espacial, solicito que responda o questionário. Não é necessário se identificar.

ATRIBUA PESOS DE 1 A 5 PARA AS QUESTÕES A SEGUIR					
Análise dos aspectos pedagógicos do software Realidade Aumentada (RA) para a aprendizagem de geometria espacial.	Discordo totalmente (1)	Discordo (2)	Indiferente (3)	Concordo (4)	Concordo totalmente (5)
O software RA é fácil de usar.					
O uso do software RA ajudou para o meu aprendizado.					
Após usar o software RA Ficou mais fácil resolver problemas de geometria espacial.					
Usar o software RA tornou o aprendizado de geometria espacial mais atrativo e interessante.					
É mais fácil aprender geometria se usarmos o software RA.					

APÊNDICE D – Declaração de compromisso do pesquisador

UFES | CEUNES Campus São Mateus UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DECLARAÇÃO DE COMPROMISSO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL

Eu, Ivani Francisca dos Santos, RG 982091, CPF: 30283353287, matrícula de nº 2021132061, do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, modalidade Mestrado Acadêmico da Universidade Federal do Espírito Santo, Campus São Mateus, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – CEUNES responsável pela pesquisa intitulada **"REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SIMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS"**, tem por objetivo geral verificar se o uso a realidade ampliada e simuladores como recurso didáticos pedagógicos facilitam a compreensão das características, propriedades e conceitos simbólicos nos principais sólidos geométricos ao serem aplicados na resolução de problemas.

Comprometo-me a:

1. Iniciar a coleta de dados somente após o projeto de pesquisa ser aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos.
2. Obedecer às disposições éticas de proteger os participantes da pesquisa, garantindo-lhes o máximo de benefícios e o mínimo de riscos.
3. Assegurar a privacidade das pessoas citadas nos documentos institucionais ou contratadas diretamente, de modo a proteger suas imagens, bem como garantir que não utilizará as informações coletadas em prejuízo dessas pessoas ou da instituição, respeitando deste modo as Diretrizes Éticas da Pesquisa envolvendo Seres Humanos, nos termos estabelecidos na Resolução CNS nº 466/2012, e obedecendo às disposições legais estabelecidas na Constituição Federal Brasileira, art. 5º, inciso X e XIV e no Código Civil, art. 20.
4. Apresentar o relatório final com os resultados da pesquisa.

Boa Esperança - ES, 25 de outubro de 2021.

Ivani Francisca dos Santos

Pesquisadora Responsável

APÊNDICE E – Autorização do diretor da escola

DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO COPARTICIPATIVA

Eu Juliano Doná abaixo assinado, responsável pela instituição de ensino: EEEFM Antônio dos Santos Neves , declaro conhecer e estar de acordo com a realização da pesquisa intitulada, "**REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SIMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS**", de responsabilidade da pesquisadora Ivani Francisca dos Santos, aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica – PPGEEB (Mestrado), da Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

Declaro ainda conhecer a Resolução nº 510, de 07 de abril de 2016 "Diretrizes e Normas Regulamentadoras de Pesquisa Envolvendo Seres Humanos". Esta instituição está ciente de suas responsabilidades como participante da pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e do bem estar dos participantes da pesquisa, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem estar.

Boa Esperança - Es, 04 de novembro de 2021.

Doná

Diretor(a) da Escola

Juliano Doná
Diretor Escolar
Nº Funcional: 4020774
Port. Nº 899-S de 20/09/2021
D.O. 21/09/2021

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
" ANTONIO DOS SANTOS NEVES"
Entidade mantenadora: Governo do Estado do Espírito Santo
Criação da Escola: Portaria nº 855 E - DOES de 4/2/1970
Retificada pela Portaria - E Nº 873-DOES de 5/4/1970, retificada pela
Portaria E nº 1887, de 1/3/1983 - DOES DE 8/3/1983
Aprovação da Escola: Res. CEE/ES nº 66/1980 DOES de 26/8/1980
Avenida Democrata, Nº 845 - centro, Boa Esperança - ES
CEP 29.845-000 - Telefone: (27) 99777 - 5144
e-mail: escolaantonioneves@sedu.es.gov.b

APÊNDICE F – Termo de assentimento livre e esclarecido

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____estou sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa intitulada “REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SIMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS”, sob a responsabilidade de Ivani Francisca dos Santos, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica - PPGEEB (Mestrado) da Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – Campus São Mateus.

Justificativa

A pesquisa surgiu da necessidade de investigar as dificuldades encontradas por alunos da 2ª série do Ensino Médio da E.E.E.F.M. Antônio dos Santos Neves em usar conceitos simbólicos matemáticos para o cálculo de volume de um sólido na resolução de problemas. As dificuldades apresentadas pelos alunos são apontadas pelo Descritor 43 do PAEBES TRI de 2016, 2017, 2018 e 2019. O D43 (Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas) apresentou o pior resultado, se comparado aos demais descritores, em 11 das superintendências do Espírito Santo. Os resultados apontam a fragilidade no ensino da geometria espacial e a necessidade de uma metodologia diferenciada.

Objetivo da Pesquisa

Verificar se o uso a realidade ampliada e simuladores como recurso didáticos pedagógicos facilitam a compreensão das características, propriedades e conceitos simbólicos nos principais sólidos geométricos ao serem aplicados na resolução de problemas.

Procedimento para obtenção dos dados

Para desenvolver as ações descritas no projeto de pesquisa, os dados serão coletados por: - Observação participante das práticas dos docentes ao regerem suas aulas, assim como as metodologias e os recursos tecnológicos utilizados.

- Aplicação de dois questionários:

  - Um questionário de sondagem diagnostico da aprendizagem aplicado antes do início da sequência didática.
  - Aplicação de uma sequência didática.

- Um questionário para avaliar o uso da RA- realidade ampliada, aplicado no final da sequência didática.

A EEEFM Antônio dos Santos Neves, aqui descrita como campo de pesquisa, está situada no município de Boa esperança, E.S. As observações permitirão coletar informações que direcionará a aplicação das atividades descritas na sequência didática. As atividades da SD serão analisadas, avaliadas e serão aplicadas de acordo com o planejamento e organização das práticas pedagógicas do professor regente.

Ao propor um trabalho com o uso da realidade ampliada aplicada na modelagem matemática com o uso de simuladores no cálculo de volume dos sólidos, pretendemos investigar quais são as dificuldades apontadas pelos alunos no cálculo de volume dos sólidos, propondo ações que visem melhorar os resultados apresentados pelo D43 descrito no PAEBES TRI, na 2ª série do EM, da E.E.E.F.M Antônio dos Santos Neves. Todos as etapas da coleta de dados serão registradas para serem analisadas, tabuladas e apresentada ao corpo docente da escola.

Riscos e Desconfortos

Entendemos que toda pesquisa com seres humanos envolve riscos em tipos e graus variados. A própria observação das práticas educativas realizadas em sala de aula, em algum momento, pode causar constrangimento aos envolvidos na situação de ensino e aprendizagem, modificando a dinâmica das relações de ensino ali instauradas. Em casos de ocorrência com relação aos riscos e desconfortos será dada assistência imediata que se configura na assistência emergencial e sem ônus de qualquer espécie ao participante da pesquisa, em situações em que este dela necessite de assistência integral, que é aquela prestada para atender complicações e danos decorrentes, direta ou indiretamente, da pesquisa e cujo aparo legal se encontra na **Resolução 510/16 do CNS e na Resolução 466/12 CNS**.

Garantia de ressarcimento financeiro e indenização

A participação na pesquisa não envolve valor econômico a receber ou a pagar. Entretanto, está garantida indenização mediante eventuais danos decorrentes da pesquisa, desde que comprovados por meio de decisão judicial ou extrajudicial, de acordo com o item II.3 e o item IV.3.h da Resolução CNS 466/12, art. 9º inciso VI e art. 19º § 2º da Resolução CNS 510/16, descritos abaixo:

CNS 466/12,

II.3 - assistência ao participante da pesquisa:
II.3.1 - assistência imediata – é aquela emergencial e sem ônus de qualquer espécie ao participante da pesquisa, em situações em que este dela necessite; II.3.2 - assistência integral – é aquela prestada para atender complicações e danos decorrentes, direta ou indiretamente, da pesquisa;

IV.3. h) explicitação da garantia de indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

CNS 510/16,

Art. 9º São direitos dos participantes:
– Ser indenizado pelo dano decorrente da pesquisa, nos termos da Lei;

Art. 19º. O pesquisador deve estar sempre atento aos riscos que a pesquisa possa acarretar aos participantes em decorrência dos seus procedimentos, devendo para tanto serem adotadas medidas de precaução e proteção, a fim de evitar danos ou atenuar seus efeitos.

· **§ 2º O participante da pesquisa que vier a sofrer qualquer tipo de dano resultante de sua participação na pesquisa, previsto ou não no Registro de Consentimento Livre e esclarecido, tem direito a assistência e a buscar indenização.**

Benefícios

Os benefícios dessa pesquisa estão relacionados à sua contribuição para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino e, como decorrência disso, melhorar a aprendizagem dos participantes da pesquisa, colaborando para a qualidade do ensino a ser oferecido.

Garantia do Sigilo e Privacidade

Os dados dos participantes serão mantidos em sigilo durante todo o desenvolvimento da pesquisa, inclusive após a publicação. Portanto usaremos nomes fictícios ao nos referirmos aos participantes na escrita e na análise da coleta de dados. Todo registro que apareça a imagem dos participantes serão retirados os rostos com borrão.

Reiteramos que não aparecerá nome nem o rosto dos envolvidos na pesquisa. Os dados coletados serão tratados com responsabilidade respeitando toda a informação, que será registrada na integra, seguindo as normas de confiabilidade entre pesquisador e pesquisado. Cada etapa do desenvolvimento do objeto de aprendizagem será discutida e analisada com os professores regentes. Será informado, ao professor regente e a escola, os dias de visitas que contemplam a observação e a aplicação da sequência didática.

Garantia de recusa em Participar da Pesquisa e/ou Retirada de Consentimento

A sua participação na pesquisa é voluntária e caso você opte por não participar, não terá nenhum prejuízo e você não mais será contatado (a) pela pesquisadora.

ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o (a) Sr. (a) pode contatar a pesquisadora Ivani Francisca dos Santos, no telefone (27) 996212575. O (a) S.r. (a) também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa – Campus do CEUNES pelo telefone (27) 33121519**,** e-mail: cepceunes@gmail.com/ comitedeetica.ceunes@institucional.ufes.br, endereço Rodovia BR 101 Norte, Km 60, Bairro Litorâneo, São Mateus, ES, CEP: 29.932-540.

Nesse sentido, gostaria de contar com a sua colaboração, através de seu Assentimento Livre e Esclarecido.

OBS: Esse termo de Assentimento Livre e Esclarecido será lido para o (a) menor participante da pesquisa na presença de uma testemunha.

Declaração de assentimento do participante da pesquisa

Eu fui informado (a) pela pesquisadora responsável do presente estudo sobre os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO e tive a oportunidade de fazer perguntas, assim como, todas as minhas perguntas foram respondidas. Eu recebi uma via deste Termo de Assentimento, de igual teor, assinada pela pesquisadora principal e rubricada em todas as páginas.

Boa Esperança - ES, ____________________ 2022.

____

Assinatura do (a) menor participante da pesquisa

Na qualidade de pesquisadora responsável pela pesquisa **"REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SIMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS"**, eu Ivani Francisca dos Santos, declaro ter cumprido as exigências do item II.3 e o item IV.3.h da Resolução CNS 466/12, art.

9º inciso VI e art. 19º § 2º da Resolução CNS 510/16 a qual estabelece diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos.

Boa Esperança - ES, de____de 2022.

Ivani Francisca dos Santos

____

Pesquisadora Responsável

APÊNDICE G – Termo de consentimento livre e esclarecido destinado aos pais ou responsáveis legais

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DESTINADO AOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS

O (a) menor ____ pelo (a) qual o (a) senhor (a) é responsável está sendo convidado a participar da pesquisa intitulada **"REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SUMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS"**, sob a responsabilidade de Ivani Francisca dos santos, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica - PPGEEB (Mestrado) da Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo – Campus São Mateus.

Justificativa

A pesquisa surgiu da necessidade de investigar as dificuldades encontradas por alunos da 2ª série do Ensino Médio da E.E.E.F.M. Antônio dos Santos Neves em usar conceitos simbólicos matemáticos para o cálculo de volume de um sólido na resolução de problemas. As dificuldades apresentadas pelos alunos são apontadas pelo Descritor 43 do PAEBES TRI de 2016, 2017, 2018 e 2019. O D43 (Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas) e apresentou o pior resultado, se comparado aos demais descritores, em 11 das superintendências do Espírito Santo. Os resultados apontam a fragilidade no ensino da geometria espacial e a necessidade de uma metodologia diferenciada.

Objetivo da Pesquisa

A pesquisa tem por objetivo verificar se o uso a realidade ampliada e simuladores como recurso didáticos pedagógicos facilitam a compreensão das características, propriedades e conceitos simbólicos nos principais sólidos geométricos ao serem aplicados na resolução de problemas.

Procedimento para obtenção dos dados

Para desenvolver as ações descritas no projeto de pesquisa, os dados serão coletados por: - Observação participante das práticas dos docentes ao regerem suas aulas, assim como as metodologias e os recursos tecnológicos utilizados.

- Aplicação de dois questionários:
  - Um questionário de sondagem diagnostico da aprendizagem aplicado antes da sequência didática;
  - Um questionário para avaliar o uso da RA, aplicado no final da sequência didática

- Aplicação de uma sequência didática

A EEEFM Antônio dos Santos Neves, aqui descrita como campo de pesquisa, está situada no município de Boa esperança, E.S. As observações permitirão coletar informações que direcionará a aplicação das atividades descritas na sequência didática. As atividades da SD serão analisadas, avaliadas e serão aplicadas de acordo com o planejamento e organização das práticas pedagógicas do professor regente.

Ao propor um trabalho com o uso da realidade ampliada aplicada na modelagem matemática com o uso de simuladores no cálculo de volume dos sólidos, pretendemos investigar quais são as dificuldades apontadas pelos alunos no cálculo de volume dos sólidos, propondo ações que visem melhorar os resultados apresentados pelo D43 descrito no PAEBES TRI, na 2ª série do EM, da E.E.E.F.M Antônio dos Santos Neves. Todos as etapas da coleta de dados serão registradas para serem analisadas, tabuladas e apresentada ao corpo docente da escola.

Riscos e Desconfortos

Entendemos que toda pesquisa com seres humanos envolve riscos em tipos e graus variados. A própria observação das práticas educativas realizadas em sala de aula, em algum momento, pode causar constrangimento aos envolvidos na situação de ensino e aprendizagem, modificando a dinâmica das relações de ensino ali instauradas. Em casos de ocorrência com relação aos riscos e desconfortos será dada assistência imediata que se configura na assistência emergencial e sem ônus de qualquer espécie ao participante da pesquisa, em situações em que este dela necessite de assistência integral, que é aquela prestada para atender complicações e danos decorrentes, direta ou indiretamente, da pesquisa e cujo aparo legal se encontra na **Resolução 510/16 do CNS e na Resolução 466/12 do CNS.**

Garantia de ressarcimento financeiro e indenização

A participação na pesquisa não envolve valor econômico a receber ou a pagar. Entretanto, está garantida indenização mediante eventuais danos decorrentes da pesquisa, desde que comprovados por meio de decisão judicial ou extrajudicial, de acordo com o item II.3 e o item IV.3.h da Resolução CNS 466/12, art. 9º inciso VI e art. 19º § 2° da Resolução CNS 510/16, descritos abaixo:

CNS 466/12, II.3 - assistência ao participante da pesquisa:

II.3.1 - assistência imediata – é aquela emergencial e sem ônus de qualquer espécie ao participante da pesquisa, em situações em que este dela necessite; II.3.2 - assistência integral – é aquela prestada para atender complicações e danos decorrentes, direta ou indiretamente, da pesquisa;

IV.3. h) explicitação da garantia de indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

CNS 510/16,

Art. 9º São direitos dos participantes:

VI – SER INDENIZADO PELO DANO DECORRENTE DA PESQUISA, NOS TERMOS DA LEI;

Art. 19º. O pesquisador deve estar sempre atento aos riscos que a pesquisa possa acarretar aos participantes em decorrência dos seus procedimentos, devendo para tanto serem adotadas medidas de precaução e proteção, a fim de evitar danos ou atenuar seus efeitos.

§ 2º O participante da pesquisa que vier a sofrer qualquer tipo de dano resultante de sua participação na pesquisa, previsto ou não no Registro de Consentimento Livre e esclarecido, tem direito a assistência e a buscar indenização.

Benefícios

Os benefícios dessa pesquisa estão relacionados à sua contribuição para o desenvolvimento e melhoria das práticas de ensino em matemática e, como decorrência disso, melhorar a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa, colaborando para a qualidade do ensino a ser oferecido.

Garantia do Sigilo e Privacidade

Os dados dos participantes serão mantidos em sigilo durante todo o desenvolvimento da pesquisa, inclusive após a publicação. Portanto usaremos nomes fictícios ao nos referirmos aos participantes na escrita e na análise da coleta de dados. Todo registro que apareça a imagem dos participantes serão retirados os rostos com borrão.

Reiteramos que não aparecerá nome nem o rosto dos envolvidos na pesquisa. Os dados coletados serão tratados com responsabilidade respeitando toda a informação, que será registrada na íntegra, seguindo as normas de confiabilidade entre pesquisador e pesquisado. Cada etapa do desenvolvimento do objeto de aprendizagem será discutida e analisada com os professores regentes.

Será informado, ao professor regente e a escola, os dias de visitas que contemplam a observação e a aplicação da sequência didática bem como a aplicação dos questionários.

Garantia de recusa em Participar da Pesquisa e/ou Retirada de Consentimento: O menor pelo qual o (a) Sr. (a) é responsável não é obrigado (a) a participar da pesquisa, podendo deixar de participar dela a qualquer momento de sua execução, sem que haja penalidades ou prejuízos decorrentes de sua recusa. Caso decida retirar seu consentimento, o (a) Sr. (a) não mais será contatado (a) pela pesquisadora.

Esclarecimento de dúvidas:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa ou para relatar algum problema, o (a) Sr. (a) pode contatar a pesquisadora Ivani Francisca dos Santos, no telefone 27996212575. O (a) Sr (a) também pode contatar o Comitê de Ética em Pesquisa – Campus do CEUNES pelo telefone (27) 33121519**,** e-mail: cepceunes@gmail.com/ comitedeetica.ceunes@institucional.ufes.br, endereço Rodovia BR 101 Norte, Km 60, Bairro Litorâneo, São Mateus, ES, CEP: 29.932-540.

Nesse sentido, gostaria de contar com a sua colaboração, através de seu Consentimento Livre e Esclarecido.

DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO DOS PAIS OU RESPONSÁVEIS LEGAIS

Declaro que fui verbalmente informado (a) e esclarecido (a) sobre o presente documento, entendendo todos os termos acima expostos, e que voluntariamente aceito a participação do (a) menor pelo (a) qual sou responsável e compreendo que posso retirar meu consentimento e interrompê-lo a qualquer momento, sem penalidade. Também declaro ter recebido uma via deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, de igual teor, assinada pela pesquisadora principal e rubricada em todas as páginas.

Boa Esperança – ES, ______________ 2022.

____

Assinatura do pai/ou mãe/ou responsável legal

Na qualidade de pesquisadora responsável pela pesquisa **"REALIDADE AMPLIADA APLICADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA COM O USO DE SUMULADORES PARA O CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS"**, eu Ivani Francisca dos Santos, declaro ter cumprido as exigências do termo item II.3 e o item IV.3.h da Resolução CNS 466/12, art. 9º inciso VI e art. 19º § 2º da Resolução CNS 510/16, a qual estabelece diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos.

Boa Esperança – ES,_______de _____________________________de 2022.

____

Pesquisadora Responsável