

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AMBIENTAL**

WESLEY JOSÉ NUNES PINTO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO LAGRANGIANO *SPH*
(*SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS*) PARA A
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS CAVIDADES**

VITÓRIA
2013

WESLEY JOSÉ NUNES PINTO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO LAGRANGIANO *SPH*
(*SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS*) PARA A SOLUÇÃO
DO PROBLEMA DAS CAVIDADES**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Ambiental na área de concentração em Recursos Hídricos.

Orientador: Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana

VITÓRIA
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial Tecnológica,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

N972a Nunes Pinto, Wesley José, 1976-
Aplicação do método lagrangiano *SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)* para a solução do problema das cavidades / Wesley José Nunes Pinto. – 2013.
129 f. : il.

Orientador: Julio Tomás Aquije Chacaltana.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) –
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. *SPH*. 2. Cavidade quadrada. 3. Método de partículas. 4. Fluidodinâmica computacional. 5. Lagrange, Funções de. I. Chacaltana, Julio Tomás Aquije. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 628

WESLEY JOSÉ NUNES PINTO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO LAGRANGIANO *SPH*
(*SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS*) PARA A SOLUÇÃO
DO PROBLEMA DAS CAVIDADES**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Ambiental na área de concentração em Recursos Hídricos.

Aprovada em 19 de Agosto de 2013

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Maxsuel Marcos Rocha Pereira
Universidade Federal do Espírito Santo
Examinador Interno

Prof. Dr. Roger Matsumoto Moreira
Universidade Federal Fluminense
Examinador Externo

AGRADECIMENTOS

Para a construção dessa Dissertação foi necessário a superação de inúmeras linhas impensáveis, essas ocorridas durante toda a sua composição, sendo-a fruto de um trabalho duro, de uma labuta diária e cheia de dor. A mão da força superior foi decisiva em sua finalização. E Deus existe, sem dúvidas!

Dedico esse trabalho a minha família, em especial ao meu pai, o senhor Cosme José Nunes Pinto (*in memoriam*) e a meu irmão, Weverson Nunes Pinto (*in memoriam*). Além das mulheres do meu lar: minha mãe Dalva, minhas sobrinhas Adrielly e Robertha, e minha irmã Mirelly.

Agradeço e dedico esse trabalho à Adriana da Costa Barbosa, a mulher que de seu jeito ímpar, me ajudou a idealizar toda essa vitória, me incentivando a buscar meus sonhos mais abstratos, materializando-os através de suas análises, apontando as possibilidades da luz da sabedoria.

Agradeço ao meu orientador e amigo, o altivo Prof. Dr. Julio Tomás Aquije Chacaltana, que acreditou em mim, sempre sendo conduzido por suas virtudes, entre elas, as maiores: a inteligência e a compaixão.

Agradeço ao meu amigo e mentor, o nobre Prof. Me. Carlos Alberto Dutra Fraga Filho. A pessoa, que juntos, “rompemos” incontáveis madrugadas. Sempre objetivando me direcionar para conseguir iniciar, desenvolver e finalizar essa Dissertação. Uma das pessoas que mais me fortaleceu academicamente nesses anos. Carlão, Muito Obrigado!

Agradeço aos membros de minha banca, os senhores Prof. Dr. Maxsuel Marcos Rocha Pereira e Prof. Dr. Roger Matsumoto Moreira.

Assim como aos meus grandes amigos da minha turma da Matemática/UFES: Paulo, Magno, Gustavo, Adolfo “Magrim” e Flavione. Aos meus amigos do LABESUL/UFES: Gregório e a sua presente família, Danilo, Fábio, Leonardo, Henery, Felipe, Scotá, Mantuan, Thiago, Fernando, Paterlini, Kaio, Fran, Larissa e aos novos alunos. Agradeço ao PPGEA/UFES: Emerson “Papa”, Enilene, Prof.^a Dr.^a Regina Keller, Rose Leão e Marcia. Aos Professores da Matemática/UFES: Fabiano Petronetto e Alancardek Araújo. Ao DAS/UFES: Flavia Pavan. À Biblioteca Central/UFES: Lírio e Ilane.

Aos meus amigos de “todo sempre”: Márcio “Cuca”, Israelzinho, Arturzinho, Dudu, Marcelo “Macarrão”, Evandro “Xexeta”, Fred Chisté, Eduardo “Lampião”, Sander, Geomar, Ricardo “Charlie”, Edson “Bob”, Nil, Natan, Rodrigo, Wagner, Gugu, Carlinho, Wilian, Zé Carlos “Gordo”, Ana, Léos, Irmãos Aquino, Márcio “Cabeça”, Fábio Pontes, Serginho, Rhaiany, Renato, Débora “Yes”, Marcelos, Marcovani, Família Loiola, Romério, “Tamanco” e Érica.

Aos Oficiais e Praças da PMES, em especial aos seguintes MMEE, aos Capitães: Gomes, Pereira Júnior, Israel, Abeldt, Vitor Gallo, Enoni, Monteiro Santos, Risse, J. Castro, Rossoni, Maia e Marcos. Aos Majores: Liquer, Natanael Cogô e Moreto. Aos Sargentos: Marcos, Valdete e Pungal. Ao meu amigo Cb. Marcos Pádua, e aos Cabos: Bertulani, Solange, Carminati, Roberto “Xaropinho”, e ao Sd. Elidonio. Agradeço ao Cel. Ilton Borges e aos demais Oficiais de minha turma do CFO (Aspirantes 2001).

RESUMO

Neste estudo foi aplicado do método numérico, sem malhas, baseado em partículas, denominado *SPH* (*Smoothed Particles Hydrodynamics*). E um código numérico na linguagem computacional *FORTRAN* foi utilizado para solucionar as equações de *Navier-Stokes*. O clássico problema da literatura da dinâmica dos fluidos Computacional, denotado como “problema da cavidade quadrada bidimensional (*Shear-Driven Cavity Flow*)”, foi estudado com a intenção de verificar o comportamento do código numérico em relação a resultados específicos já existentes do assunto. O citado problema físico das cavidades abertas é amplamente empregado como *benchmark*, visando a validação do método numérico utilizado no trabalho desenvolvido na pesquisa. O trabalho de análise e validação do código numérico foi dividido em três seções: a primeira lista as localizações dos centros dos vórtices principais gerados pelo escoamento na aresta superior das cavidades; a segunda plota os perfis das componentes das velocidades centrais das cavidades; e a terceira: lista os desvios absolutos dos perfis das velocidades centrais do presente trabalho, comparados com dados de outros estudos. Constata-se que o método *SPH* apresentou boa acurácia nas simulações realizadas, obtendo boa concordância entre os resultados das simulações dinâmicas com os dados de referências, validando-se o modelo numérico proposto, tendo melhores resultados para baixos números de *Reynolds*.

Palavras-chave: *SPH*, Cavidade quadrada, Método de partículas, Fluidodinâmica computacional, Funções de Lagrange.

ABSTRACT

In this study, it was applied the numerical method, grid-free, based on particles named *SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics)*. Also, a numerical code in the computer language *FORTRAN* was used to solve the *Navier-Stokes Equations*. This classic problem of the literature related to Computational Fluid Dynamics indicated as *Shear-Driven Cavity Flow* was studied to check the behavior of the numerical code regarding specific existing results. Such problem is highly used as Benchmark, aiming the validation of the numerical method used to develop the research. The analysis and validation of the numerical code was divided into three sections: the first one lists the location of the centre of the main vortex generated by the flow of the upper edge of the cavities; the second one plots the profiles of the components of the central speed of the cavities; the third one lists the absolute deviation of the profiles of the central speed of this study compared with other cases data. It is established that the *SPH* Method presented accuracy in the performed simulations, in a consonance between the results of the dynamic simulations and the reference data, thus the proposed numerical model was validated with better results for low *Reynolds* numbers.

Key words: *Fluid flow simulation. Shear-Driven Cavity Flow. Lagrangian Methods. Particle Method. SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics).*

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ :	massa específica $[Kg / m^3]$
ρ_j :	massa específica da partícula j $[Kg / m^3]$
p :	pressão $[N / m^2]$
W :	função de suavização $[m^{-3}]$
m_j :	massa da partícula j $[Kg]$
N :	número de partículas
ΔE :	a taxa de variação de energia,
Q :	fluxo de calor
W :	trabalho
k :	condutividade térmica do material
$\dot{q}$:	energia gerada por unidade de volume
c :	calor específico do material
e :	energia interna
τ :	tensão de cisalhamento
$\frac{\partial u}{\partial y}$:	taxa de variação da deformação com o tempo
μ :	constante de viscosidade
σ :	tensor total das tensões viscosas
$\vec{v}_{ij}$:	vetor velocidade da partícula
B :	termo relacionado às flutuações das massas específicas
c :	velocidade do som no fluido
γ :	constante da equação de <i>Tait</i>
ρ_0 :	massa específica inicial da partícula
ρ_i :	massa específica da partícula de referência
h_0 :	tamanho do raio suporte inicial
α_{Π} :	constante da equação de viscosidade artificial
β_{Π} :	constante da equação de viscosidade artificial
Ω :	domínio do raio suporte da função de suavização (<i>kernel</i>)

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1** - Representação do Raio Suporte e as partículas delimitadas em um Domínio Ω . Fonte : Petroneto (2008).....23
- Figura 2**.- Domínio do raio de suporte da função de suavização w e domínio do problema. Fonte: Liu e Liu (2003).....29
- Figura 3** - Domínio do raio de suporte da função de suavização w e domínio do problema. O domínio do raio de suporte não está localizado dentro do domínio do problema. Fonte: Liu e Liu (2003).....29
- Figura 4** - *Aproximações por Partículas*, usando partículas dentro do raio suporte da função de suavização W para a partícula i . O domínio do suporte possui formato circular com raio kh . Fonte: Liu e Liu (2010).....30
- Figura 5** - Função de Suavização (*Kernel* de Lucy, 1977) e sua primeira derivada (gradiente). Fonte: Liu e Liu (2003).....38
- Figura 6** - Função de Suavização (*Kernel* Gaussiano) e sua primeira derivada (gradiente). Fonte: Liu e Liu (2003).....40
- Figura 7**- Função de Suavização (*Kernel Cubic* , Monaghan e Lattanzio , 1985) e sua primeira derivada (gradiente). Fonte: Liu e Liu (2003).....41
- Figura 8** - Função de Suavização (*Kernel Quartic Spline*, Morris, 1994) e sua primeira derivada (gradiente). Fonte: Liu e Liu (2003).....42
- Figura 9** - Função de Suavização (*Kernel Quintic Spline* , Morris , 1996) e sua primeira derivada (gradiente). Fonte: Liu e Liu (2003).....43
- Figura 10** - Funções de Suavização (*New Quartic* e a *Kernel Spline Cubic*, Liu, Liu e Lam, 2003) e suas primeiras (gradiente) e segundas (laplaciano) derivadas. Fonte: Liu, Liu e Lam (2003).....44
- Figura 11** - Aproximação do SPH em casos unidimensionais. (a) Aproximação de partícula quando o domínio é truncado no limite. (b) Aproximação da partícula em uma distribuição irregular em seu domínio – sob o do raio suporte. Fonte:(LIU e LIU, 2010).....50
- Figura 12** - Esquema de Integração *Leap-frog*. Fonte: Paiva Neto (2007).....69
- Figura 13** - Descrição geométrica do problema com as condições iniciais e de contorno no interior da cavidade.....73
- Figura 14** – Distribuição das partículas reais (40 x 40) e virtuais (nas paredes). As partículas reais são representadas por pontos escuros, fechados, e as virtuais por circunferências abertas colineares presentes nas paredes da cavidade. Fonte: Liu e Liu (2003).....74

Figura 15 – Linhas de corrente e campo de velocidade do fluido para o Problema das Cavidades Quadradas, Presente Trabalho.....75

Figura 16 - Faixa Δx em torno da linha central vertical, em $(x=0,5)$, simbolizando a região das capturas as velocidades centrais verticais, e faixa Δy em torno da linha central horizontal, em $(y=0,5)$, simbolizando a região das capturas as velocidades centrais horizontais.....87

Figura 17 – Plotagem das velocidades dos pontos em torno da linha central vertical, $(x=0,5)$, asteriscos em vermelho (*), antes de ser aplicada a aproximação pelos Métodos dos Mínimos Quadrados.....87

Figura 18 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para $Re \rightarrow 0,00$, Chantasiriwan (2006).....88

Figura 19 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para $Re = 0,01$, Cheng & Hung (2006).....89

Figura 20 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para $Re = 0.1$, por Marques e Doricio (2006).....40

Figura 21 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para $Re = 10,00$ por Marques e Doricio (2006).....91

Figura 22 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para $Re=50,00$ por Marques e Doricio (2006).....92

Figura 23 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para, $Re=100,00$ por Marques e Doricio (2006).....93

Figura 24 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para, $Re=100,00$ por Ghia *et al.* (1982).....94

Figura 25 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais $(x=0,5)$ e horizontais $(y=0,5)$, para, $Re=100,00$ Yildiz *et al.* (2008).....95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re \rightarrow 0,00$	80
Tabela 2 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 0,01$	80
Tabela 3 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos para $Re = 0,10$	81
Tabela 4 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 1,00$	81
Tabela 5 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 10,00$	82
Tabela 6 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 25,00$	83
Tabela 7 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 40,00$	83
Tabela 8 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 50,00$	84
Tabela 9 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, para $Re = 100,00$	85
Tabela 10 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, para $Re \rightarrow 0,00$, tendo Chantasiriwan (2006) como trabalho de referência.....	97
Tabela 11 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re \rightarrow 0,00$, em $x=0,5$, tendo Chantasiriwan (2006) como trabalho de referência.....	98
Tabela 12 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, para $Re = 0,01$, tendo Cheng & Hung (2006) como trabalho de referência.....	99
Tabela 13 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 0,01$, em $x=0,5$, tendo Cheng & Hung (2006) como trabalho de referência.....	99
Tabela 14 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, para $Re = 0,1$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....	100

Tabela 15 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 0,10$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.101

Tabela 16 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=,5$, para $Re =10,00$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....102

Tabela 17 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 10,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.103

Tabela 18 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, para $Re =50,00$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....104

Tabela 19 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 50,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....104

Tabela 20 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, para $Re = 100,00$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....105

Tabela 21 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 100,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.....106

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1. MOTIVAÇÃO	14
2. OBJETIVOS	18
2.1. OBJETIVO GERAL	18
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3.1. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	19
3.2. O MÉTODO SPH (<i>SMOOTHED PARTICLES HYDRODYNAMICS</i>)	23
3.2.1. Representação Integral da Função pelo Método Numérico SPH	24
3.2.2. Representação da Integral da derivada de uma função	27
3.2.3. Aproximação das Partículas	30
3.2.4. Propriedades das Funções de Suavização (<i>kernels</i>)	34
3.3. EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE SUAVIZAÇÃO (<i>KERNELS</i>)	38
3.4. CONSISTÊNCIA DO MÉTODO SPH	46
3.4.1. Consistência na aproximação do <i>kernel</i> (consistência da representação integral)	47
3.4.2. Consistência na aproximação por partículas	49
3.4.3. Restauração da consistência do SPH (CSPM)	52
4. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO SPH APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE BALANÇO	57
4.1. APROXIMAÇÃO DAS PARTÍCULAS NA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	58
4.2. APROXIMAÇÕES DE PARTÍCULAS PARA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO	
4.3. DO MOMENTUM	61
5. ASPECTOS NUMÉRICOS	65
5.1. COMPRIMENTO DO RAIO SUPORTE DA FUNÇÃO DE SUAVIZAÇÃO	61
5.2. INTEGRAÇÃO TEMPORAL E OS MÉTODOS DE EULER E LEAP-FROG	66
5.3. O PROBLEMA DAS CAVIDADES QUADRADAS ABERTAS BIDIMENSIONAIS (<i>SHEAR-DRIVEN CAVITY FLOW</i>)	72
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	76
6.1. TABELAS DE COMPARAÇÃO DAS LOCALIZAÇÕES DOS CENTROS DOS VÓRTICES COM DIFERENTES NÚMEROS DE <i>REYNOLDS</i>	79
6.2. PERFIS DAS COMPONENTES DAS VELOCIDADES CENTRAIS	86
6.3. TABELAS COM OS DESVIOS ABSOLUTOS DOS PERFIS DE VELOCIDADE PARA DIFERENTES NÚMEROS DE <i>REYNOLDS</i>	96
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	107
7.1. CONCLUSÕES	107
7.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	109
8. REFERÊNCIAS	110
9. ANEXOS	116

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Na busca de uma melhor qualidade de vida, no contexto ambiental, a utilização do conhecimento científico se caracterizou como uma das principais saídas de diversos problemas que nortearam determinadas tomadas de decisões. As simulações numéricas, alicerçada pela modelagem matemática, são umas das ações que foram desenvolvidas desse propósito. Movido pelo conhecimento de determinados processos físicos, possibilitando o monitoramento das atividades impactantes aos seres humanos e ao meio ambiente, sendo os princípios da mecânica dos fluidos uma das ferramentas adequadas a esses objetivos (MARQUES, 2004).

Após a segunda metade do século XX, ocorreu um notável avanço dos computadores e da sua disponibilidade nas universidades e em centros de pesquisas, o que estimulou o desenvolvimento e a implementação de códigos computacionais direcionados, por exemplo, às simulações numéricas de escoamentos (FRIGO, 2004).

A dinâmica computacional de fluidos é uma área de pesquisa com constante aprimoramento nos meios acadêmicos, e dentro dessa perspectiva, está incluído o cenário ambiental. Nesta mesma linha, a aplicação dessa metodologia nas pesquisas acadêmicas é decisiva, e podem aperfeiçoar o entendimento e auxiliar nas ações de controle dos fenômenos pesquisados.

Na dinâmica dos fluidos, o movimento e o transporte de energia e substância são governados por leis físicas, como a da conservação da massa, da quantidade de movimento (angular e linear), da energia e da substância, as quais podem ser escritas matematicamente por equações diferenciais. Essas equações são frutos dos trabalhos realizados pelo francês Claude Navier (1785-1836), descrita na obra *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, no ano de 1822; posteriormente retrabalhadas para a forma que é conhecida na literatura atual, pelo irlandês George Gabriel Stokes (1819-1903), em seu artigo “*On the Theories of the Internal Friction of*

Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solid”, datado de 1845. Essas equações são apresentadas na literatura especializada como as equações de Navier-Stokes.

As equações de Navier-Stokes possuem um alto grau de dificuldade para serem solucionadas analiticamente, sendo necessário o desenvolvimento de métodos numéricos, os quais auxiliaram na resolução de equações mais complexas. Neste contexto, se desenvolve o campo de estudos da Dinâmica dos Fluidos Computacional (esse do inglês *Computational Fluid Dynamics – CFD*), desenvolvendo uma nova forma de analisar o comportamento dos fluidos, sob o apoio da solução em computadores.

Na dinâmica dos fluidos computacional, existem dois tipos de abordagens, se diferenciando nas formas de resolução. Os eulerianos, fundamentado em malhas (*Grid-based Methods*). E os lagrangianos, sem malhas, (*Particle-based Methods*). Contudo, nem todos os métodos obtêm resultados precisos e satisfatórios, devido ao alto grau de complexidade das equações e dos métodos numéricos que são desenvolvidos na simulação, sejam eles eulerianos ou lagrangianos.

Os métodos numéricos de natureza euleriana necessitam de malhas, e os métodos mais clássicos são: os das diferenças finitas, dos elementos finitos e os dos volumes finitos. Entretanto, esses métodos possuem problemas com perfis específicos, que não são resolvidos eficientemente pelos métodos com malhas, tais como os que possuem: geometrias complexas, geometrias móveis ao longo do tempo, descontinuidades do domínio, grandes deformações, deformação localizada e com necessidade de refinamento, o que torna a solução mais dispendiosa, do ponto de vista computacional (GUEDES, 2006).

Entre os métodos numéricos lagrangianos, no contexto da dinâmica dos fluidos computacional, existem diversos métodos que não usam malhas, como: *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)*, *Diffuse Element Method (DEM)*, *Element Free Galerkin Method (EFGM)* e o *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)*. Neste trabalho o método desenvolvido é o *SPH*, pelo fato deste ser um dos métodos

lagrangiano que o LABESUL (Laboratório de Simulação de Escoamentos com Superfície Livre)/ CT UFES está devolvendo suas pesquisas.

O método lagrangiano sem malhas *SPH* (*Smoothed Particles Hydrodynamics*) foi proposto inicialmente em 1977, por Leon Lucy e por Gingold e Monaghan, e se tangenciou na solução de problemas astrofísicos, implementando o método para estudo de colisões entre as estrelas, formação de galáxias e supernovas, propondo uma formulação mais simples e baseada em partículas, tendo como característica, a substituição do fluido por um conjunto finito de partículas. No método numérico *SPH* não há necessidade de serem geradas malhas, a discretização é realizada sob uma quantidade finita de partículas e é desenvolvida sob uma teoria da interpolação de dados, sendo esse um dos fundamentos.

Para calcular os valores das grandezas físicas de interesse são utilizadas as “funções de suavização”, interpolando os valores existentes dentro de uma vizinhança fechada, que é determinada por um raio suporte compacto, a qual se localiza em torno de um ponto material de interesse. O estado de cada partícula dependerá do estado que se encontram as “partículas vizinhas” (LIU e LIU, 2003).

O Método *SPH* foi aplicado em variável gama de simulações, como em problemas envolvendo escoamento de fluidos compressíveis (MONAGHAN, 1988), quanto em modelagens de materiais deformáveis e materiais líquidos: lavas vulcânicas, lama e óleo (MILLER e PEARCE, 1989).

Também foi aplicado em simulações de substâncias altamente deformáveis (DESBRUN e GASCUEL, 1996). Como na resolução das equações de *Navier-Stokes*, na simulação e visualização de fluidos em tempos interativos, incluiu a tensão superficial desses fluidos (MULLER *et al.*, 2003). E a partir desses feitos, diversos trabalhos contribuíram para o avanço dessa técnica, sendo aplicada em diversos campos das engenharias, destacando-se a simulação de escoamentos de fluidos compressíveis e incompressíveis.

No Brasil se desenvolveram trabalhos que propuseram a aplicação do *SPH* em técnicas de animação no derretimento de objetos por meio da simulação de fluidos não newtonianos (PAIVA NETO, *et al.* 2006), assim como em simulações de

fenômenos como o *Dam Collapse* (quebra de barragem) e o *Water Discharge* (descarga de água), os quais obtiveram resultados significativos (NAKAMURA, 2007).

O método lagrangiano *SPH* também foi aplicado na resolução da equação de Poisson, por operadores diferenciais discretos definidos, na decomposição de campos vetoriais e na simulação numérica de escoamentos de fluidos monofásicos e bifásicos (PETRONETTO, 2008).

Este estudo propõe a apresentação do método numérico *SPH*, demonstrando as suas representações numéricas e o seu desenvolvimento conceitual, tratando de pontos como: as aproximações através de partículas, os *kernels* de suavização e suas propriedades, e a modelagem matemática presente no processo de discretização. Além da apresentação de resultados do desenvolvimento de um código numérico baseado no conceito proposto pelo *SPH*, aplicando-lhe às soluções das equações de Navier-Stokes em um domínio regular, e a sua aplicação na simulação dos problemas das cavidades (*Shear-Driven Cavity Flow*).

Apesar dos problemas das cavidades quadradas bidimensionais possuírem uma geometria simples, o escoamento que se desenvolve no seu interior possui características tidas como complexas. Tornando-o um amplo alvo de pesquisa na modelagem numérica, mesmo sendo um trabalho iniciado a partir da década de 60 do século passado. Serão também apresentadas as análises dos resultados do presente estudo, comparando-os com outros trabalhos acadêmicos.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Estudar a hidrodinâmica induzida pelo movimento de uma placa em uma cavidade quadrada (*Shear-Driven Cavity Flow*), usando o método lagrangiano *SPH*.

2.2 Objetivos Específicos

- Modelar matematicamente o problema da cavidade aberta com tampa deslizante;
- Empregar o método de interpolação sem malhas *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* para obtenção da solução numérica para o problema da cavidade aberta com tampa deslizante ;
- Validar um código computacional, escrito na linguagem FORTRAN, utilizando o método *SPH*, para a solução do problema das cavidades abertas com tampas deslizantes (*Shear-Driven Cavity Flow*), a partir comparação com resultados presentes na literatura.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para a obtenção de uma simulação numérica é necessário seguir determinados passos, como um fluxograma, os quais tangenciarão a pesquisa à obtenção de resultados aceitáveis, e que poderão ser utilizados como ponte entre a teoria e o experimento. As simulações numéricas são responsáveis por transformar um fenômeno contínuo em discreto, através de formas matemáticas, recriando uma situação real em um ambiente virtual. A simulação é um processo de projetar um modelo computacional de um sistema real e conduzir experimentos com este modelo com o propósito de entender seu comportamento e/ou avaliar estratégias para sua operação (PEGDEN, 1990).

3.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Inicialmente o problema a ser simulado é representado por um fenômeno físico, o qual é observado e posteriormente, simplificado. da física desse fenômeno é extraído um modelo matemático que o descreve , sendo-o representado por equação governante. Essas equações são descritas por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDO) ou equações diferenciais parciais (EDP). Posteriormente é realizada a discretização do domínio ou discretização espacial, sendo esse domínio dividido em partes discretas, que substitui o formato contínuo dessas equações.

A discretização normalmente é feita usando instrumentos como grades ou malhas de pontos, sendo-as responsáveis pelos cálculos das variáveis físicas do problema, como: velocidade, pressão e força. E com a discretização das equações governantes (EDO ou EDP), é possível realizar a modelagem do problema por uma gama de algoritmos numéricos presente nas literaturas específica (BURDEN e FAIRES, 2003).

O próximo passo é o responsável pela construção dos algoritmos, e é definido como algoritmos numéricos. Neste mesmo passo também é definido as condições iniciais e

as condições de contorno do problema. já na implementação, ocorrem as codificações dos algoritmos numéricos, aqui é observado pontos como a precisão computacional, velocidade de processamento e a capacidade de armazenamento. Ao fim dessas etapas, se desenvolve a simulação numérica do fenômeno natural pesquisado, podendo ocorrer estudos profundos, realizando observações de vários cenários e seus resultados, todos criados pelas simulações (QUEIROZ, 2008).

Os métodos numéricos buscam a resolução das equações governantes de fenômenos físicos, as quais são equações diferenciais. Inicialmente, essas soluções numéricas se desenvolveram através de métodos numéricos com malhas, desses, os mais clássicos são: métodos das diferenças finitas, métodos dos volumes finitos e métodos dos elementos finitos.

Os métodos das diferenças finitas (MDF) se baseiam em aproximações das derivadas parciais, essas usando a formulação matemática das séries de Taylor. As derivadas parciais são aproximadas por elementos de diferenças finitas, substituindo uma derivada de primeira ou de segunda por equações matemáticas discretas. Esse método é conceitualmente mais simples de compreensão e com menor complexidade de programação, quando usados em sistemas que possam ser aproximados por malhas uniformes. Entretanto, se tornam mais complexos de serem aplicados em geometrias mais elaboradas (CHAPRA e CANALE, 2008).

Nos métodos dos volumes finitos (MVF), as resoluções das equações das derivadas parciais são obtidas por técnicas de balanço entre a massa, a energia e a quantidade de movimento, esses determinados por um volume de um meio contínuo, volumes de controle, os quais são substituídos por pontos discretos rodeados por micro volumes. O MVF pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, por isso se adaptam às geometrias complexas. As malhas definem apenas as fronteiras do volume de controle e não necessitam estarem relacionadas com um sistema de coordenadas. A desvantagem do MVF, em relação ao MDF, é o fato de que os métodos de ordem superior à segunda, serem mais difíceis de desenvolver em 3D, com malhas não estruturadas. Isso ocorre pelo fato da aproximação por VF requerer três níveis de aproximação: interpolação, diferenciabilidade e integração (GONÇALVES, 2007).

O método dos elementos finitos (MEF ou *FEM*, em inglês), também é uma forma de resolução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais (EDP). E desde o seu advento na década de 50, ele se tornou o método mais popular dentre os existentes, sendo amplamente utilizado nos cálculos de Engenharia. Uma das características mais saliente dos elementos finitos, é que ele divide o “*continuum*” em elementos discretos, e essa subdivisão é chamada de diferenciação. Nesse método, os elementos individuais são ligados entre si por um mapa topológico, as malhas. E as funções de interpolação dos elementos finitos são desenvolvidas sobre essa plataforma, sobre essa malha, a qual assegura, em princípio, uma maior compatibilidade da interpolação (LI e LIU, 2002). Assim como no MVF, para a resolução de problemas bi e tridimensionais, a programação não é um exercício trivial. E computacionalmente, é caro para problemas de maior grandeza. Todavia seus resultados são amplamente superiores ao encontrados, por exemplo, pelos MDF, para sistemas envolvendo formas complicadas. Como consequência, seu custo e complicação conceituais adicionais são, em geral, justificados pelos detalhes das soluções finais (CHAPRA e CANALE, 2008).

No entanto, esses métodos *Eulerianos* nem sempre são vantajoso, porque as condições de compatibilidade numérica não são as mesmas que as condições da compatibilidade física de um *continuum*. Pois muitas vezes se requer uma malha muito fina, como as usadas em problemas com altos gradientes ou com características locais distintas, se tornando “computacionalmente caros”(demandando muita memória e/ou processamento), podendo ocorrendo distorções das malhas e deterioração drástica de sua precisão. Por razões como essa, houve a necessidade do desenvolvimento de métodos numéricos mais “adaptáveis”, para serem aplicados a determinados problemas, desde fenômenos físicos mais complexos às geometrias mais elaboradas (LI e LIU, 2002).

Na década de 70, na busca de métodos que possuísem maiores precisões e melhores adaptações a determinadas geometrias, ocorreu o desenvolvimento de métodos numéricos sem malhas, uma discretização lagrangiana, que buscaram maior eficiência e generalidade para a mecânica dos sólidos e fluidos. Os Métodos sem malhas, assim como os com malhas, como o clássico MEF, são métodos que

realizam a aproximação numérica para a resolução numérica de equações diferenciais. Com novas metodologias de aproximação, os métodos sem malhas pressupõem a discretização do domínio por nós colocados arbitrariamente, sem que existam interligações topológicas entre eles. Os métodos sem malhas têm sido apontados como uma alternativa de resolução de determinados problemas da mecânica computacional, problemas que os métodos mais tradicionais eulerianos não os resolvem adequadamente (GUEDES *apud* BATHE, 2006).

Esses métodos baseados em partículas, ou pontos, também são conhecidos como *Meshfree Methods* (MM), e a eles são atribuídas umas das alternativas para discretização das equações governantes em simulações mais complexas, tentando superar os problemas oriundos do uso de formulações baseadas em malhas (QUEIROZ, 2008).

Os métodos lagrangianos têm o seu domínio em questão, se movendo inteiramente com o material onde ocorre a simulação (QUEIROZ, 2008). E apresenta determinadas vantagens sobre o método *Euleriano*, como: as malhas se movem com o domínio; a configurações das malha se adaptam ao escoamento; as malhas de ponto são necessárias apenas no material onde ocorre a simulação, não sendo necessárias informações além do domínio do problema, além de facilitar o tratamento de simulações com grandes deformações; e tendem a ter maior facilidade nas representações de geometrias mais complexas (LIU e LIU, 2003).

Existem diversos métodos lagrangianos, tais como *Molecular Dynamics*, Monte Carlo, *Particle-in-Cell*, MPS, DEM (*Diffuse Element Method*), *Finite Point Method* e o *SPH* (*Smoothed Particles Hydrodynamics*) (LIU e LIU, 2003; QUEIROZ, 2008). Desses, o *SPH* foi um dos pioneiros, sendo aplicado em estudos astronômicos no final da década de 70, com os trabalhos de Lucy e Gingold & Monaghan, ambos em 1977.

3.2 O MÉTODO SPH (SMOOTHED PARTICLES HYDRODYNAMICS)

O SPH (*Smoothed Particles Hydrodynamics*) é um método lagrangiano que foi desenvolvido na década de 70, mais precisamente em 1977, em estudos distintos realizados por Leon Lucy e por Gingold & Monaghan. E tiveram como objetivos iniciais a resolução de problemas astrofísicos em um espaço tridimensional, sendo a interpolação dos dados. O método SPH utiliza os valores das amostras que estão presentes dentro da vizinhança do ponto da amostra de interpolação é realizada por funções de suavização, também denominadas como *kernels* de suavização.

Nesse método, a amostra é representada por um conjunto finito de partículas que possuem propriedades próprias, individuais, que se movem de acordo com as equações que as governam, neste caso, as equações de *Navier-Stokes*. As partículas se encontram dentro de um volume determinado por um raio suporte, que contribuem para o comportamento da partícula pontuada naquele instante, a partícula i , também presente no fluido, ver figura 1.

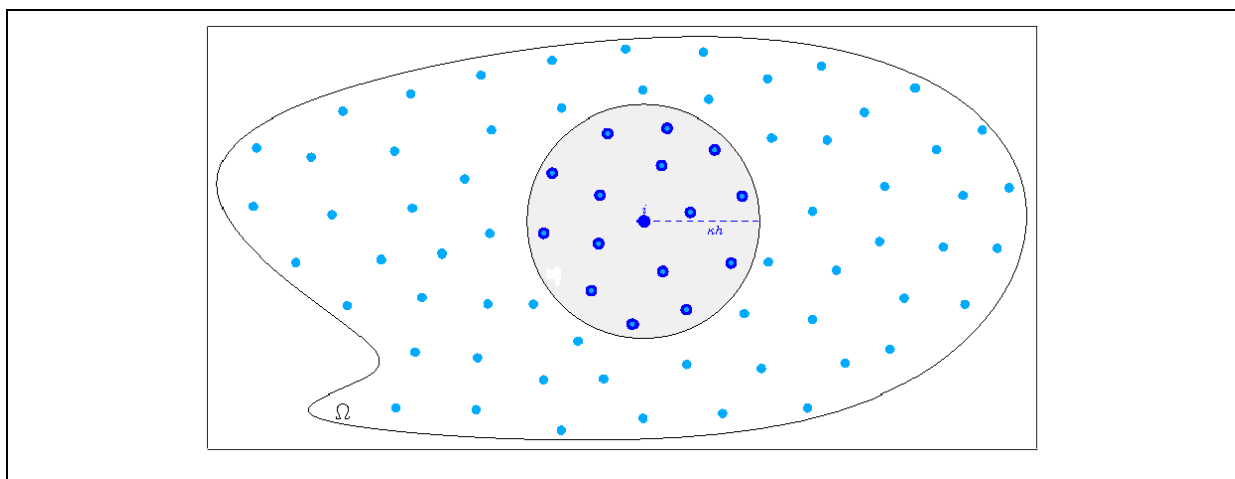


Figura 1- Representação do Raio Suporte e as partículas delimitadas em um Domínio Ω
 Fonte: (PETRONETO, 2008)

3.2.1 Representação integral da função pelo método numérico *SPH*

A formulação matemática do método *SPH* pode ser dividida em duas etapas: a primeira trata da representação da integral, que também é versada como *kernel* de aproximação das funções de campo. E uma segunda, que consiste na etapa definida como aproximação por partículas (LIU e LIU, 2003).

Na primeira etapa, o objetivo está em calcular uma função em um ponto fixo usando a integração da mesma função multiplicada por uma função arbitrária, porém contínua e com derivadas definidas para todo o Domínio, uma função *kernel* de suavização, em um domínio suporte compacto. A representação integral da função é uma aproximação por soma dos valores de partículas vizinhas, sendo-as, as mais próximas da partícula referência.

O conceito para calcular o valor da função usando a integral da função $f(x)$ utilizada no método *SPH* (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) começa a partir da identidade abaixo:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (3.1)$$

Onde x é um vetor posição tridimensional e $\delta(x - x')$ é a função *Delta de Dirac*, que por definição, deve satisfazer:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1, & \text{para } x = x' \\ 0, & \text{para } x \neq x' \end{cases} \quad (3.2)$$

Pelo fato da existência da função *Delta de Dirac*, $\delta(x - x')$, essa representação integral dada pela equação (3.1) será exata, isso desde que a função $f(x)$ seja definida, e contínua no domínio Ω . A função $f(x)$, neste trabalho, será aproximada a através de uma representação integral, sendo obtida pela substituição da função Delta de Dirac, por uma função e suavização, sendo então a equação (3.1), reescrita da seguinte forma:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x')W(x-x',h)dx' \quad (3.3)$$

Onde W é chamado de função *kernel* de suavização, função de suavização, função *kernel*, ou simplesmente *kernel* (LIU e LIU, 2003).

Na função de suavização $W(x-x',h)$, a variável h é conhecida como o *comprimento do raio de suavização*, que define o setor de influência, definido para atuar a uma distância h , a partir do ponto x . Deve ser observado que função de suavização W não é a função de Delta de *Dirac*, e sim e apenas uma função de ponderação que permite interpolar os valores de $f(x)$, segundo a equação integral dada pela Equação (3.3). Sendo essa a origem do termo de *kernel*. O valor interpolado ou aproximado da função $f(x)$ será marcado pelo sinal $\langle \rangle$ (FULK,1994). Então a equação (3.3) será reescrita da seguinte forma (LIU e LIU, 2003):

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x')W(x-x',h)dx' \quad (3.4)$$

A função de suavização W é escolhida por satisfazer determinadas propriedades, as quais são apresentadas na seção (3.1.3), neste mesmo capítulo.

Dentre essas propriedades, a primeira condição para existência da função de suavização é que esse *kernel* deve possuir a condição de **normalização**, então:

$$\int_{\Omega} f(x')\delta(x-x')dx' = 1 \quad (3.5)$$

essa condição também pode ser denominada de condição de unidade, visto que a integração da função de suavização produz a unidade.

A segunda condição é a propriedade relacionada à função Delta de *Dirac*, que é observada quando o comprimento raio suporte da função de suavização se aproxima de zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x') \quad (3.6)$$

A terceira condição propõe a condição ser compacta, que possua um suporte compacto, isto é, deve possuir um raio de suporte compacto:

$$W(x - x', h) = 0, \text{ quando: } |x - x'| > kh \quad (3.7)$$

Onde: k é uma constante relacionada com a função de suavização no ponto em x , e define a efetiva (não-zero) área de ação da função de suavização. Essa área efetiva é chamada de domínio de suporte para a função de suavização no ponto x (ou o domínio apoio desse ponto). Por meio dessa condição compacta, o problema do domínio de integração é resolvido, pois a integração estará localizada sob esse raio suporte. Portanto, o domínio de integração Ω pode ser, e geralmente é, o mesmo que o domínio de apoio.

Ao observar a equação (3.07), verifica-se o domínio de apoio da função de suavização é: $|x - x'| \leq kh$. Neste raio suporte, os erros na representação integral podem ser rudemente estimados utilizando a expansão da série de Taylor da função $f(x')$ em torno de x , onde $f(x)$ é contínua e diferenciável. A partir da equação (3.4), ter-se-á:

$$\begin{aligned} \langle f(x) \rangle &= \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' = \\ &= \int_{\Omega} [f(x) + f'(x)(x' - x) + r((x' - x)^2)] W(x - x', h) dx' = \\ &= f(x) \int_{\Omega} W(x - x', h) dx' \\ &+ f'(x) \int_{\Omega} (x' - x) W(x' - x, h) dx' + r(h^2) \end{aligned} \quad (3.08)$$

Onde: r representa a parte “residual”, local que haverá o truncamento.

A aproximação do *kernel* é frequentemente dita possuir uma exatidão h^2 ou precisão de segunda ordem (FULK, 1994).

Observa-se que W é uma função par, simétrica em relação ao eixo vertical, então $f(x) = f(-x)$. Todavia $(x'-x)W(x-x', h)$ será uma função ímpar, pois temos que $f(x) = -f(-x)$, para todo x do domínio de f , existindo simetria em relação à origem. Portanto, se $(x'-x)W(x-x', h)$ é antissimétrica, é então, uma função ímpar. E como $(x'-x)W(x-x', h)$ além de ímpar é contínua, pela propriedade da integral de função contínua e ímpar, sua integral será zero, assim:

$$\int_{\Omega} (x'-x)W(x-x', h)dx' = 0 \quad (3.9)$$

Usando as equações (3.5) e (3.9), a equação (3.8) torna-se

$$\langle f(x) \rangle = f(x) + r(h^2) \quad (3.10)$$

E a partir da ideia da equação acima, observa-se a representação da integral ou interpolação, a função *kernel* possui uma precisão de segunda ordem. Todavia, pelo fato da função de suavização não ser uma função par, não possuirá uma precisão necessariamente de segunda ordem, segundo (LIU e LIU, 2003).

3.2.2 Representação da integral da derivada de uma função

A representação da aproximação da integral para o divergente de uma função é obtida pela substituição de $f(x)$ por $\nabla \cdot f(x)$ na equação (3.04), conforme se vê:

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(x')]W(x-x', h)dx' \quad (3.11)$$

E aplicando a regra da derivada do produto de duas funções, pode-se obter o termo $\nabla \cdot f(x')W(x-x', h)$ da seguinte forma:

$$\nabla \cdot f(x')W(x-x',h) = \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)] - f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) \quad (3.12)$$

E da equação (3.11), é obtida a seguinte equação:

$$\begin{aligned} <\nabla \cdot f(x)>= \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)]dx' - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x',h)dx' \end{aligned} \quad (3.13)$$

A primeira integral do lado direito da equação poderá ser convertida, utilizando-se o teorema da divergência de Gauss, em uma integral de superfície S , que envolve o domínio da integração Ω . O teorema da divergência afirma que: seja uma região sólida E simples e uma superfície S a fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja $\vec{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região que contenha E (STEWART, 2006).

Então:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div} \vec{F} dV = \iiint_E \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (3.14)$$

Daí:

$$<\nabla \cdot f(x)>= \int_S f(x')W(x-x',h) \cdot \vec{n} dx' - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x',h)dx' \quad (3.15)$$

Onde $\vec{n}$ é um vetor unitário normal à superfície S , a qual delimita a integração sob o domínio delimitado pelo raio suporte, em Ω .

E visto que a função de suavização W possui um raio suporte compacto e, esse domínio de suporte está localizado dentro do domínio do problema, conforme pode ser observado na Figura 2, então essa integral de superfície, localizada ao lado direito da equação (3.15) será nula. Portanto, para esses pontos que estão dentro do raio de suporte e dentro do domínio do problema, a equação (3.15) pode ser resumida da seguinte forma:

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x - x', h) dx' \quad (3.16)$$

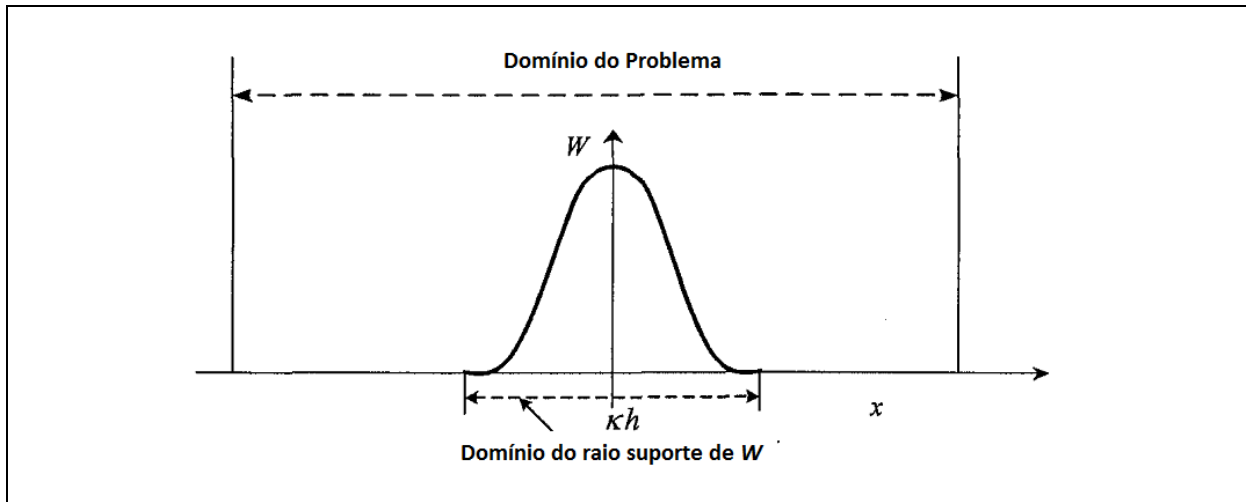


Figura 2. Domínio do raio de suporte da função de suavização W e domínio do problema. O domínio do raio de suporte está localizado dentro do domínio do problema. Portanto, a integral de superfície sobre o lado direito da equação (3.15) será zero.
Fonte: (LIU e LIU,2003).

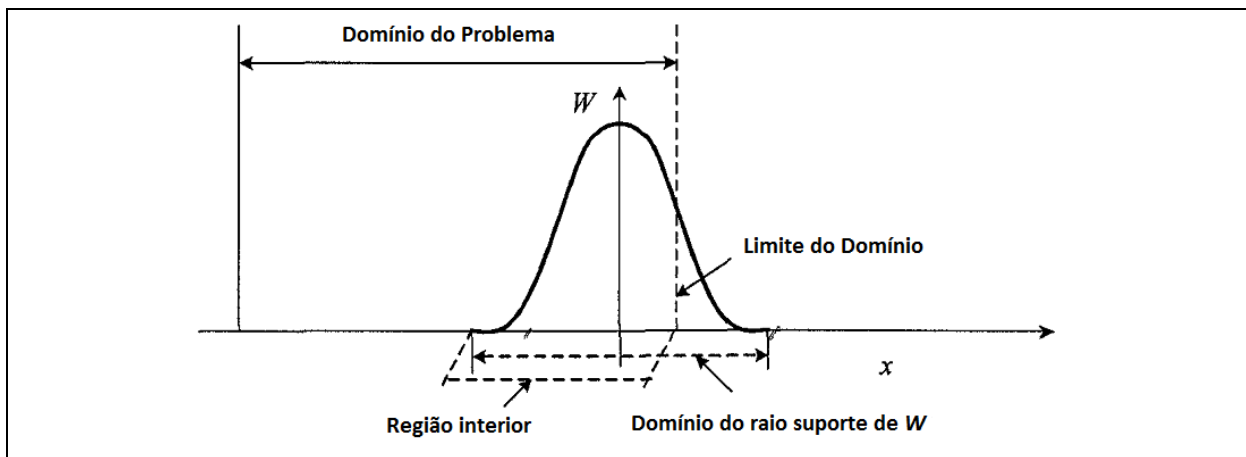


Figura 3. Domínio do raio de suporte da função de suavização W e domínio do problema. O domínio do raio de suporte não está localizado dentro do domínio do problema. Portanto, a integral de superfície sobre o lado direito da equação (3.15) não mais será zero.
Fonte: (LIU e LIU,2003).

Se existir sobreposições do domínio do raio suporte com o domínio do problema, conforme a Figura 3, sendo a função de suavização W truncada pelo contorno, pela fronteira do domínio, neste caso a integral de superfície já não será zero. Sob tais

circunstâncias, as modificações devem ser feitas para sanar os efeitos de truncamento, se a integração superfície for tratada como zero na equação (3.15).

3.2.3 Aproximação das partículas

No método *SPH*, todo o sistema é representado por um número finito de partículas que carregam consigo massas e a propriedades físicas individuais, além de ocuparem espaços distintos no domínio.

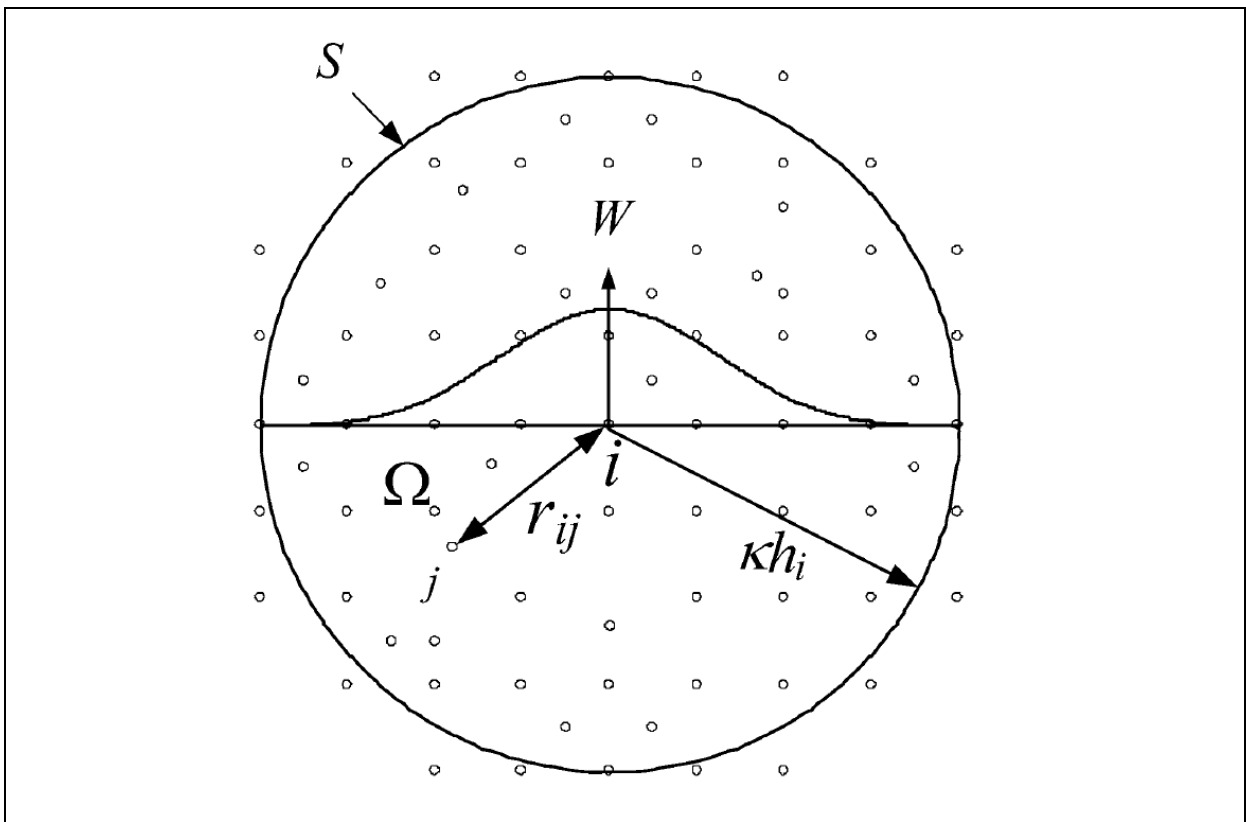


Figura 4. Aproximações por Partículas, usando partículas dentro do raio suporte da função de suavização W para a partícula i . O domínio do suporte possui formato circular com raio kh .
Fonte: (LIU e LIU, 2010).

As representações das integrais contínuas expressas nas equações (3.14) e (3.15) poderão ser convertidas nas formas discretizadas pela utilização de um número de partículas representativas do domínio local, conforme sugerido na Figura 4.

O processo de discretização do domínio contínuo do fluido consiste em substituir integral do domínio Ω pelo somatório realizado sobre as partículas localizadas na vizinhança, essa localizadas sob a influencia do raio suporte h da função de

suavização, sendo uma *aproximação por partículas materiais*. Neste processo o volume infinitesimal dx' , anteriormente descrito na integração da localização da partícula vizinha j , é substituído pelo volume finito de partículas ΔV_j que estão relacionadas com a massa das partículas m_j , é dado por:

$$\Delta V_j = \frac{\rho_j}{m_j} \quad (3.17)$$

Onde ρ_j é a massa específica das partículas $j(j=1,2,3,\dots,N)$ e que N é o número de partículas localizadas dentro domínio de suporte da partícula j .

A representação da integral contínua do método *SPH* para função $f(x)$, para a discretização por aproximação por partículas, é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Omega} f(x')W(x-x',h)dx' \\ &\cong \sum_{j=1}^N f(x_j)W(x-x_j,h)\Delta V_j \\ &= \sum_{j=1}^N f(x_j)W(x-x_j,h)\frac{1}{\rho_j}(\rho_j \nabla V_j) \\ &= \sum_{j=1}^N f(x_j)W(x-x_j,h)\frac{1}{\rho_j}(m_j) \\ &= \sum_{j=1}^N f(x_j)W(x-x_j,h)\frac{m_j}{\rho_j} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ou:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j)W(x-x_j,h) \quad (3.19)$$

E sendo reescrita como:

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j)W_{ij} \quad (3.20)$$

$$W_{ij} = W(x_i - x_j, h) \quad (3.21)$$

Equação (3.20) demonstra que o valor de uma função em partícula i é aproximado utilizando a média ponderada dos valores da função em todas as partículas no domínio de apoio da partícula i , essa realizada pela função de suavização W . Seguindo o mesmo argumento que foi utilizado para obtenção de equação (3.16), de forma análoga, a aproximação de partículas para a derivada espacial da função será:

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot \nabla W(x - x_j, h) \quad (3.22)$$

Onde o gradiente $\nabla_j W$ na equação anterior é tomado em relação às partículas j . E a aproximação de partículas para uma função de suavização, em partícula i , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.23)$$

Onde:

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (3.24)$$

Neste caso, o termo r_{ij} corresponde à distância entre as partículas i e j .

Ao ser observada a Equação (3.23), entende-se que o valor do gradiente de uma função da partícula i é aproximado utilizando a média dos valores da função em todas as partículas no domínio de suporte da partícula, do seu raio suporte da partícula i , que é ponderada pelo gradiente da sua função de suavização.

Pelas Equações (3.20) e (3.22), observa-se que a aproximação das partículas converte às representações da integral contínua de uma função e suas derivadas

pelos somatórios discretos, sob um conjunto de partículas distribuídas de forma arbitrária. O uso do somatório das partículas para aproximar a integral é, de fato, a chave da aproximação, o que torna o método *SPH* simples e sem o uso de uma malha de fundo para integração numérica.

Em síntese, para uma dada partícula i , de acordo com a discretização por partículas, os valores de uma função e suas derivadas são apresentados das seguintes formas:

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij} \quad (3.25)$$

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3.26)$$

Onde:

$$W_{ij} = W(x_i - x_j, h) = W(|x_i - x_j|) \quad (3.27)$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (3.28)$$

Onde r_{ij} é a distância entre as partículas i e j .

Observa-se que é tomado com relação à partícula, e desse modo, o sinal negativo existente na equação (3.22) será removido na equação (3.26), pois aqui é invertido o sentido do “cálculo” do raio suporte. Utilizando-se também o fato de que W é uma função par simétrica (NAKAMURA, 2007), isto é: $W = W_{ij} = W(x_i - x_j, h) = W(x_j - x_i, h) = W(|x_i - x_j|)$ (PAIVA NETO, 2007), pois as partículas afastadas nas mesmas distâncias, de i , contribuem da mesma forma, mesmo que em diferentes posições, sob o raio suporte (NAKAMURA, 2007).

Nota-se que se substituindo a função $f(x)$ por uma função da massa específica de ρ , na equação (3.25), a aproximação *SPH* para a massa específica é obtida:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é uma das mais comuns formas de obtenção da massa específica pelo método *SPH*, e é geralmente referida como sendo a **aproximação pelos somatórios das massas específicas**. A função de suavização W_{ij} possui unidade igual ao inverso do volume. E por essa equação, observa-se que a massa específica de uma partícula é uma média ponderada de todas as “massas específicas” no domínio do raio suporte.

3.2.4 Propriedades das funções de suavização (*kernels*)

No desenvolvimento do Método *SPH*, as funções de suavização, os *Kernels*, possuem um papel muito importante no desempenho da discretização. Eles são os responsáveis pelo incremento da aproximação, e influenciam diretamente na precisão do método. E para que se obtenham melhores resultados, essas funções de suavização devem satisfazer determinadas propriedades, as quais se seguem:

1. O *kernel* deve ser **suficientemente suave**:

$$W \in C^k, k > 1 \quad (3.30)$$

2. O *kernel* deve ser **normalizado**:

$$\int_{R^n} W(x_i - x_j, h) d^n x = 1 \quad (3.31)$$

3. O *kernel* deve ter **suporte compacto**:

$$W(x_i - x_j, h) = 0, \text{ quando } : \left| x_i - x_j \right| = \vec{x}_{ij} > kh \quad (3.32)$$

4. O *kernel* deve ser **positivo**:

$$W(x_i - x_j, h) \geq 0 \quad (3.33)$$

5. O *kernel* deve ser **decrecente**:

$$W(x_i - x_j, h) < W(x_i - x_k, h), \text{ se } |x_i - x_j| > |x_i - x_k| \quad (3.34)$$

6. O *kernel* deve ser **simétrico**:

$$W(x_i - x_j, h) = W(x_j - x_i, h) = W\left(\frac{\vec{x}}{x}\right) \quad (3.35)$$

7. O *kernel* deve satisfazer a **função delta de Dirac**:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x_i - x_j, h) = \delta(x_i - x_j) \quad (3.36)$$

A primeira propriedade informa que o *kernel* deve ser **suficientemente suave**. Para que essa função *kernel* seja classificada como suave, deve satisfazer a seguinte condição: “*para que uma função pertença à classe das funções ditas suaves, deve possuir derivadas de todas as ordens.*”

Então, se uma função $f : D \rightarrow R$ é uma função com o domínio $D \subseteq R$ (isto é, estando D contido em R , sendo cada elemento de D também elemento de R , e D é um subconjunto de R , podendo D ser igual a R).

Tem-se que:

- f é dita de classe C^0 , se for uma função contínua, isto é, “sem interrupções no tempo e no espaço”;
- f é dita de classe C^k , se sua k -enésima derivada for uma função contínua;
- f é dita suave ou de classe de C^∞ , se for de classe C^k , para todo k .

Essa propriedade tem como objetivo a busca de uma melhor aproximação da função *kernel* e de suas derivadas, pois essas necessitam ser suficientemente contínuas para serem obtidos bons resultados (LIU e LIU, 2003).

A segunda propriedade informa que, se um *kernel* deve ser **normalizado**, condição da unicidade, ação que garante que a integral da função de suavização, que estará sob o raio suporte, será unitária, garantindo que a interpolação seja correta (GINGOLD e MONAGHAN, 1977).

A terceira propriedade afirma que o *kernel* deve possuir **suporte compacto**. Essa propriedade tem a finalidade de transformar uma operação global da aproximação do método SPH, em uma operação local. Havendo, então, um limite ao módulo de $\left| \vec{x} \right| = \left| x_i - x_j \right| = \left| x_{ij} \right|$, que se estiver acima dessa sentença, a função sempre valerá zero.

Em uma analogia, em que o *kernel* de suavização pode ser representado por uma esfera, esse limite é o raio da mesma, valendo h . Esse valor de h é conhecido como *raio de suporte do kernel* (ou de função de suavização), e tem a função de limitar o número de partículas em sua vizinhança, que, para a ação computacional, é de suma importância. As propriedades físicas da partícula i não dependerão de todas as partículas presentes no sistema, e sim de um grupo delas, as quais são justamente limitadas pelo raio suporte. A escolha do valor para o raio suporte, h , é de vital importância para a simulação do escoamento do fluido. Esse raio suporte h também é chamado de *comprimento da suavização* e poderá possuir um valor associado a ele, sendo o k , sendo um fator escalar associado ao *kernel* de suavização. Se uma função é classificada como compacta, ela é zero fora daquele “conjunto compacto”. De forma que: $W(x_i - x_j, h) = 0$, para: $\left| x_i - x_j \right| > kh$ (KELAGER, 2006).

Se houver um h muito pequeno, pode não existir partículas suficientes naquele domínio para que a exerça forças sobre determinadas partículas, prejudicando a acurácia da solução. E se houver em demasia, portanto um h grande, podendo haver um maior esforço computacional e também uma perda de acurácia (ALVES, 2008). E pelo fato das partículas estarem espaçadas 1.2 vezes o valor do raio suporte, no preste trabalho, então se sugere um valor de $k = 2$ (LIU e LIU, 2003).

A quarta propriedade informa que o *kernel* deve ser **não-negativo** no suporte, todavia, sendo não necessária para a convergência. Entretanto, ela possui grande

importância para a interpolação, pois ela assegura que as aproximações sejam coerentes para as propriedades físicas envolvidas no problema e para a estabilidade. A estabilidade está relacionada à propagação de erros de arredondamento, nos passos intermediários, e pode ser grave nos casos de “métodos multipasso” (LIU e LIU, 2003; NAKAMURA, 2007; PAIVA NETO *et al.*, 2009).

O termo “estabilidade” também é utilizado para o próprio condicionamento, ou seja, no que diz respeito à influência face aos erros iniciais. Quando utilizados valores negativos para o núcleo, temos como consequência: resultados de valores negativos para a massa específica e para a energia, sendo um absurdo físico (LIU e LIU, 2003; PAIVA NETO *et al.* 2009). Entretanto, existem trabalhos que utilizam *kernels* com valores negativos em determinadas regiões, como é apresentado por Monghan e Latanzio, 1985.

A quinta e a sexta propriedades, **decrescente** e **simétrica (função par)**, são importantes para determinar a influência (em relação ao *kernel*) das interações entre as partículas, de acordo com as distâncias entre elas. Partículas mais próximas devem influenciar mais do que partículas mais distantes, e partículas nas mesmas distâncias, contudo em posições diferentes, devem influenciar da mesma forma. Essas são propriedades ditas não fundamentais, e são, algumas vezes, transgredidas (LIU e LIU, 2003).

A sétima propriedade informa que a função de suavização deve satisfazer determinadas condições da **função do Delta de Dirac**. A literatura afirma que as condições desenvolvidas para as propriedades (2), (3), (4) e (5) são suficientes para aceitar a sétima preposição, já que esse *kernel* se aproxima da função de Delta de Dirac (LIU e LIU, 2003).

3.3 Exemplos de funções de suavização (*kernels*).

O método de aproximação *SPH* é responsável pela simulação dos escoamentos, dentre eles, os de Meio Ambiente. E esse tem como técnica a representação do fluido através de partículas, na qual cada uma delas será, em algum instante, a partícula central “*i*” da interpolação *SPH*. E cada uma dessas partículas “transporta” consigo as características das quantidades físicas do fluido em escoamento, sendo-as: massa, velocidade, pressão, temperatura e viscosidade. Contudo para discorrer sobre as grandezas envolvidas no escoamento, é necessário, inicialmente, o entendimento das Funções de Suavização (*kernels*).

Pontos como a estabilidade e a precisão, para o método *SPH*, estão diretamente ligados às escolhas dos *kernels* mais apropriados e, ao mesmo tempo, que sejam “economicamente” viáveis em termos computacionais. Dentro dessa ótica, a literatura discute sobre os *kernels* indicados para o *SPH*, a estabilidade de seus domínios.

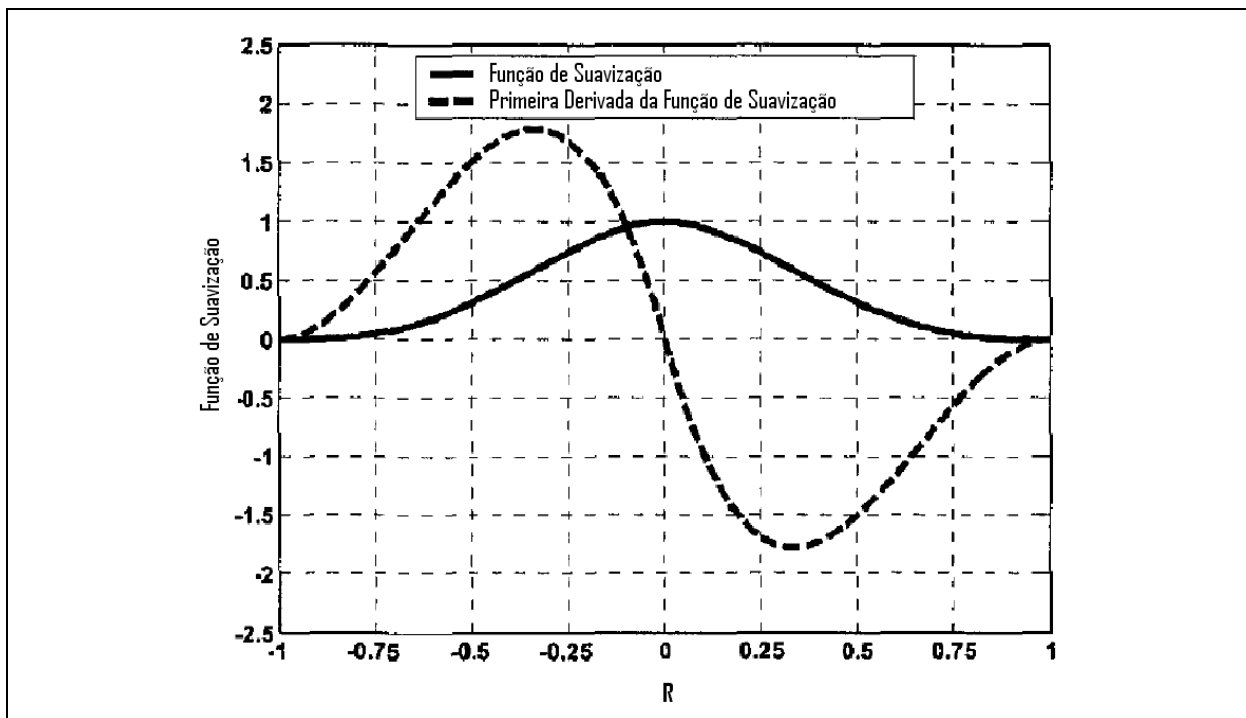


Figura 5 - Função de suavização (*kernel* de Lucy, 1977) e sua primeira derivada (gradiente).
Fonte: (LIU e LIU, 2003).

Em 1977, Leon Lucy, figura 5, pioneiro do *SPH* apresentou o seguinte *kernel* :

$$W(x - x') = W(R) = \alpha_d \begin{cases} (1 + 3R)(1 - R)^3 & 0 \leq R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

Tem-se:

α_d : é uma constante de normalização, obtida pela condição de normalização dada pela propriedade 2.

R : é a distância relativa entre duas partículas: $R = \frac{|x_i - x_j|}{h} = \frac{r}{h}$.

Por Lucy, 1977, as constantes de normalização do *kernel* de Lucy, nas suas respectivas dimensões, 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), são:

$$\alpha_{1-D} = \frac{5}{4h} \quad , \quad \alpha_{2-D} = \frac{5}{\pi h^2} \quad , \quad \alpha_{3-D} = \frac{105}{16\pi h^3} . \quad (3.38)$$

Em 1977, Monaghan e Gingold, apresentou a seguinte função como *kernel* de suavização:

$$W(x, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-(x^2/h^2)} \quad (3.39)$$

Para Monaghan (1992), figura 6, para se encontrar uma interpretação física mais coerente em uma aplicação do *SPH*, seria melhor que aplicasse uma função de suavização com características gaussianas. Então utilizou o *kernel* de seu artigo original, de Gingold e Monaghan (1977), o qual foi aplicado para a simulação de astrofísicas no ano de 1977, realizando algumas mudanças de simbologias e simplificações:

$$W(R) = \alpha_d e^{-R^2} \quad (3.40)$$

Trata-se de um exemplo usual de uma sequência que se assemelha a uma função delta qualquer que tende no seu limite a zero. E as constantes de normalização desse *kernel*, nas suas respectivas dimensões, 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), são:

$$\alpha_{1-D} = \frac{1}{\pi^{1/2}h}, \quad \alpha_{2-D} = \frac{1}{\pi h^2}, \quad \alpha_{3-D} = \frac{1}{16\pi^{3/2}h^3} \quad (3.41)$$

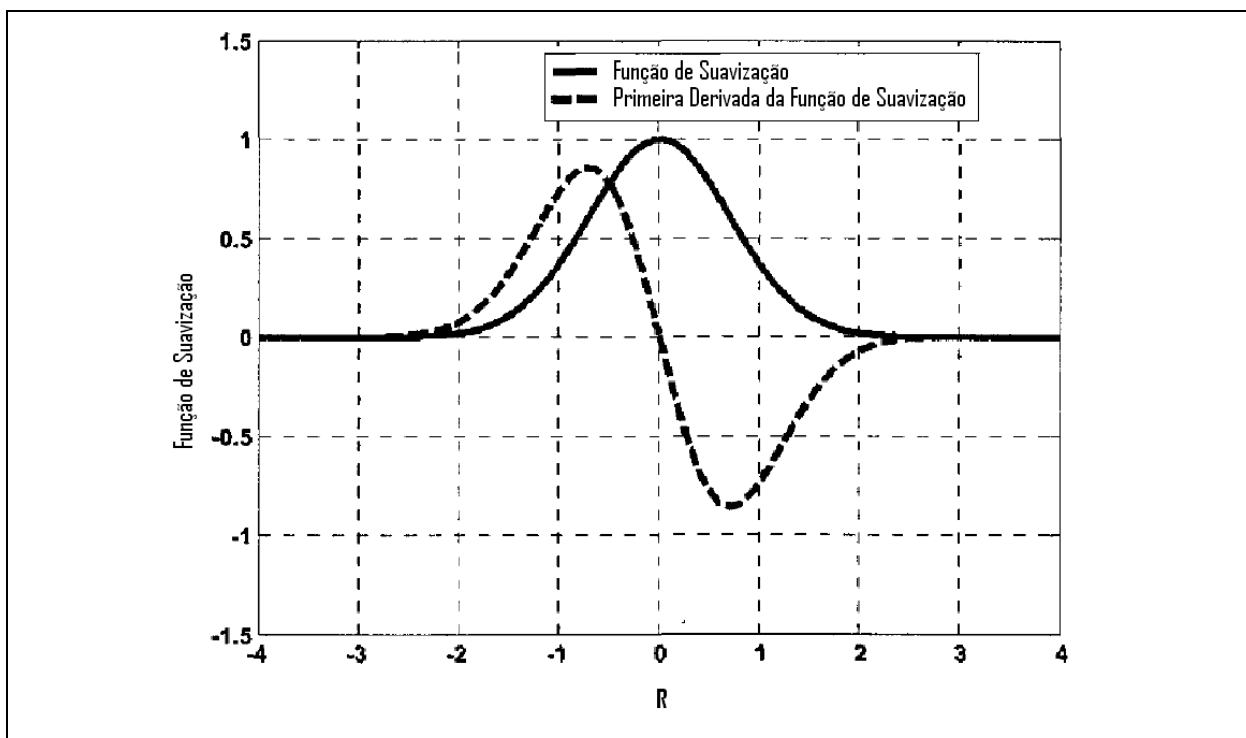


Figura 6 - Função de suavização (*kernel* Gaussiano) e sua primeira derivada (gradiente).
Fonte: (LIU e LIU, 2003).

Entretanto, houve um problema nessa escolha, pois essa função gaussiana apresentado por Monaghan, não possui um suporte compacto, que é a condição explicitada na propriedade 3, exigida para a definição do *kernel*, mesmo se aproximando de zero, quando é aumentada a distância entre as partículas. Segundo a literatura, mesmo tomando o suporte finito, esse será tão grande, que computacionalmente será inviável, devido à inclusão de muitas partículas no suporte de cada partícula estudada (PAIVA NETO *et al.*, 2009).

Além das citadas, existe outra classe de *kernels* muito importante, que é definida como *kernels* de funções “*splines*”. Uma função *spline* é uma “curva”, matematicamente definida por pontos, os quais são chamados de *pontos de controle*, localizados nos “nós” dessas “curvas”. Os demais pontos são responsáveis pela definição das tangentes à curva em seus respectivos nós. Esses *splines* podem ser classificados em “*splines* de interpolação” (que passam por todos os pontos de controle) e os “*splines* de aproximação” (que passam “perto” de todos os pontos de controle).

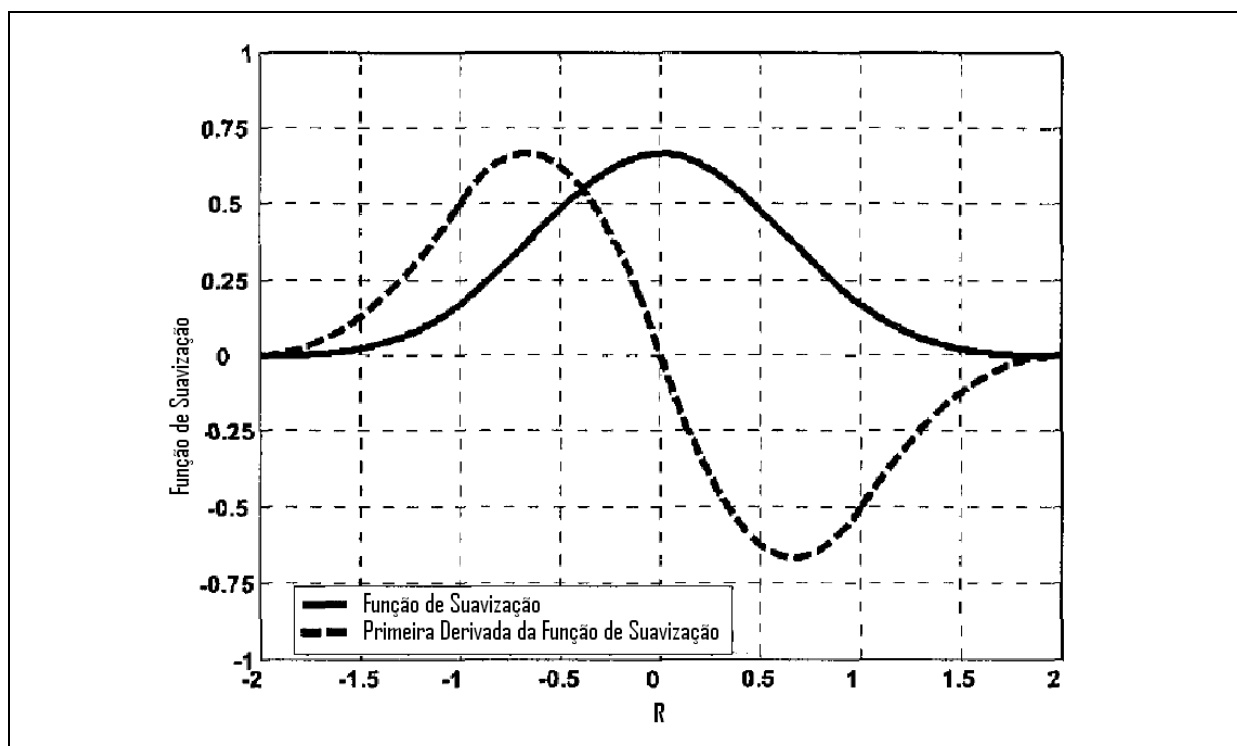


Figura 7-. Função de suavização (*kernel cubic* , Monaghan e Lattanzio , 1985) e sua primeira derivada (gradiente).
Fonte: (LIU e LIU, 2003).

Em 1985, Monaghan e Lattanzio, usaram um *Kernel Spline Cubic*, figura 7, (PAIVA NETO *et al.*, 2009), também chamado de *B-Spline* (HONGBIN e XIN, 2005):

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (3.42)$$

E as suas constantes de normalização foram determinadas nas dimensões 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), respectivamente:

$$\alpha_{1-D} = \frac{1}{h}, \quad \alpha_{2-D} = \frac{15}{7\pi h^2}, \quad \alpha_{3-D} = \frac{3}{2\pi h^3}. \quad (3.43)$$

Essa função de suavização do tipo funções *splines* são bastante utilizadas na literatura do Método Numérico *SPH* pelo fato de sua semelhança com a função gaussiana, com a vantagem de possuir um raio suporte mais compacto, (PAIVA NETO *et al.*, 2009). Entretanto, muitas de suas segundas derivadas são lineares e por partes. Consequentemente, as propriedades de estabilidade podem ser inferiores aos *kernels* mais suaves.

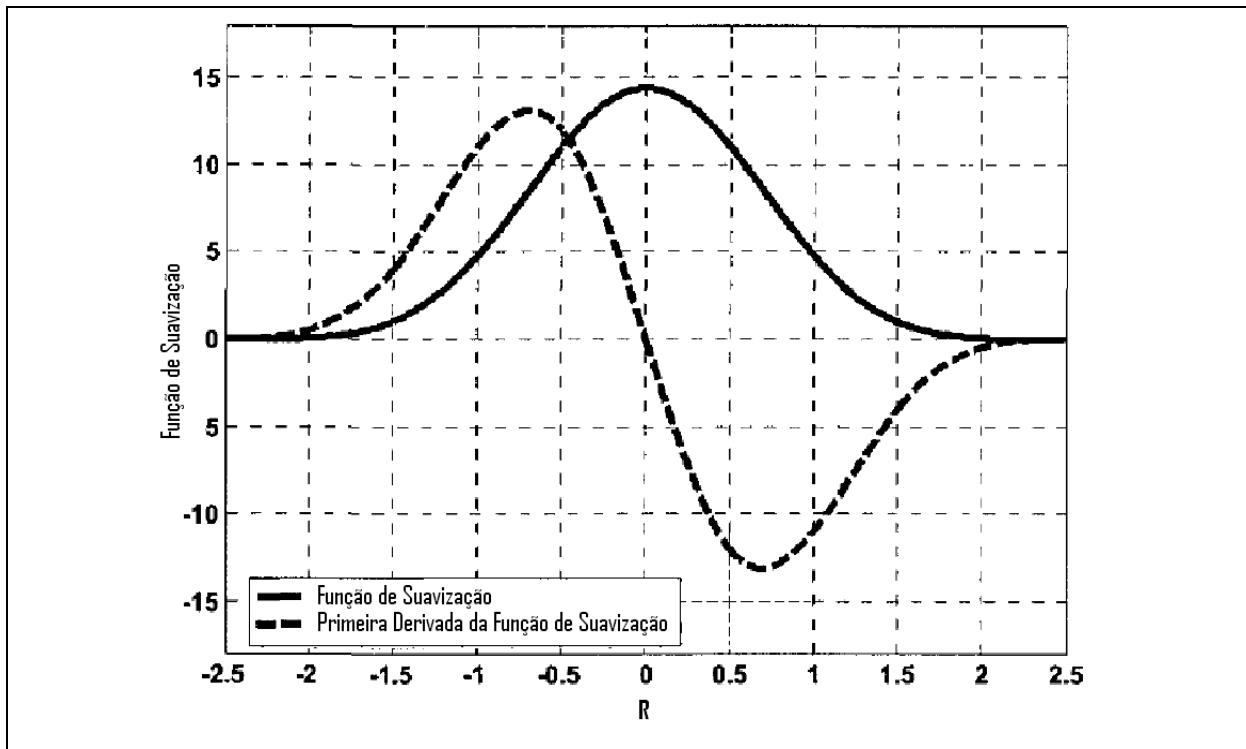


Figura 8 - Função de suavização (*kernel Quartic Spline*, Morris, 1994) e sua primeira derivada (gradiente).
Fonte: (LIU e LIU, 2003).

Posteriormente, em 1994 e 1996, Morris apresenta dois outros *kernels*, de maiores ordens, com 4 graus, figuras 8, se aproximando ainda mais à gaussiana, e com maior estabilidade (LIU e LIU, 2003). A essa função de suavização de ordem 4, denominada de “*Kernel Quartic Spline*”:

$$W(R,h) = \alpha_d \begin{cases} (2,5 - R)^4 - 5(1,5 - R)^4 + 10(0,5 - R)^4 & 0 \leq R < 0,5 \\ (2,5 - R)^4 - 5(1,5 - R)^4 & 0,5 \leq R < 1,5 \\ (2,5 - R)^4 & 1,5 \leq R < 2,5 \\ 0 & R \geq 2,5 \end{cases} \quad (3.44)$$

Que possui as seguintes constantes de normalização, nas dimensões 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), respectivamente:

$$\alpha_{1-D} = \frac{1}{24h}, \quad \alpha_{2-D} = \frac{96}{1199\pi h^2}, \quad \alpha_{3-D} = \frac{1}{20\pi h^3}. \quad (3.45)$$

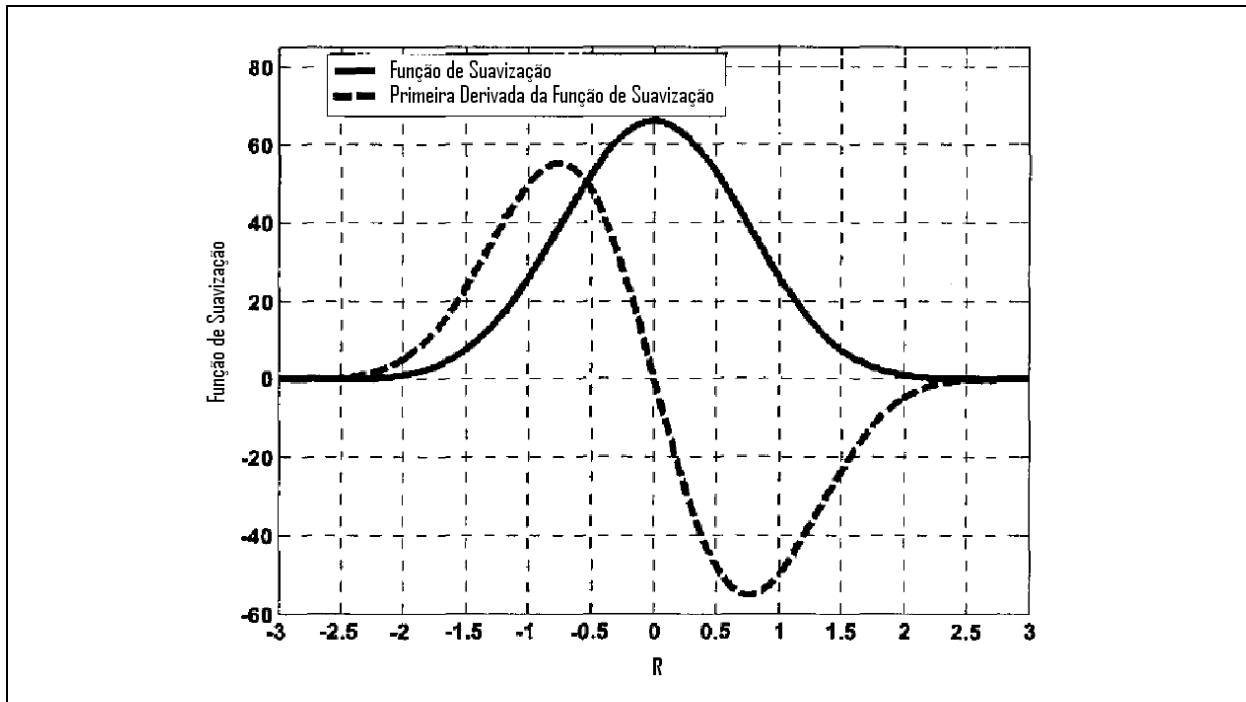


Figura 9 - Função de Suavização (*Kernel Quintic Spline*, Morris, 1996) e sua primeira derivada (gradiente).
Fonte: (LIU e LIU, 2003).

Em 1996, Morris, introduziu *kernels* de maiores graus e que melhor se aproximam da função gaussiana, figura 9, com maior estabilidade, sugere então o “*kernel quintic spline*”, (PAIVA NETO *et. al.*, 2009), também chamado de *Q-spline*, (HONGBIN e XIN, 2005):

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (3-R)^5 - 6(2-R)^5 + 15(1-R)^5 & 0 \leq R < 1 \\ (3-R)^5 - 6(2-R)^5 & 1 \leq R < 2 \\ (3-R)^5 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R \geq 3 \end{cases} \quad (3.46)$$

Que possui as seguintes constantes de normalização, nas dimensões 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), respectivamente:

$$\alpha_{1-D} = \frac{120}{h}, \quad \alpha_{2-D} = \frac{7}{478\pi h^2}, \quad \alpha_{3-D} = \frac{3}{359\pi h^3}. \quad (3.47)$$

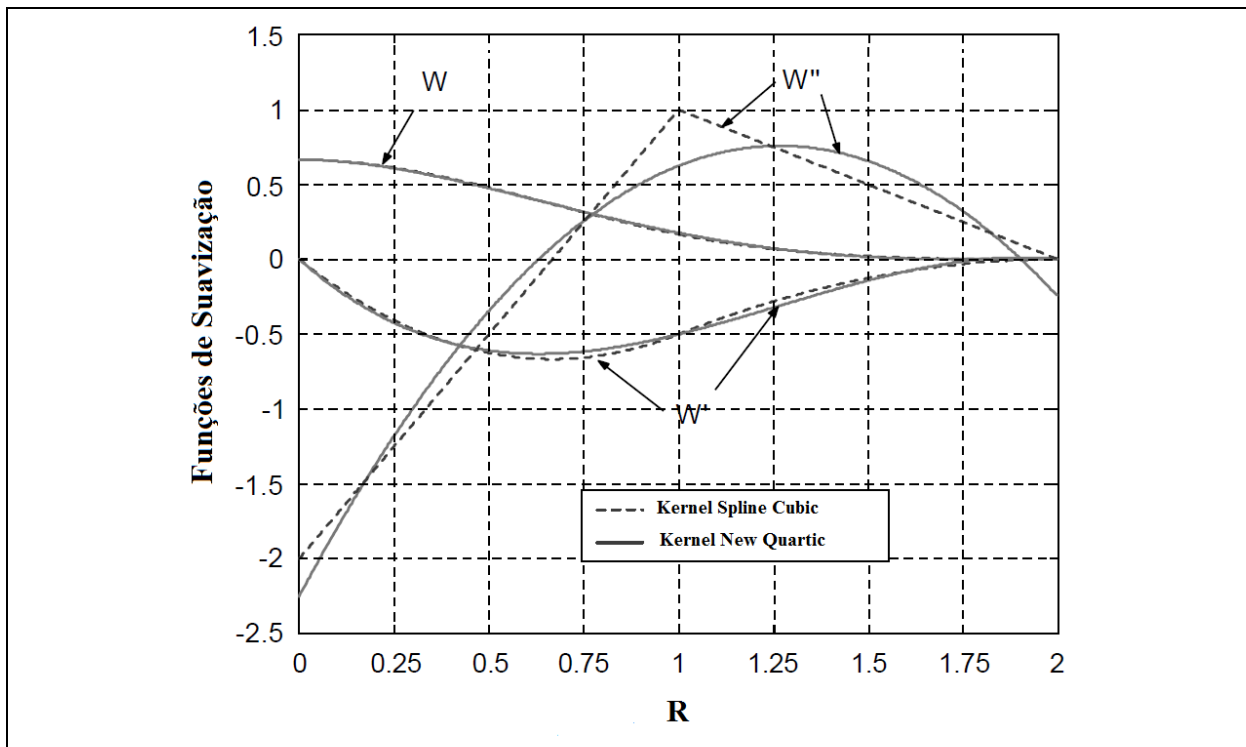


Figura 10 - Funções de suavização (*New Quartic* e a *Kernel Spline Cubic*) e suas primeiras (gradiente) e segundas (laplaciano) derivadas.
Fonte: (LIU, LIU e LAM, 2003).

Em 2003, Liu, Liu e Lam, propõem uma pequena alteração no núcleo proposto por Lucy, figura 10, assegurando resultados mais precisos e estáveis, sendo que o “novo *kernel*”, esse denominado “*New Quartic Smothing*”, possuindo ordem 4, e é assim apresentado:

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{8}R^2 + \frac{19}{24}R^3 - \frac{5}{32}R^4 & 0 \leq R \leq 2 \\ 0 & R > 2 \end{cases} \quad (3.48)$$

Que possui as seguintes constantes de normalização, nas dimensões 1-D, 2-D e 3-D (Dimensão Espacial), respectivamente:

$$\alpha_{1-D} = \frac{1}{h}, \quad \alpha_{2-D} = \frac{15}{7\pi h^2}, \quad \alpha_{3-D} = \frac{315}{208\pi h^3}. \quad (3.49)$$

Ao se observar essas funções *kernel*, plotadas na figura 10, verifica-se ambas primeiras derivadas são bem próximas, (W'), sendo um núcleo gaussiano. Já a função *New Quartic* apresentada uma segunda derivada (W'') mais suave do que a segunda derivada da função *Kernel Spline Cubic*, que possui uma seção linear, e, por conseguinte, as propriedades de estabilidade da função *New Quartic* se torna superior, (LIU, LIU e LAM, 2003).

Neste trabalho, no desenvolvimento do programa numérico, que serve de referência para a validação do método *SPH*, é possível serem usadas três funções de suavização, entre elas: *Kernel Spline Cubic*, *Kernel Gaussian* ou a *Kernel Quintic Spline*. Dessas, a função *Kernel Gaussian*, sugerido por Monaghan, 1992, foi a utilizada para o desenvolvimento dos resultados alcançados com o código computacional proposto nesta dissertação. Isso porque, em termos de precisão de cálculo, a função *Kernel Gaussian*, apresenta os melhores resultados com o método *SPH*, (HONGBIN e XIN, 2005).

3.4 Consistência do Método SPH

Uma importante medida que pode avaliar a qualidade do método de discretização é a ordem de consistência. Quando um método possui C^0 de consistência, isto significa que ele reproduz uma exatidão de uma função constante. Se for C^1 , então terá uma consistência de um polinômio de primeiro grau. Consequentemente, se C^2 , reproduz uma consistência de um polinômio de grau dois. E em tese, quanto maior esse grau, maior é a robustez dessa aproximação. Inicialmente destaca-se que o método SPH possui duas aproximações, a primeira, da função *kernel* à função de Delta de Dirac, e a segunda, na aproximação por partícula, momento da etapa da integração, (MENDES, 2010).

O método SPH é classificado como um método numérico de precisão de segunda ordem, sendo então um método com uma precisão considerável. Possuindo também a aproximação dos *kernel* de uma função campo com restos de segunda ordem. Contudo, a aproximação dos *kernel* e suas derivadas podem não apresentar essa mesma precisão. Assim como as funções de suavização podem não ser funções pares se não truçarem ao se aproximarem da região de contorno.

Baseando-se no Teorema de *Lax-Richtmyer* (Teorema da Equivalência), sabe-se que um modelo numérico é considerado estável, a convergência da solução para um problema bem colocado (*well-posed*) será então determinada pela consistência da função de aproximação, portanto essa consistência da aproximação do SPH é fundamental.

Como exemplo, no método numérico de elementos finitos, para se garantir uma precisão e uma convergência na aproximação, a função de forma deve satisfazer a certos graus de consistência, e esse grau pode ser caracterizado pela ordem do polinômio, que deve ser exatamente reproduzido, utilizando uma função de forma. De forma geral, se uma aproximação pode ser reduzida a um polinômio de k -ésima ordem exatamente, a aproximação é dita de k -ésima ordem de consistência, ou possui consistência C^k . Esse conceito tradicional utilizado pelo Método de Elementos Finitos, método com malhas, também pode ser usado a Métodos sem

malhas, como o Método *SPH*. Sendo então similarmente viável o estudo dessa consistência do *kernel* do *SPH*, e suas aproximações por partículas na reprodução de um polinômio utilizando uma função de suavização.

3.4.1 Consistência na aproximação do *kernel* (consistência da representação integral)

Para uma função constante, essa $f(x) = c$, isto é, um polinômio de ordem 0, ser exatamente reproduzida pela aproximação *kernel* do *SPH*, requer:

$$f(x) = \int cW(x - x', h)dx' = c \quad (3.50)$$

ou :

$$\int W(x - x', h)dx' = 1 \quad (3.51)$$

A equação anterior é exatamente a condição de normalização do *kernel*. Além disso, para uma função linear, do tipo: $f(x) = c_0 + c_1x$, (onde: c_0 e c_1 são constantes) ser exatamente reproduzida, se requer que:

$$f(x) = \int (c_0 + c_1x')W(x - x', h)dx' = c_0 + c_1x \quad (3.52)$$

Então usando as equações iniciais (3.50) e (3.52), pode se chegar à seguinte simplificação:

$$\int x'W(x - x', h)dx' = x \quad (3.53)$$

E multiplicando ambos os lados da equação (3.51) por “ x ”, tem-se a seguinte identidade:

$$\int xW(x-x',h)dx' = x \quad (3.54)$$

E subtraindo a equação (3.53) da anterior, tem-se:

$$\int (x-x')W(x-x',h)dx' = 0 \quad (3.55)$$

Chega-se então à equação (3.55), que representa a condição de simetria.

De uma forma geral, a aplicação da análise através do desenvolvimento da Série de Taylor, em relação à aproximação do *kernel* de aproximação da função:

$$f(x) = \int f(x')W(x-x',h)dx' = 0 \quad (3.56)$$

E em uma dimensão unidimensional, será obtida uma série de condições para os momentos de ordens 0 e 1, dessa função de suavização.

$$\begin{aligned} M_0 &= \int W(x-x',h)dx' = 1 \\ M_1 &= \int (x-x')W(x-x',h)dx' = 0 \\ M_2 &= \int (x-x')^2 W(x-x',h)dx' = 0 \\ M_n &= \int (x-x')^n W(x-x',h)dx' = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para as integrações mostradas no conjunto de equações representadas acima, consideram-se que o domínio seja totalmente contínuo e não truncado nos contornos. Assim, o momento de ordem 0 expressa a condição de normalização, e de ordem 1, a simetria para a função de suavização.

Similarmente aos conceitos desenvolvidos na consistência nos métodos numéricos de elementos finitos (*FEM*), se a aproximação do *SPH* pode reproduzir um polinômio de ordem n exatamente, essa aproximação do *SPH* será dita ter uma n -ésima ordem de consistência ou consistência C^n . A consistência de uma aproximação *kernel* é de n -ésima ordem quando a sua função de suavização satisfaz o conjunto de equações

acima apresentado. Consequentemente, as expressões nelas contidas são também condições de consistência da função de suavização para a uma aproximação *SPH*.

Observa-se que, se as aproximações dos *kernels* do *SPH* são estendidas para as regiões de truncamento realizadas pelo contorno, as funções constantes e lineares não podem ser reproduzidas de forma exata se as equações que representam a normalização e a simetria não forem satisfeitas nessas regiões. Portanto, conclui-se que, desde que uma função de suavização convencional satisfaça às condições de normalização (3.51) e simetria (3.55), o método *SPH* convencional tem uma consistência de ordem 1, (C^1), para as regiões interiores. Todavia, para as regiões de contorno, não haverá nem mesmo uma consistência de ordem 0 (C^0).

3.4.2 Consistência na aproximação por partículas

A Etapa de satisfazer as condições de consistência da aproximação dos *kernels*, não significa que necessariamente que a consistência da discretização do modelo *SPH* será válida. Isso porque a consistência pode ser distorcida no processo de discretização dessa partícula. Portanto, a análise da consistência deve ser realizada para o modelo discreto do *SPH* no processo de suavização de partículas, e essa consistência é denominada de consistência da partícula (LIU e LIU, 2003).

Verifica-se que a forma integral do *SPH*, aproximação do *kernel*, possui uma consistência de primeira ordem (C^1) no interior da região. A consistência de aproximação da partícula ou de consistência do *kernel* está relacionada com aproximação integral contínua do *SPH*. E a discrepância entre a aproximação por partículas e a aproximação contínua é denominada de inconsistência de partícula, isto é : manifestação de discrepância entre as equações espaciais discretizadas e as aproximações na forma contínua correspondente (MENDES, 2010).

As contrapartidas da discretização da consistência de uma constante e de uma consistência linear, como verificado nas equações que representam a normalização e a simetria da seção anterior, sob a forma de aproximação de partículas, podem ser expressas das seguintes formas:

$$\sum_{j=1}^N W(x_i - x_j, h) \Delta v_j = 1 \quad (3.58)$$

E

$$\sum_{j=1}^N (x_i - x_j) W(x_i - x_j, h) \Delta v_j = 0 \quad (3.59)$$

Essas condições de consistência da discretização geralmente não são satisfeitas. Como exemplo, a aproximação das partículas nas fronteiras, como pode ser visto na figura abaixo, (Figura 11 - a). Mesmo estando em uma distribuição uniforme, as partículas desequilibradas contribui para o somatório da discretização, o número de partículas localizadas do lado esquerdo (LHS) da equação (3.58) são menores que 1 e a Equação (3.59) não será se anulará devido ao truncamento da função de suavização na fronteira.

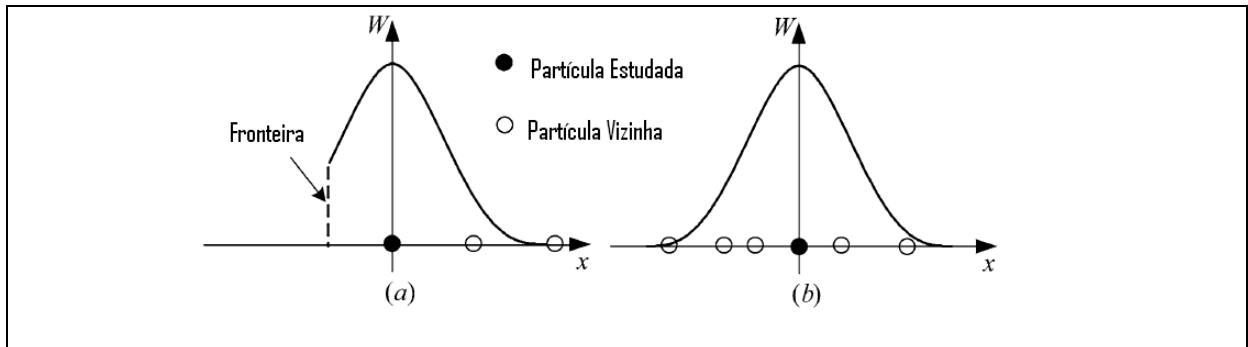


Figura 11 - Aproximação do SPH em casos unidimensionais. (a) Aproximação de partícula quando o domínio é truncado no limite. (b) Aproximação da partícula em uma distribuição irregular em seu domínio – sob o do raio suporte.

Fonte: (LIU e LIU, 2010).

Para os casos com partículas com distribuição irregular (Figura 11 - b), verificar-se que ocorre o mesmo com as partículas no interior, cujo domínio de apoio não é truncado, a constante e a condição de consistência em formas lineares discretizadas não são exatamente satisfeitas. Portanto nem mesmo a origem do método SPH possui consistência C^0 . É claro que a inconsistência causada pela aproximação das

partículas está intimamente relacionada com o *kernel* correspondente responsável pela aproximação e com as partículas envolvidas nessa aproximação. Tal problema de inconsistência é um resultado direto da solução imprecisa do método *SPH* original.

Além da aproximação de partículas, características associada às fronteiras das partículas e às suas distribuições irregulares, a escolha do comprimento da zona a ser suavizada é importante no processo de suavização de partículas. Por exemplo: com a função de suavização *spline cubic* em um domínio unidimensional, com as partículas uniformemente distribuídas, observa-se que o método original de *SPH* possui consistência C^0 , se a suavização é realizada com “espaçamento de partículas” for igual $h = \Delta x$, desde que a equação (3.58) seja satisfeita.

Todavia, se for variando o tamanho do desse raio suporte de suavização (h), poderá resultar na não “satisfação” dessa equação, levando uma menor precisão do método original do *SPH*. Essa é uma razão pela qual muitas vezes é necessário análise da influência do comprimento do raio suporte nas aproximações por *SPH*.

Por exemplo, se o tamanho do raio suporte, o raio de suavização (h) da função *kernel* for muito pequeno em relação ao espaçamento entre as partículas, corre-se o risco de uma das partículas presentes nesse domínio não possuir nenhuma partícula em sua vizinhança, levando àquele suporte compacto possuir apenas um único ponto para interpolar, resultando em uma descontinuidade (MENDES, 2010).

E essa incompatibilidade se origina na discrepância entre o *kernel* do *SPH* e a aproximação das partículas. Partículas sobre as fronteiras, distribuições irregulares e a variação do tamanho do raio de suavização podem causar a inconsistência no processo de aproximação de partículas.

3.4.3 Restauração da consistência do *SPH* (*CSPM*)

Tem sido demonstrado que o método original de *SPH* não possui graus 0 de consistência, e diferentes abordagens têm sido propostas para a melhoria da inconsistência das partículas e a precisão da aproximação pelo método *SPH*.

Algumas envolvem a reconstrução de uma nova função de suavização, de forma que satisfaça às condições de consistência ao serem discretizados. No entanto, essas abordagens não são preferenciais nos sistemas hidrodinâmicos, pois resultam em funções parcialmente negativas, não simétricas e não decrescente.

Nas simulações hidrodinâmicas, geralmente, são utilizadas as abordagens que melhoram a coerência das partículas, sem alterar a função convencional de suavização. Uma abordagem inicial se baseia na antissimétrica pressuposta na derivada de uma função de suavização (MONAGHAN, 1992) e (RANGLES e LIBERSKY, 1996).

$$\sum_{j=1}^N W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0 \quad (3.60)$$

onde $W_{i,\alpha} = \partial W_i(x) / \partial W_i x^\alpha$, em que α é o índice da dimensão repetidos de 1 a d (sendo d o número de dimensões), e N é o número de partículas. Portanto quando a derivada se aproxima da função f , a aproximação de partículas pode ser reescrita como:

$$f_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^N (f_j - f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0 \quad (3.61)$$

ou

$$f_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^N (f_j + f_i) W_{i,\alpha} \Delta v_j = 0 \quad (3.62)$$

Também deve ser notado na Equação (3.60) que não é necessariamente válida, mesmo que seu correspondente homólogo seja contínuo $\int W_{i,\alpha} dx = 0$ é válido (pelo

interior da região). Essa também é uma manifestação de inconsistência de partículas. Portanto as Equações (3.61) e (3.62) realmente usam a inconsciência das partículas nas aproximações da derivada da função de suavização para compensar, contrabalancear ou equilibrar a inconsistência da mesma na aproximação da derivada, buscando a melhoria da aproximação.

E derivaram uma fórmula de normalização para a aproximação da massa específica, (RANDLES e LIBERSKY, 1996):

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N \rho_j W_{ij} \Delta v_j}{\sum_{j=1}^N W_{ij} \Delta v_j} = 0 \quad (3.63)$$

e a normalização para o divergente do tensor de stress σ

$$(\nabla \cdot \sigma)_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\sigma_j - \sigma_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \Delta v_j}{\sum_{j=1}^N (x_j - x_i) \otimes \nabla_i W_{ij} \Delta v_j} = 0 \quad (3.64)$$

onde o $\otimes$ é o produto dos tensores.

Novamente as Equações (3.63) e (3.64) também usam a inconsistência na aproximação da função de suavização e de suas derivadas, também objetivando a melhoria da precisão das aproximações.

Baseada nas séries de *Taylor*, foi desenvolvida uma correção no método de suavização de partículas o *CSPM* (*Corretive Smoothed Particle Method*), (CHEN *et al.*, 1999). Essa aproximação é obtida pela expressão em Séries de Taylor em torno da posição de uma partícula localizada na posição (i), no ponto x_i . Ao invés de ser feita a expansão em torno de uma posição de uma partícula, será feita na extensão em torno de uma posição “ x ” qualquer dentro do domínio Ω , (MENDES, 2010).

Para o processo de *CSPM*, executando a expansão da Série de Taylor nas proximidades uma função suficientemente suave, no espaço unidimensional:

$$f(x) = f_i + (x - x_i) f_{i,x} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} f_{i,xx} + \dots \quad (3.65)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (3.65) pela função de suavização “ W ”, e integrando sobre todo o campo do domínio:

$$\begin{aligned} \int f(x) W_i(x) dx &= f_i \int W_i(x) dx + f_{i,x} \int (x - x_i) W_i(x) dx \\ &+ \frac{f_{i,xx}}{2} \int (x - x_i)^2 W_i(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (3.66)$$

Se os termos envolvidos na derivação da equação forem negligenciados, serem omitidos, da equação (3.66), uma aproximação corretiva da função $f(x)$ da partícula “ i ” será obtida em torno de x :

$$f_i = \frac{\int f(x) W_i(x) dx}{\int W_i(x) dx} \quad (3.67)$$

Para uma função de suavização convencional (não negativa e simétrica), o segundo termo a direita da equação (3.66) é zero para a região interior, e diferente de zero para a região de fronteira. Por isso a aproximação corretiva do *kernel* expressa em (3.67) também possui consistência de segunda ordem para a região interior, e de primeira ordem para a região de fronteira.

Comparando a Equação (3.67) com (3.19), verifica-se que para as regiões do interior, as aproximações dos *kernels* do *SPH* original e a *CSPM* são “idênticas”, devido à satisfação da condição de normalização (na forma contínua), condição de unicidade. Para as regiões de fronteira, uma vez que a integral da função de suavização é truncada por ela, a condição de normalização não pode ser satisfeita. Ao preservar a não unicidade do denominador, o *CSPM* reestabelece a consistência igual a C^0 do *kernel*, (LIU e LIU, 2010)

A aproximação de partículas correspondentes para a função $f(x)$ na partícula i pode ser obtida se utilizando o somatório de partículas mais próximas para cada

termos da equação (3.60), e novamente negligenciar os termos relativos às suas derivadas, obtendo:

$$f_i = \frac{\sum_{j=i}^N f_j W_{ij} \Delta v_j}{\sum_{j=i}^N W_{ij} \Delta v_j} \quad (3.68)$$

Nota-se que a aproximação de partícula do segundo termo no lado direito da equação (3.66) não é necessariamente zero, mesmo no interior das partículas, devido à irregularidade das partículas. Por isso, de forma estrita, a aproximação de partículas expressas em (3.68) possui consistência de primeira ordem “ C^1 ” para o interior e fronteiras das partículas.

Somente se as partículas forem uniformemente distribuídas que será possível uma aproximação de consistência de segunda ordem para a equação (3.66), e a partir do segundo termo à direita da equação valer zero. Nesse caso, a aproximação de partículas expressa em (3.68) é de segunda ordem de precisão, se uniforme a distribuição das partículas.

Se substituir $W_i(x)$ na equação (3.66) por $W_{i,x}$ e negligenciando as derivadas de segunda ordem e as demais superiores, a correção da aproximação do *kernel* para a primeira derivada é gerada:

$$f_i = \frac{\int [f(x) - f(x_i)] W_{i,x}(x) dx}{\int (x - x_i) W_{i,x}(x) dx} \quad (3.69)$$

Então a aproximação de partícula correspondente a equação (3.69) é:

$$f_i = \frac{\sum_{j=i}^N (f_j - f_i) W_{i,x} \Delta v_j}{\sum_{j=i}^N (x_j - x_i) W_{i,x} \Delta v_j} \quad (3.70)$$

Similarmente, o CSPM da aproximação do *kernel* para as derivadas também são de precisão de segunda ordem, ou consistência de primeira ordem “ C^1 ”, para as

regiões interiores, contudo de consistência de ordem zero C^0 para as regiões de fronteira, próximas aos contornos. Salvo para os casos com distribuição uniforme das partículas no interior, os *CSPM* das aproximações das partículas serão de primeira ordem, ou consistência de ordem zero C^1 , para as partículas tanto no interior quanto nas fronteiras.

4 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO SPH APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE BALANÇO

Em síntese, as equações de balanço que governam o escoamento dos fluidos newtonianos podem ser escritas como um conjunto de equações diferenciais parciais, em uma descrição lagrangiana. Esse conjunto de equações diferenciais parciais é conhecido como equações da continuidade, equações de *Navier-Stokes* e da energia, as quais se fundamentam no estado de conservação de massa, do *momentum* e da energia. Os símbolos gregos (α e β) sobrescritos nas equações abaixo são usados para denotar as direções das coordenadas, utilizando-se da descrição de notação indicial. Assim, as equações podem ser escritas das seguintes formas:

1) Equação da Continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \quad (4.1)$$

2) Equação de Navier-Stokes (*momentum*), neste caso, sem as forças de corpo:

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (4.2)$$

3) Equação da energia (sem transferência de energia externa e por condução):

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (4.3)$$

Nas equações acima, σ é o tensor total das tensões viscosas. Ele é composto de duas partes, uma parte que envolve a pressão isotrópica p (possuindo as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada) e outra parte da tensão da viscosidade τ .

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (4.4)$$

Para fluidos newtonianos, a tensão de cisalhamento viscoso deve ser proporcional à taxa de deformação de cisalhamento denotada por ε através da viscosidade dinâmica μ ,

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu \varepsilon^{\alpha\beta} \quad (4.5)$$

onde:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot \vec{v} \right) \delta^{\alpha\beta} \quad (4.6)$$

Separando-se a pressão isotrópica e a tensão viscosa, a equação da energia pode ser reescrita como:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \cdot \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\mu}{2\rho} \cdot \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}. \quad (4.7)$$

A aproximação pelo Método *SPH* será aplicada nas equações da continuidade, do *momentum* e da energia.

4.1 Aproximação das partículas na equação da continuidade

A aproximação da massa específica é muito importante no método *SPH*, já que ela basicamente determina a distribuição das partículas e a evolução do método de suavização dessas partículas. Existem duas abordagens para se obter a massa específica no método convencional de *SPH*. A primeira abordagem é o somatório das massas específicas j , aplicando-se diretamente o método *SPH*, obtendo através das aproximações, o valor da massa específica da partícula i . Para uma dada partícula i , a massa específica é obtida pela média do somatório das massas específicas das partículas vizinhas j , todas presentes sob o raio suporte h da função de suavização W_{ij} , sendo escrita da seguinte forma:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (4.8)$$

E “ N ” é o número de partículas delimitadas pelo raio suporte, nesse domínio da partícula central, i , e m_j é a massa associada à partícula j . E W_{ij} é a função de suavização da partícula i associada à partícula j . E essas partículas estão intimamente associadas ao tamanho do raio suporte (h) da função de suavização.

Outra abordagem para a obtenção da aproximação das massas específicas das partículas é por meio da continuidade, da qual ela também é obtida por aproximação, de acordo com a equação de continuidade, utilizando os conceitos de aproximações do *SPH*, além de algumas transformações matemáticas.

Uma possível forma de aproximação pelo método lagrangiano *SPH* é sua aplicação somente para a parte de divergência da velocidade, enquanto a massa específica, ao lado direito da equação da continuidade, é avaliada na partícula em que o gradiente é aplicado, que a partir da equação (4.1), temos:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.9)$$

Considerando-se as seguintes expressões do *kernel* do *SPH* e as aproximações das partículas no gradiente, e pela sua unicidade, temos:

$$\nabla 1 = \int 1 \nabla W(x - x', h) dx' = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = 0 \quad (4.10)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = \rho_i v_j^\beta \left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right) \quad (4.11)$$

Ao adicionar o lado direito da equação (4.11), que é zero, ao lado direito da equação (4.9), poderá ser apresentada outra forma de equação de aproximação de densidade, que é assim apresentada:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij}^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.12)$$

onde:

$$v_{ij}^\beta = (v_i^\beta - v_j^\beta) \quad (4.13)$$

A equação (4.13) apresenta a diferença entre as velocidades nas aproximações de partículas discretas, e geralmente possui maior preferência nas formulações com o método *SPH*. Isso porque ela representa as velocidades relativas por pares de partículas no raio suporte. Outra vantagem é que se usando a velocidade relativa, associada à natureza antissimétrica, e quando aplicada, reduz os erros decorrentes do problema de inconsistência de partículas (MONAGHAN, 1988).

Além de ocorrer a variação da taxa da massa específica da partícula i , em função da velocidade relativa das partículas j existentes sob o raio suporte. E dessa forma essa aproximação também pode ser usada em algoritmos desenvolvidos em processos paralelos, visto que não há a necessidade de ser obtida a massa específica antes de outras variáveis, sendo melhor adequada a simulações de problemas com grandes descontinuidades (GÓES, 2011). Sendo também usadas, por exemplo, em problemas como os de quedas de barragens, fornecendo simulações mais realistas (ALVES, 2008).

Outra forma de cálculo da massa específica é possível realizando-se a normalização do lado direito da equação (4.8), pelo somatório da função de suavização do *SPH* sobre as partículas vizinhas.

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{m_j}{\rho_i} \right) W_{ij}} \quad (4.14)$$

A expressão acima possui melhor precisão nas proximidades dos limites e é bem adequada para simulação de problemas de fluxo de fluidos em geral, sem descontinuidades, tais como ondas de choque, além de escoamentos incompressíveis (LIU e LIU, 2003). A equação (4.14) foi a usada nas simulações propostas neste trabalho.

4.2 Aproximações de partículas para a equação de conservação do *momentum*

A variação de formas da aproximação de partículas pelo *SPH* para a equação de conservação do *momentum* é semelhante à abordagem da aproximação contínua da massa específica e geralmente envolve algumas transformações (LIU e LIU, 2003). E a aceleração em cada partícula i é calculada através da equação do *momentum* (PAIVA NETO *et al.*, 2009). Sob uma aplicação direta dos conceitos de por aproximações de partículas pelo método numérico *SPH*, no gradiente da equação do *momentum*, equação (4.2), tem-se a seguinte equação:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.15)$$

Sendo a equação acima antissimétrica, será adicionando a seguinte identidade (LIU e LIU, 2003):

$$\sum_{j=1}^N m_j \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right)}_{=0} = 0 \quad (4.16)$$

E para torná-la simétrica, assim a equação (4.15) será reescrita em:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.17)$$

A equação (4.17) é uma forma mais usada para o desenvolvimento da equação do *momentum*, tendo como benefícios, a sua simetria, reduzindo os erros decorrentes dos problemas de inconsistência de partículas (LIU e LIU, 2003).

E considerando a seguinte identidade:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \quad (4.18)$$

E aplicando a aproximação de partículas do método *SPH* ao gradiente, e substituindo a equação (4.18) na (4.2), equação de *Navier-Stokes* (sem as forças de corpo), é obtida a seguinte equação:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.19)$$

E após rearranjos e simplificações, a equação (4.19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (4.20)$$

A equação (4.20) possui a formulação mais comum, e é frequentemente observada em diversas literaturas. Da mesma forma, por essa equação ser simétrica, existirá a redução de erros decorrentes do problema de inconsistência de partículas (LIU e LIU, 2003). E a partir das equações (4.4) e (4.5), as equações (4.17) e (4.20) poderão ser reescritas das seguintes formas:

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = - \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}}_I + \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \frac{\mu_i \varepsilon_i^{\alpha\beta} + \mu_j \varepsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}}_{II} \quad (4.21)$$

E

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = - \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}}_I + \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\mu_i \varepsilon_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\mu_j \varepsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}}_{II} \quad (4.22)$$

Os primeiros termos à direita das equações (4.21) e (4.22), (I), são as aproximações pelo método *SPH* das tensões normais (pressão), os segundos termos, (II), são as aproximações das tensões das forças de cisalhamento (viscosidade). Em casos de escoamentos com viscosidades nulas, os segundos termos também serão anulados na equação. E considerando a equação (4.6), a aproximação de $\varepsilon^{\alpha\beta}$ para a partícula i , é reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \left(\frac{2}{3} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j \cdot \nabla_i W_{ij} \right) \delta^{\alpha\beta} \quad (4.23)$$

E usando a equação (4.10), serão obtidas as seguintes sentenças:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_i^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} = v_j^\beta \left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right) = 0 \quad (4.24)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_i^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = v_j^\alpha \left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \right) = 0 \quad (4.25)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_i \cdot \nabla_i W_{ij} = v_i \left(\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \nabla_i W_{ij} \right) = 0 \quad (4.26)$$

E subtraindo essas identidades a partir da equação (4.23) para incluir as diferenças entre as velocidades, objetivando o cálculo da taxa de deformação viscosa, a aproximação final de $\varepsilon^{\alpha\beta}$ para a partícula i , é:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \left(\frac{2}{3} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji} \cdot \nabla_i W_{ij} \right) \delta^{\alpha\beta} \quad (4.27)$$

A aproximação pelo *SPH* de $\varepsilon^{\alpha\beta}$ para a partícula j pode ser obtida da mesma maneira que os processos anteriores. Depois que $\varepsilon^{\alpha\beta}$ da partícula i foram calculados, a aceleração pode ser calculada pela equação (4.17) ou (4.20). Essa aproximação é simples e pode ser aplicada para o cálculo de variados modelos de viscosidade para diferentes fluidos.

5 ASPECTOS NUMÉRICOS

A modelagem da natureza através do cálculo infinitesimal é limitada, mesmo usando as diversas ferramentas computacionais. Como os experimentos, a aproximação matemática do modelo físico se torna a ferramenta mais apropriada para a modelagem. Contudo a complexidade dos fenômenos físicos torna esse processo de modelagem matemática delicada, as máquinas são bastante limitadas ao ser comparadas esses fenômenos naturais. E neste contexto, as simulações por aproximações com o *SPH* se tornam viáveis, visto a sua possibilidade de ser usado na simulação efeitos de jogos às simulações de fenômenos físicos (PAIVA NETO *et al.*, 2009). E nessa seção serão tratados de pontos relevantes para a execução da modelagem pelo método *SPH*, que são: O comprimento do raio suporte de suavização e a integração temporal e o método de *Euler* e *Leap-frog*.

5.1 Comprimento do raio suporte da função de suavização

O tamanho do raio suporte da função de suavização se torna importante, pois poderá influenciar a eficiência computacional, assim como na precisão da solução numérica. Se for trabalhado com um raio de suavização (kh) muito pequeno, não existirão partículas suficientes naquele domínio para exercer influência necessária sob a partícula referência i , resultando em uma menor precisão. Contudo se o comprimento também for muito grande, a precisão também é comprometida. Então é necessário que se tenha um número suficiente de partículas para que se tenha a precisão numérica adequada, então um raio suporte (kh) adequado a tratamento das partículas.

E pela teoria do *SPH* os números apropriados para casos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, respectivamente, seriam 5, 21 e 57 partículas, contando como a própria partícula referência i , em uma distribuição com espaçamentos equidistantes entre as partículas referências de cerca de 1,2 vezes o raio suporte, como $k = 2$ (LIU e LIU, 2003).

Existem diversas técnicas e teorias que tratam desse ponto e tentam desenvolver o trabalho de manter o número mínimo ou adequado a quantidade de partículas sob o raio suporte da função de suavização, contudo a maneira mais direta e simples para esse trabalho de cálculo e atualização deste raio é baseado na relação entre as massas específicas médias, e é representada pela seguinte igualdade (LIU e LIU, 2003):

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{d}} \quad (5.1)$$

Onde h_0 é o tamanho do raio suporte inicial, e ρ_0 é a massa específica inicial, e d o número da dimensão que a modelagem está sendo trabalhada.

Outra forma de atualização do comprimento do raio de suavização pode ser obtida através da derivação da igualdade sugerida acima, equação (5.1), a qual fornecerá a taxa de variação do comprimento da função de suavização em relação ao tempo. A qual poderá ser discretizada com as mesmas técnicas usadas nas aproximações desenvolvidas no *SPH*, usando as mesmas técnicas de integração em relação ao tempo (LIU e LIU, 2003):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{d} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.2)$$

5.2 Integração temporal e os métodos de *Euler* e *Leap-frog*

O método *SPH* permite calcular as derivadas a partir de partículas (amostras) distribuídas aleatoriamente no espaço, obtendo, no caso de simulação de fluidos, massas específicas, pressão e viscosidade, por exemplo. Contudo a equação do momento envolve derivadas espaciais e temporais, existindo métodos que aproximam essas derivadas de amostras de tempo distribuídas uniformemente, do tipo (PAIVA NETO *et al.*, 2009):

$$\frac{dv}{dt}(t) \approx F(\dots v(t-2\Delta t), v(t-\Delta t), v(t), v(t+\Delta t), v(t+2\Delta t), \dots) \quad (5.3)$$

Dentre os diferentes métodos de integração de equações diferenciais ordinárias, existe a necessidade de saber como são calculadas as variáveis desconhecidas nos problemas, os esquemas de integração podem ser classificados em métodos explícitos e métodos implícitos (PAIVA NETO, 2007). Nos explícitos, o cálculo é direto, ou seja, quando existe apenas uma incógnita a resolver, naquele instante atual. Já o implícito, coloca os instantes futuros como incógnita e se é isolado o instante atual (PAIVA NETO *et al.*, 2009).

Como vantagem, os métodos explícitos podem ser implantados de forma mais fácil, além realizar os cálculos de maneira rápida e eficiente. Todavia a sua estabilidade depende de como é feita a escolha do passo de tempo, Δt , para que haja convergência. O método explícito mais simples, neste caso, é o Método de *Euler* (PAIVA NETO, 2007). E ele corresponde à primeira aproximação da derivada, conhecida como diferença para frente, que no caso da velocidade pode ser assim escrita (PAIVA NETO *et al.*, 2009):

$$\frac{dv}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(t+h) - v(t)}{h} \right) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (5.4)$$

Essa estimativa de derivada envolve apenas dois pontos de tempo: t e $t + \Delta t$, o que permite calcular o instante a seguir diretamente a partir do instante atual, tornando o integrador eficiente, pois basta calcular e armazenar apenas um instante para calcular o seguinte (PAIVA NETO *et al.*, 2009).

E neste método, v_i é a velocidade, x_i é a posição e a_i a aceleração da partícula no instante de tempo t . Os quais são atualizados paralelamente da seguinte maneira (PAIVA NETO, 2007):

$$\begin{aligned} v_i(t+1) &= v_i(t) + \Delta t a_i(t) \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + \Delta t v_i(t+1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Todavia o Método de *Euler* possui uma precisão de primeira ordem e pode ser tornar instável, fato indesejável para qualquer integrador. Essa instabilidade pode ser remediada utilizando espaços de tempos, Δt , bem pequenos (PAIVA NETO, 2007).

É possível estimar a precisão do método, sendo que a velocidade da partícula pode ser vista como uma função vetorial do tempo. Se essa função é bem aproximada por seu polinômio de Taylor, assim:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \frac{dv}{dt}(t) + O((\Delta t)^2) \quad (5.6)$$

E ao observar essa análise, o método de *Euler* é qualificado de método de primeira ordem. E a aproximação do método de *Euler* pode ser escrita como:

$$\left(\frac{dv}{dt}(t) \right)_{Euler} = \frac{dv}{dt}(t) + O(\Delta t) \quad (5.7)$$

Tão simples quanto o método de *Euler*, o método *Leap-frog* se torna mais adequado, devido a sua precisão de segunda ordem. Na prática, este método se torna mais usado porque requer de pouca exigência de armazenamento de memória, sem perder a sua eficiência (LIU e LIU, 2003). A base deste método está em calcular as posições e velocidades em instantes de tempo intercalados e dispostos de uma determinada maneira. Como exemplo, a posição é calculada em um instante de tempo inteiro e a velocidade em cada “instante e meio” (FARIA, 2012). Ele é baseado na estima de derivada como diferença centrada (PAIVA NETO *et al.*, 2009):

$$\frac{dv}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v\left(t + \frac{1}{2}h\right) - v\left(t - \frac{1}{2}h\right)}{h} \right) \approx \frac{v\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - v\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t} \quad (5.8)$$

A estima da derivada envolve novamente apenas dois pontos de tempo: $\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right)$ e $\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right)$. Porém para calcular o instante a seguir diretamente a partir do instante atual, usa instantes intermediários, o que não cria um problema no ponto de vista da aproximação. Na prática, a velocidade de cada partícula é calculada nos pontos médios dos intervalos de tempo, e a posição, nos pontos inteiros (PAIVA NETO *et al.*, 2009).

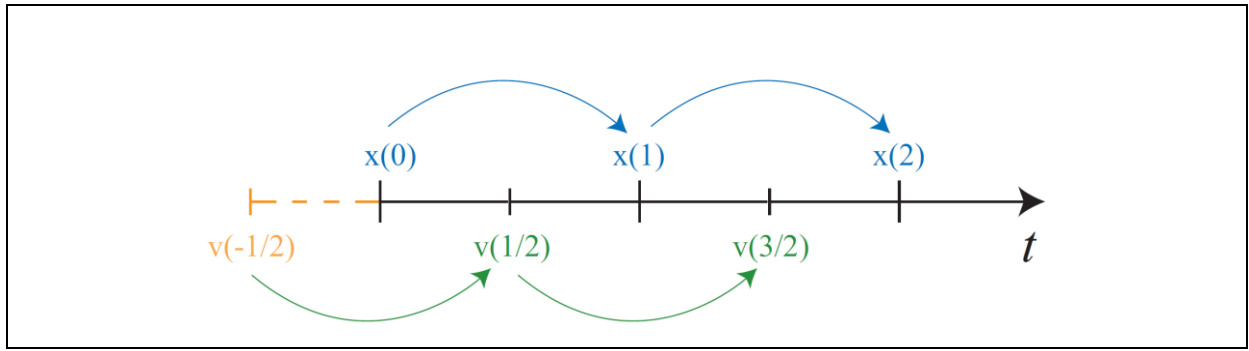


Figura 12 - Esquema de Integração *Leap-frog*.
Fonte: (PAIVA NETO, 2007).

Nesse esquema de integração a velocidade de cada partícula é calculada nos pontos médios dos intervalos de tempo $t \in Z$. Assim, as posições e as velocidades são avaliadas das seguintes formas:

$$\begin{aligned} v_i\left(t + \frac{1}{2}\right) &= v_i\left(t - \frac{1}{2}\right) + \Delta t a_i(t) \\ x_i(t+1) &= x_i(t) + \Delta t v_i(t + 1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Quando é necessário ser calculada a velocidade em um passo inteiro, ela pode ser interpolada a partir dos passos intermediários. O mais prático é realizar tal calculo através da média entre as velocidades anterior e posterior:

$$v_i(t) = +\frac{1}{2} \left[v_i\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - v_i\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) \right] \quad (5.10)$$

A iniciação do método requer uma etapa adicional no cálculo da velocidade $v_i\left(-\frac{1}{2}\right)$ através do método de *Euler*:

$$v_i\left(-\frac{1}{2}\right) = v_i(0) + \frac{1}{2} \Delta t a_i(0) \quad (5.11)$$

Ao contrário da diferença ‘para à frente’, usada no integrador de *Euler*, o integrador de *Leap-frog* é reversível no tempo devido à forma simétrica na qual ele é definido. A reversibilidade no tempo é uma propriedade importante, pois ela garante conservação de energia do sistema (PAIVA NETO *et al.*, 2009).

Como verificado nas seções anteriores, a forma final discretizada das equações da continuidade, do *momentum* e da energia, sintetizadas, formam um conjunto de equações diferenciais ordinárias em relação ao tempo, conforme a equação (5.12), reapresentada abaixo:

$$\begin{cases} \frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \\ \frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta} + H_i \\ \frac{Dx_i}{Dt} = v_i^\alpha \end{cases} \quad (5.12)$$

E essas equações podem ser numericamente integradas, aplicando técnicas clássicas de integração, tais como a de *Euler* e a *Leap-frog*. E por pontos já apresentados, como a precisão de segunda ordem, o método *Leap-frog* se destaca, em relação ao de *Euler*. E inicialmente os valores sabidos da massa específica, da energia e da velocidade no tempo inicial, isto é, em (t_0) , são aplicados no cálculo

dos seus respectivos valores no tempo $\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)$, enquanto que as posições das partículas são avaliadas para o instante igual a $(t_0 + \Delta t)$:

$$\begin{cases} t = t_0 + \Delta t \\ \rho_i\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) = \rho_i(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \frac{D\rho_i}{Dt}(t_0) \\ e_i\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) = e_i(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \frac{De_i}{Dt}(t_0) \\ v_i\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_i(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \frac{Dv_i}{Dt}(t_0) \\ x_i(t_0 + \Delta t) = x_i(t_0) + \Delta t v_i\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{cases} \quad (5.13)$$

Buscando a consistência da integração numérica, a massa específica, a energia e a velocidade devem ser atualizadas de forma que essas sejam conhecidas no mesmo instante de tempo da posição da partícula.

$$\begin{cases} \rho_i(t) = \rho_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{D\rho_i}{Dt}(t - \Delta t) \\ e_i(t) = e_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{De_i}{Dt}(t - \Delta t) \\ v_i(t) = v_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{Dv_i}{Dt}(t - \Delta t) \end{cases} \quad (5.14)$$

Ao fim do próximo passo, a massa específica, a energia, a velocidade e a posição de cada das partículas são avançadas naquele tempo, e agora empregando o método tradicional do *Leap-frog*.

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t + \Delta t \\ \rho_i \left(t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) = \rho_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \Delta t \frac{D\rho_i}{Dt}(t) \\ e_i \left(t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) = e_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \Delta t \frac{De_i}{Dt}(t) \\ v_i \left(t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) = v_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) + \Delta t \frac{Dv_i}{Dt}(t) \\ x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t v_i \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \end{array} \right. \quad (5.15)$$

$$\Delta t = \min \left(\frac{h_i}{c} \right) \quad (5.16)$$

Sendo h_i o comprimento de suavização da partícula i , e c a velocidade do som.

Esse método também possui uma abordagem mais simples e requer um armazenamento mínimo, mas possui a desvantagem de precisar de adaptações para diferentes problemas. O método *Leap-frog* fornece excelentes propriedades de conservação de energia mesmo com potenciais altamente repulsivos às pequenas distâncias, como mesmo com um delta de variação do tempo grande. Outra vantagem do método *Leap-frog* é o seu baixo requerimento de armazenamento de informações. Para simulações onde armazenamento se seja um problema determinante, esse método pode ser o mais adequado (LIU e LIU, 2003).

5.3 O problema das cavidades quadradas abertas bidimensionais (*Shear-Driven Cavity Flow*)

O problema do escoamento em cavidades quadradas abertas bidimensionais consistiu em um escoamento que ocorre sobre uma caixa quadrada de dimensões iguais a L , inteiramente preenchida por um fluido incompressível e inicialmente em repouso. Essa caixa possui três paredes fixas: as duas paredes laterais e a inferior. Já a parte superior desse sistema, que está em contato com o escoamento, que

possui velocidade constante, por conseguinte, coloca o fluido do interior da caixa também em movimento, que inicialmente, estava em repouso.

As condições de contorno são de não-escorregamento e impermeabilidade nas paredes fixas ($u = v = 0$), e na aresta superior, Aplica-se uma velocidade constante ($u \neq 0$), podendo variar de acordo com a mudança do número de *Reynolds*, na direção horizontal, em x , sentido à direita, a qual gera um escoamento no interior da caixa, devido à difusão dos efeitos viscosos, conforme pode ser observado na figura 13.

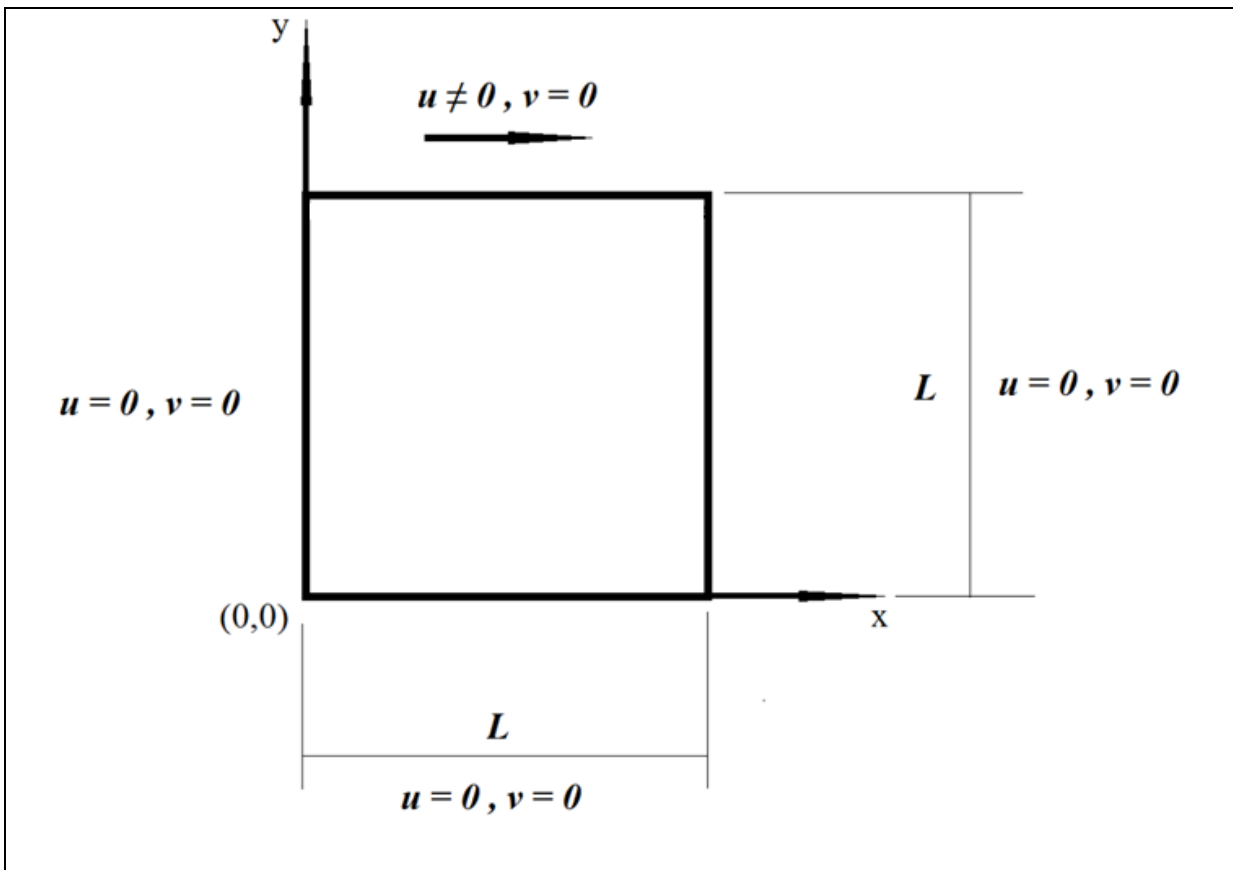


Figura 13 - Descrição geométrica do problema com as condições iniciais e de contorno no interior da cavidade.

No presente trabalho, as equações de Navier-Stokes foram discretizadas através do método numérico lagrangiano *SPH* e as simulações foram realizadas para baixos números de *Reynolds*. Inicialmente, a cavidade quadrada possui seus lados iguais a

$L = 10^{-3} m$, com razão de aspecto igual a “1”. Os passos de tempo para a simulação foram de $5 \cdot 10^{-5} s$. Na discretização do domínio foram empregadas 1600 partículas reais, distribuídas no interior da cavidade, e 320 partículas virtuais dispostas nas paredes, conforme visto na figura 14. Essas partículas virtuais, também chamadas de partículas fantasmas, têm como objetivo gerar forças repulsivas para impedir a interpenetração de partículas do fluido nas fronteiras sólidas (LIU e LIU, 2003).

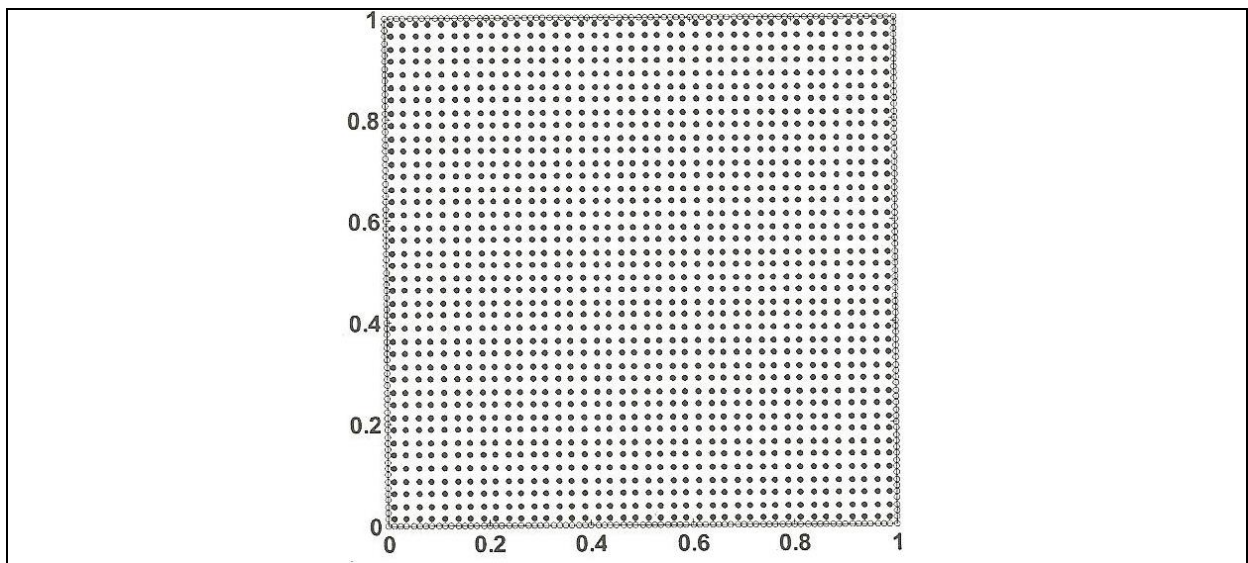


Figura 14 – Distribuição das partículas reais (40 x 40) e virtuais (nas paredes). As partículas reais são representadas por pontos escuros, fechados, e as virtuais por circunferências abertas colineares presentes nas paredes da cavidade.

Fonte: (LIU e LIU, 2003).

As partículas no interior da cavidade iniciaram a simulação com velocidade nula, até atingirem a condição de estacionariedade, conforme a figura 15. As partículas virtuais da parede superior foram inicializadas e mantidas com velocidade constante a cada distinto número de *Reynolds* aplicados nas simulações apresentadas no capítulo 6, que trata dos resultados. O fluido utilizado é a água, com massa específica igual a $10^3 Kg / m^3$ e viscosidade cinemática igual a $10^{-6} m^2 / s$.

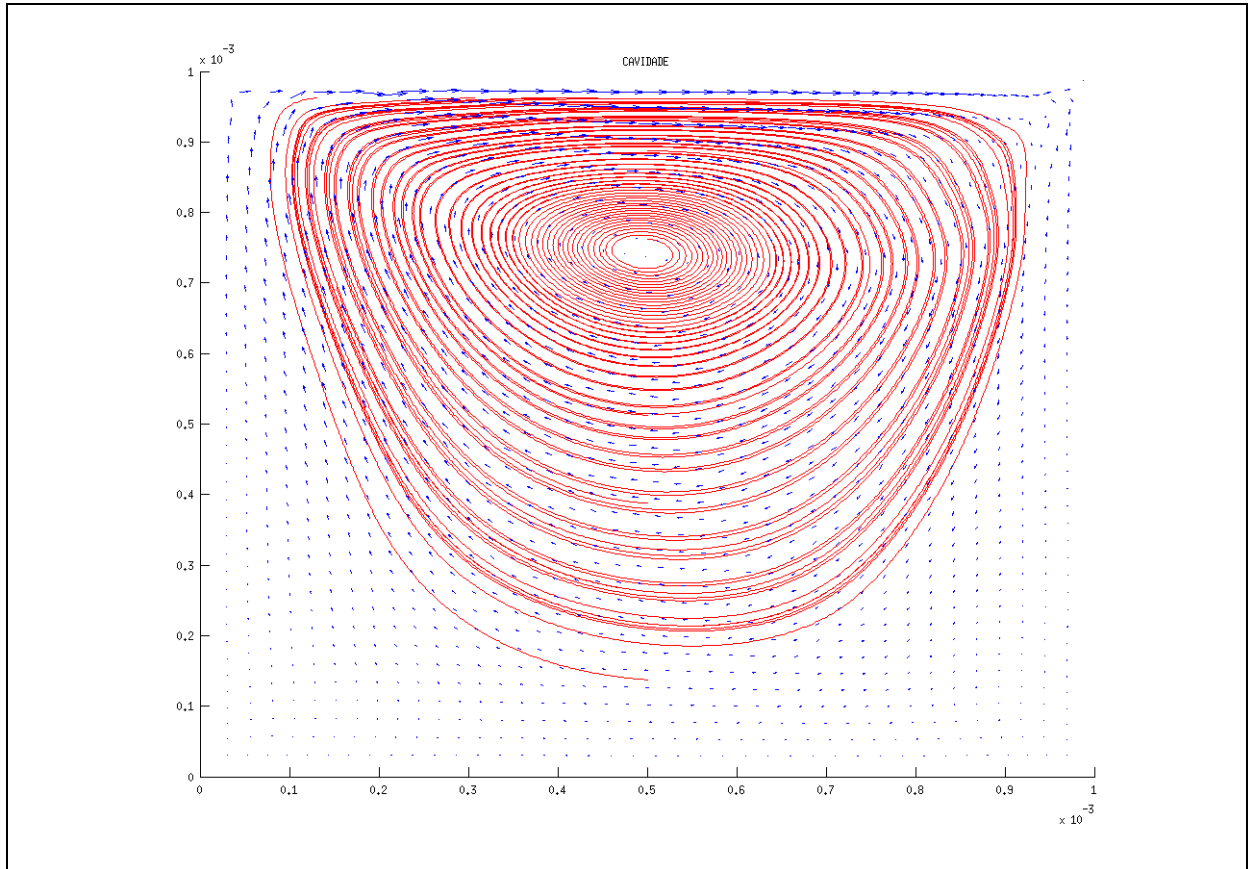


Figura 15 – Linhas de corrente e campo de velocidade do fluido para o problema das cavidades quadradas deste trabalho.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresentará os resultados alcançados com a aplicação do modelo numérico *SPH* ao estudo do problema da cavidade quadrada bidimensional (*Shear-Driven Cavity Flow*), a qual apesar da simples geometria, desenvolve um escoamento que apresentam características relativamente complexas. E devido a este fato, são bastante utilizadas em pesquisas na modelagem numérica, inclusive na atualidade, visto que os primeiros estudos sobre este assunto foram desenvolvidos a partir da década de 60 do século passado, por Burggaf, em 1966 (FRIGO, 2004).

É possível observar a presença de cavidades quadradas tanto em problemas de engenharia, quanto nas ciências que estudam a atmosfera e seus ambientes. Como exemplos desse fenômeno, podem ser citados os escoamentos ocorrentes em depressões e vales, fuselagens e asas de aviões, cascos de embarcações e carrocerias de veículos, estádios de esportes e sistemas de deposição contínua de películas fotossensíveis sobre filmes e papéis fotográficos (FRIGO, 2004).

A dinâmica particularmente ativa deste tipo de escoamento pode induzir o desgaste prematuro de estruturas fixas expostas à ação de correntes fluviais ou marítimas, além de intensificar o ruído em máquinas, equipamentos e veículos aéreos, terrestres e marítimos, como, por vezes, ocorre em fendas existentes sobre a carroceria de veículos automotores, cascos de embarcações ou sobre a fuselagem de aeronaves (MEGA, 2006).

As análises das velocidades centrais dos vórtices principais nos escoamento em cavidades quadradas têm sido usadas como parâmetros para a validação de diversos trabalhos, como os desenvolvidos por Burggarf (1966), Benjamin E Danny (1979), Ghia *et al.*(1982), Peric *et al.*(1988), Babu *et al.*(1994), Pinelli e Vacca(1994), Chow *et al.*(1996), Griebel *et al.*(1997), Marques(2005), Marques e Doricio (2006), além de Patil *et al.*(2006), Cheng e Hung (2006) , De *et al.*(2009) e Góes (2011).

O trabalho de Burggarf (1966), além de se destacar pelo seu pioneirismo, traz consigo a plotagem dos perfis analíticos e numéricos das velocidades das cavidades bidimensionais, essas coletadas nas suas linhas de centro, com *Reynolds* entre 0,00 e 400,00.

O trabalho de Ghia *et al.*(1982), que se tornou uma das grande referências, também investigou as cavidades quadradas, através do método numérico *Multigrid*. Neste trabalho há uma grande quantidade de dados tabelados, esses obtidos das simulações com moderados e altos números de *Reynolds*, com valores iguais a 100,00, 400,00, 1000,00, 3200,00, 5000,00, 7500,00 e 10000,00. Ainda apresentou várias tabelas com as velocidades das linhas centrais das cavidades, assim como a plotagem da influência da variação dos números de *Reynolds* na variação da posição dos centros dos vórtices primários.

Aydin e Fener (2000) apresentaram um trabalho usando os métodos numéricos de volumes finitos, elementos finitos e diferenças finitas, todavia não tendo tão boa acurácia como quando empregado o método numérico *BEM (Boundary Element Method)*. Todos os métodos numéricos citados foram aplicados aos problemas das cavidades quadradas, com baixos, moderados e altos números de *Reynolds*. Foram obtidos bons resultados com baixos e moderados números de *Reynolds*, entretanto, não tão boa acurácia foi obtida com altos números de *Reynolds*, principalmente em relação às velocidades centrais verticais, ao serem comparadas com os dados propostos por Ghia *et al.*(1982). O trabalho de Aydin e Fener (2000) demonstra ser bom referencial para outras pesquisas, como foi para este trabalho, possuindo uma tabela de comparação dos centros das cavidades abertas com um número significativo de outros trabalhos, em escoamentos com números de *Reynolds* iguais a 0,00, 100,00, 400,00 e 1000,00.

No trabalho de Marques (2005) foi desenvolvido um código numérico baseado no método dos volumes finitos em malhas não estruturadas. Foram estudados os problemas das cavidades quadradas, verificando-se o comportamento do seu código computacional em relação aos resultados obtidos por Chow *et al.*(1996), com $Re = 100, 00$, $Re = 400,00$ e $Re = 1000,00$.

Os estudos de Cheng e Hung (2006) investigaram os Problema das Cavidades quadradas e retangulares, com razões de aspectos variando dentre 0.1 a 7.0. Esse artigo apresentou simulações com baixos, moderados e altos números de *Reynolds*. Este trabalho relatou que, quanto mais próximos os números de *Reynolds* esteve próximo de zero, mais “simétricos” se tornam os vórtices centrais das cavidades quadradas. Além de informar que a influência da força de inércia diminui de acordo com o aumento da taxa de variação entre as paredes das cavidades, isto é, quando se aumenta as proporções entre as paredes das cavidades retangulares.

No trabalho de Patil *et al.*(2006), que também realizou trabalhos com as cavidades quadradas e retangulares, através de simulações numéricas das equações de transporte de Boltzmann, foram investigados os perfis com números de *Reynolds* iguais a 50,00, 400,00, 1000,00 e 3200,00, com cavidade em 2 e 3 dimensões, assim como as posições dos centros dos vórtices principais e secundários. Este trabalho também realizou comparações dos dados obtidos em suas simulações a de outros trabalhos, como o de Ghia *et al.*(1982).

O trabalho de De *et al.*(2009) investigou o desenvolvimento das cavidades quadradas e retangulares com baixos, moderados e altos números de *Reynolds*, em 2 e 3 dimensões. Este trabalho concluiu que com o aumento dos números de *Reynolds*, as diferenças entre os dados de referência e as suas simulações foram mais desarmônicas nas simulações em três dimensões. Esse fato ocorre devido ao efeito de camadas limites perto das paredes laterais na direção transversal, na direção da nova dimensão aplicada na simulação.

Góes (2011) desenvolveu duas versões de códigos numéricos para os Problemas das Cavidades Quadradas, uma serial e outra paralelizada, ambas pelo método numérico *SPH*, contudo, a versão paralelizada por meio da API CUDA teve melhor eficiência computacional. Os dados foram comparados com os obtidos através de simulações empregando o método de volumes finitos, com malhas de 80x80 volumes de controle, tendo menor acurácia ao longo da linha central vertical.

Objetivando a validação do Método Numérico *SPH* (*Smoothed Particles Hydrodynamics*), foram utilizadas três estratégias desenvolvidas em distintos

trabalhos que abordam o assunto: a comparação da localização dos centros dos vórtices primários, a comparação dos perfis de velocidades nas linhas centrais, $y = 0,5$ (horizontal) e $x = 0,5$ (vertical), e a verificação dos desvios absolutos dos valores das velocidades centrais no interior das cavidades, todos com baixos e moderados números de *Reynolds*. É importante destacar que na presente modelagem não foi incluído nenhum modelo para apreciar os efeitos de turbulência, e o efeito da gravidade também não foi considerado.

6.1 Tabelas de comparação das localizações dos centros dos vórtices com diferentes números de *Reynolds*.

Nessa seção serão apresentadas tabelas com as localizações dos centros dos vórtices primários de diversos trabalhos de referência, os quais foram gerados por escoamentos em cavidades quadradas com diferentes números de *Reynolds*. Foram empregados distintos métodos numéricos: *Eulerianos*, como os das diferenças finitas e dos volumes finitos, e *lagrangianos* sem malhas (*Meshless*), como o *SPH* (*Smoothed Particle Hydrodynamics*).

Inicialmente, objetivando-se verificar se o código do método numérico *SPH* fornecia resultados consistentes, utilizou-se o problema das cavidades abertas, realizando-se comparações das posições dos centros dos vórtices primários, que são os vórtices que ocupam o núcleo do escoamento.

As tabelas apresentam dados obtidos para diversos números de *Reynolds* nos trabalhos desenvolvidos por Cheng & Hung (2006), De *et al.* (2009), Ghia *et al.* (1982), Golbert (2009), Marques e Doricio (2006), Patil *et al.* (2006), Scheiber & Keller (1983), Chen *et al.* (2008), Tuann e Olson (1978). O trabalho de Marques e Doricio (2006) utilizou técnicas numéricas com malhas e sem malhas. Marques e Doricio (1) e (2) empregaram técnicas numéricas com malhas. A referência de Marques e Doricio (3) foi utilizada técnica numérica sem malhas.

As tabelas seguinte, mostradas entre 1 e 9, apresentam as localizações dos centros dos vórtices gerados pelos escoamentos com distintos números de *Reynolds* variando entre 0,00 e 100,00. A posição x_c representa o centro do vórtice primário nas abscissas, e a posição y_c , o centro do vórtice primário nas ordenadas.

Tabela 1 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re \rightarrow 0.0$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5462	0,7502	-	-
Aydin & Fenner	0,5000	0,7500	9,24	0,03
Burggarf	0,5000	0,7600	9,24	1,29
De <i>et al.</i>	0,5000	0,7600	9,24	1,29
Gupta & Manohar	0,5000	0,7500	9,24	0,03
Rodrigues-Prada <i>et al.</i>	0,5000	0,7500	9,24	0,03

Na Tabela 1 foram apresentadas as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* tendendo a 0,00 (zero). Ao analisar os dados, observa-se que as diferenças percentuais nas abscissas, na posição x_c , todas foram de 9.24%. E em relação às ordenadas, em y_c , essas diferenças percentuais variaram entre 0,03% a 1,29%. As diferenças do presente trabalho em relação aos trabalhos de Gupta & Manohar, Rodrigues-Prada *et al.* e Aydin & Fenner variaram em 0,03%. Já em relação aos trabalhos de Burggarf e De *et al.* esse percentual foi de 1,29%.

Tabela 2 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 0,01$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5460	0,7600	-	-
Cheng & Hung	0,5000	0,7652	9,20	0,68
De <i>et al.</i>	0,5000	0,7777	9,20	2,28

Verificou-se na Tabela 2 as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 0,01. Observou-se que as diferenças nas abscissas, na posição x_c , todas foram iguais, 9,20% em relação aos dados de referências. Nas ordenadas, em y_c , os resultados variaram entre 0,68% a 2,28%. A diferença percentual deste trabalho em relação ao trabalho de Cheng & Hung foi de 0,68%. E a diferença em relação ao trabalho de De *et al.* foi de 2,28%.

Tabela 3 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 0,10$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5480	0,7431	-	-
Marques e Doricio (1)	0,4883	0,7624	12,22	2,53
Marques e Doricio (2)	0,4978	0,7638	10,08	2,71
Marques e Doricio (3)	0,5020	0,7430	9,17	0,01

A tabela acima apresenta as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com $Re = 0,10$. Verificou-se que as diferenças nas abscissas, na posição x_c , variaram entre 9,17% a 12,22%, em relação aos trabalhos de referência. Em relação a Marques e Doricio (2006), em x_c , essas diferenças foram de 12,22%, 10,08%, 9,17%. Já em relação às ordenadas, em y_c , esses percentuais foram de 0,01%, 2,71% e 2,53%, conforme pode ser verificado na Tabela 3.

Tabela 4 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 1,00$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,4930	0,7680	-	-
Eldho & Young	0,5000	0,7500	1,40	0,42
Scheiber & Keller	0,5000	0,7667	1,40	0,16
Marques e Doricio(1)	0,4906	0,7624	0,49	0,73
Marques e Doricio(2)	0,4998	0,7631	1,36	0,64
Marques e Doricio(3)	0,5032	0,7427	7,33	3,41

A Tabela 4 apresenta as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 1,00. Observou-se que as diferenças nas abscissas, na posição x_c , variaram entre 0,49% a 7,33%, em relação aos dados de referências. Em relação aos trabalhos de Scheiber & Keller e Eldho & Young, essa diferença percentual foi de 1,40%. Em relação ao trabalho de Marques e Doricio (2006) essas diferenças foram de 0,49%, 1,36%, e 7,33%. Já em nas ordenadas, em y_c , essas diferenças percentuais variaram entre 0,16% a 3,41%. Em relação a Scheiber & Keller essa diferença foi de 0,16%, e em Eldho & Young, esse percentual foi de 0,42%. Em comparação com o trabalho de Marques e Doricio(2006) essas diferenças foram iguais a 0,73%, 0,64% e 3,41%. Esse percentual de 3,41% foi a maior diferença percentual observada entre todos os dados das tabelas envolvendo a variação no eixo das ordenadas, y_c .

Tabela 5 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 10,00$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5481	0,7581	-	-
Marques e Doricio(1)	0,5045	0,7614	8,64	0,43
Marques e Doricio(2)	0,5060	0,7623	8,32	0,55
Marques e Doricio(3)	0,5183	0,7538	5,75	0,57

A Tabela 5 apresentou as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 10,00. Observou-se que as diferenças nos eixos das abscissas, variaram entre 5,75% a 8,64%, em relação às posições encontradas neste estudo. Nas abscissas, x_c , em relação ao trabalho de Marques e Doricio(1), as diferenças foram de 8,64%, 8,32%, e 5,75%. E em relação às ordenadas, em y_c , essas diferenças foram de 0,43%, de 0,55% e de 0,57%.

Tabela 6 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 25,00$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5480	0,7445	-	-
Marques e Doricio(1)	0,5299	0,7591	3,42	1,96
Marques e Doricio(2)	0,5391	0,7608	1,65	2,14
Marques e Doricio(3)	0,5437	0,7557	0,79	1,48

Na Tabela 6 foram apresentadas as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com $Re=25,00$. Verificou-se que as diferenças nos eixos das abscissas, na posição x_c , comparado com os trabalhos de Marques e Doricio, foram de 3,42%, 16,50%, e 0,79%. Nas ordenadas, em y_c , esses índices foram de 1,96%, 2,14% e 1,48%. O percentual 16,50% foi o maior desvio encontrado dentre os analisados, em relação às abscissas.

Tabela 7 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 40,00$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5490	0,7630	-	-
Scheiber & Keller	0,5667	0,7583	3,12	0,62

Na Tabela 7 foram apresentadas as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 40,00. Observou-se que a diferença na abscissa, na posição x_c , foi de 3,12%, e na ordenada, em y_c , com foi de 0,62%. Essa análise considerou os resultados do trabalho desenvolvido por Scheiber & Keller.

Tabela 8 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 50,00$

	Posições dos centros dos Vórtices		Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0.5471	0.7574	-	-
Patil <i>et al.</i>	0,5781	0,7578	5,36	0,01
Chen <i>et al.</i>	0,5796	0,7601	5,61	0,36
Marques e Doricio(1)	0,5691	0,7582	3,87	0,01
Marques e Doricio(2)	0,5714	0,7614	4,23	0,53
Marques e Doricio(3)	0,5767	0,7553	5,13	0,28

Pela Tabela 8 foram verificadas as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 50,00. As diferenças dos resultados das simulações deste presente trabalho, nos eixos das abscissas, na posição x_c , variam entre 3,87% a 5,61%. A diferença em relação ao trabalho de Patil *et al.* foi de 5,36%. E em relação à Sheng *et al.*, foi de 5,61%. Em relação à Marques e Doricio, essas diferenças foram de 3,87%, 4,23%, e 5,13%. Em relação às ordenadas, em y_c , essas diferenças percentuais variaram entre 0,01% a 0,53%. Em relação ao trabalho de Patil *et al.* essa diferença foi de 0,01%. Ao de Chen *et al.* o percentual foi de 0,36%. Já em relação ao trabalho Marques e Doricio, as diferenças percentuais foram de 0,01%, 0,28% e 0,53%.

A Tabela 9 apresenta as posições dos centros dos vórtices principais em um escoamento com número de *Reynolds* igual a 100,00. Nessa tabela, todas as diferenças percentuais em relação ao eixo das abscissas, em x_c , ficaram acima de 10%. Esses percentuais variaram entre 10,79% a 13,70. Em relação ao trabalho de Cheng & Hung, a diferença foi de 11,68%. Em relação ao De *et al.*, Ghia *et al.* Golbert e Scheiber & Keller foram, respectivamente, iguais às 11,27%, 11,83%, 11,80% e 11,76%. A diferença entre o Presente Trabalho e ao de Tuann foi de 10,79%. Em relação os dados de Marques e Doricio, essas diferenças percentuais foram de 10,89%, 11,22%, e 13,70%. Nas ordenadas, em y_c , essas diferenças percentuais não foram tão elevadas, variaram entre 0,22% a 3,19%. Em relação ao trabalho de Cheng & Hung, essa diferença foi de 1,05%. Em relação ao De *et al.* foi de 1,41%, ao de Ghia *et al.* foi de 1,44%, ao de Golbert foi de 1.23%, ao de Scheiber

& Keller foi de 0,44%, e ao de Tuann & Olson foi de 3,19%. As diferenças em relação ao trabalho de Marques e Doricio foram iguais a 1,53%, 0,58% e 0,22%.

Tabela 9 – Comparação dos centros dos vórtices primários com diferentes trabalhos, com $Re = 100,00$

	<i>Posições dos centros dos Vórtices</i>		<i>Diferenças entre os centros dos Vórtices (%)</i>	
	x_c	y_c	x_c	y_c
Presente Trabalho	0,5442	0,7450	-	-
Cheng & Hung	0,6162	0,7372	11,68	1,05
De <i>et al.</i>	0,6133	0,7556	11,27	1,41
Ghia <i>et al.</i>	0,6172	0,7344	11,83	1,44
Golbert	0,6170	0,7360	11,80	1,23
Scheiber & Keller	0,6167	0,7417	11,76	0,44
Tuann & Olson	0,6100	0,7220	10,79	3,19
Marques e Doricio(1)	0,6107	0,7338	10,89	1,53
Marques e Doricio(2)	0,6130	0,7407	11,22	0,58
Marques e Doricio(3)	0,6306	0,7434	13,70	0,22

Sintetizando a análise das 9 (nove) tabelas apresentadas, observou-se que as maiores variações ocorreram nas abscissas, x_c . O menor desvio foi de 0,79% e o maior de 13,70%. A menor diferença, 0,79%, foi verificada ao ser comparada o presente trabalho com o de Marques e Doricio (3), para $Re=25,00$. A maior diferença percentual, 13,70%, também encontrada ao comparar-se o presente trabalho com o de Marques e Doricio (3), com $Re=100,00$. Essas diferenças percentuais mostram uma limitação deste trabalho para escoamentos com números de *Reynolds* acima de 100,00. O fato se destaca, principalmente, nas variações das abscissas. Isso ocorre, provavelmente, pelo fato de o presente trabalho não possuir a modelagem dos efeitos das turbulências. Essa limitação se torna mais significativa ao ser elevado os números de *Reynolds* nos escoamentos estudados. Contudo, em relação às posições dos centros dos vórtices nas ordenadas, y_c , esse efeito da falta de modelagem da turbulência é menos latente. As diferenças percentuais deste trabalho em relação às referências foram menores, variando entre 0,01% a 3,41%. Esta maior diferença de 3,14% é verificada na Tabela 04, que trata dos escoamentos com $Re = 1,00$, ao ser comparado com o trabalho de Marques e Doricio(3). E as menores diferenças, com diferenças percentuais iguais a 0,01%,

foram observadas na Tabela 02 e 08, para $Re = 0,10$ e $Re = 50,00$ respectivamente. Esses baixos índices foram encontrados ao realizar as comparações dos dados deste trabalho com os dados do trabalho de Marques e Doricio(3), para $Re = 0,10$. E com os de Patil *et al.* e de Marques e Doricio(3), para os escoamentos com $Re = 50,00$.

6.2 Perfis das componentes das velocidades centrais

Nesta seção serão apresentados os gráficos dos perfis das velocidades ao longo das linhas centrais das cavidades, nas componentes horizontais e verticais, adimensionalizadas pela velocidade imprimida pelo escoamento presente na parede superior da cavidade. Os gráficos possuem as plotagens das velocidades centrais obtidas nesta pesquisa, comparando-as com os dados obtidos nos trabalhos desenvolvidos por Chantasiriwan (2006), Cheng & Hung (2006), Ghia *et al.* (1982), e Marques & Doricio (2006).

Para a plotagem das velocidades centrais deste estudo, inicialmente foram selecionados uma série de pontos localizados em uma faixa igual a Δx entre a linha central vertical, ($x=0,5$), e outra faixa Δy , entre a linha central horizontal, ($y=0,5$). Sendo que $\Delta x = \Delta y = 0,000025$, o que equivale à distância entre os centros de duas partículas reais, quando em repouso. Posteriormente, foram aplicadas as aproximações dos métodos dos mínimos quadrados aos dados selecionados, ajustando-os em uma curva, que foi plotada junto com os dados de referência. A Figura 16 esquematiza uma faixa igual a Δx entre a linha central vertical, ($x=0,5$), e desse setor foi selecionadas determinados pontos, e sobre esses dados foram aplicadas as aproximações dos mínimos quadrados. De forma análoga, foi realizada essa captura de pontos na região central horizontal, em ($y=0,5$). Na Figura 17 foram observadas as velocidades dos pontos em torno da linha central vertical, ($x=0,5$), asteriscos em vermelho (*), antes de ser aplicada a aproximação pelos métodos dos mínimos quadrados.

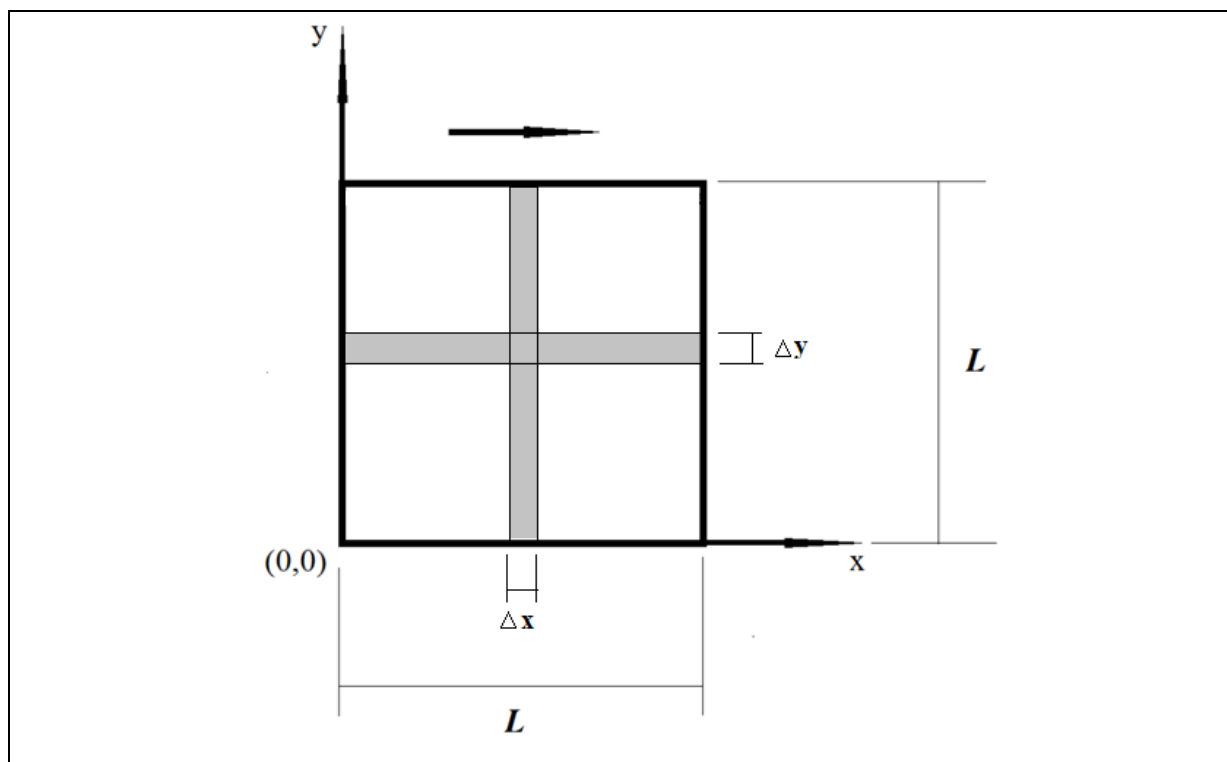


Figura 16 – Faixa Δx em torno da linha central vertical, em $(x=0,5)$, simbolizando a região das capturas as velocidades centrais verticais, e faixa Δy em torno da linha central horizontal, em $(y=0,5)$, simbolizando a região das capturas as velocidades centrais horizontais.

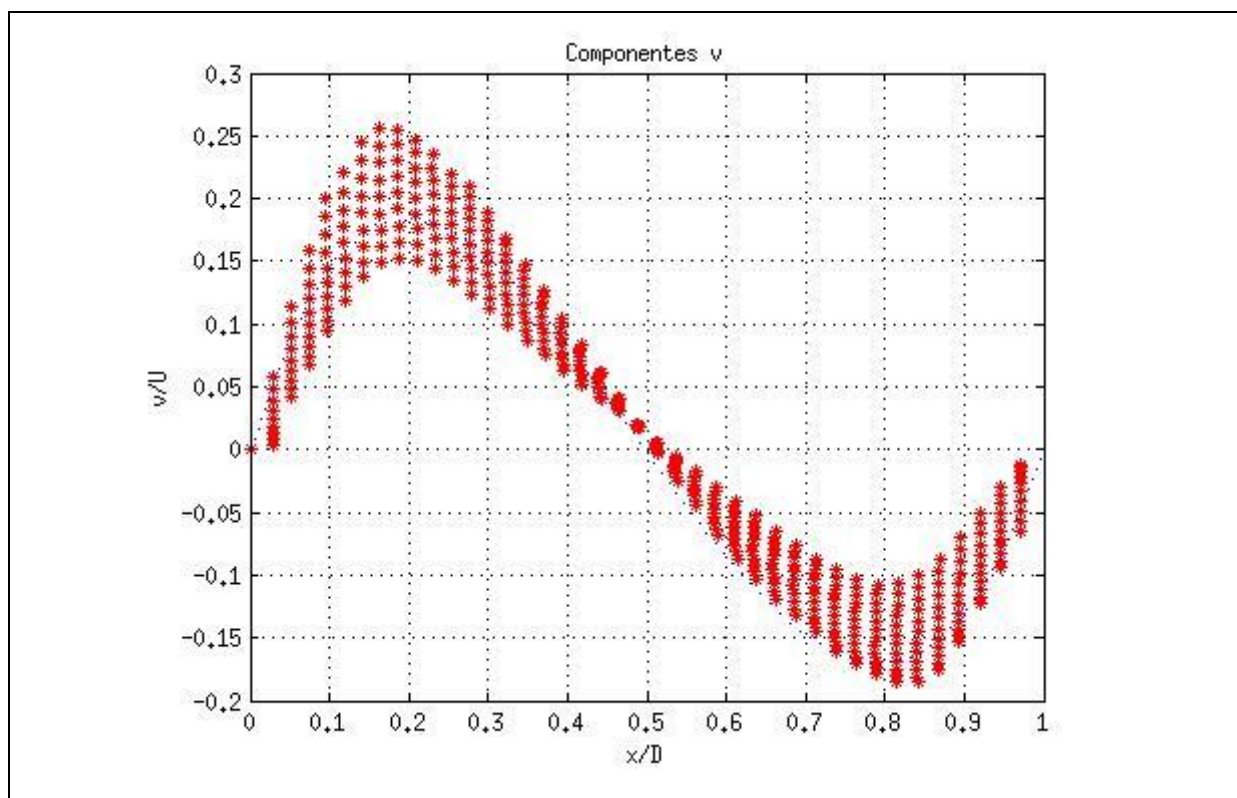


Figura 17 – Plotagem das velocidades dos pontos em torno da linha central vertical, $(x=0,5)$, asteriscos em vermelho (*), antes de ser aplicada a aproximação pelos métodos dos mínimos quadrados.

Os gráficos a seguir, mostrados entre as figuras 18 e 25, apresentam os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais no problema das cavidades, nas posições verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$). As linhas contínuas vermelhas representam os vetores velocidades deste estudo. Essas curvas foram obtidas pelo método dos mínimos quadrados. Os pontos azuis, em forma de asteriscos (*), representam os valores absolutos dos trabalhos usados como referência, conforme apresentados nas fontes originais.

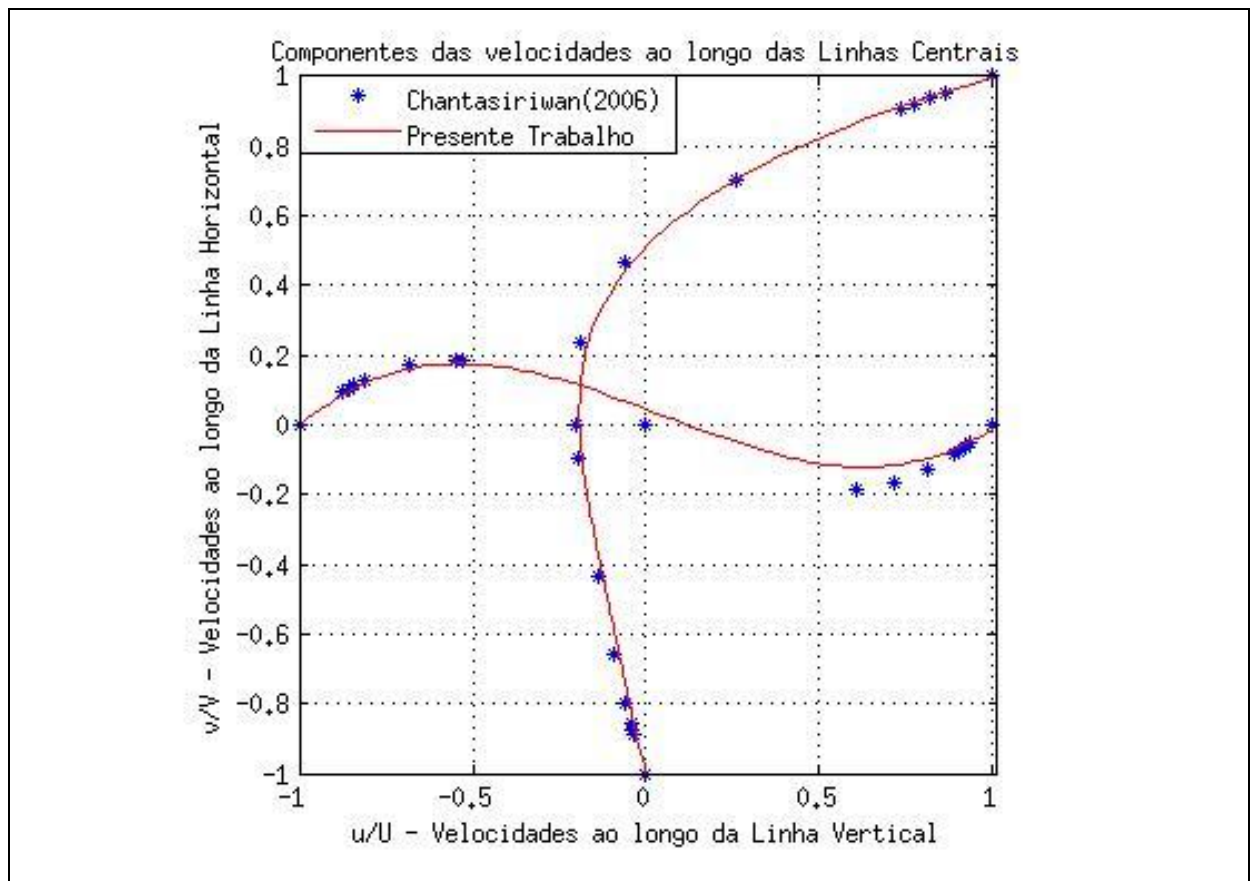


Figura 18 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re \rightarrow 0,00$, Chantasiriwan (2006).

A Figura 18 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais no problema das cavidades abertas, com $Re \rightarrow 0,00$, comparados com os trabalhos

realizados por Chantasiriwan (2006). Para as simulações com número de *Reynolds* “igual” a 0,00 (zero), foi aplicada uma velocidade constante na parede móvel superior, aproximadamente à $0,00\text{m/s}$. Os valores encontrados por Chantasiriwan (2006) são valores analíticos e não numéricos. Diferente das demais referências, que são todas numéricas.

A Figura 19 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais encontradas nas simulações desta pesquisa com $Re=0,01$, sendo comparados com os resultados numéricos realizados por Cheng & Hung (2006). Para as simulações com $Re=0,01$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a 10^{-5}m/s .

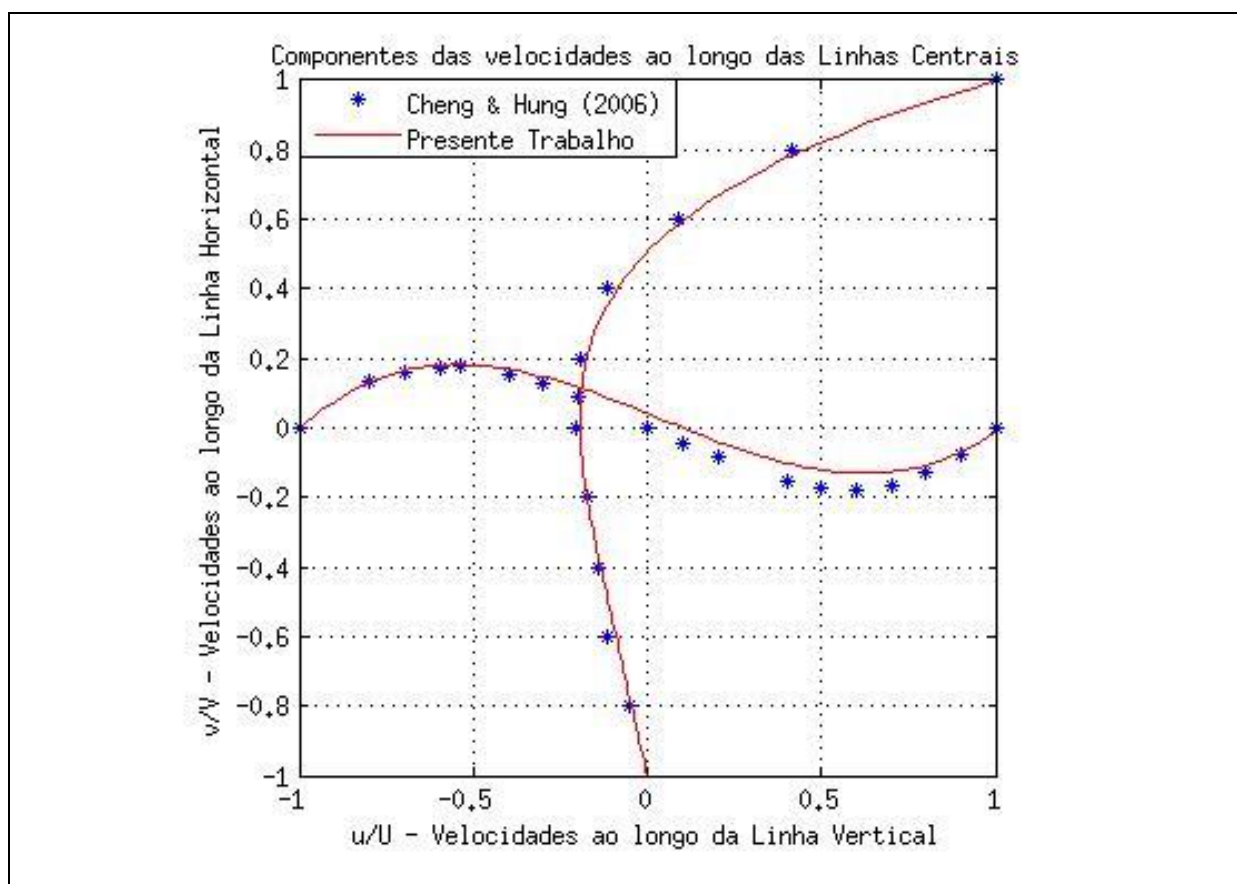


Figura 19– Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=0,01$, Cheng & Hung (2006)

A Figura 20 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais da cavidade, com $Re=0,10$. Foram mostrados os resultados dos estudos realizados por Marques e Doricio (2006)(3). Para as simulações com $Re=0,10$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a $10^{-4} m/s$.

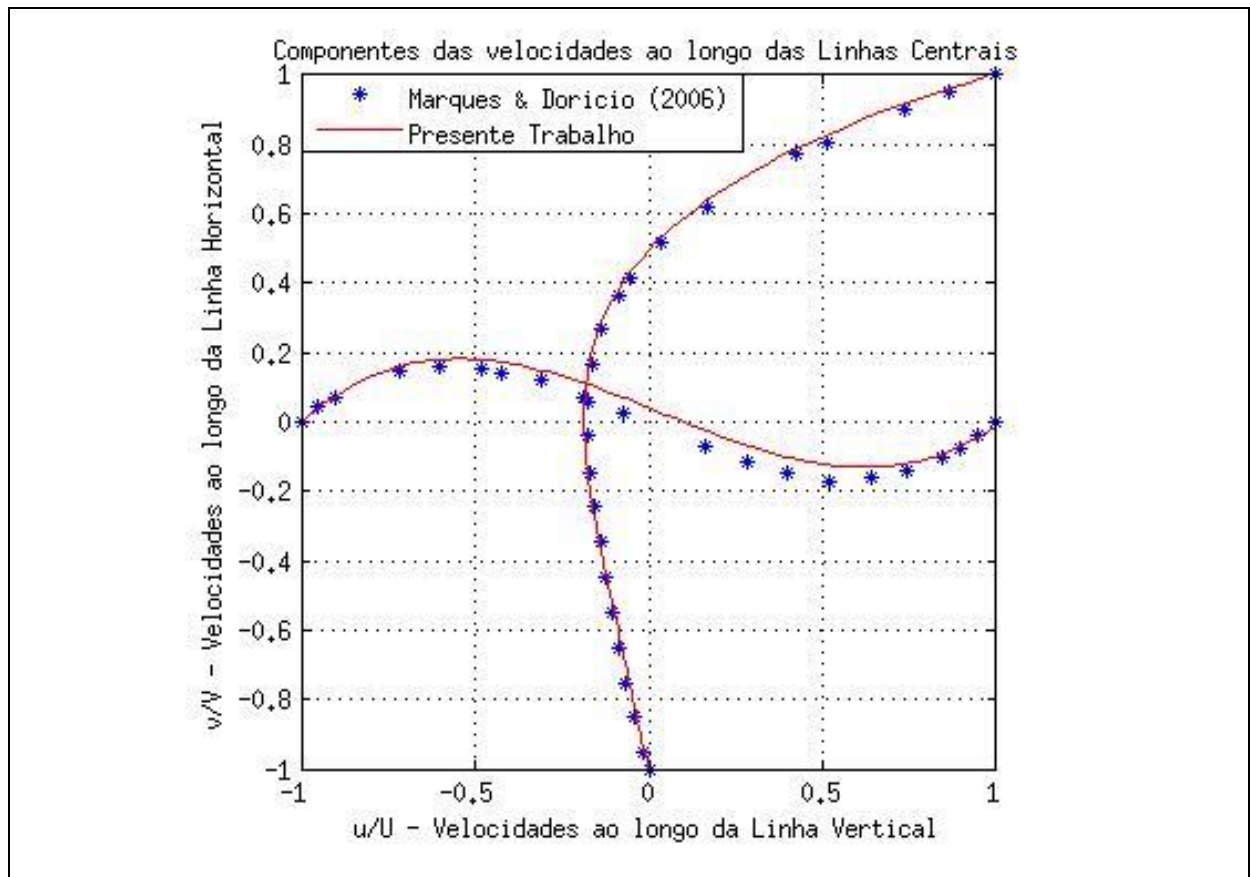


Figura 20 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=0,10$, Marques e Doricio (2006)(3).

A Figura 21 apresenta os perfis das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais da cavidade apresentada, com $Re=10,00$. Nessa figura também foram apresentados os resultados dos estudos realizados por Marques e Doricio (2006)(3). Para as simulações com $Re=10,00$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a $10^{-2} m/s$.

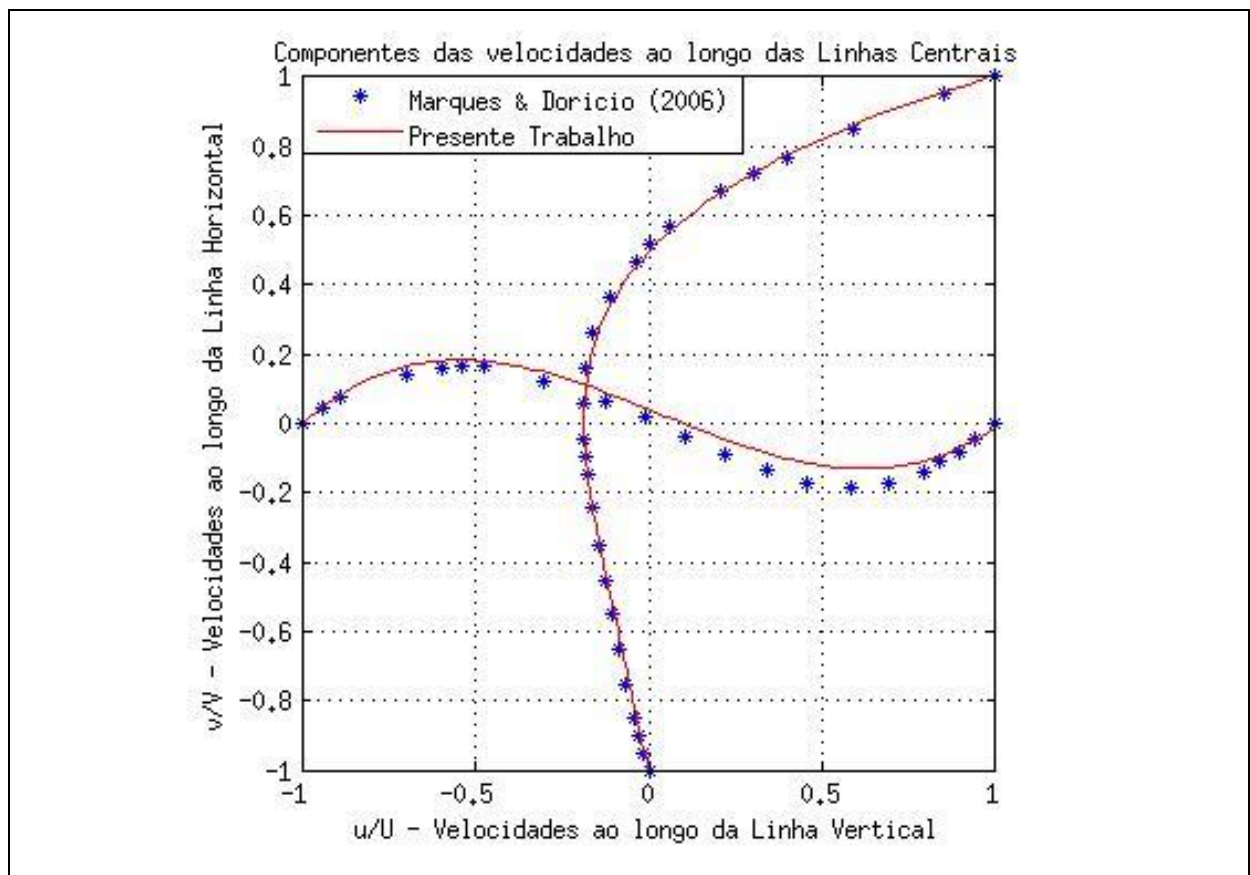


Figura 21 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re = 10,00$, Marques e Doricio (2006).

A Figura 22 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades ao longo de suas respectivas linhas centrais da cavidade, com $Re=50,00$, comparados com os resultados obtidos por Marques e Doricio (2006)(3). Para as simulações com $Re=50,00$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a $10^{-2} m/s$.

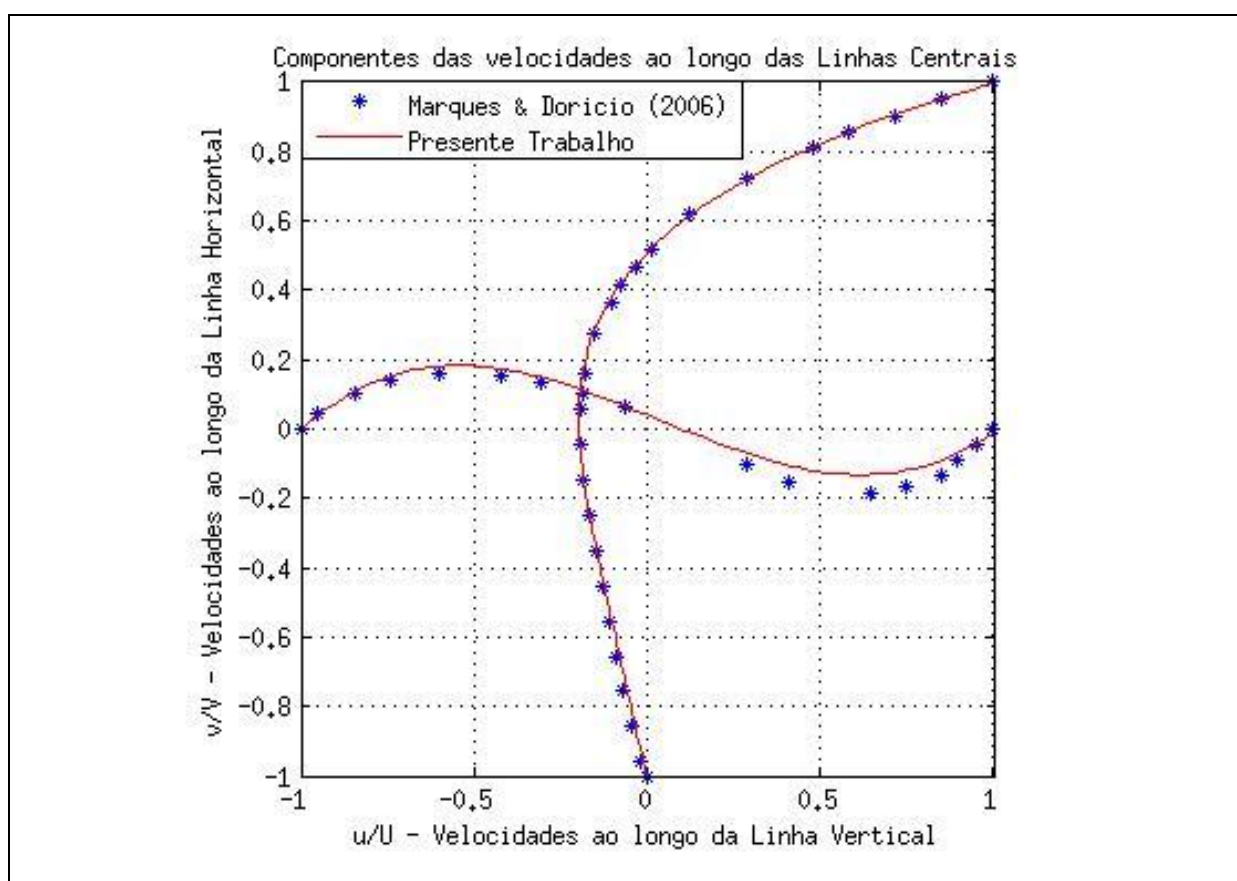


Figura 22 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=50,00$, Marques e Doricio (2006).

Os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades centrais, com $Re=100,00$, foram apresentados pela Figura 23. Então comparados com os estudos realizados por Marques e Doricio (2006)(3). Para as simulações com $Re=100,00$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a $10^{-1} m/s$.

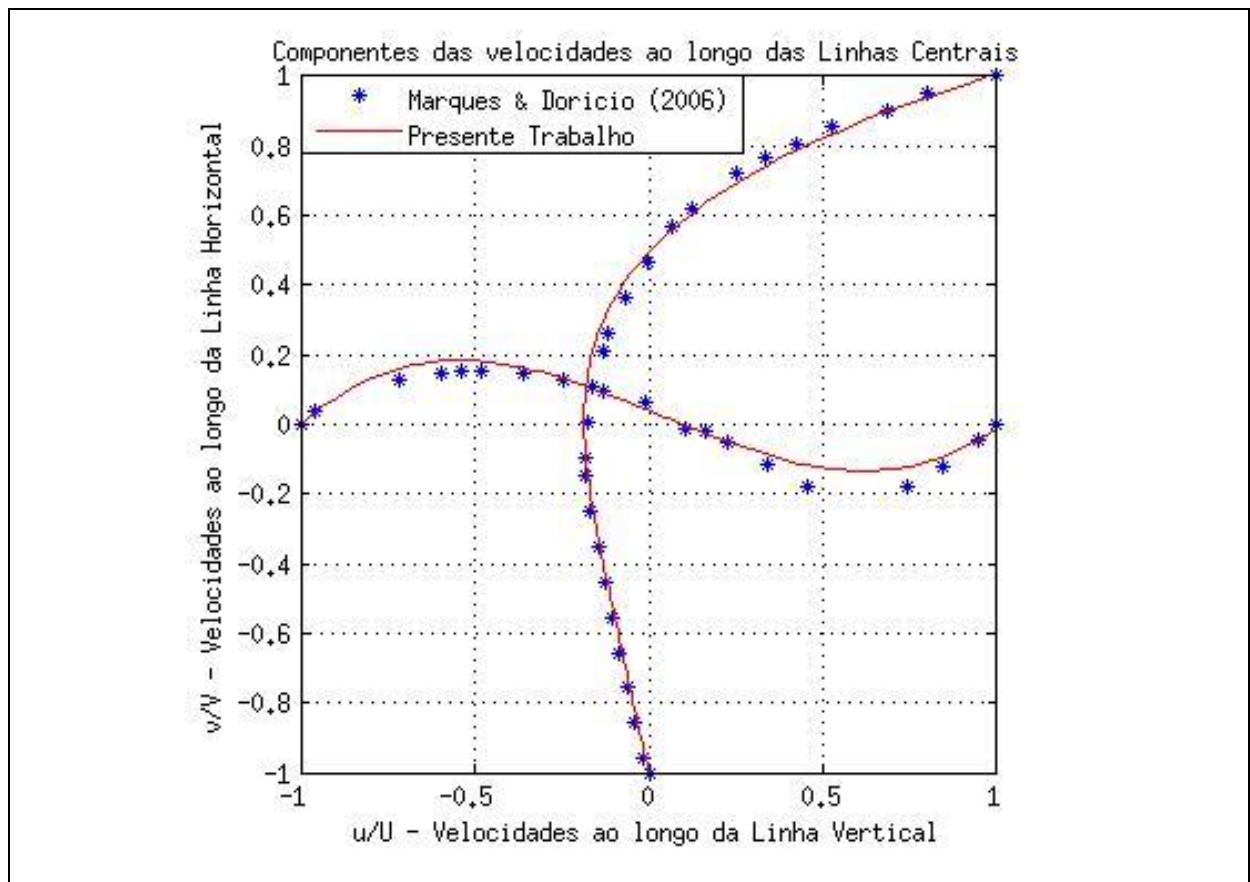


Figura 23 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=100,00$, por Marques e Doricio (2006).

Com uma simulações com $Re=100,00$, a Figura 24 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais centrais comparando-os com os estudos realizados por Ghia *et al.*(1982). Aplicou-se uma velocidade constante igual a $10^{-1}m/s$, na parede superior da cavidade.

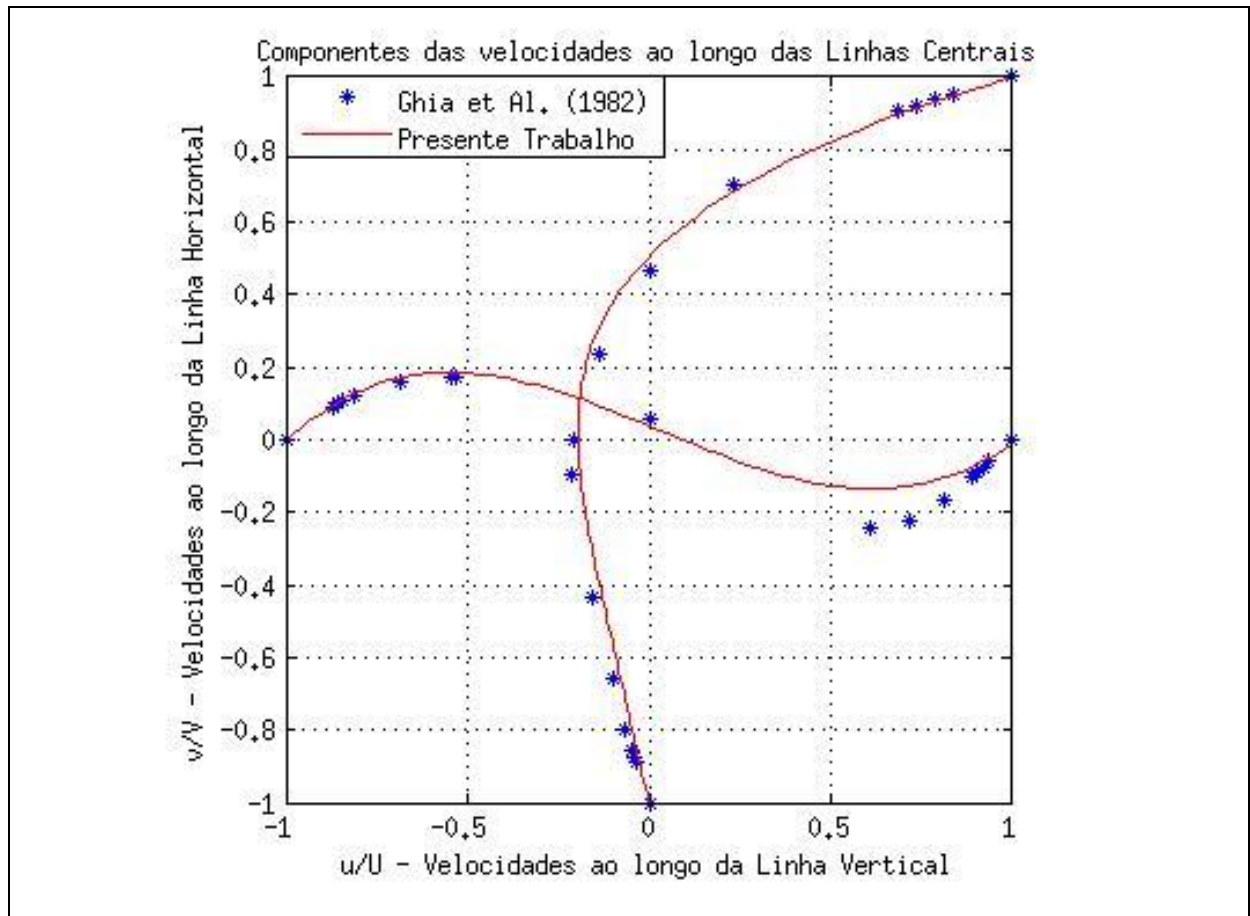


Figura 24 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=100,00$, por Ghia et al.(1982).

Também com $Re=100,00$, a Figura 25 apresenta os perfis adimensionalizados das componentes horizontais e verticais dos vetores velocidades centrais, e apresentou a comparação dos dados deste estudo como os realizados por Yildiz et al.(2008). Para as simulações com $Re=100,00$, foi aplicada uma velocidade constante ao escoamento na parede superior igual a $10^{-1} m/s$.

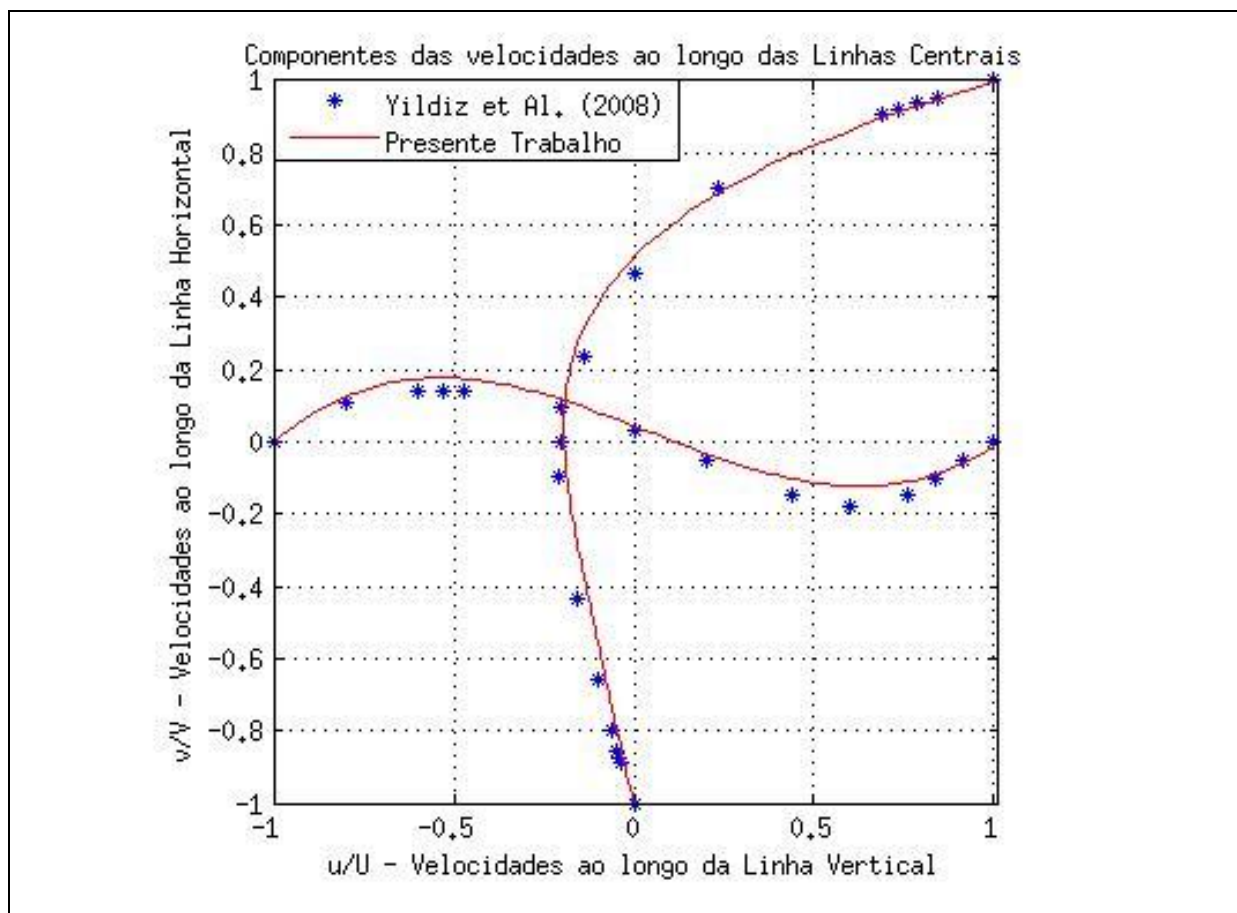


Figura 25 – Perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$), para $Re=100,00$, Yildiz et al.(2008).

Ao serem analisadas as figuras desta seção, observa-se que existem significativas mudanças nos perfis das imagens plotadas, de acordo com a mudança dos números de *Reynolds*. É verificado que com o seu aumento, a discordância entre os dados de referências e os do Presente Trabalho se acentuam.

As velocidades centrais verticais, em $x=0,5$, são bastante influenciadas pelas variações dos números de *Reynolds* nos trabalhos de referências, mesmo com números de *Reynolds* moderados. Esse fato é verificado principalmente na região de “vale” da “curva senoidal” gerada pelos valores das velocidades centrais verticais.

Essa mesma tendência não é verificada com tanta nitidez em relação às velocidades centrais horizontais, em $y=0,5$, havendo uma pequena flutuação entre os desvios, não revelando uma tendência para tais velocidades. Ao serem observadas as de Figuras 18 a 25, verifica-se que esse desvio, mesmo que sob uma ótica mais

qualitativa, é bem menor naquela dimensão. Os valores das referências estão muito mais “próximos” das curvas propostas pelo presente trabalho, mesmo com números de *Reynolds* moderados, como em $Re=100,00$.

Na Figura 25, em $Re=100,00$, Marques e Doricio (2006), esses desvios são menos acentuados que os observados na Figura 26, que também utiliza $Re=100,00$, tendo como referência o tradicional trabalho de Ghia *et al.*(1982). Essas diferenças também foram menos acentuadas ao serem comparadas com os dados dos trabalhos de Yildiz *et al.*(2008), Figura 27, que igualmente utiliza método numérico *SPH* em seu trabalho, para obter as velocidades centrais verticais, contudo com apenas uma distribuição de 31×31 partículas reais na cavidade quadrada.

6.3 Tabelas com os desvios absolutos dos perfis de velocidade para diferentes números de *Reynolds*

Nesta seção serão apresentados os valores absolutos dos vetores velocidade, obtidos das linhas centrais, isto é, dados obtidos também foram ao longo das linhas centrais da cavidade quadrada, nas verticais, em $(x=0,5)$, e nas horizontais, em $(y=0,5)$.

Essas tabelas apresentam os valores deste estudo e das velocidades centrais encontradas nas simulações numéricas de alguns dos trabalhos dos autores de referência, com seus desvios absolutos, encontrados das comparações entre esses dados trabalhos.

Para a confecção das tabelas, foi aplicada a aproximação dos métodos dos mínimos quadrados aos resultados numéricos deste estudo, objetivando ajustar a curva produzida por eles e obter uma expressão que as representassem. De posse dessa expressão, foram substituídas as variáveis dependentes pelos dados de referência, encontrando, os valores interpolados daqueles pontos, referentes a este trabalho. Em sequência, esses dados foram tabelados, juntamente com os dados de referência, posteriormente foram calculados os desvios absolutos em cada ponto de

referência, nas linhas centrais horizontais e verticais. Os desvios absolutos são os módulos das diferenças entre os dados referência e os desse estudo.

Ao verificar-se a Tabela 10, observou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 07, na posição em $x=0,8047$, valendo 0,0379807548. E o menor desvio absoluto foi de 0,00011243844, no ponto 13, na posição $x=0,0781$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,01049.

Tabela 10 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re \rightarrow 0,00$, tendo Chantasiriwan (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados analíticos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9688	-0,05096	-0,04669257	0,0042674274
02	0,9609	-0,06272	-0,05651264	0,0062073620
03	0,9531	-0,07385	-0,06564485	0,0082051526
04	0,9453	-0,08447	-0,07422687	0,0102431317
05	0,9063	-0,12965	-0,10922476	0,0204252400
06	0,8594	-0,16581	-0,13513780	0,0306722023
07	0,8047	-0,18370	-0,14571925	0,0379807548
08	0,5000	0,00000	0,03028750	0,0302875000
09	0,2344	0,18228	0,18511570	0,0028356973
10	0,2266	0,18341	0,18546880	0,0020587999
11	0,1563	0,17352	0,17140400	0,0021160036
12	0,0938	0,12975	0,12883806	0,0009119369
13	0,0781	0,11320	0,11307562	0,0001243844
14	0,0703	0,10415	0,10443378	0,0002837843
15	0,0625	0,09457	0,09524070	0,0006706982

Na Tabela 11, observou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 03, na posição em $y = 0,9609$, valendo 0,047509102. E o menor desvio absoluto foi de 0,005087760, no ponto 05, na posição $y = 0,8516$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,02679. Os dados referenciados nas Tabelas 10 e 11, obtidos do trabalho de Chantasiriwan (2006), são provenientes de soluções analíticas.

Tabela 11 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, com $Re \rightarrow 0,00$, em $x=0,5$, tendo Chantasiriwan (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em y	Resultados analíticos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9766	0,86477	0,81805624	0,046713757
02	0,9688	0,82077	0,77325854	0,047511464
03	0,9609	0,77685	0,72934090	0,047509102
04	0,9531	0,73420	0,68738641	0,046813592
05	0,8516	0,26154	0,25645224	0,005087760
06	0,7344	-0,06245	-0,02673480	0,035715204
07	0,6172	-0,18968	-0,15152030	0,038159704
08	0,5000	-0,20519	-0,17858750	0,026602500
09	0,4531	-0,19577	-0,17287512	0,022894883
10	0,2813	-0,13515	-0,11597566	0,019174337
11	0,1719	-0,09030	-0,07168367	0,018616333
12	0,1016	-0,05855	-0,04364656	0,014903436
13	0,0703	-0,04272	-0,03101022	0,011709785
14	0,0625	-0,03853	-0,02781015	0,010719847
15	0,0547	-0,03423	-0,02458135	0,009648651

Pela análise da Tabela 12, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 05, na posição em $x=0,7500$, valendo 0,037003125. E o menor desvio absoluto foi de 0,001057, no ponto 15, na posição $x= 0,1000$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,020450.

Observou-se na Tabela 13 que o maior desvio absoluto das velocidades foi igual a 0,03842926, encontrado no ponto 04, na posição em $y = 0,7000$. O menor desvio absoluto foi de 0,01059586, no ponto 10, na posição $y = 0,1000$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,02516. Os dados referenciados, obtidos do trabalho de Cheng & Hung (2006) são dados numéricos.

Tabela 12 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re = 0,01$, tendo Cheng & Hung (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9500	-0,075	-0,070510375	0,004489625
02	0,9000	-0,130	-0,113711000	0,016289000
03	0,8500	-0,165	-0,137336125	0,027663875
04	0,8000	-0,177	-0,143920000	0,033080000
05	0,7500	-0,173	-0,135996875	0,037003125
06	0,7000	-0,152	-0,116101000	0,035899000
07	0,6000	-0,086	-0,050528000	0,035472000
08	0,5500	-0,043	-0,009919375	0,033080625
09	0,4000	0,090	0,112784000	0,022784000
10	0,3500	0,126	0,145530125	0,019530125
11	0,3000	0,155	0,169975000	0,014975000
12	0,2300	0,178	0,185426513	0,007426513
13	0,2000	0,174	0,183824000	0,009824000
14	0,1500	0,160	0,168159625	0,008159625
15	0,1000	0,133	0,134057000	0,001057000

Tabela 13 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, com $Re = 0,01$, em $x=0,5$, tendo Cheng & Hung (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em y	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	1,0000	1,000	0,97810000	0,02190000
02	0,9000	0,414	0,44624306	0,03224306
03	0,8000	0,087	0,11221776	0,02521776
04	0,7000	-0,027	-0,07557074	0,03842926
05	0,6000	-0,195	-0,16096144	0,03403856
06	0,5000	-0,204	-0,18003750	0,02396250
07	0,4000	-0,177	-0,16112624	0,01587376
08	0,3000	-0,144	-0,12479914	0,01920086
09	0,2000	-0,114	-0,08387184	0,03012816
10	0,1000	-0,054	-0,04340414	0,01059586

Pela análise da Tabela 14, observou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi de 0,038353062, no ponto 10, na posição em $x = 0,4050$. O menor desvio verificado foi no ponto 16, na posição $x = 0,049$, valendo 0,003226728. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,0173800. Os dados deste estudo foram comparados com os resultados numéricos de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 14 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re = 0,10$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9740	-0,041	-0,04540516	0,004405158
02	0,9490	-0,078	-0,07314865	0,004851351
03	0,9240	-0,100	-0,09559197	0,004408031
04	0,8730	-0,139	-0,12622159	0,012778414
05	0,8210	-0,161	-0,13875198	0,022248018
06	0,7600	-0,170	-0,13308129	0,036918707
07	0,7000	-0,147	-0,11015590	0,036844100
08	0,6410	-0,113	-0,07496820	0,038031801
09	0,5820	-0,068	-0,03129429	0,036705713
10	0,4050	0,072	0,11035306	0,038353062
11	0,3460	0,122	0,14768016	0,025680161
12	0,2870	0,143	0,17334764	0,030347641
13	0,2580	0,154	0,18046329	0,026463285
14	0,1990	0,160	0,18125361	0,021253606
15	0,1390	0,144	0,15978082	0,015780816
16	0,0490	0,073	0,07622673	0,003226728
17	0,0230	0,044	0,03888244	0,005117560

Ao analisar-se a Tabela 15, verificou-se que o desvio absoluto de maior valor, entre as velocidades compradas, foi igual a 0,0522028764, encontrado no ponto 03, na posição em $y = 0,9040$. E o menor desvio absoluto foi encontrado no ponto 15, na posição $y = 0,3260$, sendo igual a 0,0004042994. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,01738. Os dados de referência são resultados numéricos obtidos a partir do trabalho de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 15 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, com $Re = 0,10$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em y	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9760	0,868	0,83577983	0,0322201692
02	0,9520	0,738	0,69786840	0,0401315959
03	0,9040	0,514	0,46179712	0,0522028764
04	0,8850	0,428	0,38182702	0,0461729804
05	0,8110	0,168	0,13398042	0,0340195806
06	0,7600	0,038	0,01396878	0,0240312169
07	0,7090	-0,054	-0,07208240	0,0180824040
08	0,6830	-0,088	-0,10480173	0,0168017285
09	0,6330	-0,138	-0,14988074	0,0118807427
10	0,5820	-0,164	-0,17577712	0,0117771180
11	0,5300	-0,174	-0,18593314	0,0119331446
12	0,4800	-0,176	-0,18409752	0,0080975183
13	0,4280	-0,168	-0,17360058	0,0056005814
14	0,3770	-0,154	-0,15765640	0,0036564007
15	0,3260	-0,138	-0,13840430	0,0004042994
16	0,2750	-0,124	-0,11755607	0,0064439337
17	0,2240	-0,104	-0,09626651	0,0077334862
18	0,1730	-0,084	-0,07513348	0,0088665218
19	0,1230	-0,066	-0,05460880	0,0113912007
20	0,0740	-0,044	-0,03421908	0,0097809169
21	0,0240	-0,016	-0,01215792	0,0038420765

Pela visualização e entendimento da Tabela 16, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 06, na posição em $x = 0,7925$, igual a 0,044385366. E o menor desvio foi verificado no ponto 19, na posição $x = 0,0270$, igual a 0,004731154. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,04216. Os dados deste estudo foram conflitados com os resultados numéricos de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 16 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re=10,00$, tendo Marques e Doricio(2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9713	-0,042	-0,04735616	0,005356163
02	0,9475	-0,081	-0,07314943	0,007850575
03	0,9215	-0,107	-0,09629508	0,010704920
04	0,8975	-0,140	-0,11315975	0,026840245
05	0,8463	-0,173	-0,13571604	0,037283964
06	0,7925	-0,186	-0,14161463	0,044385366
07	0,7300	-0,172	-0,12896505	0,043034950
08	0,6700	-0,134	-0,10080506	0,032894942
09	0,6113	-0,092	-0,06180980	0,030190197
10	0,5525	-0,041	-0,01532572	0,025674283
11	0,4938	0,019	0,03471519	0,015615193
12	0,4363	0,061	0,08321623	0,022216234
13	0,3488	0,122	0,14711434	0,025114340
14	0,2613	0,164	0,18612518	0,022125185
15	0,2300	0,167	0,19114409	0,002414409
16	0,2013	0,161	0,19062959	0,029929589
17	0,1500	0,143	0,17569679	0,033196788
18	0,0550	0,077	0,09057510	0,014075095
19	0,0270	0,044	0,04873115	0,004731154

Na Tabela 17, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 07, na posição em $y = 0,7590$, valendo 0,025786060. O menor desvio absoluto foi encontrado no ponto 15, na posição $y = 0,4280$, valendo 0,001677281. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,0111140. Os dados de referência são resultados numéricos verificados no trabalho de Marques e Doricio (2006).

Tabela 17 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, para $Re = 10,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em y	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9750	0,850	0,83065865	0,019341354
02	0,9250	0,588	0,56828327	0,019716729
03	0,8830	0,402	0,38755731	0,014442689
04	0,8610	0,302	0,30594448	0,003944478
05	0,8350	0,210	0,22012720	0,010127203
06	0,7850	0,062	0,08452263	0,022522629
07	0,7590	0,002	0,02778606	0,025786060
08	0,7330	-0,038	-0,02051606	0,017483938
09	0,6830	-0,114	-0,09231772	0,021682278
10	0,6310	-0,160	-0,14184408	0,018155918
11	0,5810	-0,184	-0,16978021	0,014219789
12	0,5300	-0,190	-0,18250013	0,007499865
13	0,4790	-0,188	-0,18294367	0,005056326
14	0,4520	-0,184	-0,17932365	0,004676350
15	0,4280	-0,176	-0,17432272	0,001677281
16	0,3770	-0,164	-0,15937997	0,004620026
17	0,3250	-0,144	-0,13998904	0,004010965
18	0,2740	-0,124	-0,11872496	0,005275037
19	0,2240	-0,106	-0,09701027	0,008989734
20	0,1730	-0,086	-0,07482370	0,011176303
21	0,1240	-0,066	-0,05383998	0,012160018
22	0,0740	-0,044	-0,03270739	0,011292608
23	0,0500	-0,028	-0,02253743	0,005462573
24	0,0240	-0,014	-0,01136941	0,002630590

Ao ser analisada a Tabela 18, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi de 0,0461233859, encontrado no ponto 05, na posição em $x = 0,8225$. E o menor desvio foi verificado no ponto 15, na posição $x = 0,0238$, igual a 0,004212511. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,0198200. Os dados do Presente Trabalho foram comparados com os resultados numéricos de Marques e Doricio (2006)(3).

Depois da análise da Tabela 19, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 02, na posição em $y = 0,9520$, com um valor igual a 0,020591954. E o menor desvio absoluto foi de 0,004249222, encontrado no ponto 04, na posição $y = 0,9050$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,012490. Os dados de referência são resultados numéricos verificados no trabalho de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 18 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re = 50,00$, tendo Marques e Dorcio(2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9775	-0,042	-0,03964704	0,0023529561
02	0,9500	-0,087	-0,07101913	0,0159808725
03	0,9275	-0,133	-0,09212224	0,0408777590
04	0,8763	-0,164	-0,12587709	0,0382229104
05	0,8225	-0,188	-0,14187661	0,0461233859
06	0,7038	-0,155	-0,11981823	0,0351817666
07	0,6438	-0,101	-0,08598758	0,0150124202
08	0,4663	0,061	0,05634357	0,0046564260
09	0,4075	0,101	0,10381683	0,0028168314
10	0,3475	0,133	0,14522426	0,0122242607
11	0,2888	0,152	0,17439938	0,0223993755
12	0,2000	0,157	0,18710016	0,0301001600
13	0,1275	0,141	0,15965778	0,0186577837
14	0,0775	0,104	0,11584452	0,0118445168
15	0,0238	0,043	0,04212511	0,0008748903

Tabela 19 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, com $Re = 50,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Dorcio (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posições em y	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9770	0,854	0,83902852	0,014971478
02	0,9520	0,720	0,69940805	0,020591954
03	0,9270	0,580	0,57364926	0,006350739
04	0,9050	0,478	0,47375078	0,004249222
05	0,8620	0,290	0,30533749	0,015337487
06	0,8100	0,124	0,14415810	0,020158097
07	0,7590	0,010	0,02506413	0,015064127
08	0,7340	-0,034	-0,02105013	0,012949866
09	0,7080	-0,076	-0,06140680	0,014593196
10	0,6830	-0,104	-0,09355012	0,010449883
11	0,6380	-0,154	-0,13686373	0,017136274
12	0,5810	-0,180	-0,16920909	0,010790915
13	0,5300	-0,192	-0,18129705	0,010702949
14	0,4780	-0,192	-0,18125593	0,010744075
15	0,4270	-0,184	-0,17236369	0,011636311
16	0,3760	-0,168	-0,15744996	0,010550044
17	0,3230	-0,148	-0,13795937	0,010040629
18	0,2730	-0,128	-0,11756416	0,010435841
19	0,2220	-0,110	-0,09597986	0,014020140
20	0,1710	-0,088	-0,07433615	0,013663851
21	0,1220	-0,068	-0,05371498	0,014285016
22	0,0720	-0,044	-0,03262458	0,011375419
23	0,0220	-0,018	-0,01080684	0,007193157

Após a análise dos dados da Tabela 20, observou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi encontrado no ponto 03, na posição em $x = 0,8730$, com um valor igual a 0,05132171. E o menor desvio foi 0,005660646, no ponto 08, na posição $x = 0,5530$. Esses desvios absolutos possuem uma média igual a 0,0234300. Os dados deste estudo foram comparados com os resultados numéricos de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 20 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central horizontal, em $y=0,5$, com $Re= 100,00$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência.

Nº Pontos	Posição em x	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9740	-0,042	-0,03596986	0,0060301368
02	0,9230	-0,120	-0,09268949	0,0273105080
03	0,8730	-0,178	-0,12667829	0,0513217100
04	0,7300	-0,179	-0,12913881	0,0498611867
05	0,6710	-0,116	-0,09967636	0,0163236378
06	0,6120	-0,051	-0,05872469	0,0077246875
07	0,5820	-0,019	-0,03486878	0,0158687849
08	0,5530	-0,010	-0,01056606	0,0005660646
09	0,4940	0,061	0,04051723	0,0204827688
10	0,4360	0,099	0,08943501	0,0095649918
11	0,3760	0,126	0,13432874	0,0083287397
12	0,3180	0,145	0,16801960	0,0230195995
13	0,2590	0,152	0,18825526	0,0362552613
14	0,2290	0,151	0,19175165	0,0407516486
15	0,2000	0,150	0,19007680	0,0400768000
16	0,1410	0,127	0,16920194	0,0422019402
17	0,0200	0,040	0,03729776	0,0027022392

Ao analisar a Tabela 21, verificou-se que o maior desvio absoluto das velocidades foi de 0,03410357, observado no ponto 02, na posição em $y = 0,8840$. E o menor desvio absoluto foi encontrado no ponto 22, na posição $y = 0,0720$, igual a 0,00004873. Esses desvios absolutos possuem uma média igual à 0,0139300. Os dados de referência são resultados numéricos do trabalho de Marques e Doricio (2006)(3).

Tabela 21 – Valores absolutos das velocidades adimensionalizadas ao longo da linha central vertical, com $Re = 100,00$, em $x=0,5$, tendo Marques e Doricio (2006) como trabalho de referência

Nº Pontos	Posição em y	Resultados numéricos de referência	Presente trabalho	Desvios absolutos
01	0,9760	0,802	0,78744317	0,01455683
02	0,9520	0,688	0,65389643	0,03410357
03	0,9270	0,528	0,52948793	0,00148793
04	0,9040	0,428	0,42738437	0,00061563
05	0,8840	0,334	0,34758238	0,01358238
06	0,8620	0,254	0,26881905	0,01481905
07	0,8100	0,124	0,11657044	0,00742956
08	0,7850	0,066	0,05851853	0,00748147
09	0,6830	-0,068	-0,09668507	0,02868507
10	0,6320	-0,118	-0,13592256	0,01792256
11	0,6050	-0,132	-0,14897203	0,01697203
12	0,5540	-0,164	-0,16210403	0,00189597
13	0,5030	-0,178	-0,16369244	0,01430756
14	0,4520	-0,180	-0,15731629	0,02268371
15	0,4260	-0,182	-0,15196318	0,03003682
16	0,3760	-0,170	-0,13913567	0,03086433
17	0,3240	-0,146	-0,12380761	0,02219239
18	0,2730	-0,124	-0,10804386	0,01595614
19	0,2220	-0,106	-0,09211482	0,01388518
20	0,1720	-0,084	-0,07622488	0,00777512
21	0,1220	-0,062	-0,05932286	0,00267714
22	0,0720	-0,040	-0,04004873	0,00004873
23	0,0220	-0,016	-0,01642220	0,00042221

Ao fim da apresentação das tabelas dessa seção, observa-se que os desvios máximos absolutos das velocidades verticais, obtidas ao longo da linha central horizontal da cavidade, em $y=0,5$, aumentam de acordo com o aumento dos números de *Reynolds*. Para $Re = 0,01$, esse desvio máximo foi de 0,03700, na posição $x=0,7500$. Para $Re = 10,00$, esse desvio máximo é de 0,04439, no ponto $x=0,7925$. Para $Re = 100,00$, esse desvio máximo já alcança o valor de 0,05132, no ponto $x = 0,8730$. Verifica-se que esses desvios absolutos tendem a serem maiores entre as posições $x= 0,700$ e $x= 0,900$, região que representa o “vale” da curva “senoidal” que a plotagem das velocidades centrais verticais tende a representar, conforme pode ser observado nas Figuras de números 18 a 25, demonstrando a limitação do Presente Trabalho com escoamentos com números de *Reynolds* mais elevados.

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo descreverá as conclusões deste trabalho, citando suas potencialidades e limitações, incluindo as recomendações para estudo futuros, sugerindo um aperfeiçoamento no código empregado.

7.1 Conclusões

Neste estudo foi aplicado o método numérico, sem malhas, baseado em partículas, denominado *SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics)*. Um código na linguagem computacional *FORTRAN 90* foi utilizado para solucionar as equações de Navier-Stokes.

O problema clássico da literatura da dinâmica dos fluidos computacional, denotado como “problema da cavidade quadrada bidimensional (*Shear-Driven Cavity Flow*)”, foi estudado com a intenção de verificar o comportamento do código numérico em relação aos resultados específicos já existentes do assunto. O citado problema físico das cavidades abertas é amplamente empregado como *Benchmark*, visando a validação do método numérico utilizado no trabalho desenvolvido na pesquisa.

Os resultados desenvolvidos obtidos nesta pesquisa foram comparados com dados de trabalhos de outros autores, como os de Tuann (1978), Ghia *et al.*(1982), Scheiber & Keller(1983), Cheng & Hung (2006), Marques e Doricio (2006), Patil *et al.*(2006), Chantasiriwan (2006), Sheng *et al.*(2008), Yildiz *et al.*,(2008), De *et al.*(2009) e Golbert (2009).

Esse trabalho de análise e validação do código numérico foi dividido em três seções: a primeira lista as localizações dos centros dos vórtices principais gerados pelo escoamento na aresta superior das cavidades; a segunda plota os perfis das componentes das velocidades centrais das cavidades; e a terceira: lista os desvios absolutos dos perfis das velocidades centrais do presente trabalho ao serem comparados com outros estudos.

Inicialmente foram apresentadas várias tabelas com as localizações dos centros dos vórtices principais de diversos trabalhos de referência, os quais foram gerados por escoamentos em cavidades quadradas com distintos números de *Reynolds*. A partir da análise dos resultados obtidos, o menor desvio foi de 0,79%, após comparações com os dados do trabalho de Marques e Doricio (2006), para $Re=25,00$. O maior desvio percentual atingindo foi de 13,70%, com escoamento com $Re=100,00$, esse índice também foi verificado ao comparado com o trabalho de Marques e Doricio (2006).

Posteriormente foram analisadas as figuras entre os números 18 e 25, que trataram dos perfis de velocidades das linhas centrais nas componentes verticais ($x=0,5$) e horizontais ($y=0,5$). Foi observado que o aumento dos desvios entre os dados comparados ocorrem com o aumento dos números de *Reynolds*. A discordância entre os dados de referências e os do presente trabalho se acentuam com maior relevância na faixa de $Re=100,00$. Esse desvio qualitativo é verificado com maior intensidade quando os dados do presente trabalho são comparados com os dados do trabalho de Ghia *et al.*(1982), principalmente entre as velocidades centrais verticais.

Seguindo as análises, foram apresentadas tabelas que trataram dos desvios absolutos entres os dados : verificou-se, novamente, que com o aumento dos números de *Reynolds*, os desvios máximos absolutos das velocidades centrais aumentaram. Verificou-se que esses desvios absolutos entre as velocidades centrais verticais tendem a serem maiores, entre as posições $x= 0,700$ a $x= 0,900$.

Verificou-se que os resultados numéricos obtidos após aplicação do método *SPH* à modelagem matemática dos problemas das cavidades mostrou boa concordância com os resultados da literatura (analíticos e numéricos, empregando outras técnicas). Melhores resultados foram alcançados para baixos números de *Reynolds*.

Desta maneira, o código numérico proposto foi validado e evidenciou-se a boa aplicabilidade do método de interpolação numérico *SPH* para baixos números de *Reynolds*. Em síntese, conclui-se que o código numérico é adequado para a solução

do problema das cavidades com *Reynolds* abaixo de 100,00, com a razão de aspecto igual a 1.

7.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

Pelos resultados satisfatórios encontrados neste estudo, o qual obteve boa acurácia nas simulações proposta, acredita-se que este trabalho é promissor. Sugere-se aplicação do *SPH* a outros fenômenos físicos, sempre buscando uma maior precisão, e a implementação da modelagem da turbulência e dos efeitos das recirculações. Além da resolução da equação de Poisson, para determinar um campo de pressão, realizando implementações de novas condições de contorno, como a inserção de partículas virtuais espalhadas no interior das cavidades e o aumento dos números de partículas reais no interior das cavidades.

8 REFERÊNCIAS

ALVES, J.F.B. **Uma Análise Comparativa dos Principais Métodos Baseados em Partículas para Simulação de Escoamentos**. 2008. 96p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.

AYDIN, M.; FENNER, T. Boundary element analysis of driven cavity flow for low and moderate *Reynolds* numbers, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 37: p. 45–64, 2001.

BABU, V.; KORPELA, K.A. Numerical simulation of the incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations. **Computers & Fluids**, v.23, n.5, p.675-691, 1994.

BATHE, L.J. The key challenges in Computational Mechanics. **IACM - International Association for Computational Mechanics Expressions**, n.14, oct. 2003.

BECKER, M.; TESCHNER, M. Weakly Compressible *SPH* for Free Surface Flows, Proc. **ACM SIGGRAPH / Eurographics SCA**, San Diego, USA, p. 63-72, Aug. 3-4, 2007.

BENJAMIN, A.S., DENNY, V.E. On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large *Re*. **Journal of Computational Physics**, v 33. p. 340–358, 1979.

BURGGRAF, O.R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, **Journal of Fluid Mechanics**, v 24, p.113–115, Jan. 1966.

BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. Thompson, 2001; 736p

CASTRO SANTOS, L. C. **Métodos Numéricos Para Escoamentos Em Alta Velocidade**. IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 22º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1999.

CHANTASIRIWAN, S. Performance of Multiquadric Collocation Method in Solving Lid-driven Cavity Flow Problem with Low *Reynolds* Number. **Computer Modeling In Engineering & Sciences**, v.15, n.3, p. 137-146, oct. 2006.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. McGrawHill. 5 ed. 2008. 832 p.

CHEN,S.;TÖLKE,J;KRAFCZYK,M. A new method for the numeral solution of vorticity-streamfunction formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, p. 367–376, 15 dec. 2008.

CHENG, M; HUNG, K.C. Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity. **Computers & Fluids**, v.35, p.1046–1062. dec. 2006.

CHOW, P. A.; CROSS, M.; PERICLEUS, K. Natural extension of the conventional finite volume method into polygonal unstructured meshes for CFD application. **Applied Mathematical Modeling**, v.20, p.170-183, Feb. 1996.

DE, S.; NAGENDRA, K.; LAKSHMISHA, K.N. Simulation of laminar flow in a three-dimensional lid-driven cavity by lattice Boltzmann method. **International Journal of Numerical Methods of Heat & Fluid Flow**, v.19, p. 790–815, 2009.

DESBRUN, M.; GASCUEL, M. Smoothed particles: a new paradigm for animating highly deformable bodies. In: **Proceedings of the Eurographics workshop on Computer animation and simulation '96**. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., p. 61–76. ISBN 3-211-82885-0, 1996.

ELDHO, T.I.; YOUNG D. Solution of Stokes Flow Problem Using Dual Reciprocity Boundary Element Method. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v. 24, n. 2, p. 141-150, 2001.

FARIA, J. **Simulação N Corpos, Passagem Próxima de dois Sistemas Planetários**, Departamento de Física e Astronomia, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Astronomy & Astrophysics manuscript , nº 02, 2012.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.;PRITCHARD,P.J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2006. 798 p.

FRIGO, L.M. **Simulação Numérica de escoamentos Incompreensíveis Tridimensionais Turbulentos e em Transição**. 2004. 139p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”.

FULK, D.A. **A Numerical Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics**, Air Force Institute of Technology, Thesis PhD, 1994.

GHIA, U.; GHIA, K.N.; SHIN, C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p.387-411, Jan. 1982.

GINGOLD, R.A.; MONAGHAN, J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics - Theory and application to non-SPHERical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 181, p. 375–389, nov. 1977.

GOLBERT, D. R. **Modelo de Lattice-Boltzmann Aplicados à simulação Computacional do escoamento de Fluidos Incompressíveis**, Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional – Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis- do Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado, 2009.

GONÇALVES, N.D.F. **Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas**. Departamento de Matemática Aplicada / Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, Dissertação de Mestrado, 2007.

GÓES, J.F. **Resolução numérica de escoamentos compressíveis empregando um método de partículas livre de malhas e o processamento me paralelo (CUDA)**. Instituto Politécnico do Rio de Janeiro, Centro de Tecnologia e Ciências, Nova Friburgo, UERJ, Dissertação de Mestrado, 2011.

GRIEBEL, M.; DORNSEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. **Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction**. SIAM. Philadelphia, 217 p. 1998.

GUEDES, C.M.C.F.F.M. **Métodos sem malhas em Problemas de Mecânica Computacional. Aplicação a Processos de Enformação Plástica**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal, Tese de Doutorado, 2006.

KELAGER, M. **Lagrangian Fluid Dynamics Using Smoothed Particle hydrodynamics**. Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, 2006.

HAK, M.G. **Stokes's Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid**. Journal of Fluids Engineering, 117, nº 1, p. 3–5, 1995.

HONGBIN J. ; XIN, D. **On criterions for SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS kernels in stable field**. Journal of Computational Physics, 202, pp. 699–709, 2005.

LI, S.; LIU, W.K. **Meshfree and particle methods and applications** Applied Mechanics Reviews, v 55, nº 1, January 2002.

LAM, K.Y.; LIU, G.R.; LIU, M.B. **Constructing smoothing functions in SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS with applications**. Journal of Computational and Mathematics, 155 (2), p. 263-284, 2003.

LIU, G.R.; LIU, M.B, **Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method**. World, Scientific Publishing , 2003.

LIU, G.R.; LIU, M.B, **Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments**. Arch Comput Methods Eng (2010) 17: 25–76, 2010

LIU, W.; SUKKY., J.; ZHANG Y. F., **Reproducing *kernel* particle methods** . **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 20(8-9):1106, 1995.

LUCY, L. B. **A numerical approach to testing the fission hypothesis**. v. 82, n. 12, p. 1013–1924, dez. 1977.

MARQUES, A.C. **Desenvolvimento de Modelo Numérico utilizando o Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas**. 2005. 93p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo.

MARQUES, A.C.H. ; DORICIO, J. L. **O Problema da Cavidade Bidimensional: Solução de Fluxo Incompressível através dos Métodos de Volumes Finitos e Meshless**. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005, São Paulo.

MARQUES, A.C.H. ; DORICIO, J. L. Numerical investigation of the flow in a two-dimensional cavity: Meshless, Finite Volumes and Finite Difference Methods. **Latin American Journal of Solids and Structures**. v.3,p. 301-324, 2006.

MENDES, M.L.; **Utilização do Método da Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas Aplicado NA Resolução de Problemas Eletromagnéticos**. 2010. 74p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.

MEGA, E.F.; **Estudo Experimental do Escoamento em Cavidades Abertas utilizando um canal de Superfície Livre**. 2009. 96p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”.

MEGA, E.F.; MANSUR, S. S.; VIEIRA, E.D.R. **Visualização Experimental de Escoamentos no Interior de Cavidades Abertas**. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 16º POSMEC – Simpósio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2006.

MILLER, G.; PEARCE A. Globular dynamics: A connected particle system for animating viscous fluids. **Computer and Graphics** , n.13, v.3, p. 305-309, 1989.

MONAGHAN J. J. An introduction to *SPH*. **Computer Physics Communications**, v. 48, p.89-96, 1988.

MONAGHAN, J.J. Simulating free surface flows with *SPH*. **Journal of Computational Physics**, v.110, p. 399-406, 1994.

MONAGHAN, J.J.; LATANZIO J. Shock simulation by the particle method *SPH* . **Journal of Computational Physics**, v.52, (2), p. 374–389,1983.

MONAGHAN, J.J.; LATANZIO J. A refined particle method for astrophysical problems. **Astronomy and Asrophysics** , v.149(1), p. 135 – 143, 1985

MORRIS J. P.; FOX, P.J.; ZHU, Y. Modeling low *Reynolds* Number Incompressible flows using *SPH*. **Journal of Computation Physics**, v. 136, p. 214-226, 1997.

MORRIS J. P.. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. **International Journal for Numericalal Methods in Fluids**, v.33 (3), p. 333–353, 2000.

MULLER, M.; CHARYPAR, D.; GROSS, M. **Particle-based fluid simulation for interactive applications**. In: SCA '03: Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2003. p. 154–159. ISBN 1-58113-659-5.

NAKAMURA, F. I. , **Animação Interativa de Fluido baseada em Partículas pelo Método *SPH***.2007. 64p. Dissertação (Mestrado em Informática) - Programa de pós Graduação em Informática, Departamento de Informática Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

PAIVA NETO, A. **Uma abordagem Lagrangeana para simulações de fluidos viscoplásticos e multifásicos**. 2007. 84p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PAIVA NETO, A.; PETRONETTO, F.; TAVARES, G.; LEWINER, T. **Simulação de Fluidos sem Malha: Uma Introdução ao Método *SPH***. IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2009.

PATIL, D.V.; LAKSHMISHA, K.N.; ROGG B. Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in deep cavities. **Computers & Fluids**, v.35, p.1116–1125, 2006.

PEGDEN, C.D. *et al.* **Introduction to simulation using SIMAN**. NY: McGraw-Hill, 2^a ed, 1990.

PERIC, M.; KESSLER, R.; SCHEUERER, G. Comparasion of finite-volume numericalal methods with staggered and collocated grids. **Computers & Fluids**, v.16, n.4, p. 389-403, 1988.

QUEIROZ, T.E. **Animação Computacional de Escoamento de Fluidos utilizando o Método SPH**. 2008. 95p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Programa de pós Graduação do Instituto de Ciências Matemáticas e Computacional, Universidade de São Paulo.

RANDLES P.W.; LIBERSKYB, L.D. Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, Issues 1–4, p. 375–408, 1996.

REEVES, W. T. Particle systems — A technique for modeling a class of fuzzy objects. **ACM Transactions on Graphics**, v. 2(2), p. 91–108, 1983.

SCHEIBER, R.; KELLER, H.B. Driven cavity flows by efficient numeral techniques. **Journal of Computational Physics**, v 49, p. 310-333, 1983.

SCHOENBERG, I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. **Quart. Appl. Math.**, vol. 4, pp. 45–99 and 112–141, 1946.

STEWART, J. Cálculo, Volume 2 . 5 Ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2006. 1164 p.

TUANN, S; OLSON, M. D. Numericalal Studies of the flow around a circular cylinder by a Finite Element Method. **Computers and Fluids**, v. 6, p. 219-240, 1978.

YILDIZ, M.; ROOK, R. A.; SULEMAN, A. SPH with multiple boundary tangent method. **International Journal for Numericalal Methods in Engineering**. v. 77, p. 1416 – 1438, 2008.

9 ANEXOS

ANEXO A - Continuidade de uma Função

Consideremos $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, e a um ponto de acumulação de D_f que pertence a D_f .

Diz então que a **função** f é **continua em** a se o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Diz então que a **função** f é **continua se** f é continua em qualquer ponto do seu domínio. “Sem interrupções no tempo e no espaço”.

Diz então que a **função** f é **continua à direita em** a se o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Diz então que a **função** f é **continua à esquerda em** a se o $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Teoremas Fundamentais das funções contínuas

Se $[a, b] \subseteq D_f$, então diz-se que f é **continua no intervalo** $[a, b]$, se f é contínua em $]a, b[$, é contínua à direita em a e é contínua à esquerda em b .

Teorema de Bolzano (ou do Valor Médio):

Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, com $a < b$. Então, para qualquer k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

Intuitivamente: uma função contínua num intervalo não passa de um valor a sem assumir todos os valores intermediários.

Corolário 1: Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e não se anula em algum ponto de $[a, b]$, então em todos os pontos de $[a, b]$ a função f tem o mesmo sinal.

Corolário 2: Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$, então f tem pelo menos um zero em $]a, b[$.

Teorema de Weirstrass: Qualquer função contínua num intervalo $[a, b]$ (fechado e limitado) tem máximo e mínimo nesse intervalo.

Obs.: Em qualquer um destes resultados, as condições são apenas condições suficientes; não são condições necessárias.

ANEXO B - Aplicando a série de Taylor na função $f(x')$ em torno de x , onde $f(x)$ é contínua e diferenciável.

Em:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx',$$

Então temos que aplicarmos Série de Taylor em $f(x')$, assim por definição, se $f(x)$ é diferenciável em (a) , e admitindo que possui n derivadas no ponto (a) , então é válido a fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r_n(x)$$

Onde $r_n(x)$ é uma função tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_n}{(x-a)^n} = 0$$

E Se temos que:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx'$$

Aplicando a definição acima em $f(x')$, teremos:

$$f(x') = f(x) + f'(x)(x'-x) + f''(x) \frac{(x'-x)^2}{2!} + \dots$$

$$\text{Então foi chamado } r((x'-x)^2) = f''(x) \frac{(x'-x)^2}{2!} + \dots$$

Obtendo:

$$f(x') = f(x) + f'(x)(x'-x) + r((x'-x)^2).$$

Então:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} [f(x) + f'(x)(x'-x) + r((x'-x)^2)] W(x-x', h) dx'$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} [f(x)] W(x-x', h) dx' + \int_{\Omega} [f'(x)(x'-x)] W(x-x', h) dx' + \int_{\Omega} [r((x'-x)^2)] W(x-x', h) dx$$

Daí:

$$\int_{\Omega} [r((x'-x)^2)] W(x-x', h) dx' = r((x'-x)^2) = r(h^2);$$

$$\int_{\Omega} [f(x)] W(x-x', h) dx' = f(x);$$

E por $(x'-x)W(x-x',h)$, representar uma função ímpar, pois:

Uma função ímpar é :

$$\int_{\Omega} [r((x'-x)^2)] W(x-x',h) dx' = 0$$

Isso porque: Se f é uma função contínua e ímpar, em um Domínio $\Omega = [-a, a]$, então:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ pois:}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Teremos, ao fim:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} [f(x)] W(x-x',h) dx' + \int_{\Omega} [f'(x)(x'-x)] W(x-x',h) dx' + \int_{\Omega} [r((x'-x)^2)] W(x-x',h) dx'$$

$$\langle f(x) \rangle = [f(x)] + 0 + r(h^2)$$

$$\langle f(x) \rangle = f(x) + r(h^2)$$

ANEXO C - Aplicando a regra da derivada do produto de duas funções, pode-se obter o termo $f(x')W(x-x',h)$.

Por definição temos que a derivada da multiplicação de duas funções segue a seguinte regra:

$$(f \cdot g)W(x-x',h)$$

Se temos: $f(x')W(x-x',h)$, então lhe aplicando a regra da derivação acima, teremos:

$$[f(x')W(x-x',h)] = \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)];$$

$$\nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)] = \nabla \cdot f(x')W(x-x',h) + f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) = \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)]$$

Daí:

$$\nabla \cdot f(x')W(x-x',h) = \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)] - f(x') \cdot \nabla W(x-x',h)$$

Então:

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(x')] W(x-x',h) dx'$$

E aplicando a regra da derivada do produto de duas funções, pode-se obter o termo $\nabla \cdot f(x')W(x-x',h)$, conforme acima, se atingindo a seguinte forma:

$$\nabla \cdot f(x')W(x-x',h) = \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)] - f(x') \cdot \nabla W(x-x',h)$$

E da equação (3.11), é obtida a seguinte equação:

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(x')W(x-x',h)] dx' - \int_{\Omega} f(x') \cdot \nabla W(x-x',h) dx'$$

ANEXO D - Exemplos de Construção de Funções de Suavização

Assume-se que a função de suavização é um polinômio, e que a mesma depende apenas do raio suporte.

$$W(x - x', h) = W(R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 \dots + a_n R^n \quad (D.01)$$

Sabe-se também que por ser uma função de suavização (*Kernels*), respeitará as seguintes propriedades:

1. O *Kernel* deve ser **suficientemente suave**:

$$W \in C^k, k > 1 \quad (D.02)$$

2. O *Kernel* deve ser **normalizado**:

$$\int_{R^n} W(x_i - x_j, h) d^n x = 1 \quad (D.03)$$

3. O *Kernel* deve ter **suporte compacto**:

$$W(x_i - x_j, h) = 0, \text{ quando } |x_i - x_j| = \vec{x}_{ij} > kh \quad (D.04)$$

4. O *Kernel* deve ser **positivo**:

$$W(x_i - x_j, h) \geq 0 \quad (D.05)$$

5. O *Kernel* deve ser **decrecente**:

$$W(x_i - x_j, h) < W(x_i - x_k, h), \text{ se } |x_i - x_j| > |x_i - x_k| \quad (D.06)$$

6. O *Kernel* deve ser **simétrico**:

$$W(x_i - x_j, h) = W(x_j - x_i, h) = W\left(\vec{x}\right) \quad (D.07)$$

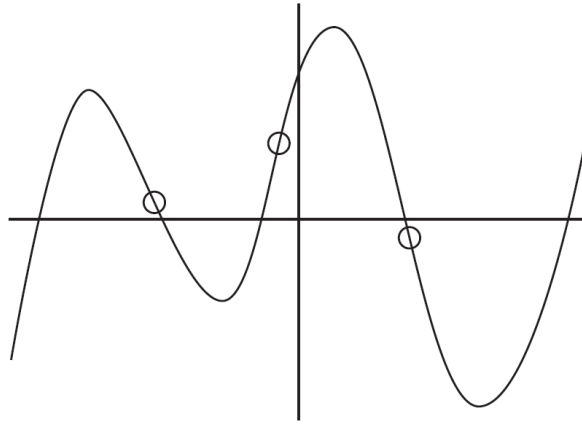
7. O *Kernel* deve satisfazer a **função delta de Dirac**

(D.08)

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x_i - x_j, h) = \delta(x_i - x_j)$$

Em determinadas circunstâncias, as funções de suavização não são funções polinomiais contínuas, e sim, por exemplo, *curvas splines* ou *funções splines*. Essas tem a função de substituírem determinadas funções, que no caso específico do Método Numérico *SPH*, as funções Gaussianas. As funções *splines*, que matematicamente podem ser definidas por dois ou mais pontos, esses chamados de nós, são bastante exploradas no artigo **Contributions to the problem of**

approximation of equidistant data by analytic functions, escrito pelo matemático romeno Isaac Jacob SCHOENBERG, no ano de 1946.



Exemplo de uma Função *spline*

Dentre as propriedades necessárias às funções *splines*, as quais são expostas em diversos trabalhos, como o citado acima (SCHOENBERG, 1946), que servirá de fonte de pesquisa para o leitor. Entretanto para o desenvolvimento desses exemplos de construção de uma função de suavização, devem aqui, neste trabalho, de forma compactada, serem consideradas, as seguintes sentenças:

- Uma função *spline*, tem a seguinte forma, com as “uniões” se seus nós:

$$W(R) = \begin{cases} W_1(R) & 0 \leq R < R_1 \\ W_2(R) & R_1 \leq R < R_2 \\ 0 & R_2 \leq R \end{cases} \quad (D.09)$$

- Ela própria e suas duas primeiras derivadas devem ser “contínuas” em seus nós, em seus “pontos de ligação”.

$$\begin{aligned} W_1(R_1) &= W_2(R_1) \\ W_1'(R_1) &= W_2'(R_1) \\ W_1''(R_1) &= W_2''(R_1) \end{aligned} \quad (D.10)$$

Então consideram esses dois requisitos acima, bem como a propriedade do raio suporte compacto, uma possível formatação de uma função de suavização, será:

$$W(R) = \begin{cases} b_1(R_1 - R)^n + b_2(R_2 - R)^n & 0 \leq R < R_1 \\ b_2(R_2 - R)^n & R_1 \leq R < R_2 \\ 0 & R_2 \leq R \end{cases} \quad (D.11)$$

Para a construção de curvas (funções) *splines* com um maior número de nós, consequentemente, maiores “pedaços”, é só seguir as mesmas colocações e os mesmos critérios.

Exemplo 1 - Função de Suavização Quadrática *Dome-shaped*

Tomando-se como base a seguinte sentença, da Equação (D.01):

$$W(x - x', h) = W(R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + \dots + a_n R^n \quad (D.01)$$

Então uma expressão de uma função de suavização, sendo-a um polinômio de ordem 2, com raio suporte R , e fator escalar igual a $k=1$, pode ser assim escrita:

$$W(x_i - x_j, h) = W(R, h) = W(R) = \left(a_0 + a_2 R^2 \right) = \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right) \quad (D.12)$$

Na primeira dimensão, usando a ideia da propriedade de unicidade, de normalização, a equação (D.03) será assim integrada:

$$\int_{R^n} W(x_i - x_j, h) d^n x = 1, \quad (D.13)$$

Então, pode-se ter a equação (D.12) com a seguinte formatação:

$$\int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right) dr = 2h \left(a_0 + \frac{a_2}{3} \right) = 1 \quad (D.14)$$

E pelas propriedades do raio suporte e positividade da função de suavização, sabe-se que se $(x_i - x_j) \geq R$, então $W = 0$, vistas em (D.04) e (D.05), e daqui usaremos, se $(x_i - x_j) = R$, então teremos $W = 0$

Assim se entende que a relação entre a distância da partícula referência i e a j , seja igual ao raio suporte, então teremos que: $(x_i - x_j) = r = h$, portanto, $R = \frac{r}{h} = \frac{r}{r} = 1$.

E se $R=1$, então temos $W = 0$. Então:

$$W(R) = \left(a_0 + a_2 R^2 \right) = \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right) = \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{r} \right)^2 \right) = \left(a_0 + a_2 (1)^2 \right) \quad (D.15)$$

Trivialmente, chega-se a: $R=1$. Por fim: $W(1) = \left(a_0 + a_2 R^2 \right) = \left(a_0 + a_2 (1)^2 \right) = \left(a_0 + a_2 \right) = 0$,
Então:

$$(a_0 + a_2) = 0 \quad (D.16)$$

Assim temos as duas igualdades, (D.14) e (D.16):

$$2h\left(a_0 + \frac{a_2}{3}\right) = 1 \quad (D.14)$$

$$(a_0 + a_2) = 0 \rightarrow a_0 = -a_2 \quad (D.16)$$

E ao desenvolver as sentenças, chegará aos seguintes resultados:

$$a_0 = \frac{3}{4h} \text{ e } a_2 = -\frac{3}{4h} \quad (D.17)$$

Então de (D.12), temos:

$$W(R, h) = (a_0 + a_2 R^2) = (a_0 - a_0 R^2) = a_0 (1 - R^2) \quad (D.18)$$

Portanto, a função de suavização na dimensão 1, com seu respectivo coeficiente α_1 , será:

$$W(R, h) = \alpha_1 (1 - R^2), \text{ com } \alpha_1 = \frac{3}{4\pi} \quad (D.19)$$

Analogamente, serão encontrados os coeficientes para os espaços bi e tri dimensionais, tendo como pontos distintos, da obtenção do coeficiente no espaço unidimensional, a integração sob a condição de unicidade. As quais as condições de integração nos espaços bidimensional e tridimensional são distintos, observa-se:

Condição bidimensional:

$$\int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right) (2\pi r) dr = 2\pi h^2 \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{4} \right) = 1 \quad (D.20)$$

Obtendo o seu respectivo coeficiente $\alpha_2 = \frac{2}{\pi h^2}$.

Já sob a condição do espaço tridimensional:

$$\int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right) (4\pi r^2) dr = 4\pi h^3 \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} \right) = 1 \quad (D.21)$$

Obtendo o seu respectivo coeficiente $\alpha_3 = \frac{15}{8\pi h^2}$.

Exemplo 2 - Função de Suavização *Quartic*

Essa função de suavização foi utilizada por Leon Lucy em 1977, em seu artigo pioneiro para o *SPH*, o “**A numerical approach to testing the fission hypothesis**”. Essa função pode ser reconstruída da seguinte forma: Inicialmente observa-se que a função de suavização é de ordem 4, então tem-se que apresentar

a função polinomial geral com essa grau, além de ter um fator $k=1$, que é uma discursão distinta da prevista neste apêndice. Assim:

$$W(R, h) = (a_0 + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4) = \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{h} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{h} \right)^4 \right) \quad (D.22)$$

Então, termos, pela ordem igual a 4, o mesmo numero de coeficientes a serem calculados, então temos que entramos os valores de (a_0, a_2, a_3, a_4) , sendo necessário então, no mínimo quatro equações “linearmente independentes”. Então, conforme exemplo 1, sabe-se que será possível desenvolver uma equação quando aplicada a propriedade de normalização, condição de unidade. Então há a necessidade de mais três, dessas uma será a condição de positividade e do raio compacto. As duas outras serão as primeiras e segunda derivadas, então, se $R=1$, ter-se á:

Se $W(R) = (a_0 + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4)$, sendo um raio suporte compacto, então se $R=1$, tem-se $W(1) = 0$, assim:

$$R=1 \text{ e } W(1) = 0$$

$$\begin{aligned} W(1) &= (a_0 + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4) = 0 \\ (a_0 + a_2 (1)^2 + a_3 (1)^3 + a_4 (1)^4) &= 0 \\ (a_0 + a_2 + a_3 + a_4) &= 0 \end{aligned} \quad (D.23)$$

Agora derivando $W(R) = (a_0 + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4)$, será encontrado:

$$\begin{aligned} W(R) &= (a_0 + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4) \\ W'(R) &= (2a_2 R + 3a_3 R^2 + 4a_4 R^3) \\ W''(R) &= (2a_2 + 6a_3 R + 12a_4 R^2) \end{aligned}$$

Agora aplicando a mesma propriedade de raio suporte compacto, então se $R=1$, tem-se $W'(1) = 0$ e $W''(1) = 0$, assim:

$$\begin{aligned} W'(R) &= (2a_2 R + 3a_3 R^2 + 4a_4 R^3) \\ W'(1) &= (2a_2 (1) + 3a_3 (1)^2 + 4a_4 (1)^3) = 0 \\ (2a_2 + 3a_3 + 4a_4) &= 0 \end{aligned} \quad (D.24)$$

E :

$$\begin{aligned} W''(R) &= (2a_2 + 6a_3 R + 12a_4 R^2) \\ W''(1) &= (2a_2 + 6a_3 (1) + 12a_4 (1)^2) = 0 \end{aligned}$$

$$(2a_2 + 6a_3 + 12a_4) = 0 \quad (D.25)$$

Na primeira dimensão, usando a ideia da propriedade de unicidade, de normalização, a equação (D.03) será assim integrada:

$$\int_{R^n} W(x_i - x_j, h) d^n x = 1, \quad (D.03)$$

Então, pode-se ter a equação (D.12) com a seguinte formatação:

$$2 \int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{h} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{h} \right)^4 \right) dr = 2h \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} \right) = 1$$

$$2h \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} \right) = 1 \quad (D.26)$$

Então se chega a um sistema linear com 4 incógnitas e 4 equações, (D.23), (D.24), (D.25) e (D.26):

$$\begin{cases} (a_0 + a_2 + a_3 + a_4) = 0 \\ (2a_2 + 3a_3 + 4a_4) = 0 \\ (2a_2 + 6a_3 + 12a_4) = 0 \\ 2h \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} \right) = 1 \end{cases} \quad (D.27)$$

Ao resolver o sistema, os coeficientes estarão em função de a_0 e h , sendo então simplificados, e chegando a seguinte função de suavização:

$$\begin{cases} a_2 = -6a_0 \\ a_3 = +8a_0 \\ a_4 = -3a_0 \end{cases} \quad (D.28)$$

Com $a_0 = \frac{5}{4h}$.

Assim a função de suavização será escrita:

$$W(R) = a_0 (1 - 6R^2 + 8R^3 - 3R^4) \quad (D.29)$$

Com coeficiente unidimensional igual a $\alpha_1 = \frac{5}{4h}$

Analogamente, serão encontrados os coeficientes para os espaços bi e tri dimensionais, tendo como pontos distintos, da obtenção do coeficiente no espaço unidimensional, a integração sob a condição de unicidade. Mudando apenas as últimas igualdades de (D.27), As quais será obtidas por condições distintas, as quais as integrações nos espaços bidimensional e tridimensional são distintos, observa-se:

Condição bidimensional:

$$2 \int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{h} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{h} \right)^4 \right) (2\pi r) dr =$$

$$2\pi h^2 \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_4}{6} \right) = 1 \quad (D.30)$$

E resolvendo:

$$\begin{cases} (a_0 + a_2 + a_3 + a_4) = 0 \\ (2a_2 + 3a_3 + 4a_4) = 0 \\ (2a_2 + 6a_3 + 12a_4) = 0 \\ 2\pi h^2 \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_4}{6} \right) = 1 \end{cases} \quad (D.31)$$

Obterá o seu respectivo coeficiente, na segunda dimensão, igual a: $\alpha_2 = \frac{5}{\pi h^2}$.

Já sob a condição do espaço tridimensional:

$$2 \int_0^h \left(a_0 + a_2 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{h} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{h} \right)^4 \right) (4\pi r^2) dr =$$

$$4\pi h^3 \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_4}{7} \right) = 1 \quad (D.32)$$

E resolvendo:

$$\begin{cases} (a_0 + a_2 + a_3 + a_4) = 0 \\ (2a_2 + 3a_3 + 4a_4) = 0 \\ (2a_2 + 6a_3 + 12a_4) = 0 \\ 4\pi h^3 \left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_4}{7} \right) = 1 \end{cases} \quad (D.33)$$

Obterá o seu respectivo coeficiente, na terceira dimensão, igual a: $\alpha_3 = \frac{105}{16\pi h^3}$.

Exemplo 3 - Função de Suavização *Cubic Spline* ou o *Kernel Cubic Spline*

Essa função de Suavização ***Cubic Spline*** é uma das funções que podem ser utilizadas no programa proposto nesta dissertação, e foi utilizada em trabalhos como os de Monaghan e Lattanzio, em 1985, no tradicional artigo “**A refined particle method for astrophysical problems. Astronomy and Astrophysics**”. Essa função de suavização também é chamada de *B-Spline* (HONGBIN e XIN, 2005), pois se é a contração do termo em inglês *Basic Spline*. Essa função *spline* foi desenvolvida por

Jacob SCHOENBERG, no ano de 1946. Aqui a haverá a “reconstrução” da citada, respeitando as propriedades citadas das Funções de Suavização, todavia com menos primor que os desenvolvidos por SCHOENBERG.

Então sendo uma função ou uma curva do tipo *Spline*, ela terá sua formatação de acordo com (D.11):

$$W(R) = \begin{cases} b_1(R_1 - R)^n + b_2(R_2 - R)^n & 0 \leq R < R_1 \\ b_2(R_2 - R)^n & R_1 \leq R < R_2 \\ 0 & R_2 \leq R \end{cases}$$

Assim como respeitará as propriedades determinadas às Funções de Suavização, em destaque a condição de suavização, e o que se prever em (D.10), isto é:

$$\begin{aligned} W_1(R_1) &= W_2(R_1) \\ W_1'(R_1) &= W_2'(R_1) \\ W_1''(R_1) &= W_2''(R_1) \end{aligned} \quad (D.10)$$

Daí se tem como exemplo de construção de um função *spline* de suavização, a *cubic spline*, tendo-a ordem 3, com o ponto de união entre as duas funções, no ponto $R=1$ e com $K=2$, e seguindo a formatação da equação (D.10), para a citada ordem, tem-se:

$$W(R, h) = \begin{cases} b_1\left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 + b_2\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & 0 \leq r < h \\ b_2\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & h \leq r < 2h \\ 0 & r \geq 2h \end{cases} \quad (D.34)$$

Então pela teoria descrita em (D.10), pode-se então realizar, inicialmente, a derivação da funções que compõem a função de suavização *spline*, e como essa função é uma “modelagem” de uma função gaussiana, sabe-se que a segunda derivada passa pela origem, isto é $W'(0)=0$, e que $W_1'(0)=W_2'(0)$, então aliada a essas informações, calcula-se:

$$W_1\left(\frac{r}{h}\right) = b_1\left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 \quad (D.35)$$

$$W_2\left(\frac{r}{h}\right) = b_2\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 \quad (D.36)$$

E Então, se $r=0$, temos que $W_1'(0)=W_2'(0)$, deriva-se W_1 e W_2 , e aplica-se a sentença acima, então terá:

$$W_1'\left(\frac{r}{h}\right)=b_1\left(\frac{-3}{h}+\frac{3r^2}{h^2}-\frac{r^3}{h^3}\right) \quad (D.37)$$

$$W_2'\left(\frac{r}{h}\right)=b_2\left(\frac{-12}{h}+\frac{12r^2}{h^2}-\frac{3r^3}{h^3}\right) \quad (D.38)$$

Para $r=0$,

$$W_1'(0)=b_1\left(\frac{-3}{h}+\frac{0}{h^2}-\frac{0}{h^3}\right)=b_1\left(\frac{-3}{h}\right) \quad (D.39)$$

$$W_2'(0)=b_2\left(\frac{-12}{h}+\frac{0}{h^2}-\frac{0}{h^3}\right)=b_2\left(\frac{-12}{h}\right) \quad (D.40)$$

E se se sabe que $W_1'(0)=W_2'(0)$, então:

$$b_1\left(\frac{-3}{h}\right)=b_2\left(\frac{-12}{h}\right) \quad (D.41)$$

Dáí:

$$b_1+4b_2=0 \quad (D.42)$$

E seguindo a já aplicada propriedade de unicidade, prevista em (D.12) e (D.12), então:

$$2\left(\int_0^h\left(b_1\left(1-\frac{r}{h}\right)^3+b_2\left(2-\frac{r}{h}\right)^3\right)dr+\int_h^{2h}\left(b_2\left(2-\frac{r}{h}\right)^3\right)dr\right)=1 \quad (D.43)$$

Desmembrando para agilizar o cálculo, se terá:

$$\int_0^h b_1\left(1-\frac{r}{h}\right)^3 dr = b_1\left(r-\frac{3r^2}{2h}+\frac{r^3}{h^2}-\frac{r^4}{4h^3}\right)\Bigg|_0^h = b_1\left(h-\frac{3h}{2}+h-\frac{h}{4}\right)=b_1\left(\frac{h}{4}\right) \quad (D.44)$$

$$\int_0^h b_1\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 dr = b_2\left(8r-\frac{12r^2}{2h}+\frac{2r^3}{h^2}-\frac{r^4}{4h^3}\right)\Bigg|_0^h = \quad (D.45)$$

$$b_2\left(8h-6h+2h-\frac{h}{4}\right)=b_2\left(-\frac{h}{4}\right)$$

$$\int_h^{2h} b_2\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 dr = b_2\left(8r-\frac{12r^2}{2h}+\frac{2r^3}{h^2}-\frac{r^4}{4h^3}\right)\Bigg|_h^{2h} = b_2\left(4h+\frac{h}{4}\right) \quad (D.46)$$

Então reagrupando:

$$2\left(b_1\left(\frac{h}{4}\right)+b_2\left(-\frac{h}{4}\right)+b_2\left(4h+\frac{h}{4}\right)\right)=1 \quad (\text{D.47})$$

$$2h\left(\frac{b_1}{4}+4b_2\right)=1 \quad (\text{D.48})$$

Então das Equações (D.42) e (D.48), chega-se aos seguintes valores para os coeficiente procurados, b_1 e b_2 :

$$\begin{cases} b_1 + 4b_2 = 0 \\ 2h\left(\frac{b_1}{4} + 4b_2\right) = 1 \end{cases} \quad (\text{D.49})$$

$$b_1 = -\frac{2}{3h} \text{ e } b_2 = \frac{1}{6h} \quad (\text{D.50})$$

Ao fim chega-se a seguinte função de suavização, essa a *Cubic Spline*, então:

$$W(R, h) = \begin{cases} b_1\left(1-\frac{r}{h}\right)^3 + b_2\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 & 0 \leq r < h \\ b_2\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 & h \leq r < 2h \\ 0 & r \geq 2h \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

$$W(R, h) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\left(1-\frac{r}{h}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 & 0 \leq r < h \\ \frac{1}{6}\left(2-\frac{r}{h}\right)^3 & h \leq r < 2h \\ 0 & r \geq 2h \end{cases} \quad (\text{D.51})$$

Que após se substituir, $R = \frac{r}{h}$, e realizar os desenvolvimentos da potencias , terá a

seguinte forma, que comumente é apresentada:

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (\text{D.52})$$